Теормин по Математическому анализу №1
И пусть удача всегда будет с вами

1. Аксиома непрерывности (полноты) множества R**.** Пусть $X, Y \subset \mathbb{R}$, причем $X \neq \varnothing, Y \neq \varnothing$. Тогда $(\forall x \in X\ \forall y \in Y\ x \leq y) \Rightarrow (\exists c \in \mathbb{R} :\ x \leq c \leq y\ \forall x \in X, \forall y \in Y)$.

2. Индуктивное множество. Множество $X \subset \mathbb{R}$ называется индуктивным, если $\forall x \in X\ (x+1) \in X$.

3. Множество натуральных чисел. Множеством натуральных чисел называется пересечение всех индуктивных множеств, содержащих число 1. Обозначается множество натуральных чисел как N.

4. Расширенное множество R**.** Множество $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ называется расширенным множеством вещественных чисел, а символы $-\infty, +\infty$ – минус и плюс бесконечностями, соответственно, причем для вновь введенных символов постулируются следующие возможные операции:
$x + (\pm\infty) = (\pm\infty) + x = \pm\infty,\ x \in \mathbb{R},$
$x * ((\pm\infty) = (\pm\infty) * x = \begin{cases} \pm\infty,\ x > 0 \\ \pm\infty,\ x < 0 \end{cases},$
$\frac{x}{\pm\infty} = 0,\ x \in \mathbb{R},$
$(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty,$
$(+\infty) * (+\infty) = (-\infty) * (-\infty) = +\infty,$
$(+\infty) * (-\infty) = (-\infty) * (+\infty) = -\infty,$
$-\infty < x < +\infty,\ x \in \mathbb{R}.$

5. Окрестность и проколотая окрестность точки. Окрестностью точки $x_0 \in R$ называется произвольный интервал, содержащий x_0. Проколотой окрестностью точки $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется множество $U(x_0) \backslash \{x_0\}$, то есть произвольная окрестность точки x_0 без самой этой точки.

6. Окрестности элементов $+\infty$ **и** $-\infty$**.** Окрестностью элемента $+\infty$ в $\overline{R}$ называется множество вида $(a, +\infty], a \in \mathbb{R}$. Окрестностью элемента $-\infty$ в $\overline{R}$ называется множество вида $[-\infty, a), a \in \mathbb{R}$.

7. Ограниченность множества сверху, верхняя граница. Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным сверху, если $\exists M \in \mathbb{R} :\ \forall x \in X\ x \leq M$. Найденное число M называется верхней границей для X.

8. Ограниченность множества снизу, нижняя граница. Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным снизу, если $\exists m \in \mathbb{R} :\ \forall x \in X\ x \geq m$. Найденное число m называется нижней границей для X.

9. Ограниченное множество. Множество $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется ограниченным, если оно ограничено как сверху, так и снизу, то есть $\exists M, m \in \mathbb{R} : \in X\ m \le x \le M$.

10. Максимальный и минимальный элемент множества. Элемент $M \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется максимальным (наибольшим) элементом множества X, если $\forall x \in X\ x \le M$. Обозначают это так: $M = maxX$. Элемент $m \in X \subset \overline{\mathbb{R}}$ называется минимальным (наименьшим) элементом множества X, если $\forall x \in X\ x \ge m$. Обозначают это так: $m = minX$.

11. Точная верхняя грань. Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено сверху и не пусто. Наименьший элемент множества верхних границ называется супремумом (точной верхней гранью) множества X и обозначается $supX$.

12. Точная нижняя грань. Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$ ограничено сверху и не пусто. Наибольший элемент множества нижних границ называется инфимумом (или точной нижней гранью) множества X и обозначается $infX$.

13. Целая и дробная части числа. Для любого числа $x \in \mathbb{R}$ существует единственное $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $k \le x < k+1$, число k называется целой частью числа x и обозначается $[x]$. Величина $\{x\} = x - [x]$ называется дробной частью числа x.

14. Последовательность. Последовательность – это функция, областью определения которой является множество натуральных чисел.

15. Предел последовательности на языке неравенств. Число A называется пределом последовательности x_n, если для любого положительного числа ε существует натуральное число n_0, зависящее от ε такое, что какое бы ни взять натуральное число n, большее n_0, будет выполняться неравенство $|x_n - A| < \varepsilon$.

16. Сходящаяся последовательность. Если последовательность x_n имеет предел $A \in R$ (число!), то говорят, что она сходится.

