

## Силлабус курса

### Дополнительные главы математического анализа (ДГМА)

1-ый семестр, 2025/2026 учебный год

#### 1. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

№ раздела	Наименование раздела дисциплины	Содержание
1	1. Функции нескольких переменных	1.1. Предел и непрерывность ФНП
		1.2. Равномерная непрерывность
		1.3. Частные производные
		1.4. Производные от сложных функций
		1.5. Производные и дифференциалы высших порядков
		1.6. Формула Тейлора для функции нескольких переменных
		1.7. Экстремумы функции нескольких переменных
		1.8. Неявные функции
		1.9. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой
		1.10. Касательная плоскость и нормаль к поверхности
2	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	2.1. Мера Жордана
		2.2. Двойной интеграл
		2.3. Криволинейные координаты
		2.4. Замена переменных в двойном интеграле
		2.9. Криволинейный интеграл первого рода и его сведение к определенному интегралу
		2.5. Несобственные двойные интегралы

		2.6. Тройные интегралы
		2.7. Приложения кратных интегралов
		2.8. Длина кривой
		2.10. Приложения криволинейного интеграла первого рода
		2.11. Площадь поверхности
		2.12. Поверхностный интеграл первого рода
		2.13. Приложения поверхностного интеграла первого рода
3	3. Теория поля	3.7. Поверхностный интеграл второго рода
		3.1. Скалярное поле. Производная по направлению. Градиент
		3.2. Векторное поле. Дивергенция и ротор векторного поля
		3.3. Оператор Гамильтона
		3.4. Криволинейный интеграл второго рода. Работа силового поля
		3.5. Восстановление функции по её полному дифференциалу
		3.6. Теорема Грина
		3.8. Теорема Стокса
		3.9. Теорема Остроградского-Гаусса
		3.10. Первая и вторая формулы Грина
		3.11. Потенциальное поле
		3.12. Соленоидальное поле

## 2. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Список литературы:

1. Фихтенгольц Г. М. Курс дифференциального и интегрального исчисления. В 3-х тт. Том 3 — Издательство "Лань", 2025 — 656 с. — ISBN 978-5-507-52329-0 — Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/448580>
2. Кудрявцев Л.Д. Краткий курс математического анализа. Т. 2. Дифференциальное и интегральное исчисления функций многих переменных. Гармонический анализ — Издательство "Физматлит", 2003 — 424 с. — ISBN 5-9221-0185-4 — Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/2225>
3. Кудрявцев Л.Д., Кутасов А.Д., Чехлов В.И., Шабунин М.И. Сборник задач по математическому анализу. Том 3. Функции нескольких переменных — Издательство "Физматлит", 2003 — 472 с. — ISBN 5-9221-0308-3 — Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/2220>
4. Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа — Издательство "Лань", 2025 — 492 с. — ISBN 978-5-507-52146-3 — Текст : электронный // ЭБС Лань — URL: <https://e.lanbook.com/book/440093>

Иные ресурсы:

1. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Том 2. Москва: "Интеграл-Пресс", 2006, 544 с.
2. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Том 2. 24-е изд. Санкт-Петербург: "БХВ-Петербург", 2008, 848 с.
3. Попов А.И., Попов И.Ю. Кратные интегралы и теория поля — СПб — 2025. <https://disk.yandex.ru/i/4fowiJDwbDbeew>

## Оценочные средства 1 семестра

[1]

### Контрольная работа 1

Контрольная работа

Описание:

Контрольная работа проводится в часы аудиторных занятий в письменной форме. Один вариант заданий состоит из нескольких задач на пройденные темы. На решение контрольной работы отводится 2 академических часа.

Баллы за работу выставляются пропорционально числу правильно решённых задач. Основаниями для снижения оценки являются: ошибки в рассуждениях и расчётах, неправильный ответ, отсутствие комментариев и пояснений, небрежное выполнение.

