Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2013
Informationsblatt 1
19. April 2013

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (SS 2013)

Hin.Ti's zu Blatt 1

Im Folgenden geben wir Hinweise für das Verständnis der Tutoraufgaben und Tipps für die Bearbeitung von Hausaufgaben. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

1. Informelle Begriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie

Man kann ohne zu übertreiben behaupten, dass die wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe im Zentrum jeder naturwissenschaftlichen Theoriebildung stehen. Ebenso wahr ist aber, dass in vielen Studiengängen eben diese wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe erkenntnistheoretisch falsch und insbesondere z.B. nur als „Umrahmung“ der Statistik gedeutet werden.
Für die Motivation einer Beschäftigung mit Wahrscheinlichkeitstheorie ist es außerordentlich wichtig, von Anbeginn damit zu rechnen, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie ebenso wie die Berechenbarkeitstheorie die Logik des „Tuns“, d.h. die Logik der realen Vorgänge und Prozesse zum Gegenstand hat, und damit zu den Grundlagen der Informatik gehört. Entsprechendes gilt für die Physik.

Ereignis

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist Teil der natürlichen Logik, mit der wir eine sich verändernde Welt logisch analysieren. Im Zentrum dieser Logik stehen u. a. die Begriffe „Ereignis“ und „Vorgang“. Ein Ereignis „tritt ein“ oder „kommt vor“ stets als „Ergebnis“ eines Vorgangs. Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab mit dem „Eintreten“ oder „Vorkommen“ eines Ereignisses, das sein Ergebnis darstellt. Die logischen Kategorien Ereignis und Vorgang bestimmen sich gegenseitig. Tatsächlich ist es so, dass jede Ergebnisprognose für einen realen Vorgang grundsätzlich nichts anderes sein kann als eine Annahme in einem wahrscheinlichkeitstheorietischen Raum.

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch Algorithmen beschrieben. In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente“. Der Vorgang, der bei „Ausführung“ von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet“, „erzeugt“ Vorkommen von Ereignissen.

Häufigkeit

Ein wesentliches Bestimmungsmerkmal der logischen Kategorie Vorgang ist die „Wiederholbarkeit“. Grundsätzlich können sich Vorgänge wiederholen mit „gleichen“ Ereignisvorkommen als Ergebnis. Man denke z. B. an die wiederholte Ausführung von Algorithmen oder Experimenten in einem gleichen Kontext. Ereignisse können „mehrfach vorkommen" und alle Vorkommen eines bestimmten Ereignisses sind gleich. Ein Vorgang endet mit einem (wiederholten) Vorkommen eines Ereignisses. Die Kardinalität der Multimenge der Vorkommen eines Ereignisses nennt man „Häufigkeit" des Ereignisses. Häufigkeiten sind stets natürliche Zahlen, also insbesondere endliche Zahlen.

Abstrakt wird der Begriff der Häufigkeit durch Multimengen beschrieben, wobei eine „Multimenge" als eine Zusammenfassung von Vorkommen von Elementen einer Menge definiert wird. Damit erweist sich der Multimengenbegriff als ein zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitsheorie.

Vorkommen von Ereignissen

Eine Zusammenfassung von Vorkommen, z. B. Vorkommen von Ereignissen, wird als eine Multimenge beschrieben. Wir erinnern uns an Boxen (Urnen) und Bälle im DS Kurs, die mal unterscheidbar waren, ein andermal aber nicht unterscheidbar sein sollten. Selbstverständlich waren auch dies Beispiele für Elemente von Multimengen. Die merkwürdigen Bezeichnungen „Urnen" und „Bälle" hatten nur dazu gedient, die logische Intuition von mehrfachen (gleichen) Objekten zu unterstützen.

Multimengen basieren auf Bestimmungseigenschaften in Gestalt von Kriterien bzw. Begriffen zur Unterscheidung von Vorkommen. Jeder dieser elementaren Begriffe steht für eine Klasse von gleichen Vorkommen. Damit ist jeder Multimenge eine gewöhnliche Menge von unterscheidbaren Objekten zugeordnet, die unterscheidbare Klassen von Vorkommen repräsentieren. Die „Objektprojektion" einer Multimenge ist eine klassische Menge.

