Домашнее задание 2. Преобразование Лапласа

Функция вещественной переменной $f(t)$ называется оригиналом, если она удовлетворяет условиям

- $f(t)$ непрерывна для любого $t \geq 0$;
- $f(t) \equiv 0$ при $t < 0$;
- существуют числа C_1 и C_2 такие, что $|f(t)| < C_1 e^{C_2 t}$.

Прямое преобразование Лапласа

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int\limits_0^\infty f(t)\, e^{-st} \mathrm{d}t, \tag{1}$$

где $s = \sigma + j\omega$ – комплексная переменная,
$F(s)$ – изображение (образ) Лапласа функции $f(t)$.

Обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int\limits_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} e^{st} F(s)\, \mathrm{d}s, \tag{2}$$

где $j = \sqrt{-1}$,
σ – вещественная постоянная, абсциса абсолютной сходимости (все полюсы $F(s)$ лежат слева от прямой $\Re(\sigma)$).

Некоторые свойства преобразования Лапласа:

- Линейность
$$\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = aF(s) + bG(s).$$
- Дифференцирование оригинала
$$\mathcal{L}\left\{\dot{f}(t)\right\} = sF(s) - f(0).$$
- Теорема о смещении
$$\mathcal{L}\left\{e^{at} f(t)\right\} = F(s-a).$$
$$\mathcal{L}^{-1}\{F(s-a)\} = e^{at} f(t).$$
- Теорема подобия
$$\mathcal{L}\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} F\left(\frac{s}{a}\right), \ \ \forall \alpha > 0.$$

Вариант 1

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=te^{-3t}+2\cos\left(4t\right)-5.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{s+1}{s^2+2s+5}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-3\dot{y}\left(t\right)+2y\left(t\right)=e^{2t},\ \ y\left(0\right)=0,\ \ \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 2

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=4t^3-\sin\left(2t\right)+e^t.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{2s-1}{s^2-4s+13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+4y\left(t\right)=\sin\left(2t\right),\ \ y\left(0\right)=1,\ \ \dot{y}\left(0\right)=0.$$

Вариант 3

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=\left(t-1\right)^2e^{-t}+3\cos t.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{3}{s^2+6s+10}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+2\dot{y}\left(t\right)+y\left(t\right)=t,\ \ y\left(0\right)=0,\ \ \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 4

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=2te^{2t}-\sin\left(3t\right)+4.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{s-2}{s^2-2s+2}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-y\left(t\right)=e^{-t},\ \ y\left(0\right)=1,\ \ \dot{y}\left(0\right)=-1.$$

Вариант 5

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=t^2\cos t+e^{4t}.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{4s+3}{s^2+8s+20}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+6\dot{y}\left(t\right)+9y\left(t\right)=1,\ \ y\left(0\right)=0,\ \ \dot{y}\left(0\right)=0.$$

Вариант 6

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=\left(2t+1\right)-3\sin\left(4t\right).$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{5}{s^2+4s+8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-4\dot{y}\left(t\right)+4y\left(t\right)=e^t,\ \ y\left(0\right)=1,\ \ \dot{y}\left(0\right)=2.$$

Вариант 7

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t\sin(2t)\,2e^{3t}.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s+4}{s^2+6s+8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + \dot{y}(t) - 2y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 8

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 3t^2e^{-2t} + \cos(5t) - 1.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{2s-3}{s^2-6s+10}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 9y(t) = \cos(3t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 9

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = \left(t^2 - 2t\right)e^t + 4\sin t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{6}{s^2+10s+29}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + y(t) = t^2, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Вариант 10

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 5\cos(2t) - te^{-4t} + 2.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s-1}{s^2-8s+20}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 4\dot{y}(t) + 5y(t) = e^{-2t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 11

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t^2e^{-t} + 3\sin(3t) - 2.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s-3}{s^2-6s+13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 5y(t) = e^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 12

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = (t+2)^2e^{2t} - 4\cos t.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{5}{s^2+8s+25}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 6y(t) = t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Вариант 13

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right) = 2t\sin\left(2t\right) + e^{-3t} + 1.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right) = \frac{2s+1}{s^2+4s+8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+4\dot{y}\left(t\right)+4y\left(t\right) = \cos\left(2t\right), \quad y\left(0\right)=0, \quad \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 14

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right) = 3t^2\cos t - 2e^t.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right) = \frac{4s-5}{s^2-10s+29}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-5\dot{y}\left(t\right)+6y\left(t\right) = e^{3t}, \quad y\left(0\right)=1, \quad \dot{y}\left(0\right)=2.$$

Вариант 15

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right) = \left(t^2+t\right)e^{-2t} + 5\sin t.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right) = \frac{6}{s^2+12s+40}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+y\left(t\right) = t^2, \quad y\left(0\right)=0, \quad \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 16

