Лекция 8

7.5. Двумерное нормальное распределение

Случайный вектор (ξ, η) непрерывного типа распределён по *нормальному закону*, если плотность совместного распределения равна

$$p(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}Q(x, y)\right\}, \tag{5.1}$$

где

$$Q(x, y) = \frac{1}{1-\rho^2}\left[\frac{(x-m_1)^2}{\sigma_1^2} + \frac{(y-m_2)^2}{\sigma_2^2} - 2\rho\,\frac{x-m_1}{\sigma_1}\frac{y-m_2}{\sigma_2}\right]. \tag{5.2}$$

Обозначим

$$u = \frac{x-m_1}{\sigma_1}, \quad v = \frac{y-m_2}{\sigma_2}. \tag{5.3}$$

Тогда

$$Q(x, y) = \frac{1}{1-\rho^2}(u^2 + v^2 - 2\rho uv).$$

Найдём одномерные плотности распределений случайных величин ξ и η. Сначала ищем p_ξ:

$$p_\xi(x) = \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y)\,dy = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-Q(x, y)/2\right\}\,dy.$$

Перейдём к переменной интегрирования v. Так как $dy = \sigma_2 dv$ и

$$Q = \frac{u^2 + v^2 - 2\rho uv}{1-\rho^2} = \frac{u^2 + (v-\rho u)^2 - \rho^2 u^2}{1-\rho^2} = u^2 + \frac{(v-\rho u)^2}{1-\rho^2}, \tag{5.4}$$

то

$$p_\xi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{2\pi\sigma_1\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}\,dv.$$

Делаем в этом интеграле замену:

$$v = \rho u + z\sqrt{1-\rho^2}, \quad dv = \sqrt{1-\rho^2}dz.$$

Получаем

$$p_\xi(x) = \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{2\pi\sigma_1} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2}\,dz = \frac{\mathrm{e}^{-u^2/2}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}.$$

Аналогичная формула справедлива и для $p_\xi(x)$.

Мы видим, что случайные величины ξ и η) имеют нормальные распределения с параметрами (m_1, σ_1) и (m_2, σ_2).

Найдём ковариацию $\mathrm{cov}(\xi, \eta)$. Имеем

$$\mathrm{cov}(\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_1)(y-m_2)\,p(x, y)\,dx\,dy =$$
$$= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} (x-m_1)(y-m_2)\,\exp\left\{-Q(x, y)/2\right\}\,dx\,dy.$$

Перейдём к переменным интегрирования u и v. Получим

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\frac{\sigma_1\sigma_2}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-Q/2}v\,dv\right\}u\,du.$$

Рассмотрим внутренний интеграл:

$$g(u)=\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-Q/2}v\,dv.$$

Используя (5.4), получим

$$g(u)=\mathrm{e}^{-u^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}v\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}dv.$$

Сделаем замену:

$$z=\frac{v-\rho u}{\sqrt{1-\rho^2}},\quad dv=\sqrt{1-\rho^2}\,dz.$$

Следовательно,

$$g(u)=\sqrt{1-\rho^2}\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\big(z\sqrt{1-\rho^2}+\rho u\big)\mathrm{e}^{-z^2/2}\,dz.$$

Так как интеграл по нечётной функции $z\mathrm{e}^{-z^2/2}$ равен нулю, то получаем

$$g(u)=\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\,\rho u\,\mathrm{e}^{-u^2/2}.$$

Таким образом,

$$\operatorname{cov}(\xi,\eta)=\frac{\rho\sigma_1\sigma_2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}u^2\,\mathrm{e}^{-u^2/2}\,du=\rho\sigma_1\sigma_2.$$

В результате

$$p_\xi(x)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}}e^{-(x-m_1)^2/2\sigma_1^2},\quad p_\eta(y)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}}e^{-(y-m_2)^2/2\sigma_1^2},\tag{5.5}$$

$$m_1=\mathsf{M}\xi,\quad m_2=\mathsf{M}\eta,\quad \sigma_1^2=\mathsf{D}\xi,\quad \sigma_2^2=\mathsf{D}\eta,\quad \rho=\rho(\xi,\eta).\tag{5.6}$$

Заметим, что если случайные величины ξ и η некоррелированы, т. е. $\rho=0$, то

$$p(x,y)=p_\xi(x)p_\eta(y).$$

Следовательно, ξ и η независимы.

