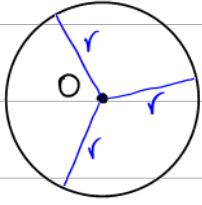
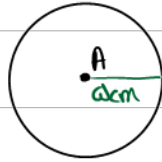


فصل اول: ترسیم‌های هندسی و استدلال  
درس اول: ترسیم‌های هندسی  
مکان هندسی: مجموعه نقاطی از صفحه یا فضا که دارای یک ویژگی مشترک هستند را مکان هندسی می‌گویند.



دایره: مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از نقطه O به فاصله r می‌باشند.

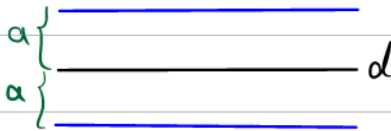
نکته: برای پیدا کردن نقاطی که از نقطه ثابت O به فاصله r می‌باشند کافی است دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم کنیم.



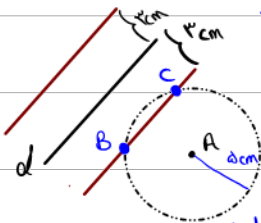
مثال: نقاطی را بیابید که از نقطه A، 5 سانتی‌متر فاصله داشته باشند.

دایره‌ای به مرکز A و شعاع 5

نکته: برای پیدا کردن نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله a می‌باشند کافی است دو طرف خط d به فاصله a دو خط موازی با خط d رسم کنیم.

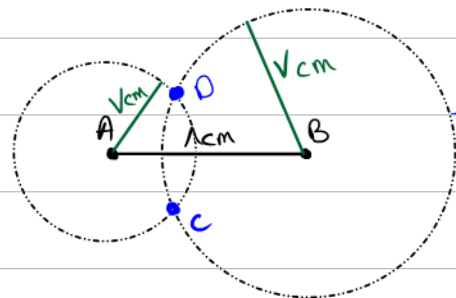


سؤال: نقاطی را بیابید که از خط d، 3 سانتی‌متر و از نقطه A، 5 سانتی‌متر فاصله داشته باشند.



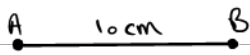
\* در این سوالات ابتدا باید نقاط مطلوب هر کدام از شرط‌ها را بیابیم و سپس نقاط مشترک را به عنوان جواب در نظر بگیریم.

در این سؤال نقاط B و C جواب هستند زیرا هم از خط d 3cm و هم از نقطه A 5cm فاصله دارند.

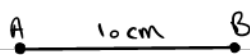


سؤال: نقاطی از صفحه را بیابید که از نقاط A و B به ترتیب 5 و 7 سانتی‌متر فاصله داشته باشند.

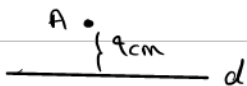
جواب نقاط C و D



عَرَبی: بررسی کنید آیا نقاطی وجود دارد که از نقطه A و B به ترتیب 5 و 4 فاصله داشته باشند؟



عَرَبی: بررسی کنید آیا نقاطی وجود دارد که از نقطه A و B به ترتیب 3 و 7 سانتی‌متر فاصله داشته باشند؟



عَرَبی: بررسی کنید آیا نقاطی وجود دارد که از نقطه A و خط d به ترتیب 5 و 3 سانتی‌متر فاصله داشته باشند؟

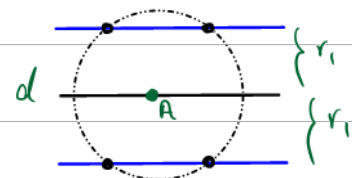
سؤال: تعداد نقاطی که از خط d به فاصله  $r_1$  و از نقطه A به فاصله  $r_2$  می‌باشند را مشخص کنید.



