Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Lösungsblatt 5
23. Mai 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Ein Kartenstapel mit 27 Karten enthalte genau einen Joker. Zwei Personen A und B ziehen nach dem folgenden 3-schrittigen Verfahren letztendlich genau eine Karte aus dem Stapel.

   Wir starten das folgende Verfahren mit $x = 27$ Karten und wiederholen es so lange, bis nur mehr eine Karte auf dem Tisch liegt.

   - A teilt die x Karten in zufälliger Weise in einen linken, rechten und mittleren Stapel mit je $\frac{x}{3}$ verdeckten Karten. Dann entfernt B den linken Stapel. Nun sieht A in den verbleibenden 2 Stapeln nach und entfernt einen Stapel, der den Joker nicht enthält. Nun liegt noch ein einziger Stapel mit $\frac{x}{3}$ Karten auf dem Tisch.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt am Ende ein Joker auf dem Tisch, wenn wir Laplace-Wahrscheinlichkeiten voraussetzen? (Ergebnis als Bruchzahl angeben!)

2. Wir nehmen an, dass sich unter verschiedenen 27 Karten genau 3 Joker befinden. Eine Person A wählt davon Laplace-zufällig 5 Karten aus und gibt diese einer Person B in die Hand.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat B mindestens 2 Joker in ihrer Hand?

   (Zur Darstellung des Ergebnisses dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.)

Lösung

1. $\Pr[\text{Joker}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

   (2P)

2. Hypergeometrische Verteilung und totale Wahrscheinlichkeit:

   $\Pr[\geq 2 \text{ Joker}] = \frac{\binom{3}{2}\binom{24}{5-2}}{\binom{27}{5}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{24}{5-3}}{\binom{27}{5}}$. (3P)

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Es liegen eine 5-Pfennig-, eine 10-Pfennig- und eine 50-Pfennig-Münze jeweils mit der Rückseite nach oben auf dem Tisch. Wir betrachten einen Zufallsprozess, der in jedem Schritt die Seiten einer Laplace-zufällig aus den 3 Münzen ausgewählten Münze wendet.

Es sei X diejenige diskrete Zufallsvariable, die die Anzahl der Schritte (≥ 1) zählt, bis zum ersten Mal alle Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegen. (Offenbar gilt beispielsweise $\Pr[X=1]=0$.)

1. Bestimmen Sie $\Pr[X=3]$ (mit Begründung)!
2. Bestimmen Sie $\Pr[X=n]$ für gerades n (mit Begründung)!
3. Nehmen Sie an, dass genau eine der 3 Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt, während also die anderen beiden Münzen mit der Rückseite nach oben liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass nach 2 Schritten wiederum genau eine der Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt?
4. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X.

Lösung

Volle Punktzahl nur mit entsprechender Begründung!

1. Drei Schritte benötigt man mindestens, wenn alle drei Münzen umgedreht werden sollen. Es ist egal, welche Münze im ersten Schritt umgedreht wird.

   $\Pr[X=3]=\frac{2}{9}$. (1P)

2. Beim Start ist die Anzahl der gezeigten Vorderseiten gleich Null. Bei jedem Schritt verändert sich die Anzahl der gezeigten Vorderseiten um genau 1, nach oben oder unten. Durch Induktion ergibt sich, dass nach geradzahlig vielen Schritten die Anzahl der gezeigten Vorderseiten geradzahlig bleibt.

   $\Pr[X=n]=0$ für gerades n. (1P)

3. Man macht eine Fallunterscheidung danach, welche Münze im ersten Schritt gewählt wird, und bestimmt dann, welche Münzen im zweiten Schritt zielführend sind.

   $p=\frac{4}{9}+\frac{1}{3}=\frac{7}{9}$. (1P)

4. Für geradzahliges n ergibt sich $f_X(n)$ unmittelbar aus der Lösung der zweiten Teilaufgabe.

   Nach dem ersten Schritt liegt mit Sicherheit genau eine Münze mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch. Nun untersucht man die zwei möglichen Situationen nach Doppelschritten vom ersten Schritt aus und beachtet die dritte Teilaufgabe, die die Erfolgswahrscheinlichkeit einer geometrischen Reihe liefert.

   Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_X(n)=\begin{cases} \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & : n \text{ ungerade und } n>1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

(2P)

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Sei $Y(\omega) = (X(\omega) \mod 2)$ für alle $\omega \in \Omega$.

1. Geben Sie W_X und W_Y an.
2. Berechnen Sie $\Pr[Y=0]$.
3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_Y für $p = \frac{1}{3}$.

Lösung

1. $W_X = \mathbb{N}$.
   $W_Y = \{x \bmod 2\,;\, x \in \mathbb{N}\} = \{0,1\}$. (1P)
2. $$\begin{aligned}\Pr[Y=0] &= \sum_{i\in\{2k;k\in\mathbb{N}\}}^{\infty} p(1-p)^{i-1}\\ &= p(1-p)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k}\\ &= p(1-p)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}[(1-p)^2]^k\\ &= p(1-p)\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2}\\ &= \frac{1-p}{2-p}\,.\end{aligned}$$
   (2P)
3. Es gilt $\Pr[Y=0]+\Pr[Y=1]=1$
   und damit $\Pr[Y=0] = \frac{2}{5}$, $\Pr[Y=1] = \frac{3}{5}$.
   Wir erhalten
   $$f_Y(i) = \begin{cases} \frac{2}{5} : i = 0\\ \frac{3}{5} : i = 1\\ 0 : \text{sonst}\end{cases}$$
   (2P)

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir wählen nacheinander Laplace-zufällig und unabhängig Buchstaben aus der 6-elementigen Multimenge der Buchstabenvorkommen des Wortes `ARARAT` aus. Wir legen dabei jeden Buchstaben wieder zurück, der nicht `A` ist, und legen aber ein gewähltes `A` nicht wieder zurück. Wir definieren die Zufallsvariable X wie folgt.

$$X := \text{Anzahl der Züge, bis alle } \texttt{A} \text{ gezogen wurden.}$$

1. Geben Sie dabei die Zufallsvariable X als Abbildung einer geeigneten Ergebnismenge Ω eines entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraumes $W = (\Omega, \Pr)$ an.

2. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von X.

Lösung

Die Vorgabe, dass wir aus einer Multimenge von Buchstabenvorkommen auswählen, definiert die Wahrscheinlichkeit, einen bestimmten Buchstaben zu ziehen. Der Buchstabe A wird hier so lange mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{6}$ gezogen, bis das erste Mal ein A gezogen wurde. Die Wahrscheinlichkeit, in dieser ersten Phase einen anderen Buchstaben als A zu ziehen, ist ebenfalls $\frac{3}{6}$.
Falls bereits genau ein A gezogen wurde, dann wird ein weiteres A mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ gezogen. Falls bereits genau zwei A gezogen wurden, dann wird das letzte A mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ gezogen.
Jede Phase entspricht einem Experiment. Die Experimente sind unabhängig und können parallel ausgeführt werden.

1. Wir betrachten die Zeichenmenge $\{0,1\}$ und definieren die Menge $\Omega' = \{0^n 1\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$ mit unterschiedlichen Wahrscheinlichskeitsmaßen für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\Pr\nolimits_1(0^n 1) = \left(\frac{3}{6}\right)^{n+1}, \quad \Pr\nolimits_2(0^n 1) = \left(\frac{3}{5}\right)^{n} \frac{2}{5}, \quad \Pr\nolimits_3(0^n 1) = \left(\frac{3}{4}\right)^{n} \frac{1}{4}\,.$$

   Der gesuchte Wahrscheinlichkeitsraum ist nun $W = (\Omega, \Pr)$ mit

$$\Omega = \Omega' \times \Omega' \times \Omega', \quad \Pr((\omega_1, \omega_2, \omega_3)) = \Pr\nolimits_1(\omega_1) \cdot \Pr\nolimits_2(\omega_2) \cdot \Pr\nolimits_3(\omega_3)\,.$$

