Apuntes de Matemática 2

Facultad de Informática
U.N.L.P.

Año 2020

Índice general

Capítulo 4

Derivadas

En este capítulo desarrollaremos uno de los conceptos más importantes del cálculo, la derivada de una función. Puede interpretarse como la tasa de crecimiento de una función. Además veremos propiedades y aplicaciones de la derivada.

4.1. Hacia el concepto de derivada

Para iniciar el estudio de la derivada primero vamos a definir variación total y variación promedio.

Variación total y variación promedio (o variación media)

Dada una función definida en un intervalo $[a, b]$:

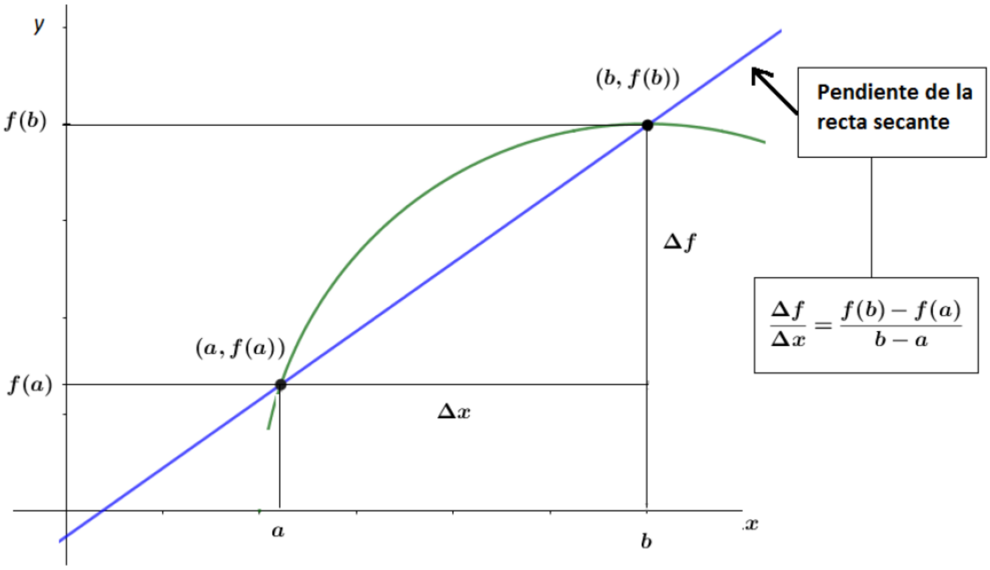
- la **variación total de** f **entre** a **y** b se define como la diferencia entre $f(b) - f(a)$,

  (denotado $\Delta f = f(b) - f(a)$).

- la **variación promedio de** f **entre** a **y** b se define como la diferencia entre $\dfrac{\Delta f}{\Delta x} = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$.

Cuando la variable independiente se mueve en cierto intervalo $[a, b]$, la variación total describe cuánto cambio f entre a y b, mientras que la variación promedio representa **la tasa promedio o razón de cambio promedio**.

Geométricamente la variación promedio de f entre a y b representa *la pendiente de la recta secante*a la gráfica de f que pasa por los puntos $(a, f(a))$ y $(b, f(b))$.



Ejemplo 1: Si se quiere saber cuánto varia en promedio una función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-1, 5]$, se debe calcular la variación media:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(5) - f(-1)}{5 - (-1)} = \frac{24}{6} = 4.$$

Ahora nos preguntamos a qué **velocidad está cambiando f cuando** $x = 1$?.

Hasta ahora, lo que sabemos calcular son variaciones medias y para eso necesitamos intervalos. Así que la idea es armar intervalos cada vez más pequeños que contienen a $x = 1$ y calcular la variación media.

Consideremos un número h cualquiera (que pensamos pequeño) y armamos el intervalo $[1, 1+h]$ (también podríamos suponer $[1+h, 1]$), entonces la variación media es:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(1+h) - f(1)}{(1+h) - 1} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

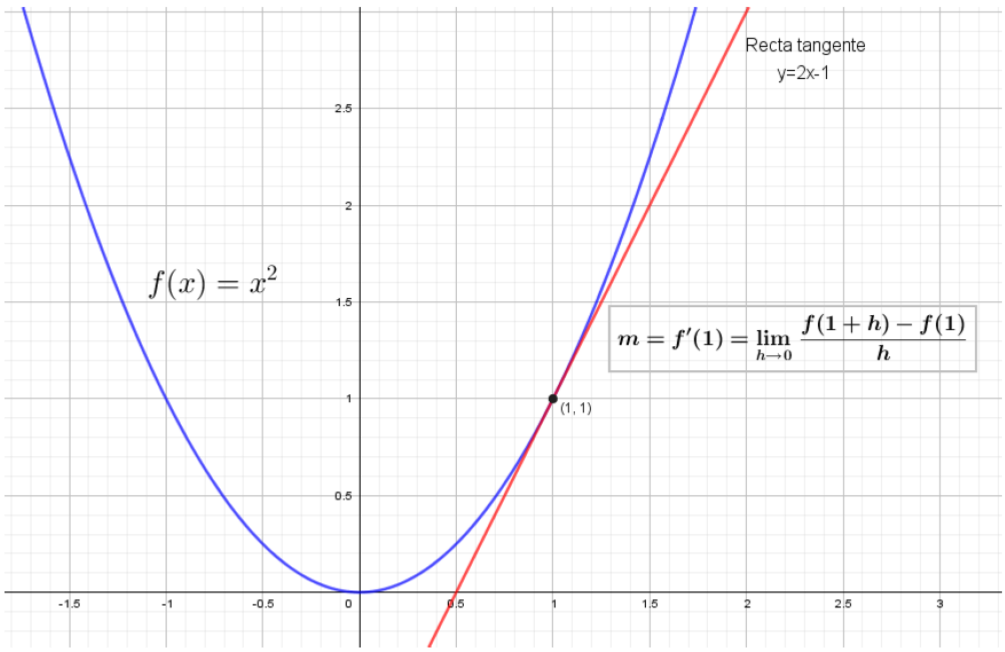
Notemos que no es posible evaluar $h = 0$, sin embargo podemos tomar h tan pequeño como deseamos, a esto lo expresamos 'matemáticamente' como

$$\lim_{h \to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1 + 2h + h^2 - 1}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(2+h)}{h} = \lim_{h \to 0} 2 + h = 2.$$

Así obtenemos la variación instantánea de $f(x)$ en $x = 1$ y ésta variación es 2.

Gráficamente, la variación instantánea de f en $x = 1$ es la pendiente de la recta que pasa por el punto $(1, 1)$. Esta recta es, en algún sentido, el límite de las rectas secantes a la gráfica de f. Utilizando la ecuación punto pendiente de la recta, la ecuación de esta recta es:

$$y - 1 = 2(x - 1)$$
$$y = 2x - 1$$



La variación instantánea de una función f en un punto x_0 es la derivada de f en x_0.

En lo siguiente definiremos esto.

4.2. Definición formal de derivada

Dada f una función definida en un intervalo abierto decimos que existe la derivada en x_0 (perteneciente a ese intervalo) si existe el siguiente límite:

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

En tal caso se dice que f es *derivable* en x_0.

Aclaraciones:

- Como la derivada es un limite, este limite existirá si los limites laterales existen y son iguales.

  $$\lim_{h \to 0^+} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \quad y \quad \lim_{h \to 0^-} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

  .

  Estos limites se denominan **derivadas laterales**.

- La expresión $\frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$ se llama *cociente incremetal* (ó cociente de Newton).

- Hay otras notaciones para la derivada de una función: $\frac{d}{dx}f$. Si escribimos $y = f(x)$ las siguientes son alternativas para la notación.

  $$f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}f.$$

Definición Sea f una función definida sobre un intervalo abierto (a,b). Diremos que f es derivable en (a,b) si es derivable en todo x_0 número real perteneciente al intervalo (a,b).

Ejemplo 2: Realizar la derivada por definición de $f(x) = x^2 + 2x + 1$ en $x = 1$.

Tenemos que calcular $f'(1) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(1+h) - f(1)}{h}$.

$$f'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 + 2(1+h) + 1 - (4)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{1 + h^2 + 2h + 2 + 2h - 3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h}$$

Sacando factor común h y simplificando obtenemos el valor de la derivada de $f(x)$ en $x = 1$ de la siguiente manera:

$$\lim_{h\to 0} \frac{h^2 + 4h}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h(h+4)}{h} = \lim_{h\to 0} h + 4 = 4$$

Ejemplo 3: Obtener la derivada por definición de la función constante $f(x) = c$, para todo valor de x.

