Apuntes de Matemática 2

Facultad de Informática
U.N.L.P.

Año 2020

Índice general

1. Funciones **5**
1.1. Definición 5
1.1.1. Ejercicios 6
1.2. Funciones polinómicas 6
1.2.1. Función Lineal 7
1.2.2. Función Cuadrática 8
1.2.3. Función Cúbica 10
1.3. Funciones Potencias Racionales 12
1.4. Función Valor Absoluto 13
1.5. Funciones Racionales 14
1.6. Función Exponencial 16
1.7. Función Logarítmica 17
1.8. Funciones Trigonométricas 19
1.9. Ejercicios 19
1.10. Funciones a trozos 20
1.10.1. Ejercicios 22
1.11. Operaciones entre funciones 23
1.11.1. Suma, resta, producto y cociente de funciones 23
1.11.2. Composición de funciones 23
1.11.3. Ejercicios 25

Capítulo 1

Funciones

Los contenidos de la materia Matemática 2 se corresponden con los contenidos de la materia Análisis Matemático 1 que clásicamente se ven en muchas carreras de ciencias y de informática, estos contenidos se centran en el estudio y aplicación de funciones para resolver problemas de muy diversos tipos.

1.1. Definición

Una función es una relación especial entre dos conjuntos, donde a cada elemento del primer conjunto se le asigna un único elemento del segundo conjunto, por ello también usamos como sinónimo de función la palabra asignación.

Muchos fenómenos de la vida diaria se pueden representar como funciones, por ejemplo, podemos relacionar la cantidad de dígitos que posee una clave con la cantidad de claves posibles, en particular, si una clave tiene 4 dígitos, hay 10^4 claves posibles, si tiene 8 dígitos, hay 10^8 claves posibles, y así. Esto puede representarse como:

$$P(4) = 10^4$$

$$P(8) = 10^8$$

Y más generalmente como

$$P(n) = 10^n, \quad \text{siendo } n \text{ un número natural.}$$

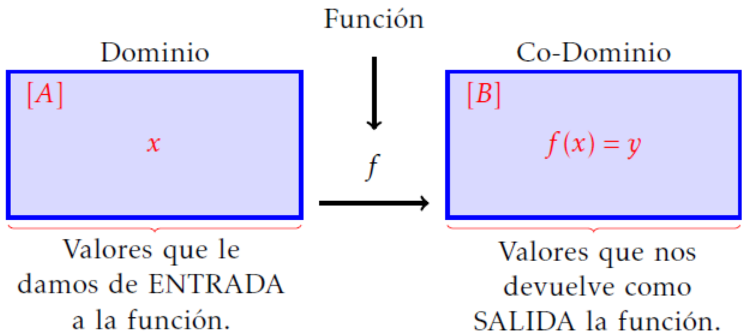
Algunas funciones no se rigen a partir de fórmulas matemáticas, por ejemplo podemos mencionar la asignación que existe entre cada persona y su número de documento, otro ejemplo está dado por la función que asigna a cada persona su altura.

En todos los casos podemos observar que a cada elemento de un primer conjunto se le asigna un único elemento de un segundo conjunto, en el ejemplo anterior tenemos un primer conjunto dado por las personas, luego a cada persona se le asigna un único elemento del conjunto de los números, de manera que a cada persona le corresponde el número de su altura. Vemos en este ejemplo claramente que todas las personas tienen asignada una única altura.

En esta materia trabajaremos con funciones numéricas, es decir funciones que relacionan dos conjuntos de números, y especialemnte aquellas determinadas por una fórmula matemática.

simbólicamente notaremos $f : A \rightarrow B$ y diremos que f asigna a cada elemento del conjunto A un único elemento del conjunto B, en particular se notará $f(x) = y$ para decir que al elemento x del conjunto A se le asigna el elemento y del conjunto B.

Diremos que el conjunto A es el Dominio de la función f, es decir que el dominio de una función es el conjunto de los elementos de entrada, a los cuales se les asignará mediante la función un correspondiente en el segundo conjunto.



Cuando definimos una función $y = f(x)$ mediante una fórmula, y el dominio no se establece de forma explícita o se restringe por el contexto, se supondrá que el dominio será el mayor conjunto de números reales x para los cuales la fórmula proporciona valores reales para y. A este dominio lo llamamos *dominio natural*.

Ejemplo: Si consideramos la función definida por la fórmula $f(x) = x^2 + 1$ podemos observar que a cada elemento x se le asigna el elemento $x^2 + 1$, en particular veamos que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ y que $f(3) = 3^2 + 1 = 10$.
Dado que la fórmula no posee ningún tipo de restricción diremos que el dominio de la función es el conjunto de todos los números reales, ya que a cualquier número real se lo puede elevar al cuadrado y luego sumarle uno.
En símbolos se escribe : $Dom(f) = \mathbb{R}$.
También podrá expresarse en notación de intervalos, es decir $Dom(f) = (-\infty; \infty)$

Ejemplo: Si consideramos la función definida por la fórmula $g(x) = \dfrac{1}{x-3}$ podemos observar que la función está definida a partir de una división, y teniendo en cuenta que no se puede dividir por cero, tenemos que no puede suceder que $x - 3 = 0$, luego $x = 3$ no estará en el dominio de la función. Simbólicamente $Dom(g) = (-\infty; 3) \bigcup (3; \infty)$.

1.1.1. Ejercicios

1. Realizar el ejercicio de las páginas 26 y 27 del libro *El lenguaje de funciones y gráficas*. (páginas 28 y 29 del archivo en formato pdf)

1.2. Funciones polinómicas

Una función $f(x)$ se dice polinómica si

$$f(x) = a_n\, x^n + a_{n-1}\, x^{n-1} + a_{n-2}\, x^{n-2} + \ldots + a_1\, x + a_0,$$

donde n es un número entero positivo y $a_0, a_1, ..., a_n$ son constantes reales.

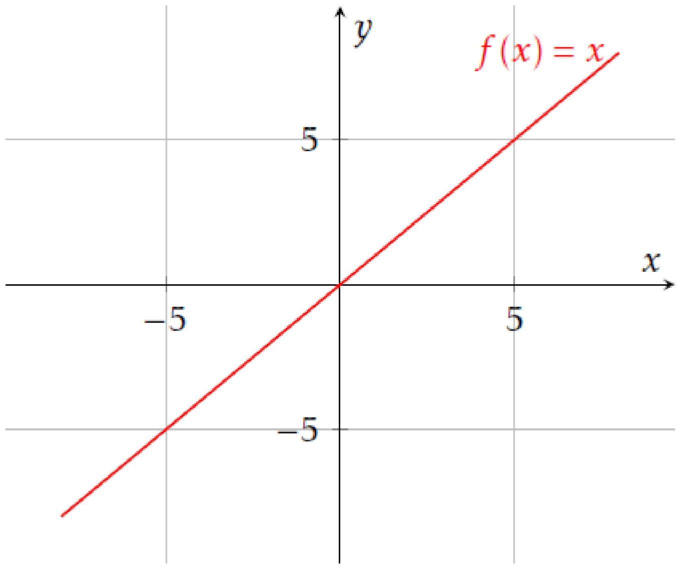
El dominio de todas las funciones polinómicas es $(-\infty; \infty)$.