   Wir definieren die Zufallsvariablen $X_i : \Omega \to \mathbb{N}_0$ durch $X_i((\omega_1, \omega_2, \omega_3)) = |\omega_i|$. Die X_1, X_2, X_3 sind unabhängig und geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit

$$p_1 = \frac{3}{6} \quad \text{bzw.} \quad p_2 = \frac{2}{5} \quad \text{bzw.} \quad p_3 = \frac{1}{4}\,.$$

   Die gesuchte Zufallsvariable X ist dann die Summe der X_i

$$X = X_1 + X_2 + X_3\,.$$

(3P)

2. Da die X_i unabhängig und geometrisch verteilt sind, gelten

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X_1] + \mathbb{E}[X_2] + \mathbb{E}[X_3] = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \frac{1}{p_3} = \frac{17}{2}\,, \\ \mathrm{Var}[X] &= \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + \mathrm{Var}[X_3] = \frac{q_1}{p_1^2} + \frac{q_2}{p_2^2} + \frac{q_3}{p_3^2} = \frac{71}{4}\,. \end{aligned}$$

(2P)

Zusatzaufgabe 2 (wird nicht korrigiert)

Mit einer Münze, die bei einem Wurf mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ Kopf zeigt, wird genau so lange geworfen, bis Kopf und Zahl das erste Mal mindestens zweimal vorgekommen sind. Der Wert der Zufallsvariablen X sei durch die Anzahl der Würfe bestimmt.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ approximativ!

Hinweis: Diese Aufgabe gehört zu den schwierigeren Aufgaben und kann deshalb durchaus zeitaufwändig sein. Wir werden sehr gute Lösungen prämieren.

Lösung

Wir unterscheiden 4 Fälle, je nachdem welche Wurfmuster bei den ersten drei Würfen auftreten.

Ereignis F_{3K}: 3 Mal K mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[F_{3K}] = \frac{1}{64}$.

Ereignis F_{0K}: 3 Mal Z mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[F_{0K}] = \frac{27}{64}$.

Ereignis F_{2K}: 2 Mal K mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[F_{2K}] = \frac{9}{64}$.

Ereignis F_{1K}: 2 Mal Z mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[F_{1K}] = \frac{27}{64}$.

Im Fall 1 ist der Erwartungswert, dass die 2 restlichen Z geworfen werden, gleich $2 \cdot \frac{4}{3} = \frac{8}{3}$.

Im Fall 2 ist der Erwartungswert, dass die 2 restlichen K geworfen werden, gleich $2 \cdot \frac{4}{1} = 8$.

Im Fall 3 ist der Erwartungswert, dass ein Z geworfen wird, gleich $\frac{4}{3}$.

Im Fall 4 ist der Erwartungswert, dass ein K geworfen wird, gleich $\frac{4}{1}$.

Das Ergebnis wird mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit zusammen mit Satz 36 der Vorlesung erhalten wie folgt:

$$\mathbb{E}[X] = (3 + \frac{8}{3}) \cdot \frac{1}{64} \; + \; (3+8) \cdot \frac{27}{64} \; + \; (3 + \frac{4}{3}) \cdot \frac{9}{64} \; + \; (3+4) \cdot \frac{27}{64} = \frac{1016}{192} \approx 8.29\,.$$

Man beachte insbesondere die Berechnung des Erwartungswerts einer negativen Binomialverteilung.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

X sei Poisson-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X+1)^{-1}]$.

Lösung

Nach Voraussetzung gilt $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ für irgendein bestimmtes $\lambda \geq 0$. Die diskrete Dichtefunktion von X ist dann $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und $f_X(i) = 0$ sonst. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X+1)^{-1}] &= \sum_{i \in W_X} \frac{1}{i+1} f_X(i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^{-1} \left(-1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \\
&= e^{-\lambda}\lambda^{-1}(-1 + e^{\lambda}) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für eine Poisson-verteilte Variable X können systematisch alle Erwartungswerte für beliebige Polynome in X in geschlossener Form berechnet werden. Beispiel: $X^{\underline{n}}$. Die vorliegende Aufgabe zeigt, dass diese Methodik sogar auf die Funktion $(X+1)^{-1}$ anwendbar ist.

