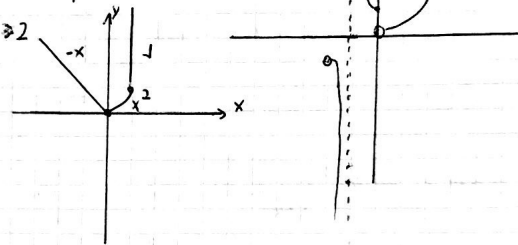


Matemática 2 - 1º parcial

Func de a. fuas:

Ejemplos: $y(x) = \frac{1}{x+1}$ si $-2 < x \leq 0$ $D_f = (-2, -1] \cup (-1, 2]$
 si $0 < x \leq 2$

$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $D_f = (-\infty, +\infty)$



Op. e/ $f \cdot g = (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

$f - g = (f - g)(x) = f(x) - g(x)$

$x \in (D_1 \cap D_2)$

$f \cdot g = f(x) \cdot g(x)$

$f/g = (f/g)(x) = f(x)/g(x)$

Ej: $f(x) = x - 3$ $D_f = (-\infty, +\infty)$ $D_g = [0, +\infty)$
 $g(x) = \sqrt{x}$

Compos de $f \circ g$ consiste de todos los x en el D_f de g p/ $g(x)$ está en el D_f de f .

Limites: $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ El limite existe cuando $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L$

$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$

Propiedad de sustitución directa: si f es un polinomio o una f racional y $x_0 \in \text{Dom } f$ / $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Las f / esto prop. se llaman continuas en x_0 .

Si \lim coincide en ambos lados \therefore existe, si no \nexists

Limites-propiedades algebraicas.

$\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = L \pm M$

$\lim f(x)/g(x) = \lim f(x) / \lim g(x)$

$\lim K f(x) = K \lim f(x)$

$\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$

$\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$

$\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

Limites indeterminados: \lim g no se pueden calcular de forma directa.

Ej: $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{0}{0} \rightarrow \frac{(x-1)}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{x+1} = 1$

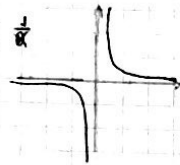
$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{x})^2 - (\sqrt{2})^2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{x-2}{(x-2)(\sqrt{x}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Límites q' involucran al infinito: asíntotas.

Límites infinitos: expresión donde solo el denominador tiende a 0.

Si $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ no da un IR.

Ejemplo: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$$

Límites al infinito: si $\frac{1}{x} \rightarrow 0$.

$$\text{Ejemplo: } x^3 - 2x^2 + 3 \cdot \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(\frac{x^3}{x^3} - \frac{2x^2}{x^3} + \frac{3}{x^3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 \left(1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^3} \right) = +\infty$$

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_0} = \begin{cases} \infty & \text{si } n > m \\ 0 & \text{si } n < m \\ \frac{a_n}{b_m} & \text{si } n = m \end{cases}$$

Límites orden magnitud: $e^x \gg x^a \gg \ln(x)$ si $x \rightarrow \infty$

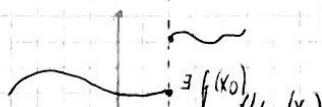
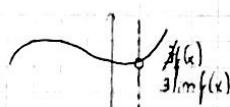
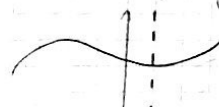
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty \quad e^x \gg x^a \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0 \quad x^a < e^x$$

Cambio de variable $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x)$ $y = \frac{1}{x}$ $x \rightarrow 0^+ \Rightarrow y \rightarrow +\infty$ $x = 1/y$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln(x) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{y} \right)^2 \ln \left(\frac{1}{y} \right) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/y)}{y^2} = \frac{\ln(1/y)}{y^2} = \ln(1/y) = -\ln y = -\ln y$$

$$\lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1/y)}{y^2} = \lim_{y \rightarrow +\infty} \frac{-\ln(y)}{y^2} = 0 \quad y^2 \gg \ln(x)$$

Continuidad: $f(x)$ continua si $\exists f(x_0)$, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$. Si no se cumple algo, es discontinua.



f continua en $f(x_0)$
 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

f no es continua en x_0

no es continua $\neq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

Clasificación: Discontinuidad evitable: $\exists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ pero no coincide con $f(x_0)$.
Discontinuidad inevitable: $\nexists \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$.

$$\text{Ejemplo: } f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & -1 < x < 1 \\ 2x - 4 & 1 \leq x < 2 \\ 5 - x^2 & 2 \leq x < 3 \end{cases} \quad x_0 = 1 \quad x_1 = 2$$

Funciones continuas en un intervalo

1) Continua en un intervalo cerrado $[a, b]$ si y solo si es continua en el pto del intervalo.
2) Continua en un intervalo abierto (a, b) si y solo si es continua en el pto del intervalo.

Derivada: Variaz total y promedio: dado un intervalo $[a, b]$, la variaz total de f es $f(b) - f(a)$.

$$\text{La variaz promedio es: } \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad \text{Ejemplo: } f(x) = x^2 \text{ en } [-1, 5] = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = 4$$

Hasta ahora calculamos variables medias. Lo que es

armar intervalos pequeños: $[1, 1+h]$

La variaz instantanea de f en x_0 es su derivada

$$\text{Sea } f \text{ def en un int. abierto, existe } dx \text{ en } x_0 \text{ si } \exists f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

Como dx es un lim, \exists lím laterales y un \Rightarrow dx lateral.

Reglas de derivar

$$f(x) \cdot c \Rightarrow f'(x) = c \cdot f'(x)$$

$$f(x) = x^n \Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

$$f(x) = e^x \Rightarrow f'(x) = e^x$$

$$f(x) = \ln x \Rightarrow f'(x) = 1/x$$

$$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$$

$$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$$

$$c f(x) = c f'(x)$$

$$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$(g(x)/f(x))' = \frac{g'(x) \cdot f(x) - (f(x)' \cdot g(x))}{(f(x))^2}$$

$$(f \circ g)(x)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Valores extremos de una $f(x)$

- 1) $(x_0, f(x_0))$ máx. absoluto si $f(x_0) \geq f(x)$ p/ todo df .
- 2) $(x_0, f(x_0))$ máx. relativo si $f(x_0) \geq f(x)$ p/ valor cerca de x_0 .
- 3) $(x_0, f(x_0))$ mín. relativo si $f(x_0) \leq f(x)$ "
- 4) $(x_0, f(x_0))$ mín. absoluto si $f(x_0) \leq f(x)$ p/ todo x .

Funciones creciente/decreciente y criterio 1º dx.

- Creciente si $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ • Decreciente si $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
- Si $f'(x) > 0$ en r/plo : $f \uparrow$ en $[a, b]$ Poses: plos críticos, arma intervalos, evaluar otx.
- $f'(x) < 0$ $f \downarrow$ en $[a, b]$

Criterio 1º dx p/ extremos locales.

- 1) f' cambio $-$ a $+$ en x_0 , hoy ~~Ante~~ mín. local
- 2) f' cambio $+$ a $-$, máx. local
- 3) f' no cambia en c , no hay extremo local en c .

poses: plos críticos, intervalos:

2º dx, concavidad 1) $f''(x) > 0$, $f(x) = \cup$ 2) $f''(x) < 0$, $f(x) = \cap$

Análisis completo Df f, f', f'' , conj. continuidad y discontinuidad, 1º dx, plos críticos, intervalos $\uparrow \downarrow$, máx y mín relativos, 2º dx, plos críticos, concavidades, plos. inflex., AV, AH,

Pto inflex. donde cambia el tipo de concavidad.