## Шкала оценивания

- \* 10 баллов — правильно выполнены все задания, выбран оптимальный способ решения, работа оформлена аккуратно.
- \* 8-9 баллов — выполнены все задания, при сохранении правильной последовательности этапов решения допущены незначительные вычислительные ошибки, работа оформлена аккуратно.
- \* 6-7 баллов — правильно выполнено не менее 60 % заданий, допущены вычислительные ошибки, непоследовательность в решении, неаккуратность в оформлении.
- \* 0-5 баллов — правильно выполнено менее 60 % заданий, допущены существенные ошибки в вычислении и последовательности решения, оформление работы неудовлетворительное.

## Пример варианта контрольной работы.

Ниже представлены задания КР. В некоторых из них есть подпункты а), б) ... , они отражают вариации этих заданий. При написании КР вам попадётся одна из них.

### Задание 1. Предел

Вычислите предел функции  $z(x; y)$  в точке  $(x_0; y_0)$  или докажите, что он не существует.

- а)  $z = \frac{x-y}{x+y}$ ,  $(x_0; y_0) = (0; 0)$
- б)  $z = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1} - 1}$ ,  $(x_0; y_0) = (0; 0)$

### Задание 2. Дифференцирование

а) Найдите дифференциал функции  $z(x; y)$ , заданной неявно, в точке  $M_0(x_0; y_0; z_0)$ .

$$e^{z-1} = \cos x \cos y + 1, \quad M_0\left(0; \frac{\pi}{2}; 1\right)$$

б) Дана функция  $z = \ln(x + e^{-y})$ . Покажите, что

$$\frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0$$

в) Дана функция  $u(M) = u(x, y, z)$  и точки  $M_1, M_2$ . Вычислите производную этой функции по направлению  $M_1 M_2$  и градиент  $\text{grad } u(M_1)$ .

$$u(M) = x^2 y + y^2 z + z^2 x, \quad M_1(1, -1, 2), \quad M_2(3, 4, -1)$$

### Задание 3. Экстремум

Исследуйте на экстремум функцию  $z(x; y)$  – найдите точки экстремума и экстремумы или докажите, что их не существует.

$$z = 2x^3 + 2y^3 - 6xy + 5$$

### Задание 4. Уравнения касательных и нормальных прямых и плоскостей

а) Составьте уравнения касательной прямой  $l$  и нормальной плоскости  $\alpha$  в точке  $M$  для линии  $L$ , заданной параметрическими уравнениями.

$$L: x = 2 \cos \varphi, \quad y = 2 \sin \varphi, \quad z = \varphi, \quad M = \left(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \frac{\pi}{4}\right)$$

б) Составьте уравнения касательной плоскости  $\alpha$  и нормальной прямой  $l$  в точке  $M$  для поверхности  $S$ .

$$S: 2^{x/z} + 2^{y/z} = 8, \quad M = (2; 2; 1)$$

### Задание 5. Криволинейные системы координат

а) Тело  $T$  задано системой неравенств в декартовых координатах. Получите систему неравенств, описывающую его в **цилиндрических** координатах. Изобразите тело  $T$ .

$$T: y^2 + z^2 \leq 1, \quad z \leq y, \quad -1 \leq x \leq 2$$

б) Тело  $T$  задано системой неравенств в декартовых координатах. Получите систему неравенств, описывающую его в **сферических** координатах. Изобразите тело  $T$ .

$$T: x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, \quad -\sqrt{x^2 + z^2} \leq y \leq 0$$

в) Плоская область  $D$  ограничена линиями в декартовых координатах. Получите систему неравенств, описывающую её в **полярных** координатах. Изобразите область  $D$ .

$$D: y = \sqrt{3}x, \quad y = -\frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = 1$$

[2]

## Контрольная работа 2

Контрольная работа

Описание:

Контрольная работа проводится в часы аудиторных занятий в письменной форме.

Один вариант заданий состоит из нескольких задач на пройденные темы. На решение контрольной работы отводится 2 академических часа. Баллы за работу выставляются пропорционально числу правильно решённых задач. Основаниями для снижения оценки являются: ошибки в рассуждениях и расчётах, неправильный ответ, отсутствие комментариев и пояснений, небрежное выполнение.