Vorbereitung 2

Eine Firma stellt Kuchen mit Rosinen her. Hierfür werden $\lambda \cdot N$ Rosinen in den Teig für N Kuchen gegeben, woraufhin die ganze Masse so gut durchmischt wird, dass wir annehmen können, dass jede einzelne Rosine mit derselben Wahrscheinlichkeit in einem der Kuchen landet. N ist unbekannt und groß.

Wie groß muss die durchschnittliche Zahl λ von Rosinen pro Kuchen sein, wenn höchstens durchschnittlich jeder hundertste Kuchen keine Rosinen enthalten darf?

Lösung

Aus der Problemstellung entnimmt man, dass die durchschnittliche Anzahl der Rosinen pro Kuchen mit λ gegeben ist. Über N bzw. die Anzahl $\lambda \cdot N$ der Rosinen ist nur bekannt, dass diese Zahlen sehr groß sind.
Wir betrachten das Problem aus der Sicht eines einzelnen Kuchens und stellen uns vor, dass dem Kuchen eine (potentiell unendliche) Anzahl X von Rosinen zugeteilt werden, wobei die einzelnen Rosinen immer mit gleicher Wahrscheinlichkeit zugeteilt werden.
Die Verteilung der Rosinen auf den Kuchen, d. h. der Zufallsvariablen X, nehmen wir approximativ als Poisson-Verteilung an, d. h. $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und $f_X(i) = 0$ sonst. Dann erhalten wir

$$\Pr[X=0] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}\,.$$

Wenn durchschnittlich höchstens jeder hundertste Kuchen frei von Rosinen sein darf, dann bedeutet dies, dass $\Pr[X=0] \le \frac{1}{100}$ erfüllt werden muss. Es folgt

$$\lambda \ge \ln 100 \approx 4{,}605\,.$$

Vorbereitung 3

Zwei Arbeiter A und B kontrollieren unabhängig eine Tagesproduktion. A und B protokollieren k_1 bzw. k_2 tatsächliche Fehler. Es sei n die Anzahl der tatsächlich aufgetretenen Produktionsfehler. Wir nehmen an, dass die Arbeiter jeden der n Fehler mit Wahrscheinlichkeit p_1 bzw. p_2 registriert haben.

Es seien X_1 bzw. X_2 die Zufallsvariablen, die die Anzahl der von Arbeiter A bzw. B gefundenen Fehler angeben. Wie sind die X_i verteilt? Für welche Werte von n gilt

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \ge 0.1] \le 0.01\,?$$

Lösung

Bemerkung: Man möchte z.B. eine zuverlässige Entscheidung, welche der beiden p_i größer ist.

Es gilt $X_i \sim \mathrm{Bin}(n;p_i)$. Daraus folgt $\mathbb{E}[X_i] = n \cdot p_i$, d. h. $\mathbb{E}[\frac{1}{n}X_i] = p_i$.

Wir wenden die Chebyshev-Ungleichung wie folgt an.

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \geq 0.1] \leq \frac{\mathrm{Var}[\frac{1}{n}X_i]}{0.01}\,.$$

Weiter gilt $\mathrm{Var}[\frac{1}{n}X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p_i(1-p_i)$. Wegen $p_i \in [0,1]$ gilt $p_i(1-p_i) \leq \frac{1}{4}$ und es folgt

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \geq 0.1] \leq \frac{\mathrm{Var}[\frac{1}{n}X_i]}{0.01} \leq \frac{1}{0{,}04n}\,.$$

Damit haben wir die hinreichende Bedingung

$$n \geq 2500\,.$$

Bemerkung: Solange wir keine weiteren Informationen zu den Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 haben, können wir die Abschätzung nicht verbessern.
Anwendung: Falls z.B. $n = 3000$ bekannt ist, und $X_1 + 0{,}1 \cdot n \leq X_2 - 0{,}1 \cdot n$ gilt, dann ist mit 99 Prozent Sicherheit Arbeiter B besser zur Fehlersuche geeignet als Arbeiter A.