Ahora veremos algunas funciones polinómicas más comunes.

1.2.1. Función Lineal

Una Función Lineal es de la forma $f(x) = y = mx + b$. Su representación gráfica está dada por una recta donde m es la pendiente de la recta y b la ordenada al origen. Las funciones constantes se presentan cuando la pendiente $m = 0$.

Una de las principales funciones lineales es, $f(x) = x$, llamada **función identidad**, donde $m = 1$ y $b = 0$. Su representación gráfica es una recta que pasa por el origen:



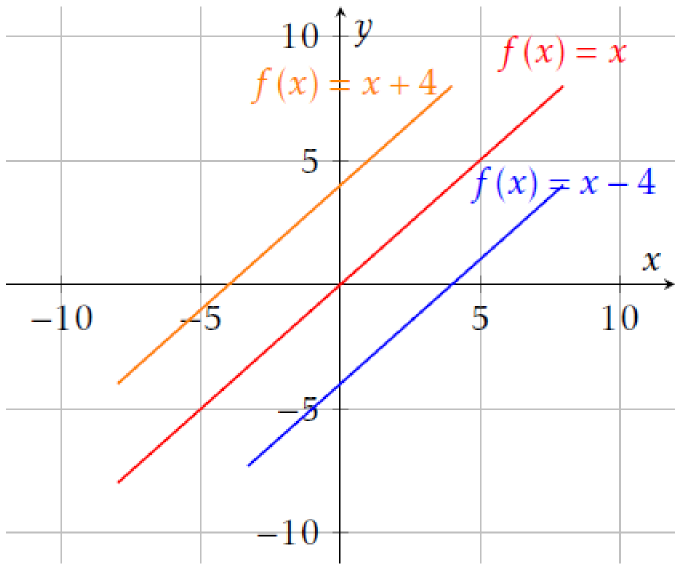
Traslaciones

Se puede obtener una nueva función a partir de una ya existente mediante la suma de una constante de la siguiente manera

- *Traslación horizontal:* $y = f(x-k)$, si $k > 0$ la gráfica de f se traslada k unidades a la derecha; si $k < 0$ la gráfica de f se traslada k unidades a la izquierda.

- *Traslación vertical:* $y = f(x) + h$, si $h > 0$ la gráfica de f se traslada h unidades hacia arriba; si $h < 0$ la gráfica de f se traslada h unidades hacia abajo.

Por ejemplo, $f(x) = x$ y sus desplazamientos hacia ambos sentidos 4 lugares.



Este comportamiento lo podemos entender también como rectas con pendiente $m = 1$ y ordenadas al origen $b = 4$ y $b = -4$.

Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = 2x + 1$

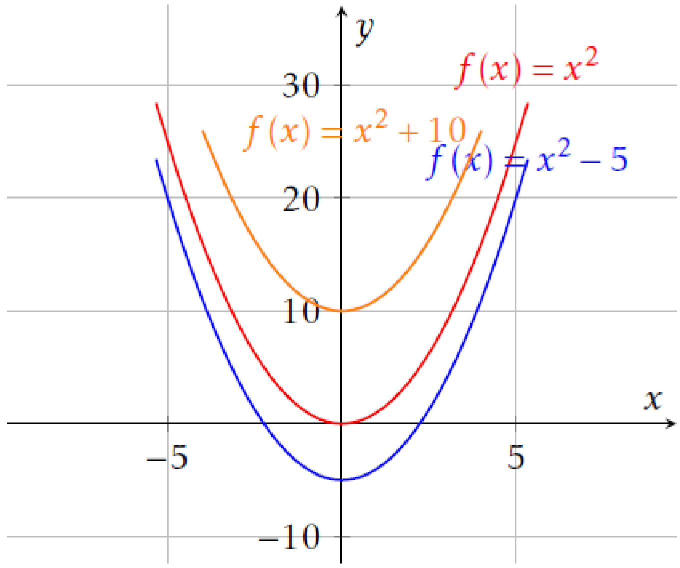
2. $b(x) = x - 6$

1.2.2. Función Cuadrática

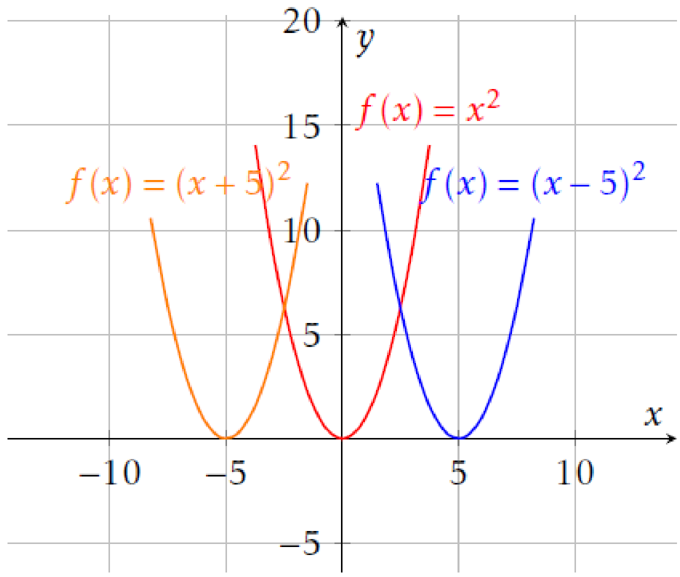
Las funciones cuadráticas son de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$. Su representación gráfica está dada por una parábola de la siguiente manera.

Traslaciones

Si trasladamos la parábola $y = x^2$ 10 lugares sobre el eje y hacia arriba y 5 lugares sobre el eje y hacia abajo, obtenemos lo siguiente,



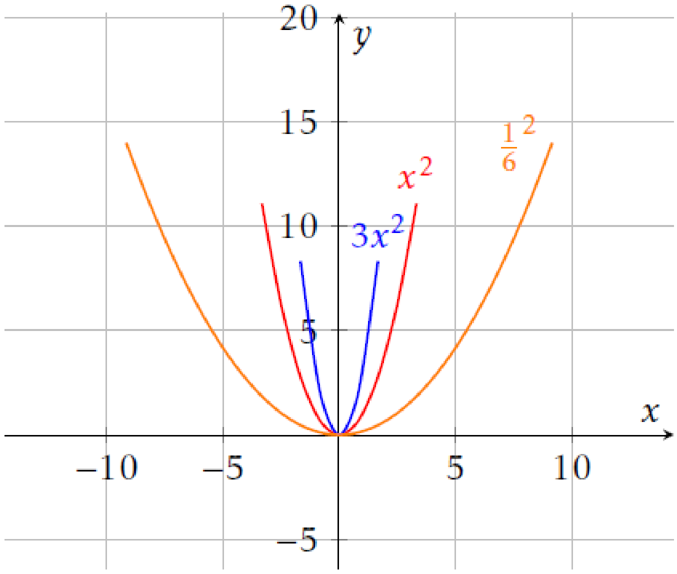
Y si la traslación es sobre el eje x,



Dilataciones

Dilatar es cambiar el tamaño de la gráfica de una función $y = f(x)$, alargarla o comprimirla vertical u horizontalmente.

