Занятие 1. Задачи по материалам вводных лекций

I. Логика
II. Множества и операции с ними
III. Отношения и функция

Быстрый переход:

→ Занятие
→ Консультация
→ Самостоятельно

Источники:

[Михайлов] Михайлов А.Б. Плоткин А.И. Рисс Е.А. Яшина Е.Ю. Математический язык в задачах (2001)

Составила: Рванова А.С.
Редакторы: Лебедева А.Д., Правдин К.В.

Занятие

I. Логика

Задача 1. Какие из следующих выражений языка являются высказываниями, какие предикатами? Какие высказывания истинны? Для каждого из предикатов найдите область допустимых значений переменных и множество истинности.

1. Луна есть спутник Марса;
2. $2+\sqrt{3}-\sqrt[3]{2}$
3. $2+\sqrt[3]{3}-\sqrt{6}>1000$
4. $x^2-2x+6=0$
5. x^2-2x+2
6. число 3 является корнем уравнения $x^2-5x+6=0$
7. любое простое число p не имеет делителей, отличных от себя и 1
8. натуральное число n не меньше 1
9. да здравствует солнце, да скроется тьма
10. $x^2+y^2>0$
11. $x^2+y^2\geqslant 0$
12. $x^2+y^2<0$
13. $\sin^2 x+\cos^2 x=1$
14. $\sin^2 x+\cos^2 x\geqslant 1$
15. $\sin^2 x+\cos^2 x<1$
16. $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=1$

Источник: [Михайлов] 1.1, 1.2, 1.3

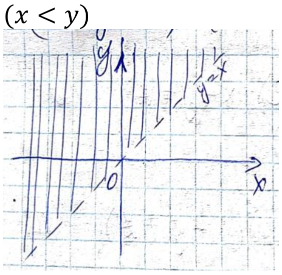
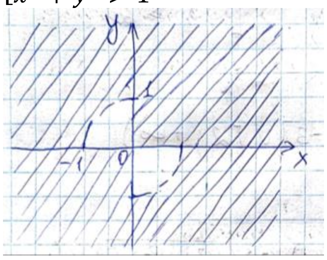
Ответы:

1. высказывание, ложное
2. –
3. высказывание, ложное
4. предикат, ОДЗ: $\mathbb{R}$, множество истинности: $\emptyset$
5. –
6. высказывание, истинное
7. высказывание, истинное
8. предикат, ОДЗ: $\mathbb{N}$, множество истинности: $\mathbb{N}$
9. –
10. предикат, ОДЗ: $\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$, множество истинности: $\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R},\ |x|+|y|\neq 0\}$
11. предикат, ОДЗ: $\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$, множество истинности: $\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$
12. предикат, ОДЗ: $\{(x,y)|\ x\in\mathbb{R},\ y\in\mathbb{R}\}$, множество истинности: $\emptyset$
13. предикат, ОДЗ: $\mathbb{R}$, множество истинности: $\mathbb{R}$
14. предикат, ОДЗ: $\mathbb{R}$, множество истинности: $\mathbb{R}$
15. предикат, ОДЗ: $\mathbb{R}$, множество истинности: $\emptyset$
16. предикат, ОДЗ: $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi n}{2}\right\},\ n\in\mathbb{Z}$, множество истинности: $x\in\mathbb{R}\backslash\left\{\frac{\pi n}{2}\right\},\ n\in\mathbb{Z}$

Задача 2. Изобразите множества истинности следующих предикатов, заданных на множестве действительных чисел:

1. $\overline{(|x| < 3) \wedge (x < 2)}$ на координатной прямой
2. $(x^2 + y^2 \geq 0) \to (x < y)$ на координатной плоскости
3. $(xy < 0) \to (x^2 + y^2 > 1)$ на координатной плоскости

Ответы:

1. $\overline{(|x| < 3) \wedge (x < 2)} \Leftrightarrow$
   $\overline{(|x| < 3)} \vee \overline{(x < 2)} \Leftrightarrow$
   $(|x| \geq 3) \vee (x \geq 2) \Leftrightarrow$
   $\left[\begin{array}{l} |x| \geq 3 \\ x \geq 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$
   $x \in (-\infty; -3] \cup [2; +\infty)$
   
2. $(x^2 + y^2 \geq 0) \to (x < y) \Leftrightarrow$
   $\overline{(x^2 + y^2 \geq 0)} \vee (x < y) \Leftrightarrow$
   $(x^2 + y^2 < 0) \vee (x < y) \Leftrightarrow$
   $(x < y)$
   
3. $(xy < 0) \to (x^2 + y^2 > 1) \Leftrightarrow$
   $\overline{(xy < 0)} \vee (x^2 + y^2 > 1) \Leftrightarrow$
   $(xy \geq 0) \vee (x^2 + y^2 > 1) \Leftrightarrow$
   $\left[\begin{array}{l} xy \geq 0 \\ x^2 + y^2 > 1 \end{array}\right.$
   

Задача 3. Пусть:

$P(x)$: «x – простое число»
$Q(x)$: «x – чётное число»
$R(x)$: «x – целое число»
$D(x, y)$: «x делит y»

Сформулируйте словами следующие высказывания. Укажите, какие из них истинные, какие ложные.