Используя формулы (2.2), (5.1) – (5.5), найдём условную плотность $p_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,x)$. Имеем

$$p_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,x)=\frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.\tag{5.7}$$

В силу симметрии

$$p_{\xi\,|\,\eta}(x\,|\,y)=\frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}}\exp\left\{-\frac{(u-\rho v)^2}{2(1-\rho^2)}\right\}.\tag{5.8}$$

Найдём регрессию случайной величины η на случайную величину ξ. Имеем

$$\mathsf{M}(\eta\,|\,\xi=x)=\int_{-\infty}^{\infty}y\,p_{\eta\,|\,\xi}(y\,|\,x)\,dy.$$

Перейдём к переменной интегрирования v. Получим

$$\mathsf{M}(\eta \,|\, \xi = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma_2 v + m_2) \exp\left\{ -\frac{(v-\rho u)^2}{2(1-\rho^2)} \right\} dv.$$

Сделаем замену:

$$z = \frac{v - \rho u}{\sqrt{1-\rho^2}}, \quad dv = \sqrt{1-\rho^2}\, dz.$$

Получим

$$\mathsf{M}(\eta \,|\, \xi = x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sigma_2 z \sqrt{1-\rho^2} + \sigma_2 \rho u + m_2 \right) \exp\left\{ -z^2/2 \right\} dz.$$

В результате

$$\mathsf{M}(\eta \,|\, \xi = x) = \sigma_2 \rho u + m_2 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1} \rho (x - m_1) + m_2.$$

Аналогичная формула справедлива и для регрессии величины ξ на η.

Итак, в результате

$$\mathsf{M}(\eta \,|\, x) = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\, \rho (x - m_1) + m_2, \quad \mathsf{M}(\xi \,|\, y) = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}\, \rho (y - m_2) + m_1. \tag{5.9}$$

Таким образом, из формул (5.9) следует, что регрессия нормально распределённой системы случайных величин (ξ, η) всегда линейна.

8. Закон больших чисел. Предельные теоремы

8.1. Закон больших чисел

Теорема 1.1. *Для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{M}|\xi|}{\varepsilon}, \tag{1.1}$$

Доказательство. *Дискретный случай.* Пусть ξ — дискретная случайная величина с законом распределения $\mathsf{P}\{\xi = x_k\} = p_k > 0$. Тогда

$$\mathsf{M}|\xi| = \sum_k |x_k|\, p_k = \sum_{|x_k|<\varepsilon} |x_k|\, p_k + \sum_{|x_k|\geq\varepsilon} |x_k|\, p_k \geq \varepsilon \sum_{|x_k|\geq\varepsilon} p_k = \varepsilon\, \mathsf{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\}.$$

Непрерывный случай. Пусть ξ — абсолютно непрерывная случайная величина с законом распределения с плотностью распределения $p(x)$. Тогда

$$\mathsf{M}|\xi| = \int_{-\infty}^{\infty} |x|\, p(x)\, dx = \int_{|x|<\varepsilon} |x|\, p(x)\, dx + \int_{|x|\geq\varepsilon} |x|\, p(x)\, dx \geq$$

$$\geq \varepsilon \int_{|x|\geq\varepsilon} p(x)\, dx = \varepsilon\, \mathsf{P}\{|\xi| \geq \varepsilon\}.$$

Неравенство (1.1) доказано. ■

Теорема 1.2. (Неравенство Чебышева) *Если случайная величина ξ имеет конечное дисперсию, то для всякого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\mathsf{P}\{|\xi - \mathsf{M}\xi| \geq \varepsilon\} \leq \frac{\mathsf{D}\xi}{\varepsilon^2}, \tag{1.2}$$

Доказательство. Рассмотрим случайную величину $\eta = (\xi - \mathsf{M}\xi)^2$. Очевидно, что $\mathsf{M}\eta = \mathsf{D}\xi$. Применим к η неравенство (1.1). Теорема доказана. ■

Теорема 1.3. (Теорема Чебышева) *Если $\{\xi_n\}$ — последовательность попарно независимых случайных величин, имеющих конечные дисперсии, ограниченные одной и той же постоянной*

$$\mathsf{D}\xi_n \leq C, \quad n \in \mathbb{N},$$

то, каково ни было постоянное число $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big\{\Big|\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{M}\xi_k \,\Big| < \varepsilon\Big\} = 1. \tag{1.3}$$