Tenemos que calcular $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$ para cualquier x.

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{c - c}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} = 0.$$

Por lo tanto la derivada de una función constante es 0 para todo valor de x.

Aclaración: En este último ejemplo, calculamos la derivada para cualquier x del dominio, lo que nos hace pensar que la derivada también es una función que depende de x. El dominio de está función derivada es igual o más pequeño que el dominio de la función f.

4.2.1. Ejercicios

1. Realizar la derivada por definición de $f(x) = x^3 + 1$ en $x = 0$.

2. Obtener la derivada por definición de la función $f(x) = 2x$, para todo valor de x.

3. Hallar la derivada de $f(x)$ en $x = 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x \leq 0 \\ \\ -x^2 & si \quad x > 0 \end{cases}$$

4.3. Reglas de derivación

En esta sección se desarrollan reglas para hallar derivadas sin tener que usar directamente la definición. Estas reglas de derivación permiten calcular con relativa facilidad las derivadas de polinomios, funciones racionales, funciones algebraicas, funciones exponenciales y logarítmicas; y funciones trigonométricas.

Primero vamos a dar algunas derivadas 'elementales':

i. Derivada de una función constante $f(x)=c$, $\quad f'(x)=0$.

ii. Derivada de una función potencia $f(x)=x^n$, $\quad f'(x)=n\,x^{n-1}$, $\quad n$ número real

iii. Derivada de una función exponencial $f(x)=e^x$, $\quad f'(x)=e^x$

iv. Derivada de una función logarítmica $f(x)=\ln x$, $\quad f'(x)=\dfrac{1}{x}$

v. Derivada de una función seno $f(x)=sen(x)$, $\quad f'(x)=\cos x$,

vi. Derivada de una función coseno $f(x)=\cos(x)$, $\quad f'(x)=-sen(x)$

Las siguientes reglas para combinar derivadas amplían aún más el número de derivados que podemos calcular sin recurrir a la definición.

Si f y g son funciones derivables en x y c una constante, valen las siguientes reglas:

1. Derivada de una función por una cte. c	$(c\,f(x))'=c\,f'(x)$
2. Derivada de una suma/resta:	$(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g(x)'$
3. Derivada de un producto:	$(f(x).g(x))'=f'(x).g(x)+f(x).g'(x)$.
4. Derivada de un cociente:	$\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)'=\dfrac{f'(x).g(x)-f(x).g'(x)}{(g(x))^2}$
5. Derivada de una composición:	$(f\circ g)(x)'=(f(g(x))'=f'(g(x))\,g'(x)$

Ejemplo 4: Utilizando reglas derivar las siguientes funciones:

a) $f(x)=3x^2+6x-\sqrt{x}$.

$$\begin{aligned} f'(x) =&\ (3x^2)'+(6x)'-(\sqrt{x})' && (\text{ regla 2 }) \\ =&\ 3(x^2)'+6(x)'-(x^{\frac{1}{2}})' && (\text{ regla 1 }) \\ =&\ 6x+6-\frac{1}{2}(x^{-\frac{1}{2}}) && (\text{ regla ii }) \end{aligned}$$

b) $f(x)=(2x^3-x)\cos(x)$.

$$\begin{aligned} f'(x) =&\ (2x^3-x)'\cos(x)+(2x^3-x)(\cos(x))' && (\text{ regla 3 }) \\ =&\ (2(x^3)'-(x)')(\cos(x))+(2x^3-x)(-sen(x)) && (\text{ regla 1 y vi }) \\ =&\ (6x^2-1)(\cos(x))+(2x^3-x)(-sen(x)) && (\text{ regla ii }) \end{aligned}$$

c) $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x-5}$

$$\begin{aligned} f'(x) =&\ \frac{(\ln(x))'(x-5)-(\ln(x))(x-5)'}{(x-5)^2} && (\text{ regla 4 }) \\ =&\ \frac{\frac{1}{x}(x-5)-(\ln(x))1}{(x-5)^2} && (\text{ regla 1 y iv }) \end{aligned}$$

d) $f(x) = e^{x-1}$

$$\begin{aligned} f'(x) = &\ e^{x-1}(x-1)' && (\text{ regla 5 y iii }) \\ = &\ e^{x-1}(1) && (\text{ regla ii }) \end{aligned}$$

e) $f(x) = \dfrac{1}{(x^3+2x)^2}$

$$\begin{aligned} f'(x) = &\ \left(\frac{1}{(x^3+2x)^2}\right)' = \left((x^3+2x)^{-2}\right)' \\ = &\ -2(x^3+2x)^{-3}(3x^2+2) && (\text{ regla ii y 5 }) \end{aligned}$$

4.3.1. Ejercicios

Derivar las siguientes funciones utilizando reglas.

a) $f(x) = 5x^3 + 2x + 8$ b) $f(x) = x^{1/3} + 5x^8 - \sqrt{x}$ c) $f(x) = \dfrac{\pi x^{\frac{2}{3}}}{x+1}$

d) $f(x) = \dfrac{2x}{4x+1}$ e) $f(x) = (x^2-2)(x+4)$ g) $f(x) = \ln(x-4) + 1$

h) f(x)= $e^{x^2+1} - x$ I) $f(x) = \sqrt{(x^4+2x)}$ j) $f(x) = \cos(x+1) - x^2$

k) $f(x) = \dfrac{sen(x)}{e^x}$ l) $f(x) = \tan(x)$ m) $f(x) = \ln(3-x)\cos(x^3)$

(Ayuda: Pueden utilizar el comando 'Derivada(poner la Función aquí)' de Geogebra para verificar sus cálculos.)

4.4. Recta tangente a la gráfica de f en x_0

Anteriormente, ya vimos que la derivada de una función en un punto x_0 es la variación instantánea de f en x_0. Geométricamente, $f'(x_0)$ **es la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto** $(x_0, f(x_0))$. La ecuación de la recta tangente será

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0).$$

Ejemplo 5: Determinar la recta tangente de $f(x) = \dfrac{1}{x}$ en $x = 1$.

Primero debemos analizar su derivada en $x = 1$ para averiguar la pendiente de la recta tangente en ese valor.

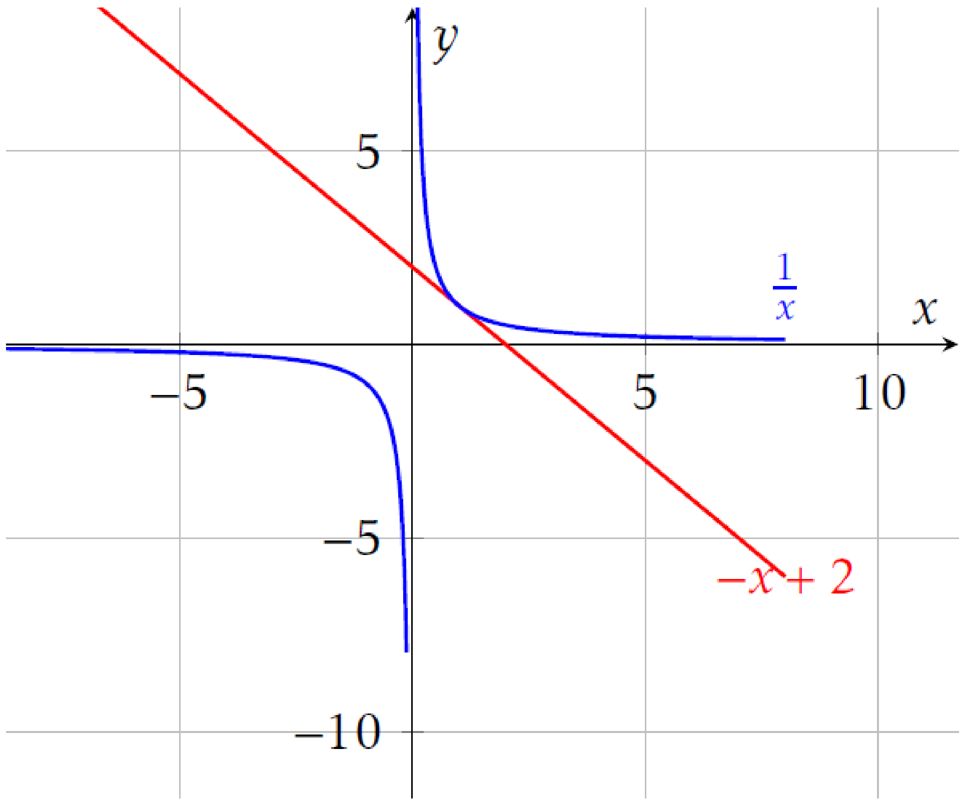
$f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$

Con lo cual $m = f'(1) = -\dfrac{1}{1^2} = -1$

Ahora con el punto $(1,1)$ y la pendiente $m = -1$ armemos la recta tangente:

$y - 1 = -1(x-1) \ \rightarrow \ y = -1x + 1 + 1 \ \rightarrow \ y = -x + 2$

Observemos en el siguiente gráfico la función y su recta tangente en $(1,1)$.