1. $(\forall x)\left(P(x) \to \overline{Q(x)}\right)$
2. $(\forall x)\left(\overline{P(x)} \to (\forall y)\left(P(y) \to \overline{D(x, y)}\right)\right)$

Ответы:

1. Никакое простое число не является чётным. Ложно, контрпример: 2
2. Никакое составное число не делит никакое простое число. Истинно.

Задача 4. Установите, какие из следующих высказываний истинны, какие ложны:

1. $\exists x\ (x + 1 = x)$
2. $\exists x\ (x^2 + x + 1 = 0)$
3. $\forall x\ (x^2 + x + 1 > 0)$
4. $\forall x\ (x^2 - 6x + 8 \geq 0)$

5. $\exists x\,(x^2 - 6x + 8 \geq 0 \;\wedge\; x^2 - 4x + 3 > 0)$
6. $\exists x\,(x^2 - x = 0 \;\wedge\; x^2 - 4x + 3 \leq 0)$
7. $\forall x\,(x^2 - 6x + 8 \geq 0 \vee x^2 - 4x + 3 < 0)$
8. $\forall x\,(x^2 - x - 2 > 0 \vee x^2 - 6x + 8 \geq 0)$
9. $\exists x\,(x \in [2;4] \to x^2 - 6x + 8 > 0)$
10. $\exists x\,(x \in [1;3] \to x^2 - 6x + 8 > 0)$
11. $\forall x\,(x \in [2;3] \to x^2 - 6x + 8 \leq 0)$
12. $\forall x\,(x \in [4;5] \to x^2 - 6x + 8 \geq 0)$

Источник: [на основе: Михайлов, 2.26]

Ответы: 1. л, 2. л, 3. и, 4. л, 5. и, 6. и, 7. л, 8. и, 9. л, 10. и, 11. и, 12. и.

Задача 5. Запишите с помощью логической и подходящей математической символики следующее предложение, а также постройте отрицание к нему. Определите истинность высказывания и его отрицания, ответ обоснуйте.

Существуют такие действительные числа x и z, что для всякого действительного числа y верно равенство $x + y = z$.

Ответы:

предложение: $(\exists x \in \mathbb{R})(\exists z \in \mathbb{R})(\forall y \in \mathbb{R})(x + y = z)$ ложь
отрицание: $(\forall x \in \mathbb{R})(\forall z \in \mathbb{R})(\exists y \in \mathbb{R})(x + y \neq z)$ истина

II. Множества и операции с ними

Задача 6. Множества заданы характеристическим свойством. Задайте их перечислением элементов.

1. $A = \{\, a \mid a - \text{месяц года, в название которого входят 4 и только 4 различные буквы} \,\}$
2. $B = \{\, x \mid 5x = x - 8 \,\}$
3. $C = \{\, x \mid x \in \mathbb{N} \;\wedge\; x^2 = 4 \,\}$
4. $D = \{\, x \mid x \in \mathbb{Z} \;\wedge\; x^2 = 4 \,\}$

Ответы:

1. $\{\text{март, июнь, июль}\}$
2. $\{-2\}$
3. $\{2\}$
4. $\{-2, 2\}$

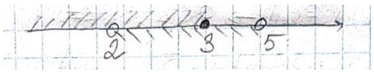
Задача 7. Какие из высказываний истинны, а какие ложны:

1. $\{1; \{2; 3\}\} = \{1; 2; 3\}$
2. $\{\{1\}; \{2\}\} = \{1; 2\}$
3. $\{1,2\} \subset \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$
4. $\{1,2\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$
5. $\{1,3\} \in \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$
6. $\{1,3\} \subset \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$
7. $\emptyset \in \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$
8. $\emptyset \subset \{\{1,2,3\}, \{1,3\}, 1, 2\}$

Ответы: 1. л, 2. л, 3. и, 4. л, 5. и, 6. л, 7. л, 8. и

Задача 8. Даны множества $A = (-\infty\,; 3]$, $B = (2; 5)$. Найдите $\bar{A}$, $\bar{B}$, $A \backslash B$, $B \backslash A$, $A \cap B$, $A \cup B$, $A \Delta B$ (симметрическая разность $(A \backslash B) \cup (B \backslash A)$).

Ответы:



$\bar{A} = (3;\, +\infty)$; $\bar{B} = (-\infty; 2] \,\cup\, [5;\, +\infty)$
$A \backslash B = (-\infty; 2]$; $B \backslash A = (3; 5)$
$A \cap B = (2; 3]$; $A \cup B = (-\infty; 5)$
$A \Delta B = (-\infty; 2] \cup (3; 5)$

Задача 9. Пусть множество $A = \{2,4,6\}$, $B = \{3,5,7\}$. Найдите множества $A \times B$, $B \times A$, A^2, B^2.

