1. Сформулируйте определение комплексного числа.
Элемент $z \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : z = (a, b), a, b \in \mathbb{R}$, снабженный двумя операциями, индуцированными из $\mathbb{R}$ - сложение и умножение.
2. Как сложить и перемножить два комплексных числа (в представлении чисел как (a, b) и (c, d))
$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$
$(a, b) * (c, d) = (ac - bd, ad + bc)$
3. Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность сложения комплексных чисел.
1. Ассоциативность сложения
$\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\ (z_1 + z_2) + z_3 = z_1 + (z_2 + z_3)$
2. Коммутативность сложения.
$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
4. Сформулируйте и запишите ассоциативность и коммутативность умножения комплексных чисел.
1. Ассоциативность умножения. $\forall z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}\ (z_1 * z_2) * z_3 = z_1 * (z_2 * z_3)$
2. Коммутативность умножения. $\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C}\ z_1 * z_2 = z_2 * z_1$
5. Какой элемент множества комплексных чисел называется нулевым и почему?
$(0, 0)$, так как $(a, b) + (0, 0) = (a, b)$
6. Какой элемент является противоположным к (a, b) на множестве комплексных чисел относительно операции сложения и почему?
$(-a, b)$, так как противоположным элементом к элементу (a, b) называют такой элемент, который в сумме с (a, b) дает нулевой элемент.
7. Какой элемент множества комплексных чисел называется единицей? Что будет, если комплексное число умножить на единицу?
Единицей называют такой элемент, который не меняет комплексное число при умножении на него: $(1, 0)$.
$(a, b) * (1, 0) = (a * 1 - b * 0, a * 0 + b * 1) = (a, b)$
8. Сформулируйте определение обратного элемента и запишите его для комплексного числа (в представлении числа как (a, b)).
Обратный элемент — элемент, который при умножении на исходное комплексное число дает единицу. Вид обратного элемента: $(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2})$
9. Какая форма комплексного числа называется алгебраической?
Алгебраическая форма комплексного числа $z = (a, b)$ - представление в виде $z = a + bi$, где i - это мнимая единица, $i^2 = 1$.
10. Какая форма комплексного числа называется тригонометрической?
Тригонометрической формой записи комплексного числа $z = (a, b)$ называется его представление в виде $z = \rho(\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $\rho = |z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\varphi = argz$
11. Пусть z – комплексное число. Какое число z является комплексно сопряженным к z?

Пусть $z = a + bi$, тогда комплексно сопряженным числом является $a - bi$

12. Как определяется модуль $|z|$ комплексного числа z?

$|z|= \sqrt{N(z)} =\sqrt{z\overline{z}}=\sqrt{a^2+b^2}$ - корень нормы числа z(произведения числа $z \in \mathbb{C}$ на комплексно сопряжённое)

13. Запишите формулу Муавра.

$(\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi))^n = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$

$|z^n| = |z|^n,\ argz^n = n * argz$

14. Как определяется декартово произведение множеств? (декартово произведение множества на себя, нескольких множеств)

Это множество всех кортежей длины n, где n - количесво множителей.

$A \times B = \{(x; y) : x \in A,\ y \in B\}$

$A \times A = \{(x; y) : x \in A,\ y \in A\}$

$A_1 \times A_2 \times ... \times A_n = \{(x_1; x_2; ...; x_n) : x_1 \in A_1,\ x_2 \in A_2, ...,\ x_n \in A_n\}$

15. Что называется внутренним законом композиции на множестве M?

Отображение τ: $M \times M \Rightarrow M\ (x, y) \mapsto z \in M\ (x, y) \mapsto \tau(x, y)$

16. Какой закон композиции называется ассоциативным?

$\forall x, y, z \in M :\ (x * y) * z = x * (y * z)$

17. Какой закон композиции называется коммутативным?

$\forall x, y \in M :\ x * y = y * x.$

18. Сформулируйте определение нейтрального элемента e относительно закона композиции $*$, определенного на множестве M.

