Apuntes de Matemática 2

Facultad de Informática
U.N.L.P.

Año 2020

Índice general

Capítulo 5

Integrales

Seguramente recuerdan de años anteriores lo que significa el área de ciertas figuras geométricas. Por ejemplo, el área de un rectángulo es el producto de la base por la altura y el área de un triángulo es la mitad del producto de las longitudes de la base y la altura. Sin embargo, ¿cómo se define el área de una región en un plano si dicha región está acotada por una curva?. La respuesta a esta pregunta está relacionada al concepto de integral.

La integral es de importancia fundamental en estadística, ciencias e ingeniería. La utilizamos para calcular cantidades que van desde probabilidades y promedios hasta el consumo de energía y las fuerzas ejercidas contra los muros de una presa.

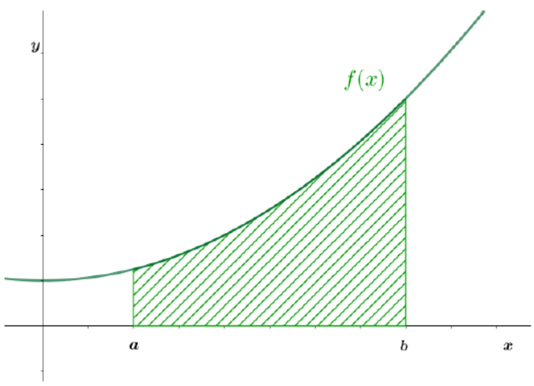
En este capítulo nos centraremos en el concepto de la integral , en métodos de integración y en su uso para el cálculo de áreas de varias regiones que se forman con curvas.

5.1. Integral Definida

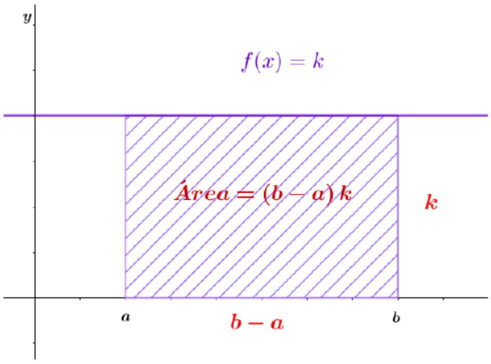
La integral definida es la herramienta clave en cálculo para definir y calcular importantes cantidades en matemáticas y ciencias, tales como áreas, volúmenes, longitudes de trayectorias curvas, probabilidades y pesos de diversos objetos, por sólo mencionar algunas. La idea detrás de la integral es que es posible calcular dichas cantidades si las dividimos en pequeñas partes y sumamos las contribuciones de cada una.

Uno de los problemas que dio origen al concepto de integral definida fue:

Hallar el área de una región plana limitada por la gráfica de una función $f(x)$ positiva y continua, el eje x y las rectas $x = a$ y $x = b$.

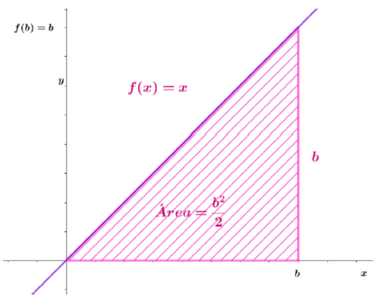


Comencemos con un ejemplo sencillo. Calcular el área de una función constante $f(x) = k$ en el intervalo $[a, b]$, como se muestra en la siguiente figura



Es fácil ver que se trata del área de un rectángulo de lados $b-a$ y k. Por lo tanto el área $A = (b-a)k$.

Ahora consideremos el caso de la función lineal $f(x) = x$ en el intervalo $[0, b]$.

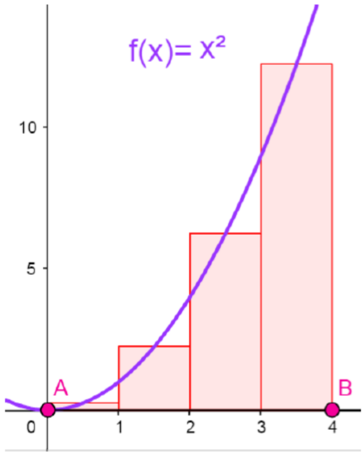


Este ejemplo también es un área conocida, ya que se trata de un triángulo de base b y altura $f(b) = b$. Así el área es $A = \dfrac{b^2}{2}$.

Ahora nos preguntamos ¿cómo calculamos el área debajo de la gráfica de $f(x) = x^2$ en el intervalo $[0, 4]$?

Una respuesta geométrica al problema es aproximar el valor del área con la suma de las áreas de un número finito de rectángulos.