Ответы:

$A \times B = \{(2,3), (2,5), (2,7), (4,3), (4,5), (4,7), (6,3), (6,5), (6,7)\}$

$B \times A = \{(3,2), (3,4), (3,6), (5,2), (5,4), (5,6), (7,2), (7,4), (7,6)\}$

$A^2 = \{(2,2), (2,4), (2,6), (4,2), (4,4), (4,6), (6,2), (6,4), (6,6)\}$

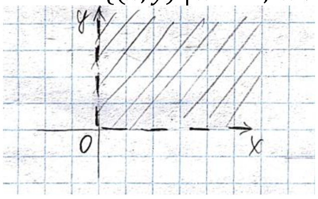
$B^2 = \{(3,3), (3,5), (3,7), (5,3), (5,5), (5,7), (7,3), (7,5), (7,7)\}$

Задача 10. Найдите декартово произведение множеств A и B и изобразите его элементы на координатной плоскости:

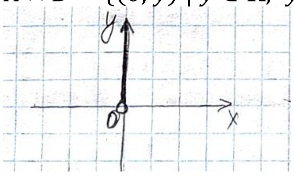
1. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$
2. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x = 0\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$
3. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x = 2\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R}\}$
4. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ 1 \le x \le 2\}$, $B = \{y \mid y \in \mathbb{R},\ 0 \le y \le 1\}$
5. $A = \mathbb{N}$, $B = \mathbb{N}$
6. $A = \mathbb{Z}$, $B = \mathbb{Z}$
7. $A = \mathbb{R}$, $B = \mathbb{R}$

Ответы:

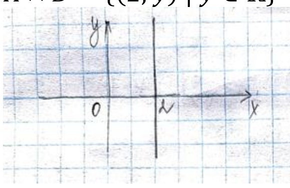
1. $A \times B = \{(x, y) \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0,\ y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$



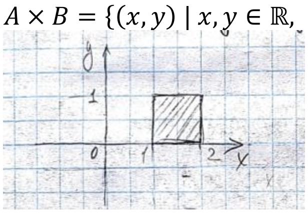
2. $A \times B = \{(0; y) \mid y \in \mathbb{R},\ y > 0\}$



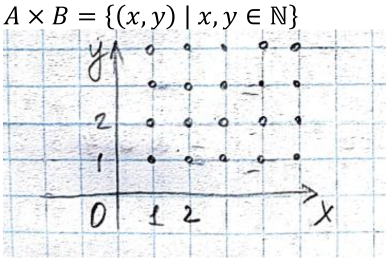
3. $A \times B = \{(2; y) \mid y \in \mathbb{R}\}$



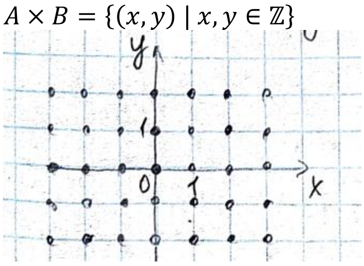
4. $A \times B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R},\ 1 < x < 2,\ 0 < y < 1\}$



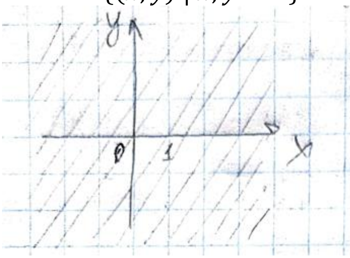
5. $A \times B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{N}\}$



6. $A \times B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{Z}\}$



7. $A \times B = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$



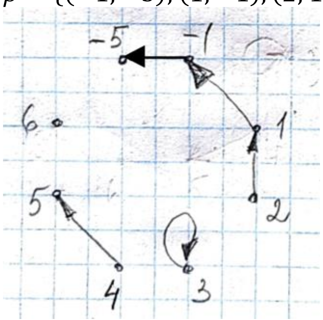
III. Отношения и функция

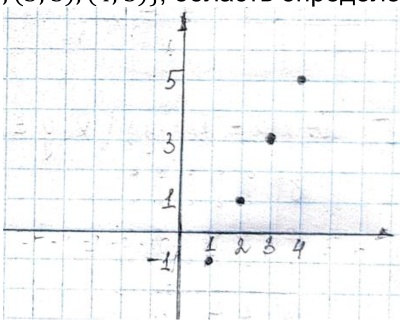
Задача 11. Пусть множество $A = \{-5, -1, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите область определения и область значений бинарного отношения ρ. Постройте граф и график бинарного отношения ρ.

1. $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in A \wedge 2x - y = 3\}$
2. $\rho = \{(x, y) \mid x, y \in A \wedge x \vdots y\}$
3. см. Задача 23

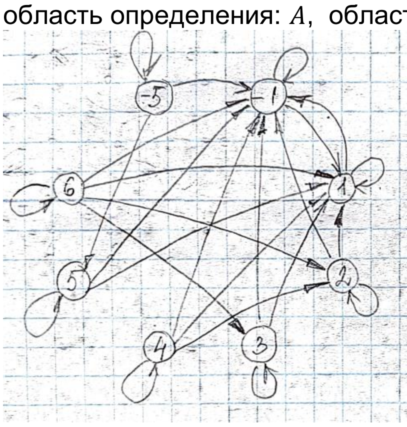
Ответы:

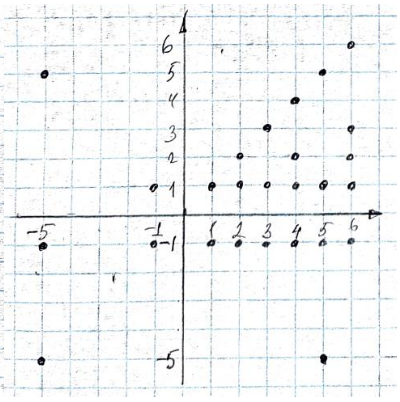
1. $\rho = \{(-1; -5); (1; -1), (2; 1), (3; 3), (4; 5)\}$, область определения: $\{1,2,3,4\}$, область значений: $\{-1,1,3,5\}$





2. $\rho = \{(-5,-5), (-5,-1), (-5,5), (-1,-1), (-1,1), (1,1), (1,-1), (2,-1)\ (2,1), (2,2),$ $(3,-1), (3,1), (3,3), (4,-1), (4,1), (4,2), (4,4), (5,-1), (5,1), (5,5), (5,-5), (6,-1), (6,1), (6,2), (6,3), (6,6)\}$, область определения: A, область значений: A





Задача 12. Определите, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладают следующие бинарные отношения. Какое из данных отношений является отношением эквивалентности?