هیچ نقطه

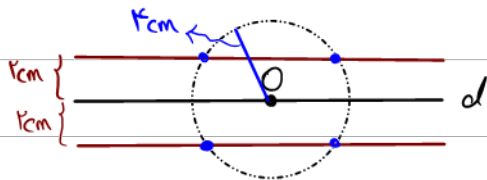


دو نقطه

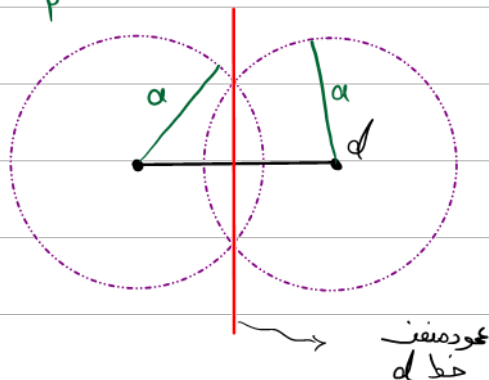


چهار نقطه

مثال: نقطه O روی خط d قرار دارد. همه نقاطی که از خط d به فاصله ۲ و از نقطه O به فاصله ۴ باشند را بیابید.



$$a > \frac{d}{2}$$

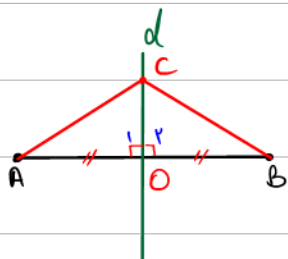


ترسیم هندسی: می خواهیم به کمک یک یوگاور و یک خط کش اشکال هندسی را رسم کنیم.

۱- ترسیم عمود منصف: عمود منصف خط است عمود بر یک پاره خط که آن را نصف می کند.

مراحل رسم: ۱- از دو سر پاره خط دایره هایی (مان های) با شعاعی بزرگ تر از نصف پاره خط رسم می کنیم ۲- محل برخورد این دو دایره را بهم وصل می کنیم. ✓

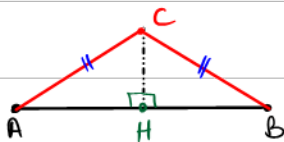
قضیه: هر نقطه روی عمود منصف از دو سر پاره خط به یک فاصله است.



برهان: فرض می کنیم d عمود منصف پاره خط AB باشد. طبق شکل باید نشان دهیم  $AC=BC$   $AO=OB$

$$\left. \begin{array}{l} AO=OB \text{ فرض} \\ OC=OC \text{ مشترک} \\ \hat{O}_1 = \hat{O}_2 = 90^\circ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{اجزاء متساوی} \\ \hat{AOC} \simeq \hat{BOC} \text{ فرض} \\ \Rightarrow AC=BC \end{array} \quad \checkmark$$

قضیه: اگر نقطه ای از دو سر یک پاره خط به یک فاصله باشد آنگاه این نقطه روی عمود منصف پاره خط قرار دارد.



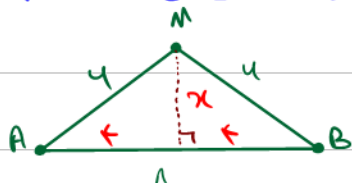
برهان: فرض می کنیم نقطه C از دو سر پاره خط AB به یک اندازه باشد یعنی  $CA=CB$

از نقطه C یک عمود بر AB رسم می کنیم و آن را H می نامیم. باید ثابت کنیم H وسط پاره خط AB است یعنی  $AH=HB$

$$\left. \begin{array}{l} AC=BC \text{ فرض} \\ CH=CH \text{ مشترک} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{وتر و وتر منفرجه} \\ \text{مقلع} \\ \hat{AHC} \simeq \hat{BHC} \text{ اضلاع متساوی} \\ \Rightarrow AH=BH \end{array} \quad \checkmark$$

نکته: پس عمود منصف یک پاره خط همان هندسی نقطه ای است که از دو سر یک پاره خط به یک فاصله است.

سوال: دو نقطه A و B به فاصله ۸ واحد از یکدیگر قرار دارند. نقطه M از هر دو نقطه A و B به فاصله ۴ واحد است. مساحت مثلث MAB را بیابید.