Доказательство. Так как случайные величины ξ_n, $n \in \mathbb{N}$, попарно независимы, то

$$\mathsf{D}\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\bigg) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{D}\xi_k \leq \frac{C}{n}.$$

Согласно неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}\Big\{\Big|\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathsf{M}\xi_k \,\Big| < \varepsilon\Big\} \geq 1 - \frac{1}{\varepsilon^2}\,\mathsf{D}\bigg(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \xi_k\bigg) \geq 1 - \frac{C}{n\varepsilon^2}.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big\{\Big|\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\xi_k \,\Big| < \varepsilon\Big\} \geq 1.$$

А так как вероятность не может быть больше единицы, то отсюда и следует утверждение теоремы. ■

Следствие. *Если случайные величины $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ независимы и одинаково распределены, $\mathsf{M}\xi_n = a$, $\mathsf{D}\xi_n = \sigma^2 < \infty$,то при любом $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big\{\Big|\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - a \,\Big| < \varepsilon\Big\} = 1. \tag{1.4}$$

Предельные утверждения типа (1.3) и (1.4) носят название *закона больших чисел.* Из (1.4) получаем закон больших чисел в схеме Бернулли.

Теорема 1.3. (Теорема Бернулли) *Пусть μ_n — число успехов при n испытаниях в схеме Бернулли с вероятностью успеха $0 < p < 1$. Тогда при любом $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\Big\{\Big|\, \frac{\mu_n}{n} - p \,\Big| < \varepsilon\Big\} = 1. \tag{1.5}$$

Доказательство. Мы можем представить μ_n в виде: $\mu_n = \sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i$, где $\xi_i = 1$, если при i-м испытании произошёл успех, и $\xi_i = 0$ в противном случае. Поскольку

$$\mathsf{M}\xi_i = p, \quad \mathsf{D}\xi_i = p(1-p),$$

то к μ_n применимо следствие (1.4). Теорема доказана. ■

Теорема 1.4. (Теорема Маркова) *Если последовательность случайных величин $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$ такова, что при $n \to \infty$*

$$\frac{1}{n^2}\mathsf{D}\Big(\sum_{k=1}^{n}\xi_k\Big) \to 0, \tag{1.6}$$

то для всякого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\Big|\, \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathsf{M}\xi_k \,\Big| < \varepsilon\Big) = 1. \tag{1.7}$$

Доказательство. Пусть

$$\eta_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k.$$

Равенство (1.7) эквивалентно равенству

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(|\,\eta_n - \mathsf{M}\eta_n| < \varepsilon) = 1.$$

По неравенству Чебышева

$$\mathsf{P}(|\,\eta_n - \mathsf{M}\eta_n| \geq \varepsilon) \leq \frac{\mathsf{D}\eta_n}{\varepsilon^2}.$$

Следовательно

$$\mathsf{P}(|\,\eta_n - \mathsf{M}\eta_n| < \varepsilon) = 1 - \mathsf{P}(|\,\eta_n - \mathsf{M}\eta_n| \geq \varepsilon) \geq 1 - \frac{\mathsf{D}\eta_n}{\varepsilon^2}.$$

Из условия (1.6) следует, что $\mathsf{D}\eta_n \to 0$ при $n \to \infty$. В результате, переходя к пределу в последнем равенстве, получим

$$\mathsf{P}(|\,\eta_n - \mathsf{M}\eta_n| < \varepsilon) \geq 1.$$

Теорема доказана. ■

8.2. Производящие функции

Целочисленной случайной величиной называется случайная величина ξ, принимающая целые неотрицательные значения. Закон распределения целочисленной случайной величины определяется вероятностями

$$p_n = \mathsf{P}\{\xi = n\}, \quad n = 0, 1, \ldots, \tag{2.1}$$

для которых

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_n = 1. \tag{2.2}$$

Производящей функцией целочисленной случайной величины ξ, называется функция

$$\varphi_\xi(s) = \mathsf{M}s^\xi = \sum_{n=0}^{\infty} p_n s^n, \tag{2.3}$$

который абсолютно сходится при $|s| \leq 1$. Поскольку

$$p_n = \frac{1}{n!}\,\varphi_\xi^{(n)}(0), \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.4}$$

то между законами распределения $\{p_n\}$ и производящими функциями равенства (2.3) и (2.4) устанавливают взаимно однозначное соответствие.