### *Шкала оценивания*

- \* 10 баллов — правильно выполнены все задания, выбран оптимальный способ решения, работа оформлена аккуратно.
- \* 8-9 баллов — выполнены все задания, при сохранении правильной последовательности этапов решения допущены незначительные вычислительные ошибки, работа оформлена аккуратно.
- \* 6-7 баллов — правильно выполнено не менее 60 % заданий, допущены вычислительные ошибки, непоследовательность в решении, неаккуратность в оформлении.
- \* 0-5 баллов — правильно выполнено менее 60 % заданий, допущены существенные ошибки в вычислении и последовательности решения, оформление работы неудовлетворительное.

### *Пример варианта контрольной работы.*

#### **Задание 1. Двойной интеграл**

Фигура ограничена данными линиями. При помощи двойного интеграла найдите её площадь. Проверьте полученный результат, изменив порядок интегрирования в повторном интеграле.

$$x + 2y - 2 = 0, \quad x = (y - 1)^2$$

---

#### **Задание 2. Тройной интеграл**

Тетраэдр  $OABC$  ограничен координатными плоскостями и данной плоскостью. При помощи тройного интеграла найдите его объём.

Проверьте полученный результат по формуле:  $V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{OA} \overrightarrow{OB} \overrightarrow{OC}|$ .

$$-x + y + z = 3$$

---

#### **Задание 3. Тройной интеграл в криволинейных координатах**

Тело ограничено данными поверхностями. При помощи тройного интеграла найдите его объём, рассматривая тело в (а) цилиндрической и (б) сферической системах координат.

$$\sqrt{x^2 + y^2} + z = 0, \quad z + \sqrt{1 - x^2 - y^2} = 0$$

---

#### **Задание 4. Криволинейный интеграл**

Замкнутый контур составлен из линий задания 1. При помощи криволинейного интеграла найдите циркуляцию данного векторного поля. Проверьте полученный результат при помощи формулы Грина.

$$5y\vec{i} + (2x - y)\vec{j}$$

---

#### **Задание 5. Поверхностный интеграл**

Треугольник  $ABC$  образован данной плоскостью, отсеченной координатными плоскостями. При помощи поверхностного интеграла найдите его площадь. Проверьте полученный результат по формуле:  $S = \frac{1}{2} |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$ .

$$3x - 2y - z + 6 = 0$$

[3]

## **Работа на занятии 1**

### Практическая работа

Описание: Работа студента на практических занятиях. Здесь учитываются посещаемость занятий, ответы на вопросы с места, решение задач у доски.

### **Критерии оценивания и шкала баллов.**

**Баллы за решение задач у доски.** За выход к доске и правильное решение задачи студент получает 1 балл. У доски можно решать как текущие задания практики, так и разбирать домашнее задание, заданное на предыдущей практике (решения домашних задач студент записывает на доске заранее, на перерыве перед началом занятия). Студент должен не только записать решение задачи, но и выступить перед аудиторией, рассказав решение и ответив на вопросы.

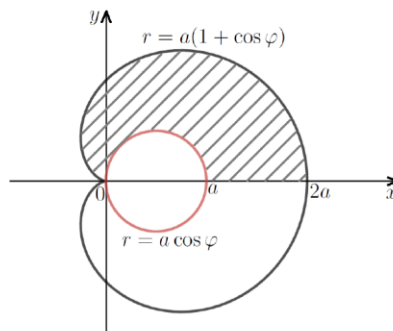
По усмотрению преподавателя практики студент может получить 1 балл за ответ на вопрос с места / предъявление решения задачи.

**Баллы за посещения занятий.** За посещение всех учебных занятий студент получает 2 балла. Если посещены не все занятия, но больше половины (или ровно половина), это оценивается в 1 балл. Если посещено менее половины занятий, выставляется 0 баллов. Правильное решение задачи у доски оценивается в 1 балл.

Баллы набираются вплоть до достижения максимума в 5 баллов. Баллами за решение задач у доски можно закрывать недостающие баллы за посещения.

### **Примеры заданий.**

Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:  $r = a(1 + \cos \varphi)$  и  $r = a \cos \varphi$  ( $a > 0$ )



Найти площадь фигуры, ограниченной кривыми:

$$x^2 + y^2 = 2ax, \quad x^2 + y^2 = 2bx, \quad y = x, \quad y = 0 \quad (0 < a < b).$$

Перейдя к полярным координатам, вычислить интеграл:

$$\iint_G (x^2 + y^2) dx dy,$$

где область  $G$  ограничена кривыми  $x^2 + y^2 = ax$ ,  $x^2 + y^2 = 2ax$ ,  $y = 0$  ( $y > 0$ ).