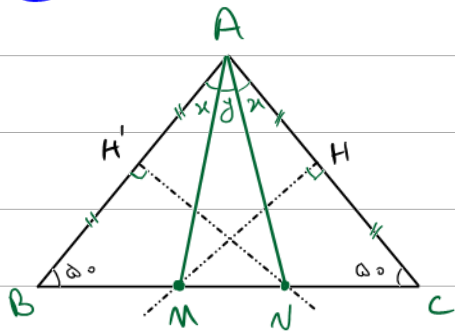
حل: ابتدا شکل مناسب مثله را رسم می کنیم، با توجه به شکل و تقاطع به از قبیل می دانیم می توانیم

که M روی عمود منصف AB قرار دارد. پس داریم

$$x^2 + 4^2 = 4^2 \Rightarrow x^2 = 4^2 - 4^2 = 16 - 4 = 12 \Rightarrow x = \sqrt{12}$$

$$\Rightarrow S_{MAB} = \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{5}} \times 8 = 8\sqrt{5} \quad \checkmark$$

سؤال: در مثلث  $ABC$  داریم  $AB=AC$  و  $\hat{A} = 100^\circ$  بخود منصف های دو ساق مثلث قائمه  $BC$  را در نقاط  $M$  و  $N$  قطع



نمایند. کوچکترین زاویه مثلث  $AMN$  چند درجه است؟ (جوابی ۹۲)

حل: می توان نشان دادیم  $B=C=50^\circ$

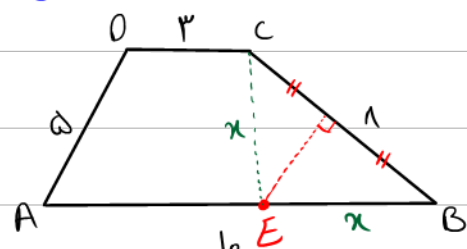
لذا فرضی چون بنا بر حالت «فرض» مثلث های  $AHM$  و  $CHM$  با هم هم هستند

$$\begin{aligned} x+y &= 50 \\ 2x+y &= 100 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2x+y &= 100 \\ -x+y &= 50 \\ \hline x &= 100-50=50 \end{aligned}$$

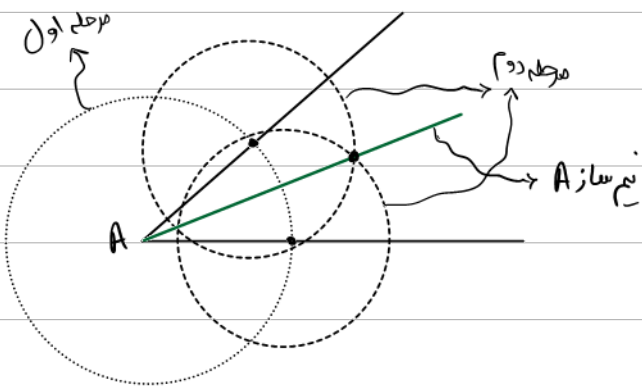
$$x=100-50=50 \Rightarrow \boxed{y=30} \quad \checkmark$$

سؤال: در ذوزنقه مقابل بخود منصف ساق  $BC$ ، قائمه  $AB$  را در  $E$  قطع می کنند نسبت محیط ذوزنقه  $ABCD$  به محیط چهارضلعی  $ADCE$  چقدر است؟



چون  $AE$  بخود منصف است پس  $EB=EC=x$  \* چون؟  
از فرضی اگر  $AB=10$  و  $EB=x$  پس  $AE=10-x$  می گاه داریم:

$$\begin{aligned} P_{AECD} &= AE + EC + CD + DA = (10-x) + (x) + 3 + 5 = 18 \\ P_{ABCD} &= AB + BC + CD + DA = 10 + 10 + 3 + 5 = 24 \end{aligned} \Rightarrow \frac{P_{ABCD}}{P_{AECD}} = \frac{24}{18} = \frac{4}{3} \quad \checkmark$$



۱- ترسیم نیم ساز زاویه: نیم ساز خطی است که زاویه را به دو زاویه برابر تقسیم می کند

مرحله رسم: اسوزن برقرار رادی را س فول داده د ب همان رسم می نیم

تا دو ضلع زاویه را قطع کند. ۲ لز محل برخورد همان قبل دو همان دیگر با ضلع ثابت

رسم می نیم تا بند دیگر را قطع کند. ۳ لز محل برخورد این دو همان یک خط به راس وصل

می نیم که همان نیم ساز است.  $\checkmark$  (مقتور از همان طریقه است)

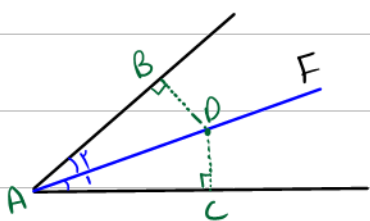
فصلیه: هر نقطه روی نیم ساز زاویه لزدو ضلع زاویه به یک فاصله است.