Пример 1. *Биномиальное распределение*

$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p + q = 1, \quad k = 0, \ldots, n.$$

По формуле (2.3)

$$\varphi_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} s^k C_n^k p^k q^{n-k} = (ps + q)^n.$$

Вместо моментов $\mathsf{M}\xi^r$ в случае целочисленных случайных величин удобнее иметь дело с *факториальными моментами* $\mathsf{M}\xi^{[r]}$, где

$$\xi^{[r]} = \xi(\xi - 1)\ldots(\xi - r + 1), \quad \xi^{[0]} = 1.$$

Через факториальные моменты $\mathsf{M}\xi^{[r]}$ можно выразить моменты $\mathsf{M}\xi^r$ и наоборот. Например,

$$\mathsf{M}\xi^{[1]} = \mathsf{M}\xi, \quad \mathsf{M}\xi^{[2]} = \mathsf{M}\xi^2 - \mathsf{M}\xi.$$

Следовательно,
$$\mathsf{D}\xi = \mathsf{M}\xi^{[2]} + \mathsf{M}\xi - (\mathsf{M}\xi)^2.$$

Факториальные моменты легко вычисляются через производные производящих функций в точке $s = 1$. Имеет место равенство
$$\mathsf{M}\xi^{[r]} = \varphi_\xi^{(r)}(1), \tag{2.5}$$
справедливое при любом неотрицательном r. Таким образом, $\mathsf{M}\xi$ и $\mathsf{D}\xi$ можно следующим образом выразить через производные $\varphi_\xi(s)$:
$$\mathsf{M}\xi = \varphi_\xi'(1), \tag{2.6}$$
$$\mathsf{D}\xi = \varphi_\xi''(1) + \varphi_\xi'(1) - \left[\varphi_\xi'(1)\right]^2. \tag{2.7}$$

П р и м е р 2. *Биномиальное распределение*

Так как в этом случае $\varphi(t) = (ps+q)^n$, то
$$\varphi'(t) = np(ps+q)^{n-1}, \quad \varphi''(t) = n(n-1)p^2(ps+q)^{n-2}.$$
Следовательно, $\varphi'(1) = np$, $\varphi''(t) = n(n-1)p^2$. По формулам (2.6) и (2.7) получаем
$$\mathsf{P}\xi = np, \quad \mathsf{D}\xi = n(n-1)p^2 + np - (np)^2 = npq.$$

8.3. Характеристические функции

Характеристической функцией случайной величины ξ называется функция
$$f_\xi(t) = \mathsf{M}\mathrm{e}^{it\xi}. \tag{3.1}$$
Если случайная величина ξ дискретна, то
$$f_\xi(t) = \sum_k \mathrm{e}^{itx_k}\, \mathsf{P}\{\xi = x_k\}. \tag{3.2}$$
Если случайная величина ξ абсолютно непрерывна и имеет плотность $p(x)$, то
$$f_\xi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{itx}\, p(x)\, dx. \tag{3.3}$$

Перечислим некоторые свойства характеристических функций.

1. $|f(t)| \le 1$ для любого $t \in \mathbb{R}$; $f(0) = 1$.

2. $f(t)$ равномерно непрерывна по t.

3. Если $\eta = a\xi + b$, где a и b — константы, то $f_\eta(t) = \mathrm{e}^{itb} f_\xi(at)$.

4. Если $\xi_1, \ldots \xi_n$ независимы, то
$$f_{\xi_1+\ldots+\xi_n}(t) = \prod_{k=1}^{n} f_{\xi_k}(t). \tag{3.4}$$

5. $f_\xi(-t) = \overline{f}_\xi(t)$.