[4]

## Работа на занятии 2

### Практическая работа

Описание:

Работа студента на практических занятиях. Здесь учитываются посещаемость занятий, ответы на вопросы с места, решение задач у доски.

### Критерии оценивания и шкала баллов.

**Баллы за решение задач у доски.** За выход к доске и правильное решение задачи студент получает 1 балл. У доски можно решать как текущие задания практики, так и разбирать домашнее задание, заданное на предыдущей практике (решения домашних задач студент записывает на доске заранее, на перерыве перед началом занятия). Студент должен не только записать решение задачи, но и выступить перед аудиторией, рассказав решение и ответив на вопросы.

По усмотрению преподавателя практики студент может получить 1 балл за ответ на вопрос с места / предъявление решения задачи.

**Баллы за посещения занятий.** За посещение всех учебных занятий студент

получает 2 балла. Если посещены не все занятия, но больше половины (или ровно половина), это оценивается в 1 балл. Если посещено менее половины занятий, выставляется 0 баллов. Правильное решение задачи у доски оценивается в 1 балл.

Баллы набираются вплоть до достижения максимума в 5 баллов. Баллами за решение задач у доски можно закрывать недостающие баллы за посещения.

### Примеры заданий.

1) Вычислить  $\int_L (x - y) dS$ , где  $L$  – отрезок прямой от  $A(0; 0)$  до  $B(4; 3)$ .

2) Найти массу  $M$  дуги кривой

$$x = t, \quad y = \frac{t^2}{2}, \quad z = \frac{t^3}{3}, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

линейная плотность которой меняется по закону:  $\rho = \sqrt{2y}$ .

3) Найти массу всей астроиды  $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ , если  $\rho(x, y) = |xy|$ .

4) Найти массу всей кардионды  $r = a(1 + \cos \varphi)$ , если  $\rho(P) = k\sqrt{r}$ .

5) Вычислить

$$\int_L \frac{dS}{x^2 + y^2 + z^2}$$

где  $L$  – первый виток винтовой линии  $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ .

[5]

### РГР 1

#### Расчетно-графические работы

Описание: Типовой расчет по математике за третий семестр включает в себя задачи по темам: «Кратные и криволинейные интегралы».

Каждый студент обязан выполнить четыре задания (включая подпункты а), б)), одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие. Все чертежи и рисунки следует сделать на миллиметровке, затем подклеить их в тетрадь и снабдить необходимыми подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения. По окончании решения написать ответ.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае



необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

Типовой расчет 3 семестр.pdf – [https://niuitmo-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/178308\\_niuitmo\\_ru/Eazt6Ox0nz5DkeMs3y28O4QBwFdq0tJUwRwSKaMMyzsK7g?e=QTOqyu](https://niuitmo-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/178308_niuitmo_ru/Eazt6Ox0nz5DkeMs3y28O4QBwFdq0tJUwRwSKaMMyzsK7g?e=QTOqyu)

Шкала и критерии оценки:

Типовой расчет содержит 5 задач (включая подпункты а), б)).

1 решенная задача = 2 балла.

2 решенных задачи = 4 балла.

И так далее.

5 решенных задач = 10 баллов.

По усмотрению преподавателя возможна передача типового расчета либо досдача задач, где были допущены ошибки.

[6]

## **РГР 2**

Расчетно-графические работы

Описание: Типовой расчет по математике за третий семестр включает в себя задачи по темам: «Теория поля».

Каждый студент обязан выполнить четыре задания (включая подпункты а), б), в)), одно задание согласно своему варианту из каждой темы. Номера задач указываются преподавателем, ведущим практические занятия в группе.

Типовой расчет следует выполнить в отдельной тетради, перед выполнением каждого задания написать полное условие. Все чертежи и рисунки следует сделать на миллиметровке, затем подклеить их в тетрадь и снабдить необходимыми

подписями и обозначениями. При решении задач требуется делать достаточно подробные пояснения. По окончании решения написать ответ.

