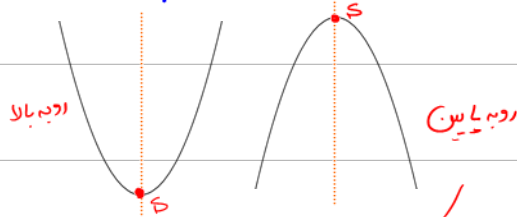


## درس دوم: سهمی

سال گذشته بارسم نمودار معادله  $y = ax^2 + b$  آشنا شدیم و می دانیم که نمودار آن یک خط راست است، اما همه معادلات را در برخی موارد  
برخی معادلات نمودار آنها به صورت یک منحنی می باشد یکی از انواع این معادلات، معادله درجه دوم است، که نمودار آن به صورت سهمی می باشد

سهمی: نمودار هر معادله به شکل  $y = ax^2 + bx + c$  را که در آن  $a \neq 0$  و  $b$  و  $c$  اعداد حقیقی هستند و  $a \neq 0$  یک سهمی می گوئیم که به بیانی نزدیک  
صورت مقابل است.



محور تقارن سهمی: خطی است عمود و دولایه محور  $y$  باشد که سهمی را به دو قسمت مساوی تقسیم می کند. (در شکل های بالا مشخص شد)

راس سهمی: با صرف که نشان می دهیم. در سهمی رو به بالا یا پایین ترین نقطه نمودار است که روی محور تقارن قرار دارد و در سهمی رو به پایین  
بالا ترین نقطه نمودار است و بر روی محور تقارن قرار دارد.

معادله سهمی: معادله سهمی به بیانی نزدیک و صورت  $y = ax^2 + bx + c$  یا  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  می باشد که به ادبی فرم استاندارد و به دومی  
فرم مربعی گویند.

## رسم سهمی:

① برای رسم یک سهمی سه در فرم استاندارد و دو در فرم مربعی به ضابطه ها نیاز داریم یکی از این نقاط راس سهمی و دو نقطه دیگر دگواه  
می باشد پس برای رسم یک سهمی لازم است ابتدا مختصات راس سهمی را بیابیم، پس با توجه به  $a$  و دو نقطه دگواه دیگر به رسم می پردازیم.

## یافتن مختصات سهمی:

۱. یافتن مختصات سهمی با استفاده از فرم استاندارد: می دانیم فرم استاندارد سهمی به صورت  $y = ax^2 + bx + c$  می باشد.

اگر فرض کنیم مختصات راس به صورت  $(x_s, y_s)$  باشد داریم  $x_s = \frac{-b}{2a}$  برین ترتیب با استفاده از رابطه نقطه شو

طول (x) راس سیمی را بیایم و سپس با جایگذاری x در معادله سیمی y را نیز بیایم.

مثال: مختصات راس سیمی به معادله  $y = 5x^2 + 10x + 3$  را بیابید.

اول x را  $x_s$  می‌گذاریم، ابتدا با استفاده از رابطه  $x_s = \frac{-b}{2a}$  طول نقطه راس را بیایم.  $\leftarrow$  طول راس

$$x_s = \frac{-b}{2a} = \frac{-10}{2 \times 5} = -1 \Rightarrow x_s = -1$$

پس با جایگذاری طول راس در معادله سیمی، عرض آن را نیز بیایم:

$$y_s = 5(-1)^2 + 10(-1) + 3 = -2$$

در نهایت  $(-1, -2)$  مختصات راس سیمی است.

$$\Rightarrow S(-1, -2) \Rightarrow y_s = -2$$

تمرین: مختصات راس سیمی  $y = x^2 + 2x + 1$  را بیابید.

۲. یافتن مختصات راس با استفاده از فرم مربعی: فرم مربعی معادله یک سیمی به صورت  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$  می‌باشد. اگر داشته

باشیم  $(x_s, y_s)$  می‌توان گفت  $x_s = \alpha$  و  $y_s = \beta$  بنابراین داریم  $S(\alpha, \beta)$

مثال: در سیمی با معادله  $y = 4(x - 5)^2 + 3$  مختصات راس سیمی را بیابید.

بنابراین  $y = a(x - \alpha)^2 + \beta$

$x_s = 5$  قرینه  $\alpha = 5$  در این جا  $\alpha = -5$  نه قرینه آن 5 است پس  $x_s = 5$

$S(5, 3)$

تمرین: مختصات راس سیمی  $y = 2(x + 1)^2 - 1$  را بیابید.

نکته: معادله محور تقارن یک سیمی با راس  $S(x_s, y_s)$  به صورت  $x = x_s$  می‌باشد.

تمرین: در هر یک مثال‌ها و تمرین‌های قبل معادله محور تقارن را بیابید.

