Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt wird am besprochen.

Aufgabe 4.1

Prof. Esparza plant mit seinem Wissen aus DWT sein TU-Gehalt aufzubessern. Daher geht er ins Spielcasino und spielt *Roulette*. Dort kann man einen beliebigen Geldbetrag k auf "Rot" oder auf "Schwarz" setzen. Wenn die Roulette-Kugel auf der Farbe zu stehen kommt, auf die man gesetzt hat, bekommt man den Geldbetrag $2k$ zurück, d.h., der Gewinn ist gleich k. Andernfalls bekommt man nichts zurück, d.h., der Gewinn ist gleich $-k$.

Prof. Esparza mag die Farbe Rot und wendet folgende Strategie an, um 1€ zu verdienen. In der ersten Runde setzt er 1€ auf Rot. Wenn er gewinnt, ist er zufrieden und setzt in den folgenden Runden nichts mehr. Wenn er verliert, verdoppelt er, d.h., er setzt in der nächsten Runde 2€ auf Rot. Wenn er dann gewinnt, hat er insgesamt einen Gewinn von 1€ gemacht, ist zufrieden und spielt nicht weiter. Ansonsten verdoppelt er wieder usw.

Wir wählen als Elementarereignisse, dass Prof. Esparza im n.ten Spiel das erste Mal gewinnt, d.h.

$$\Omega = \{1, 2, \ldots\}.$$

Wir können dann eine Zufallsvariable $X_i : \Omega \to \mathbb{R}$ definieren, die den „Gewinn" von Prof. Esparza nach i Spielen angibt:

$$X_i(n) = \begin{cases} 1 & \text{falls } n \leq i \\ -\sum_{l=1}^{i} 2^{l-1} = -(2^i - 1) & \text{sonst} \end{cases}$$

D.h., entweder gewinnt Prof. Esparza in einem der ersten i Spiele, dann ist $X_i = 1$, oder er verliert in jedem der ersten i Spiele, dann ist $X_i = -(2^i - 1)$.

a) Geben Sie die Dichte von X_i an. Nehmen Sie dabei an, dass es sich um ein Non-Profit-Casino handelt, d.h., die Wahrscheinlichkeit für Rot ist $\frac{1}{2}$.

b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[X_i]$.

c) Prof. Esparzas Frau warnt ihren Mann, dass er für seine Strategie evtl. viel Geld benötigt und dass sein Gewinn nach j Runden zwischendurch sehr negativ gewesen sein kann. Sei daher $Y_j := \min_{1 \leq i \leq j}\{X_i\}$ für $j \geq 1$. Geben Sie die Dichte von Y_j an und berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y_j]$.

Lösungsvorschlag

a) Die Elementarereignisse $n \in \Omega$ geben gerade an, wann das erste Mal gewonnen wird - d.h. das Elementerereignis n besagt, dass die ersten $n-1$ Spiel verloren wurden und dann im n.ten Spiel das erste Mal gewonnen wird.

Es handelt sich daher um eine geometrische Verteilung. Nach Aufgabenstellung tritt „Rot" mit W'keit $\frac{1}{2}$ ein, d.h. er gewinnt jedes Spiel mit W'keit $\frac{1}{2}$ und verliert auch jedes Spiel mit W'keit $\frac{1}{2}$, somit ist die Elementarw'keit, dass er im n.ten Spiel das erste Mal gewinnt gerade

$$\Pr[n] = 2^{-n}.$$

Dass es sich tatsächlich um einen diskreten W'keitsraum handelt (war nicht verlangt!), folgt dann wieder mittels der geometrischen Reihe:

$$\Pr[\Omega] = \sum_{n \in \Omega} \Pr[n] = \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[n] = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}$$

$$= -1 + 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} = -1 + \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n} = -1 + \frac{1}{1 - 2^{-1}} = -1 + 2 = 1.$$

Nach Aufgabenstellung, wird im n.ten Spiel (soweit die ersten $n-1$ Spiel verloren wurden) 2^{n-1} EUR gesetzt, d.h. werden die ersten n Spiele verloren, so hat sich der anfängliche Kontostand um

$$-\sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} = -\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = -\frac{1-2^{n-1+1}}{1-2} = 1-2^n$$

geändert, wird hingegen im n.ten Spiel das erste Mal gewonnen, so hat sich der Kontostand insgesamt um

$$2^{n-1} - \sum_{k=1}^{n-1} 2^{k-1} = 2^{n-1} - \sum_{k=0}^{n-2} 2^k = 2^{n-1} + (1-2^{n-1}) = 1$$

geändert - diese sind gerade die Werte, die die Zufallsvariable X_i annehmen kann, d.h.