Ejemplo 6: Dada una función y una pendiente podemos determinar el punto y la recta tangente a esa función en ese punto.

Determinar la recta tangente con pendiente $m = 1$ a $f(x) = ln(x-1)$

Lo que debemos hacer es averiguar la derivada de la función y analizar en qué punto se cumple que la misma sea igual a 1, ya que la pendiente de la recta tangente es igual a ese valor.

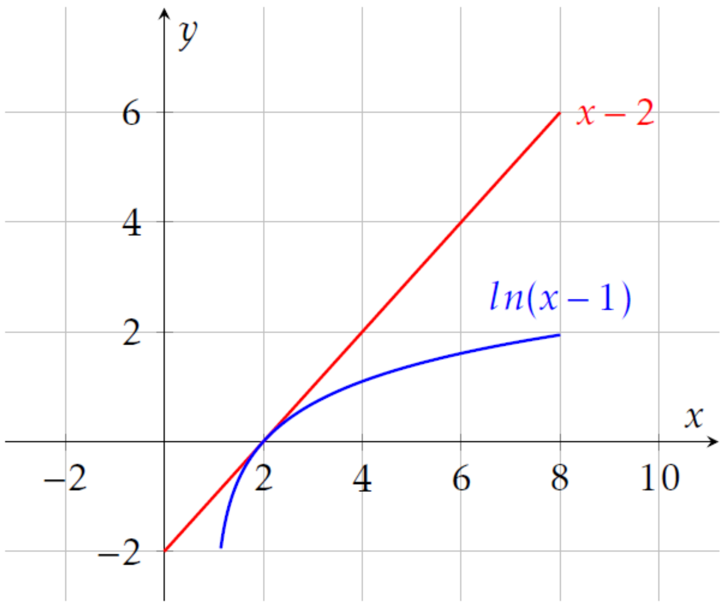
$f'(x) = \dfrac{1}{x-1}$ la cual es 1 cuando $x - 1 = 1 \quad \rightarrow \quad x = 2$. Reemplazando ese valor en la función obtenemos el punto $(2, ln(1)) = (2, 0)$.

Ahora tenemos igual que en el ejemplo anterior, una pendiente $m = 1$ y un punto $P = (2, 0)$.

Armemos la recta tangente:

$y - 0 = 1(x-2) \quad \rightarrow \quad y = x - 2$. La cual es la recta tangente a $f(x)$ en el punto P.

Observemos en el siguiente gráfico la función y su recta tangente en $(2, 0)$.



4.4.1. Ejercicios

1. Encontrar la recta tangente a $f(x) = x^2 + 1$ en el punto $(2, 5)$.
2. Encontrar la recta tangente a $h(x) = ln(x - 3)$ en el punto $(5, ln(2))$.
3. Determinen el o los puntos y la o las rectas tangentes con pendiente $m = 5$ de la función $f(x) = x^3 + 2x + 1$.
4. Determinen el punto y la recta tangente con pendiente $m = 1$ de la función $f(x) = e^x + 2$.

4.5. Funciones no derivables

Hasta ahora, siempre trabajamos con funciones que son derivables en todo valor de su dominio. Pero existen otras funciones que pueden no ser derivables en valores del dominio. Ya vimos que para que una función sea derivable en x_0 debe existir el limite del cociente incremental. Veamos un caso donde este limite no existe.

Ejemplo 7: Sea $f(x) = |x|$, sabemos que su dominio son todos los números reales. Queremos hallar la derivada en $x = 0$.

Notemos que f se trata de una función a trozos (que todes conocemos),

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & si \quad x \geq 0 \\ -x & si \quad x < 0 \end{cases}$$

Veamos el limite del cociente incremental en $x = 0$:

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{|h|}{h}$$

Como $x = 0$ es el punto de pegado, debemos analizar los limites laterales:

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{h}{h} = 1 \quad (\text{pues } h > 0)$$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{-h}{h} = -1 \quad (\text{pues } h < 0)$$

Vemos que los limites laterales son distintos, y por lo tanto, no existe $\lim_{h \to 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h}$. Podemos concluir que la función NO ES DERIVABLE en $x = 0$. Con cual tampoco existe recta tangente en $x = 0$

4.6. Derivabilidad y continuidad

Si bien la función del ejemplo 7 es una función definida a trozos, hemos mostrado que es una función continua. Este ejemplo nos permite concluir que la continuidad de una función en x_0 no es una condición suficiente para establecer la derivabilidad de la función en x_0.

El siguiente teorema establece que la derivabilidad de una función en x_0 es una condición suficiente para asegurar la continuidad en el valor x_0.

Teorema Si una función f es derivable en x_0 entonces f es continua en x_0.

4.7. Derivadas de orden superior

Una consecuencia de tener la función derivada es que podemos calcular la derivada de una derivada. Resulta que tales derivadas de orden superior tienen aplicaciones importantes. Supongamos que comenzamos con una función f y calculamos su derivada f'. Luego podemos calcular la derivada de f', llamada la segunda derivada de f y escrita como f''. Entonces podemos calcular la derivada de f'', llamada la tercera derivada de f, escrita f'''.

4.7.1. Ejercicios

1. Hallar $f''(x)$ de las funciones a), b), d) g) y l) de los Ejercicios 6.3.1 (pág 7).
2. Hallar las derivadas de todos los ordenes de $f(x) = x^5 - 3x^3 - 3x - 2$.

4.8. Aplicaciones de la derivada

La interpretación de la derivada como la pendiente de la recta tangente proporciona información acerca del comportamiento de las funciones y de sus gráficas. Como se dijo en la primera parte, la derivada puede entenderse como la tasa de crecimiento de una función, con lo cual con su información podemos saber si una función crece o decrece. Es interesante observar que si estamos estudiando un problema en particular, o modelando cierto sistema, podemos saber el aumento o la disminución de ciertos parámetros gracias a la derivada de la función que modela el problema en cuestión, saber en dónde se producen los extremos máximos o mínimos, estudiar su concavidad, etc.

Así, el objetivo de esta sección es estudiar cómo el conocimiento de la derivada de una función nos da información acerca de la función misma.

4.9. Valores extremos de una función

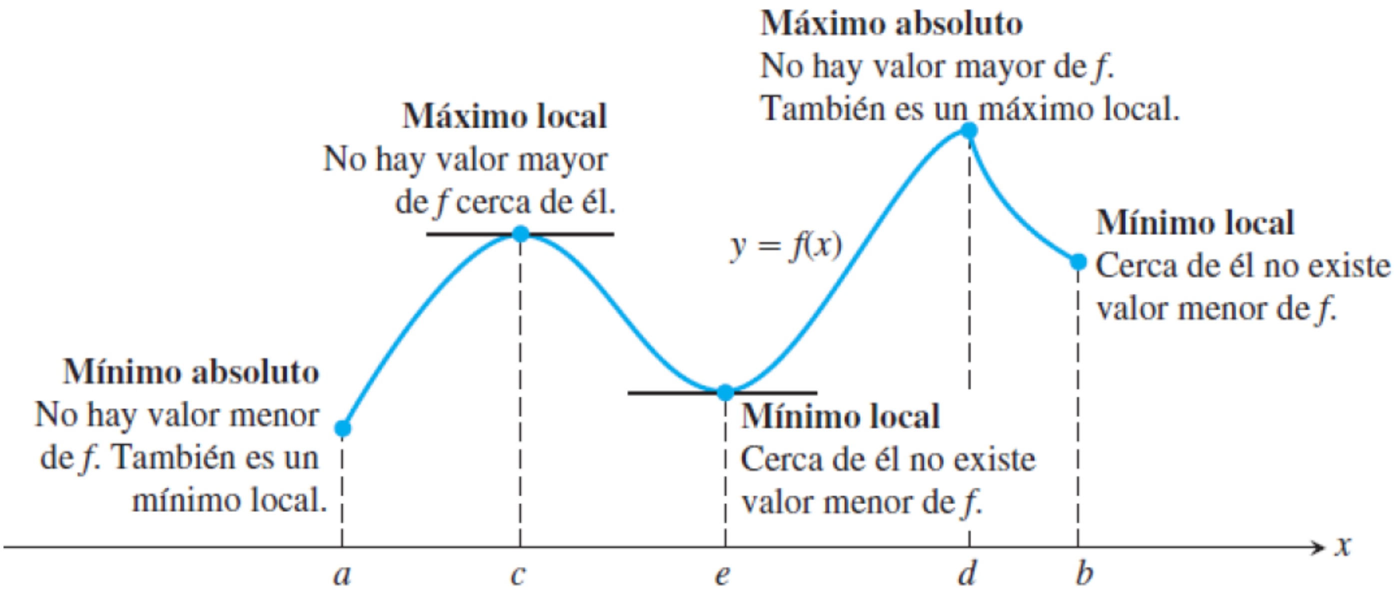
Definición 1 Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***máximo absoluto*** de f si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x en el dominio de f.