- $y = c\,f(x)$, si $c > 1$ la gráfica de f se alarga verticalmente en un factor c; si $0 < c < 1$ la gráfica de f se alarga horizontalmente en un factor c;
- $y = c\,f(x)$, si $c < 0$ la gráfica de f se refleja con respecto al eje x.



Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

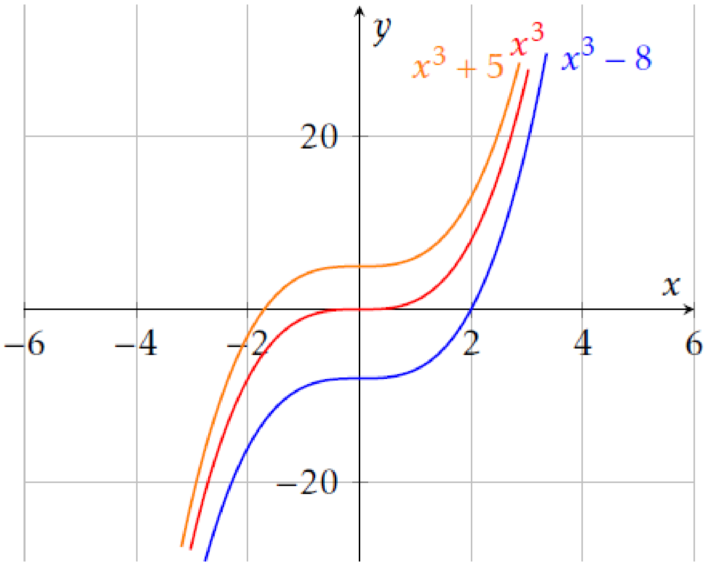
1. $a(x) = 3x^2 + 3$

2. $b(x) = (x-6)^2$

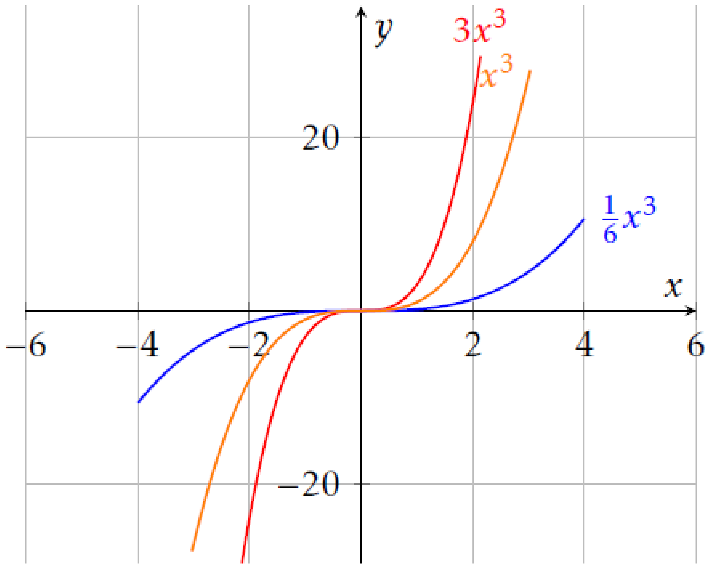
1.2.3. Función Cúbica

Las funciones cúbicas son de la forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.

Traslaciones



Dilataciones



Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = x^3 + 1$

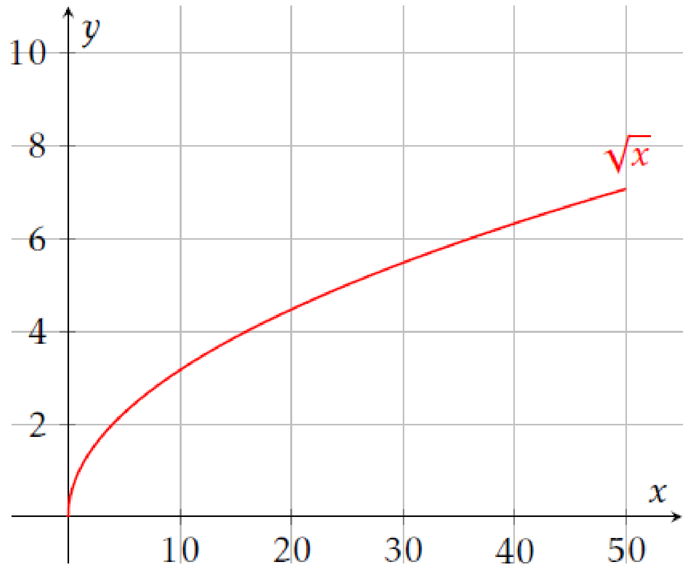
2. $b(x) = (x-2)^3$

1.3. Funciones Potencias Racionales

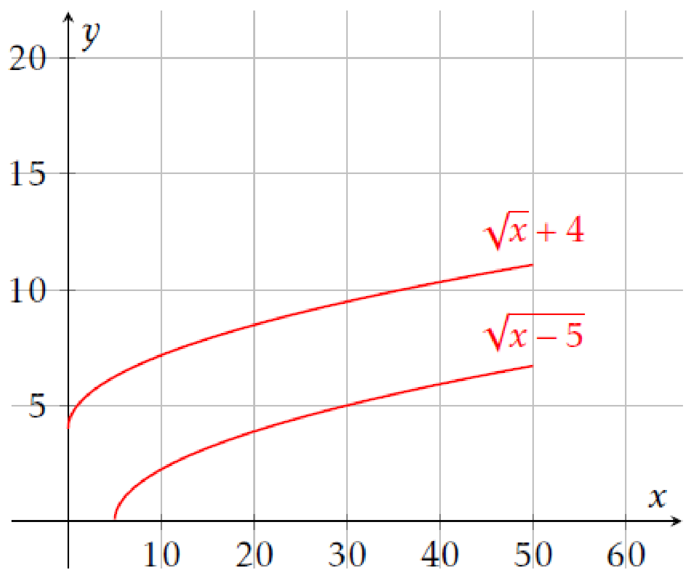
Una función $f(x) = x^a$, donde a es una constante fraccionaria, se denomina función potencia. Una de las más conocida es: **La función raíz cuadrada**.

$$y = x^{1/2} = \sqrt{x}$$

El dominio de la función raíz cuadrada es $[0, +\infty)$.