6. Если $\mathsf{M}\xi^n$ конечно, то существуют все производные $f_\xi^{(k)}(t)$ с $k \le n$ и
$$f_\xi^{(k)}(0) = i^k \mathsf{M}\xi^k. \tag{3.5}$$

7. Если $\varphi_\xi(s) = \mathsf{M}s^\xi$ — производящая функция целочисленной случайной величины ξ, то
$$f_\xi(t) = \varphi_\xi\left(\mathrm{e}^{it}\right). \tag{3.6}$$

Пример 1. *Биномиальное распределение*
$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = C_n^k p^k q^{n-k}, \quad p + q = 1, \quad k = 0, \ldots, n.$$
По формуле (3.2)
$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{e}^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = (p\mathrm{e}^{it} + q)^n.$$

Пример 2. *Равномерное на $[a, b]$, $a < b$, распределение*
$$p(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & x \in [a, b], \\ 0, & x \notin [a, b]. \end{cases}$$
По формуле (3.3)
$$f_\xi(t) = \frac{1}{b-a} \int_a^b \mathrm{e}^{itx}\,dx = \frac{\mathrm{e}^{itb} - \mathrm{e}^{ita}}{it(b-a)}.$$
Отметим частные случаи полученной формулы. При $a = -s$, $b = s$, $s > 0$ имеем
$$f_\xi(t) = \frac{\sin st}{st}.$$
При $a = 0$, $b = L$, $L > 0$ имеем
$$f_\xi(t) = \frac{\mathrm{e}^{itL} - 1}{itL}.$$

Математическое ожидание и дисперсию можно выразить при помощи производных от логарифма характеристической функции. Обозначим $\psi(t) = \ln f(t)$. Тогда
$$\psi'(t) = \frac{f'(t)}{f(t)}, \quad \psi''(t) = \frac{f''(t) \cdot f(t) - [f'(t)]^2}{f^2(t)}.$$
Принимая во внимание, что $f(0) = 1$ и равенство (3.5), получим
$$\begin{aligned} &\psi'(0) = f'(0) = i\,\mathsf{M}\xi, \\ &\psi''(0) = f''(0) - [f'(0)]^2 = i^2\,\mathsf{M}\xi^2 - [i\,\mathsf{M}\xi]^2 = -\mathsf{D}\xi. \end{aligned}$$
В результате
$$\mathsf{M}\xi = -\,i\psi'(0), \quad \mathsf{D}\xi = -\,\psi''(0). \tag{3.7}$$

Пример 3. *Распределение Пуассона*
$$\mathsf{P}\{\xi = k\} = \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda}, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$
По формуле (3.2)
$$f_\xi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathrm{e}^{itk} \frac{\lambda^k}{k!}\,\mathrm{e}^{-\lambda} = \mathrm{e}^{-\lambda} \exp\left(\lambda \mathrm{e}^{it}\right) = \exp\left(\lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)\right).$$
Рассмотрим формулы (3.7). Имеем $\psi(t) = \ln f_\xi(t) = \lambda(\mathrm{e}^{it} - 1)$. Следовательно,
$$\psi'(t) = i\lambda\mathrm{e}^{it}, \quad \psi''(t) = -\lambda\mathrm{e}^{it}$$
и $\mathsf{M}\xi = \lambda$, $\mathsf{D}\xi = \lambda$.

8.4. Центральная предельная теорема

Классическая центральная предельная теорема. *Пусть случайные величины* ξ_1, ξ_2, … *независимы, одинаково распределены и имеют конечную дисперсию. Тогда при* $n \to \infty$ *равномерно по* $x \in (-\infty, \infty)$

$$\mathsf{P}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - na}{\sigma\sqrt{n}} < x \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, du, \tag{4.1}$$

где $a = \mathsf{M}\xi_n$, $\sigma^2 = \mathsf{D}\xi_n > 0$.

Центральная предельная теорема имеет место также при некоторых условиях и для неодинаковых независимых слагаемых. Пусть случайные величины ξ_1, ξ_2, … независимы и имеют не обязательно одно и то же распределение. Обозначим

$$\begin{gathered} a_n = \mathsf{M}\xi_n, \qquad b_n^2 = \mathsf{D}\xi_n, \qquad c_n^3 = \mathsf{M}|\,\xi_n - a_n|^3, \\ A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k, \quad B_n^2 = \sum_{k=1}^{n} b_k^2, \quad C_n^3 = \sum_{k=1}^{n} c_k^3. \end{gathered} \tag{4.2}$$

Теорема Ляпунова. *Если случайные величины* ξ_1, ξ_2, … *независимы,* a_k, b_k,c_k *конечны и при* $n \to \infty$

$$C_n/B_n \to 0,$$

то при $n \to \infty$

$$\mathsf{P}\left(\frac{\xi_1 + \xi_2 + \ldots + \xi_n - A_n}{B_n} < x \right) \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-u^2/2}\, du. \tag{4.3}$$