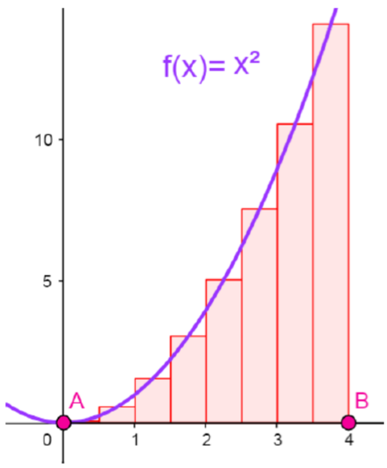
Para hacer esto procedemos de la siguiente manera: Dividamos el intervalo $[0, 4]$ en subintervalos de longitud 1. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



$$\text{Área} \approx f\left(\frac{1}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{3}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{5}{2}\right)\cdot 1 + f\left(\frac{7}{2}\right)\cdot 1 = \sum_{k=1}^{4} f(x_k^*)\,\Delta x = 21,$$

(donde Δx es el medida de la base del rectángulo y x_k^* es el punto medio del subintervalo)

Ahora, dividamos el intervalo $[0,4]$ en subintervalos de longitud $\frac{1}{2}$. Sumemos las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos y altura igual al valor de la función en el punto medio del subintervalo.



$$\text{Área} \approx f\left(\frac{1}{4}\right)\cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{3}{4}\right)\cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{5}{4}\right)\cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{7}{4}\right)\cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{9}{4}\right)\cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{11}{4}\right)\cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{13}{4}\right)\cdot \frac{1}{2} + f\left(\frac{15}{4}\right)\cdot \frac{1}{2}$$

$$\approx \sum_{k=1}^{8} f(x_k^*)\,\Delta x = 21{,}25$$

Es claro que si queremos mejorar la aproximación debemos aumentar el número de subintervalos, achicando la longitud de cada uno de ellos. Pero, ¿cuál es el valor exacto? ¿podemos calcularlo prescindiendo del procedimiento anterior?. La respuesta a ambas preguntas es si.

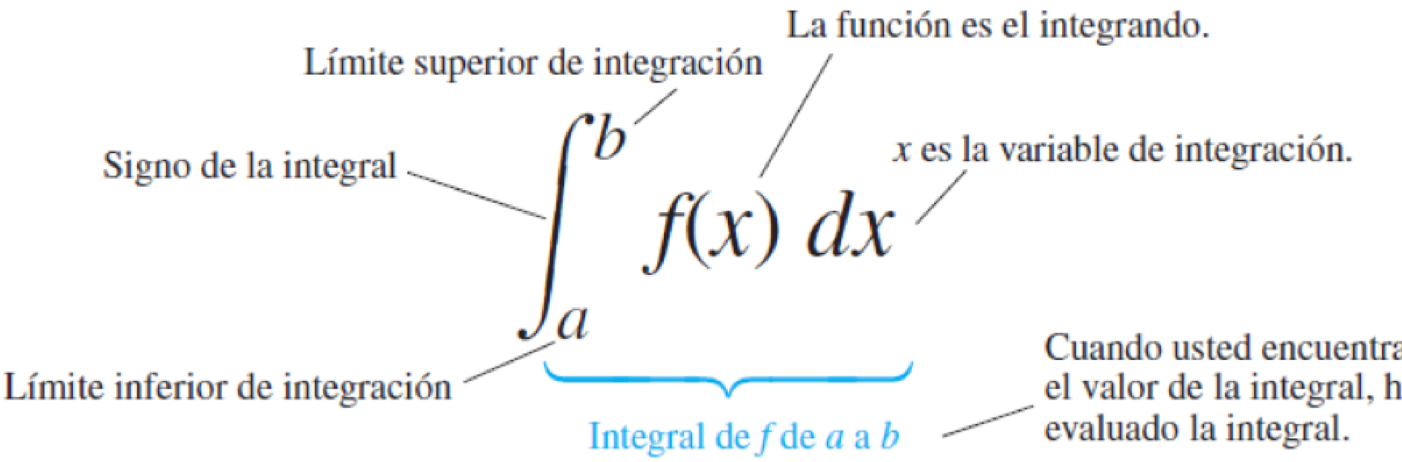
Con la idea de limite podemos tomar subintervalos tan pequeños como se quiera y luego hacer la suma de las áreas de los rectángulos que tienen base en cada uno de esos subintervalos:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x = \text{Área.}$$

Definición En general si se tiene una función f, continua y definida en un intervalo $[a,b]$. Si se divide el intervalo en subintervalos de igual ancho Δx, luego se toman los puntos medios de esos intervalos, $x_1^*, x_2^*, \ldots x_n^*$. Entonces **la integral definida de f, desde a hasta b** es,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$$

- Leibniz introdujo el símbolo $\int$ y se llama signo de integral. Es una S alargada y se eligió debido a que una integral es un límite de sumas.
- La suma $\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*)\,\Delta x$ se llama **suma de Riemann**.
- Sabemos que si f es positiva, entonces la suma de Riemann puede interpretarse como una suma de áreas de los rectángulos.



