平成 30 年度　情報工学科卒業研究概要

平面的グラフに対する直径を計算する分散アルゴリズム

ネットワーク系　泉研究室
No. 26115142　水谷 龍誠

1　はじめに

ある n 頂点のグラフ $G=(V,E)$ が与えられたとき,頂点の部分集合 $S \subset V$ が, それを取り除くとグラフが非連結な二つ以上の部分グラフに分けられるとき, その頂点集合 S は G の分離集合と呼ぶ. 特に,S を取り除いた後におけるグラフの各連結成分がいずれも高々 αn 個の頂点しか含まないとき S をグラフ G の α-平衡分離集合と呼ぶ. 一般のグラフに対して, 最小サイズの α-平衡分離集合を求める問題は NP 困難であることが知られているが [1]，いくつかの近似アルゴリズムの存在が知られている. 本研究では, 特に分散システム上の平衡分離集合発見問題を考える. すなわち，ネットワークのトポロジを問題の入力とみなし, その上での小さい平衡分離集合を発見するアルゴリズムを考える. 分散システムのモデルとして,*CONGEST* モデルを考える. 本研究での提案アルゴリズムの基本アイデアは,Brandt と Wattenhofer らによる, 一般のグラフに対する平衡分離集合計算のための近似アルゴリズム [2] を分散システム上に実現することである.

2　諸定義

ここで考える分散システム (*CONGEST* モデル) は,単純無向連結グラフ $G=(V,E)$ により表現される. ここで V はノードの集合であり,E は通信リンクの集合である．また,$|V|=n$ とする．*CONGEST* モデルでは計算機はラウンドに従って同期して動作するものとする．1 ラウンド内で, 隣接頂点へのメッセージ送信,隣接頂点からのメッセージ受信, 内部計算 (多項式時間) をおこなう．各辺は単位ラウンドあたり $O(\log n)$ ビットを双方向に伝送可能であり, 各ノードは異なる接続辺に異なる内容のメッセージを同一ラウンドに送信可能である．各ノードはまた,$O(\log n)$ ビットの自然数値よる ID が付与されており, 自身の隣接頂点全ての ID を既知であるとする. 各ノードはグラフのトポロジに関する事前知識を持たないものとする. なお,G の直径を D で表すこととする.

本研究で検討される分散アルゴリズムの動作は，同時部分収集問題 (Subgraph Aggregation: SA) と呼ばれる抽象化された集合通信操作をプリミティブとして設計されている．同時部分収集問題は Ghaffari と Haeupler らによる低競合ショートカット [3] の枠組みにおいて初めて提案されている. 本稿を通じて，分散アルゴリズムの実行時間評価を，そのアルゴリズムが駆動する SA の回数 (SA ラウンド) により評価することとする．SA の 1 回の実行に必要な (通常の意味での) ラウンド数は一般のグラフに関しては $O(\sqrt{n}+D)$ ラウンドであり，この実行時間はタイトである.

3　提案アルゴリズム

$\frac{2}{3} \le \alpha < 1$ の時,s と t を分割するサイズ K の α-平衡分離集合の存在を考える. アルゴリズムは,s と t を一様ランダムに選択して s-t 点素パスの最大本数の集合を計算することから始める.s-t 点素パスの計算は,既存研究で示されているアルゴリズム [4] を利用して $\tilde{O}(k^{O(1)})$SA ラウンドで計算できる. 二分探索法を用いて,s-t 点カットの中で最良の平衡分離集合の候補である 2 つのカットを決定する. このカットの計算は, 点素パス集合の中で最大の長さを ℓ とすると,$\tilde{O}(k\ell)$SA ラウンドで計算できる. これら 2 つのカットのうちの 1 つが元のグラフに対しても十分に平衡であれば, 目的の小さい平衡分離集合が発見できたことになる. そうでないとき, 連結成分が 2 つの s-t 点カットで分断されているされていると見なす. そして,s を含む連結成分を新たな頂点 s' に,t を含む成分を新たな頂点 t' に縮約する. 新しく得られたグラフのすべての s'-t' 点カットも G の s-t カットであり, さらに上記の 2 つの s-t カットよりも平衡であることが示されている. そのため, 本数 K の s-t 点素パスを得るまで,s-t 点カットをいくつか発見して頂点集合を縮約する上記のプロセスを繰り返す. 上述した反復プロセス終了時, 少なくとも α-平衡分離集合と同等であるカットを生じない場合,α-平衡分離集合の少なくとも 1 つの頂点が実行された縮約のうちの 1 つに関与しているとみなす. したがって,プロセス全体を反復することによって,α-平衡分離集合を探索する. 全体の反復は, 近似率 $(0<\varepsilon<1-\alpha)$ とすると高確率で $O(\varepsilon^{-1}K\log^{1+o(1)} n)$ 終了する.

4　まとめ

サイズ $O(\varepsilon^{-1}K^2\log^{1+o(1)} n)$ の $(\alpha+\varepsilon)$-平衡分離集合を高確率で $\tilde{O}(\varepsilon^{-1}K^3(K^{O(1)}+\ell))$SA ラウンドで求めることができた.

参考文献

[1] Thang Nguyen Bui and Curt Jones. Finding good approximate vertex and edge partitions is np-hard. *Information Processing Letters*, Vol. 42, No. 3, pp. 153–159, 1992.

[2] Sebastian Brandt and Roger Wattenhofer. Approximating small balanced vertex separators in almost linear time. In *Workshop on Algorithms and Data Structures*, pp. 229–240. Springer, 2017.

[3] Mohsen Ghaffari and Bernhard Haeupler. Distributed algorithms for planar networks ii: Low-congestion shortcuts, mst, and min-cut. In *Proceedings of the twenty-seventh annual ACM-SIAM symposium on Discrete algorithms*, pp. 202–219. SIAM, 2016.

[4] Jason Li. Distributed treewidth computation. *arXiv preprint arXiv:1805.10708*, 2018.