

Лекция 5

5. Числовые характеристики случайных величин

5.1. Математическое ожидание

Пусть ξ — дискретная случайная величина с законом распределения

$$P\{\xi = x_k\} = p_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

и g — некоторая функция, заданная на последовательности $\{x_k\}$. Очевидно, что композиция

$$g(\xi) = g \circ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

является случайной величиной.

Математическим ожиданием $Mg(\xi)$ случайной величины $g(\xi)$ называется число

$$Mg(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} g(x_k)p_k, \quad (1.1)$$

если ряд (1.1) абсолютно сходится. Если ряд (1.1) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины $g(\xi)$ не существует. В частности, число

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} x_k p_k \quad (1.2)$$

является математическим ожиданием дискретной случайной величины ξ .

Заметим, что если дискретная случайная величина ξ принимает конечное число значений, то математическое ожидание (1.1) всегда существует.

Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с плотностью распределения вероятностей $p_\xi(x)$. Пусть g — некоторая непрерывная функция, заданная на области значений случайной величины ξ . Композиция

$$g(\xi) = g \circ \xi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$$

является случайной величиной.

Математическим ожиданием $Mg(\xi)$ случайной величины $g(\xi)$ называется число

$$Mg(\xi) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)p_\xi(x) dx. \quad (1.3)$$

если интеграл (1.3) абсолютно сходится. Если интеграл (1.3) не сходится абсолютно, то говорят, что математическое ожидание случайной величины ξ не существует. Число

$$M\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} xp_\xi(x) dx \quad (1.4)$$

есть математическое ожидание абсолютно непрерывной случайной величины ξ .

Пример 1. Рассмотрим дискретную случайную величину ξ с законом распределения

$$P\{\xi = 2^{k/2}\} = 2^{-k}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Тогда

$$M\xi = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{k/2} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k/2} = \frac{2^{-1/2}}{1 - 2^{-1/2}} = \frac{1}{\sqrt{2} - 1}.$$

При этом

$$M\xi^2 = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k 2^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 1 = \infty,$$

т. е. математическое ожидание случайной величины ξ^2 не существует.

Пример 2. Рассмотрим абсолютно непрерывной случайную величину ξ , имеющей плотность распределения

$$p(x) = \begin{cases} 0, & x \leq a, \\ 1/x^2, & x > a. \end{cases}$$

Тогда

$$M\xi = \int_1^{\infty} x \frac{1}{x^2} dx = \ln x \Big|_1^{\infty},$$

т. е. математическое ожидание случайной величины ξ не существует. При этом

$$M(1/\xi) = \int_1^{\infty} \frac{1}{x} \frac{1}{x^2} dx = -\frac{1}{2x^2} \Big|_1^{\infty} = \frac{1}{2}.$$

5.2. Свойства математического ожидания. Дисперсия

Следующие свойства математического ожидания легко следуют из определений.

М1. Если C — постоянная, то

$$MC = C.$$

М2. Если c — постоянная, то для любой случайной величины ξ справедливо равенство

$$M(c\xi) = cM\xi.$$

М3. Для любой случайной величины ξ

$$|M\xi| \leq M|\xi|.$$

М4. Для любых случайных величин ξ_1 и ξ_2

$$M(\xi_1 + \xi_2) = M\xi_1 + M\xi_2.$$

М5. Если случайная величина ξ неотрицательна, то $M\xi \geq 0$.

Неравенство Коши-Буняковского. Для любых двух случайных величин ξ , η таких, что $M\xi^2 < \infty$, $M\eta^2 < \infty$, справедливо неравенство

$$|M\xi\eta| \leq \sqrt{M\xi^2 \cdot M\eta^2} \quad (2.1)$$

Дисперсией случайной величины ξ называется величина

$$D\xi = M(\xi - M\xi)^2, \quad (2.2)$$

если математическое ожидание, стоящее в правой части равенства, существует. Дисперсия является мерой рассеяния значений случайной величины около её математического ожидания. Величина $\sigma = \sqrt{D\xi}$ называется *средним квадратическим отклонением*.

