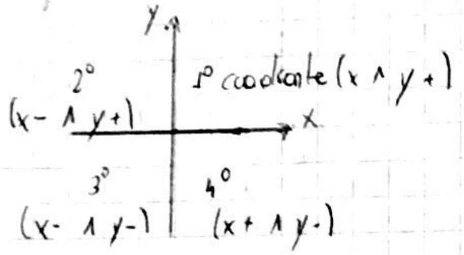
①

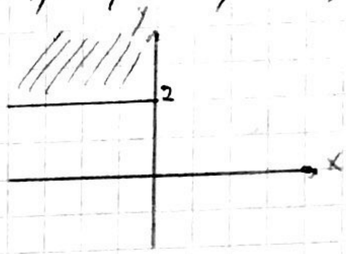
Parcial 27/4   Módulo 1 y 2 hasta p 27.

Capítulo 1: GEOMETRIA.



$p:(x, y)$ — Absisa (x), Ordenada (y)

Ej: $A\{(x,y): (x,y) \in \mathbb{R}^2$ y $x<0$ y $y>2\}$



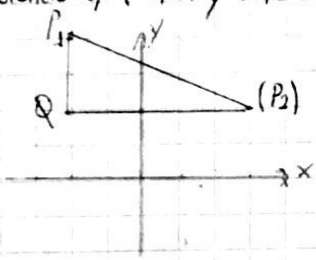
DISTANCIA E/ DOS PTOS:

$$d=(p_1, p_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$

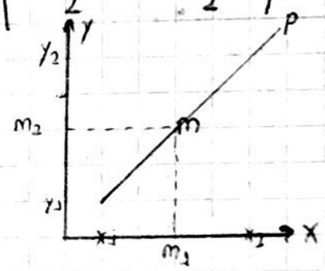
Ejemplo: distancia e/ $(-2,4)$ y $(3,2)$

$$d=(P_1, P_2) = \sqrt{(3-(-2))^2+(2-4)^2}$$

$$d = \sqrt{5^2+(-2)^2} = \sqrt{25+4} = \sqrt{29}$$



• Punto medio e/ $P_1=(x_1,y_1)$ y $P_2=(x_2,y_2)$ está dado por $m=\left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}\right)$



RECTAS EN EL PLANO:

1- $\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{x-x_1}$ → Ecuac de la recta q' pasa x 2 ptos.

2- $Ax+By+C=0$ → Ecuac gral de la recta. Implícita

3- $y=mx+b$ → Forma explícita → $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$ (Pendiente de la recta)

$b= \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1} \cdot -x_1 + y_1$ = Ordenada al origen de la recta L

4- $y-y_1 = m(x-x_1)$ → Ecuac de la recta c/pendiente en un pto.

*Pendiente de una recta: inclinac de un elemento lineal

* Tangente: recta q' se toca a la curva en un solo pto.

• Todas las ecuaciones de la recta son =.

Scanned with CamScanner

- Hallar la ecuax explícita q' pasa por el Pto. $P_1=(1,2)$ y $P_2=(-2,8)$

Hay 2 maneras: 1- Usamos la ecuax de la recta q' pasa por 2 ptos.

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{8-2}{-2-1}=\frac{y-2}{x-1}$$

$$\frac{6}{-3}\cdot(x-1)=y-2 \quad \text{Despejamos}$$

$$y=-2x+4$$

2- Usamos la ecuax explícita de la recta sabiendo q' los 2 ptos deben satisfacer la ecuax.

