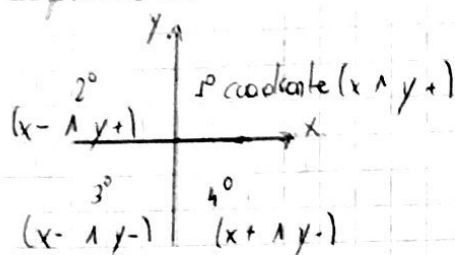


Revisión 27/4

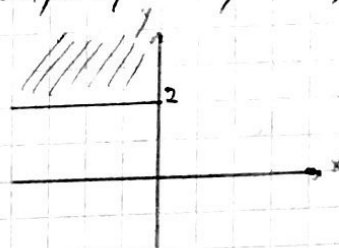
Módulo 1 y 2 hasta p. 27.

Capítulo 1: GEOMETRIA.



P: (x, y)

$$Ej: A\{(x, y): (x, y) \in \mathbb{R}^2 \wedge x < 0 \wedge y > 2\}$$

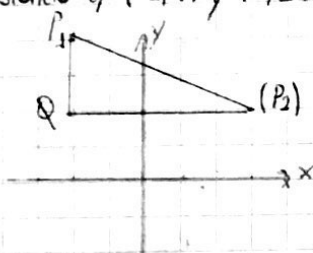


DISTANCIA E/ DOS PTOS: $d = (P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

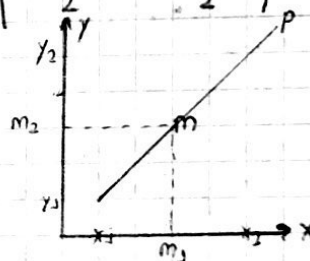
Ejemplo: distancia e/ (-2, 4) y (3, 2)

$$d = (P_1, P_2) = \sqrt{(3 - (-2))^2 + (2 - 4)^2}$$

$$d = \sqrt{5^2 + (-2)^2} = \sqrt{25 + 4} = \sqrt{29}$$



Punto medio e/ $P_1 = (x_1, y_1)$ y $P_2 = (x_2, y_2)$ está dado por $m = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$



RECTAS EN EL PLANO:

$$1 - \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1}$$

Ecuación de la recta q' pasa x 2 pto.

$$2 - Ax + By + C = 0$$

Ecuación gen. de la recta. Implícita

$$3 - y = mx + b$$

Forma explícita

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

(Pendiente de la recta)

$$4 - y - y_1 = m(x - x_1)$$

Ecuación de la recta c/pendiente en un Pto.

$$b = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} - x_1 + y_1 = \text{Ordenada al origen de la recta L}$$

*Pendiente de una recta: inclinación de un elemento lineal

*Tangente: recta q' se toca a la curva en un solo pto.

*Todas las ecuaciones de la recta son =.

Hallar la eqn explícita q' pasa por el Pto $P_1 = (-1, 2)$ y $P_2 = (-2, 8)$

Hay 2 maneras: 1- Usamos la eqn de la recta q' pasa por 2 ptos.

$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{x - x_1} \Rightarrow \frac{8 - 2}{-2 - (-1)} = \frac{y - 2}{x - (-1)}$$

2- Usamos la eqn explícita de la recta sabiendo q' los 2 ptos deben satisfacer la eqn.

$$\frac{6}{-3} \cdot (x + 1) = y - 2$$

Despejamos

$$y = -2x + 4$$

Reemplazamos en la eqn $y = mx + b$ $2 = m(-1) + b$

$$b = 2 - m$$

$$b = 2 + 2$$

$$b = 4$$

$$8 = m(-2) + b$$

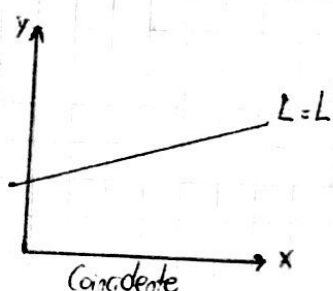
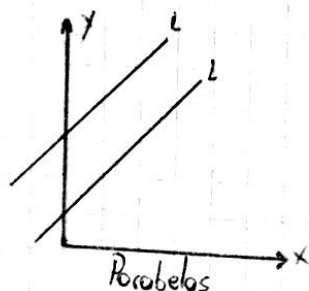
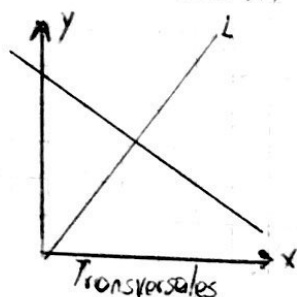
$$8 = m(-2) + 2m$$