Definición 2 Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***máximo relativo o local*** de f si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo x cerca de x_0.

Definición 3 Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***mínimo absoluto*** de f si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x en el dominio de f.

Definición 4 Se dice que el punto $(x_0, f(x_0))$ es un ***mínimo relativo o local*** de f si $f(x_0) \leq f(x)$ para todo x cerca de x_0.

Los valores máximo y mínimo se denominan *valores extremos* de la función.



Definición 5 Se dice que x_0 es punto crítico de f si $f'(x_0) = 0$ ó si $f'(x_0)$ no existe.

Las funciones con la misma regla o fórmula de definición pueden tener diferentes extremos (valores máximo o mínimo) dependiendo del dominio. Veremos esto en el siguiente ejemplo.

Ejemplo 1:

- $F(x) = x$, que tiene dominio $\mathbb{R}$ no tiene ni máximos ni mínimos (ni relativos ni absolutos).

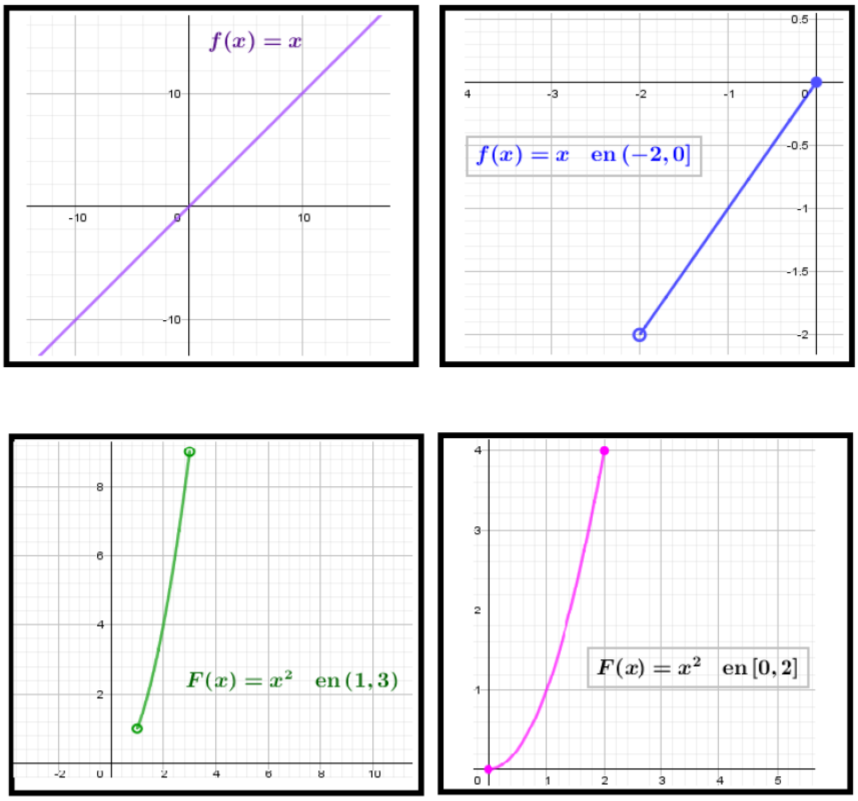
- $F(x) = x$, que tiene dominio $(-2, 0]$ tiene un máximo absoluto en $(0, 0)$ y no tiene mínimos (ni relativos ni absolutos).

- $F(x) = x^2$, que tiene dominio $\mathbb{R}$ no tiene ni máximos absoluto y tiene un mínimo absoluto en $(0, 0)$.

- $F(x) = x^2$, que tiene dominio $(1, 3)$ no tiene ni máximos ni mínimos absolutos.

- $F(x) = x^2$, que tiene dominio $[0, 2]$ tiene máximo absoluto en $(2, 4)$ y tiene un mínimo absoluto en $(0, 0)$.

Los extremos absolutos de las funciones en sus dominios se observan en la siguiente figura:



Teorema de la primera derivada para valores extremos locales
Si f tiene un valor máximo local o un mínimo local en un punto interior c de su dominio, y si $f'(x)$ está definida en c, entonces $f'(c) = 0$.

El teorema anterior establece que la primera derivada de una función siempre es cero en un punto interior donde la función tiene un valor extremo local y la derivada está definida. Por ello, los únicos lugares donde la función f posiblemente tiene un valor extremo (local o global) son los puntos críticos de f.

Aclaración: Los únicos puntos del dominio donde la función puede tener valores extremos son los puntos críticos y los puntos extremos del intervalo. Sin embargo, hay que tener cuidado de no malinterpretar lo que se dice aquí. **Una función puede tener un punto crítico en $x = c$ sin tener un valor extremo local ahí**. Por ejemplo, la función $y = x^3$ tiene punto crítico en $x = 0$ en donde se hace cero la derivada, sin embargo la función es creciente en todo su dominio. Por lo tanto no tiene extremo local en $x = 0$.

4.9.1. Máximos y mínimos en un intervalo cerrado.

Algunas de las funciones en el Ejemplo 1 no tuvieron valores máximos o mínimos. El siguiente teorema afirma que cuando buscamos los extremos de una función continua en un intervalo cerrado siempre vamos a hallarlo, porque los extremos del intervalo también se tienen en cuenta.

Teorema de máximos y mínimos absolutos: (Weierstrass) Una función f continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ alcanzará un valor máximo absoluto (M) y un valor mínimo absoluto (m) en valores de $x \in [a,b]$.

Por definición de máximos y mínimos absolutos en $[a,b]$ se tiene que cumplir que

$$m \leq f(x) \leq M \quad \text{para todo } x \in [a,b].$$

4.9.2. Cómo obtener los extremos absolutos de una función continua en un intervalo cerrado?

1. Obtener todos los puntos críticos que pertenezcan al intervalo.
2. Evaluar a f en todos los puntos críticos y en los puntos extremos del intervalo.
3. Tomar el mayor y el menor de tales valores.

Ejemplo 2: Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de $f(x) = 2x^3 - 1$ en $[-1,3]$.

- Veamos si f tiene puntos críticos en el intervalo. Para ello, calculamos la derivada y la igualamos a 0:

  $f'(x) = 6x^2 = 0$, la solución de ésta ecuación es $x = 0$. Así en $x = 0$ que hay punto crítico. Como $x = 0$ está dentro del intervalo $[-1,3]$ lo consideramos como candidato a máximo/mínimo.

- Ahora evaluamos a f en los extremos del intervalo y en el punto crítico hallado:

$$\boxed{\begin{array}{ll} f(-1) = 2(-1)^3 - 1 = -3 & \longrightarrow \text{en } (-1,-3) \text{ hay un mínimo absoluto.} \\ f(0) = 2(0)^3 - 1 = -1 & \\ f(3) = 2(3)^2 - 1 = 53 & \longrightarrow \text{en } (3,53) \text{ hay un máximo absoluto.} \end{array}}$$

Ejemplo 3: Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de $g(x) = 8x - x^4$ en $[-2,1]$.