Элемент $e \in M$ называется нейтральным элементом алгебраической системы $< M, * >$, если $(\forall x \in M) :\ x * e = e * x = x.$

19. Сформулируйте определение поглощающего элемента θ относительно закона композиции $*$, определенного на множестве M.

Элемент $\theta \in M$ - поглощающий элемент алгебраической системы $< M, * >$, если $\forall x \in M\ x * \theta = \theta * x = \theta$

20. Сформулируйте определение обратного элемента относительно операции.

Элемент y называется обратным элементу x в алгебраической системе $< M, * >$ с нейтральным элементом e, если $x * y = y * x = e$

21. Что называется алгебраической структурой?

Если на множестве M зафиксирована операция $*$, то говорят, что имеем дело со структурой $< M, * >$, которая называется алгебраической структурой.

22. Что называется внешним законом композиции?

Внешним законом композиции множества Ω, называемых множеством операторов закона, и элементов множества M называется отображение множества $\Omega \times M\ \mapsto\ M$.

23. Перечислите аксиомы группы.

1) ассоциативность операции 2) нейтральный элемент 3) обратный элемент

24. Сформулируйте определение магмы.
Алгебраическая структура $< M, * >$ называется магмой ($*$ - внутренний закон композиции)
25. Какая алгебраическая структура является полугруппой?
Алгебраическая структура $< M, * >$ называется полугруппой, если * ассоциативна.
26. Какая алгебраическая структура является моноидом?
Алгебраическая структура $< M, * >$ называется моноидом, если $*$ ассоциативна и $\exists$ нейтральный элемент.
27. Сформулируйте определение левой (правой) дистрибутивности закона относительно закона $*$.
Закон композиции $\circ$ называется дистрибутивным слева относительно закона $*$, если $\forall x, y, z \in M \ x \circ (y * z) = x \circ y * x \circ z$
Закон композиции $\circ$ называется дистрибутивным справа относительно закона $*$, если $\forall x, y, z \in M \ (y * z) \circ x = y \circ x * z \circ x$
28. Когда закон называется двояко дистрибутивным?
Закон композиции $\circ$ называется двояко дистрибутивным относительно закона $*$, если он дистрибутивен слева и справа
29. Сформулируйте определение кольца R.
Алгебраическая структура $< R, +, * >$ называется кольцом, если R замкнута относительно $+$ и $*$ и удовлетворяет сл. требованиям:
1) $< R, +, * >$ - абелева группа
2) операция $*$ ассоциативна
3) операция $*$ дистрибутивна относительно $+$ слева и справа
30. Какое кольцо называется кольцом вычетов?
$< Z_m, +, >$ - кольцо вычетов по модулю $m \in Z$ $Z_m = \{0, 1, ...m - 1\}$ - остатки при делении на m.
31. Как определяется многочлен от одной переменной с коэффициентами из кольца R?
Многочленом от 1 переменной с коэффицентами из кольца R называется выражение вида $f(x) = a_0 + a_1x + ... + a_nx^n$, где $a_0, a_1, ..., a_n \in R, \ x$ - переменная.
32. В каком случае многочлен $p(x)$ делится на многочлен $q(x)$?
$\exists g(x) : \ p(x) = q(x) * g(x)$
33. Перечислите свойства делимости многочленов.

1) $f(x) \vdots g(x) \ \cap \ g(x) \vdots r(x) \ \Rightarrow \ f(x) \vdots r(x)$

2) $f(x) \vdots g(x) \ \cap \ p(x) \vdots g(x) \ \Rightarrow \ (\forall a(x), b(x)) \in$

$R[x] \ (a(x)f(x) \ + \ b(x)p(x)) \vdots g(x)$
34. Когда многочлены $p(x)$ и $q(x)$ являются ассоциированными?
Два многочлена $p(x)$ и $q(x)$ называются ассоциированными, если $p(x) = \alpha q(x)$, где $\alpha \in R, \alpha \neq 0$.
35. Что называется степенью многочлена?
Степенью $deg(p)$ многочлена $p \in R[t]$ называется максимальный номер его ненулевого коэффициента.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Рис. 1:

36. Чему равна степень нулевого многочлена $\theta(t)$?
Для нулевого многочлена $\theta(t)$ положим $deg(\theta) = -\infty$.
37. Перечислите свойства степени при делении многочленов.