$$8 - 2 = 3m$$

$$-\frac{6}{3} = m$$

$$m = -2 \quad b = 4$$

POSICION RELATIVA DE LAS RECTAS



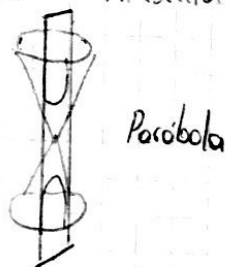
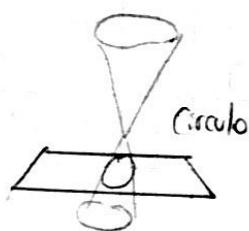
Propiedades:

$m = m'$ L y L' paralelas
 \leftrightarrow pendientes transversales
 $b = b'$ paralelas

$b = b'$ coincidentes

L y L' perpendiculares si y solo si $m \cdot m' = -1$

CÓNICAS: curvas resultantes de \leftrightarrow intersecciones el cono y plano



Círculo: pto. del plano que equidistan de un pto fijo. llamado centro. El radio es la distancia de cualquier punto de la circunferencia y al centro

Si llamamos $C(a, b)$ al centro, r al radio y $P(x, y)$ a un pto. genérico,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2 \quad \text{ecuación de la circunferencia}$$

Centro = $(1, 4)$ / pto. $(2, \sqrt{3} + 4)$

$$(2 - 1)^2 + (\sqrt{3} + 4 - 4)^2 = r^2$$

$$1^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2$$

$$1 + 3 = r^2 = 4$$

$$r = 2$$

Completación de cuadrados $h(x-a)^2 + (y-b)^2 = h \cdot r^2$

Si $(a, b) = (2, 3)$ $r = 2$ $(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$
 $h = 3$

$$3x^2 - 3 \cdot 2 \cdot 2 + 3 \cdot 2^2 + 3y^2 - 3 \cdot 2 \cdot 3 + 3 \cdot 3^2 = 3 \cdot 4$$

$$3x^2 - 12x + 12 + 3y^2 - 18y + 27 = 12$$

$3(x^2 - 4x + y^2 - 6y + 9) = 0$ → completamos cuadrados, comparando con la ecuación desarrollada

$$x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x + 2^2 + y^2 - 2 \cdot 3 \cdot y + 3^2 = 1^2$$

$$a = -2a = -4$$

$$a = -4 / -2$$

$$a = 2$$

$$x^2 - 4x + 4 + y^2 - 6y + 9 = -1 + 4 + 9$$

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{2} + \frac{y^2 - 6y + 9}{2} = \frac{-1 + 4 + 9}{2}$$

$$b = -2b = -6$$

$$b = -6 / -2$$

$$b = 3$$

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4$$

PARÁBOLAS: pto. de un plano q' equidistan en un pto fijo (foco) y de una recta fija (directriz).

Directriz: línea q' determina las condiciones de generación de otra línea

Foco: pto. en torno al cual se mantienen constantes d/los distancias d/ todos los pto. de la misma.

• La recta perpendicular a la directriz es el eje de la parábola

• Vértice: pto. en el q' se cortan la parábola d/ el eje

• Distancia e/ F y V. = a distancia V y D

• C = distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz.

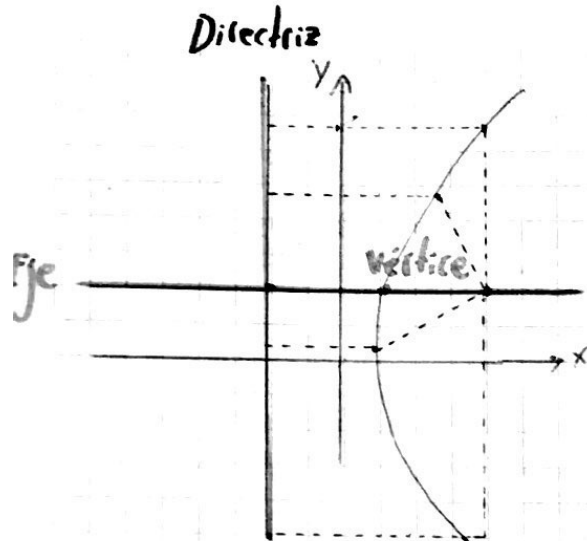
$$(a, b) \text{ vértice} : F = (a+c, b) \quad D = (x=a, c)$$