Elementarereignisse

Wenn von 100 Klausurteilnehmern 80 bestanden hatten, dann ist das Ereignis „hat bestanden" 80 Mal vorgekommen. Andererseits hatte möglicherweise jeder Teilnehmer zunächst eine Note zwischen $1,0$ und $5,0$ erhalten, woraus sich die Aussage „hat bestanden" dann ergeben hatte. Man kann also das Ereignis „hat bestanden" auf ein elementareres Ereignis „hat Note x erhalten" zurückführen. Grundsätzlich werden wir Ereignisse auf Mengen von „Elementarereignissen" zurückführen.

Zufall

„Zufällig" nennen wir umgangssprachlich einen Vorgang, dessen Ergebnis wir prinzipiell nicht vorhersagen konnten. Gelegentlich scheint ein Vorgang zufällig zu sein, wenn wir über die Bedingungen zu wenig wissen, denen er unterliegt. Andererseits besagt die Quantenmechanik, dass unsere Ergebnisbeschreibungen prinzipiell überbestimmt sind in dem Sinne, dass die Information gar nicht vorhanden ist, die wir suchen. Deshalb fehlt uns für gewisse Bestimmungen prinzipiell die Grundlage.

Dem Phänomen „Zufall" begegnen wir mit einer Wahrscheinlichkeitslogik, die vom Einzelfall absieht und stattdessen Gesetzmäßigkeiten für eine Gesamtheit von Einzelfällen formuliert.

Wahrscheinlichkeit

Es ist prinzipiell nicht möglich, eine „Menge“ zu bilden über „zukünftige“ Vorkommen von Ereignissen oder Wiederholungen von Experimenten. Zukünftiges kann nur Gegenstand von „Hypothesen“ sein. Das System der „Wahrscheinlichkeit“ von Ereignissen eines gegebenen Kontextes ist ein System von hypothetischen Grenzwerten der „relativen Häufigkeit“ dieser Ereignisse.

Es ist aber prinzipiell möglich, Gesetzmäßigkeiten aufzustellen, denen jede Hypothesenbildung unterworfen sein muss. Beispielweise sollte die Wahrscheinlichkeit des Eintretens von Ereignissen, die sich gegenseitig ausschließen, die Summe der Wahrscheinlichkeit des Eintretens der einzelnen Ereignisse sein.

Eine Wahrscheinlichkeitstheorie ist letztendlich eine Theorie der Anwendung formalen Wissens auf die reale Welt.

2. Tipps zu Hausaufgaben von Blatt 1

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 1.1:

Eine Rekonstruktion der Zeilennummern kann man dadurch darstellen, dass man an jeder Position eines 15-Tupels notiert, welcher Kanal die entsprechende Zeile gesendet hat. Dem entspricht ein Wort der Länge 15 über dem Alphabet $\{A, B, C, D\}$.

ad HA 1.2:

Beide Seiten der Gleichung sind Polynome $p(z)$ und $q(z)$, d.h. die Gleichung hat die Form $p(z) = q(z)$. Grundsätzlich kann man die Gleichheit von Polynomen $p(z)$ und $q(z)$ überprüfen, in dem man beide Polynome auf eine Normalform bringt. Dies erfordert beispielweise das Ausmultiplizieren der Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung, was man mit Hilfe der angegebenen Binomialformel tun kann.
Bei der Berechnung der Koeffizienten der Monome z^i ist die Formel $n(n-1)n^{\underline{i-2}} = n^{\underline{i}}$ hilfreich.
Alternativ kann man den zweiten Hinweis berücksichtigen und $q(z)$ mit Hilfe der angegebenen Differentialquotienten darstellen, wobei anschließend mit Summenformel zu substituieren und die Summe abzuleiten ist.

ad HA 1.3:

Man stelle das Ergebnis als Tupel $(w_1, w_2) \in \{6\}^2$ dar und setze die möglichen positiven Fälle ins Verhältnis zu den insgesamt möglichen Fällen.

ad HA 1.4:

Berücksichtigen Sie, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht ändert, wenn die Urnen vertauscht werden.