Traslaciones



Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = \sqrt{x} + 2$

2. $b(x) = \sqrt{x - 3}$

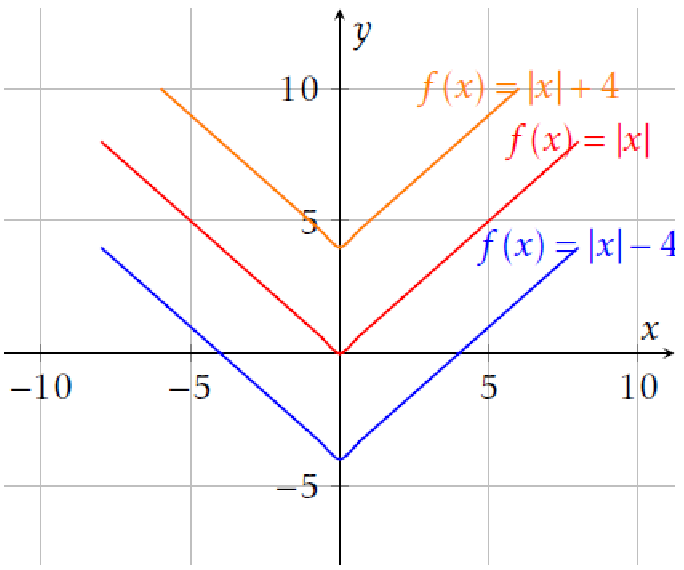
1.4. Función Valor Absoluto

El valor absoluto de un número suele pensarse como "sin signo", sin embargo para dar una instrucción precisa de cómo calcular eso se divide en dos casos, para los valores positivos se deja el mismo valor y para los valores negativos se cambia el signo. En este caso la función en cuestión se entiende de la siguiente manera:

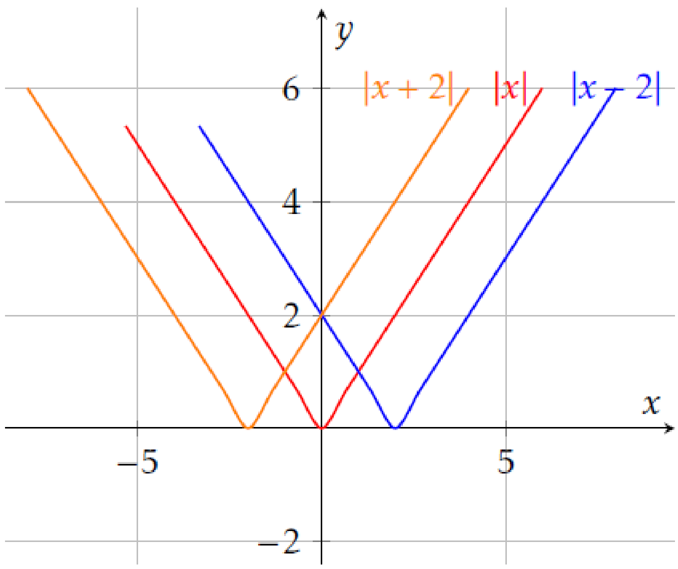
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

Con lo cual podemos observar una típica función valor absoluto en rojo y sus desplazamientos 4 lugares sobre el eje y.

Traslaciones



Si los desplazamientos los hacemos sobre el eje x, lo que debemos modificar es el interior de las barras de valor absoluto. Por ejemplo, veamos los siguientes desplazamientos 2 lugares sobre el eje x.



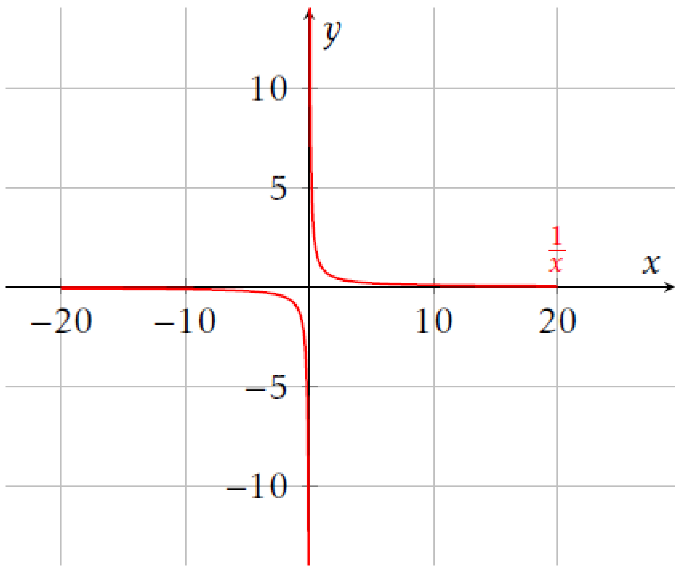
Ejercicios

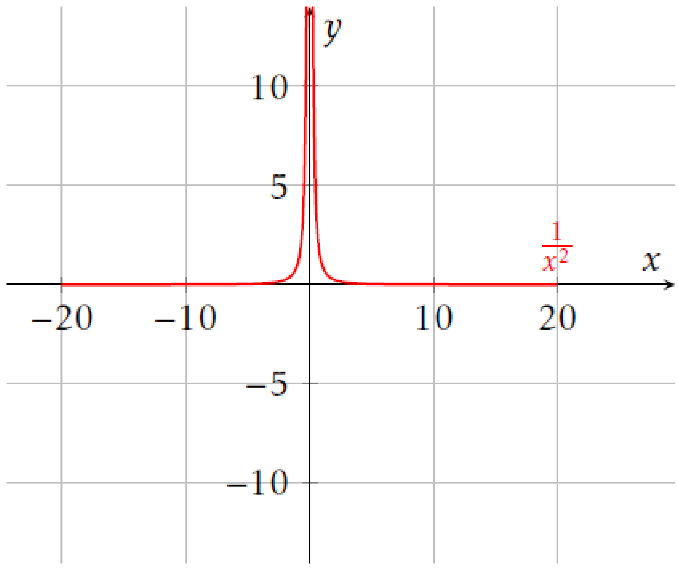
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = |2x| + 1$
2. $b(x) = |x - 6|$

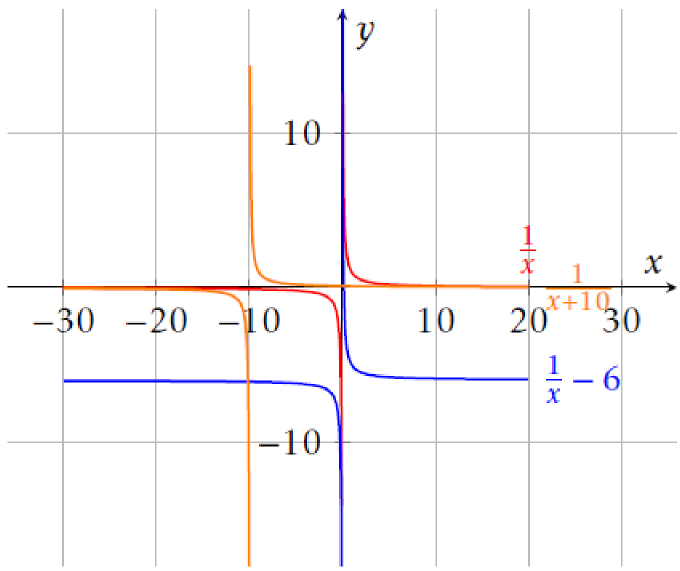
1.5. Funciones Racionales

Una función racional es un cociente o razón $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$, donde p y q son polinomios. El dominio de una función racional es el conjunto de $\mathbb{R}$ para los cuales $q(x) \neq 0$.