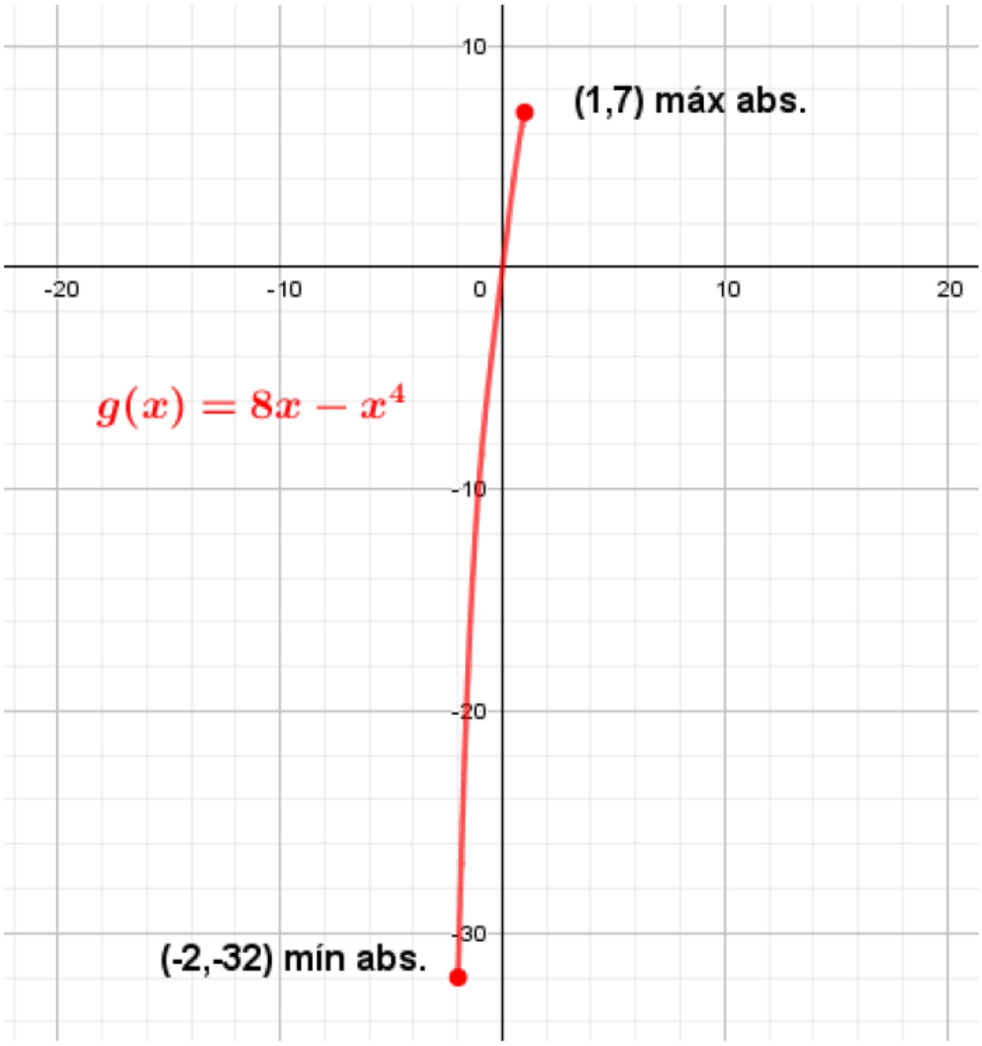
- Usando reglas de derivación obtenemos que $g'(x) = 8 - 4x^3$.

  $g'(x) = 0 \longrightarrow 8 - 4x^3 = 0 \Longleftrightarrow 4x^3 = 8 \Longleftrightarrow x^3 = \dfrac{8}{4} = 2 \longrightarrow x = \sqrt[3]{2} > 1$ no está dentro del intervalo, no lo vamos a considerar.

- Por lo tanto, los máx/mín absolutos de la función se presentan en los puntos extremos del intervalo, $g(-2) = -32$ y $g(1) = 7$.

  En el punto $(-2, -32)$ hay un mínimo absoluto.

  En el punto $(1, 7)$ hay un máximo absoluto.



4.9.3. Ejercicios

1) Determinar todos los puntos críticos para cada función.

a) $f(x) = 6x^2 - x^3$.

b) $f(x) = x^2 + \dfrac{2}{x}$.

c) $f(x) = -\dfrac{x^2}{x-2}$.

d) $f(x) = \sqrt{2x - x^2}$.

2) Determinar los valores máximos y mínimos absolutos de cada función en el intervalo indicado. Luego grafique la función e identifique los puntos de la gráfica donde se alcanzan los extremos absolutos.

a) $f(x) = -x - 4$ en $[-4, 1]$.

b) $f(x) = 4 - x^2$ en $[-3, 1]$

c) $f(x) = -\dfrac{1}{x^2}$ en $\left[\dfrac{1}{2}, 2\right]$.

d) $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ en $[-2, 1]$.

4.10. Funciones crecientes/ decrecientes y criterio de la derivada primera

Sea $f(x)$ una función definida en un intervalo $I = [a, b]$ y x_1, x_2 dos puntos cualquiera de I:

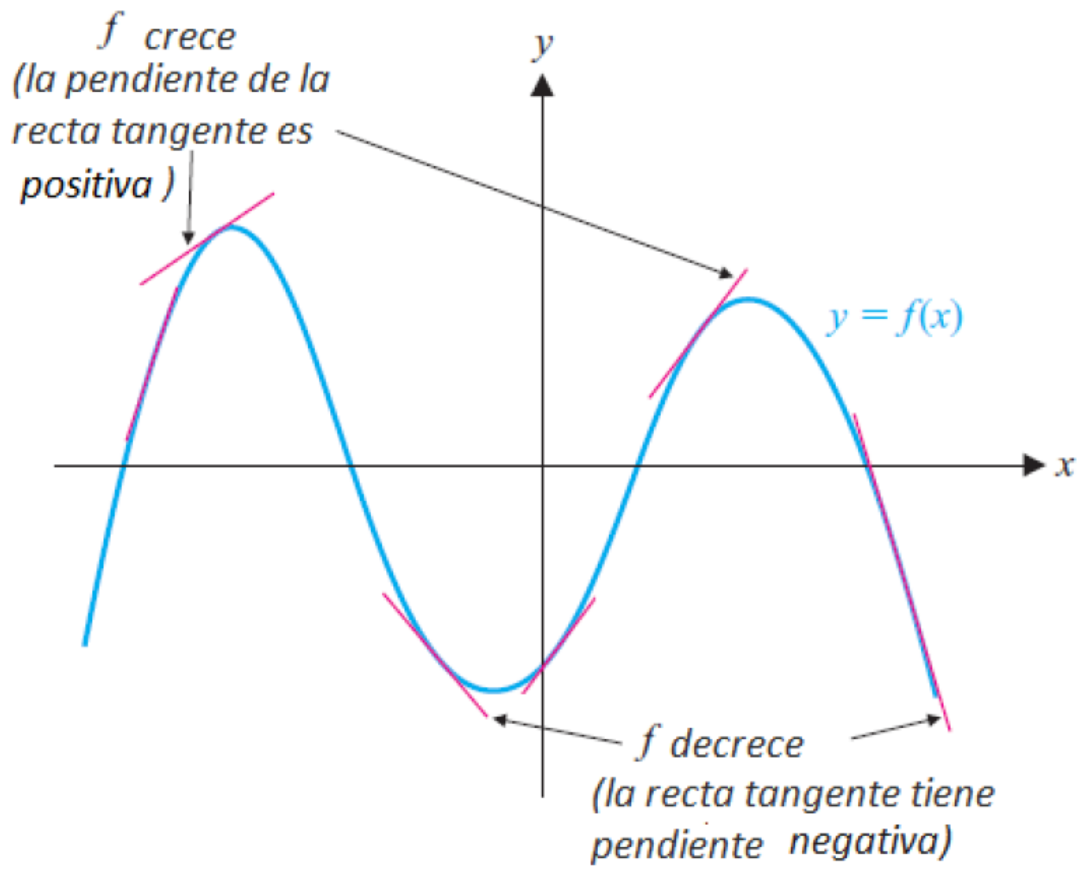
Definición 6 Se dice que una función f, es creciente en I si $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

Definición 7 Se dice que una función f es decreciente en I si $x_1 < x_2 \longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

El siguiente teorema afirma que las funciones con derivada positiva son crecientes y las funciones con derivada negativa son funciones decrecientes.