1. параллельность прямых на плоскости
2. перпендикулярность прямых
3. пересечение прямых

4. отношение делимости на множестве целых чисел

Ответы:

1. рефлексивность (если по определению параллельности прямых прямая параллельна самой себе), симметричность, транзитивность, отношение эквивалентности
2. симметричность
3. рефлексивность, симметричность
4. рефлексивность, транзитивность

Задача 13. Множество X – множество квадратов на плоскости, Y – множество окружностей на той же плоскости. Каждому квадрату соответствует вписанная окружность. Является ли это соответствие отображением? Если да, то является ли это отображение инъекцией, сюръекцией, биекцией?

Ответы: отображение, сюръекция

Задача 14. Найти образ множества $A = \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$ при отображении $y = \sin x$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right]$

Задача 15. Найти прообраз множества $B = [0, 9]$ при отображении $y = x^2$.

Ответ: $[-3, 3]$

Консультация

I. Логика

Задача 16. Опровергните с помощью контрпримера следующие высказывания

1. $(\forall x)\left((0.2^x > 0.0016) \to (x > 4)\right)$ или $\forall x\colon\ 0.2^x > 0.0016 \ \Rightarrow\ x > 4$
2. «Любые равные углы являются вертикальными»

Ответы:

1. К примеру, $x = 1$.
2. К примеру, углы при основании равнобедренного треугольника.

Задача 17. Запишите следующие высказывания в виде формул с кванторами, предварительно введя обозначения для используемых предикатов:

1. Все рыбы умеют плавать.
2. Некоторые реки впадают в Каспийское море.
3. По крайней мере, одно четное число делится на 8.
4. Не все птицы умеют летать.
5. Ни одна собака не умеет мяукать.
6. Кто хочет, тот добьется.
7. Если где-нибудь сверкнула молния, то когда-нибудь загремит гром.
8. Если кто-нибудь может испечь пирожки, то и Коля может.

Ответы:

1. $\forall x\ P(x)$, где $P(x)$: «Рыба x умеет плавать».
2. $\exists y\ Q(y)$, где $Q(y)$: «Река y впадает в Каспийское море».
3. $\exists x\ \left(P(x) \wedge Q(y)\right)$, где $P(x)$: «Число x чётно», $Q(x)$: «Число x делится на 8».
4. $\neg\left(\forall x\ R(x)\right)$, где $R(x)$: «Птица x умеет летать».
5. $\neg\left(\exists x\ P(x)\right)$, где $P(x)$: «Собака x умеет мяукать».
6. $\forall x\ \left(P(x) \to Q(x)\right)$, где $P(x)$: «x хочет», $Q(x)$: «x добьется желаемого».
7. $\left(\exists x\ P(x)\right) \to \left(\exists y\ Q(y)\right)$, где $P(x)$: «В месте x сверкнула молния», $Q(y)$: «В момент y загремит гром».
8. $\left(\exists x\ P(x)\right) \to P(\text{Коля})$, где $P(x)$: «Человек x может испечь пирожки».

Задача 18. Запишите утверждение в импликативной форме. Выделите разъяснительную часть, условие, заключение. Запишите высказывание в виде формулы с кванторами, введя обозначения для используемых предикатов. Постройте предложения:

- обратное
- противоположное
- контрапозитивное (обратное противоположному, противоположное обратному)

определите истинность каждого (ложные опровергните с помощью контрпримера):

1. «Диагонали ромба перпендикулярны»
2. «Сумма двух нечётных чисел – чётное число»

Ответы:

1. <u>Для любого четырехугольника</u> (разъяснительная часть),
если <u>четырехугольник является ромбом</u> (условие),
то <u>его диагонали перпендикулярны</u> (заключение).

Обозначения:

M – множество четырехугольников,
$R(x)$ – “x является ромбом”,
$P(x)$ – “диагонали x перпендикулярны”.

Исходное предложение: $(\forall x \in M)\ R(x) \to P(x)$.

- Обратное предложение: $(\forall x \in M)\ P(x) \to R(x)$.
«Четырехугольник с перпендикулярными диагоналями является ромбом.»

Ложное, контрпример – дельтоид.

- Противоположное предложение: $(\forall x \in M)\ \bar{R}(x) \to \bar{P}(x)$.
  «Если четырехугольник не является ромбом, то его диагонали не перпендикулярны.»
  Ложное, контрпример – дельтоид.
- Контрапозитивное: $(\forall x \in M)\ \bar{P}(x) \to \bar{R}(x)$.
  «Если диагонали четырёхугольника не перпендикулярны, то четырёхугольник не ромб.»
  Истинное.

2. Для любых двух чисел (разъяснительная часть),
если эти числа нечетны (условие),
то их сумма – четное число (заключение).

Обозначения:

$P(x)$ – "x – четное число".

Исходное предложение: $(\forall x)(\forall y)\left(\bar{P}(x) \wedge \bar{P}(y) \to P(x+y)\right)$.