Traslaciones



Ejercicios

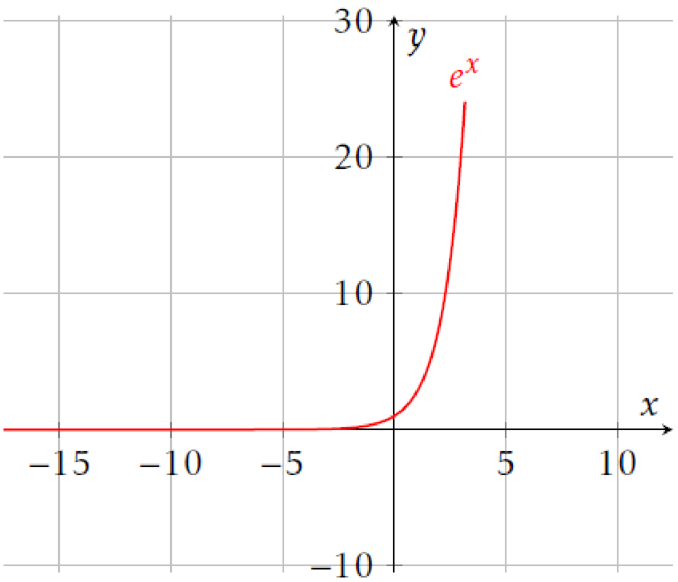
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = \frac{1}{x} + 4$

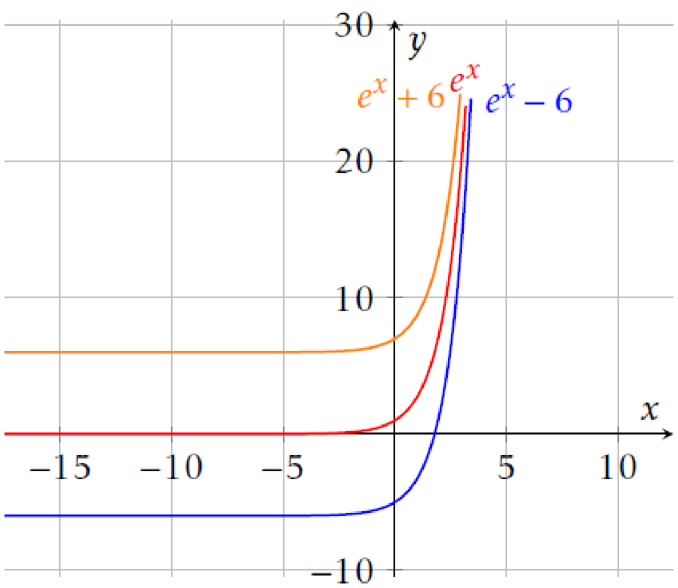
2. $b(x) = \frac{1}{x-8}$

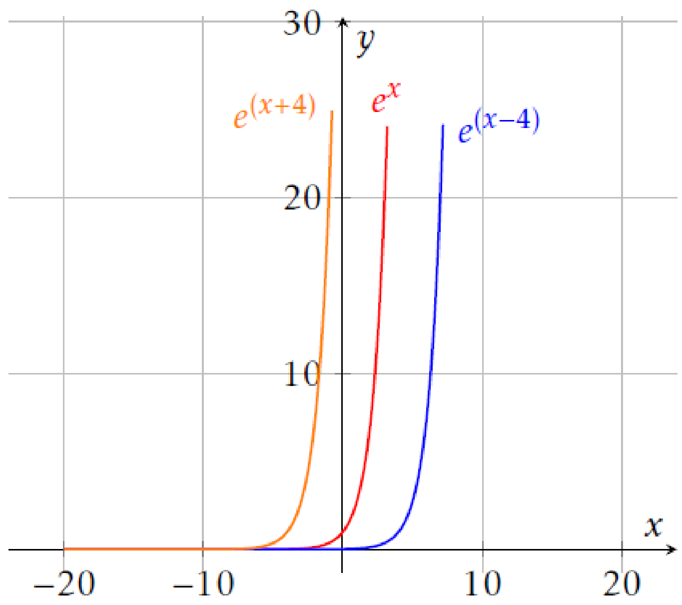
1.6. Función Exponencial

Las funciones de la forma $f(x) = a^x$, donde la base a es una constante positiva y tienen su variable en el exponente (de ahí su nombre). El dominio de las funciones exponenciales es el conjunto $\mathbb{R}$. De todas ellas una muy particular e importante es la que tiene como base al número $e = 2{,}71828....$ El número e, conocido como número de Euler, es un número irracional de uso muy frecuente en el análisis matemático. En la siguiente figura se muestra la función exponencial de base e.



Traslaciones





Ejercicios

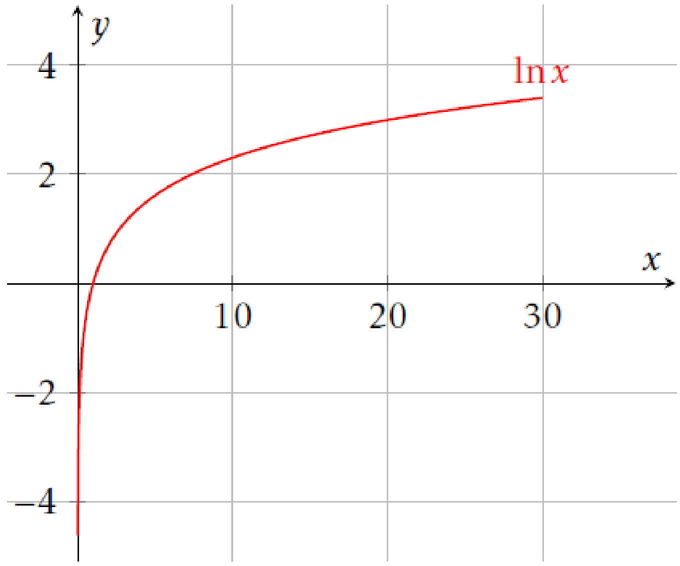
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = e^{x-5}$

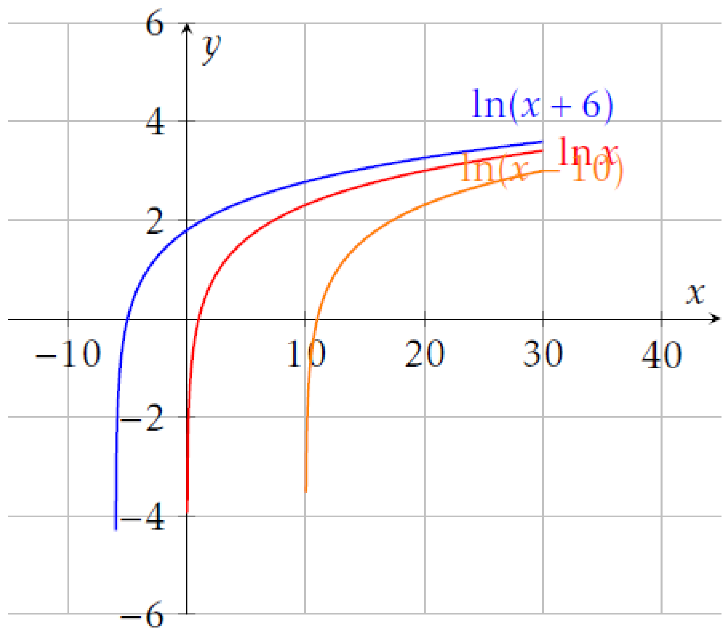
2. $b(x) = e^x + 3$

1.7. Función Logarítmica

Las funciones logarítmicas $f(x) = log_a(x)$, donde la base es una constante positiva, son las inversas de las funciones exponenciales. Podemos pensar al resultado de la operación $log_a(x)$ como el valor de la potencia a la cual debemos elevar al número a para alcanzar el valor x. En símbolos $log_a(x) = n$ si y solo si $a^n = x$.Llamamos al caso particular del logaritmo de base e como logaritmo natural y lo simbolizamos como $log_e(x) = ln(x)$. En la siguiente figura se muestra la función logaritmo en base e, $f(x) = log_a(x) = log_e(x) = ln(x)$. El dominio de las funciones logarítmicas es el conjunto $(0, +\infty)$.



