Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 4. Mai bis 10:15 abzugeben und wird am 4./5. Mai besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 1.1 — 5P

Es sei Ω eine Ergebnismenge und $A, B, C \subseteq \Omega$ drei beliebige, paarweise verschiedene Ereignisse. Geben Sie mit Hilfe von mengentheoretischen Operationen (z.B. $\cap, \cup, \ldots$) die folgenden Ereignisse als Mengen an.

(a) Nur A tritt ein.

(b) A und B treten ein, aber nicht C.

(c) Mindestens eines der Ereignisse tritt ein.

(d) Genau zwei der drei Ereignisse treten ein.

(e) Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.

Aufgabe 1.2 — 5P

In einer mit Ihnen befreundeten Familie mit vier Kindern wechseln sich diese mit dem Abspülen der Reihe nach ab. Dabei kommt es immer wieder vor, dass eines der Kinder beim Abspülen Geschirr zerbricht. Vergangenen Sonntag war es nun das 4-te Mal seit Beginn dieses Jahres, dass ein Kind Geschirr zerstört hat. Nehmen Sie an, dass jedes Kind mit derselben W'keit Geschirr zerbricht, wenn es mit Abspülen an der Reihe ist.

(a) Wie groß ist die W'keit, dass das jüngste Kind, mit Namen Benjamin, an all diesen 4 Tagen, an denen Geschirr zerbrochen wurde, mit Abspülen an der Reihe war?

(b) Wie groß ist die W'keit, dass Benjamin mindestens 3 der letzten 4 Abspülen mit Scherben zu verantworten hat?

(c) Nehmen Sie jetzt an, dass genau 3 der letzten 4 Abspülen mit Scherben auf das Konto von Benjamin gehen. Seine Geschwister beschuldigen ihn, dass er besonders ungeschickt sei. Wie kann das begründet werden?

Aufgabe 1.3 — 5P

Sie nehmen an einem Glückspiel teil, bei dem in jeder Runde zufällig eine Zahl aus $\{2, 4, 8\}$ gewählt wird. Jede Zahl wird dabei in jeder Runde mit W'keit 1/3 gezogen. Das Spiel endet, sobald das Produkt aller gezogener Zahlen mindestens 512 beträgt. Ist das Endprodukt genau 512, so gewinnen Sie das Spiel, ansonsten verlieren Sie.

a) Beschreiben Sie das Glücksspiel (= Experiment) formal, indem Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω wählen.

b) $E_s \subseteq \Omega$ sei das Ereignis, dass das Endprodukt genau s ist.

Formulieren Sie E_s formal bzgl. Ω.

Für welche s gilt $E_s \neq \emptyset$, d.h. auf welche Werte kann das Experiment enden?

c) Mit V_s sei das Ereignis bezeichnet, dass das Produkt der Zahlen *exklusiv der letzten Zahl* des Experiments genau s ist.

Geben Sie eine formale Definition von V_s bzgl. Ω.

Bestimmen Sie auch hier die möglichen Werte s, so dass $V_s \neq \emptyset$.

d) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeiten $\Pr[E_s]$ mittels der W'keiten $\Pr[V_s]$ aus.

Zeigen Sie hiermit, dass Sie mindestens mit W'keit 1/3 das Spiel gewinnen.

Aufgabe 1.4 **5P**

Drei Spieler A, B und C wollen feststellen, wer von ihnen der beste im Schach ist. Die Spieler organisieren daher folgendermaßen ein Turnier unter sich:

- Die erste Partie wird von den Spielern A und B bestritten.
- Die $i+1$-te Partie wird von dem Gewinner der i-ten Partie und dem Spieler, der nicht an der i-ten Partie teilgenommen hat, gespielt.
- Das Turnier endet, sobald ein Spieler zwei Partien hintereinander gewonnen hat.

Beispiel: Wenn die erste Partie von Spieler A gewonnen wird, so spielen in der zweiten Partie A und C gegeneinander. Gewinnt A auch die zweite Partie, so hat er bereits das Turnier gewonnen. Gewinnt hingegen Spieler C die zweite Partie, so spielen C und B in der dritten Runde gegeneinander, usw.

(a) Repräsentieren Sie das Experiment als Markov-Diagramm.

(b) Beschreiben Sie die möglichen Turnierverläufe (=Elementarereignisse) mittels Zeichenketten über dem Alphabet $\Sigma = \{A, B, C\}$.

Geben Sie hierfür einen geeigneten regulären Ausdrück über Σ an, der alle endlichen Turnierverläufe beschreibt.

Beschreiben Sie explizit die nicht endenden Turnierverläufe.

(c) Wir nehmen an, dass die Spieler alle gleich stark sind, d.h. jeder Spieler gewinnt mit W'keit $1/2$ eine Partie (kein Unentschieden).

i) Bestimmen Sie hiermit die W'keiten der Turnierverläufe (= Elementarw'keiten) und die W'keit, dass das Turnier nach höchstens bzw. genau l Partien endet.

Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse über Markov-Diagramme aus der Vorlesung, dass das Turnier mit W'keit 1 endet.

ii) Zeigen Sie, dass Spieler A mit W'keit $5/14$ das Turnier gewinnt. Mit welcher W'keit gewinnt Spieler B bzw. C das Turnier?