$$(y-b)^2 = 4c(x-a) \rightarrow \text{Ecuación parábola d/ eje focal paralelo al eje x}$$

$$(x-a)^2 = 4c(y-b) \rightarrow \text{eje y.}$$

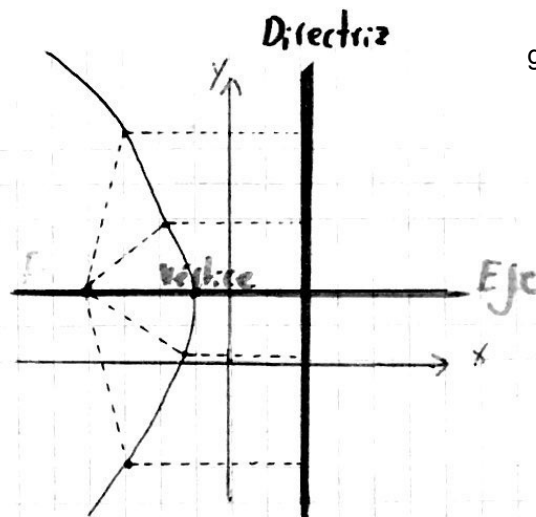
• Si la parábola tiene eje paralelo a x y el signo de C es + entonces C,

• " y C es - es U, si es -, es N



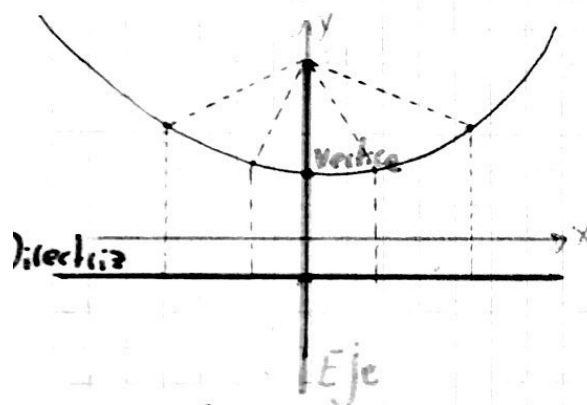
$$(y-\beta)^2 = 4c(x-\alpha)$$

\downarrow
 $c = +$



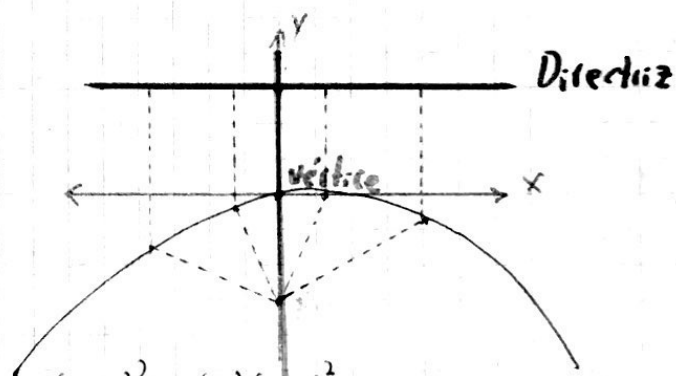
$$(y-\beta)^2 = -(4c)(x-\alpha)$$

\downarrow
 $c = -$



$$(x-\alpha)^2 = 4c(y-\beta)^2$$

\downarrow
 $c = +$



$$(x-\alpha)^2 = -(4c)(y-\beta)^2$$

\downarrow
 $c = -$

Completación de cuadrados: 1º $(y-\beta)^2 = 4c(x-\alpha) \Rightarrow y^2 - 2y\beta + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$

$-2\beta = -4 \Rightarrow \beta = 2$

$y^2 - 2y\beta + \beta^2 = 4cx - 4c\alpha$

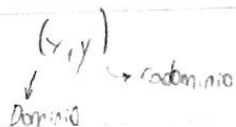
$y^2 - 4y + 2^2 = 16x - 20 + 2^2$

$y^2 - 4y + 4 = 16x - 20 + 4$

$(y-2)^2 = 16(x-1)$

$V = (2, 2) \quad c = 4$

$4c = 16$
 $c = 16/4$
 $c = 4$



Capítulo 2: DEMOSTRACIONES, CONJUNTOS Y FUNCIONES

Axiomas: proposiciones asumidas dentro de un cuerpo teórico sobre las cuales se basan otros razonamientos.