Traslaciones



Ejercicios

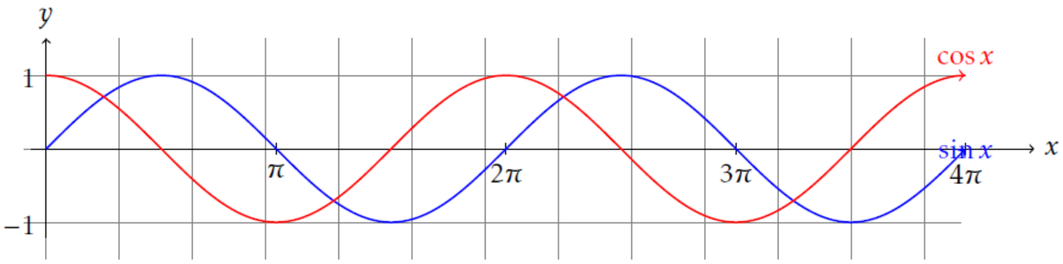
Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = ln(x+2)$

2. $b(x) = ln(x) - 4$

1.8. Funciones Trigonométricas

La trigonometría es la rama de la matemática que estudia la relación entre lados y ángulos de un triángulo, a partir de la división de las medidas de los lados de un triángulo rectángulo surgen las razones trigonométricas *seno* , *coseno*, *tangente*, *secante*, *cosecante* y *cotangente*. Si bien los ángulos pueden medirse de distintas formas, trabajaremos, salvo que se indique otra cosa, en radianes. Si bien los ángulos se miden de 0 a 2π, podemos pensar en extender a toda la recta real repitiendo los ángulos de manera periódica. De esta forma el dominio de la función $f(x) = sen(x)$ es el conjunto de todos los números reales, ya que el *seno* de un ángulo se puede calcular siempre, con lo cual la función es periódica, es decir que la gráfica que se representa observando entre 0 y 2π se repite infinitamente. Algo muy similar sucede con la función $g(x) = cos(x)$.



Para el análisis de las funciones trigonométricas nos ayudaremos con las identidades trigonométricas, algunas de ellas son muy usuales, por ejemplo sabemos que $\frac{sen(\alpha)}{cos(\alpha)} = tg(\alpha)$ siempre y cuando el $cos(\alpha)$ no valga cero. De esta forma si $f(x) = \cos(x)$ y $g(x) = sen(x)$ tenemos que $h(x) = tg(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{sen(x)}{\cos(x)}$.

Ejercicios

Realizar la gráfica de las siguientes funciones a partir de su función base.

1. $a(x) = \cos(x) + 3$
2. $b(x) = sen(x) - 2$

Pueden graficar las funciones pedidas utilizando el programa GeoGebra on line:

https://www.geogebra.org

En el siguiente link pueden aprender a usarlo:

https://www.youtube.com/watch?v=LKcln4012AU

1.9. Ejercicios

Hallar el dominio para que las siguientes expresiones sean funciones:

1. $a(x) = x + 1$
2. $b(x) = x^2 + 1$

3. $c(x) = \dfrac{1}{x}$

4. $d(x) = \dfrac{2}{x+3}$

5. $e(x) = \dfrac{3}{x^2-4}$

6. $f(x) = \dfrac{5}{x^2-4x+3}$

7. $g(x) = \dfrac{x-1}{x^2-4x+3}$

8. $h(x) = |x+1|$

9. $i(x) = 2^x$

10. $j(x) = 2^{x-5}$

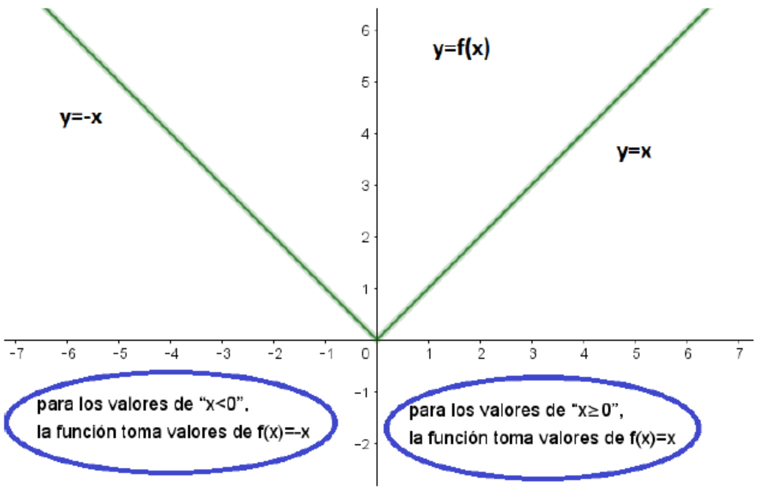
11. $k(x) = \ln(x)$

12. $l(x) = \ln(x+4)$

Hasta ahora hemos visto las funciones elementales del análisis matemático. A partir de estas vamos definir nuevas funciones de expresiones más complejas. En algunos casos vamos a poder dibujarlas como traslaciones y dilaciones de una función, pero en otros casos no. Para estos casos necesitaremos de un estudio más detallado de la función.

1.10. Funciones a trozos

A veces una función se describe mediante el uso de fórmulas diferentes en distintas partes de su dominio. Por ejemplo la función valor absoluto vista antes, $Dom(f) = (-\infty, +\infty) = (-\infty, 0) \cup [0, +\infty)$, sin embargo para valores $x \in (-\infty, 0)$, la función toma valores $-x$ y para valores $x \in [0, +\infty)$, la función toma valores x. Veamos su gráfica:



Ejemplo 1) Para $f(x)$ definida por

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad x < 1 \\ x^2+1 & si \quad 1 \leq x \leq 2 \\ 5 & si \quad x > 2 \end{cases} .$$

a) Hallar el dominio de $f(x)$.

b) Hallar $f(0)$, $f(1)$, $f(4)$.

c) Realice su gráfica.