1) если $f(x) \vdots g(x),\ f, g \neq 0 \ \Rightarrow\ deg(f) \geq deg(g)$

2) если $f(x) \vdots g(x),\ deg(f) = deg(g) \ \Rightarrow\ f \sim g$
38. Как связана степень остатка $r(x)$ от деления полинома $p(x)$ на полином со степенями этих полиномов?
Степень остатка меньше степени делителя.
39. Какое число называется корнем многочлена кратности n?

Число $x_0 \in R$ такое, что $p(x) \vdots (x - x_0)^m,\ p(x)\ not\vdots\ (x - x_0)^m + 1$
40. Чему равен остаток от деления $p(x) \in R[x]$ на $(x - x_0)$? А если x_0 – корень $p(x)$?
$p(x_0)$. 0.
41. Какие элементы кольца называются делителями нуля?
Делителем нуля в кольце R называется всякий элемент $x \neq 0$, такой что $\exists y \neq 0,\ xy = 0$.
42. Какое кольцо называется областью целостности?
Коммутативное кольцо с единицей, в котором отсутствуют делители нуля.
43. Сформулируйте определение нильпотента.
Элемент $z \neq 0$ называется нильпотентом, если $\exists n \in \mathbb{N} : z^n = 0$.
44. Какое кольцо является полем?
Полем называется ненулевое кольцо, в котором каждый ненулевой элемент обратим.
45. Сформулируйте определение матрицы. Что называется коэффициентами матрицы?
Матрицей с коэффициентами из поля $\mathbb{K}$ называется прямоугольная таблица следующего вида: где числа $a_{ij} \in \mathbb{K}$ называются коэффициентами матрицы.
см. рис. №1
46. Какое множество обозначается как $Mat_K(m, n)$? Что в этой записи значат K, m, n?
Множество $m \times n$ матриц. m - количество строк, n - количество столбцов, $\mathbb{K}$ - поле.
47. Какие матрицы называются квадратными? Единичными?

1. Если $A_{1\times 1} = (a)$, тогда $|A| = a$;
2. Если $A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, тогда $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$;

Рис. 2:

Матрица, у которой количество строк совпадает с количеством столбцов
Квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны единице, а остальные — нулю.

48. Как определяется сложение матриц?

$A + B = C \;\Leftrightarrow\; c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

49. Как определяется умножение матрицы на число?

$\lambda A = B \;\Leftrightarrow\; b_{ij} = \lambda a_{ij}$

50. Как определяется умножение матриц? Какие матрицы можно перемножать?

$AB = C \;\Leftrightarrow c_{ij} = a_{i1} * b_{1j} + a_{i2} * b_{2j} + ... + a_{in} * b_{nj}$

Можно перемножать матрицы, если у 1 матрицы количество столбцов совпадает с количеством строк 2 матрицы

51. Какое результирующее число строк и столбцов будет при перемножении матриц $A_{n\times m}$ и $A_{m\times k}$?

Число строк = n, а число столбцов = k.

52. Умножение матриц коммутативно? Почему?

Нет, так как элементы матрицы, полученной в результате произведения, - это произведения строки первой матрицы на столбец второй, а при произведении второй на первую результат будет состоять из произведений строк второй матрицы на столбец первой.

53. Как вводится операция транспонирования матриц?

$A = (a_{ij}) \;\Rightarrow\; A^T = (a_{ji})$

54. Перечислите свойства операции транспонирования.

1)$(A^T)^T = A \;\; \forall A \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$
2)$(A+B)^T = A^T + B^T \;\; \forall A, B \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$
3)$(\lambda A)^T = \lambda A^T \;\; \forall A \in M_{\mathbb{K}}(m,n)$
4)$(AB)^T = B^T A^T \;\; \forall A \in M_{\mathbb{K}}(m,n) \;\; \forall B \in M_{\mathbb{K}}(n,t)$

55. Запишите, как найти определители матриц $A_{1\times 1}$ и $A_{2\times 2}$

Рисунок №2

56. Запишите алгоритм нахождения определителя матрицы $A_{3\times 3}$.