17. Бесконечные пределы последовательностей. Элемент $+\infty$ называется пределом последовательности x_n, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ x_n > \frac{1}{\varepsilon}$. Элемент $-\infty$ называется пределом последовательности x_n, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} :\ \forall n > n_0\ x_n < -\frac{1}{\varepsilon}$. Обозначают это так: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \pm\infty,\ x_n \underset{n\to\infty}{\to} \pm\infty,\ x_n \to \pm\infty$.

18. Возрастающая и строго возрастающая последовательности.
Говорят, что последовательность x_n возрастает, если $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} :\ n_1 > n_2\ x_{n1} \ge x_{n2}$.
Говорят, что последовательность x_n строго возрастает, если $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} :\ n_1 > n_2\ x_{n1} > x_{n2}$.

19. Убывающая и строго убывающая последовательности.
Говорят, что последовательность x_n убывает, если $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N} :\ n_1 > n_2\ x_{n1} \le x_{n2}$.

Говорят, что последовательность x_n строго убывает, если $\forall n_1, n_2 \in \mathbb{N}:\ n_1 > n_2\ x_{n1} < x_{n2}$.

20. Подпоследовательность. Пусть дана последовательность x_n и возрастающая последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < ... < n_k < ...$ натуральных чисел. Последовательность $y_k = x_{n_k}$ называется подпоследовательностью последовательности x_n.

21. Частичные пределы последовательности. Пределы (имеющих предел) подпоследовательностей последовательности x_n называются частичными пределами этой последовательности.

22. Верхний и нижний пределы последовательности. Пусть E — (непустое) множество частичных пределов последовательности x_n. Верхним пределом последовательности x_n называется $\sup E$ и обозначается $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\limsup\limits_n x_n$. Нижним пределом последовательности x_n называется $\inf E$ и обозначается $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$ или $\liminf\limits_n x_n$.

23. Фундаментальная последовательность. Последовательность x_n называется фундаментальной, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}:\ \forall n > n_0\ \forall p \in \mathbb{N} |x_{n+p} - x_n| < \varepsilon$.

24. Предельная точка множества. Точка $x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ называется предельной для множества $E \subset \overline{\mathbb{R}}$, если в любой окрестности x_0 содержится бесконечное число элементов множества E, то есть $\forall U(x_0)\ U(x_0) \cup E$ бесконечно.

25. Предел функции по Коши на языке неравенств. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ – предельная точка для E. Число $A \in R$ называется пределом функции f в точке x_0, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in E:\ 0 < |x - x_0| < \delta\ |f(x) - A| < \varepsilon$. Обозначают это так: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A,\ f(x) \underset{x\to x_0}{\to} A$.

26. Бесконечные пределы функции в конечной точке (на языке неравенств). Пусть $f:\ E \to \mathbb{R},\ x_0$ – предельная для E. Элемент $-\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : 0 < |x - x_0| < \delta\ \ f(x) < -\frac{1}{\varepsilon}$. Элемент $+\infty$ называется пределом функции f в точке $x_0 = -\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in E : x < -\frac{1}{\varepsilon}\ \ f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$.

27. Конечные пределы функции в бесконечных элементах (на языке неравенств). Число A называется пределом функции f в точке $x_0 = +\infty$, если $\forall \varepsilon > 0\ \ \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0:\ \forall x \in E : x > \frac{1}{\delta}\ \ |f(x) - A| < \varepsilon$.

28. Определение предела по Гейне. Пусть $f:\ E \to \mathbb{R}, x_0 \in \overline{\mathbb{R}}$ — предельная точка для E. Элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ называется пределом функции f в точке x_0, если для любой последовательности x_n такой, что: 1. $x_n \in E$. 2. $x_n \neq x_0$. 3. $\lim\limits_{x\to\infty} x_n = x_0$ выполняется равенство $\lim\limits_{x\to\infty} f(x_n) = A$.

29. Возрастающая и строго возрастающая функция. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$. Говорят, что функция f возрастает на E, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \leq f(x_2)$. Говорят, что функция f строго возрастает на E, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) < f(x_2)$.

30. Убывающая и строго убывающая функция. Говорят, что что функция f убывает на E, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) \geq f(x_2)$. Говорят, что функция f строго убывает на E, если $\forall x_1, x_2 \in E : x_1 < x_2 \quad f(x_1) > f(x_2)$.