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right) = 4\cos\left(3t\right) - t^2e^{-t} + 3.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right) = \frac{s+5}{s^2+10s+34}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-3\dot{y}\left(t\right)+2y\left(t\right) = \sin t, \quad y\left(0\right)=1, \quad \dot{y}\left(0\right)=0.$$

Вариант 17

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right) = te^{3t} + 2\sin\left(4t\right) - \cos\left(2t\right).$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right) = \frac{3s-2}{s^2-4s+13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+6\dot{y}\left(t\right)+9y\left(t\right) = e^{-3t}, \quad y\left(0\right)=0, \quad \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 18

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right) = \left(2t^2-t\right)e^{-t} + \sin\left(5t\right).$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right) = \frac{7}{s^2+6s+18}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-2\dot{y}\left(t\right)+2y\left(t\right) = e^{t}, \quad y\left(0\right)=1, \quad \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 19

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=t\cos\left(3t\right)+3e^{-4t}-2.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{s-4}{s^2-8s+20}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+3\dot{y}\left(t\right)+2y\left(t\right)=te^{-t},\ \ y\left(0\right)=0,\ \ \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 20

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=5te^{-2t}+\cos\left(4t\right)-3\sin t.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{8}{s^2+14s+53}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+5\dot{y}\left(t\right)+6y\left(t\right)=\cos t,\ \ y\left(0\right)=1,\ \ \dot{y}\left(0\right)=-1.$$

Вариант 21

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=t^3e^{-t}+2\sin\left(4t\right)-3\cos t.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{s+2}{s^2+4s+13}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+3\dot{y}\left(t\right)+2y\left(t\right)=e^{-2t},\ \ y\left(0\right)=1,\ \ \dot{y}\left(0\right)=0.$$

Вариант 22

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=\left(t^2-2t+1\right)e^{2t}+5\sin\left(2t\right).$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{4}{s^2+6s+18}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-4\dot{y}\left(t\right)+4y\left(t\right)=t,\ \ y\left(0\right)=0,\ \ \dot{y}\left(0\right)=1.$$

Вариант 23

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=3t\cos\left(3t\right)-e^{-t}+2.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{2s-1}{s^2-2s+5}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)+\dot{y}\left(t\right)-6y\left(t\right)=\cos t,\ \ y\left(0\right)=1,\ \ \dot{y}\left(0\right)=-1.$$

Вариант 24

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f\left(t\right)=4t^2\sin t+3e^{t}-1.$$

2. Найдите оригинал $f\left(t\right)$, если:

$$F\left(s\right)=\frac{3s+4}{s^2+8s+20}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}\left(t\right)-2\dot{y}\left(t\right)+y\left(t\right)=e^{t},\ \ y\left(0\right)=0,\ \ \dot{y}\left(0\right)=2.$$

Вариант 25

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = \left(t^3 + t\right) e^{-3t} + \sin(5t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{7}{s^2 + 10s + 34}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 5\dot{y}(t) + 6y(t) = t^2, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 26

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 6\cos(4t) - te^{-2t} + 4.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s - 2}{s^2 - 4s + 8}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - \dot{y}(t) - 2y(t) = e^t, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$

Вариант 27

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = te^{4t} + 3\sin(6t) - 2\cos(3t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{5s - 3}{s^2 - 6s + 18}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 8\dot{y}(t) + 16y(t) = \cos(2t), \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 28

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = \left(3t^2 - 4t\right) e^{-t} + \cos(7t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{9}{s^2 + 12s + 45}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 4\dot{y}(t) + 5y(t) = e^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 29

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t\sin(4t) + 4e^{-5t} - 3.$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s + 6}{s^2 + 12s + 40}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 2\dot{y}(t) + 3y(t) = te^{-t}, \quad y(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 30

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = 7te^{-3t} + 2\cos(5t) - \sin(2t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{10}{s^2 + 16s + 73}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 7\dot{y}(t) + 12y(t) = \cos(3t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = -2.$$

Вариант 31

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = t^2 e^{-t} + 2\cos(2t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{3s+1}{s^2 - s + 11}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) + 3\dot{y}(t) + 6y(t) = \cos(5t), \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 1.$$

Вариант 32

1. Найдите изображение Лапласа функции:

$$f(t) = \left(t^2 - 4\right) e^{2t} + 2\cos(3t).$$

2. Найдите оригинал $f(t)$, если:

$$F(s) = \frac{s+1}{s^2 + 2s + 15}.$$

3. Решите ОДУ с начальными условиями:

$$\ddot{y}(t) - 2\dot{y}(t) + 3y(t) = te^{2t}, \quad y(0) = 1, \quad \dot{y}(0) = 0.$$