- Обратное предложение: $(\forall x)(\forall y)\left(P(x+y) \to \bar{P}(x) \wedge \bar{P}(y)\right)$.
  «Если сумма двух чисел – четное число, то эти числа нечетны.»
  Ложное, контрпример: $8 = 6 + 2$.
- Противоположное предложение: $(\forall x)(\forall y)\left(\overline{\bar{P}(x) \wedge \bar{P}(y)} \to \bar{P}(x+y)\right) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\left(P(x) \vee P(y) \to \bar{P}(x+y)\right)$.
  «Если из двух чисел хотя бы одно четное, то их сумма нечетное число.»
  Ложное, контрпример $6 + 2 = 8$.
- Контрапозитивное: $(\forall x)(\forall y)\left(\bar{P}(x+y) \to \overline{\bar{P}(x) \wedge \bar{P}(y)}\right) \Leftrightarrow (\forall x)(\forall y)\left(\bar{P}(x+y) \to \left(P(x) \vee P(y)\right)\right)$.
  «Если сумма 2-х чисел нечетное число, то хотя бы 1 из этих чисел четное.»
  Истинное.

Задача 19. Для каждого из следующих условий выясните, является ли оно необходимым и является ли оно достаточным для того, чтобы выполнялось неравенство $x^2 - 2x - 8 \le 0$:

1. $x = 0$
2. $x \ge -3$
3. $x > -2$
4. $x \ge -1$ и $x \le 3$
5. $x \ge -1$ и $x < 10$
6. $-2 < x \le 10$
7. $-2 \le x \le 4$
8. $x^2 - x - 12 \le 0$

Ответы: [Михайлов, 2.57]

1. достаточное, не необходимое
2. необходимое, не достаточное
3. не необходимое, не достаточное
4. не необходимое, достаточное
5. не необходимое, не достаточное
6. не необходимое, не достаточное
7. необходимое и достаточное
8. необходимое, не достаточное

II. Множества и операции с ними

Задача 20. Выясните, какие из следующих высказываний истинны, а какие ложны:

1. $\emptyset \subset \{\emptyset\}$
2. $\emptyset \in \{\emptyset\}$

3. $\emptyset = \{\emptyset\}$
4. $\emptyset \subset \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$
5. $\emptyset \in \{\emptyset; \{\emptyset\}\}$
6. $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$
7. $\{\emptyset\} \subset \{\{\emptyset\}\}$
8. $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$

Ответы: [Михайлов, 1.25]

Истинны 1, 2, 4, 5, 6, а ложны 3, 7, 8.

Задача 21. Какие из следующих пар множеств связаны между собой отношением включения:

1. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x > 2\},\ B = \{y \mid y \in \mathbb{N},\ y > 2\}$
2. $A = \{x \mid x \in \mathbb{R},\ x > 0\},\ B = \{y \mid y \in \mathbb{N},\ y > 0\}$
3. $A = \{x \mid x \in \mathbb{N},\ x^2 > 4\},\ B = \{y \mid y \in \mathbb{N},\ y^2 > 5\}$
4. A – множество многоугольников с периметром 4,
   B – множество квадратов с площадью 1.

Ответы: 1. $A = B$; 2. $B \subset A$; 3. $A = B$; 4. $B \subset A$.

Задача 22. Докажите равенства:

1. $A \backslash (A \backslash B) = A \cap B$
2. $(A \backslash B) \cup (\bar{A} \backslash \bar{B}) = (A \cup B) \backslash (A \cap B)$

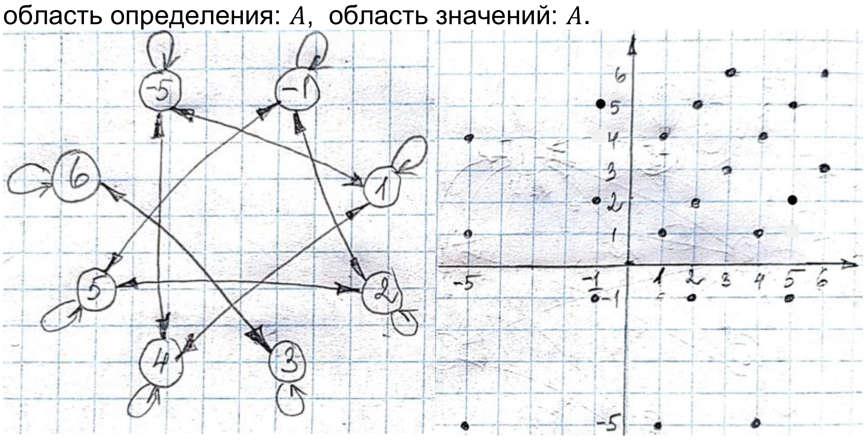
III. Отношения и функция

Задача 23. (продолжение Задача 11) Пусть множество $A = \{-5, -1, 1\ ,2, 3, 4, 5, 6\}$. Найдите область определения и область значений бинарного отношения ρ. Постройте граф и график бинарного отношения ρ.