Tutoraufgabe 1

1. Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

2. Beweisen Sie (analog zum Beweis der Chernoff-Schranken in der Vorlesung), dass die Chernoff-Schranke auch für Poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt.

Lösung

1. Wir können die Poisson-Approximation verwenden. Nach dieser ist die Zahl der registrierten Teilchen mit

$$\lambda = n \cdot p_i = 3 \quad (i \leq 30\,000)$$

verteilt. Also gilt

$$\Pr[\text{kein Teilchen}] \approx e^{-3} \approx 5.0\%$$

und

$$\Pr[\text{mehr als 2 Teilchen}] = 1 - \Pr[\leq 2 \text{ Teilchen}] \approx 1 - e^{-3}(1+3+9/2) \approx 57.7\%.$$

2. Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = \mu$. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} e^{tk} = e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^k}{k!} = e^{\mu(e^t-1)}\,.$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}} = e^{\mu(e^t-1)-t(1+\delta)\mu}.$$

Mit $t := \ln(1+\delta)$ erhalten wir hieraus

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{\mu\delta - (\ln(1+\delta))(1+\delta)\mu} = \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu.$$

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten ein Chamäleon, das in den nächsten 10 Stunden 500 Insekten fangen muss, um seinen Kalorienbedarf zu decken. Pro Stunde passieren das Chamäleon in Reichweite genau 100 Insekten, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{6}$ gefangen. Die anderen 40 sind groß und können mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gefangen werden.

Sei Z die Zufallsvariable der Anzahl der in den nächsten 10 Stunden gefangenen Insekten. Schätzen Sie jeweils mit den Ungleichungen nach Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Z \geq 500]$ ab, mit der das Chamäleon nicht verhungert.

Lösung

1. Wir leiten dieses Beispiel ausführlich mit den beteiligten Wahrscheinlichkeitsräumen ab. Normalerweise ist diese Ausführlichkeit nur dann erforderlich, wenn man formale Beweise anstrebt.

   - Ein kleines Insekt wird entweder gefangen (Ereignis ω_k) oder nicht gefangen (Ereignis $\overline{\omega}_k$), jeweils mit den genannten Wahrscheinlichkeiten:
   $$\Omega_k = \{\omega_k, \overline{\omega}_k\} \quad \text{und} \quad Pr_k(\omega_k) = \frac{1}{6},\ Pr_k(\overline{\omega}_k) = \frac{5}{6}\,.$$
   In einem analogen Experiment wird ein großes Insekt gefangen (Ereignis ω_g) oder nicht gefangen (Ereignis $\overline{\omega}_g$), jeweils mit den genannten Wahrscheinlichkeiten:
   $$\Omega_g = \{\omega_g, \overline{\omega}_g\} \quad \text{und} \quad Pr_g(\omega_g) = \frac{3}{4},\ Pr_g(\overline{\omega}_g) = \frac{1}{4}\,.$$
   - Die 600-fache bzw. 400-fache Wiederholung beider Experimente führt auf Produkträume Ω_K bzw. Ω_G mit 600 bzw. 400 Komponenten.
   $$\begin{aligned}\Omega_K &= \{x = (x_1, \ldots, x_{600}) : x_i \in \Omega_k\},\\ \Pr[x] &= \prod_{i_1}^{600} \Pr[x_i],\\ \Omega_G &= \{x = (x_1, \ldots, x_{400}) : x_i \in \Omega_g\},\\ \Pr[x] &= \prod_{i_1}^{400} \Pr[x_i].\end{aligned}$$
   - Um die Anzahl kleiner bzw. großer gefangener Insekten zählen zu können, führen wir die Zufallsvariablen X bzw. Y wie folgt ein.
   $$\begin{aligned}X_i(x) &= \begin{cases} 1 & : \quad x_i = \omega_k \\ 0 & : \quad x_i = \overline{\omega}_k \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, 600,\ x \in \Omega_K,\\ X &= \sum_{i=1}^{600} X_i \qquad (X_i \text{ unabhängig})\,,\\ Y_i(x) &= \begin{cases} 1 & : \quad x_i = \omega_g \\ 0 & : \quad x_i = \overline{\omega}_g \end{cases}, \quad i = 1, \ldots, 400,\ x \in \Omega_G,\\ Y &= \sum_{i=1}^{400} X_i \qquad (Y_i \text{ unabhängig})\,.\end{aligned}$$

