# Лекция 4

# 4. Случайные величины и функции распределения

## 4.1. Определения

Пусть $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ — произвольное вероятностное пространство.

Определение 1. Числовая функция $\xi(\omega)$ на множестве элементарных событий $\Omega$ ($\xi : \Omega \to \mathbb{R}$) называется *случайной величиной*, если для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$\{\xi < x\} = \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) < x\} \in \mathcal{F}. \tag{1.1}$$

Свойство (1.1) гарантирует, что при любом действительном $x$ множество $\{\xi < x\}$ является событием и, следовательно, имеет смысл говорить о его вероятности.

Из (1.1) следует, что

$$\begin{gathered} \{\xi \geq x\} = \overline{\{\xi < x\}} \in \mathcal{F}, \\ \{x_1 \leq \xi < x_2\} = \{\xi < x_2\} - \{\xi < x_1\} \in \mathcal{F}, \\ \{\xi = x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{ x \leq \xi < x + \frac{1}{n} \right\} \in \mathcal{F}. \end{gathered} \tag{1.2}$$

Определение 2. Функция

$$F(x) = F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\}, \tag{1.3}$$

определённая при всех $x \in \mathbb{R}$, называется *функцией распределения.*

Очевидно, что функция распределения $F(x)$ удовлетворяет неравенству

$$0 \leq F(x) \leq 1 \tag{1.4}$$

при всяком $x \in \mathbb{R}$

Будем пользоваться обозначениями

$$F(x-0) = \lim_{y \to x-0} F(y), \quad F(x+0) = \lim_{y \to x+0} F(y), \quad F(\pm\infty) = \lim_{y \to \pm\infty} F(y).$$

Справедливы равенства:

$$\begin{aligned} \text{i)} &\quad \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1), \\ \text{ii)} &\quad \mathsf{P}\{\xi = x\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x), \\ \text{iii)} &\quad \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1), \\ \text{iv)} &\quad \mathsf{P}\{x_1 < \xi < x_2\} = F_\xi(x_2) - F_\xi(x_1+0), \\ \text{v)} &\quad \mathsf{P}\{x_1 < \xi \leq x_2\} = F_\xi(x_2+0) - F_\xi(x_1+0). \end{aligned}$$

Доказательство.

i) Так как

$$\{\xi < x_2\} = \{\xi < x_1\} + \{x_1 \leq \xi < x_2\},$$

то из аддитивности $\mathsf{P}$ получаем

$$\mathsf{P}\{\xi < x_2\} = \mathsf{P}\{\xi < x_1\} + \mathsf{P}\{x_1 \leq \xi < x_2\}.$$

Отсюда следует (i).

ii) Из третьего равенства (1.2) и непрерывности $\mathsf{P}$ получаем

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = \mathsf{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\left\{x \le \xi < x + \frac{1}{n}\right\}\right) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\left\{x \le \xi < x + \frac{1}{n}\right\}.$$

Применим (i). Имеем

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = \lim_{n\to\infty}\left\{F_\xi\left(x + \frac{1}{n}\right) - F_\xi(x)\right\} = F_\xi(x+0) - F_\xi(x).$$

iii) Это следует из

$$\{x_1 \le \xi \le x_2\} = \{x_1 \le \xi < x_2\} + \{\xi = x_2\},$$

аддитивности $\mathsf{P}$ и равенств (i) и (ii).

(iv) Это следует из

$$\{x_1 \le \xi < x_2\} = \{x_1 < \xi < x_2\} + \{\xi = x_1\},$$

аддитивности $\mathsf{P}$ и равенств (i) и (ii).

(v) Это следует из

$$\{x_1 < \xi \le x_2\} = \{x_1 < \xi < x_2\} + \{\xi = x_2\},$$

аддитивности $\mathsf{P}$ и равенств (iv) и (ii). ■

П р и м е р 1. Рассмотрим схему Бернулли, состоящую из $n$ испытаний с вероятностью успеха $p$. Обозначим через $\mu$ число успехов. Случайная величина $\mu$ принимает все целочисленные значения от 0 до $n$ включительно. Согласно предыдущей главе

$$\mathsf{P}(\mu = m) = P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, \quad m = 0, \ldots, n.$$

Функция распределения случайной величины $\mu$ равна:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ \displaystyle\sum_{k<x} P_n(k) & \text{при} \quad 0 < x \le n, \\ 1 & \text{при} \quad x > n. \end{cases}$$

Функция распределения представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках $x = 0, \ldots, n$; скачок в точке $x = k$ равен $P_n(k)$.