Teorema Si f es continua en $[a,b]$, o si f tiene finitas discontinuidades, entonces f es integrable en $[a,b]$ es decir, la integral definida existe.

Ahora daremos algunas propiedades básicas de las integrales que ayudarán a evaluarlas con mayor facilidad.

5.1.1. Propiedades de la integral definida:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones integrables en $[a,b]$ y sea k una constante, entonces:

1. Intervalo de ancho cero: $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0.$

2. Orden de integración: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx.$

3. Linealidad: $\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$
$$\int_a^b k\cdot f(x)\,dx = k\cdot\int_a^b f(x)\,dx$$
.

4. Aditividad en el intervalo : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx.$

5. Comparación : Si para todo $x\in[a,b]$, $\quad f(x)\le g(x)$ entonces $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx.$

6. Acotamiento: Si $M = \max[f]$ en $[a,b]$ y $m = \min[f]$ en $[a,b]$ entonces
$m\,(b-a) \le \displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le M\,(b-a).$

Ejemplo 1: Supongamos que $\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 5,\qquad \int_1^4 f(x)\,dx = -2$ y $\displaystyle\int_{-1}^{1} h(x)\,dx = 7.$

Calcular usando las propiedades: a) $\displaystyle\int_4^1 f(x)\,dx$, b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3\,h(x)+2\,f(x))\,dx$, c) $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx.$

a) $\displaystyle\int_4^1 f(x)\,dx = -\int_1^4 f(x)\,dx = 2$ (por propiedad 2).

b) $\displaystyle\int_{-1}^{1} (3\,h(x)+2\,f(x))\,dx = 3\int_{-1}^{1} h(x) + 2\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = 3(7)+2(5) = 31$ (por propiedad 3).

c) $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(x)\,dx = \int_{-1}^{1} f(x)\,dx + \int_1^4 f(x)\,dx = 5+(-2) = 3$ (por propiedad 4).

5.1.2. Ejercicios:

1. Si $\displaystyle\int_0^9 f(x)\,dx = 37,\ \int_0^9 g(x)\,dx = 16$ encontrar el valor de $\displaystyle\int_0^9 \left[2\,f(x) - \frac{1}{4}\,g(x)\right]dx.$

2. Si $\displaystyle\int_{-2}^{3} h(x)\,dx = 12$ y $\displaystyle\int_0^3 h(x)\,dx = 3$, hallar el valor de $\displaystyle\int_{-2}^{0} h(x)\,dx.$

3. Si $\displaystyle\int_{-1}^{3} f(t)\,dt = 3$ y $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(t)\,dt = 7$, determinar el valor de a) $\displaystyle\int_3^4 f(t)\,dt$ y b) $\displaystyle\int_{-1}^{4} f(z)\,dz.$

5.2. ¿Cómo se calculan las integrales?

Nos preguntamos ahora, si cada vez que se tenga que calcular una integral definida deberemos calcular el limite de las sumas de Riemann? La respuesta es no siempre. Para obtener una forma de calcular las integrales definidas de manera más directa, vamos a utilizar el Teorema Fundamental del cálculo, que relaciona la integración y la derivación, y nos permite calcular integrales mediante una primitiva de la función, integrando en vez de tener que tomar límites de sumas de Riemann.

Definición Si f es una función integrable en el intervalo $[a,b]$, sea $g(x)$ una nueva función que a cada $x \in [a,b]$ le asigna la integral de f desde a hasta x, es decir

$$g(x) = \int_a^x f(t)\,dt, \quad x \in [a,b].$$

A ésta función g la llamamos **función integral de** f en $[a,b]$

En el siguiente teorema podremos definir la derivada de $g(x)$ y ello nos conducirá a resolver el problema del cálculo de la integral definida.

Teorema fundamental del cálculo
Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$, entonces la función g definida por $g(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ es continua en $[a,b]$ y derivable en (a,b) y

$$g'(x) = f(x), \quad \text{para todo} \quad x \in (a,b).$$

Definición Una función F se llama **primitiva** de una función f en $[a,b]$, si

$$F'(x) = f(x) \quad \text{para todo valor} \quad x \in [a,b].$$

También suele nombrarse como antiderivada de la función f .

La defnición de función integral y el teorema fundamental del cálculo explican esta sencilla forma de calcular una integral, mediante la antiderivada.

En general, si una función F es la primitiva de f y si G está definida por $G(x) = F(x) + c$, donde c es una constante, entonces $G'(x) = F'(x) = f(x)$ con lo cual G también es una primitiva de f. Podemos concluir que si tenemos dos primitivas de f difieren en una constante.

Ejemplos

$F(x) = x$ es una primitiva de $f(x) = 1$, ya que $F'(x) = f(x)$.