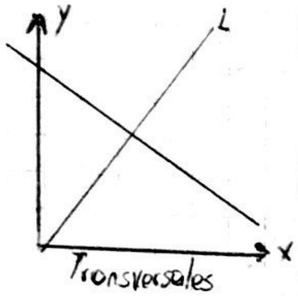
Reemplazamos en la ecuax $y=mx+b$ $\quad 2=m1+b \quad 8=m(-2)+b$ $\qquad m=-2 \quad b=4$

$b=2-m$ $\qquad 8=m(-2)+2m$

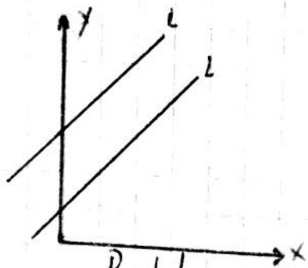
$b=2+2$ $\qquad 8-2=3m$

$b=4$ $\qquad \frac{6}{-3}=m \qquad m=-2$

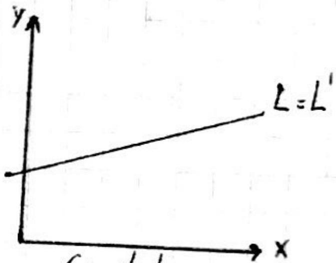
POSICION RELATIVA DE LAS RECTAS



Transversales



Parabelas



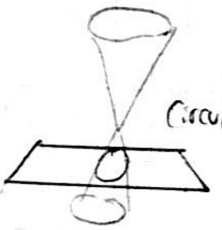
Coincidente

Propiedades: $\cdot$ $m=m$ L y L' paralelos
$\cdot$ ≠ pendientes transversales
$\cdot$ $b\neq b'$ paralelos

$\cdot$ $b=b'$ coincidentes

$\cdot$ L y L' perpendiculares si y solo si $m\cdot m'=-1$

CÓNICAS: curvas resultantes de ≠ intersecciones el cono y plano



Circulo

Parábola

Circulo: ptos. del plano que equidistan de un pto fijo. llamado centro. El radio es la distancia de cualquier punto de la circunferencia y el centro

Si llamamos $C(\alpha,\beta)$ al centro, r al radio y $P(x,y)$ a un pto. genérico, por definix es

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=r^2 \quad \text{ecuación de la circunferencia}$$

Centro $=(1,4)$ y pto. $(2,\sqrt{3}+4)$ $\qquad (2-1)^2+(\sqrt{3}+4-4)^2=r^2$

$$1^2+(\sqrt{3})^2=r^2$$

$$1+3=r^2=4$$

$$r=2$$

Scanned with CamScanner

②

Completación de cuadrados $h(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=h.r^2$

$hx-h2x\alpha+h\alpha^2+hy^2-h^2y\beta+h\beta^2=hr^2$

· Si $(\alpha,\beta)=(2,3)$ $r=2$ $(x-2)^2+(y-3)^2=4$
$h=3$

$3x^2-3.2x2+3.2^2+3y^2-3.2y3+3.3^2=3.4$

$3x^2-12x+3y^2-18y+27=0$ → completamos cuadrados, comparando con la ecuación desarrollada
$3(x^2-4x+y^2-6y+9)=0$

$x^2-\underbrace{2x\alpha}+\alpha^2+y^2-\underbrace{2y\beta}+\beta^2=r^2$

$x^2-4x+\alpha^2+y^2-6y+\beta^2=-9+\alpha^2+b^2$

$\underline{x^2-4x+4}+\underline{y^2-6y+9}=-9+2^2+3^2$

$(x-2)^2+(y-3)^2=4$

$a=-2\alpha=-4$
$\alpha=-4/-2$
$\alpha=2$

$b=-2\beta=-6$
$\beta=-6/-2$
$\beta=3$

PARÁBOLAS: ptos. de un plano q' equidistan en un pto fijo (foco) y de una recta fija (directriz).

Directriz: línea q' determina las condiciones de generac de otra línea

Foco: pto. en torno al cual se mantienen constantes d/dos distancias c/ totos los ptos. de la misma.

· La recta perpendicular a la directriz es el eje de la parábola
· Vértice: pto. en el q' se cortan la parábola c/el eje
· Distancia e/ F y V = a distancia V y D
· C: distancia del vértice al foco y del vértice a la directriz.