Каждая случайная величина однозначно определяет свою функцию распределения. Обратное неверно, т. е. одной функцию распределения могут соответствовать сколь угодно различных случайных величин.

П р и м е р 2. Пусть случайная величина $\xi$ принимает два значения $-1$ и $+1$, каждое с вероятностью $1/2$. Случайная величина $\nu = -\xi$ всегда отлична от $\xi$. При этом обе эти случайные величины имеют одну и ту же функцию распределения

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le -1, \\ 1/2 & \text{при} \quad -1 < x \le 1, \\ 1 & \text{при} \quad x > 1. \end{cases}$$

## 4.2. Свойства функции распределения

Пусть $\xi$ — случайная величина. Функция распределения $F(x) = F_\xi(x)$ обладает следующими свойствами:

**F1.** $F(x)$ не убывает.

**F2.** $F(x)$ непрерывна слева.

**F3.** $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$.

Доказательство.

1. Пусть $x_1 < x_2$. Тогда $\{\xi < x_1\} \subset \{\xi < x_2\}$ и, следовательно, $F(x_1) \le F(x_2)$.

2. Пусть числовая последовательность $\{y_n\}$ возрастает и $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. Тогда

$$\{\xi < y_n\} \subset \{\xi < y_{n+1}\}, \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} \{\xi < y_n\} = \{\xi < x_0\}.$$

Из непрерывности $\mathsf{P}$ и монотонности функции распределения получаем

$$F(x_0 - 0) = \lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\{\xi < y_n\} = \mathsf{P}\{\xi < x_0\} = F(x_0).$$

3. В силу п. 1, $F$ монотонна и поэтому существуют пределы $F(\pm\infty) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)$. Пусть $A_k = \{k-1 \le \xi < k\}$. Ясно, что $\Omega = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} A_k$ и $\mathsf{P}(A_k) = F(k) - F(k-1)$. Получаем

$$1 = \mathsf{P}(\Omega) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \mathsf{P}(A_k) = \lim_{N\to\infty} \sum_{k=-N+1}^{N} \mathsf{P}(A_k) = \\ = \lim_{N\to\infty} \big(F(N) - F(-N)\big) = F(+\infty) - F(-\infty).$$

Из неравенства (1.4) следует, что $0 \le F(\pm\infty) \le 1$. Следовательно, $F(-\infty) = 0$ и $F(+\infty) = 1$. ■

Пример 1. Рассмотрим случайную величину $\xi$, принимающую единственное значение $a$, т. е. $\xi(\omega) = a$. Тогда

$$F_\xi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ 1 & \text{при} \quad x > a. \end{cases}$$

**Теорема 2.1.** *Пусть Функция $F(x)$ обладает свойствами* F1, F2 *и* F3. *Тогда существует вероятностное пространство $(\Omega, \mathcal{F}, \mathsf{P})$ и случайная величина $\xi$ на этом пространстве такая, что $F_\xi(x) = F(x)$.*

## 4.3. Дискретные и абсолютно непрерывные распределения

Распределение случайной величины $\xi$ называется *дискретным*, если существует конечное или счётное множество чисел $x_1$, $x_1$, … таких, что

$$\mathsf{P}\{\xi = x_n\} = p_n, \; n = 1, 2, \ldots, \tag{3.1}$$

где числа $p_n$ удовлетворяют условиям

$$p_n > 0, \; n = 1, 2, \ldots, \quad \sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1. \tag{3.2}$$

Равенства (3.1) мы будем называть *законом распределения* дискретной случайной величины $\xi$. Случайная величина, имеющая дискретное распределение называется *дискретной случайной величиной.*

Функция распределения дискретной случайной величины $\xi$ равна:

$$F_\xi(x) = \sum_{x_n < x} p_n, \tag{3.3}$$

Функция распределения $F_\xi(x)$ дискретной случайной величины представляет собой ступенчатую функцию со скачками в точках $x_n$, $n = 1, 2, \ldots$. Скачок в точке $x_n$ равен $p_n$.

Распределение случайной величины $\xi$ называется *абсолютно непрерывным*, если существует неотрицательная функция $p_\xi(x)$ такая, что для всякого $x \in \mathbb{R}$

$$F_\xi(x) = \mathsf{P}\{\xi < x\} = \int_{-\infty}^{x} p_\xi(t)\, dt. \tag{3.4}$$

Функция $p_\xi(x)$ называется *плотностью распределения вероятностей* и удовлетворяет условиям:

1) $p_\xi(x) \geq 0$, $x \in \mathbb{R}$;

2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} p_\xi(x)\, dx = 1$;

3) $F'_\xi(x) = p_\xi(x)$ в точках непрерывности $p_\xi(x)$.