Выполненная работа сдается на проверку преподавателю, который в случае необходимости может потребовать от студента устные пояснения к выполненной работе, то есть защитить типовой расчет.

Типовой расчет 3 семестр.pdf – [https://niuitmo-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/178308\\_niuitmo\\_ru/Eazt6Ox0nz5DkeMs3y28O4QBwFdq0tJUwRwSKaMMyzsK7g?e=QTOqyu](https://niuitmo-my.sharepoint.com/:b:/g/personal/178308_niuitmo_ru/Eazt6Ox0nz5DkeMs3y28O4QBwFdq0tJUwRwSKaMMyzsK7g?e=QTOqyu)

Шкала и критерии оценки:

Типовой расчет содержит 4 задачи (включая подпункты а), b), c)).

1 решенная задача = 2 балла.

2 решенных задачи = 4 балла.

3 решенных задач = 6 баллов.

4 решенных задачи = 10 баллов (дополнительные 2 балла выставляются за полностью правильно решенный типовой расчет).

По усмотрению преподавателя возможна передача типового расчета либо досдача задач, где были допущены ошибки.

[7]

**Домашнее задание 1**

Домашнее задание

Описание:

#### Пример домашнего задания 1

1) Вычислить предел функции:

$$\text{а) } \lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} \quad \text{б) } \lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2} \quad \text{в) } \lim_{x \rightarrow 0, y \rightarrow 0} \frac{y^2 - x^2}{y^2 + x^2}$$

2) Найти частные производные первого порядка функции  $f(x, y)$ :

$$f = \ln \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - x}{\sqrt{x^2 + y^2} + x}$$

3) Разложить по формуле Тейлора функцию  $f(x, y, z)$  в окрестности точки  $(0, 1, 2)$ :

$$f(x, y, z) = x^2 + 3z^2 - 2yz - 3z$$

4) Исследовать функцию  $u(x, y)$  на экстремум:

$$u = 3x^2 - 2x\sqrt{y} + y - 8x$$

5) Написать уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности в точке  $(-2, 1, 4)$ :

$$z = 2x^2 - 4y^2$$

**Критерии оценивания и шкала баллов.** Каждая правильно решенная задача оценивается в 1 балл. 5 задач = 5 баллов. По желанию преподавателя могут быть составлены расширенные тесты с большим количеством задач. В этом случае стоимость одной задачи будет меньше.

[8]

#### Домашнее задание 2

Домашнее задание

Описание:

#### Пример домашнего задания 2

1) Вычислить двойной интеграл:

$$\iint_G (4 - y) dx dy, \text{ где область } G \text{ ограничена кривыми } x^2 = 4y, y = 1, x = 0 \ (x > 0)$$

2) Изменить порядок интегрирования в повторном интеграле:

$$\int_3^7 dx \int_{9/x}^3 f(x, y) dy + \int_7^9 dx \int_{9/x}^{10-x} f(x, y) dy$$

3) Вычислить двойной интеграл, перейдя к обобщенным полярным координатам  $r$  и  $\varphi$  по формулам  $x = ar \cos \varphi, y = br \sin \varphi$ :

$$\iint_G \frac{dx dy}{\sqrt{c^2 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}} \quad (c > 1), \text{ где область } G \text{ ограничена эллипсом } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4) Вычислить интеграл:

$$\int_0^3 dx \int_0^{2x} dy \int_0^{\sqrt{xy}} z dz$$

5) Найти массу и среднюю плотность кругового конуса с радиусом основания  $R$  и высотой  $H$ , если плотность в каждой точке пропорциональна квадрату расстояния точки от плоскости, проходящей через вершину конуса параллельно плоскости основания, и в центре основания равна  $\gamma_0$ .

**Критерии оценивания и шкала баллов.** Каждая правильно решенная задача оценивается в 1 балл. 5 задач = 5 баллов. По желанию преподавателя могут быть составлены расширенные тесты с большим количеством задач. В этом случае стоимость одной задачи будет меньше.