La función $H(x) = sen(x)$ es una primitiva de $f(x) = \cos(x)$.

El siguiente resultado describe cómo evaluar integrales definidas hallando y evaluando una primitiva en los límites de integración superior e inferior.

Regla de Barrow Si f es una función continua en el intervalo $[a,b]$ y F es una primitiva de f , entonces

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a).$$

Ejemplos

- $\int_{-1}^{3} 1\, dx = x\Big|_{-1}^{3} = (3) - (-1) = 3 + 1 = 4.$
- $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} cos(x)\, dx = sen(x)\Big|_{0}^{\frac{\pi}{2}} = sen(\frac{\pi}{2}) - sen(0) = 1 - 0 = 1.$

5.3. Integral indefinida

En esta sección se presenta una notación para la primitiva, se repasan las fórmulas de primitivas conocidas y se usan para evaluar integrales definidas.

Definición Se denomina **integral indefinida** a

$$\int f(x)\, dx = F(x) + c,$$

y significa que $F'(x) = f(x)$.

Vemos que el resultado de ésta integral es una función y no un número como en las integrales definidas.

Presentamos ahora una lista de integrales de funciones elementales que serán útiles para el cálculo de integrales de funciones más complejas. Sea c una constante cualquiera:

- $\int dx = x + c.$
- $\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c$, con $n \in \mathbb{R}$ y $n \neq -1$.
- $\int \frac{1}{x}\, dx = ln(|x|) + c.$
- $\int e^x\, dx = e^x + c.$
- $\int sen(x)\, dx = -\cos(x) + c.$
- $\int \cos(x)\, dx = sen(x) + c.$

Importante Las propiedades mencionadas para la integrales definidas también valen para las integrales indefinidas. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplos 1) Calcular las siguientes integrales.

a) $\int (\sqrt{x} + x^{2/3})\, dx = \int x^{1/2}\, dx + \int x^{2/3}\, dx = \frac{x^{3/2}}{3/2} + \frac{x^{5/3}}{5/3} + c = \frac{2x^{3/2}}{3} + \frac{3x^{5/3}}{5} + c.$

b) $\int (x^2 + 2\, e^x)\, dx = \int x^2\, dx + 2\int e^x\, dx = \frac{x^3}{3} + 2\, e^x + c$ (por propiedad 3).

c) $\int \left(\pi\, sen(x) - \frac{5}{x}\right) dx = \pi \int sen(x)\, dx - 5\int \frac{1}{x}\, dx = -\pi\, \cos(x) - 5\, \ln(|x|) + c$ (por propiedad 3).

2) Evaluar las siguientes integrales usando regla de Barrow:

a) $\int_0^3 (x^3 - 6x)\,dx = \left(\frac{x^4}{4} - 6\frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^3 = \left(\frac{3^4}{4} - 3(3)^2\right) - \left(\frac{0^4}{4} - 3(0)^2\right) = (\frac{81}{4} - 27) - (0-0) = \frac{-27}{4}$

b) $\int_{-\pi}^{0} (e^x - \cos(x))\,dx = (e^x - sen(x))\Big|_{-\pi}^{0} = \left(e^0 - sen(0)\right) - (e^{-\pi} - sen(-\pi)) = (1-0) - (e^{-\pi} - 0) = 1 - e^{-\pi}.$

5.3.1. Ejercicios:

Calcular las siguientes integrales utilizando las propiedades y en caso de ser posible usando la regla de Barrow.

1. $\int_{-2}^{3} 2x - 1\;dx$
2. $\int x^2 + 2x + 8\;dx$
3. $\int_0^{2\pi} \sin(x) + x\;dx$
4. $\int_0^4 2e^x + 3x^4\;dx$
5. $\int 3\frac{1}{x} + 2e^x\;dx$
6. $\int \cos(x) + \operatorname{sen}(x) + 2x^{\frac{3}{5}}\;dx$
7. $\int_{-5}^{1} x^2 + 2x + 8\;dx$
8. $\int x - x^{\frac{2}{5}} + 3e^x - cos(x)\;dx$

5.4. Técnicas de Integración

A continuación se indican algunas técnicas de Integración que nos permitirán encontrar las integrales de una clase muy amplia de funciones.

Todas las técnicas tienen como objetivo reducir la integral buscada a una integral ya conocida o inmediata, más sencilla.

5.4.1. Integración por partes

Este método nos permitirá resolver integrales de funciones que pueden expresarse como un producto de una función por la derivada de otra.

Sean u y v dos funciones continuas, derivables y sus derivadas du y dv son integrables, entonces,

Si $u = f(x)$, $v = g(x)$, y luego $du = f'(x)dx$, y $dv = g'(x)dx$:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) \;-\; \int f'(x)\, g(x)\, dx$$

o escrito en términos de u y v

$$\int u\; dv = uv - \int v\; du$$

Recuerden siempre que si la integral es definida vamos a encontrar el valor de la integral, y si no tendremos que sumar c para dar como resultado las infinitas soluciones.