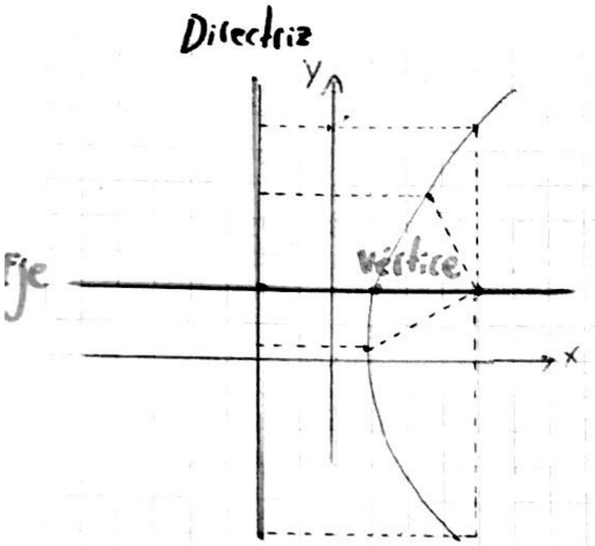
(α,β) vértice: $F=(\alpha+c,\beta)$ $D=(x=\alpha,c)$

$(y-\beta)^2=4c(x-\alpha)$ → Ecuac parábola c/ eje focal paralelo al eje x

$(x-\alpha)^2=4c(y-\beta)$ → " eje y.

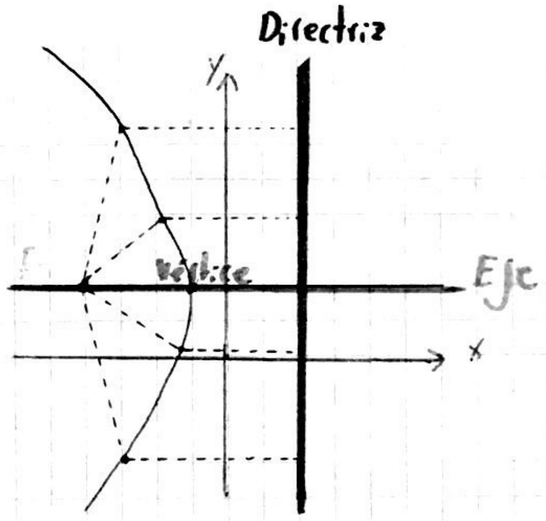
· Si la parábola tiene eje paralelo a **x** y es signo de **C** es + entonces **⊂**, si es − es **⊃**