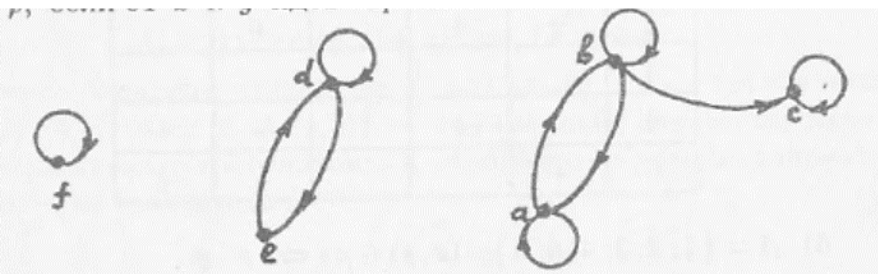
3. $x\rho y$ – «x и y имеют одинаковые остатки при делении на 3»

Ответы:

4. $\rho = \{(-5,-5), (-5,1), (-5,4), (-1,-1), (-1,2), (-1,5), (1,-5), (1,1), (1,4),$
   $(2,-1), (2,2), (2,5), (3,3), (3,6), (4,-5), (4,1), (4,4), (5,-1), (5,2), (5,5), (6,3), (6,6)\}$,
   область определения: A, область значений: A.



Задача 24. На множестве $A = \{a, b, c, d, e, f\}$ задано отношение ρ: $(x, y) \in \rho$, если от x к y идет стрелка:



1. Дорисуйте одну из стрелок так, чтобы ρ стало рефлексивным.

2. Дорисуйте одну из стрелок так, чтобы ρ стало симметричным.
3. Дорисуйте две стрелки так, чтобы ρ стало транзитивным.
4. Можно ли убрать две стрелки так, чтобы ρ стало транзитивным?
5. Сотрите две стрелки так, чтобы ρ стало антисимметричным.
6. Можно ли добавить одну или несколько стрелок так, чтобы ρ стало антисимметричным?

Ответы: [Михайлов, 5.3]

1. $e \to e$
2. $c \to b$
3. $e \to e,\ a \to c$
4. например, $b \to c,\ \ d \to e$
5. например, $e \to d$ и $a \to b$
6. нет

Задача 25. Определите, какими свойствами (рефлексивность, симметричность, транзитивность) обладают следующие бинарные отношения. Какое из данных отношений является отношением эквивалентности?

1. отношение делимости на множестве натуральных чисел
2. отношение взаимной простоты на множестве натуральных чисел
3. отношение лежать по одну сторону от данной прямой (между точками плоскости)
4. иметь одинаковый цвет глаз на множестве живущих на планете людей

Ответы:

1. рефлексивность, транзитивность
2. симметричность
3. рефлексивность, симметричность, транзитивность, отношение эквивалентности
4. рефлексивность, симметричность, транзитивность, отношение эквивалентности

Задача 26. Является ли соответствие $f \subseteq A \times B$ функцией? Если да, то является ли функция инъективной, сюръективной, биективной? Найдите область определения и область значений функции. Существует ли обратная функция f^{-1}?

1. $A = \{a, b, c, d\},\ B = \{1, 2, 3\},\ f = \{(a, 2);\ (b, 3);\ (d, 3)\}$
2. $A = \{a, b, c, d\},\ B = \{1, 2, 3\},\ f = \{(a, 2);\ (b, 3);\ (c, 3);\ (d, 1)\}$
3. $A = \{a, b, c, d\},\ B = \{1, 2, 3\},\ f = \{(a, 2);\ (a, 3);\ (b, 2);\ (c, 3);\ (d, 1)\}$
4. $A = \left[\frac{\pi}{2}; 2\pi\right],\ B = \mathbb{R},\ f(x) = \cos x$
5. $A = [-1,\ 1],\ B = \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right],\ f(x) = \operatorname{arctg} x$

Ответы:

1. функция, не инъекция, не сюръекция, не биекция, область определения: $\{a, b, d\}$, область значений: B, обратная не сущ.
2. функция, не инъекция, сюръекция, не биекция, область определения: A, область значений: B, обратная не сущ.
3. не функция
4. функция, не инъекция, не сюръекция, не биекция, область определения: A, область значений: $[-1, 1]$, обратная не сущ.
5. функция, инъекция, сюръекция, биекция, область определения: A, область значений: B, обратная сущ.

Задача 27. Найдите образ $f(A)$ множества A при отображении $f(x) = x^2 - 4x - 12,\ \ A = (-1; 7)$.

Ответ: $[-16, 9)$

Задача 28. Даны функции $f(x) = \sin x$, $g(x) = \sqrt{x+1}$. Найдите $f \circ g$, $g \circ f$. Укажите область определения и область значений данных и найденных функций.

Ответы:

$f \circ g = \sin\sqrt{x+1}\,,\ \ f \circ g : [-1, +\infty) \to [-1,1]$

$g \circ f = \sqrt{\sin x + 1},\ \ g \circ f : (-\infty, +\infty) \to [0, \sqrt{2}]$

Задача 29. Обратима ли функция f? Если обратима, найдите обратную функцию. Если необратима, измените область определения и область значений и найдите обратную функцию.

1. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos x$
2. $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 + 1$

Ответы:

1. $f: [0, \pi] \to [-1,1], \ f(x) = \cos x, \quad f^{-1}: [-1,1] \to [0, \pi], \ f^{-1}(x) = \arccos x$
2. $f: [0, +\infty) \to [1, +\infty), \ f(x) = 3x^2 + 1, \quad f^{-1}: [1, +\infty) \to [0, +\infty), \ f^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x-1}{3}}$

Самостоятельно

I. Логика

Задача 30. Какие из следующих предложений являются предикатами? Какие предикаты являются тождественно истинными (тождествами), тождественно ложными (невыполнимыми), выполнимыми?