$$W_{X_i} = \{X_i(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = \{1, 1-2^i\}.$$

Die Dichte von X_i kann daher nur bei 1 und $1-2^i$ größer 0 sein, und dort gilt

$$\Pr[X_i = 1] = \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) = 1\}] = \Pr[\{1,2,\ldots,i\}]$$
$$= \sum_{k=1}^{i} \Pr[k] = \sum_{k=1}^{i} 2^{-k} = -1 + \sum_{k=0}^{i} 2^{-k} = -1 + \frac{1-2^{-i+1}}{1-2^{-1}} = -1 + 2 \cdot 1 - 2^{-i-1} = 1 - 2^{-i}$$

und

$$\begin{aligned}\Pr[X_i = 1-2^i] &= \Pr[\{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) = 1-2^i\}] = \Pr[\{i+1, i+2, i+3, \ldots\}] \\ &= \Pr[\Omega \setminus \{1,2,\ldots,i\}] = 1 - \Pr[X_i = 1] = 1 - (1-2^{-i}) = 2^{-i}.\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X_i] &= -(2^i-1) \cdot \Pr[X_i = -(2^i-1)] + 1 \cdot \Pr[X_i = 1] \\ &= (-2^i+1) \cdot \frac{1}{2^i} + 1 \cdot (1 - \frac{1}{2^i}) \\ &= 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X_i] &= (-(2^i-1))^2 \cdot \Pr[X_i = -(2^i-1)] + 1^2 \cdot \Pr[X_i = 1] \\ &= (-2^i+1)^2 \cdot \frac{1}{2^i} + 1 \cdot (1 - \frac{1}{2^i}) \\ &= 2^i - 1\end{aligned}$$

c) Man betrachte zunächst wieder den Wertebereich der Zufallsvariablen $Y_j = \min_{1 \le i \le j} X_i$

$$W_{Y_j} = \{Y_j(\omega) \mid \omega \in \Omega\} = \{Y_j(1), Y_j(2), Y_j(3), \ldots, Y_j(j+1)\} = \{1, -1, -3, \ldots, 1-2^j\},$$

da $Y_j(k) = 1-2^j$ für alle $k > j$.

Als nächstes bestimmt man wieder die Dichte von Y_j:

- Nach Definition gilt

$$[Y_j = 1] = \{\omega \in \Omega \mid Y_j(\omega) = 1\} = \{\omega \in \Omega \mid \min\{X_1(\omega), \ldots, X_j(\omega)\} = 1\}$$
$$= \{\omega \in \Omega X_1(\omega) = 1 \wedge \ldots \wedge X_j(\omega) = 1\} = \bigcap_{1 \le i \le j} \{\omega \in \Omega \mid X_i(\omega) = 1\} = \bigcap_{1 \le i \le j} \{1, 2, \ldots, i\} = \{1\}$$

  Also gilt $\Pr[Y_j = 1] = \Pr[1] = \frac{1}{2}$.

– Für $1 \leq i < j$ gilt, dass X_i die einzige Variable ist, welche den Wert $1-2^i$ annehmen kann, soll daher „$Y_j = 1-2^i$“ gelten, so muss „$X_i = 1-2^i$“ und „$X_{i+1} = 1, \ldots, X_j = 1$“ gelten. Das heisst, $\Pr[Y_j = 1-2^i]$ ist gerade die W'keit, dass im $i+1$.ten Spiel das erste Mal gewonnen wird.

  Formal:

  Nach Definition steht $X_i = 1-2^i$ für das Ereignis $\{i+1, i+2, \ldots\}$ und $X_{i+1} = 1$ für $\{1, \ldots, i+1\}$.

  Damit folgt

$$[Y_j = 1-2^i] = [X_1 = -1] \cap [X_2 = -3] \cap \ldots [X_i = 1-2^i] \cap [X_{i+1} = 1] \cap \ldots \cap [X_j = 1]$$
$$= \{1,2,3\ldots\} \cap \{2,3,\ldots\} \cap \ldots \{i, i+1, \ldots\} \cap \{1, \ldots, i+1\} \cap \ldots \cap \{1, \ldots, j\} = \{i+1\}.$$

  Also:

$$\Pr[Y_j = 1-2^i] = \Pr[i+1] = 2^{-i-1}.$$

– Schließlich nimmt Y_j genau dann den Wert $1-2^j$ an, falls X_j den Wert $1-2^j$ annimmt, d.h., wenn die ersten j Spiele verloren werden, d.h. $\Pr[Y_j = 1-2^j] = 2^{-j}$.