· " **y** y C es + es **∪**, si es −, es **∩**



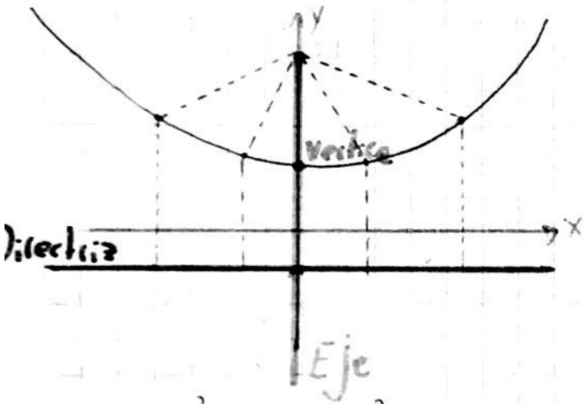
$(y-\beta)^2 = 4c(x-a)$

$\downarrow c=+$



$(y-\beta)^2 = -(4c).(x-a)$

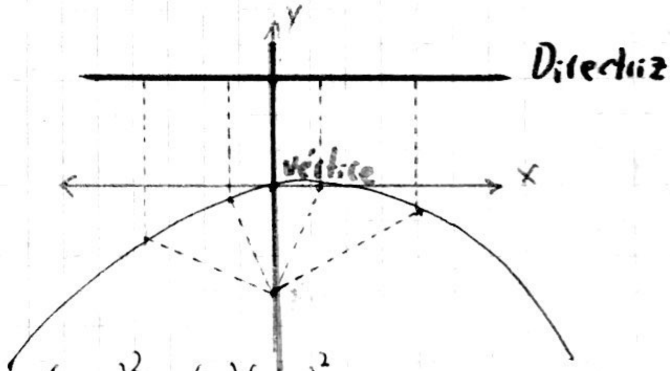
$\downarrow c=-$



$(x-a)^2 = 4c(y-\beta)^2$

$\downarrow$

$c=+$



$(x-a)^2 = -(4c)(y-\beta)^2$

$\downarrow c=-$

Completación de cuadrados: 1° $(y-\beta)^2 = 4c(x-a) = y^2-2y\beta+\beta^2 = 4cx-4ca$

2° $(x-a)^2 = 4c(y-\beta) = x^2-2xa+a^2 = 4cy-4c\beta$

$-2\beta=-4$

$\beta=-4/-2 \quad \beta=2$

$y^2-2y\beta+\beta^2 = 4cx-4ca$

$y^2-4y+2^2 = 16x-20+2^2$

$y^2-4y+4 = 16x-20+4$ } Factor común

$(y-2)^2 = 16(x-1)$

$V=(2;2) \quad c=4$

$4c=16$

$c=16/4$

$c=4$

③ I elem. q' se relacionan c/ A.

(x, y) → codominio
↓
Dominio

Capitulo 2: DEMOSTRACIONES, CONJUNTOS Y FUNCIONES

Axiomas: proposic asumida dentro de un cuerpo teórico sobre lo cual otros consen otros razonamientos.

Conjetura: enunciado q' no ha sido demostrado.

Teorema: conjetura demostrada.

Demostraciones: los mtdos. validos en matemática son aquellos q' se pueden demostrar los enunciados son proposiciones, se afirma algo de todos o algunos elem. de un conjunto.

Si el enunciado es existencial, alcanzará en algunos casos c/ exhibir un individuo c/ las caract. q' dice el enunciado.

"Existen nº $\mathbb{Z}$ q' son primos" $\rightarrow (\exists x)\, p(x)$, siendo $p(x)$: x es primo y $U: \mathbb{Z}$

" universal, habrá q' probar q' c/u de los elem. cumple c/ lo afirmado

"Si un nº $\mathbb{Z}$ es par, su cuadrado es par" $(\forall x)(p(x) \rightarrow q(x))$

$p(x)$: x es par $q(x)$: x^2 es par $U: \mathbb{Z}$

Método directo.

- El enunciado tiene forma de condicional, hay q' identificar antecedente, consecuente, hipótesis, etc.
- Un condicional es falso sólo cuando el antecedente es V y el consecuente F
- "x es par" y el consecuente "x^2 es par" ?
  - $x = 2K$
  - $x^2 = (2K)^2$
  - $x^2 = 2K \cdot 2K$
  - $x^2 = 2(K2K)$ → K2K nº $\mathbb{Z}$ por ser multiplicado por un $\mathbb{Z}$

Método del absurdo.

- Se supone q' el enunciado es F p/ q' eso pase se supone q' el antecedente es V y el consecuente F y así llegaremos a un absurdo
- "x es par" "x^2 es par" $\neg(p \rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \neg q$
  - $x = 2K$: $x^2 = (2K)^2$: $x^2 = 2(K2K)$
- "x es par" y "x^2 es impar" → $x^2 = 2w+1$, x^2 impar Absurdo un nº no es par e impar.