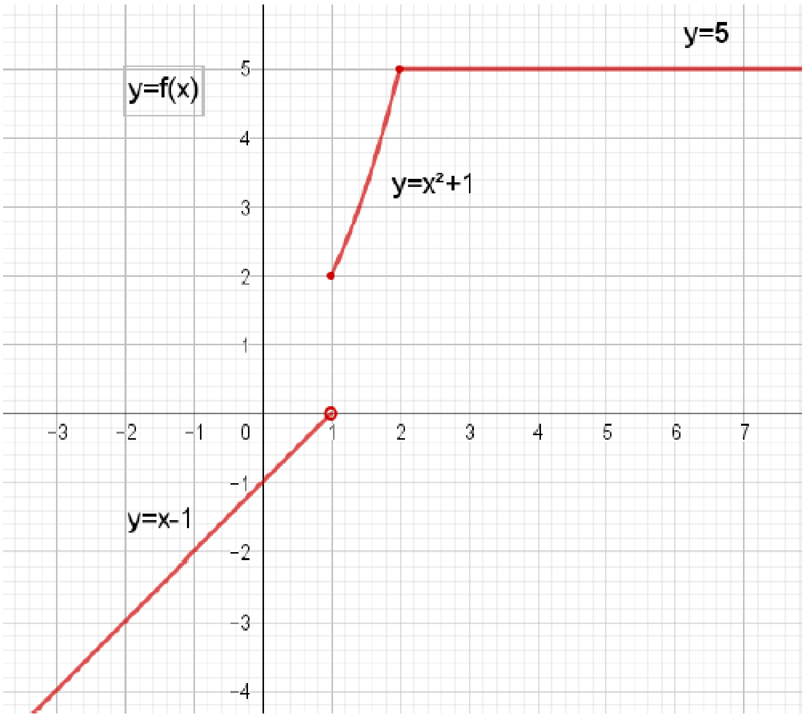
a) El dominio de $f(x)$ es: $Dom(f) = \mathbb{R}$, pues para $x < 1$ la función es lineal y está bien definida. Un razonamiento similar ocurre para $1 \leq x \leq 2$ y $x > 2$.

b) Como $x = 0 \in (-\infty, 1)$, ($f(x)$ toma la forma de $(x-1)$) $\Rightarrow \quad f(0) = 0 - 1 = -1$.

Como $x = 1 \in [1, 2]$, ($f(x)$ toma la forma de (x^2+1)) $\Rightarrow \quad f(1) = 1^2 + 1 = 2$.

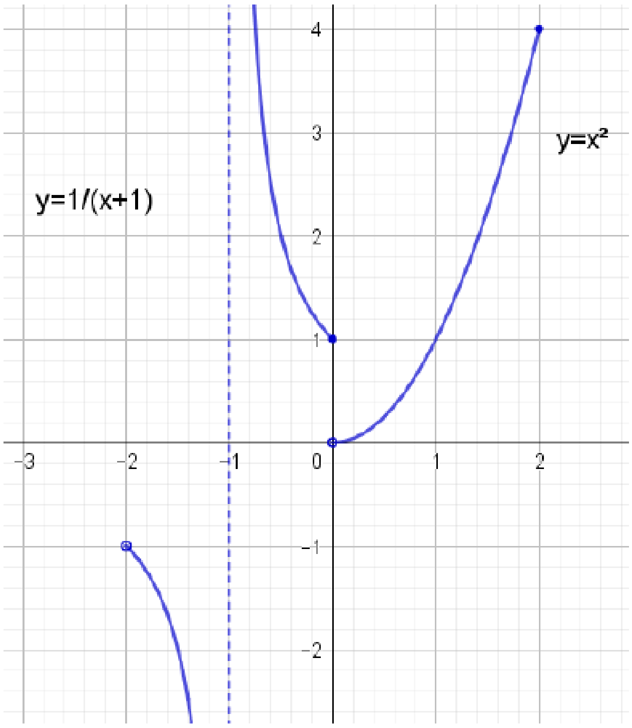
Como $x = 4 \in (2, +\infty)$, ($f(x)$ toma la forma de 5) $\Rightarrow \quad f(4) = 5$.

c) La gráfica de f es:



Ejemplo 2) Sea $g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & si \quad -2 < x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x \leq 2 \end{cases}$.

El dominio de la función es $Dom(g) = (-2, -1) \cup (-1, 2]$, 'sacamos' $x = -1$, ya que el denominador de la función $\dfrac{1}{x+1}$ no puede ser cero, por lo tanto no está definido para ese valor de x.



1.10.1. Ejercicios

1) Hallar el dominio de las siguientes funciones a trozos y graficar.

a) $f_1(x) = \begin{cases} -x & si \quad x \leq 0 \\ x^2 & si \quad 0 < x \leq 1 \\ 1 & si \quad x > 1 \end{cases}$.

b) $f_2(x) = \begin{cases} 4 - x^2 & si \quad x \leq 1 \\ x^2 + 2x & si \quad x > 1 \end{cases}$.

c) $f_3(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x} & si \quad x < 0 \\ ln(x) & si \quad x > 0 \end{cases}$.

d) $f_4(x) = \begin{cases} e^x & si \quad 0 \leq x < 2 \\ 5 & si \quad x = 2 \\ \dfrac{2}{x-4} & si \quad 2 < x < 6 \end{cases}$.

Sugerencia: Para verificar si las gráficas son correctas utilizar GeoGebra. El comando **Si** permite definir funciones a trozos: Si[condición1,expresión1, condición2,expresión2,...].

Por ejemplo para definir la función $f(x)$ del Ejemplo 1, debemos utilizar
$Si[x < 1, x-1, 1 <= x <= 2, x^2+1, x > 2, 5]$.

1.11. Operaciones entre funciones

Otra forma de obtener funciones es a partir de hacer ciertas operaciones entre las funciones conocidas . A continuación definimos la suma, resta, producto, división y composición de funciones. Es preciso que tengamos cuidado a la hora de definir el dominio de las nuevas funciones.

1.11.1. Suma, resta, producto y cociente de funciones

Definición Supongamos que f y g son funciones con dominios D_1 y D_2, respectivamente. **Las funciones** $f+g$, $f-g$ y $f \cdot g$ están definidas por:

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x),$$

para todo $x \in D_1 \cap D_2$ (es decir, para x que pertenezca a ambos dominios).

La función $\dfrac{f}{g}$ está definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)},$$

para $x \in (D_1 \cap D_2 - \{x : g(x) = 0\})$.

Las funciones también se pueden multiplicar por constantes: si c es un número real, entonces la función cf está definida para todo x en el dominio de f mediante $(cf)(x) = cf(x)$.

Ejemplo 3) Sean $f(x) = x-3$ y $g(x) = \sqrt{x}$, cuyos dominios son: $Dom(f) = (-\infty, +\infty)$ y $Dom(g) = [0, +\infty)$.

Los puntos comunes a tales dominios son $(-\infty, +\infty) \cap [0, +\infty) = [0, +\infty)$.

