Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Übungsblatt 7
17. Juni 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 28. Juni 2011, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Zwei Spieler A und B werfen je 6 Mal eine faire Münze mit „Kopf" oder „Zahl".
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A mindestens so oft „Kopf" wirft wie Spieler B?

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Aus einer Box B_X bzw. B_Y werden zufällig Lose mit Werten $X \in \{-1, 0, 1\}$ bzw. $Y \in \{2, 3, 4\}$ gezogen. Die Werte 0 und 3 sollen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, alle übrigen Werte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. X und Y seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen. Es sei $S = X + Y$.

Seien S_i die i-te Durchführung bzw. Wiederholung der Ziehung S und Z der Mittelwert aus n Wiederholungen von S, d. h.

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i \,.$$

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$.
2. Zeigen Sie für alle $n \geq 20$: $\quad \Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < 0{,}5] \geq 0{,}8$.

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ unabhängige diskrete Zufallsvariable, die gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 20\}$ sind. Wir nehmen Zufallsvariablen $Y_i \sim \mathrm{Bin}(1; \frac{8}{10})$ an, die genau dann den Wert 1 liefern, wenn $X_i > 12$ gilt.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Chernoff-Schranke aus Korollar 68 der Vorlesung eine möglichst gute obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100} \geq 50 \,.$$

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$ und der Dichtefunktion $f_X(i) = \binom{2}{i}(\frac{1}{3})^i(\frac{2}{3})^{2-i}$ für $i \in W_X$. Außerdem sei eine Zufallsvariable Y gegeben mit $W_Y = \{1, 2\}$ und $\Pr[Y = 1] = \frac{1}{2}$.

1. Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen $G_X(z)$ und $G_Y(z)$ für X bzw. Y!

2. Nun betrachten wir das folgende Zufallsexperiment:
   Zunächst wird Y getestet. Der Wert von Y bestimmt, ob die Zufallsvariable X nur ein erstes Mal getestet wird mit Wert X_1, oder ob X auch ein zweites Mal getestet wird mit Wert X_2 beim zweiten Test. Je nachdem bestimmen wir dann $Z = X_1$ oder $Z = X_1 + X_2$.

   Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen Z!

3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_Z von Z!

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ und $\lambda > 0$.

1. Zeigen Sie, dass X^2 nicht Poisson-verteilt ist.

2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\left(\frac{1}{X+1}\right)^{\overline{n}}]$ in geschlossener Form.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1 cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Münze gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

Vorbereitung 2

Seien A, B und C jeweils (unabhängig) gleichverteilt über $[0, 1]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Lösungen der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ reellwertig sind?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $A \cdot C$ und verwenden Sie für die sich anschließende Rechnung $\int x^2 \ln x \; \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.

Vorbereitung 3

Es sei Ω eine Ergebnismenge. Wir nehmen an, dass wir für eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten definieren wollen. Wir suchen dazu eine kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{E}$ enthält.
Sei

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A}\,;\, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist und dass für jede σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ die Relation $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

2. Die Borelschen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ über $\mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = \{[a, b] \times [c, d]\,;\, a, b, c, d \in \mathbb{R}\}\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Menge $K_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

Vorbereitung 4

Sei $\langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten die Menge $\Omega^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $x_1, x_2, \ldots$ von Elementen der Menge Ω und definieren für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ die Mengen $A_{i,e} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}\,;\, \omega_i = e\} \subseteq \Omega^{\mathbb{N}}$. Dabei bedeutet ω_i das i-te Folgenelement der Folge ω. Sei $\mathcal{E} = \{A_{i,e}\,;\, i \in \mathbb{N}, e \in \Omega\}$.

Man zeige:

Es gibt einen Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega^{\mathbb{N}}, \sigma_{\Omega^{\mathbb{N}}}(\mathcal{E}), \Pr_{\mathbb{N}} \rangle$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ gilt

$$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}] = \Pr[e]\,.$$

Tutoraufgabe 1

1. Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

2. Ein Krankenhaus steht in einer Straße der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

   Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?

Tutoraufgabe 2

1. Seien X und Y unabhängige und positivwertige kontinuierliche Zufallsvariablen. Drücken Sie die Dichtefunktion f_Z von $Z = X/Y$ durch die Dichtefunktionen f_X und f_Y von X bzw. Y aus.

2. Die Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch die Koordinaten eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in \{(s, t); s^2 + t^2 \leq 4\}$ der x, y-Ebene.

   Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$!

   Sind X und Y unabhängig? Begründung!

   Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y !

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten unabhängige stetige Zufallsvariablen X und Y, die beide auf dem Intervall $[0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ gleichverteilt sind. Sei $Z = \max\{X, Y\}$.

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Z.

2. Bestimmen Sie eine Funktion $u : [0, 1] \to [0, 1]$, so dass $u(X)$ die gleiche Verteilung wie Z besitzt.