Ejemplo: Calcular $\int x\; e^x dx$. Tenemos:

si elegimos de esta forma:

$$u = x \quad dv = e^x dx$$

y luego derivamos u e integramos dv obtenemos:

$$du = 1dx \quad v = \int e^x dx = e^x$$

Luego aplicando la fórmula nos queda:

$$\int x\; e^x dx = x\; e^x - \int e^x\; dx = x\; e^x - e^x + c$$

Ejemplo: Calcular $\int x\; ln(x)dx$. Observemos la elección de u y dv ya que si lo escogemos al revés no es posible resolverlo (deténganse a pensar eso un momento).

si elegimos de esta forma:

$$u = ln(x) \quad dv = xdx$$

y luego derivamos u e integramos dv obtenemos:

$$du = \frac{1}{x}dx \quad v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$$

$$\int x\; ln(x)dx = ln(x)\; \frac{x^2}{2} - \int \frac{x^2}{2}\; \frac{1}{x}dx =$$

$$ln(x)\; \frac{x^2}{2} - \int \frac{x}{2}dx = ln(x)\; \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\int xdx =$$

$$ln(x)\; \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{x^2}{2} + c = \frac{x^2}{2}\left(ln(x) - \frac{1}{2}\right) + c$$

5.4.2. Integración por sustitución

Como indica su nombre, este método de integración consiste en la aplicación de un cambio de variable para simplificar el integrando.

Lo importante del método es escoger un cambio útil, ya que, en caso contrario, la integral resultante puede ser de mayor dificultad.

Si sabemos que $F(x)$ es la primitiva de $f(x)$ y tenemos que calcular $\int f(g(x))g'(x)dx$, debemos identificar quién es $g(x)$ y su derivada para hacer el cambio de variables.

De esta manera haciendo $u = g(x)$, sabemos que $du = g'(x)dx$, con lo cual la integral que nos queda por resolver es :

$$\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = \int F'(u)du = F(u) + c = F(g(x)) + c$$

Ejemplo: Calcular $\int (x^4 + x^2)^4(4x^3 + 2x)dx$.

Si elegimos correctamente $u = x^4 + x^2$ veremos que $du = 4x^3 + 2x\ dx$. Con lo cual nos queda:

$$\int (x^4 + x^2)^4(4x^3 + 2x)dx = \int u^4 du = \frac{u^5}{5} + c = \frac{(x^4 + x^2)^5}{5} + c$$

Ejemplo: Si en cambio tenemos que calcular una integral por sustitución definida en un intervalo, lo mejor es proceder como el ejemplo anterior y en el último paso calculamos el valor de la integral aplicando la regla de Barrow.

Calcular $\int_2^5 e^{2x^2+x}\ (4x+1)\ dx$. Sea $u = 2x^2 + x$ y $du = 4x + 1dx$.

$$\int e^{2x^2+x}(4x+1)dx = \int e^u du = e^u + c = e^{2x^2+x}$$

Luego de este procedimiento aplicamos Barrow.

$$\int_2^5 e^{2x^2+x}\ (4x+1)\ dx = (e^{2x^2+x})\Big|_2^5 = e^{2(2)^2+(2)} - e^{2(5)^2+(5)} = e^{10} - e^{55}$$

5.4.3. Ejercicios

Calcular las siguientes integrales utilizando los métodos vistos.

1. $\int (3x^4 + 5x^2 + 8)^4(12x^3 + 10x)dx$
2. $\int x\ cos(x)dx$
3. $\int x^3 ln(x)dx$
4. $\int cos(5x)5dx$
5. $\int \frac{2 + e^x}{e^x + 2x}dx$

6. $\int x\sqrt{x-1}dx$

7. $\int_0^8 \frac{1}{\sqrt{x+1}}dx$

8. $\int_0^{2\pi} x\, sen(x)dx$

5.5. Área entre curvas

Una de las aplicaciones del cálculo de integrales definidas es el cálculo de áreas de regiones acotadas del plano delimitadas por gráficos de funciones.

