1. Сформулируйте определение комплексного числа.
Элемент $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}$, снабженный двумя операциями, индуцированными из $\mathbb{R}$ снабженными двумя операциями, редуцированными из $\mathbb{R}$ - сложение и умножение.
2. Как сложить и перемножить два комплексных числа (в представлении чисел как (a, b) и (c, d))
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
3. Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность сложения комплексных чисел.
1. Ассоциативность сложения
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
2. Коммутативность сложения.
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
4. Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность умножения комплексных чисел.
1. Ассоциативность сложения. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\ (z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
2. Коммутативность сложения. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ z_1 * z_2 = z_2 * z_1$
5. Какой элемент множества комплексных чисел называется нулевым и почему?
$(0, 0)$, так как $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$
6. Какой элемент является противоположным к (a, b) на множестве комплексных чисел относительно операции сложения и почему?
$(0, 0)$, так как противоположным элементом к элементу (a, b) называют такой элемент, который в сумме с (a, b) дает нулевой элемент.
7. Какой элемент множества комплексных чисел называется единицей? Что будет, если комплексное число умножить на единицу?
$(1, 0)$. $(a, b) * (1, 0) = (a, b)$
8. Сформулируйте определение обратного элемента и запишите его для комплексного числа (в представлении числа как (a, b)).
Обратный элемент — элемент, который при умножении на исходное комплексное число дает единицу. Вид обратного элемента:
$(a/(a^2 + b^2), -b/(a^2 + b^2))$
9. Какая форма комплексного числа называется алгебраической?
Алгебраическая форма комплексного числа $z = (a, b)$ - представление в виде $z = a + b_i$, где i - это мнимая единица, $i^2 = 1$.
10. Какая форма комплексного числа называется тригонометрической?
Тригонометрической формой записи комплексного числа $z = (a, b)$ называется его представление в виде $z = \rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = argz$
11. Пусть z – комплексное число. Какое число z является комплексно сопряженным к z?

Пусть $z = a + bi$, тогда сопряженным числом является $a - bi$
12. Как определяется модуль $|z|$ комплексного числа z?
$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$
13. Запишите формулу Муавра.
$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos\varphi + i\sin\varphi)$
$|z^n| = |z|^n, \ argz^n = n * argz$
14. Как определяется декартово произведение множеств? (декартово произведение множества на себя, нескольких множеств)
Это множество всех кортежей длины n, где n - количесво множителей.
$A \times B = \{(x; y) : x \in A, \ y \in B\}$
$A \times A = \{(x; y) : x \in A, \ y \in A\}$
$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1; x_2; ...; x_n) : x_1 \in A_1, \ x_2 \in A_2, ..., \ x_n \in A_n\}$
15. Что называется внутренним законом композиции на множестве M?
Отображение $\Gamma \ M \times M \mapsto M \ (x, y) \mapsto z \in M \ (x, y) \mapsto \Gamma(x, y)$
16. Какой закон композиции называется ассоциативным?
$\forall x, y, z \in M : \ (x * y) * z = x * (y * z)$
17. Какой закон композиции называется коммутативным?
$\forall x, y \in M : \ x * y = y * x.$
18. Сформулируйте определение нейтрального элемента e относительно закона композиции $*$, определенного на множестве M.
Элемент $e \in M$ называется нейтральным элементом алгебраической системы $< M, * >$, если $(\forall x \in M) : \ x * e = e * x = x.$
19. Сформулируйте определение поглощающего элемента θ относительно закона композиции $*$, определенного на множестве M.
Элемент $\theta \in M$ - поглощающий элемент алгебраической системы $< M, * >$, если $\forall x \in M \ x * \theta = \theta * x = \theta$
20. Сформулируйте определение обратного элемента относительно операции.
Элемент y называется обратным элементу x в алгебраической системе $< M, * >$ с нейтральным элементом e, если $x * y = y * x = e$
21. Что называется алгебраической структурой?
Если на множестве M зафиксирована операция $*$, то говорят, что имеем дело со структурой $< M, * >$, которая называется алгебраической структурой.
22. Что называется внешним законом композиции?
Внешним законом композиции множества Ω, называемых множеством операторов закона, и элементов множества M называется отображение множества $\Omega \times M$ в M.
23. Перечислите аксиомы группы.
1) ассоциативность операции 2) нейтральный элемент 3) обратный элемент
24. Сформулируйте определение магмы.

Алгебраическая структура $< M, * >$ называется магмой ($*$ - внутренний закон композиции)

25. Какая алгебраическая структура является полугруппой?

Алгебраическая структура $< M, * >$ называется полугруппой, если * ассоциативна.

26. Какая алгебраическая структура является моноидом?

Алгебраическая структура $< M, * >$ называется моноидом, если $*$ ассоциативна и $\exists$ нейтральный элемент.

27. Сформулируйте определение левой (правой) дистрибутивности закона относительно закона $*$.

