Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 9

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 26.06.2013 um 12:00

Vereinfachen Sie Terme soweit wie möglich. Unnötig komplizierte Antworten werden nicht gewertet.

Hinweis: Verwenden Sie für die Standardnormalverteilung die Tabelle auf wikipedia.

Aufgabe 9.1 — 2P+3P+2P+2P+2P

Wir betrachten nochmals die Problemstellung aus HA 7.1: Anhand von n Ja-Nein-Fragen soll der Kenntnisstand eines Studenten ermittelt werden. Wir nehmen idealisierend an, dass ein Student bei jeder Frage – unabhängig von allen anderen Fragen – mit W'keit p die korrekte Antwort gibt, womit die Anzahl der korrekten Antworten K gerade $\mathrm{Bin}(n, p)$-verteilt ist.

Die Note soll so vergeben werden, dass gilt: Ein Student mit $p \in (\frac{10-i}{10}, \frac{11-i}{10}]$ soll – zumindest mit hoher W'keit – die Note i ($i \in \{1, 2, 3, 4\}$) erhalten; gilt $p \leq 0.6$, so soll der Student eine 5 bekommen. Da p nicht direkt messbar ist, soll p anhand von K abgeschätzt werden.

Approximieren Sie im Folgenden die Binomialverteilung mit Hilfe des ZGWS.

Hinweis: In den Folien wird auch eine „Stetigkeitskorrektur" erwähnt. Verwenden Sie diese für die folgenden Rechnungen *nicht*.

(a) Ein Ansatz für die Notenvergabe sieht vor, K/n stellvertretend für p zu verwenden: Gilt am Ende der Prüfung $K/n \leq 0.6$, so erhält der Student eine 5; ansonsten erhält er die Note i, für welche $K/n \in (\frac{10-i}{10}, \frac{11-i}{10}]$ gilt.

  (i) Es gelte $p = 0.75$ und $n = 100$. Bestimmen Sie die Verteilung der Note in diesem Fall.

  Hinweis: Gehen Sie effizient vor: Bekanntlich gilt $\Pr[a < X \leq b] = \Pr[X \leq b] - \Pr[X \leq a]$. Es reicht somit, zunächst $\Pr[X \leq b]$ für veränderliches b zu approximieren.

  (ii) Es gelte immer noch $p = 0.75$. Bestimmen Sie das kleinste n, so dass mit W'keit $\Pr[K/n \in (0.7, 0.8]] \geq 0.99$ die Note 3 vergeben wird.

(b) Ein alternativer Ansatz vergibt die beste (= kleinste) Note i, für welche die beobachtete Anzahl an korrekten Antworten noch sehr wahrscheinlich ist:

  (i) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von p und n ein möglichst großes $u(n, p)$, so dass $\Pr[K \geq u(n, p)] \geq 0.99$.

  Es gelte im Weiteren $n = 100$.

  (ii) Bestimmen Sie nun für $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ den expliziten Wert $\alpha_i := u(100, \frac{10-i}{10})$.

  Desweitern gelte $u_5 := 0$.

  (iii) Gegeben K soll der Student dann die kleinste (= beste) Note $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ erhalten, für welche $K \geq u_i$ gilt.

  Bestimmen Sie nun wieder die Verteilung der Note für einen Studenten mit $p = 0.75$.

Aufgabe 9.2 — 2P+3P

Die Zeiten eines 100-Meter-Läufers seien als $\mathcal{N}(9.66s, 0.011s^2)$-verteilt angenommen. Wir betrachten 10 unabhängige 100-Meter-Läufe desselben Läufers.

(a) Bestimmen Sie das kleinste t, so dass die schnellste Zeit mit W'keit ≥ 0.99 unter t Sekunden liegt.

(b) Bestimmen Sie das kleinste t, so dass die drei schnellsten Zeiten mit W'keit ≥ 0.99 unter t Sekunden liegen.

Verwenden Sie für diese Aufgabe ein CAS.

Aufgabe 9.3 **4P**

Es seien X_1, X_2, X_3 unabhängige ZVn, jede davon gleichverteilt auf $[0, 1]$.

Bestimmen Sie die Dichte und die Verteilungsfunktion von $X_1 + X_2 + X_3$.

Tutoraufgaben: Besprechung in Woche vom 24.06.2013.