Metodo del contrarreciproco

- Es hacer el metodo directo a la proposix contrarreciproca $p \to q \Leftrightarrow \neg q \to \neg p$

"$\underbrace{\text{Si el cuadrado de un n° } \mathbb{Z} \text{ es par}}_{p}$: $\underbrace{\text{el n° es par}}_{q}$"

"$\underbrace{\text{Si un n° no es par}}_{\neg q}$: $\underbrace{\text{su cuadrado no es par}}_{\neg p}$"

$x = 2h+1 : x^2 : (2h+1)^2$

$(2h)^2 + 2h + 1 : 4h^2 + 4h + 1$

$x^2 = 2(2h^2 + 2h) + 1$

CONJUNTOS, ELEMENTOS Y PERTENENCIA:

Un conjunto es una colex definida de obj. q gral' se representa c/ una letra mayúscula. Los elem. q lo integra se denominan elementos.

El conjunto q no tiene elem. se llama conjunto vacio "$\emptyset$"

Hay 2 maneras de determinar un conjunto: dando de manera explicita c/u de sus elementos (por extension) o mediante una propiedad a c/u de sus elementos (por comprenx)

Igualdad de conjuntos: 2 conjuntos son iguales si $(\forall x)(x \in A \leftrightarrow x \in B)$ donde $A = B$

Inclusion, subconjuntos: puede ocurrir q todo elemento de un conj. sea elemento de otro conjunto pero no reciproca

$$(\forall x)(x \in A \to x \in B)\ A \subseteq B \ / \ B \supseteq A$$

Conjunto universal: todos los conjuntos son subjonjuntos del conj. U

Propiedades
- $A = B$ si $A \subseteq B \wedge B \subseteq A$
- $A \subseteq A$
- $(A \subseteq B \wedge B \subseteq C) \to A \subseteq C$

Operaciones c/ conjuntos:
- Union: $A \cup B$ $A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$
- Interseccion: $A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$
  - Asociatividad: $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
  - Conmutividad: $A \cap B : B \cap A$
  - $A \subseteq B \leftrightarrow A \cap B = A$

*Si $A \wedge B$ son no vacios y $A \cap B = \emptyset$, son disjuntos → Ningún elem. en común

- Diferencia: $A - B : \{x : x \in A \wedge x \notin B\}$
  - $A - A : \emptyset$
  - $\emptyset - A : \emptyset$
  - $A - \emptyset : A$
  - $A - B : B - A = A : B$

• Complemento: $A^c = \{x : x \in U \wedge x \notin A\}$

- $(A^c)^c = A$
- $\emptyset^c = U$
- $U^c = \emptyset$
- $A \subseteq B \leftrightarrow B^c \subseteq A^c$

Propiedades combinando operaciones:

· Leyes distributivas
- $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
- $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

· Leyes de De Morgan:
- $(A \cap B)^c = A^c \cup B^c$
- $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

PRODUCTO CARTESIANO: Operax e/ conjuntos, sus elem. son pares ordenados

$$A \times B : \{(a,b) : (a \in A) \wedge (b \in B)\}$$

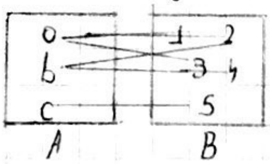
Ej: si $A: (1,3,5) \wedge B: \{w,1\}$ $A \times B: \{(1,w), (3,w), (5,w), (3,w), (5,w)$
$(1,1), (3,1), (5,1)\}$

Propiedades de los pdtos cartesianos:

- $(A \times B) \cup (C \times B) : (A \cup C) \times B$
- $(A \times B) \cap (C \times B) : (A \cap C) \times B$
- $(A \times B) \cup (A \times C) : A \times (B \cup C)$
- $(A \times B) \cap (A \times C) : A \times (B \cap C)$
- $(A \times B) - (C \times B) = (A - C) \times B$
- $(A \times B) - (A \times C) = A \times (B - C)$
- si $x \subseteq A$: $x \times B \subseteq A \times B$
- si $y \subseteq B$: $A_{xy} \subseteq A \times B$