Преобразуем правую часть (2.2). Имеем

$$M(\xi - M\xi)^2 = M(\xi^2 - 2\xi M\xi + (M\xi)^2) = M\xi^2 - 2M\xi \cdot M\xi + (M\xi)^2.$$

Подставляя в (2.2), получаем

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2. \quad (2.3)$$

Если случайная величина ξ имеет дискретное распределение, то из (1.1) получаем

$$D\xi = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - M\xi)^2 p_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 p_k - (M\xi)^2 \quad (2.4)$$

Аналогично для случайной величины ξ с абсолютно непрерывным распределением из (1.3) будем иметь

$$D\xi = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - M\xi)^2 p(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 p(x) dx - (M\xi)^2. \quad (2.5)$$

Следующие свойства дисперсии легко следуют из определений.

D1. Для любой случайной величины ξ справедливо неравенство

$$D\xi \geq 0.$$

D2. Если C — постоянная, то

$$DC = 0.$$

D3. Если c — постоянная, то

$$D(c\xi) = c^2 D\xi, \quad D(\xi + c) = D\xi$$

5.3. Моменты случайных величин

Пусть ξ — некоторая случайная величина, ν — неотрицательное целое число. Число

$$\alpha_\nu = M\xi^\nu \quad (3.1)$$

называется *моментом* порядка ν случайной величины ξ . Момент (3.1) может не существовать. Очевидно, что α_0 всегда существует и равен единице.

Если ξ — дискретная случайная величина, то

$$\alpha_\nu = \sum_{k=1}^{\infty} x_k^\nu p_k. \quad (3.2)$$

Если ξ — абсолютно непрерывная случайная величина, то

$$\alpha_\nu = \int_{-\infty}^{\infty} x^\nu p_\xi(x) dx. \quad (3.3)$$

Первый момент α_1 равен математическому ожиданию и будет часто обозначаться через m :

$$\alpha_1 = M\xi = m.$$

Величины

$$\mu_v = M(\xi - m)^v \quad (3.4)$$

называются *центральными моментами* случайной величины ξ . Очевидно, что

$$\mu_2 = D\xi.$$

Легко проверяются следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \mu_0 &= 1, \\ \mu_1 &= 0, \\ \mu_2 &= \alpha_2 - m^2, \\ \mu_3 &= \alpha_3 - 3m\alpha_2 + 2m^3, \\ \mu_4 &= \alpha_4 - 4m\alpha_3 + 6m^2\alpha_2 - 3m^4. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Рассмотрим, например, третье:

$$\mu_3 = M(\xi - m)^3 = M(\xi^3 - 3m\xi^2 + 3m^2\xi - m^3) = \alpha_3 - 3m\alpha_2 + 2m^3.$$

5.4. Примеры

Вычислим математические ожидания и дисперсии некоторых распределений.

1. Вырожденное распределение. В этом случае очевидно, что

$$M\xi = a, \quad D\xi = 0. \quad (4.1)$$

2. Биномиальное распределение ($n \in \mathbb{N}$, $0 < p < 1$). Имеем

$$M\xi = \sum_{k=0}^n k P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=1}^n k C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Так как $k C_n^k = n C_{n-1}^{k-1}$ при $k = 1, \dots, n$, то

$$M\xi = np \sum_{k=1}^n C_{n-1}^{k-1} p^{k-1} q^{n-k} = np(p+q)^{n-1} = np.$$

Найдём $M[\xi(\xi-1)]$. Запишем

$$M[\xi(\xi-1)] = \sum_{k=0}^n k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=2}^n k(k-1) C_n^k p^k q^{n-k}.$$

Учитывая равенство $k(k-1) C_n^k = n(n-1) C_{n-2}^{k-2}$ при $k = 2, \dots, n$, получим

$$\begin{aligned} M[\xi(\xi-1)] &= n(n-1)p^2 \sum_{k=2}^n C_{n-2}^{k-2} p^{k-2} q^{n-k} = \\ &= n(n-1)p^2(p+q)^{n-2} = n(n-1)p^2. \end{aligned}$$

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M[\xi(\xi - 1)] + M\xi - (M\xi)^2.$$

Следовательно

$$D\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.$$

В результате

$$M\xi = np, \quad D\xi = npq = npq. \quad (4.2)$$

3. Распределение Пуассона ($\lambda > 0$).

