Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 1
27. April 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ besteht aus einer abzählbaren Ergebnismenge Ω und einem Wahrscheinlichkeitsmaß Pr, welche jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ einen Wert $\Pr[\omega]$ zwischen 0 und 1 zuweist. Die Summe der Elementarwahrscheinlichkeiten addiert sich dabei stets zu 1. Eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$ wird Ereignis genannt. Die Wahrscheinlichkeit von E ist definiert als $\Pr[E] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$. Beweisen Sie anhand dieser grundlegenden Definitionen folgende Aussagen für beliebige Ereignisse E und F.

1. $\Pr[\emptyset] = 0$ und $\Pr[\Omega] = 1$
2. $0 \leq \Pr[E] \leq 1$
3. Für zwei disjunkte E und F gilt $\Pr[E \cup F] = \Pr[E] + \Pr[F]$
4. $\Pr[\Omega \setminus E] = 1 - \Pr[E]$
5. $E \subseteq F$ impliziert $\Pr[E] \leq \Pr[F]$

Lösungsvorschlag

Die erste Aussage folgt unmittelbar aus der Definition

$$\Pr[\emptyset] = \sum_{\omega \in \emptyset} \Pr[\omega] = 0 \text{ bzw. } \Pr[\Omega] = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

Für den Beweis der zweiten Aussage ist festzuhalten, dass die Wahrscheinlichkeit eines Elementarereignisses nicht negativ sein kann. Hieraus lässt sich zum einen schließen, dass die Wahrscheinlichkeit von E größer gleich 0 sein muss

$$0 \leq \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega] = \Pr[E].$$

Sollte Ω unendlich sein, bedeutet das außerdem, dass die Reihe $\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega]$ absolut konvergent ist. Wir können die Reihe also umordnen zu

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega] + \sum_{\omega \in \Omega \setminus E} \Pr[\omega].$$

Für endliche Ω bleibt diese Umordnung natürlich weiterhin zulässig, wobei sich das Argument der absoluten Konvergenz erübrigt. Aus dem ersten Teil des Beweises folgt, dass

$\Pr[\Omega \setminus E]$ größer gleich 0 sein muss. Insgesamt lässt sich somit zeigen, dass die Wahrscheinlichkeit von E kleiner gleich 1 ist

$$1 = \sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega] + \sum_{\omega \in \Omega \setminus E} \Pr[\omega] = \Pr[\Omega \setminus E] + \Pr[E] \geq \Pr[E].$$

Kommen wir nun zur dritten Aussage. Angenommen die Menge $E \cup F$ ist unendlich. Wir wissen bereits, dass $\Pr[E \cup F]$ kleiner gleich 1 ist, was bedeutet, dass die Reihe $\sum_{\omega \in E \cup F} \Pr[\omega]$ absolut konvergiert. Des Weiteren sind E und F disjunkt. Somit können wir umordnen zu

$$\Pr[E \cup F] = \sum_{\omega \in E \cup F} \Pr[\omega] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega] + \sum_{\omega \in F} \Pr[\omega] = Pr[E] + \Pr[F].$$

Die vierte und fünfte Aussage lassen sich beide mit Hilfe der Vorherigen zeigen. Hierzu nutzen wir aus, dass sich Ω bzw. F in die disjunkten Teilmengen $\Omega \setminus E$ und E bzw. $F \setminus E$ und E partitionieren lassen. Somit gilt einerseits

$$1 - \Pr[E] = \Pr[\Omega] - \Pr[E] = \Pr[\Omega \setminus E] + \Pr[E] - \Pr[E] = \Pr[\Omega \setminus E]$$

und andererseits

$$\Pr[F] = \Pr[F \setminus E] + Pr[E] \geq \Pr[E].$$

Tutoraufgabe 2

Sie werfen zwei Würfel mit den Ziffern 1 bis 6 und bilden anschließend durch aneinanderreihen der Ziffern die kleinstmögliche Dezimalzahl. Würfeln Sie bspw. 4 und 3, so erhalten Sie 34. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse unter der Annahme, dass jedes Ziffernpaar mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt.

1. Die erhaltene Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.
2. Die Zehnerziffer ist die Hälfte der Einerziffer.
3. Die Zahl ist kleiner als 46.