RELACIONES BINARIAS: Es un subconjunto del pdto. carteciano R e/ A × B o BB

*Siempre me dan un gráfico o una caract. •



$A: \{0, b, c\}$

$B: \{1,2,3,4\}$

$R: \{(0,1), (0,2), (0,3), (b,2)$
$(b,4), (c,5)\}$

• $A: \{1,3,5\}$ $R(5): \{x \in B : 5Rx\}: \{w,1\}$

$B: \{w,1\}$

FUNCIONES: es un tipo de relax binaria.
Una relax binaria de A(Dominio) en B(Condominio) q cumple q
"a todo elemento de $a \in A$ le asigna un único elemento $b \in B$"

Una fx llamada F, q relaciona elementos de A c/ elementos de B, se indica con $F: A \to B$. El elemento único de B asignado a cada $a \in A$ se llama la imagen de a por $f: f(x)$ y se lee f de a

Dominio: valores q puede tomar la variable independiente x · y depende de x

Rango: independiente y

· Dominio horizontal Condominio vertical

Dominio: conjunto de A, indicado como Dom(f)

Condominio: conjunto B

Imagen de la fx: elem. de B q' se relaciona c/B

IGUALDAD DE Fx: si y solo si tienen el mismo Df y tienen la misma relax

$$f = g \iff Dom(f) = Dom(g) = D \wedge (\forall x) \cdot f(x) = g(x).$$

Capitulo 3: ÁLGEBRAS DE BOOLE

Estructura algebraica conjunto de 1 o + operaciones
- Binarias: se hacen c/2 elementos del conjunto
- Unarias: aplicada a un elemento del conj.

Estructura grupo
- Cerrado: p/cualquier par de nº, su operax da un nº $\mathbb{Z}$
- Asociativo: p/cualquier terna de nº el rtdo de sumarlos da lo mismo asociando los 2 1º o los 2º. $(a+b)+c = a+(b+c)$
- Existencia del neutro: único elemento tal q' sumado a cualquier otro da el mismo nº. $a+0=a$ / $a \cdot 1 = a$
- " " opuesto: ya q' p/ todo nº existe otro que sumado a él da el elem. neutro $a+(-a)=0$ / $0 \cdot 0 = 0$

Grupo conmutativo/abeliano: Asociativa en cualquier orden, da = rtdo $a+b = b+a$

Conjunto de partes: si C es un conjunto cualquiera, un conjunto de partes de C es el conjunto de elementos que son subconjuntos de C

$A = \{a, b, c\}$ $p(A) = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, \{a,b,c\}\}$

Estructura anillo: Terna ordenada de $(A, +, \cdot)$
- $(A, +)$ conmutativa
- " · " cerrada y asociativa
- " · " distributiva c/ respecto a la +

5

Algebra de Boole: EA formado por un conjunto, c/ al menos 2 elem. <>(1° y último elemento), designados de forma grol. c/ los símbolos 0/1/2 op. binarios: V supremo y Λ ínfimo y una operax unaria ' complemento.

B1	$x \vee y = y \vee x$	$x+y = y+x$
B2	$x \wedge y = y \wedge x$	$xy = yx$
B3	$x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$	$x(y+z) = (xy)+(xz)$
B4	$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$	$x+(yz) = (x+y)(x+z)$
B5	$x \vee 0 = x$	$x+0 = x$
B6	$x \wedge 1 = x$	$x1 = x$
B7	$x \vee x' = 1$	$x+x' = 1$
B8	$x \wedge x' = 0$	$xx' = 0$

$+ = \vee$

$\cdot = \wedge$

$\mathcal{B} = (B, \vee, \wedge, ', 0, 1)$

Dualidad

Teorema 1. ley de idempotencia
2. Ley de acotax
Teorema 3: ley de absorx
Teorema 4: involux
Teorema 5: ley de demorgan