[9]

### Домашнее задание 3

Домашнее задание

Описание:

#### Пример домашнего задания 3

1) Вычислить криволинейный интеграл первого рода:

$$\iint_{\Gamma} y ds, \text{ где } \Gamma - \text{ арка циклоиды } x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

2) Вычислить криволинейный интеграл второго рода:

$$\iint_{\Gamma} 2xy dx + x^2 dy, \text{ где } \Gamma - \text{ дуга параболы } y = \frac{x^2}{4}, \quad 0 \leq x \leq 2.$$

3) Восстановить функцию, если известен её полный дифференциал:

$$du = (e^{2y} - 5y^3 e^x) dx + (2xe^{2y} - 15y^2 e^x) dy$$

4) Найти длину дуги пространственной кривой:

$$x = t \cos(t^2), \quad y = t \sin(t^2), \quad z = t^2, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$$

5) Найти работу поля  $\vec{F} = 2xy\vec{i} + y^2\vec{j} - x^2\vec{k}$  вдоль дуги кривой  $x^2 + y^2 - 2z^2 = 2a^2$ ,  $y = x$ , от точки  $A(a, a, 0)$  до точки  $B(a\sqrt{2}, a\sqrt{2}, a)$ .

**Критерии оценивания и шкала баллов.** Каждая правильно решенная задача оценивается в 1 балл. 5 задач = 5 баллов. По желанию преподавателя могут быть составлены расширенные тесты с большим количеством задач. В этом случае стоимость одной задачи будет меньше.

[10]

### Домашнее задание 4

Домашнее задание

Описание:

#### Пример домашнего задания 4

1) Вычислить поверхностный интеграл первого рода:

$$\iint_S (xy + yz + zx) dS, \text{ где } S - \text{ часть конической поверхности } z = \sqrt{x^2 + y^2}, \text{ расположенная внутри цилиндра } x^2 + y^2 = 2x.$$

2) С помощью теоремы Остроградского-Гаусса вычислить интеграл:

$$\iiint_S (1 + 2x) dy dz + (2x + 3y) dz dx + (3y + 4z) dx dy, \text{ где } S - \text{ внешняя сторона поверхности}$$

$$\text{пирамиды } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} \leq 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0.$$

3) Найти угол между  $\text{grad } u(M_1) \cdot \arctg\left(\frac{x}{y+x}\right)$  и  $\text{grad } u(M_2)$ , если:

$$u = \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2}, \quad M_1(1, 2, 2), \quad M_2(-3, 1, 0).$$

4) Проверить в координатной форме следующее равенство:

$$\text{rot rot } \vec{a} = \text{grad div } \vec{a} - \Delta \vec{a}$$

5) Найти по формуле Стокса циркуляцию поля  $\vec{a} = z^2\vec{i} + x^2\vec{j} + y^2\vec{k}$  вдоль контура

$\Gamma = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x + y + z = 1\}$ , ориентированного по часовой стрелке при взгляде на него из начала координат.

$$x = t \cos(t^2), \quad y = t \sin(t^2), \quad z = t^2, \quad 0 \leq t \leq \sqrt{2\pi}$$

**Критерии оценивания и шкала баллов.** Каждая правильно решенная задача

оценивается в 1 балл. 5 задач = 5 баллов. По желанию преподавателя могут быть составлены расширенные тесты с большим количеством задач. В этом случае стоимость одной задачи будет меньше.

## Экзамен

Экзамен может проводиться в устной или письменной форме. Возможно также проведение коллоквиума по части изученного материала.

**Если за экзамен набрано менее 10 баллов (9,9 или меньше), то экзамен считается не сданным и выставляется 0 баллов.**

### Предварительный список вопросов к экзамену

- 1) Функции одной и нескольких переменных. Основные определения. Непрерывные функции. Равномерная непрерывность.
- 2) Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал функции нескольких переменных. Геометрический смысл дифференциала функции нескольких переменных.
- 3) Дифференцирование сложной функции нескольких переменных. Производная функции  $u = \varphi(t)^{\psi(t)}$ . Дифференцирование функционального определителя.
- 4) Формула конечных приращений. Инвариантность формы первого дифференциала.
- 5) Производные высших порядков. Теорема о смешанных производных.
- 6) Дифференциалы высших порядков.
- 7) Формула Тейлора для функции нескольких переменных.
- 8) Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимые условия экстремума. Достаточные условия экстремума.
- 9) Экстремумы функции нескольких переменных. Условия отсутствия экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции.
- 10) Неявные функции. Теорема о неявной функции. Производные от неявно заданной функции.