II) حال که آخویشم جلونه راس سیمی را بیایم وقت رسم نمودار معادله درجه دوم است. مراحل رسم به صورت زیر است:

۱. یافتن مختصات راس سیمی

۲. رسم جدول نقطه یابی و مقارن دهی

x	○	$x_s$	○
y	○	$y_s$	○

✗ بهتر است جهت راحت بودن محاسبات نقاط دلخواه نسبت به راس یک فاصله داشته باشند چرا که در این حالت y های این دو نقطه برابر خواهد بود.

۳ در مختصات با مشخص کردن نقاط در دستگاه مختصات نمودار معادله را رسم می کنیم.

مثال: نمودار معادله  $y = x^2 + 4x + 4$  را رسم کنید. محور تقارن را نیز بیابید.

طبق مراحل گفته شده ابتدا مختصات رأس را می یابیم، می دانیم  $x_s = \frac{-b}{2a}$   $x_s = \frac{-4}{2} = -2$   $x_s = \frac{-b}{2a}$  از این طریق ابتدا طول رأس را پیدا می کنیم سپس  $y$  را با جایگزینی  $x$  در معادله به دست می آوریم و محور تقارن را می یابیم.

$y = x^2 + 4x + 4 \xrightarrow{x_s = -2} y_s = (-2)^2 + 4(-2) + 4 = 0 \Rightarrow y_s = 0 \Rightarrow S(-2, 0)$  مختصات رأس

$x$	$-4$	$-2$	$0$
$y$	$4$	$0$	$4$

حال به مختصات رأس را پیدا کردیم نوبت به رسم جدول نقطه ای می رسیده

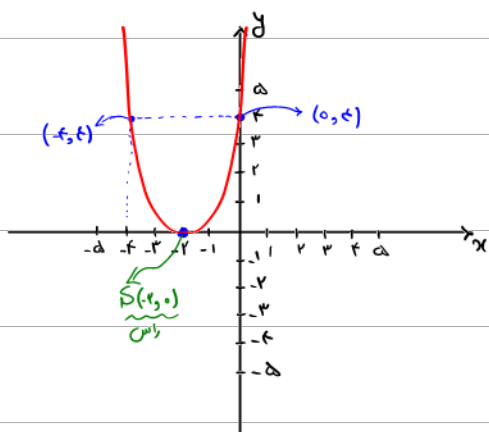
\* در اینجا  $0$  و  $-4$  را به دلخواه انتخاب می کنیم که  $-2$  به یک فاصله هستند

و می بینیم انتخاب برابر است.

$x = 0 \Rightarrow y = (0)^2 + 4(0) + 4 = 4 \Rightarrow (0, 4)$

$x = -4 \Rightarrow y = (-4)^2 + 4(-4) + 4 = 4 \Rightarrow (-4, 4)$

حال نوبت به رسم نقاط و نهایتاً رسم نمودار می رسد.



\* در شکل می بینید که دایره

انتخاب دو نقطه با فاصله برابر از  $-2$

رأس به بود است (تقارن دارد)

دقت کنید  $\alpha$  برابر  $\beta$  است، باید قرینه شود

مثال: با توجه به معادله  $y = 2(x+3)^2 - 4$  نمودار معادله را رسم کنید.

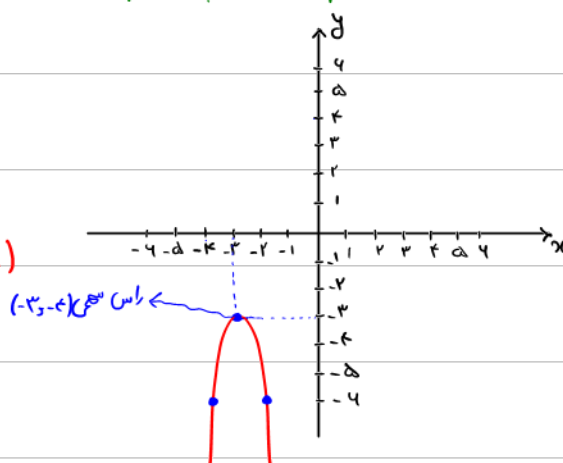
رأس همی را می یابیم:  $x = -3$  محور تقارن  $S(-3, -4)$  رأس همی

$x$	$-4$	$-3$	$-2$
$y$	$-4$	$-4$	$-4$

در مرحله بعد جدول رسم می کنیم و نقطه ای می بینیم

$x = -2 \Rightarrow y = 2(-2+3)^2 - 4 = -4 \Rightarrow (-2, -4)$

$x = -4 \Rightarrow y = 2(-4+3)^2 - 4 = -4 \Rightarrow (-4, -4)$



نکته: با توجه به دو مثال فوق دیدیم که هرگاه  $a > 0$  باشد سهمی رو به بالاست و هر وقت  $a < 0$  باشد سهمی رو به پایین است.