Lösungsvorschlag

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum mit der Ergebnismenge $\Omega = [6]^2$ und gehen davon aus, dass alle Elementarereignisse gleich wahrscheinlich sind. Demnach können wir die Wahrscheinlichkeit einzelner Ereignisse durch deren relative Häufigkeit bestimmen. Für das erste Ereignis kommen wir so auf eine Wahrscheinlichkeit von

$$\frac{|\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(6,6)\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \approx 0{,}16667.$$

Das selbe Vorgehen erlaubt uns auch die Wahrscheinlichkeit des zweiten Ereignisses zu bestimmen

$$\frac{|\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,2),(3,6),(6,3)\}|}{|\Omega|} = \frac{1}{6} \approx 0{,}16667.$$

Im dritten Fall ist es sinnvoll das Gegenereignis, also alle Ziffernpaare die eine Zahl größer gleich 46 bilden, zu betrachten. Folglich ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gegeben durch

$$1 - \frac{|\{(4,6),(6,4),(5,5),(5,6),(6,5),(6,6)\}|}{|\Omega|} = \frac{5}{6} \approx 0{,}83333.$$

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten folgendes Spiel. Zwei Personen a und b werfen abwechselnd eine Münze bis einer der beiden zum ersten Mal Zahl wirft und somit gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a bzw. b das Spiel für sich entscheidet, wenn die Wahrscheinlichkeit für Kopf $0 < p < 1$ beträgt und a den ersten Wurf macht? Ist das Spiel fair?

Lösungsvorschlag

Zunächst beobachten wir, dass der Sieger lediglich von der Anzahl der Würfe abhängt. Sei $\Pr[E_n]$ dementsprechend die Wahrscheinlichkeit, dass eine Partie genau n Würfe dauert. Der Wert von $\Pr[E_n]$ setzt sich zusammen aus der Wahrscheinlichkeit $(n-1)$-mal hintereinander Kopf und im Anschluss einmal Zahl zu werfen

$$\Pr[E_n] = p^{n-1} \cdot (1-p).$$

Da Spieler a jede Partie, die aus einer ungeraden Anzahl an Würfen besteht, für sich entscheidet, sind seine Gewinnchancen exakt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(p^{2n} \cdot (1-p)) = (1-p) \cdot \sum_{n=0}^{\infty}(p^2)^n = (1-p) \cdot \frac{1}{1-p^2} = \frac{(1-p)}{(1-p)\cdot(1+p)} = \frac{1}{1+p}.$$

Man beachte, dass es sich bei $\sum_{n=0}^{\infty}(p^2)^n$ um die geometrische Reihe handelt. Nachdem $|p^2|$ kleiner 1 ist konvergiert diese gegen $\frac{1}{1-p^2}$. Ein Sieg von Spieler b ist das komplementäre Ereignis zu einem Sieg von Spieler a. Somit ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler b gewinnt gegeben durch

$$1 - \frac{1}{1+p} = \frac{p}{1+p}.$$

Der Verlauf des Spiels hängt also stark von p ab. Ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf klein, so sind die Gewinnchancen von a signifikant größer als die von b. Das liegt daran, dass eine Partie mit hoher Wahrscheinlichkeit bereits im ersten Wurf zum Vorteil von a entschieden wird. Ist die Wahrscheinlichkeit für Kopf hingegen groß, dauert eine Partie erwartungsgemäß länger und die Gewinnchancen gleichen sich an. Generell hat a jedoch stets eine höhere Gewinnchance als b.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Bei einem Pferderennen treten drei Pferde a, b und c gegeneinander an. Konstruieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ für den Ausgang des Rennens, so dass a mit einer Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ vor b das Ziel erreicht, b mit einer Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ vor c das Ziel erreicht und c mit einer Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ vor a das Ziel erreicht.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass es keinen Gleichstand zwischen Pferden gibt.