برهان: فرض می نیم خط  $AF$  نیم ساز  $\hat{A}$  باشد (نقطه  $D$  دلخواه است)

لذا نقطه  $D$  دو بخود بر اضلاع زاویه رسم می نیم و دو مثلث  $ABD$  و  $ACD$  تشکیل می شود.

باید نشان دهیم  $BD=DC$  پس داریم

$$\begin{aligned} A_1 &= A_2 \text{ (فرض)} \\ AD &= AD \text{ (ضلع مشترک)} \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} \text{اجزای مثلث} \\ \text{ضلع مشترک (دایره)} \end{cases} \Rightarrow \boxed{BD=DC} \quad \checkmark$$



قضیه: اگر نقطه ای از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد، آنگاه این نقطه روی نیم سازه قرار دارد.

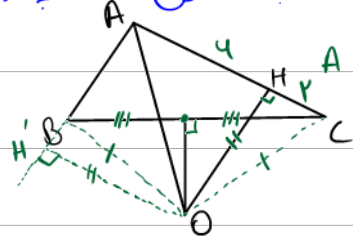
برهان: فرض می کنیم نقطه M از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله باشد یعنی  $MA = MC$  از نقطه M

به راس زاویه یک خط وصل می کنیم. باید نشان دهیم  $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$

$$\left. \begin{array}{l} CM = BM \\ AM = AM \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{فرض} \\ \text{وتر مشترک} \end{array} \Rightarrow \hat{A}_1 \hat{B} M \cong \hat{A}_2 \hat{C} M \xrightarrow{\text{متناظر}} \hat{A}_1 = \hat{A}_2 \quad \square$$

نکته: پس نیم سازه همان خطی است که از دو ضلع یک زاویه به یک فاصله اند.

سؤال: در شکل مقابل O محل برخورد نیم سازه زاویه A و عمود منصف ضلع BC است. اگر  $CH = 2$  و  $AH = 4$  باشد، طول AB چقدر است؟



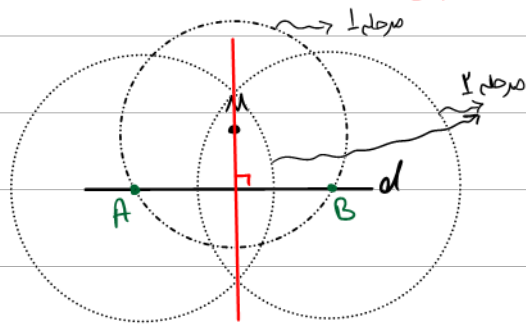
لازمه B رسم می کنیم و برهمندار AB یک خودی نیم دایره را  $H'$  نامیم و می دانیم محل O روی نیم سازه A

قرار دارد پس  $OH = OH'$  از طرفی چون O روی عمود منصف قرار دارد پس  $OC = OB$

می توان نشان داد که  $\hat{O}H'C \cong \hat{O}B'H'$  پس  $HC = BH' = 2$  و همچنین  $\hat{A}O'H' \cong \hat{A}O'H$

$$AH' = AB + BH' \xrightarrow{AH' = 4, BH' = 2} 4 = AB + 2 \Rightarrow \boxed{AB = 2} \quad \square$$

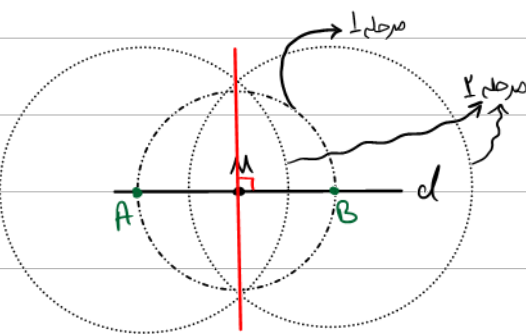
بنابراین  $AH' = AH = 4$  از این رو داریم:



۳ رسم عمود بر یک خط از نقطه ای خارج آن: رسم آن مشابه رسم عمود منصف است.