X und Y sind binomialverteilt. Es gilt

$$W_X = \{0, 1, \ldots, 600\} \quad \text{und} \quad W_y = \{0, 1, \ldots, 400\}\,,$$

$$f_X(i) = \binom{600}{i}\left(\frac{1}{6}\right)^i\left(\frac{5}{6}\right)^{600-i} \quad \text{und} \quad f_Y(i) = \binom{400}{i}\left(\frac{3}{4}\right)^i\left(\frac{1}{4}\right)^{400-i}.$$

- Erwartungswerte und Varianz von X und Y sind

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 600 \cdot \frac{1}{6} = 100\,, \\ \mathrm{Var}[X] &= 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{6}\,, \\ \mathbb{E}[Y] &= 400 \cdot \frac{3}{4} = 300\,, \\ \mathrm{Var}[Y] &= 400 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} == \frac{300}{4}\,. \end{aligned}$$

- Um nun kleine und große Insekten gleichzeitig unabhängig zählen zu können, führt man wieder einen Produktraum ein, dieses Mal

$$\Omega = \Omega_K \times \Omega_G = \{z = (x, y);\ x \in \Omega_K \text{ und } y \in \Omega_G\}\,,$$

$$\Pr[(x, y)] = P_X[x] \cdot P_Y[y]\,.$$

Die Variablen X und Y werden auf Ω erweitert zu

$$X'((x, y)) = X(x) \qquad \text{und} \qquad Y'((x, y)) = Y(y).$$

X' bzw. Y' haben die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte wie X bzw. Y, entsprechend haben sie den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz. X' und Y' sind unabhängig.

Für die Gesamtzahl $Z = X' + Y'$ von Insekten gilt nun

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(X') + \mathbb{E}(Y') = 400 \\ \mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(X') + \mathrm{Var}(Y') = \frac{1900}{12} \approx 158. \end{aligned}$$

2. Nach Markov gilt für $t = 500$ und $\mathbb{E}(Z) = 400$

$$\Pr[Z \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{t} = \frac{400}{500} = 0.8\,.$$

Nach Chebyshev gilt für alle $t > 0$

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{t^2}\,.$$

Damit können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned} \Pr[Z \geq 500] &= \Pr[Z - 400 \geq 100] \\ &\leq \Pr[Z - 400 \geq 100] + \Pr[400 - Z \geq 100] \\ &= \Pr[|Z - 400| \geq 100] \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{t^2} = \frac{1900/12}{100^2} \approx 0,016. \end{aligned}$$

Nach Chernoff gilt

$$\Pr[Z \geq 500] = \Pr[Z \geq (1+1/4)400] \leq \left(\frac{\exp(1/4)}{(1+1/4)^{(1+1/4)}}\right)^{400} \approx 0.94 \cdot 10^{-5}.$$

Es sind nur diejenigen Abschätzungen brauchbar, die die Wahrscheinlichkeit nahe 0 oder 1 einschränken. Die Abschätzung nach Markov ist hier unbrauchbar.

Die Abschätzung nach Chernoff dagegen besagt klar, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit das Chamäleon verhungern wird. Allerdings konnte die Chernoff'sche Formel nur benutzt werden, weil bekannt war, dass Z eine Summe von 1000 unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen ist. Es gilt

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots . X_{600} + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{400}$$

mit unabhängigen Bernoulli-verteilten Variablen X_i und Y_i.
Merke: die Bernoulli-Parameter p der X_i und Y_i müssen dabei nicht gleich sein.