Aufgabe 9.1

Die Gamma-Verteilung $\Gamma(\lambda, r)$ besitzt die Dichte

$$\frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \cdot x^{r-1} \cdot e^{-\lambda \cdot x} \cdot I_{(0,\infty)}(x)$$

für $r, \lambda \in (0, \infty)$. Spezialfälle der Gamma-Verteilung sind die Exponentialverteilung für $r = 1$ und die Chi-Quadrat-Verteilung für $\lambda = 1/2, r = n/2$.

Im Beweis des ZGWS haben Sie die die momenterzeugende Funktion $M_X(z) := \mathbb{E}[e^{zX}]$ einer stetig verteilten ZV kennengelernt. Sie verallgemeinert die erzeugende Funktion $\mathbb{E}[z^Y]$ im Fall von diskreten ZVn Y mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Wie in der VL gezeigt, gilt $\frac{d^k}{dz^k} M_X(z)|_{z=0} = \mathbb{E}[X^k]$, soweit es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so dass $M_X(z)$ für $z \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ existiert.

(a) Bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion für eine $\Gamma(\lambda, r)$-verteilte ZV X und anschließend $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$.

Wenn die momenterzeugende Funktion allerdings existiert, kann sie wie im Beweis des ZGWS verwendet werden, um Aussagen über die Verteilung von Summen von unabhängigen ZVn zu treffen. Insbesondere kann wie für erzeugende Funktionen gezeigt werden: Existieren die momenterzeugenden Funktionen $M_X(t)$ und $M_Y(t)$ zweier ZVn X, Y auf einem Intervall $(-\varepsilon, \varepsilon)$ für ein $\varepsilon > 0$ und stimmen dort überein, so besitzen X und Y dieselbe Verteilung.

(b) Zeigen Sie mit Hilfe der Eindeutigkeit der momenterzeugenden Funktionen: Gilt $X \sim \Gamma(\lambda, r)$ und $Y \sim \Gamma(\lambda, s)$ mit X, Y unabhängig und $r, s \in (0, \infty)$, so gilt $X + Y \sim \Gamma(\lambda, r + s)$.

Hinweis: Verallgemeinern Sie das Resultat für erzeugende Funktionen, dass $G_{X+Y}(z) = G_X(z)G_Y(z)$ für X, Y unabhängig.

(c) Bestimmen Sie nun die Dichte einer Summe von n unabhängigen, $\exp(\lambda)$-verteilten ZVn.

Aufgabe 9.2

Wie in der Vorlesung erwähnt, existiert die momenterzeugende Funktion $M_X(z) = \mathbb{E}[e^{zX}]$ nicht für jede Verteilung. In HA 8.1 haben Sie die Konstante c so bestimmt, dass es sich bei $f(x) := c \cdot (1 + x^2)^{-1}$ um eine Dichte für $x \in \mathbb{R}$ handelt. Sei X nun eine ZV mit dieser Dichte.

Überprüfen Sie:

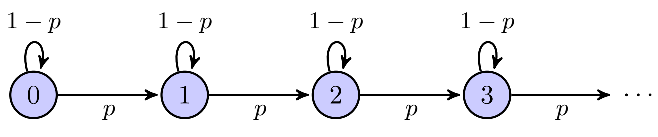
(a) $\mathbb{E}[|X|]$ existiert nicht.

(b) Der Wert $\mathbb{E}[X]$ des uneigentlichen (Riemann-)Integrals hängt von der verwendeten Grenzwertbildung ab.

(c) $M_X(z) = \mathbb{E}[e^{zX}]$ existiert nicht.

Aufgabe 9.3

Wir „takten" das Markov-Diagramm aus TA 5.2: Das Folgen einer Transition (ein Zeitschritt) soll $1/n$ Sekunden entsprechen für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}$; die Zeit in Sekunden, die für den Wechsel von Zustand i nach Zustand $i+1$ benötigt wird, wird durch die ZV T_i gemessen; dabei soll $\mathbb{E}[T_i] = 1$ gelten, d.h. im Mittel dauert der Wechsel genau 1 Sekunde.



(a) Bestimmen Sie die Verteilung T_i. Was gilt für $n \to \infty$?

(b) Was misst die ZV $N_t := \max\{k \in \mathbb{N} \mid T_1 + T_2 + \ldots + T_k \le t\}$ in Bezug auf obiges Markov-Diagramm?

Bestimmen Sie die Dichte von N_t und bestimmen Sie deren Grenzwert für $n \to \infty$.