مراحل رسم: ۱ از نقطه M خارج از خط d مماسی رسم می کنیم که خط را در نقاط A و B قطع کند

۲ عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم.



۴ رسم عمود بر یک خط از نقطه ای واقع بر آن: رسم آن مشابه رسم عمود منصف است.

مراحل رسم: ۱ از نقطه M واقع بر خط d مماسی رسم می کنیم که خط را در نقاط A و B قطع کند

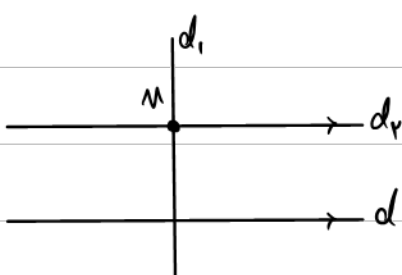
۲ عمود منصف پاره خط AB را رسم می کنیم.

۵ رسم خط موازی با یک خط از نقطه ای خارج آن: از رسم عمود یک می بینیم.

مراحل رسم: ۱ از نقطه M، خط  $d_1$  را عمود بر d رسم می کنیم

۲ از نقطه M، خط  $d_2$  را عمود بر  $d_1$  رسم می کنیم

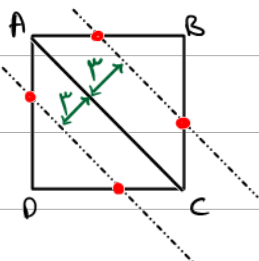
\* خط  $d_2$  با خط d موازی است.



سؤال: در مربع ABCD به ضلع 4 چند نقطه می توان وجود داد که فاصله آنها از قطر AC برابر ۳ باشد؟

چون فاصله از خط است پس دو خط به فاصله ۳ در دو طرف AC و حولی آن رسم می کنیم

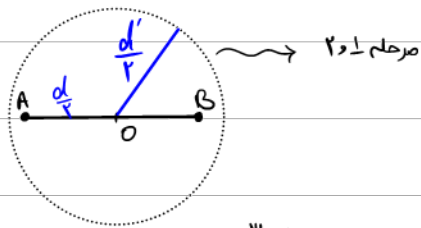
نقشه برخورد این دو خط حولی با مربع همان جواب هستند



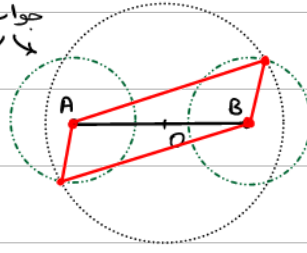
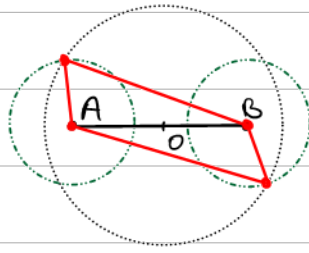
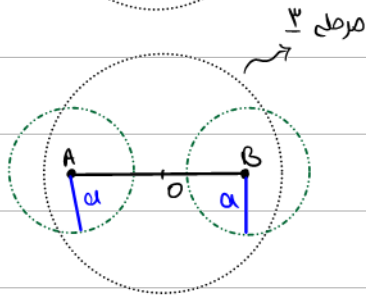




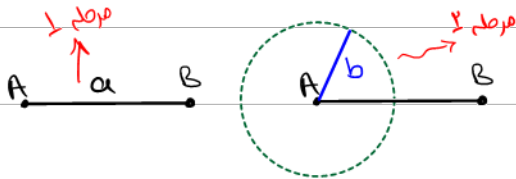
۱- رسم متوالی اضلاع به قطره‌های  $ad$  و ضلع  $ac$ :