Damit folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y_j] &= 1 \cdot \Pr[Y_j = 1] + \sum_{i=1}^{j} (-(2^i-1)\Pr[Y_j = -(2^i-1)] \\
&= \frac{1}{2} + \left(\sum_{i=1}^{j-1} (-(2^i-1)\Pr[Y_j = -(2^i-1)] \right) - (2^j-1)\Pr[Y_j = -(2^j-1)] \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{i=0}^{j-1} \left((-2^i+1) \cdot \frac{1}{2^{i+1}} \right) + (-2^j+1) \cdot \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2} + \sum_{i=0}^{j-1} \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{i+1}} \right) - 1 + \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{j}{2} + \sum_{i=1}^{j} \frac{1}{2^i} - 1 + \frac{1}{2^j} \\
&= \frac{1}{2} - \frac{j}{2}
\end{aligned}$$

Aufgabe 4.2

In der aller ersten Übungsaufgabe wurde das Minimum zweier Würfelergebnisse betrachtet.

Wir können das nun wie folgt mittels Zufallsvariablen beschreiben: Es seien

$$X_1, X_2 : \Omega \to \{1, \ldots, 6\}$$

zwei unabhängige Zufallsvariablen, wobei jeweils

$$\Pr[X_i = k] = \frac{1}{6}$$

gelte für $i \in \{1,2\}$ und $k \in \{1, \ldots, 6\}$.

Wir waren dann in Übungsaufgabe 1.1 an der Dichte der Zufallsvariablen

$$\min\{X_1, X_2\}$$

interessiert.

(a) Verwenden Sie Satz 10:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X \geq k],$$

um zu zeigen, dass $\mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}] = \frac{91}{36}$ gilt.

(b) Bestimmen nun $\mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\}]$ mittels $\mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}]$, $\mathbb{E}[X_1]$ und den Rechenregeln für den Erwartungswert.

Lösungsvorschlag

(a) Nach der Vorlesung gilt für eine diskrete Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}$:

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X \geq k].$$

Damit folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}] &= \sum_{k\geq 1} \Pr[\min\{X_1, X_2\} \geq k] \\
&= \sum_{k\geq 1} \Pr[X_1 \geq k, X_2 \geq k] \\
&= \sum_{k\geq 1} \Pr[X_1 \geq k]\Pr[X_2 \geq k] \\
&= \sum_{1\leq k\leq 6} \Pr[X_1 \geq k]^2 \\
&= \sum_{1\leq k\leq 6} \frac{(7-k)^2}{36} \\
&= \frac{1}{36} \sum_{1\leq k\leq 6} (7-k)^2 \\
&= \frac{1}{36} \sum_{1\leq 7-l\leq 6} l^2 \\
&= \frac{1}{36} \sum_{1\leq l\leq 6} l^2 \\
&= \frac{91}{36}
\end{aligned}$$

Man beachte, dass im Schritt von der zweiten zur dritten Zeile die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen verwendet wurde. Auf die angegebenen Umformungen in den Zeilen 6-8 kann natürlich verzichtet werden.

(b) Es gilt

$$\max\{X_1, X_2\} + \min\{X_1, X_2\} = X_1 + X_2.$$

Somit folgt

$$\mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\}] + \mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}] = \mathbb{E}[X_1 + X_2] = 2\mathbb{E}[X_1] = 2\frac{7}{2} = 7.$$

Also gilt

$$\mathbb{E}[\max\{X_1, X_2\}] = 7 - \mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}] = 7 - \frac{91}{36} = \frac{161}{36}.$$

Aufgabe 4.3

Es seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen über dem diskreten Wahrscheinlickeitsraum $(\Omega, \Pr)$, wobei $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$ definiert seien.

Zeigen Sie formal anhand der Definitionen

$$\mathbb{E}[X \cdot Y \mid Y = y] = y \cdot \mathbb{E}[X \mid Y = y],$$

wobei $\Pr[Y = y] > 0$ gelte.

Lösungsvorschlag

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X \cdot Y \mid Y = y] &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Y(\omega) \frac{\Pr[\{\omega\} \cap Y^{-1}(y)]}{\Pr[Y = y]} \\
&= \sum_{\omega \in Y^{-1}(y)} X(\omega) \cdot Y(\omega) \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[Y = y]} \\
&= \sum_{\omega \in Y^{-1}(y)} X(\omega) \cdot y \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[Y = y]} \\
&= y \cdot \sum_{\omega \in Y^{-1}(y)} X(\omega) \frac{\Pr[\omega]}{\Pr[Y = y]} \\
&= y \cdot \mathbb{E}[X \mid Y = y]
\end{aligned}
$$