ИТМО

СЕМИНАР 5

Раздел 2. Динамика

1. **Движение тел с переменной массой**
2. **Реактивное движение**
3. **Уравнение Мещерского**

В основе описания движения тел с переменной массой лежит понятие импульса

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

или

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \qquad (1)$$

Первый случай: масса прибавляется

Пусть тело массы m движется со скоростью $\vec{v}$, а другое тело очень малой массы δm движется со скоростью $\vec{w}$. За время dt тела слипаются, и образовавшееся тело массы $m + \delta m$ движется со скоростью $\vec{v} + d\vec{v}$.

Изменение импульса системы:

$$d\vec{p} = (m+\delta m)(\vec{v} + d\vec{v}) - (m\vec{v} + \delta m\cdot\vec{w}) = m d\vec{v} - (\vec{w} - \vec{v})\delta m + \cancel{\delta m\cdot d\vec{v}}.$$

Последним слагаемым $\delta m\cdot d\vec{v}$. можно пренебречь — как малой величиной второго порядка по сравнению с остальными величинами первого порядка малости.

Первый случай: масса прибавляется

Заметим также, что $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$ есть относительная скорость второго тела, то есть скорость тела δm относительно тела m до взаимодействия.

Таким образом,

$$d\vec{p} = md\vec{v} - \vec{u}\delta m.$$

подставляем в

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \qquad (1)$$

получаем

$$md\vec{v} - \vec{u}\delta m = \vec{F}dt$$

или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{\delta m}{dt} \qquad (2)$$

Второй случай: масса убывает

Пусть ракета массы m движется со скоростью $\vec{v}$ и за время dt испускает порцию газовой струи массой δm; скорость этой порции струи в неподвижной системе отсчета равна $\vec{w}$, а относительно ракеты она равна $\vec{u} = \vec{w} - \vec{v}$. После испускания данной порции струи ракета приобретает скорость $\vec{v} + d\vec{v}$.

Изменение импульса системы «ракета + струя»:

$d\vec{p} = [(m - \delta m)(\vec{v} + d\vec{v}) + \delta m \cdot \vec{w}] - m\,\vec{v} = m\,d\vec{v} + (\vec{w} - \vec{v})\delta m = m\,d\vec{v} + \vec{u}\delta m$

подставляем в

$$d\vec{p} = \vec{F}dt \qquad (1)$$

получаем

$$md\vec{v} + \vec{u}\delta m = \vec{F}dt$$

или

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{\delta m}{dt} \qquad (3)$$

Уравнение Мещерского

Теперь сопоставим формулы (2) и (3):

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{\delta m}{dt} \quad (2) \qquad\qquad m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} - \vec{u}\frac{\delta m}{dt} \quad (3)$$

они отличаются только знаком перед δm *(прибавлению массы отвечает случай* $dm > 0$*, уходу массы — случай* $dm < 0$*)*. Это позволяет объединить обе данные формулы в одну, введя обычный дифференциал dm:

$$\boxed{m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} + \vec{u}\frac{dm}{dt}.}$$

Задача 5.1

Ракета выпускает непрерывную струю газа, имеющую скорость $\boldsymbol{u}$ относительно ракеты. Расход газа равен μ кг/с. Показать, что уравнение движения ракеты: $m\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F} - \mu\boldsymbol{u}$, где m — масса ракеты в данный момент, $\boldsymbol{a}$ — ее ускорение, $\boldsymbol{F}$ — внешняя сила.

Задача 5.2

Ракета движется в отсутствие внешних сил, выпуская непрерывную струю газа со скоростью $\boldsymbol{u}$, постоянной относительно ракеты. Найти скорость ракеты $\boldsymbol{v}$ в момент, когда ее масса равна m, если в начальный момент она имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю.

Ответ: $\boldsymbol{v} = -\boldsymbol{u}\, ln(m_0/m)$.

Задача 5.3

Найти закон изменения массы ракеты со временем, если ракета движется в отсутствие внешних сил с постоянным ускорением a, скорость истечения газа относительно ракеты постоянна и равна u, а ее масса в начальный момент равна m_0.

Ответ: $m = m_0 exp(-at/u)$.

Задача 5.4

Тележка с песком движется по горизонтальной плоскости под действием постоянной силы $\boldsymbol{F}$, сонаправленной с ее скоростью. При этом песок высыпается через отверстие в дне с постоянной скоростью μ кг/с. Найти ускорение и скорость тележки в момент t, если в момент $t = 0$ тележка с песком имела массу m_0 и ее скорость была равна нулю.

Ответ: $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{F}/(m_0 - mt)$, $\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{F}/m) ln[m_0/(m_0 - mt)]$.

Задача 5.5

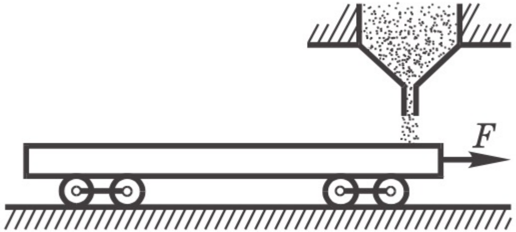

Рис. 5.1

Платформа массы m_0 начинает двигаться вправо под действием постоянной горизонтальной силы $\boldsymbol{F}$ (рис. 5.1). Из неподвижного бункера на нее высыпается песок. Скорость погрузки постоянна и равна μ кг/с. Найти зависимость от времени скорости и ускорения платформы в процессе погрузки. Трение пренебрежимо мало.

Ответ: $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{F}t/(m_0+mt)$, $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{F}m_0/(m_0+mt)^2$.