31. Правосторонний и левосторонний пределы функции в конечной точке. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ - предельная точка для множества $U_+(x_0) = \{x \in E : x > x_0\}$. Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 справа, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x - x_0 < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Обозначается это так: $\lim_{x \to x_0+0} f(x) = A$.
Пусть $f : E \to \mathbb{R}, x_0 \in \mathbb{R}$ - предельная точка для множества $U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}$. Говорят, что элемент $A \in \overline{\mathbb{R}}$ является пределом функции f в точке x_0 слева, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x \in E : 0 < x_0 - x < \delta \quad f(x) \in U_\varepsilon(A)$. Обозначается это так: $\lim_{x \to x_0-0} f(x) = A$.

32. Бесконечно малая и бесконечно большая функции. Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \to x_0$, если $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$. Функция $\beta(x)$ называется бесконечно большой при $x \to x_0$, если $\lim_{x \to x_0} |\beta(x)| = +\infty$

33. О-большое от функции. Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}, x_0$ - предельная для E, и существует окрестность $\overset{\delta}{U}(x_0)$ такая, что $f(x) = \alpha(x) g(x)$ при $x \in \overset{o}{U}(x_0) \cap E$. 1. Если $\alpha(x)$ ограничена на множестве $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «O большое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ ограничена по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут $f(x) = O(g(x)), \quad x \to x_0$.

34. о-малое от функции. Если $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 0$, то говорят, что функция $f(x)$ есть «о малое» от функции $g(x)$ при $x \to x_0$ (или что функция $f(x)$ бесконечно малая по сравнению с функцией $g(x)$ при $x \to x_0$) и пишут $f(x) = o(g(x)), \quad x \to x_0$.

35. Эквивалентная функция. 3. Если $\lim_{x \to x_0} \alpha(x) = 1$, то говорят, что функция $f(x)$ эквивалентна функции $g(x)$ при $x \to x_0$.

1. Принцип математической индукции. Если множество $X \subset \mathbb{N}$ таково, что $1 \in X$ и $x \in X \ (x+1) \in X$, то $X = \mathbb{N}$.

2. Принцип точной грани. Пусть $X \subset \overline{\mathbb{R}}$, не пусто и ограничено сверху (снизу). Тогда существует единственный $supX (infX)$.

3. Принцип Архимеда. Пусть $x \in \mathbb{R}, x > 0$. Для любого $y \in \mathbb{R}$ существует единственное целое $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $(k-1)x \leq y < kx$.

4. Свойства последовательностей, имеющих конечный предел.

Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$. Тогда:
1. При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен.
2. При $A \in \mathbb{R}$ последовательность x_n ограничена.
3. В любой окрестности $A \in \overline{\mathbb{R}}$ содержатся все элементы последовательности x_n, за исключением не более чем конечного числа.

5. Арифметические свойства пределов последовательностей в расширенном R. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B,\ A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то:
1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$x_n + y_n \underset{x\to\infty}{\to} A + B$$

2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$x_n y_n \underset{x\to\infty}{\to} AB$$

3. Предел частного равен (при естественных ограничениях) частному пределов, то есть

$$\frac{x_n}{y_n} \underset{x\to\infty}{\to} \frac{A}{B},\ y_n \neq 0,\ B \neq 0$$

.

6. Предельный переход в неравенствах для последовательностей.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A,\ \lim\limits_{n\to\infty} y_n = B,\ A, B \in \overline{\mathbb{R}}$.
1. Если $x_n > y_n$, начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geq B$.
2. Если $x_n \geq y_n$, начиная с какого-либо номера n_0, то $A \geq B$.

7. О сжатой переменной для последовательностей. Пусть, начиная с какого-то номера n_0, выполняется $x_n \leq z_n \leq y_n$. Пусть, кроме того, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A,\ A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$.

8. Теорема Вейерштрасса о пределе монотонной последовательности. Возрастающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена сверху, причем $= \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \sup\limits_n x_n$. Убывающая последовательность x_n сходится тогда и только тогда, когда она ограничена снизу, причем $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \inf\limits_n x_n$

9. О связи пределов последовательности и её подпоследовательностей. Пусть последовательность x_n имеет предел. Тогда любая ее подпоследовательности имеет тот же самый предел.

10. Теорема Больцано-Вейерштрасса. У любой ограниченной последовательности x_n существует сходящаяся подпоследовательность.