Teorema Suponga que f es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) entonces:

- Si $f'(x) > 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es creciente en $[a, b]$.
- Si $f'(x) < 0$ en cada punto $x \in (a, b)$, entonces f es decreciente en $[a, b]$.



4.10.1. Cómo determinar los intervalos donde una función es creciente o decreciente?

1. Determinar todos los puntos críticos de f .

2. Armar los intervalos teniendo en cuenta el dominio de la función y de su derivada; y sus puntos críticos.

3. Evaluamos en la derivada un valor p (cualquiera) de cada intervalo.

4. Si $f'(p) > 0$ f crece si $f'(p) < 0$ decrece.

Ejemplo 4 : Determinar los puntos críticos de $f(x) = 2x^3 - 18x$ e identificar los intervalos en los que f es creciente y en los que f es decreciente.

- Determinamos puntos críticos: Para ello debemos calcular la derivada e iguarla a 0,
  $f'(x) = 6x^2 - 18 = 6(x^2 - 3) = 0 \longrightarrow x^2 = 3, \quad$ con lo cual $\quad x = +\sqrt{3} \quad$ y $\quad x = -\sqrt{3}$.

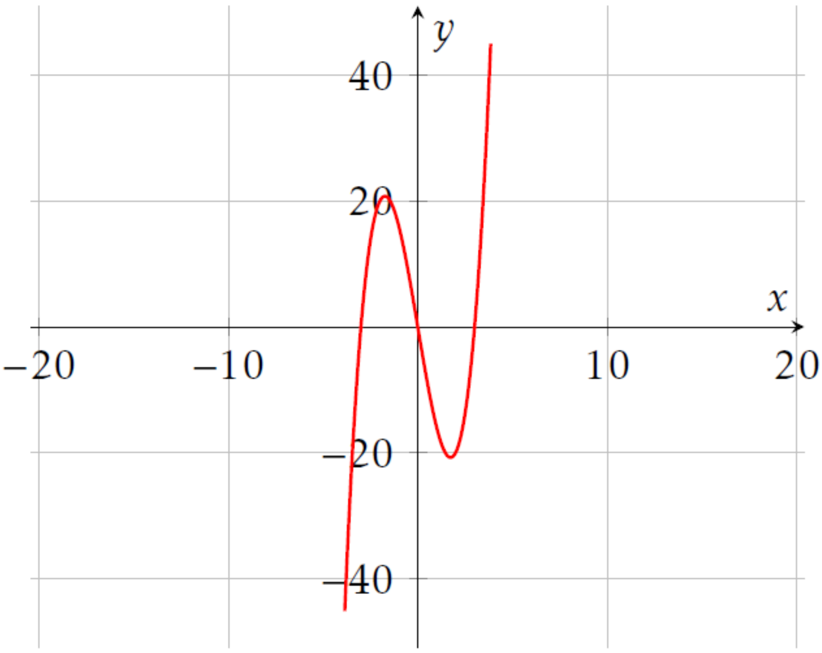
- Armamos los intervalos: $Dom(f) = \mathbb{R} = Dom(f') = (-\infty, -\sqrt{3}) \cup (-\sqrt{3}, \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

- Ahora tomamos valores de prueba (VP) de cada intervalo y evaluamos en la derivada:

Intervalo	$(-\infty, -\sqrt{3})$	$(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$	$(\sqrt{3}, +\infty)$
VP	-2	0	2
Signo de $f'(x)$	$f'(-2) = 6 > 0$	$f'(0) = -18 < 0$	$f(2) = 6 > 0$
$f(x)$	crece	decrece	crece

- Por lo tanto f es creciente en $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}, +\infty)$; y es decreciente en el intervalo $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$.

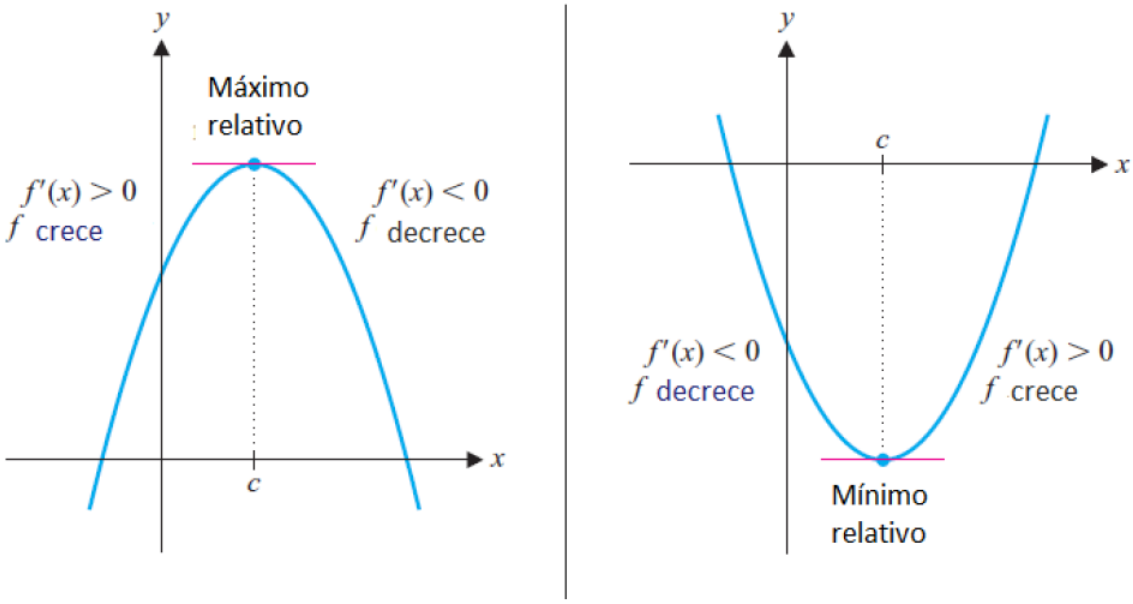
Podemos observar este resultado en el gráfico de la función:



4.10.2. Criterio de la primera derivada para extremos locales o relativos

Suponga que c es un punto crítico de una función continua f , y que f es derivable en todo punto de algún intervalo que contiene a c (excepto posiblemente en c mismo). Al moverse de izquierda a derecha en este intervalo:

1. si f' cambia de negativa a positiva en c, entonces f tiene un mínimo local en c;
2. si f' cambia de positiva a negativa en c, entonces f tiene un máximo local en c;
3. si f' no cambia de signo en c (esto es, f' es positiva en ambos lados de c ó es negativa en ambos lados de c), entonces f no tiene un extremo local en c.



En la función el ejemplo 4) podemos determinar máximos y mínimos locales utilizando este criterio:

- En $x = -\sqrt{3}$ hay un máximo relativo pues $f'(x)$ cambia de positiva a negativa en $-\sqrt{3}$.
- En $x = \sqrt{3}$ hay un mínimo relativo pues $f'(x)$ cambia de negativa a positiva en $\sqrt{3}$.

4.10.3. Ejercicios

Para las siguientes funciones determinar:

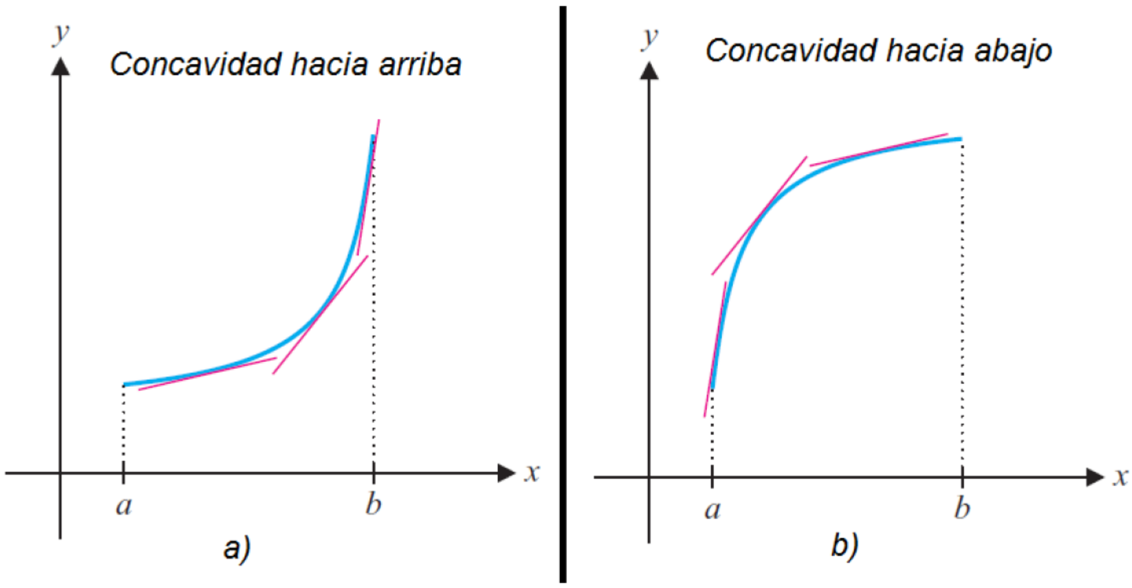
i) Los intervalos de crecimiento /decrecimiento.

ii) Puntos máximos y mínimos relativos.