Найдём $M\xi$.

$$M\xi = \sum_{k=0}^{\infty} k P\{\xi = k\} = \sum_{k=0}^{\infty} k \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda.$$

Вычислим $M[\xi(\xi - 1)]$. Имеем

$$M[\xi(\xi - 1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \lambda^2 e^{-\lambda} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} = \lambda^2.$$

Далее

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = M[\xi(\xi - 1)] + M\xi - (M\xi)^2 = \lambda.$$

В результате

$$M\xi = \lambda, \quad D\xi = \lambda. \quad (4.3)$$

4. Равномерное распределение на отрезке $[a, b]$, $a < b$:

$$M\xi = \int_a^b xp(x) dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x dx = \frac{1}{b-a} \frac{1}{2} (b^2 - a^2) = \frac{a+b}{2}.$$

Далее

$$M\xi^2 = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a} \frac{1}{3} (b^3 - a^3) = \frac{a^2 + ab + b^2}{3}.$$

Найдём дисперсию.

$$D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2 = \frac{a^2 + ab + b^2}{3} - \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(b-a)^2}{12}.$$

В результате

$$M\xi = \frac{a+b}{2}, \quad D\xi = \frac{(b-a)^2}{12}. \quad (4.4)$$

5.5. Нормальное распределение

Приведём цитату из книги [5] на стр. 258: *каждый уверен в справедливости закона ошибок, экспериментаторы — потому, что они думают, что это математическая теорема, математики — потому, что они думают, что это экспериментальный факт.*

Стандартная нормальная функция распределения определяется равенством

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt. \quad (5.1)$$

Соответствующая стандартная нормальная плотность вероятности есть

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}. \quad (5.2)$$

С функцией $\Phi(x)$ тесно связаны специальные функции $\operatorname{erf} x$, $\operatorname{erfc} x$:

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt, \quad \operatorname{erfc} x = 1 - \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} dt, \quad (5.3)$$

называемые *функцией ошибок* и *дополнительной функцией ошибок* соответственно. Функция $\Phi(x)$ выражается через $\operatorname{erf} x$ следующим образом:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \left(\frac{x}{\sqrt{2}} \right) \right\}. \quad (5.4)$$

Рассмотрим моменты стандартно нормальной функции распределения

$$\alpha_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^k e^{-t^2/2} dt.$$

Очевидно, что все нечётные моменты равны нулю. Чётные моменты легко вычисляются с помощью формулы

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-Ax^2} dx = \frac{1}{2} A^{-\alpha/2} \Gamma(\alpha/2), \quad \alpha > 0, \quad A > 0. \quad (5.5)$$

В результате получаем

$$\alpha_k = \begin{cases} 0, & \text{при } k = 2s + 1, \\ (2s - 1)!!, & \text{при } k = 2s. \end{cases} \quad (5.6)$$

Случайная величина ξ называется *нормально распределённой с параметрами m и σ^2* или, короче, *нормальной* (m, σ^2) , если функция распределения величины ξ есть $\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, где $\sigma > 0$ и m — постоянные. Плотность вероятности равна

$$\frac{1}{\sigma} \Phi' \left(\frac{x-m}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$$

Найдём математическое ожидание и дисперсию. Имеем

$$\begin{aligned} M\xi &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (m + \sigma y) e^{-y^2/2} dy = m, \\ D\xi &= \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x-m)^2 e^{-(x-m)^2/2\sigma^2} dx = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} y^2 e^{-y^2/2} dy = \sigma^2. \end{aligned}$$

Из (5.6) следует, что моменты относительно среднего значения величины ξ равны

$$\mu_{2s+1} = 0, \quad \mu_{2s} = (2s - 1)!! \sigma^{2s}. \quad (5.7)$$

В частности, коэффициенты асимметрии и эксцесса равны

$$\gamma_1 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0, \quad \gamma_2 = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = 0.$$

Если случайная величина ξ нормальна (m, σ^2) , то линейная функция $A\xi + B$ нормальна $(Am + B, A^2\sigma^2)$.