- 11) Условный экстремум. Метод неопределенных множителей Лагранжа.
- 12) Векторная функция скалярного аргумента. Касательная прямая и нормальная плоскость к кривой.
- 13) Касательная плоскость и нормаль к поверхности.
- 14) Мера Жордана. Двойной интеграл.
- 15) Свойства интегрируемых функций. Суммы Дарбу.
- 16) Вычисление двойного интеграла. Теорема о среднем значении для функции двух переменных.
- 17) Криволинейные координаты. Якобиан перехода. Вычисление площади в криволинейных координатах.
- 18) Замена переменных в двойном интеграле.
- 19) Несобственные двойные интегралы по неограниченной области.
- 20) Несобственные двойные интегралы от неограниченных функций.
- 21) Тройной интеграл. Вычисление тройного интеграла.
- 22) Замена переменных в тройном интеграле. Цилиндрические и сферические координаты.
- 23) Приложения кратных интегралов. Площадь плоской фигуры. Объем тела. Масса тела с плотностью  $\mu(x,y,z)$ . Статические моменты. Центр масс тела. Потенциал гравитационного поля тела.
- 24) Момент инерции. Теорема Штейнера.
- 25) Длина кривой. Дифференциал длины дуги кривой в случаях, когда кривая задана в декартовых координатах и параметрически.
- 26) Криволинейный интеграл первого рода, его связь с определенным интегралом. Вычисление криволинейного интеграла первого рода в случаях, когда кривая задана в декартовых координатах, в полярных координатах, параметрически. Приложения криволинейного интеграла первого рода.
- 27) Односторонние и двусторонние поверхности. Ориентация поверхности.
- 28) Пример Шварца.
- 29) Площадь поверхности.

- 30) Поверхностный интеграл первого рода, его связь с двойным интегралом. Приложения поверхностного интеграла первого рода.
- 31) Скалярное поле. Производная по направлению.
- 32) Градиент скалярного поля. Свойства градиента. Приближенное вычисление градиента.
- 33) Векторное поле. Алгоритм поиска векторных линий. Дивергенция векторного поля. Физический смысл дивергенции. Свойства дивергенции.
- 34) Ротор векторного поля. Физический смысл ротора. Свойства ротора. Оператор Гамильтона.
- 35) Криволинейный интеграл второго рода. Существование и вычисление криволинейного интеграла второго рода.
- 36) Связь между криволинейными интегралами первого и второго рода. Работа силового поля.
- 37) Условия независимости криволинейного интеграла второго рода от пути интегрирования.
- 38) Восстановление функции по её полному дифференциалу. Признак полного дифференциала функции.
- 39) Теорема Грина.
- 40) Поверхностный интеграл второго рода. Связь поверхностных интегралов первого и второго рода.
- 41) Вычисление поверхностного интеграла второго рода. Поток векторного поля.
- 42) Теорема Стокса. Приложение теоремы Стокса к исследованию криволинейного интеграла второго рода в пространстве.
- 43) Теорема Стокса в векторной форме. Инвариантное определение ротора.
- 44) Теорема Остроградского-Гаусса.
- 45) Теорема Остроградского-Гаусса в векторной форме. Связь теоремы Остроградского-Гаусса и теоремы Грина. Инвариантное определение дивергенции.
- 46) Приложение формулы Остроградского-Гаусса к исследованию поверхностных интегралов. Теорема о независимости интеграла от поверхности.
- 47) Интеграл Гаусса.

48) Первая и вторая формулы Грина.

49) Потенциальное поле.

50) Соленоидальное поле. Критерий соленоидальности поля. Сохранение потока через сечение векторной трубки.  
Разложение произвольного векторного поля.

**Порядок формирования экзаменационного билета:** по одному вопросу из первой и второй половины перечня вопросов к экзамену и задача.

