

諸定義

定義 1. f_1, \dots, f_k を s-t 点素パスの集合とする。 $U = (u_1, \dots, u_k)$ および $W = (w_1, \dots, w_k)$ を (f_1, \dots, f_k) に関するスライスとし、すべての $1 \leq i \leq k$ について、 u_i は f_i における w_i の前者または $u_i = w_i$ とする。この時 U は W より S に近いと言い、 $U \preceq W$ と書く。もし $1 \leq i \leq k$ に対して、さらに $u_i \neq w_i$ ならば、 U は W より厳密に s に近いと言い、 $U \prec W$ と書く。同様に、 W は U より厳密に t に近いと言う。便宜上、タプル (s, s, \dots, s) と (t, t, \dots, t) についても同様に上記を定義。したがって、例えば、 (s, s, \dots, s) はどのスライスよりも s に近いと言える。” \preceq ” は一般的な順序の合計を定義するものではない。

定義 2. U を任意のカットとする。 s を含む $G[V \setminus U]$ の連結成分の頂点セットとして $V_s(U)$ を定義し、 t を含む $G[V \setminus U]$ の連結成分の頂点セットとして $V_t(U)$ を定義し、 V_r を $G[V \setminus U]$ の残りの連結成分の頂点集合の和集合として定義する。すなわち、 s も t も含まないものである（したがって、 $V_r(U)$ は空であり得る）。

定義 3. (f_1, \dots, f_k) に関して U をスライスとする。 $U \preceq X$ であり、かつ $U \preceq X' \prec X$ を満たすカット X' が存在しないようなカットを X とする。この時 $U^+ := X$ を定義する。

上記のような X が存在しない場合は、 $U^+ := (t, t, \dots, t)$ とする。

同様に、 $Y \preceq U$ かつ $U \preceq Y' \prec Y$ を満たすカット Y' が存在しないようなカットを Y とする。この時、 $U^- := Y$ を定義する。

上記のような Y が存在しない場合は $U^- := (s, s, \dots, s)$ とする

アルゴリズム 1

Algorithm 1 U^+ の計算

初期設定:

点素 s-t パス f_1, \dots, f_k

スライス $U = (u_1, \dots, u_k)$

集合 $X = \{\}, x \in X$

$w_i := u_i$

▷

```
1: for  $i = 1$  to  $k$  do
2:    $w_i$  の前にあるノードをすべて  $X$  に入れる    ▷  $X$  は  $V_s(U^+)$  の候補
3: end for
4:  $Y := V \setminus (X \cup U), y \in Y$ 
5: while  $\{x, y\} \in E$  がなくなるまで do
6:   if  $y = t$  then
7:     return  $(t, t, \dots, t)$ 
8:   else if  $y$  が  $f_i$  に属している then
9:      $X$  に  $f_i$  上で  $y$  より前にある頂点を加える
10:     $Y$  から  $X$  に加えた頂点を削除
11:     $w_i = y$ 
12:   else
13:     頂点  $y$  を  $X$  にを入れて  $Y$  から削除する
14:   end if
15: end while
16: return  $(w_1, \dots, w_k)$ 
```

U^+ と U^- の計算時間は $O(m)$

分散案 1

1. 各 u_i は $w_i := u_i$ としてパスに沿って s 方向に送信
2. ノード s から w_i のインデックスをブロードキャスト
3. 受信するノードが s-t パス上にある時、そのノードは w_i の値を更新してパスに沿って s 方向にのみ送信
4. 受信した w_i の値がパス上の自身のインデックスと等しいとき、 w_i をグラフ全体にブロードキャスト (u_i の時は除外)
5. t が値を受信したとき、 $w_i := t$ としてグラフ全体にブロードキャスト

$O(kn)$ ラウンドで実行可能 (?)