Рисунок №3

57. Сформулируйте определение системы линейных алгебраических уравнений. Запишите в общем виде.

Рисунок №4

58. Что в СЛАУ называют свободными членами? А что – неизвестными?

Конец рисунка №4

59. Как записать СЛАУ в матричном виде?

a_{ij} коэффициент системы поставить в i строку j столбец

3. Если $A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, тогда $|A|$ можно получить *разложением по первой строке*:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}, \end{vmatrix} = a_{11} \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+ a_{12} \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Рис. 3:

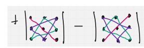
Рисунок №7 

Рис. 4:

60. Что значит решить СЛАУ?
Решить систему линейных алгебраических уравнений значит выяснить совместна она или несовместна, и в случае совместности найти все ее решения.

61. Что такое расширенная матрица в рамках решения СЛАУ?
Матрица, получаемая из изначальной матрицы приписыванием столбца свободных членов.

62. Какие преобразования называются эквивалентными преобразованиями матрицы?
1) перестановка местами произвольных строк матрицы;
2) умножение произвольной строки матрицы на число $\lambda \neq 0$;
3) прибавление к произвольной строке матрицы другой строки;

63. Для чего нужны методы Крамера и Гаусса?
Методы Крамера и Гаусса нужны для решения систем линейных уравнений.

64. В чем заключается метод Крамера?
Метод Крамера заключается в вычислении определителя матрицы A и определителей, полученных из матрицы A подстановкой столбца b в эту матрицу. Далее вычисляем определители полученных матриц и вычисляем значения неизвестных: $x_i = \triangle_i / \triangle$

Опр. 1.1. Системой линейных алгебраических уравнений называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \quad \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

При этом $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *неизвестными*, $\{a_{ij}\}$ - *коэффициентами* системы и $b_1, b_2, \ldots b_m$ - *свободные члены*.

Рис. 5:

Метод Гаусса заключается в том, чтобы элементарными преобразованиями привести расширенную матрицу системы к верхнетреугольному виду и затем, используя метод подстановки найти решение:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & b_3. \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} & d_1 \\ 0 & c_{22} & c_{23} & d_2 \\ 0 & 0 & c_{33} & d_3. \end{pmatrix}$$

Откуда сразу получаем:

$$x_3 = \frac{d_3}{c_{33}}, \quad x_2 = \frac{d_2 - c_{23}x_3}{c_{22}}, \quad x_1 = \frac{d_1 - c_{12}x_2 - c_{13}x_3}{c_{11}}.$$

Рис. 6:

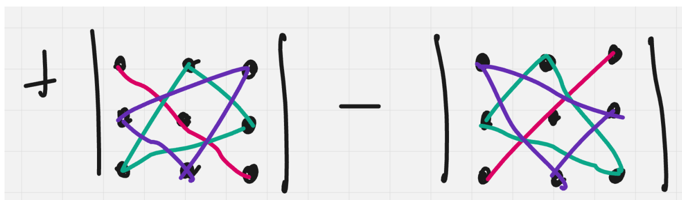


Рис. 7:

65. При каком условии возможно нахождение решения СЛАУ методом Крамера?

При $\triangle \neq 0$.

66. В чем заключается метод Гаусса?

Рисунок №5

67. В чем заключается метод обратной матрицы для решения СЛАУ?

$AX = b \Leftrightarrow X = A^{-1}b$ далее вычисляем матрицу A, используя метод союзной матрицы или метод Гауса. Рисунок 6

68. Как найти обратную матрицу используя метод Гаусса?

Рисунок №6

69. Как найти обратную матрицу используя метод союзной матрицы?

Рисунок №6

70. Что называется алгебраическим дополнением элемента матрицы?

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя Δ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+g}M_{ij}$, где M_{ig} - минор