

**Задание 1. Вещественные функции.**

Придумайте числа  $a, b, t_0, t_1, t_2$  такие, что  $a, b > 0$  и  $t_2 > t_1 > t_0 > 0$ . Рассмотрите следующие функции  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

1. **Квадратная волна** — периодическая функция с периодом  $T = t_2 - t_0$  такая, что

$$f(t) = \begin{cases} a, & t \in [t_0, t_1), \\ b, & t \in [t_1, t_2). \end{cases}$$

2. Любая **чётная** периодическая функция по вашему выбору.
3. Любая **нечётная** периодическая функция по вашему выбору.
4. Любая периодическая функция по вашему выбору, график которой состоит не только из прямых линий, и которая не является **ни чётной, ни нечётной**.

Для каждой из функций  $f(t)$  рассмотрите частичные суммы рядов Фурье  $F_N$  и  $G_N$  вида

$$F_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N \left( a_n \cos(\omega_n t) + b_n \sin(\omega_n t) \right),$$

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t},$$

где  $\omega_n = 2\pi n/T$ . Для этого:

- Приведите формулы для вычисления коэффициентов рядов Фурье  $(a_n, b_n)$  ( $n = \overline{0, N}$ ) и  $c_n$  ( $n = \overline{-N, N}$ ). Если значения некоторых из коэффициентов очевидны, то укажите это.
  - Для первой функции (**квадратная волна**) также вычислите значения указанных коэффициентов вручную при  $N = 2$ .
- Напишите программу для вычисления коэффициентов рядов Фурье  $(a_n, b_n)$  и  $c_n$  для произвольного  $N$ . Приведите в отчёте полученные коэффициенты при  $N = 2$ .
  - Для первой функции сравните результаты с полученными ранее вручную.
- Задайтесь пятью различными значениями  $N$  и постройте графики  $F_N(t)$  и  $G_N(t)$ . Сравните их друг с другом и с графиком исходной функции  $f(t)$ .
- Выберите наибольшее из рассмотренных  $N$  и проверьте выполнение равенства Парсеваля для оригинала функции  $f(t)$  и рассмотренных частичных сумм ряда  $F_N(t)$  и  $G_N(t)$ .

**Ожидаемые результаты:**

- Для каждый из функций  $f(t)$ :
  - Аналитическое выражение выбранной функции  $f(t)$  и ее график, охватывающий не менее пары периодов.
  - Формулы для вычисления коэффициентов  $(a_n, b_n)$  и  $c_n$ . Для первой функции также привести результаты вычисления коэффициентов вручную по указанным формулам при  $N = 2$  с выкладками расчетов.
  - Результаты программного вычисления коэффициентов  $(a_n, b_n)$  и  $c_n$  при  $N = 2$ . Для первой функции также сравнить их с полученными ранее.
  - Графики частичных сумм рядов  $F_N(t)$  и  $G_N(t)$  для не мене чем пяти различных значений  $N$ . Для повышения наглядности сравнения частичных сумм рядов между собой и с исходной функцией рекомендуется для каждого выбранного  $N$  приводить отдельный рисунок с выведенными на одну координатную плоскость графиками функции  $f(t)$  и частичных сумм  $F_N(t)$  и  $G_N(t)$ .
  - Результаты проверки равенства Парсеваля.
- Выводы.

**Задание 2. Комплексная функция.**

Задайтесь числами  $R, T > 0$  и рассмотрите комплекснозначную функцию  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  с периодом  $T$  такую, что

$$\operatorname{Re}(f(t)) = \begin{cases} R, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}), \\ 2R - 8Rt/T, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}), \\ -R, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}), \\ -6R + 8Rt/T, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}), \end{cases} \quad \operatorname{Im}(f(t)) = \begin{cases} 8Rt/T, & t \in [-\frac{T}{8}, \frac{T}{8}), \\ R, & t \in [\frac{T}{8}, \frac{3T}{8}), \\ 4R - 8Rt/T, & t \in [\frac{3T}{8}, \frac{5T}{8}), \\ -R, & t \in [\frac{5T}{8}, \frac{7T}{8}), \end{cases}$$

Для функции  $f(t)$  рассмотрите частичные суммы ряда Фурье

$$G_N(t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{i\omega_n t},$$

где  $\omega_n = 2\pi n/T$ . Для этого:

- Приведите формулы для вычисления коэффициентов ряда Фурье  $c_n$  ( $n = \overline{-N, N}$ ) и вычислите их значения вручную при  $N = 2$ .
- Напишите программу для вычисления коэффициентов ряда Фурье  $c_n$  для произвольного  $N$  и приведите в отчёте результаты работы программы при  $N = 2$ .
- Постройте параметрические графики (на комплексной плоскости) частичных сумм ряда  $G_N(t)$  при  $N = 1, 2, 3, 10$ . Сравните их друг с другом и с параметрическим графиком исходной функции  $f(t)$ .
- Постройте графики  $\operatorname{Re}(G_N(t)), \operatorname{Im}(G_N(t))$  при  $N = 1, 2, 3, 10$  и сравните их с соответствующими графиками  $\operatorname{Re}(f(t)), \operatorname{Im}(f(t))$ .
- Выберите наибольшее из рассмотренных  $N$  и проверьте выполнение равенства Парсеваля для оригинала функции  $f(t)$  и частичной суммы ряда  $G_N(t)$ .

**Ожидаемые результаты:**

- Аналитическое выражение функции  $f(t)$  и ее параметрический график.
- Формулы для вычисления коэффициентов  $c_n$  и результаты их вычисления вручную по при  $N = 2$  с выкладками расчетов.
- Результаты программного вычисления коэффициентов  $c_n$  при  $N = 2$  и сравнение их с полученными вручную.
- Параметрические графики частичных сумм ряда  $G_N(t)$  при  $N = 1, 2, 3, 10$ , их сравнение с оригинальной функцией  $f(t)$ . Для повышения наглядности сравнения рекомендуется размещать полученные графики на одной координатной плоскости с графиками оригинальной функции.
- Графики  $\operatorname{Re}(G_N(t)), \operatorname{Im}(G_N(t))$  при  $N = 1, 2, 3, 10$ , их сравнение с  $\operatorname{Re}(f(t))$  и  $\operatorname{Im}(f(t))$  соответственно. Для повышения наглядности сравнения рекомендуется размещать полученные графики на одной координатной плоскости с соответствующими графиками оригинальной функции (объединять  $\operatorname{Re}(\cdot)$  с  $\operatorname{Re}(\cdot)$  и  $\operatorname{Im}(\cdot)$  с  $\operatorname{Im}(\cdot)$ ).
- Результат проверки равенства Парсеваля.
- Выводы.

**Задание 3. Произвольный рисунок.**

В этом задании вам предлагается воспроизвести результат, который можно увидеть в [этом и подобных ему](#) видео.

- Задайте произвольный рисунок на комплексной плоскости (это может быть сердечко, звёздочка, человечек — что угодно). Найдите способ сохранить его как набор последовательно расположенных точек, достаточно близких друг к другу.
- Задайте “расписание движения” по этим точкам: предположите, что движение между соседними точками происходит равномерно и прямолинейно.
- Найдите коэффициенты соответствующего ряда Фурье.
- Если чувствуете в себе силы, то можете сделать **анимацию**, соответствующую параметрическому графику частичной суммы ряда Фурье. Пусть ваш рисунок появляется прямо у вас на глазах — из суммы простых вращений! Если сделать анимацию кажется для вас слишком сложным, то постройте статичные параметрические графики по аналогии с предыдущим заданием.

**Ожидаемые результаты:**

- Выбранный произвольный рисунок на комплексной плоскости.
- Параметрические графики частичных сумм ряда Фурье для нескольких выбранных  $N$ , их сравнение с оригинальным рисунком. Для повышения наглядности сравнения рекомендуется размещать полученные графики на одной координатной плоскости с графиками оригинальной функции.
- (*Опционально*) Анимацию, соответствующую параметрическому графику частичной суммы ряда Фурье при достаточно большом  $N$ .

**Контрольные вопросы для подготовки к защите:**

1. Что такое тригонометрический ряд Фурье?
2. Какие функции могут быть разложены в тригонометрический ряд Фурье?
3. Какие базисы разложения в ряд Фурье вам известны? Какими свойствами они обладают? Когда они применимы?
4. Какие виды сходимости рядов Фурье к их оригиналам функций вам известны? При каких условиях они наблюдаются?
5. Что показывает равенство Парсеваля?