1. $h(x) = -x^3 + 2x^2$.
2. $g(x) = \dfrac{x^2 - 3}{x - 2}$.
3. $f(x) = \dfrac{x^3}{3x^2 + 1}$.

4.11. Concavidad y criterio de la segunda derivada

En esta sección veremos que la segunda derivada nos brinda información acerca de cómo la gráfica de una función derivable abre hacia arriba o hacia abajo.



En la Figura de arriba se observa que la tasa de crecimiento en la Figura a) está aumentando, mientras que la tasa de crecimiento representada en la b) está disminuyendo.

Aunque todas las rectas tangentes tienen pendiente positiva (dado que $f'(x) > 0$), las pendientes de las rectas tangentes en la Figura a) están aumentando, mientras que las de la Figura b) están disminuyendo.

A la gráfica de la Figura a) la llamamos **cóncava hacia arriba** y a la gráfica de la Figura b) **cóncava hacia abajo.**

Sea f una función cuya segunda derivada existe en un intervalo abierto (a, b).

Decimos que:

1) Si $f''(x) > 0$ en (a, b) entonces $f(x)$ es cóncava hacia arriba en ese intervalo.

2) Si $f''(x) < 0$ en (a, b) entonces $f(x)$ es cóncava hacia abajo en ese intervalo.

4.11.1. Cómo determinar los intervalos donde una función f es cóncava hacia arriba o hacia abajo?

1) Determinar todos los puntos c donde $f''(c) = 0$.

2) Armar los intervalos teniendo en cuenta el dominio de la función (y de su derivada segunda) y los puntos $f''(c) = 0$.

3) Evaluar en la segunda derivada un punto p (cualquiera) de cada intervalo.

4) Si $f''(p) > 0$ f es cóncava hacia arriba en ese intervalo, y si $f''(p) < 0$ es cóncava hacia abajo en el intervalo.

Definición 8 Dada f una función continua, x_0 es punto de inflexión si f cambia de concavidad en ese punto.

Ejemplo 5: Determinar los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad para la función $f(x) = x^3 + 3x^2$

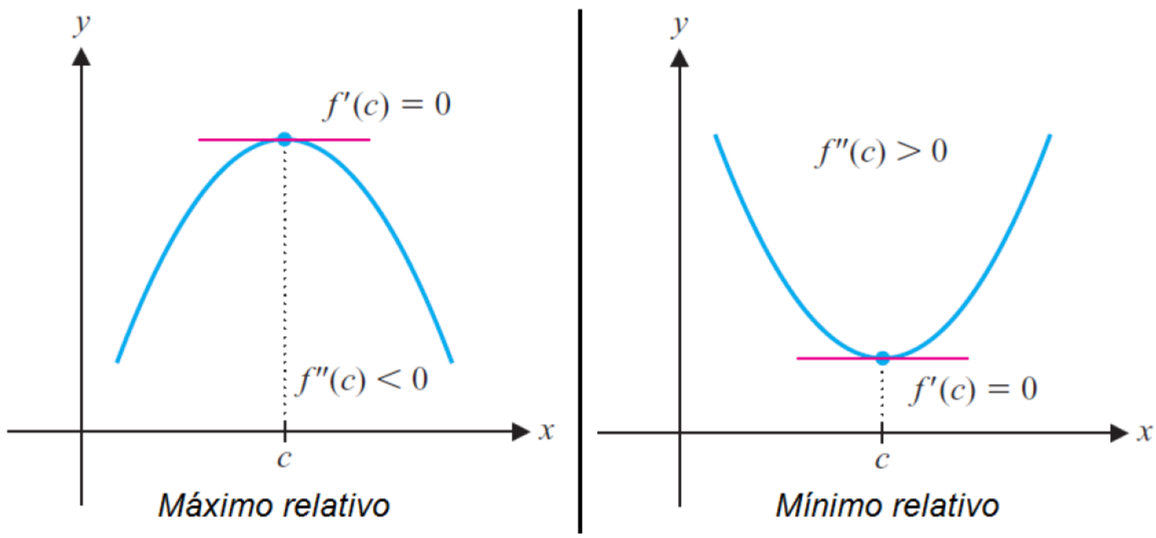
Observemos que el dominio de f es todo $\mathbb{R}$. Si derivamos la función tenemos $f'(x) = 3x^2 + 6x$, y su segunda derivada $f''(x) = 6x + 6$. Igualando la segunda derivada a cero nos queda que el candidato a punto de inflexión es : $x = -1$. Para ver que realmente es necesitamos analizar si antes y después del punto hay concavidades diferentes.

Haciendo los intervalos nos quedan : $(-\infty, -1) \cup (-1, \infty)$. Si evaluamos en un punto del primer intervalo en la segunda derivada, por ejemplo en $x = -2$, nos queda que $f'' < 0$, con lo cual es cóncava hacia abajo en ese intervalo, y si evaluamos en $x = 0$ perteneciente al segundo intervalo, nos queda $f'' > 0$, entonces f es cóncava hacia arriba en ese intervalo. Como hay un cambio de concavidad, decimos que en $x = -1$ hay un punto de inflexión.

Criterio de la segunda derivada para máximos y mínimos relativos Dado x_0 un punto crítico de una función f con derivada segunda continua en x_0:

1) Si $f''(x_0) < 0$ entonces f tiene un valor máximo relativo en x_0.

2) Si $f''(x_0) > 0$ entonces f tiene un valor mínimo relativo en x_0.



Aclaración: este criterio no dice nada acerca de si $f''(x_0) = 0$. En ese caso tenemos que analizar el signo de la primera derivada antes y después de x_0, con el criterio de la primera derivada.

Ejemplo 6 :

- Si analizamos la función $f(x) = x^2$ tiene un punto crítico en $x = 0$ pues su derivada se hace cero allí. Y si observamos la segunda derivada $f''(x) = 2$, con lo cual es positiva, y según el criterio de la segunda derivada hay un mínimo en $x_0 = 0$, además la función es concava hacia arriba siempre porque la segunda derivada da positiva para todo valor en su dominio.

- Si analizamos la función del ejemplo anterior $f(x) = x^3 + 3x^2$, tiene dos puntos criticos en donde f' se anula, en $x = -2$, y en $x = 0$. Si observamos su segunda derivada $f''(x) = 6x+6$ y analizamos su signo en esos valores, usando el criterio de la segunda derivada concluimos que en $x = -2$ hay un máximo relativo y en $x = 0$ un mínimo relativo.

4.11.2. Ejercicios

1) Determinar todos los puntos de inflexión y los intervalos de concavidad para cada función.

a) $f(x) = 3x^3 + 2x$.

b) $f(x) = 2x^4 + 3x^3$.

c) $f(x) = sin(x)$ en $[-2\pi, 2\pi]$.

d) $f(x) = ln(x)$.

2) En caso de que se pueda usar el criterio de la segunda derivada para corroborar los ejercicios de la sección 7.2.3 ii) para cada función.

4.12. Análisis completo de una función y gráfica

En esta sección vamos a aplicar todos los conocimientos adquiridos anteriormente. Dada una función podremos hacer su análisis completo para saber si posee máximos, mínimos, dónde crece, decrece, cuál es su concavidad, sus límites, y luego de todo ese análisis saber cuál es su gráfica.

Resumimos ahora toda la información de cómo realizar el estudio de funciones

- Determinar el dominio de la función. - Determinar el conjunto donde la función es continua y dónde es discontinua. - Calcular la primera derivada y determinar los puntos críticos de la función. - Determinar los intervalos de crecimiento / decrecimiento de la función. - Determinar los valores máximos y mínimos relativos. - Calcular la segunda derivada y determinar los puntos donde $f''(x) = 0$. - Determinar los intervalos de concavidad y puntos de inflexión. - Determinar las asíntotas verticales y horizontales. -Realizar la representación gráfica de la función, utilizando los datos obtenidos en el análisis.