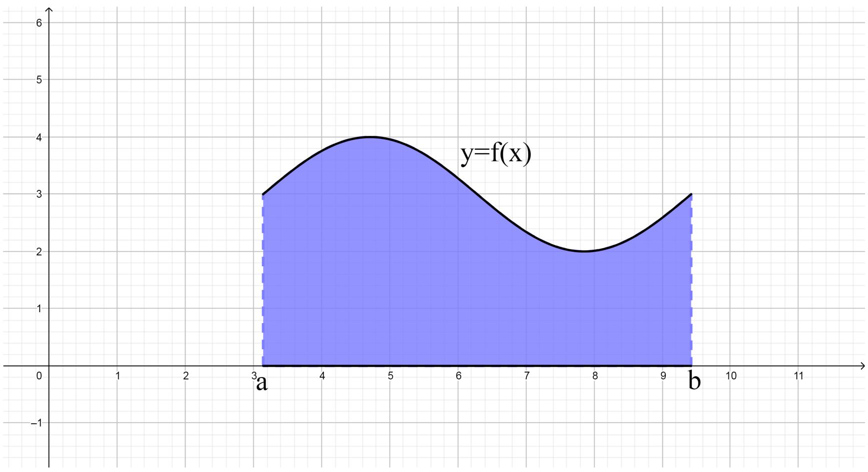
5.5.1. Área entre el gráfico de una función y el eje x

Si la función está por encima del eje:

Procedemos como vimos en la sección anterior. Nos interesa calcular el área comprendida entre el gráfico de una función f y el eje x entre $x = a$ y $x = b$, sabiendo que f es integrable en $[a;b]$.

Definición Si la función f es positiva o cero en el intervalo $[a;b]$, el área comprendida entre el eje x y el gráfico de la función entre los límites a y b es :

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

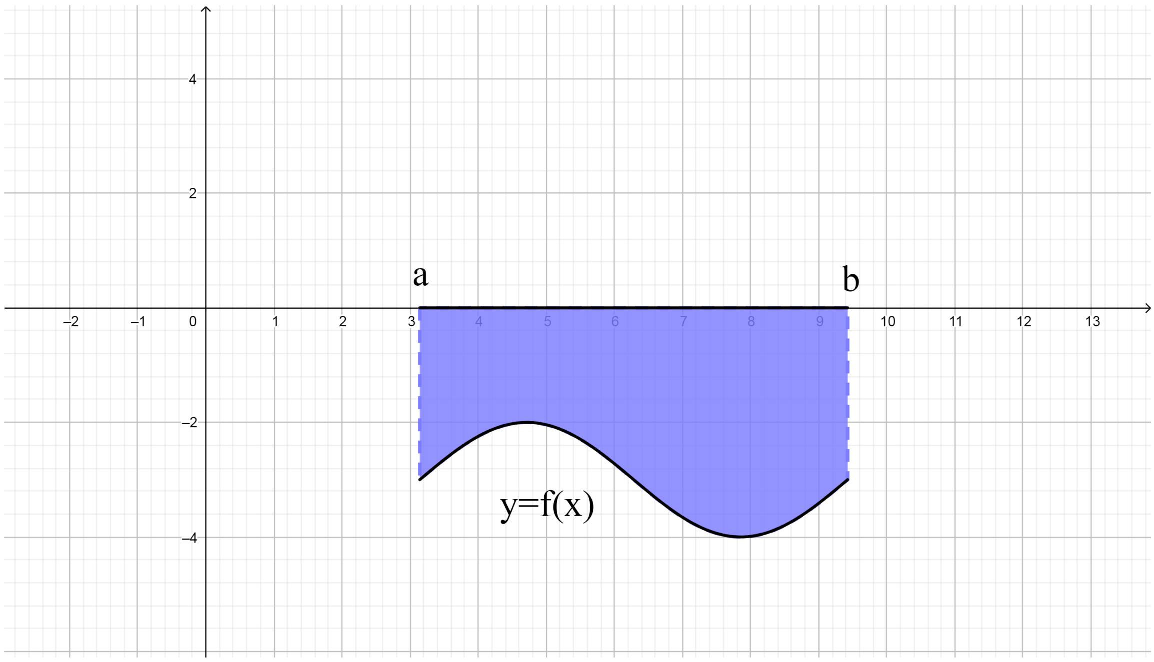


Si la función está por debajo del eje:

En esta situación, la integral definida da el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f pero con el signo cambiado (es decir, da negativo). Por lo tanto, para calcular el área debemos cambiar el signo de la integral.

Definición Si la función f es negativa o cero en el intervalo $[a;b]$, el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f entre los límites a y b es:

$$A = -\int_a^b f(x)dx$$

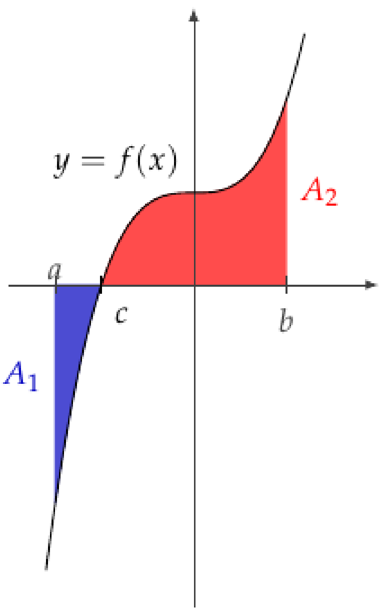


Si la función está por encima y por debajo del eje, es positiva y negativa:

En esta situación se deben estudiar los cambios de signo de la función en el intervalo considerado. Debemos descomponer la región en dos áreas que ya sabemos calcular: el procedimiento es sencillo, sólo tenemos que identificar los ceros de la función. En particular si c es el punto del intervalo $[a;b]$ donde la función vale 0, entonces, como podemos ver en el gráfico siguiente, $f(x) \leq 0$ para todo $x \in [a;c]$ y $f(x) \geq 0$ para todo $x \in [c;b]$.