Die Abschätzung nach Chebyshev ist ebenfalls brauchbar und hat zudem den Vorteil, dass sie für jede Zufallsvariable Z uneingeschränkt gilt.

Tutoraufgabe 3

Wir starten mit einem Euro Kapital $K_0 = 1$ und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze: Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze. Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz. Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich 4/3 des Einsatzes als Gewinn.

1. Welchen Gewinn X_n erwarten wir bei n Würfen?

   Gegen welchen Grenzwert strebt der erwartete Gewinn $\mathbb{E}[X_n]$ für $n \to \infty$?

2. Das Kapital K_n sei gegeben durch $K_n = X_n + 1$. Es sei $Y_n = K_n/K_{n-1}$ mit (logarithmischem) Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[\ln Y_n]$. Zeigen Sie, dass $K_n \leq \exp(\mu n/2)$ gilt mit einer für wachsendes n gegen 1 strebenden Wahrscheinlichkeit, d. h.

   $$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\frac{\ln(K_n)}{n} \leq \frac{\mu}{2}\right] = 1\,.$$

   Hinweis: Nutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen.

3. Interpretieren Sie die Ergebnisse! Erklären Sie insbesondere den scheinbaren Widerspruch eines erwarteten unendlichen Gewinns und der Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital gegen 0 strebt!

Lösung

1. Sei K_n unser Kapital in der n-ten Runde mit $K_0 = 1$ und $X_n = K_n - K_0$ der entsprechende Gewinn. Sei $Y_n = 1/2$, wenn im n-ten Wurf Kopf fällt, und $Y_n = 1 + 4/3 \cdot 1/2 = 5/3$, wenn im n-ten Wurf Zahl fällt. Dann ist $K_n = K_0 \cdot Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n$. Aus

   $$\mathbb{E}[Y_i] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{13}{12}$$

folgt unmittelbar

$$\mathbb{E}[K_n] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Y_k] = \left(\frac{13}{12}\right)^n \to \infty\,.$$

Also erwarten wir einen unendlich großen Gewinn!

2. Es gilt $\mu = \mathbb{E}(\ln Y_i) = (\ln 1/2 + \ln 5/3) \cdot \frac{1}{2} < 0$. Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt für alle $\delta > 0$ und, in Abhängigkeit von n, beliebig klein werdendem $\varepsilon > 0$

$$\Pr\left[\left|\frac{\ln Y_1 + \ln Y_2 + \cdots + \ln Y_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right] \leq \varepsilon\,.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left|\frac{\ln Y_1 + \ln Y_2 + \cdots + \ln Y_n}{n} - \mu\right| < \delta\right] = 1\,.$$

Mit $\delta = \left|\frac{\mu}{2}\right| = -\frac{\mu}{2}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left|\frac{\ln K_n}{n} - \mu\right| < -\frac{\mu}{2}\right] = 1\,.$$

Wegen

$$\Pr\left[\left|\frac{\ln K_n}{n} - \mu\right| < -\frac{\mu}{2}\right] \leq \Pr\left[\frac{\ln K_n}{n} - \mu \leq -\frac{\mu}{2}\right]$$

und

$$\Pr\left[\frac{\ln K_n}{n} - \mu \leq -\frac{\mu}{2}\right] = \Pr\left[\ln K_n \leq \frac{n\mu}{2}\right] = \Pr[K_n \leq \exp(\mu n/2)]$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[K_n \leq \exp(\mu n/2)] = 1\,.$$

Für großes n also geht die Wahrscheinlichkeit gegen 1, dass $K_n \leq \exp(\mu n/2)$. Wegen $\mu < 0$ strebt also unser Kapitalstand mit immer größerer Wahrscheinlichkeit gegen 0 je länger wir spielen.

3. Es handelt sich um ein Spiel, das vorteilhaft ist, wenn man mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit einen extrem großen Gewinn erzielen will. Mit großer Wahrscheinlichkeit verliert man dabei das Anfangskapital.