Закон композиции $\circ$ называется дистрибутивным слева относительно закона $*$, если $\forall x, y, z \in M \ x \circ (y * z) = x \circ y * x \circ z$

Закон композиции $\circ$ называется дистрибутивным справа относительно закона $*$, если $\forall x, y, z \in M \ (y * z) \circ x = y \circ x * z \circ x$

28. Когда закон называется двояко дистрибутивным?

Закон композиции $\circ$ называется двояко дистрибутивным относительно закона $*$, если он дистрибутивен слева и справа

29. Сформулируйте определение кольца R.

Алгебраическая структура $< R, +, * >$ называется кольцом, если R замкнута относительно $+$ и $*$ и удовлетворяет сл. требованиям:

1) $< R, +, * >$ - абелева группа

2) операция $*$ ассоциативна

3) операция $*$ дистрибутивна относительно $+$ слева и справа

30. Какое кольцо называется кольцом вычетов?

$< Z_m, +, >$ - кольцо вычетов по модулю $m \in Z \ Z_m = \{0, 1, ...m - 1\}$ - остатки при делении на m.

31. Как определяется многочлен от одной переменной с коэффициентами из кольца R?

Многочленом от 1 переменной с коэффицентами из кольца R называется выражение вида $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, где $a_0, a_1, ..., a_n \in R, \ x$ - переменная.

32. В каком случае многочлен $p(x)$ делится на многочлен $q(x)$?

$\exists g(x): \ p(x) = q(x) * g(x)$

33. Перечислите свойства делимости многочленов.

1) $f(x) \vdots g(x) \ \cap \ g(x) \vdots r(x) \ \Rightarrow \ f(x) \vdots r(x)$

2) $f(x) \vdots g(x) \ \cap \ p(x) \vdots g(x) \ \Rightarrow \ (\forall a(x), b(x)) \in$

$R[x] \ (a(x)f(x) \ + \ b(x)p(x)) \vdots g(x)$

34. Когда многочлены $p(x)$ и $q(x)$ являются ассоциированными?

Два многочлена $p(x)$ и $q(x)$ называются ассоциированными, если $p(x) = \alpha q(x)$, где $\alpha \in R, \alpha \neq 0$.

35. Что называется степенью многочлена?

Степенью $deg(p)$ многочлена $p \in R[t]$ называется максимальный номер его ненулевого коэффициента.

36. Чему равна степень нулевого многочлена $\theta(t)$?

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рис. 1:

Для нулевого многочлена $\theta(t)$ положим $deg(\theta) = -\infty$.

37. Перечислите свойства степени при делении многочленов.

1) если $f(x) \vdots g(x),\ f, g \neq 0 \ \Rightarrow \ deg(f) \geq deg(g)$

2) если $f(x) \vdots g(x),\ deg(f) = deg(g) \ \Rightarrow \ f \sim g$

38. Как связана степень остатка $r(x)$ от деления полинома $p(x)$ на полином со степенями этих полиномов?

Степень остатка меньше степени делителя.

39. Какое число называется корнем многочлена кратности n?

Число $x_0 \in R$ такое, что $p(x) \vdots (x - x_0)^m,\ p(x)\ not\vdots\ (x - x_0)^m + 1$

40. Чему равен остаток от деления $p(x) \in R[x]$ на $(x - x_0)$? А если x_0 – корень $p(x)$?

$p(x_0)$. 0.

41. Какие элементы кольца называются делителями нуля?

Делителем нуля в кольце R называется всякий элемент $x \neq 0$, такой что $\exists y \neq 0,\ xy = 0$.

42. Какое кольцо называется областью целостности?

Областью целостности называется кольцо, в котором нет делителей нуля.

43. Сформулируйте определение нильпотента.

Элемент $z \neq 0$ называется нильпотентом, если $\exists n \in \mathbb{N} : z^n = 0$.

44. Какое кольцо является полем?

Полем называется ненулевое кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.

45. Сформулируйте определение матрицы. Что называется коэффициентами матрицы?

Матрицей с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ называется прямоугольная таблица следующего вида: где числа $a_{ij} \in \mathbb{K}$ называются коэффициентами матрицы.

Рисунок №1

46. Какое множество обозначается как $Mat_K(m, n)$? Что в этой записи значат K, m, n?

Множество $m \times n$ матриц. m - количество строк, n - количество столбцов, $\mathbb{K}$ - поле.

47. Какие матрицы называются квадратными? Единичными?