11. Критерий Коши для последовательностей. Последовательность x_n сходится (в $\mathbb{R}$) тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

12. Локальные свойства функций, имеющих предел. Теорема 18 (Локальные свойства функций, имеющих предел). Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$. Тогда: 1. При $A \in \overline{\mathbb{R}}$ предел единственен. 2. При $A \in \mathbb{R}$ существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ функция $f(x)$ ограничена. 3. Если $A \neq 0, A \in \overline{\mathbb{R}}$, то существует окрестность $\overset{o}{U}(x_0)$ такая, что в $\overset{o}{U}(x_0) \cap E$ знаки $f(x)$ и A совпадают.

13. Арифметические свойства пределов функций в расширенном R. Теорема 19 (Арифметические свойства пределов в $\overline{\mathbb{R}}$). Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}, \lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B, A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда, если определена соответствующая операция (сложения, умножения или деления) в $\overline{\mathbb{R}}$, то: 1. Предел суммы равен сумме пределов, то есть

$$f(x) + g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} A + B.$$

2. Предел произведения равен произведению пределов, то есть

$$f(x)g(x) \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} AB.$$

3. Если $g(x) \neq 0$ в некоторой $\overset{o}{U}(x_0)$, то предел частного равен частному пределов, то есть

$$\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to x_0}{\longrightarrow} \frac{A}{B}$$

14. Предельный переход в неравенствах для функций. Пусть $f, g : E \to \mathbb{R}, \lim_{x\to x_0} f(x) = A, \lim_{x\to x_0} g(x) = B, A, B \in \overline{\mathbb{R}}$. 1. Если $f(x) > g(x)$ на E, то $A \geq B$. 2. Если $f(x) \geq g(x)$ на E, то $A \geq B$.

15. О сжатой переменной для функций. Пусть $f, g, h : E \to \mathbb{R}, f(x) \leq h(x) \leq g(x)$ на E и $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = A, A \in \overline{\mathbb{R}}$. Тогда $\lim_{x\to x_0} h(x) = A$.

16. Теорема Вейерштрасса о пределах возрастающей и убывающей функций. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ - возрастающая (на E) функция, $s = \sup E-$ предельная для E. Тогда $\lim_{x\to s} f(x) = \sup_{x\in E} f(x)$.
Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ - убывающая (на E) функция, $s = \inf E-$ предельная для E. Тогда $\lim_{x\to i} f(x) = \inf_{x\in E} f(x)$.

17. Критерий Коши для функции. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ - предельная точка для E. Тогда $\lim_{x\to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall x', x'' \in \overset{o}{U}_\delta (x_0) \cap E \quad |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

18. Критерий существования предела через односторонние. Пусть $f : E \to \mathbb{R}$ и $x_0 \in \mathbb{R}$ - предельная точка для множеств$U_-(x_0) = \{x \in E : x < x_0\}, \quad U_+(x_0) =$

$\{x \in E : x > x_0\}$. Тогда $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \to x_0+0} f(x) = \lim_{x \to x_0-0} f(x) = A, \quad A \in \overline{\mathbb{R}}$.

19. О связи бесконечно большой и бесконечно малой функций. Пусть $\beta(x)$ - бесконечно большая при $x \to x_0$. Тогда $\alpha(x) = \frac{1}{\beta(x)}$ - бесконечно малая при $x \to x_0$. Пусть $\alpha : E \to \mathbb{R}$ - бесконечно малая при $x \to x_0$ и $\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta (x_0) \cap E \quad \alpha(x) \neq 0$. Тогда $\beta(x) = \frac{1}{\alpha(x)}$ - бесконечно большая при $x \to x_0$.

20. О свойствах бесконечно малых функций. Пусть $\alpha, \beta : E \to \mathbb{R}$ — бесконечно малые при $x \to x_0$. Тогда: 1. Функция $\alpha(x) + \beta(x)$ — бесконечно малая при $x \to x - 0$. 2. Функция $\alpha(x)\beta(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$. 3. Если функция $\theta : E \to \mathbb{R}$ ограничена в некоторой проколотой окрестности $\overset{o}{U}_\delta (x_0) \cap E$, то функция $\alpha(x)\theta(x)-$ бесконечно малая при $x \to x_0$.

21. Критерий существования конечного предела в терминах бесконечно малых функций. Пусть $f : E \to \mathbb{R}, x_0$ - предельная для E. Тогда $\lim_{x \to x_0} f(x) = A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ - бесконечно малая при $x \to x_0$.