Lösungsvorschlag

Unter der Annahme, dass die Pferde nicht gleichzeitig im Ziel ankommen gibt es genau sechs mögliche Ausgänge des Rennens

$$\Omega = \{abc, acb, bac, bca, cab, cba\},$$

wobei die Reihenfolge der Buchstaben der Ankunft der Pferde entspricht. Die Ereignisse a ist schneller als b, b ist schneller als c und c ist schneller als a sind gegeben durch

$$E_{ab} = \{abc, acb, cab\}, E_{bc} = \{abc, bac, bca\} \text{ und } E_{ca} = \{bca, cab, cba\}.$$

Wir müssen nun passende Elementarwahrscheinlichkeiten finden, so dass die Wahrscheinlichkeit von E_{ab}, E_{bc} und E_{ca} jeweils größer als $\frac{1}{2}$ ist. Eine Möglichkeit hierfür ist

$$\Pr[abc] = \frac{1}{3}, \Pr[acb] = 0, \Pr[bac] = 0, \Pr[bca] = \frac{1}{3}, \Pr[cab] = \frac{1}{3} \text{ und } \Pr[cba] = 0.$$

Durch nachrechnen sehen wir, dass sich die Elementarwahrscheinlichkeiten zu 1 addieren. Wir haben demnach also einen wohldefinierten diskreten Wahrscheinlichkeitsraum. Des Weiteren haben die Ereignisse E_{ab}, E_{bc} und E_{ca} jeweils eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{2}{3}$, was größer als die geforderten $\frac{1}{2}$ ist. Es bleibt anzumerken, dass sich die selbe Idee einfach auf Wahrscheinlichkeitsräume, bei denen die gleichzeitige Ankunft von Pferden berücksichtigt wird, übertragen lässt. Der einzige Unterschied besteht darin, dass die zusätzlichen Elementarwahrscheinlichkeiten auf 0 gesetzt werden.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Bei der Ziehung der Lottozahlen werden zufällig sechs verschiedene Gewinnzahlen zwischen 1 und 49 bestimmt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei vier oder mehr dieser Gewinnzahlen um aufeinanderfolgende Zahlen handelt, wenn man davon ausgeht, dass jeder Ausgang einer Ziehung gleich wahrscheinlich ist?

Lösungsvorschlag

Sei E_k die Menge der Ziehungen mit exakt k aufeinanderfolgenden Gewinnzahlen, dann entspricht die Menge der Ziehungen mit mindestens vier aufeinanderfolgenden Gewinnzahlen der disjunkten Vereinigung

$$E = E_4 \cup E_5 \cup E_6.$$

Für das Ziehen von sechs aufeinanderfolgende Gewinnzahlen gibt es exakt 44 Möglichkeiten, da die kleinste Gewinnzahl zwischen 1 und 44 sein muss und alle weiteren Gewinnzahlen eindeutig bestimmt sind. Die Mächtigkeit von E_6 ist dementsprechend

$$|E_6| = 44.$$

Bei fünf aufeinanderfolgenden Gewinnzahlen muss noch eine weitere Gewinnzahl bestimmt werden, die jedoch nicht unmittelbar vor oder nach der Fünferreihe stehen darf. Beginnt die Fünferreihen mit 1 bzw. mit 45, so gibt es 43 Möglichkeiten eine zusätzliche Gewinnzahl zu wählen. Für alle 43 anderen Fünferreihen gibt es 42 Möglichkeiten. Insgesamt hat die Menge E_5 also eine Mächtigkeit von

$$|E_5| = 2 \cdot 43 + 43 \cdot 42 = 1892.$$

Das selbe Argument lässt sich auch für vier aufeinanderfolgende Gewinnzahlenahlen anwenden

$$|E_4| = 2 \cdot \binom{44}{2} + 44 \cdot \binom{43}{2} = 41624.$$

Da eine Gleichverteilung vorliegt, ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit aus der relativen Häufigkeit von E

$$\Pr[E] = \frac{|E_4 \cup E_5 \cup E_6|}{|\Omega|} = \frac{44 + 1892 + 41624}{\binom{49}{6}} = \frac{43560}{13983816} \approx 0{,}00312.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sie stehen mit einer anderen Person an einer Bushaltestelle, an der in regelmäßigen Abständen ein Bus hält. Da die Busse bereits sehr voll sind, kann jedoch immer nur eine Person einsteigen. Wir gehen davon aus, dass jeder Wartende mit gleicher Wahrscheinlichkeit einsteigen darf. Zusätzlich erreichen in der Zeit bis zum nächsten Bus jeweils zwei neue Personen die Haltestelle.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der Sie im n-ten Bus mitfahren.
2. Zeigen Sie anschließend, dass die Wahrscheinlichkeit mit der Sie spätestens im n-ten Bus mitfahren genau $\frac{n}{n+1}$ ist.