Definición Si la función f es negativa en $[a,c]$ y positiva en $[c,b]$, el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función f entre los límites a y b es la suma de las áreas A_1 y A_2:

$$A = A_1 + A_2 = -\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

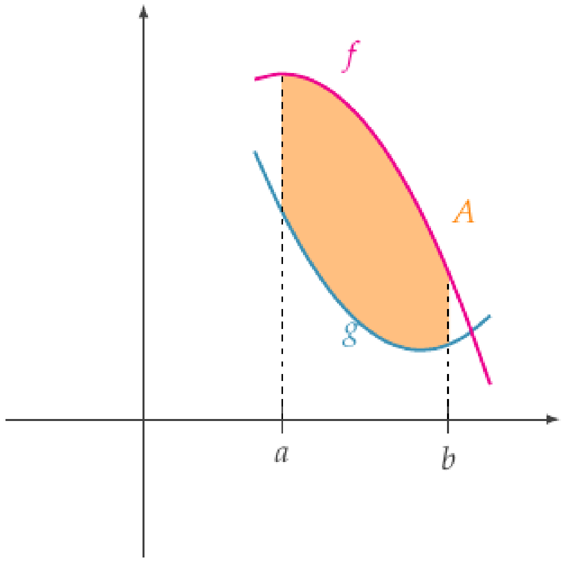


5.5.2. Área entre los gráficos de dos funciones

Nos interesa ahora calcular el área de una región comprendida entre los gráficos de dos funciones integrables f y g con $x \in [a, b]$.

Definición Si las funciones f y g cumplen que $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [a; b]$, el área de la región comprendida entre los gráficos es:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$$



Llamaremos para facilitar el procedimiento: *Techo* a la función que se encuentra arriba y *Piso* a la que se encuentra abajo. Por lo tanto lo que debemos hacer es identificar en cada intervalo quién es el techo y quién el piso para hacer:

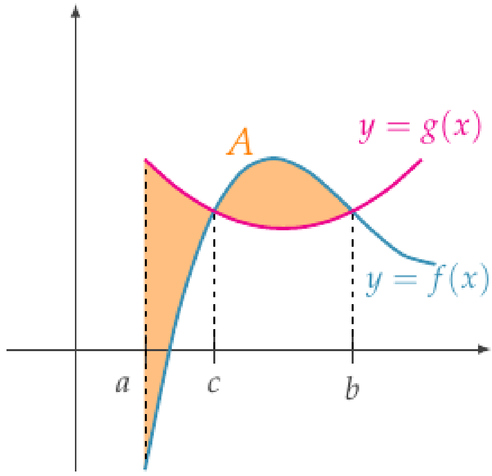
$$A = \int_a^b (TECHO - PISO)\, dx$$

Si en el intervalo que debemos calcular el área entre los gráficos de dos funciones, éstas se intersecan, tenemos que partir el intervalo tantas veces como intersecciones haya entre las funciones.

Definición Si las funciones f y g cumplen que $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in [a; c]$, y $f(x) \geq g(x)$ para todo $x \in [c; b]$ el área de la región comprendida entre f y g en $[a; b]$ es:

$$A = \int_a^c (g(x) - f(x))dx + \int_c^b (f(x) - g(x))dx$$

Pues en $[a; c]$, g es el *Techo* y f el *Piso*. En cambio en $[c; b]$, f es el *Techo* y g el *Piso*.



Ejemplo: Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 3x^2 - 2$ y $g(x) = 2x - 1$.

- Lo que primero debemos hacer es identificar el intervalo en donde debemos calcular el área, esto lo hacemos analizando en dónde se cruzan las funciones, o sea en dónde $f(x) = g(x)$.

$$3x^2 - 2 = 2x - 1 \longrightarrow 3x^2 - 2x - 1 = 0 \longrightarrow x = 1 \ \text{ó}\ x = -\frac{1}{3}$$

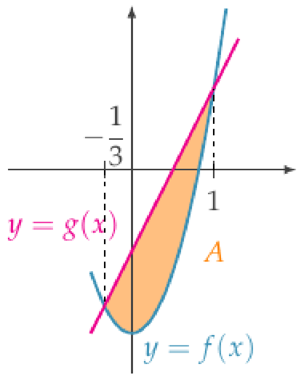
Con lo cual debemos calcular el área en el intervalo $[-\frac{1}{3}, 1]$.