Случайная величина, имеющая абсолютно непрерывное распределение называется *абсолютно непрерывной случайной величиной.*

Из равенства (3.4) следует, что функция распределения абсолютно непрерывной случайной величины является непрерывной функцией. Следовательно,

$$\mathsf{P}\{\xi = x\} = 0 \tag{3.5}$$

для любого $x \in \mathbb{R}$ и

$$\mathsf{P}\{a \leq \xi \leq b\} = \mathsf{P}\{a < \xi \leq b\} = \mathsf{P}\{a \leq \xi < b\} = \mathsf{P}\{a < \xi < b\} = \int_a^b p_\xi(x)\, dx, \tag{3.6}$$

для любых $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, $a \leq b$.

Непрерывные функции распределения, не имеющие плотностей называются *сингулярными.* В общем случае любая функция распределения $F(x)$ можно представить в виде

$$F(x) = a_1 F_{discr}(x) + a_2 F_{cont}(x) + a_3 F_{sing}(x),$$

где $a_i \geq 0$, $a_1 + a_2 + a_3 = 1$, $F_{discr}(x)$ — дискретная функция распределения, $F_{cont}(x)$ — абсолютно непрерывная функция распределения, $F_{sing}(x)$ — сингулярная функция распределения.

## 4.4. Примеры функций распределения

Рассмотрим дискретную случайную величину $\xi$, принимающую конечное число значений $x_1, \ldots, x_n$ с соответствующими вероятностями $p_1, \ldots, p_n$. Будем считать, что $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. В этом случае закон распределения $\xi$ удобно представлять в виде таблицы

| $\xi$ | $x_1$ | $x_2$ | $\ldots$ | $x_n$ |
|---|---|---|---|---|
| $p$ | $p_1$ | $p_2$ | $\ldots$ | $x_n$ |

Используя формулу (3.3), запишем функцию распределения случайной величины $\xi$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le x_1, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i & \text{при} \quad x_k < x \le x_{k+1},\ k = 1, \ldots n-1 \\ 1 & \text{при} \quad x > x_n. \end{cases}$$

**1.** *Вырожденное распределение*:

$$\mathsf{P}\{\xi = a\} = 1, \quad a \text{ — постоянная.}$$

**2.** *Гипергеометрическое распределение* ($N$, $M$, $n$ — натуральные числа, $M \le N$, $n \le N$):

$$\mathsf{P}\{\xi = m\} = \frac{C_M^m\, C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}, \quad m = 0, 1, \ldots, \min\{M, n\}.$$

**3.** *Биномиальное распределение* ($n$ — натуральные число, $0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Рассмотрим дискретную случайную величину $\xi$, принимающую счётное число значений $x_1, x_2, \ldots$ с соответствующими вероятностями $p_1, p_2, \ldots$. Будем считать, что $x_1 < x_2 < \ldots$. Используя формулу (3.3), запишем функцию распределения случайной величины $\xi$:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le x_1, \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i & \text{при} \quad x_k < x \le x_{k+1},\ k = 1, 2, \ldots \end{cases}$$

**4.** *Распределение Пуассона* ($\lambda > 0$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\, \mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

**5.** *Геометрическое распределение* ($0 < p < 1$):

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = (1-p)^{k-1} p, \quad k = 1, 2 \ldots$$

Рассмотрим некоторые абсолютно непрерывные распределения, указав их плотности.

**6.** *Равномерное распределение на отрезке* $[a, b]$, $a < b$:

$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$

Найдём функцию распределения, используя формулу (3.4). Пусть $x \in [a, b]$. Тогда

$$F(x) = \int_a^x \frac{dx}{b-a} = \frac{x-a}{b-a}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le a, \\ \dfrac{x-a}{b-a} & \text{при} \quad a < x \le b, \\ 1 & \text{при} \quad x \ge b, \end{cases}$$

**7.** *Показательное распределение с параметром* $\lambda > 0$:

$$p(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Имеем

$$F(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda x}\, dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Следовательно,

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad x \le 0, \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{при} \quad x > 0. \end{cases}$$

**8.** *Нормальное распределение с параметрами* $(m, \sigma^2)$ $(\sigma > 0,\, m \in \mathbb{R})$:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}.$$

Нормальное распределение также называется *гауссовым*. Нормальное распределение с параметрами $(0, 1)$ называется *стандартным нормальным распределением*. Функция распределения имеет вид

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{(t-m)^2}{2\sigma^2}}\, dt.$$