1. натуральное число x делится на 3
2. существует натуральное число x, которое делится на 3
3. всякое вещественное число x удовлетворяет условию $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
4. всякое число x меньше y
5. оба корня уравнения $x^2 - 3x + 2 = 0$ положительны
6. один из корней уравнения $x^2 + ax + 2 = 0$ отрицателен
7. $x + y = y + x$
8. неравенство $x^2 - 10x + \sqrt{a} \geq 0$ не имеет отрицательных решений

Ответы: [Михайлов, 1.4, 1.5]

Предикаты: 1, 4, 6, 7, 8
Тождественно истинные: 7
Тождественно ложные: нет
Выполнимые: все предикаты

Задача 31. Приведите примеры таких $a \in \mathbb{R}$, для которых истинны, и примеры таких $a \in \mathbb{R}$, для которых ложны следующие высказывания:

1. $\exists x < 0\ (x^2 + ax + a = 0)$
2. $\forall x \in [0;1]\ (x^2 + x + a < 0)$
3. $\forall x > 7\ (x^2 + ax + 1 > 0)$
4. $\exists x \in [1;2]\ (x^2 + ax + 1 < 0)$
5. $\forall x \in [3;4]\ (x^2 + ax + a > 0)$
6. $\exists x \in [a;a+1]\ (x^2 - x - 2 < 0)$
7. $\forall x \in [a;a+1]\ (x^2 + ax + 1 < 0)$
8. $\exists x \in [a;a+1]\ (x^2 + ax + 1 > 0)$
9. $\forall x \in [a;a+1]\ (x^2 + ax + 1 > 0)$

Ответы: [Михайлов, 2.28]

1. при $a = -1$ истинно, при $a = 0$ ложно
2. при $a = -100$ истинно, при $a = 0$ ложно
3. при $a = 0$ истинно, при $a = -100$ ложно
4. при $a = -100$ истинно, при $a = 0$ ложно
5. при $a = 1$ истинно, при $a = -100$ ложно
6. при $a = 0$ истинно, при $a = 10$ ложно
7. при всех a ложно
8. при всех a истинно
9. при всех a истинно

Задача 32. Какие из следующих высказываний истинны:

1. для того чтобы число делилось на 12, достаточно, чтобы оно делилось на 3
2. для того чтобы число делилось на 5, необходимо, чтобы оно оканчивалось нулем
3. для того чтобы число делилось на 4, необходимо, чтобы оно делилось на
4. для того чтобы число делилось на 2, достаточно, чтобы оно оканчивалось нулем
5. для того чтобы $\sin\ \alpha$ был равен $\frac{1}{2}$, необходимо, чтобы α было равно $\frac{\pi}{6}$
6. для того чтобы уравнение $ax + b = 0$ имело положительный корень, достаточно, чтобы выполнялось неравенство $ab < 0$
7. для того чтобы четырехугольник был ромбом, достаточно чтобы его диагонали были взаимно перпендикулярными
8. для того чтобы четырехугольник был параллелограммом, необходимо, чтобы какие-либо две его противоположные стороны были равны

Ответы: [Михайлов, 2.56]

Истинны: 3, 4, 6, 8

Задача 33. Определить, какое из предложений A и B является для другого необходимым, достаточным, необходимым и достаточным условием. Сформулировать результат в подходящих терминах: «Если ..., то ...», «... тогда и только тогда ...», «... необходимо для...», «... достаточно для...», «...необходимо и достаточно...»

A: Прямые l_1 и l_2 расположены в одной плоскости.

B: Прямые l_1 и l_2 параллельны.

Ответы:
«Если B, то A», «A необходимо для B», «B достаточно для A»

II. Множества и операции с ними

Задача 34. Пусть $U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ - универсальное множество, $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$. Найдите множество X, если известно, что:

1. $X \setminus A = \{6; 7\},\ A \cap X = \{1; 3; 5\}$
2. $A \setminus X = \{2; 4\}, \dots X \setminus A = \{6; 7\};$
3. $A \cup X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8\}, A \setminus X = \{1; 4; 5\};$
4. $A \cup X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}, A \cap X = \{1; 2\}$
5. $A \setminus X = \{3; 4\}, A \cup X = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\};$
6. $\bar{X} \setminus A = \{7; 8; 9\}, \bar{A} \cup X = \{2; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$

Ответы: [Михайлов, 1.70]

1. $X = \{1; 3; 5; 6; 7\}$
2. $X = \{1; 3; 5; 6; 7\}$
3. $X = \{2; 3; 6; 7; 8\}$
4. $X = \{1; 2; 6; 7\}$
5. $X = \{1; 2; 5; 6\}$
6. $X = \{2; 4; 5; 6\}$

Задача 35. Пусть $A = \{1; 2; 3\},\ B = \{3; 4\},\ C = \{1; 4\},\ D = \{1; 2\}$. Перечислите элементы следующих множеств:

1. $A \times B$
2. $(B \cup C) \times (B \cap C)$
3. $(A \times C) \setminus (D \times C)$
4. $(A \times B) \cap (B \times C)$

Ответы: [Михайлов, 1.69]

1. $\{(1,3); (1,4); (2,3); (2,4); (3,3); (3,4)\}$
2. $\{(1,4); (3,4); (4,4)\}$
3. $\{(3,1); (3,4)\}$
4. $\{(3,4)\}$

III. Отношения и функция

Задача 36. Множество X – положительные числа, Y – множество треугольников. Каждому числу x соответствует треугольник y, периметр которого равен x. Является ли это соответствие отображением? Если да, то является ли это отображение инъекцией, сюръекцией, биекцией?

