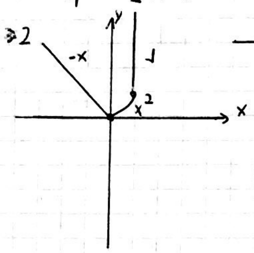
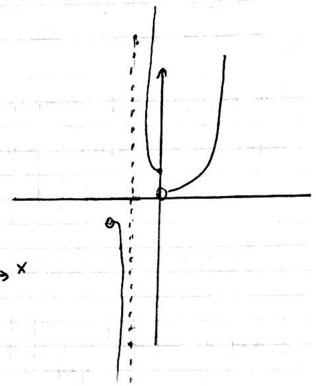
Matemática 2 - 1° parcial

Funx de a trozos:
Ejemplos:

$g(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x+1} & \text{si } -2 < x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 > x \geq 2 \end{cases}$ $Df = (-2,-1) \cup (-1,2]$

$f(x) = \begin{cases} -x & \text{si } x \leq 0 \\ x^2 & \text{si } 0 < x \leq 1 \\ 1 & \text{si } x > 1 \end{cases}$ $Df = (-\infty, +\infty)$





Op c/ fx: $f+g = (f+g)(x) = f(x) + g(x)$

$f-g = f(x) - g(x)$

$f \cdot g = f(x) \cdot g(x)$ $\quad x \in (D_1 \cap D_2)$.

$f/g = f(x)/g(x)$

Ej: $f(x) = x-3$ $D = (-\infty, +\infty)$ / $Df: [0, +\infty)$
$g(x) = \sqrt{x}$ $D: [0, +\infty)$

Composx de fx: df $f \circ g$ consiste de todos los nros x en el df de g p/ $g(x)$ está en el df de f.

Límites: lím x izq. a $x_0 = \lim_{x \to x_0^-} f(x) = L$ El límite existe cuando $\lim_{x \to x_0^+} = L = \lim_{x \to x_0^-} = L$

lím x der. a $x_0 = \lim_{x \to x_0^+} f(x) = L$

Propiedad de sustitux directa: si f es un polinomio o una fx racional y $x_0 \in Dom f$ / $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. Las fx c/ esta prop. se llaman continuas en x_0.

Si lím coincide en ambos lados $\therefore$ existe, si no $\nexists$

Límites - propiedades algebraicas.

- $\lim (f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = L \pm M$
- $\lim K f(x) = K \lim f(x)$.
- $\lim f(x) \cdot g(x) = \lim f(x) \cdot \lim g(x)$
- $\lim f(x)/g(x) = \lim f(x) / \lim g(x)$
- $\lim [f(x)]^n = [\lim f(x)]^n$
- $\lim \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim f(x)}$

Límites indeterminados: lím. q' no se pueden calcular de forma directa.

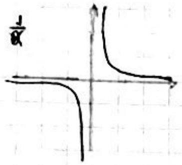
Ej: $\lim_{x \to 0} f(x) = \dfrac{x-1}{x^2-1} = \dfrac{0}{0} \to \dfrac{\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \dfrac{1}{x+1} = 1$

$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2} = \frac{\sqrt{x}-\sqrt{2}}{x-2}\cdot\frac{\sqrt{x}+\sqrt{2}}{\sqrt{x}+2} = \frac{(\sqrt{x})^2-(\sqrt{2})^2}{(x-2).(\sqrt{x}+2)} = \frac{\cancel{x-2}}{(\cancel{x-2}).(\sqrt{x}+2)} = \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{2}} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

Limites q' involucran al infinito: asíntotas.

Limites infinitos: expresión donde solo' ~~uno~~ el denominador tiende a 0.

Si $\lim x\to 0$ ∄, no da un IR. Ejemplo: $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$



$\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$

Limites al infinito: si $\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Ejemplo: $\lim_{x\to+\infty} x^3-2x^3+3 = \lim_{x\to+\infty} x^3\left(\frac{x^3}{x^3}-\frac{2x^3}{x^3}+\frac{3}{x^3}\right) = \lim_{x\to+\infty} \overbrace{x^3}^{\to\infty}\overbrace{\left(1-\frac{2}{x}+\frac{3}{x^3}\right)}^{\to 1} = +\infty$

!! $p(x)/g(x) = a_nx^n + a_{n-1}x^n \ldots / b_mx^n + b_{m-1}x^n + b_{m-2}x^n \ldots = \begin{cases} \infty & si\ n>m \\ a_n/b_m & si\ n=m \\ 0 & si\ n<m \end{cases}$

Lim. orden magnitud. $e^x >> x^a >> \ln(x)$ si $x\to\infty$

$\lim_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x^a} = +\infty$ $e^x > x^a$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{x^a}{e^x} = 0$ $x^a < e^x$

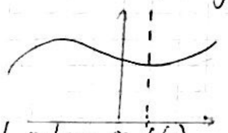
Cambio de variable $\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x)$ $y=\frac{1}{x}$ $x\to 0^+ = y\to+\infty$ $x = 1/y$.