Ejemplo 7: Realizar el análisis completo de $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1}$. Luego graficar en base al análisis.

Dada $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2x+1} = \dfrac{x-1}{(x+1)^2}$, cuyo dominio es $\mathbb{R} - \{-1\}$.

(a) *Derivada*: Haciendo la regla de la derivada de un cociente, sacando factor común y simplificando, nos queda :

$$f'(x) = \frac{(x+1)(-x+3)}{(x+1)^4} = \frac{(3-x)}{(x+1)^3} \quad Dom f'(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

(b) *Puntos Críticos: Candidatos a máximos o mínimos*: Para esto recordemos que tenemos que igualar la primer derivada a cero y además tener en cuenta donde la derivada no existe, éstos serán nuestros candidatos a máximos o mínimos:

$$f'(x) = \frac{(3-x)}{(x+1)^3} = 0 \; si \; x = 3,$$

Obs:el denominador es diferente de cero. Entonces $x = 3$ es Punto Crítico.

(c) *Intervalos de Crecimiento y Decrecimiento, máximos y/o mínimos*: Para ello tenemos que dividir el dominio teniendo en cuenta el punto crítico y evaluar la derivada en un valor del intervalo para analizar su signo.

Dividimos el dominio de esta manera: $(-\infty,-1) \cup (-1,3) \cup (3,+\infty)$.

- En $(-\infty,-1)$ evaluamos $f'(-2) = -5$ como la derivada es negativa, entonces la función *decrece* en ese intervalo.

- En $(-1,3)$ evaluamos $f'(0) = 3$ como la derivada es positiva, entonces la función *crece* en ese intervalo.

- En $(3,+\infty)$ evaluamos $f'(4) = -\frac{1}{125}$ como la derivada es negativa, entonces la función *decrece* en ese intervalo.

A partir de este análisis, viendo que antes del punto crítico la función crece y luego decrece, podemos concluir que en $x = 3$ hay un *máximo*. El cual se situa en el punto de coordenadas $P = (3, \frac{1}{8})$.

(d) *Segunda derivada*: De la misma manera que con f' hacemos la derivada segunda por regla del cociente.

$$f''(x) = \frac{(x+1)^2(2x-10)}{(x+1)^6} = \frac{(2x-10)}{(x+1)^4} \quad Dom f''(x) = \mathbb{R} - \{-1\}$$

(e) *Candidatos a Puntos de inflexión*: Para esto recordemos que tenemos que igualar la segunda derivada a cero y además tener en cuenta donde no existe.

$$f''(x) = \frac{(2x-10)}{(x+1)^4} = 0 \text{ si } x = 5$$

Para corroborar que realmente es un punto de inflexión en donde la concavidad cambia, veamos los intervalos y analicemos el signo de la segunda derivada allí.

(f) *Intervalos de concavidad*: Para ello tenemos que dividir el dominio teniendo en cuenta el punto de inflexión encontrado y evaluar la segunda derivada en un valor del intervalo para analizar su signo.

Dividimos el dominio de esta manera: $(-\infty,-1) \cup (-1,5) \cup (5,+\infty)$.

- En $(-\infty,-1)$ evaluamos $f''(-2) = -14$ como la segunda derivada es negativa, entonces la función es *cóncava hacia abajo* en ese intervalo.

- En $(-1,5)$ evaluamos $f''(0) = -10$ como la segunda derivada es negativa, entonces la función *cóncava hacia abajo* en ese intervalo.

- En $(5,+\infty)$ evaluamos $f''(6) = 0{,}0008$ como la segunda derivada es positiva, entonces la función *cóncava hacia arriba* en ese intervalo.

Con lo cual en $x = 5$ hay un Punto de Inflexión en donde la concavidad cambia de cóncava hacia abajo a cóncava hacia arriba.

(g) *Asíntotas Verticales*: Los candidatos a asíntotas verticales son los puntos que no están en el dominio. En este caso $x = -1$. Para ver si realmente es una asíntota analicemos los límites por derecha y por izquierda y veamos si dan ambos o al menos uno $\pm\infty$.

$$\lim_{x \longrightarrow -1^+} \frac{\overbrace{x-1}^{\to -2}}{\underbrace{(x+1)^2}_{\to 0^+}} = -\infty \text{ y } \lim_{x \longrightarrow -1^-} \frac{\overbrace{x-1}^{\to -2}}{\underbrace{(x+1)^2}_{\to 0^+}} = -\infty.$$

Con lo cual en $x = -1$ hay una Asíntota Vertical.

(h) *Asíntotas Horizontales*: Para hacer este análisis debemos tomar los límites a $\pm\infty$ de la función y observar si ambos, o al menos uno tiende a un número real L.

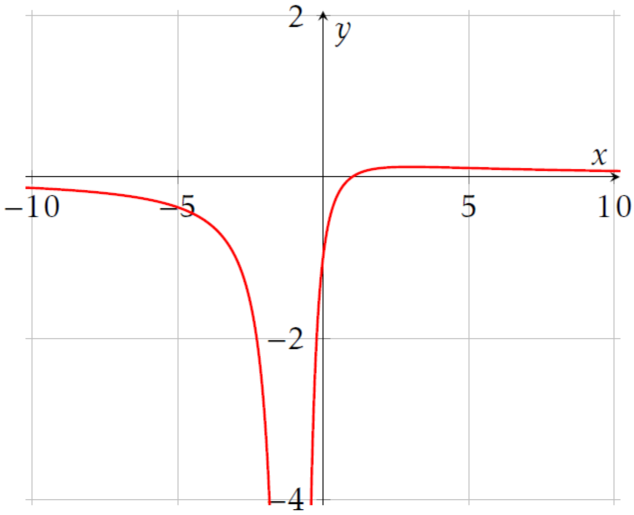
$$\lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x-1}{(x^2+2x+1)} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})} = \lim_{x \longrightarrow +\infty} \frac{\overbrace{(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}^{\to 0}}{\underbrace{(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}_{\to 1}} = 0$$

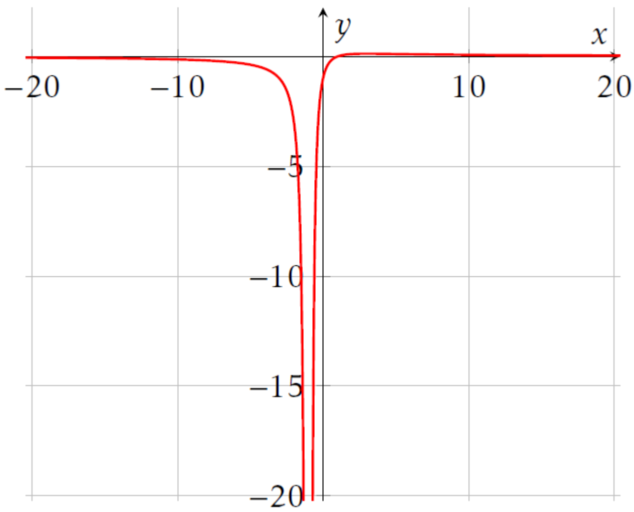
$$\lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{x-1}{(x^2+2x+1)} = \lim_{x \longrightarrow -\infty} \frac{\overbrace{(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^2})}^{\to 0}}{\underbrace{(1 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}_{\to 1}} = 0.$$

Con lo cual en $y = 0$ hay una Asíntota Horizontal.

A continuación podemos ver un cuadro que recopila toda la información hallada y su gráfico (con y sin zoom):

Intervalo	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, 5)$	$(5, +\infty)$
VP	-2	0	4	6
Signo de $f'(x)$	$-$	$+$	$-$	$-$
$f(x)$	decrece	crece	decrece	decrece
Signo de $f''(x)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$f(x)$	Cóncava h/ abajo	Cóncava h/ abajo	Cóncava h/ abajo	Cóncava h/ arriba





4.12.1. Ejercicios

1) Realizar el análisis completo de las funciones siguientes paso a paso como el ejemplo anterior. Graficar en base al análisis realizado.

a) $f(x) = 2x^3 + 3x^2 + 1$.

b) $f(x) = \dfrac{2}{x^3}$.

c) $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

d) $f(x) = \dfrac{e^x}{x}$.