Las diferentes combinaciones algebraicas de las dos funciones son:

Función	Expresión	Dominio
$f+g$	$(f+g)(x) = x-3+\sqrt{x},$	$[0, +\infty)$
$f-g$	$(f-g)(x) = x-3-\sqrt{x},$	$[0, +\infty)$
$f \cdot g$	$(f \cdot g)(x) = (x-3) \cdot \sqrt{x},$	$[0, +\infty)$
$\left(\frac{f}{g}\right)$	$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x-3}{\sqrt{x}},$	$(0, +\infty)$ ('sacamos' $x = 0$)
$\left(\frac{g}{f}\right)$	$\left(\frac{g}{f}\right)(x) = \frac{g(x)}{f(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x-3},$	$[0, 3) \cup (3, +\infty)$ ('sacamos' $x = 3$)

1.11.2. Composición de funciones

Una operación sobre funciones que no corresponde directamente con las usuales es la **composición de dos funciones**.

Definición Si f y g son funciones, la **composición** de estas funciones se escribe como $f \circ g$ ('g compuesta con f'), está definida por

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)).$$

El dominio de $f \circ g$ consiste de todos los números x en el dominio de g para los cuales $g(x)$ está en el dominio de f. Simbólicamente,

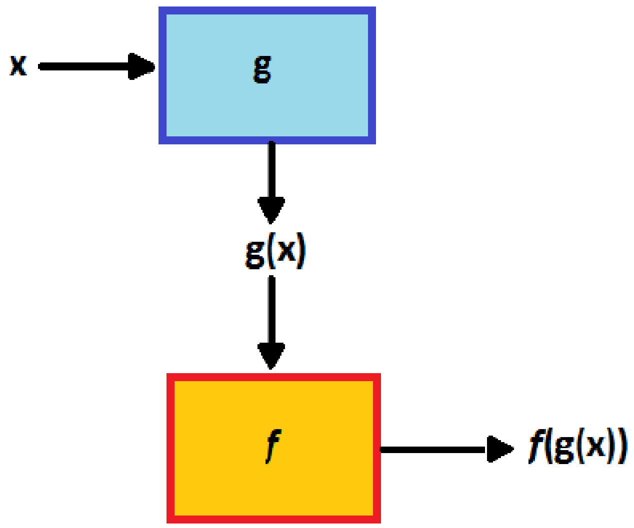
$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) \quad \text{tal que} \quad g(x) \in Dom(f)\}.$$

Otra forma equivalente es,

$$Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g)\} - \{x \quad \text{tal que} \quad g(x) \notin Dom(f)\}.$$

Para evaluar la composición $g \circ f$ (cuando está definida), invertimos el orden para encontrar primero $g(x)$ y después $g(f(x))$. El dominio de $g \circ f$ es el conjunto de números x en el dominio de f, tales que $f(x)$ esté en el dominio de g.
Por lo general, las funciones $(f \circ g)$ y $(g \circ f)$ son muy diferentes.

Observación
La composición de dos funciones es un proceso de dos pasos, como se indica en el siguiente esquema:



Importante: Para definir $f(g(x))$, primero se necesita definir $g(x)$, por lo que x debe estar en el dominio de g. A continuación, f debe definirse en el punto $g(x)$, de modo que el número $g(x)$ deba estar en el dominio de f. Veamos un ejemplo.

Ejemplo 4) Para $f(x) = x^2+1$ y $g(x) = ln(x)$, determinar $(f \circ g)$, $(g \circ f)$ y $(f \circ f)$ e identificar el dominio de cada una.

Primero tenemos indentificamos el dominio de f y g: $Dom(f) = \mathbb{R}$ y $Dom(g) = (0, +\infty)$.
Luego obtenemos la expresión de $f \circ g$,

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ln(x)) = (ln(x))^2 + 1,$$

Por último, $Dom(f \circ g) = \{x \in Dom(g) / g(x) \in Dom(f)\}$.
Los x que están en $Dom(g)$ son $x \in (0, +\infty)$, como $g(x) = ln(x)$, sabemos que la función logaritmo toma todos los valores de y (recordar su gráfica), es decir $ln(x) \in \mathbb{R} = Dom(f)$.

Por lo tanto $Dom(f \circ g) = Dom(g) = (0, +\infty)$.

Composición	Dominio
$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(ln(x)) = (ln(x))^2 + 1$	$(0, +\infty)$
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2+1) = ln(x^2+1)$	$\mathbb{R}$
$(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(x^2+1) = (x^2+1)^2 + 1$	$\mathbb{R}$

Para ver que el $Dom(g \circ f) = \mathbb{R}$, observar que $f(x)$ está definida para cual valor de x en $\mathbb{R}$, $f(x) = x^2+1$ debe estar en el dominio de g, con lo cual $x^2+1 > 0$, y esto ocurre para cualquier valor de x (pues un número elevado al cuadrado es siempre positivo y si le sumo un número positivo, sigue quedando positivo), así que no 'sacamos' ningún valor del dominio de f.

$\diamond$

A menudo se necesitará reconocer que una función dada es una composición de funciones más simples.

Ejemplo 5) Identificar las funciones f y g de modo que la función dada se pueda escribir como $f \circ g$, a) $\sqrt{x^2+1}$, b) $\cos^2(x)$.

La función del inciso a) se puede pensar que x^2+1 está dentro de la raíz cuadrada. Así $f(x) = \sqrt{x}$ y $g(x) = x^2+1$.

En el inciso b) podemos pensar $\cos(x)$ está dentro de x^2. Por lo tanto, $f(x) = x^2$ y $g(x) = \cos(x)$.

Ejemplo 6) La siguiente tabla de valores muestra algunos valores que toman las funciones f y g.

x	$f(x)$	$g(x)$
1	1	2
2	3	0
3	-2	-7

A partir de estos datos determinar: a) $f(g(1))$, b) $g(f(2))$.

a) Si vemos en el cuadro, sabemos que $g(1) = 2$, con lo cual, $f(g(1)) = f(2) = 3$.

b) $g(f(2)) = g(3) = -7$.

$\diamond$

Observación Es posible componer más de dos funciones.

$$(f \circ g \circ h)(x) = [(f \circ g) \circ h](x) = [f \circ (g \circ h)](x) = f(g(h(x))).$$

1.11.3. Ejercicios

1) Sean $f(x) = x+1$, $g(x) = \sqrt{x-3}$, $h(x) = \frac{1}{x}$, $M(x) = sin(x)$ y $W(x) = \frac{1}{x^2-1}$. A partir de estas funciones determinar.

a) Dominio de cada una de las funciones.

b) Expresión y dominio de: i) $(g+W)$, ii) $(h \cdot M)$ y iii) $\left(\frac{g}{f}\right)$.

c) Expresión y dominio de las siguientes funciones compuestas: i) $(f \circ g)$, ii) $(h \circ f)$ y $(M \circ h)$.

d) Expresión de $(h \circ M \circ f)$.

2) Expresar las funciones dadas como composición de dos o más funciones simples.

a) $senx^3$, b) $\sqrt{x^4+1}$, c) $\dfrac{1}{x^2+1}$.

3) Dadas $f(x) = 2 - x$ y $g(x) = \begin{cases} -x & -2 \leq x < 0 \\ x-1 & 0 \leq x \leq 2 \end{cases}$, hallar

i) $f(g(0))$ y $g(f(0))$.

ii) $f(f(2))$ y $g(g(-1))$.

iii) $f(g(\frac{1}{2}))$ y $g(f(3))$.