Dualidad $x+x = x$
$xx = x$

	Teoría de conjuntos	Álgebra de Boole	Lógica
Igualdad	Unión $A \cup B$ Intersex $A \cap B$ Complemento A^c	Supremo $x+y$ Ínfimo xy Complemento x'	$p \vee q$ $p \wedge q$ $\sim p$
B1 B2 Conmutativa	$A \cup B = B \cup A$ $A \cap B = B \cap A$	$x+y = y+x$ $xy = yx$	$p \vee q = q \vee p$ $p \wedge q = q \wedge p$
B3 B4 Distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	$x(y+z) = xy + xz$ $x+(yz) = (x+y)(x+z)$	
B5 B6 Neutros	$A \cup \emptyset = A$ $A \cap U = A$	$x+0 = x$ $x1 = x$	
B7 B8 Complementos	$A \cup A' = U$ $A \cap A' = \emptyset$	$x+x' = 1$ $xx' = 0$	
Asociativa	$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$ $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$	$x+(y+z) = (x+y)+z$ $x(yz) = (xy)z$	$p \vee (q \vee r) = (p \vee q) \vee r$ $p \wedge (q \wedge r) = (p \wedge q) \wedge r$
Idempotencia	$A \cup A = A$ $A \cap A = A$	$x+x = x$ $xx = x$	$p \vee p = p$ $p \wedge p = p$
Acotax	$A \cup U = U$ $A \cap \emptyset = \emptyset$	$x+1 = 1$ $x0 = 0$	
Absorx	$A \cup (A \cap B) = A$ $A \cap (A \cup B) = A$	$x+(xy) = x$ $x(x+y) = x$	$p \vee (p \wedge q) = p$ $p \wedge (p \vee q) = p$
Involux	$(A^c)^c = A$	$(x')' = x$	$\sim(\sim p) = p$
de De Morgan	$(A \cup B)' = A' \cap B'$	$(x+y)' = x'y'$ $(xy)' = x'+y'$	$\sim(p \vee q) = \sim p \wedge \sim q$ $\sim(p \wedge q) = \sim p \vee \sim q$

- Si A tiene n elementos, P(A) tiene 2^n elementos

Capítulo 4: SUCESIONES

$S: \mathbb{N} \to A$, a_1, a_2, a_3 son elementos de A.

[redacted]

- Enumerox de los 1° términos $2, 4, 6, 8$
- Forma despriptiva Suces de pares
- Forma explícito $a_n = 2 \cdot n \quad n \geq 1$
- Forma recursiva de los 1° términos $a_1 = 2 \quad a_n = a_{n-1} + 2 \quad n \geq 2$

[redacted]

Sucesiones aritméticas: secuencia de números en la cual la diferencia entre términos consecutivos es constante. Se define único el 1° término.

Definición explícita: $a_n = a_1 + (n-1)d \quad a_1$

recursiva: $a_n = a_{n-1} + d \quad n \geq 2$

Sucesión geométricas: dsp del 1° término, los términos son encontrados al multiplicar el anterior por una razón.

Definix explícito: $a_n = a_1 \cdot r^{n-1} , n \geq 1$

recursivo: $a_n = a_{n-1} \cdot r , n \geq 2$

[redacted] sirve para sumar los términos de una susex.

Propiedades

1) $\sum_{h}^{n} (a_h \pm b_h) = \sum_{h}^{n} a_n \pm \sum_{h}^{n} b_n$

2) $\sum_{h}^{n} (c \cdot a_h) = c \cdot \sum_{h}^{n} a_n$

3) $\sum_{h}^{n} c = n \cdot c$

Suma de sucesiones aritméticas y geométricas

- Suma aritmética: 1) $\sum_{h}^{n} k = \dfrac{k \cdot (h_1 + n)}{2}$

2) $\sum_{h}^{n} 3k+2 = 3 \sum_{h}^{n} k + \sum_{h}^{n} 2 = 3 \dfrac{h \cdot (n+1)}{2} + n \cdot d =$

Suma geométrica $S_n = \sum_{h}^{h} = \dfrac{h \cdot (1 \cdot r^h)}{(1-r)}$