Conjetura: enunciado q que no ha sido demostrado.

Teorema: conjetura demostrada.

Demostraciones: los métodos válidos en matemática son aquellos q se pueden demostrar los enunciados son proposiciones, se afirma algo de todos o algunos elem. de un conjunto.

Si el enunciado es existencial, alcanzará en algunos casos \exists exhibir un individuo x de los caract. q dice el enunciado.

"Existen $n \in \mathbb{Z}$ q son primos" $\rightarrow (\exists x) p(x)$, siendo $p(x)$: x es primo $\forall n \in \mathbb{Z}$

"universal, habrá q probar q \forall de los elem. cumple \forall lo afirmado

"Si un $n \in \mathbb{Z}$ es par, su cuadrado es par" $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

$p(x)$: x es par $q(x)$: x^2 es par $\forall n \in \mathbb{Z}$

El enunciado tiene forma de condicional, hay q identificar antecedente, consecuente, hipótesis, etc.

Método

directo.

Un condicional es falso sólo cuando el antecedente es V y el consecuente F

" x es par" y el consecuente " x^2 es par" \rightarrow

$\downarrow x = 2k$

$x^2 = (2k)^2$
 $x^2 = 2k \cdot 2k$
 $x^2 = 2(k \cdot 2k) \rightarrow k \cdot 2k \in \mathbb{Z}$ por ser
 multiplicado por un \mathbb{Z}

Se supone q el enunciado es F p/q eso pasa se supone q el antecedente es V y el consecuente F y así llegamos a un absurdo

Método
del
absurdo.

" x es par" " x^2 es par" $\neg(p \rightarrow q) \Rightarrow p \wedge \neg q$

$\downarrow x = 2k$: $x^2 = (2k)^2$: $x^2 = 2(k \cdot 2k)$

" x es par" y " x^2 es impar" $x^2 = 2w+1$, x^2 impar Absurdo un n^o
 no es par o impar.

Método del
contrareciproco.

- Es hacer el método directo o la proposición
contra recíproca

$$p \rightarrow q \Leftrightarrow \neg q \rightarrow \neg p$$

"Si el cuadrado de un $n \in \mathbb{Z}$ es par, el n es par"

"Si un n es par, su cuadrado no es par"

$$x = 2h+1: x^2 = (2h+1)^2$$

$$(2h)^2 + 2h+1 = 4h^2 + 4h+1$$

$$x^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$$

CONJUNTOS, ELEMENTOS Y PERTENENCIA:

Un conjunto es una colex definida de obj. q. gral. se representa c/ una letra mayúscula. Los elem. q. la integra se denominan elementos.

El conjunto q. no tiene elem. se llama conjunto vacío " \emptyset "

Hoy 2 maneras de determinar un conjunto: dando de manera explícita c/u de sus elementos (por extensión) o mediante una propiedad o c/u de sus elementos (por comprensión)

Igualdad de conjuntos: 2 conjuntos son iguales si $(\forall x)(x \in A \Leftrightarrow x \in B)$ donde $A=B$

Inclusión, subconjuntos: puede ocurrir q. todo elemento de un conj. sea elemento de otro conjunto pero no recíproca

$$(\forall x)(x \in A \rightarrow x \in B) \quad A \subseteq B \quad / \quad B \supseteq A$$

Conjunto universal: todos los conjuntos son subconjuntos del conj. U

Propiedades: $A=B$ si $A \subseteq B$ y $B \subseteq A$

$$\bullet A \subseteq A$$

$$\bullet (A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \rightarrow A \subseteq C$$

Operaciones e/ conjuntos: Unión: $A \cup B = \{x: x \in A \vee x \in B\}$

Intersección: $A \cap B = \{x: x \in A \wedge x \in B\}$

$$\bullet \text{Asociatividad: } A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$\bullet \text{Comutividad: } A \cap B = B \cap A$$

$$\bullet A \subseteq B \Leftrightarrow A \cap B = A$$

Diferencia: $A - B = \{x: x \in A \wedge x \notin B\}$

$$\bullet A - A = \emptyset$$

$$\bullet \emptyset - A = \emptyset$$

$$\bullet A - \emptyset = A$$

$$\bullet A - B = B - A = A \cap B$$

* Si $A \cap B$ son
no vacíos y

$A \cap B = \emptyset$, son disjuntos

↓
Ningún elem.
en común

- Complemento: $A^c = \{x : x \in U, x \notin A\}$
 - $\emptyset^c = A$
 - $\emptyset^c = U$
 - $U^c = \emptyset$
 - $A \subseteq B \Leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