Lösungsvorschlag

Zunächst stellen wir fest, dass die Anzahl der Personen an der Haltestelle mit jedem Bus um eins steigt. Da sich anfangs zwei Personen an der Haltestelle befinden, warten zur Ankunft des n-ten Busses bereits $n+1$ Personen. Die Wahrscheinlichkeit, dass Sie nicht in einen der ersten $n-1$ Busse einsteigen können, ist dementsprechend

$$\prod_{i=1}^{n-1} \frac{i}{i+1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \ldots \cdot \frac{n-2}{n-1} \cdot \frac{n-1}{n} = \frac{1}{n}.$$

Des Weiteren ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie im n-ten Bus tatsächlich mitfahren dürfen, gleich $\frac{1}{n+1}$. Insgesamt ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit somit

$$\frac{1}{n \cdot (n+1)}.$$

Das Ereignis spätestens im n-ten Bus mitzufahren ist komplementär zur Situation, dass Sie in keinem der ersten n Bussen einen Platz gefunden haben. Aus der ersten Teilaufgabe geht hervor, dass das Komplement mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n+1}$ eintritt. Folglich ist die Wahrscheinlichkeit mit der Sie in einem der ersten n Busse mitfahren wie vermutet

$$1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

In einer Übungsgruppe für Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie haben n Studenten ihren Namen nicht auf dem Deckblatt ihrer Hausaufgaben angegeben. Die korrigierten Hausaufgaben teilt der Tutor daher zufällig unter den entsprechenden Studenten aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt keiner der n Studenten seine eigene Hausaufgabe zurück, wenn man davon ausgeht, dass alle Zuordnungen von Hausaufgaben an Studenten gleich wahrscheinlich sind? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Hinweis: Benutzen Sie die Siebformel aus der Vorlesung und machen Sie sich mit der Reihendarstellung der e-Funktion vertraut.

Lösungsvorschlag

Wir betrachten zunächst das komplementäre Ereignis E, bei dem mindestens ein Student seine eigene Hausaufgabe erhält. Insbesondere sei E_i das Ereignis, dass der i-te Student seine eigene Hausaufgabe erhält. Das Ereignis E lässt sich somit als Vereinigung der einzelnen E_i darstellen. Durch Anwenden der Siebformel können wir die Wahrscheinlichkeit von E umformen zu

$$\Pr[E] = \Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right] = \sum_{I \in 2^n \setminus \emptyset} (-1)^{|I|+1} \Pr\left[\bigcap_{i \in I} E_i\right].$$

Der Schnitt der Mengen E_i bezüglich I, welchen wir im Folgenden mit E_I abkürzen, entspricht genau den Zuordnungen von Hausaufgaben an Studenten, bei denen alle Studenten aus der Menge I ihre eigenen Aufgaben bekommen. Da die einzelnen Zuordnungen gleich wahrscheinlich sind, können wir $\Pr[E_I]$ über die relative Häufigkeit bestimmen

$$\Pr[E_I] = \frac{|E_I|}{|\Omega|} = \frac{(n-|I|)!}{n!}.$$

Man beachte, dass die Wahrscheinlichkeit von E_I nicht direkt von I abhängt, sondern lediglich von seiner Kardinalität. Dementsprechend können wir die Siebformel zusammenfassen zu

$$\Pr[E] = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \binom{n}{k} \frac{(n-k)!}{n!} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} = 1 - \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist somit

$$\Pr[\Omega \setminus E] = 1 - \Pr[E] = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Aus der Reihendarstellung der e-Funktion geht hervor, dass $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!}$ gleich $\frac{1}{e}$ ist. Folglich konvergiert $\Pr[\Omega \setminus E]$ zu $\frac{1}{e} \approx 0{,}36788$ für $n \to \infty$.