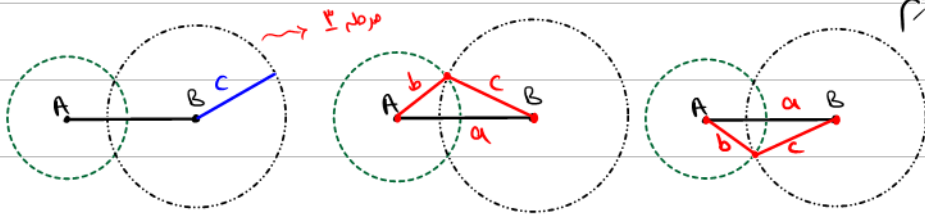
مرحله ۱: با خط  $AB$  به طول  $d$  رسم می‌کنیم و مرکز آن را به یک عمود منتهی می‌یابیم. دایره ۱ می‌نامیم. دایره ۲ دایره‌ای به مرکز  $O$  و شعاع  $\frac{ad}{2}$  رسم می‌کنیم. ۳- از دو سر یاره خط  $AB$  دو دایره به شعاع  $ad$  رسم می‌کنیم.



۲- رسم مثلث به اضلاع  $a$  و  $b$  و  $c$ :



مرحله ۱: با خط  $AB$  به طول  $a$  رسم می‌کنیم. ۲- از نقطه  $A$  دایره‌ای به شعاع  $b$  می‌کشیم. ۳- از نقطه  $B$  دایره‌ای به شعاع  $c$  رسم می‌کنیم.



نکته: رسم یاره خط به طول‌های معین اضلاع مثلث اندازده و خط‌های هر کدام از اضلاع از مجموع دو ضلع دیگر کوچکتر و از تفاضل آنها بزرگتر باشد.

$$\begin{cases} |b-c| < a < b+c \\ |a-c| < b < a+c \\ |a-b| < c < a+b \end{cases}$$

اگر  $a$  و  $b$  و  $c$  سه یاره خط باشند داریم: به نامساوی‌های مقابل نامساوی مثلثی گویند و در سترالات بررسی می‌کنیم. باید برقرار باشد.

مثال: بررسی کنید آیا می‌توان به مثلث ساخت؟

الف)  $a+2, a-2, 2a$

ب)  $3, 5, 2$

ج)  $2\sqrt{3}, 2\sqrt{2}, 2\sqrt{10}$

د)  $3, 2\sqrt{2}, 1$

با توجه به نامساوی مثلثی که در نکته قبل گفتیم داریم:

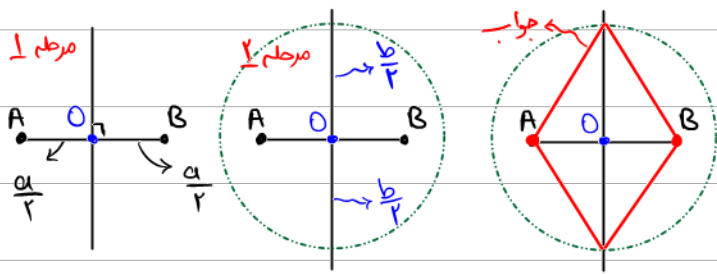
الف) نامساوی برقرار نیست پس نمی‌شود:  $(a+2)-(a-2) < 2a < (a+2)+(a-2) \Rightarrow 4 < 2a < 2a$

ب) نامساوی برقرار نیست پس نمی‌شود:  $\sqrt{3}-\sqrt{2} < 5 < \sqrt{3}+\sqrt{2} \Rightarrow 1.7-1.4 < 5 < 1.7+1.4 \Rightarrow 0.3 < 5 < 3.1$

ج) برقرار نیست پس نمی‌شود:  $2\sqrt{10}-2\sqrt{3} < 2\sqrt{2} < 2\sqrt{10}+2\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{10}-2\sqrt{3} < 2\sqrt{2} < 2\sqrt{10}+2\sqrt{3}$

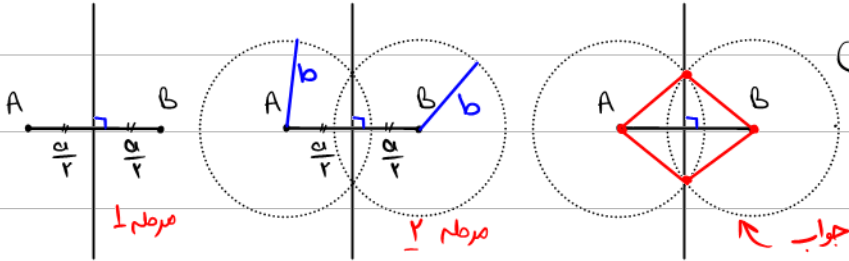
د) نامساوی برقرار است پس می‌شود:  $\sqrt{2}-1 < \sqrt{3} < \sqrt{2}+1 \Rightarrow 1.4-1 < 1.7 < 1.4+1 \Rightarrow 0.4 < 1.7 < 2.4$