$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = \lim_{y\to\infty}\left(\frac{1}{y}\right)^2\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \lim_{y\to\infty}\frac{\ln(1/y)}{y^2} =$ | $\ln\left(\frac{1}{y}\right) = \ln 1 - \ln y = 0 = \ln(y) = -\ln y$

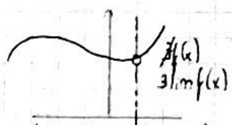
$\lim_{y\to+\infty}\frac{\ln(1/y)}{y^2} = \lim_{y\to+\infty}\frac{-\ln(y)}{y^2} = 0$ $y^2 >> \ln(x)$

Continuidad. f_x continua si 1) $\exists f(x_0)$, 2) lim ∃, $x\to x_0$ $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 3) $f(x_0) = \lim_{x\to x_0} f(x_0)$

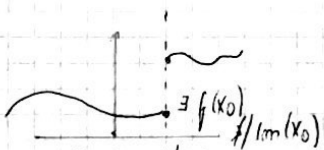
Si no se cumple algo, es discontinua.



f continua en $f(x)$
$\lim_{x\to x_0} f(x_0) = f(x_0)$.



f no es continua en x_0.



no es continua

Clasificaciones: Discontinuidad evitable: ∃ lim ∧ ∄$f(x_0)$; ∃$f(x_0)$ y el lim pero no coinciden.
" inevitable: ∄ lim.

Ejemplo: $f(x)\begin{cases} x^2-3 & -1\leq x<1 \\ 2x-4 & 1\leq x<2 \\ 5-x^2 & 2\leq x<3 \end{cases}$ $x_0=1$ $x_0=2$ x_1: $f(1) = 2.1-4 = -2$

$\lim_{x\to 1^+} f(x) = 2.1-4 = -2$ $\lim_{x\to 1^-} f(x) = 2.1-4 = -2$

continua en $x_0 = 1$

Funciones continuas en un intervalo

1) Continua en un intervalo ~~cerrado~~ abierto: si y solo si es continua en el pto del intervalo.
2) " cerrado $[a,b]$ si: · f es continua en interior, en (a,b)
· f es continua por dcha en a
· f continua en izq. de b.

Derivada: Variación total y promedio: dado un intervalo $[a,b]$, la variación total de f el a y b es la dif. el $f(b)-f(a)$.

La variación promedio es: $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$. Ejemplo: $f(x) = x^2$ en $[-1,5] = \frac{f(5)-f(-1)}{5-(-1)} = 4$.

Hasta ahora calculábamos variables medias. La idea es armar intervalos + pequeños: $[1,1+h]$ / var. media $= \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{(1+h)-1} = \frac{(1+h)^2-1}{h}$

La variación instantánea de f en x_0 es su derivada

Sea f def en un int. abierto, existe dx en x_0 si ∃ $f'(x_0) = \lim_{x\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

Como dx es un lim, ∃ lim. laterales y son =, dx lateral.
Fórmula: cociente incremental.

Reglas de derivación

$f(x) = c$ $f'(x) = 0$

$f(x) = x^n$ $f'(x) = nx^{n-1}$

$f(x) = e^x$ $f'(x) = e^x$

$f(x) = \ln x$ $f'(x) = 1/x$

$f(x) = \operatorname{sen} x$ $f'(x) = \cos x$

$f(x) = \cos x$ $f'(x) = -\operatorname{sen} x$

$f(x) = x$ $f'(x) = 1$

$c\,f(x) = c\,f'(x)$.

$(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g(x)'$

$(f(x) . g(x))' = f'(x) . g'(x)$.

$(g(x)/f(x))' = \frac{(g'(x).f(x)) - (f(x)'.g(x))}{(g(x))^2}$

$(f\circ g)(x)' = f'(g(x)) . g'(x)$.

Valores extremos de una f^x

1) $(x_0, f(x_0))$ máx. absoluto si $f(x_0) \geq f(x)$ p/ todo df.

2) $(x_0, f(x_0))$ máx relativo si $f(x_0) \geq f(x)$ p/ valor cerca de x_0

3) $(x_0, f(x_0))$ min relativo si $f(x_0) \leq f(x)$ "

4) $(x_0, f(x_0))$ min absoluto si $f(x_0) \leq f(x)$ p/ todo x

Funciones creciente / decreciente y criterio 1° dx.

· Creciente si $x_1 < x_2 \rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ · Decreciente si $x_1 > x_2 \rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

· Si $f'(x) > 0$ en c/ pto. $f \uparrow$ en $[a, b]$ Pasos: ptos críticos, armar intervalos, evaluar dx.

· $f'(x) < 0$ $f \downarrow$ en $[a, b]$

Criterio 1° dx p/ extremos locales.

1) f' cambia $-$ a $+$ en x_0, hay ~~extre~~ min. local

2) f' cambia $+$ a $-$, máx local

3) f' no cambia en c, no hay extremo local en c.

pasos: ptos críticos, intervalos:

2° dx, concavidad 1) $f''(x) > 0$, $f(x) = \cup$ 2) $f''(x) < 0$, $f(x) = \cap$

Análisis completo: Df f^x, f', f'', conj. continuidad y discontinuidad, 1° dx, ptos críticos, intervalos $\uparrow\downarrow$, máx y min relativos, 2° dx, ptos críticos, concavidades, ptos. inflex, AV, AH,

Pto inflex. donde cambia el tipo de concavidad.