Ahora bien, ¿quién es el techo y quien el piso en ese intervalo?. Para eso tomamos un VP (valor de prueba) del intervalo y vemos qué función está por encima para identificar el techo y el piso.

- Lo segundo entonces es identificar el techo y el piso:

$$VP = 0 \longrightarrow f(0) = -2,\ g(0) = -1$$

Con lo cual : $Techo = g(x)$ y $Piso = f(x)$



- Ahora lo tercero y último es calcular el valor del área en el intervalo que calculamos en el primer paso $[-\frac{1}{3}, 1]$:

$$A = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (TECHO - PISO)\ dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} (g(x) - f(x))\ dx =$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1} 2x - 1 - (3x^2 - 2)dx = \int_{-\frac{1}{3}}^{1} 2x - 1 - 3x^2 + 2dx =$$

$$\int_{-\frac{1}{3}}^{1} (-3x^2 + 2x + 1)dx = (-3\frac{x^3}{3} + 2\frac{x^2}{2} + x)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} =$$

$$\left(-x^3 + x^2 + x\right)\Big|_{-\frac{1}{3}}^{1} = \left(-1^3 + 1^2 + 1\right) - \left(-\left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)\right) = \frac{32}{27}$$

Con lo cual el área de la región es $A = \frac{32}{27}$.

Ejemplo: Calcular el área de la región encerrada entre los gráficos de $f(x) = 4x^3$ y $g(x) = 4x$.

- Igualamos las funciones para encontrar el o los intervalos de integración:

$$4x^3 = 4x \to 4x^3 - 4x = 0 \to 4x(x^2 - 1) = 0 \to x = 0 \text{ ó } x^2 = 1 \to x = 0 \text{ ó } x = -1 \text{ ó } x = 1$$

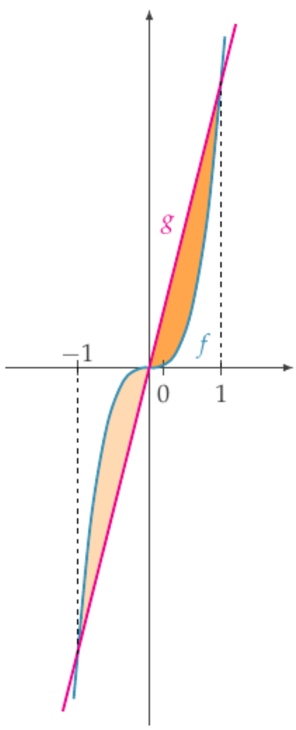
Con lo cual los intervalos son $[-1, 0] \cup [0, 1]$.

- Ahora tomamos VP en cada intervalo para identificar techo y piso.

En $[-1, 0] \to VP = -\frac{1}{2} \to f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{2}$ y $g(-\frac{1}{2}) = -2 \to Techo = f(x)$ y $Piso = g(x)$.

En $[0, 1] \to VP = \frac{1}{2} \to f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$ y $g(\frac{1}{2}) = 2 \to Techo = g(x)$ y $Piso = f(x)$.

Observemos lo analizado en la siguiente figura:



- Ahora por último debemos calcular el valor del área como la suma de ambas áreas en el intervalo $[-1,0] \cup [0,1]$:

$$A = \int_{-1}^{0} (TECHO - PISO)\, dx + \int_{0}^{1} (TECHO - PISO)\, dx = \int_{-1}^{0} (f(x) - g(x))\, dx + \int_{0}^{1} (g(x) - f(x)) dx =$$

$$\int_{-1}^{0} (4x^3 - 4x)\, dx + \int_{0}^{1} (4x - 4x^3) dx = (x^4 - 2x^2)\Big|_{-1}^{0} + (2x^2 - x^4)\Big|_{0}^{1} = -((-1)^4 - 2(-1)^2) + (2(1)^2 - (1)^4) = 2$$

Con lo cual el área de la región es $A = A_1 + A_2 = 2$.

5.5.3. Ejercicios

1. Calcular el área entre $f(x) = x^2$ y $g(x) = -x^2 + 4$.
2. Calcular el área entre $f(x) = x^4$ y $g(x) = x$.
3. Calcular el área entre $f(x) = x^3 + \frac{1}{4}x$ y $g(x) = \frac{1}{2}x$.
4. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = -x^2 - 1$ entre $-2 \leq x \leq 1$.
5. Calcular el área de la región comprendida entre el eje x y el gráfico de la función $f(x) = x^2 + 2x - 3$ entre $-1 \leq x \leq 2$.
6. Calcular el área de la región comprendida entre los gráficos de $f(x) = x^2 + 1$ y $g(x) = 2x^2$ para $0 \leq x \leq 2$.