Ответ: Соответствие не является отображением, т. к. одному числу соответствует более одного треугольника с таким периметром.

Задача 37. Между множествами $A = \{0; 5; -7; 13\}$ и $B = \{x, y, z, t\}$ установлено соответствие:

1. $\rho_1 = \{(0, x); (5, x); (-7, y); (13, z)\}$
2. $\rho_2 = \{(0, y); (-7, x); (-7, y); (13, z); (5, x)\}$
3. $\rho_3 = \{(0, z); (5, x); (13, t); (-7, y)\}$

Является ли соответствие отображением? Если да, то является ли это отображение инъекцией, сюръекцией, биекцией?

Ответы:

1. отображение, не инъекция, не сюръекция, не биекция
2. не отображение
3. отображение, биекция

Задача 38. Запишите $\varphi \circ f$. Существует ли $f \circ \varphi$? Ответ обоснуйте.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	9	4	1	0	1	4	9

x	0	1	4	9	16
$\varphi(x)$	-3	-2	1	6	13

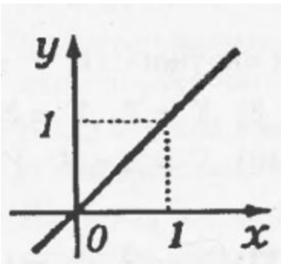
Ответы:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$(\varphi \circ f)(x)$	6	1	-2	-3	-2	1	6

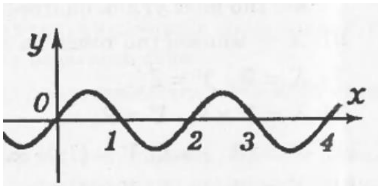
Отображения $f \circ \varphi$ не существует.

Задача 39. Выясните, являются ли графиками каких-либо числовых функций вида $y = f(x)$ следующие множества точек на координатной плоскости.

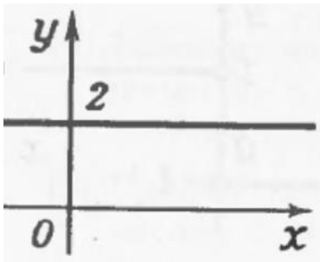
1



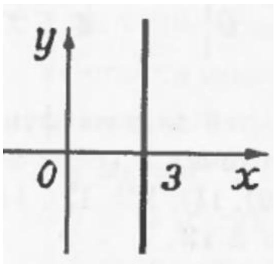
2



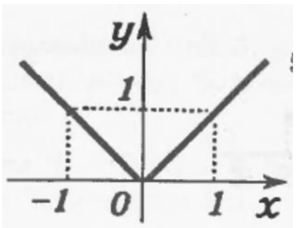
3



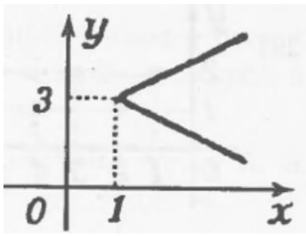
4



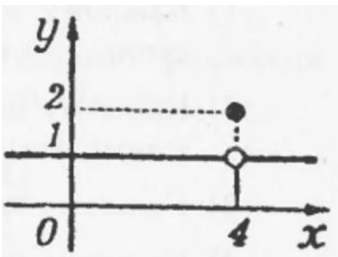
5



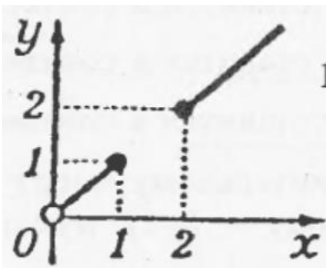
6



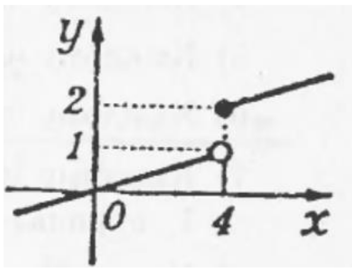
7



8



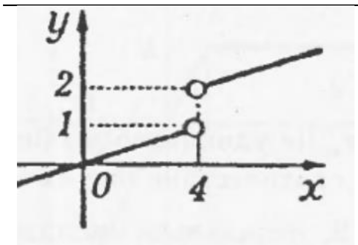
9

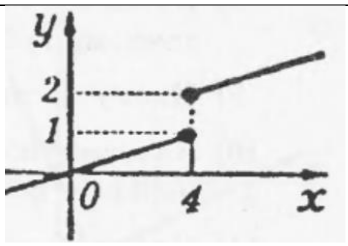


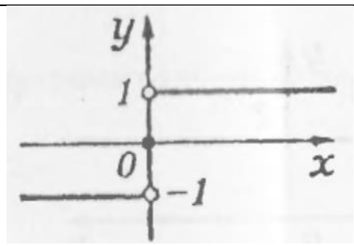
10

11

12







Ответы: [Михайлов, 3.13]

Функции: 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12