Матрица, у которой количество строк совпадает с количеством столбцов

1. Если $A_{1\times1} = (a)$, тогда $|A| = a$;
2. Если $A_{2\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

Рис. 2:

3. Если $A_{3\times3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тогда $|A|$ можно получить *разложением по первой строке*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Рис. 3:

Квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные — нулю.
48. Как определяется сложение матриц?
$A + B = C \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$
49. Как определяется умножение матрицы на число?
$\lambda A = B \;\Leftrightarrow\; b_{ij} = \lambda a_{ij}$
50. Как определяется умножение матриц? Какие матрицы можно перемножать?
$AB = C \;\Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + ... + a_{in} * b_{nj}$
Можно перемножать матрицы, если у 1 матрицы количество столбцов совпадает с количеством строк 2 матрицы
51. Какое результирующее число строк и столбцов будет при перемножении матриц $A_{n\times m}$ и $A_{m\times k}$?
Число строк = n, а число столбцов = k.
52. Умножение матриц коммутативно? Почему?
Нет. Контрпример: матрицу M_{ij} можно умножить на матрицу M_{jk}, но не наоборот (при различных i, j, k)
53. Как вводится операция транспонирования матриц?
$A = a_{ij} \;\Rightarrow\; A^T = a_{ji}$
54. Перечислите свойства операции транспонирования.
1)$(A^T)^T = A \;\; \forall A \in M_{\mathbb{K}}(m, n)$
2)$(A + B)^T = A^T + B^T \;\; \forall A, B \in M_{\mathbb{K}}(m, n)$
3)$(\lambda A)^T = \lambda A^T \;\; \forall A \in M_{\mathbb{K}}(m, n)$
4)$(AB)^T = A^T B^T \;\; \forall A \in M_{\mathbb{K}}(m, n) \;\; \forall B \in M_{\mathbb{K}}(n, t)$
55. Запишите, как найти определители матриц $A_{1\times1}$ и $A_{2\times2}$
Рисунок №2
56. Запишите алгоритм нахождения определителя матрицы $A_{3\times3}$.
Рисунок №3

Опр. 1.1. Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

При этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, $\{a_{ij}\}$ - *коэффициентами* системы и $b_1, b_2, \ldots b_m$ - *свободные члены.*

Рис. 4:

57. Сформулируйте определение системы линейных алгебраических уравнений. Запишите в общем виде.
Рисунок №4
58. Что в СЛАУ называют свободными членами? А что – неизвестными?
Конец рисунка №4
59. Как записать СЛАУ в матричном виде?
a_{ij} коэффициент системы поставить в i строку j столбец
60. Что значит решить СЛАУ?
Решить систему линейных алгебраических уравнений значит выяснить совместна она или несовместна, и в случае совместности найти все ее решения.
61. Что такое расширенная матрица в рамках решения СЛАУ?
Матрица, получаемая из изначальной матрицы приписыванием свободных членов.
62. Какие преобразования называются эквивалентными преобразованиями матрицы?
1) перестановка местами произвольных строк матрицы;
2) умножение произвольной строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;
3) прибавление к произвольной строке матрицы другой строки;
63. Для чего нужны методы Крамера и Гаусса?
Методы Крамера и Гаусса нужны для решения систем линейных уравнений.
64. В чем заключается метод Крамера?
Метод Крамера заключается в вычислении определителя матрицы A и определителей, полученных из матрицы A подстановкой столбца b в эту матрицу. Далее вычисляем определители полученных матриц и вычисляем значения неизвестных: $x_i = \triangle_i / \triangle$
65. При каком условии возможно нахождение решения СЛАУ методом Крамера?
При $\triangle \neq 0$.
66. В чем заключается метод Гаусса?
Рисунок №5
67. В чем заключается метод обратной матрицы для решения СЛАУ?
$AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$ далее вычисляем матрицу A, используя метод

Метод Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к верхнетреугольному виду и затем, используя метод подстановки найти решение:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3. \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3. \end{pmatrix}$$

Откуда сразу получаем:

$$x_3 = \frac{d_3}{c_{33}}, \quad x_2 = \frac{d_2 - c_{23}x_3}{c_{22}}, \quad x_1 = \frac{d_1 - c_{12}x_2 - c_{1_3}x_3}{c_{11}}.$$

Рис. 5:

- **метод Гаусса** - элементарными преобразованиями строк, необходимо из матрицы A получить единичную матрицу E, обратная матрица тогда возникнет из следующей конструкции:

$$[A|E] \sim \left[E|A^{-1}\right]$$

- **метод союзной матрицы** - вычислив *союзную матрицу* $\widehat{A}$, найти A^{-1} с использованием следующей формулы:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\widehat{A}^T$$

Рассмотрим способ вычисления союзной матрицы. Пусть

$$\widehat{A} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix},$$

тогда m_{ij} равен определителю матрицы 2×2, полученной из исходной матрицы A вычеркиванием строки с номером i и столбца с номером j, умноженному на число $(-1)^{i+j}$.

Рис. 6:

союзной матрицы или метод Гауса. Рисунок 6

68. Как найти обратную матрицу используя метод Гаусса?

Рисунок №6

69. Как найти обратную матрицу используя метод союзной матрицы?

Рисунок №6

70. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?

Число m_{ij} называется алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы A.