$$y = -5x^2 + 2x$$

عکس: جهت هر یک از سهمی های زیر را بنویسید.

$$-2x = -4x^2 + 3x + 1$$

$$y = x^2 + x$$

نکته: با مقایسه دو مثال بالا می بینیم که رسم نمودار با معادله  $y = (x - \alpha)^2 + \beta$  راحت تر است. برای رسم راحت تر، می توانیم از طریق روش زیر معادله  $y = ax^2 + bx + c$  را به معادله  $y = (x - \alpha)^2 + \beta$  تبدیل کرد.

$$y = ax^2 + bx + c = a \left( x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \right) \quad \text{این روش همان روش مربع کامل کردن است.}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} \quad \xrightarrow{\substack{\text{مربع کامل کردن} \\ + \frac{b^2}{4a^2}}} \frac{y}{a} = x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow \frac{y}{a} = \left( x + \frac{b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2} \Rightarrow y = a \left( x - \frac{-b}{2a} \right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

$$\Rightarrow y = a \left( x - \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\alpha} \right)^2 + \underbrace{\frac{-\Delta}{4a}}_{\beta} \Rightarrow K \left( \underbrace{\frac{-b}{2a}}_{\text{طول راس}}, \underbrace{\frac{-\Delta}{4a}}_{\text{عرض راس}} \right)$$

نکته: همانطور که مشاهده کردید برای بدست آوردن مختصات راس سهمی از  $K \left( \frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a} \right)$  و خط تقاطع نیز  $x = \frac{b}{2a}$  می باشد.

مثال: راس و محور تقاطع سهمی های زیر را با استفاده از نکته بالا بدست آورید.

الف)  $y = x^2 - 11x + 20$

ب)  $y = -2x^2 + 1$

ج)  $y = \frac{1}{4}x^2 + 4x^2 + 2x + 3$

مثال: معادله  $y = 2x^2 + 4x + 4$  را ابتدا به فرم مربعی نوشته سپس نمودار آن را رسم کنید

فرم استاندارد

ابتدا ضریب  $x^2$  یعنی ۲ را فاکتور می‌گیریم

سپس دو طرف معادله را بر ۲ تقسیم می‌کنیم تا ۱ فاکتور گرفته شده ساده شود

حل برای مربع کامل سه مرحله  $(\frac{b}{2})^2 = (\frac{3}{2})^2 = \frac{9}{4}$  را اضافه و کم می‌کنیم (جواب)

سپس با جبرانه به عبارت معادله می‌رسیم - ضرایب خودتان بگویید  $(-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$

می‌باشد، اما این نادرست است زیرا جهت ضرایب معادله  $\frac{y}{2}$  است نه باید

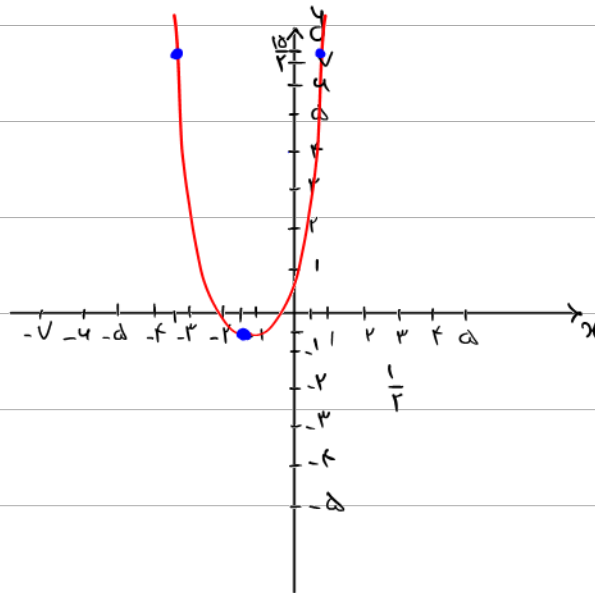
به  $y$  تبدیل شود و سپس  $S(a, b)$  بدست آید.

حال به رسم نمودار و نقطه یابی می‌پردازیم.

$x = \frac{1}{2} \Rightarrow y = 2(\frac{1}{2})^2 + 4(\frac{1}{2}) + 4 = \frac{15}{2}$

$x = -\frac{3}{2} \Rightarrow y = 2(-\frac{3}{2} + \frac{3}{2})^2 - \frac{1}{2} = \frac{15}{2}$

$x$	$(-\frac{3}{2})$	$(-\frac{3}{2}, \frac{15}{2})$	$(\frac{1}{2})$
$y$	$(\frac{15}{2})$	$(\frac{15}{2})$	$(\frac{15}{2})$



نکته!! در مثال بالا می‌توانیم برای بدست آوردن مختصات سهمی از رابطه  $S(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a})$  نیز استفاده کنیم.