۱۲ رسم لوزی با قطرهای  $\alpha$  و  $\beta$ :



مراحل رسم: ۱. با خط  $AB$  را به طول  $\alpha$  رسم می کنیم و عمود منصف آن را رسم می کنیم.  
۲. دایره ای به مرکز محل برخورد  $AB$  و عمود منصف آن به شعاع  $\frac{\beta}{2}$  رسم می کنیم.

۱۳ رسم لوزی با قطر  $\alpha$  و ضلع  $\beta$ :



مراحل رسم: ۱. با خط  $AB$  را به طول  $\alpha$  رسم می کنیم و عمود منصف آن را رسم می کنیم.  
۲. از دو سر  $AB$  خط  $AB$  دو دایره به شعاع  $\beta$  رسم می کنیم.

تمرین: مثلثی با اضلاع ۳ و ۴ و ۵ رسم کنید. مراحل رسم توضیح دهید.

تمرین: مربعی به قطر ۲۵ رسم کنید.

تمرین: مستطیلی به قطر ۸ رسم کنید.

تمرین: مراحل رسم نیم سازه زاویه را توضیح دهید.

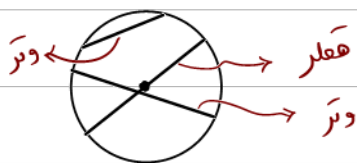
تمرین: پاره خطی رسم کنید و با ذکر مراحل عمود منصف آن را نشان دهید.

تمرین: مستطیلی به قطر ۸ و ضلع ۳ رسم کنید.

تمرین: متوازی الاضلاعی به قطرهای ۴ و ۸ رسم کنید. چند متوازی الاضلاع با این اعداد می توان رسم کرد؟

تمرین: متوازی الاضلاعی به قطر ۵ و ضلع های ۴ و ۵ رسم کنید.

تمرین: لوزی ای به قطرهای ۸ و ۴ رسم کنید.



نکته: وتر در دایره به پاره خطی گویند که دایره را در دو نقطه قطع می کند.

نکته: در هر دایره بزرگترین وتر همان قطر دایره است.

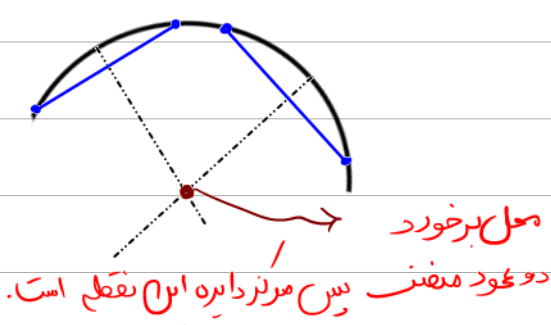
نکته: عمود منصف تمام وترهای یک دایره از مرکز دایره عبور می کنند.

سؤال: مرکز نیم دایره مقابل را بیابید.

پس داریم عمود منصف وترهای یک دایره از مرکز عبور می کنند.

پس اگر عمود منصف دو وتر را رسم کنیم، محل برخورد این

دو عمود منصف همان مرکز دایره می باشد.



محل برخورد دو عمود منصف پس مرکز دایره این نقطه است.

## درس دوم استدلال:

**استدلال استقرای:** روش نتیجه گیری کلی بر مبنای مجموع محدودی از مشاهدات را استدلال استقرای گویند.  
**نقته:** استدلال استقرای یعنی از جز ۴ به کل برسیم.

**مثال:** اگر با اندازه گیری زوایای داخلی چند مثلث نتیجه بگیریم که در هر مثلث ها مجموع زوایای داخلی برابر  $180^\circ$  است.  
**مثال:** اگر چهار نفر دارنداش آخوزان یک لاس را بینم