Propiedades combinando operaciones:

- Leyes distributivas:
 - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

- Leyes de De Morgan:
 - $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
 - $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

PRODUCTO CARTESIANO: Operar el conjuntos, sus elem. son pares ordenados

$$A \times B = \{(a, b) : (a \in A), (b \in B)\}$$

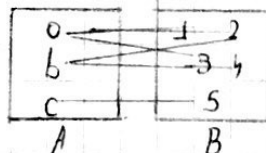
Ej: si $A = \{1, 3, 5\}$ y $B = \{w, j\}$ $A \times B = \{(1, w), (3, w), (5, w), (1, j), (3, j), (5, j)\}$

Propiedades de los pdtos cartesianos:

- $(A \times B) \cup (C \times B) = (A \cup C) \times B$
- $(A \times B) \cap (C \times B) = (A \cap C) \times B$
- $(A \times B) \cup (A \times C) = A \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) \cap (C \times B) = (A \cap C) \times B$
- $(A \times B) \cap (A \times C) = A \times (B \cap C)$
- Si $x \subseteq A : x \times B \subseteq A \times B$
- Si $y \subseteq B : A \times y \subseteq A \times B$

RELACIONES BINARIAS: Es un subconjunto del pdto. cartesiano $R \subseteq A \times B$ o $R \subseteq B \times A$

* Siempre me dan un gráfico o una carac.



$$A = \{a, b, c\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4\}$$

$$R = \{(a, 1), (b, 2), (c, 5)\}$$

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$R(5) = \{x \in B : 5 R x\} = \{w, j\}$$

$$B = \{w, j\}$$

FUNCIONES: es un tipo de relac. binaria.

Una relac. binaria de A (Dominio) en B (Codomino) q. cumple q. "a todo elemento de $a \in A$ le asigna un unico elemento $b \in B$."

Una fx llamada F , q. relaciona elementos de A c/ elementos de B , se indica con $F: A \rightarrow B$. El elemento unico de B asignado a cada $a \in A$ se llama la imagen de a por f ($f(a)$) y se lee f de a .

Dominio: valores q. puede tomar la variable independiente x

y depende de x

Rango: independiente y

Dominio horizontal / Codominio vertical

Domino: conjunto de A, indicado como $\text{Dom}(f)$

Codomino: conjunto B

Imagen de la f: elem. de B q se relaciona c/B

IGUALDAD DE Fx: si y solo si tienen el mismo Df y tienen la misma relax

$$f=g \Leftrightarrow \text{Dom}(f) = \text{Dom}(g) = D \wedge (\forall x) \cdot f(x) = g(x).$$

Capitulo 3: ALGEBRAS DE BOOLE

Estructura algebraica conjunto de 1 o + operaciones

- Binarias: se hacen c/2 elementos del conjunto
- Unarios: aplicada a un elemento del conj.

Estructura grupo

- Cerrado: p/cualquier par de n^o, su operax da un n^o $\in \mathbb{Z}$
- Asociativo: p/cualquier terna de n^o el modo de sumarlos da lo mismo asociando los 2 1^o o los 2^o.
 $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Existencia del neutro: unico elemento tal q sumado a cualquier otro da el mismo n^o.
 $a+0 = a$
- opuesto: ya q p/ todo n^o existe otro que sumado a el da el elem neutro
 $a+(-a) = 0$

Grupo conmutativo/abeliano

Asociativa en cualquier orden, da = esto $a+b = b+a$

Conjunto de partes: si C es un conjunto cualquiera, un conjunto de partes de C es el conjunto de elementos que son subconjuntos de C

$$A = \{0, b, c\} \quad p(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{b\}, \{c\}, \{0, b\}, \{0, c\}, \{b, c\}, \{0, b, c\}\}$$

Estructura anillo

Terna ordenada de $(A, +, \cdot)$

- $(A, +)$ conmutativa
- " " cerrada y asociativa
- " " distributiva c/ respecto a la +

⑤

Algebra de Boole: FA formado por un conjunto, al menos 2 elem. ≥ 2 (1° y último elemento), designados de forma gral. c/ los símbolos 0/1/2 op binarias: \vee supremo y \wedge infimo y una op. \times unaria: complemento.

