Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 2
28. April 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 4. Mai 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Eine Urne enthalte 1 weißen, 2 schwarze und 3 rote, gleichartige Bälle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Ziehungen (ohne Zurücklegen) genau einen weißen und einen schwarzen Ball zu ziehen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

2. Sei $\langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse A und B gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

   Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Spieler A würfelt mit zwei üblichen 6-seitigen fairen Würfeln. Er zeigt Spieler B das Ergebnis nicht, sagt aber korrekterweise, dass beide Würfel verschiedene Augenzahlen zeigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 1 zeigt?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine unfaire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $1 - p$ „Zahl“ zeigt, wobei $0 \leq p \leq 1$ und $p \neq \frac{1}{2}$ gilt. Wir werfen eine solche Münze n mal und erhalten dabei k mal „Kopf“ und $n - k$ mal „Zahl“.

1. Beschreiben Sie das Experiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k-mal Kopf erscheint.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten zwei 6-seitige Würfel A und B. Würfel A hat 4 rote und 2 blaue Seiten. Würfel B hat 2 rote und 4 blaue Seiten. Wir nehmen an, dass die Ergebnisse von Würfen von Münze bzw. Würfel Laplace-verteilt sind bezüglich des Auftretens von Kopf oder Zahl bzw. der Seiten der Würfel.

Experiment: Es wird zunächst eine Münze geworfen. Zeigt diese Kopf ($K \in \{K, Z\}$), so wird Würfel A gewählt, ansonsten ($Z \in \{K, Z\}$) wird Würfel B gewählt. Mit dem gewählten Würfel werden dann n Würfe durchgeführt. Das Ergebnis ist ein Wort $w \in \{\mathrm{rot}, \mathrm{blau}\}^*$ der Länge n.

1. Wir schalten dem Experiment noch eine Auswahlfunktion i nach (mit $i \leq n$), die das i-te Objekt des Ergebnisses w des Experiments als neues Ergebnis auswählt.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dann das (Gesamt-)Ergebnis 'rot' auf?

2. Wir sagen, dass das Ereignis R_i eintritt, wenn das i-te Objekt der Ausgabe des Experiments 'rot' ist. Wir nehmen an, dass die Ereignisse R_1 und R_2 eingetreten sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig auch das Ereignis R_3 eingetreten ist?

3. Wir nehmen an, dass das Ereignis $\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ eingetreten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Experiment der Würfel A gewählt wurde?

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten das folgende Experiment:

- 1. Schritt: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis das erste Mal Kopf erscheint. Es sei k die Anzahl der dazu ausgeführten Münzwürfe.
- 2. Schritt: Es wird ein fairer 6-seitiger Würfel k-mal geworfen mit Ergebnissen aus der Menge $[6]$.

1. Stellen Sie die Ergebnisse des Experiments entsprechend als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum dar und beweisen Sie, dass Ihre Darstellung korrekt ist, d.h., dass die Definitionsbedingungen eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes erfüllt sind.
2. Es sei M_k das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt genau k-mal geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[M_k]$.
3. Es sei A das Ereignis, dass in den k Würfen des Würfels genau einmal eine 6 geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[A|M_k]$ und $\Pr[A]$.
4. Bestimmen Sie $\Pr[M_k|A]$.

Tutoraufgabe 3

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist keine Theorie über Experimente mit Münzen, Würfel oder Ziegen. Diskutieren Sie die mathematische Abstraktion der Aufgabenstellungen der Tutoraufgaben 1 und 2!