Пример экзаменационного билета № 1

- 1) Частные производные. Полное приращение и полный дифференциал функции нескольких переменных. Геометрический смысл дифференциала функции нескольких переменных.
- 2) Теорема Стокса в векторной форме. Инвариантное определение ротора.
- 3) Задача

**Окончательный список вопросов к экзамену определяет лектор.**

Вопросы к экзамену заранее высылаются студентам.

**Шкала оценивания и критерии оценки:**

30 баллов - ответы на вопросы даны подробно и в полном объеме, задача (при наличии в билете) решена правильно. Написано аккуратно и корректно.

20-29 баллов - ответы на вопросы даны, но не в полном объеме. Либо присутствуют ошибки, не оказывающие критического влияния на доказательства. Задача (при наличии в билете) решена правильно.

10-19 баллов - ответы на вопросы даны частично. Могут присутствовать ошибки критического характера, разрушающие доказательство. В решении задачи может быть допущена ошибка некритического характера.

0-9 баллов - ответы на вопросы практически отсутствуют, задача не решена. Если сумма баллов за экзамен менее

10 баллов (9,9 или меньше), экзамен считается не сданным и выставляется 0 баллов.

**Ответственный за проведение экзамена:** лидер и лекторы курса

**Дополнительные попытки:**



В случае пропуска студентом экзамена по уважительной причине, ему может быть предоставлена попытка сдать экзамен в другое время. Без уважительной причины попытка не предоставляется.

Уважительность причины устанавливает студофис по заявлению студента. Студофис выдаёт письменное подтверждение, которое студент направляет ответственному.

#### **4. Порядок оценки освоения обучающимися учебного материала определяется содержанием следующих разделов дисциплины:**

<b>№ п/п</b>	<b>Наименование раздела дисциплины (модуля)</b>	<b>Оценочные средства контроля успеваемости</b>	<b>Тип оценочного средства</b>
1	1. Функции нескольких переменных	Домашнее задание 1	Домашнее задание
		Контрольная работа 1	Контрольная работа
		Работа на занятии 1	Практическая работа
2	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы	Домашнее задание 2	Домашнее задание
		Домашнее задание 3	Домашнее задание
		Домашнее задание 4	Домашнее задание
		Контрольная работа 1	Контрольная работа
		Контрольная работа 2	Контрольная работа
		Работа на занятии 1	Практическая работа
		Работа на занятии 2	Практическая работа
		РГР 1	Расчетно-графические работы
3	3. Теория поля	Домашнее задание 4	Домашнее задание
		Контрольная работа 2	Контрольная работа
		Работа на занятии 2	Практическая работа
		РГР 2	Расчетно-графические работы

#### **5. ТИПОВЫЕ КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ ИЛИ ИНЫЕ МАТЕРИАЛЫ, НЕОБХОДИМЫЕ ДЛЯ ОЦЕНКИ ДОСТИЖЕНИЯ ЗАПЛАНИРОВАННЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ**

<b>№ оценочно го средства</b>	<b>Название</b>	<b>Тип</b>	<b>Ключевая точка</b>	<b>Мин. балл</b>	<b>Макс. балл</b>	<b>Оценивает раздел(-ы)</b>
1	Контрольная работа 1	Контрольная работа	нет	0	10	1. Функции нескольких переменных
						2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
2	Контрольная работа 2	Контрольная работа	нет	0	10	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
						3. Теория поля
3	Работа на занятии 1	Практическая работа	нет	0	5	1. Функции нескольких переменных
						2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
4	Работа на занятии 2	Практическая работа	нет	0	5	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
						3. Теория поля
5	РГР 1	Расчетно- графические работы	нет	0	10	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
6	РГР 2	Расчетно- графические работы	нет	0	10	3. Теория поля
7	Домашнее задание 1	Домашнее задание	нет	0	5	1. Функции нескольких переменных
8	Домашнее задание 2	Домашнее задание	нет	0	5	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
9	Домашнее задание 3	Домашнее задание	нет	0	5	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы

10	Домашнее задание 4	Домашнее задание	нет	0	5	2. Кратные, криволинейные и поверхностные интегралы
						3. Теория поля
11	Экзамен	Экзамен	-	0	30	Все разделы