B1 $x \vee y = y \vee x$

B2 $x \wedge y = y \wedge x$

B3 $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

B4 $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

B5 $x \vee 0 = x$

B6 $x \wedge 1 = x$

B7 $x \vee x' = 1$

B8 $x \wedge x' = 0$

$x + y = y + x$

$xy = yx$

$x(y+z) = (xy) + (xz)$

$x+(yz) = (x+y)(x+z)$

$x+0 = x$

$x1 = x$

$x+x' = 1$

$xx' = 0$

$+ = \vee$

$\cdot = \wedge$

$B = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$

Dualidad

Teorema 1 ley de idempotencia

2. ley de absorx

Teorema 3 ley de absorx

Teorema 4 involu

Dualidad $x+x = x$ $xx = x$

Teorema 5 ley de Morgan

	Teoria de conjuntos	Algebra de Boole	Lógica
Igualdad	Unión $A \cup B$ Intersección $A \cap B$ Complemento A^c	Supremo $x+y$ Infimo xy Complemento x'	$p \vee q$ $p \wedge q$ $\sim p$
B1 B2 Commutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$x+y = y+x$ $xy = yx$	$p \vee q = q \vee p$ $p \wedge q = q \wedge p$
B3 B4 Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$x(y+z) = xy + xz$ $x+(yz) = (x+y)(x+z)$	
B5 B6 Neutros	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	$x+0 = x$ $x1 = x$	
B7 B8 Complementos	$A \cup A' = U$ $A \cap A' = \emptyset$	$x+x' = 1$ $xx' = 0$	
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$x+(y+z) = (x+y)+z$ $x(yz) = (xy)z$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
Idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	$x+x = x$ $xx = x$	$p \vee p = p$ $p \wedge p = p$
Absorx	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	$x+1 = 1$ $x0 = 0$	
Absox	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	$x+(xy) = x$ $x(x+y) = x$	$p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (p \vee q) = p$
Involu	$(A^c)^c = A$	$(x')' = x$	$\sim(\sim p) = p$
de De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(x+y)' = x'y'$ $(xy)' = x'+y'$	$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

• Si A tiene n elementos, $P(A)$ tiene 2^n elementos

Capítulo 4: SUCESIONES

$S: \mathbb{N} \rightarrow A$, a_1, a_2, a_3 son elementos de A .

• Enumerar de los 1º términos 2, 4, 6, 8

• Forma descriptiva

Suma de pares

• Forma explícito

$$a_n = 2 \cdot n \quad n \geq 1$$

• Forma recursiva de los 1º términos

$$a_1 = 2 \quad a_n = a_{n-1} + 2 \quad n \geq 2$$

Sumas aritméticas: secuencia de números en la cual la diferencia entre términos consecutivos es constante. Se define único el 1º término.

Definición explícita: $a_n = a_1 + (n-1)d$ a_1

recursiva: $a_n = a_{n-1} + d \quad n \geq 2$

Sumas geométricas: desp del 1º término, los términos son encontrados al multiplicar el anterior por una razón.

Definición explícita: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1}$, $n \geq 1$

recursiva: $a_n = a_{n-1} \cdot r$, $n \geq 2$

Propiedades sirve para sumar los términos de una sucesión.

$$1) \sum_{h=1}^n (a_h \pm b_h) = \sum_{h=1}^n a_h \pm \sum_{h=1}^n b_h$$

$$2) \sum_{h=1}^n (c \cdot a_h) = c \cdot \sum_{h=1}^n a_h$$

$$3) \sum_{h=1}^n c = n \cdot c$$

Suma de sucesiones aritméticas y geométricas

Suma aritmética: $1) \sum_{h=1}^n k = \frac{k \cdot (h_1 + n)}{2}$

$$2) \sum_{h=1}^n 3k+2 = 3 \sum_{h=1}^n k + \sum_{h=1}^n 2 = 3 \cdot \frac{h \cdot (n+1)}{2} + n \cdot 2 =$$

Suma geométrica $S_n = \sum_{h=1}^n = \frac{h \cdot (1 - r^n)}{(1 - r)}$