Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Lösungsblatt 7
10. Juni 2014

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Wir werfen 2 faire Würfel. Die erhaltenen Augenzahlen seien $a$ und $b$. Dann sind die Ereignisse $a = b$ und $|a - b| = 1$ gleichwahrscheinlich.
2. 3 disjunkte Ereignisse sind stets unabhängig.
3. Falls $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable ist mit $\mathbb{E}[X^2] = 0$, dann gilt $X(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
4. Es gibt einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $W = (\Omega, \Pr)$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, so dass alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.
5. Es gibt keine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 0.
6. Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable, die nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annimmt.
   Dann gilt $1 \le \Pr[X = 0] + \mathbb{E}[X]$.
7. Es gibt keine Zufallsvariable $X$ mit wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion $G_X(s) = \frac{1}{1-s}$ .
8. Sei $G_X(s) = \frac{1+s}{2}$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer Zufallsvariablen $X$. Dann gilt $\Pr[X = 2] = 0$.
9. Sei $X \sim \mathrm{Bin}(2, \frac{1}{2})$, dann gilt $(X + X) \sim \mathrm{Bin}(4, \frac{1}{2})$.
10. Die Summe zweier unabhängiger Indikatorvariablen $X$ und $Y$ ist binomialverteilt.

### Lösung

Für die richtige Antwort zuammen mit der richtigen Begründung gibt es je Aufgabe einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Falsch! Die Würfel sind im Algorithmus unterscheidbar. $a = b$ besteht aus 6 Ereignissen, $|a - b| = 1$ besteht aus 10 Ereignissen.
2. Falsch! Sie sind abhängig, falls sie nicht leer sind.
3. Falsch! Gegenbeispiel: seien $W_X = \mathbb{N}_0$, $\Pr[X = 0] = 1$ und $\Pr[X = i] = 0$ für alle $i \neq 0$. Dann gilt $\mathbb{E}[X^2] = 0$.
4. Falsch! Sei $\Pr(e_i) = p$ für alle $e_i \in \Omega$. $\sum_{i=0}^{\infty} \Pr(e_i)$ konvergiert nur für $p = 0$. Damit gilt $\sum_{i=0}^{\infty} \Pr(e_i) \neq 1$.

5. Falsch! Für $\lambda = 0$ gilt $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = 1$.
6. Wahr! Folgt aus $\Pr[X \geq 1] \leq \mathbb{E}[X]$ mit Markov-Ungleichung.
7. Wahr! Sie Summe der Koeffizienten von $s^k$ in $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k$ ist nicht gleich 1.
8. Wahr! Der Koeffizient von $s^2$ ist 0.
9. Falsch! Wertebereich von $2X$ besteht aus geraden Zahlen.
10. Falsch! Das gilt nur, wenn beide Variablen die gleiche Verteilung besitzen.

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable und $(X|X \geq t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die entsprechende bedingte Zufallsvariable mit Dichte $f_{X|X\geq t}(x) = \Pr[X = x \mid X \geq t]$. Wir nehmen stets $\Pr[X \geq t] \neq 0$ und die Existenz entsprechender Erwartungswerte an.

1. Zeigen Sie die folgende Ungleichung für bedingte Erwartungswerte:

$$t \leq \mathbb{E}[X \mid X \geq t] .$$

2. Wir nehmen zusätzlich $\Pr[X < t] \neq 0$ an. Zeigen Sie mit Benutzung obiger Ungleichung die folgende Verschärfung der Markov-Ungleichung:

$$t \cdot \Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t] .$$

3. Sei $X$ Poisson-verteilt mit Dichte $f_X$ und $f_X(0) = e^{-2}$ ($e$ ist die Eulersche Zahl). Beweisen Sie durch Anwendung der Chebyshev-Ungleichung

$$\Pr[X \geq 12] \leq \frac{1}{50} .$$

**Lösung**

1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mid X \geq t] &= \sum_{x \in W_{X|X\geq t}} x \cdot \Pr[X = x \mid X \geq t] \\ &\geq t \cdot \underbrace{\sum_{x \in W_{X|X\geq t}} \Pr[X = x \mid X \geq t]}_{=1} . \end{aligned}$$

(1P)

2. Satz für bedingte Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t] + \mathbb{E}[X \mid X \geq t] \cdot \Pr[X \mid X \geq t] \\ &\geq \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t] + t \cdot \Pr[X \mid X \geq t] . \end{aligned}$$

(2P)

3. Es gelten $\mathbb{E}[X] = 2$ und $\mathrm{Var}[X] = 2$.

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq 12] &\leq \Pr[|X-2| \geq 10] \\ &= \Pr[|X-\mathbb{E}[X]| \geq 10] \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{10^2} \\ &= \frac{1}{50}\,.\end{aligned}$$

(2P)

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir machen $n$ unabhängige Würfe mit je 3 fairen Würfeln. $Y$ sei die Summe aller gewürfelten Augen.

1. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $Y$!
2. Zeigen Sie, dass $Y$ mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $\frac{21}{2}n \pm 5\sqrt{35n}$ liegt.

**Lösung**

1. Sei $X$ die Augenzahl, die bei einem Wurf mit einem einzigen Würfel geworfen wird. Der Erwartungswert der Zufallsvariablen $X$ ist

$$\mathbb{E}[X] = \left(\sum_{1 \leq i \leq 6} \frac{i}{6}\right) = \frac{1}{6} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}\,.$$

Die Varianz der Augenzahl $X$ bei einem Wurf beträgt

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \left(\sum_{1 \leq i \leq 6} \frac{i^2}{6}\right) - \left(\frac{7}{2}\right)^2 = \frac{91}{6} - \frac{49}{4} = \frac{35}{12}\,.$$

Aufgrund der Unabhängigkeit der Würfe ergibt sich für die Varianz der Summe $Y$ bei $n$ Würfen von je zwei Würfeln

$$\mathrm{Var}(Y) = 3n\mathrm{Var}(X) = \frac{35}{4}n\,.$$

Um den Erwartungswert der Summe $Y$ zu erhalten, muss die Unabhängigkeit der Würfe nicht vorausgesetzt werden. Es gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 3n\mathbb{E}[X] = \frac{21}{2}n\,.$$

(2P)

2. Mit der Standardabweichung $\sigma = \sqrt{\mathrm{Var}[Y]}$ lautet die Chebyshevsche Ungleichung für alle $k > 0$
$$\Pr[|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq k\sigma] \leq \frac{1}{k^2}\,,$$
und wegen $\Pr[\,|Y - \mathbb{E}(Y)| \geq k\sigma\,] + \Pr[\,|Y - \mathbb{E}(Y)| < k\sigma\,] = 1$ ist diese Ungleichung gleichbedeutend mit
$$1 - \frac{1}{k^2} \;\leq\; \Pr[\,|Y - \mathbb{E}(Y)| < k\sigma\,] \;\leq\; 1\,.$$
Wir substituieren $\mathbb{E}[Y]$ und $\sigma$ und erhalten mit $k^2 = 100$
$$1 - \frac{1}{100} \;\leq\; \Pr[\,|Y - \frac{21}{2}n| < 5\sqrt{35n}\,] \;\leq\; 1\,.$$
(3P)

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Geben Sie ein Beispiel für einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ und zwei unabhängige geometrisch verteilte diskrete Zufallsvariable $X$ und $Y$ über $(\Omega, \Pr)$ an.

   Begründen Sie Ihre Konstruktion.

2. Sei $F(z)$ bzw. $G(z)$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für eine Zufallsvariable $X_F$ bzw. $X_G$. Sei $H(z) = F(G(z))$.

   Berechnen Sie $H(1)$, $H'(1)$ und $H''(1)$ in Abhängigkeit ggf. von $\mathbb{E}[X_F]$, $\mathrm{Var}[X_F]$, $\mathbb{E}[X_G]$ und $\mathrm{Var}[X_G]$.

### Lösung

1. Wenn eine Münze so lange geworfen wird, bis „Kopf“ erscheint, dann ist die Anzahl $Z$ der Würfe geometrisch verteilt.

   Der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum für $Z$ sei beispielsweise $W' = (\Omega', \Pr')$.

   Eine zweimalige Ausführung des Experiments wird als einmalige Ausführung des Produktexperiments (parallele Eperimente) $W = (\Omega, \Pr) = (\Omega' \times \Omega', \Pr)$ formuliert mit $\Pr[(\omega_1, \omega_2)] = \Pr'[\omega_1] \cdot \Pr'[\omega_2]$.

   Dann werden Zufallsvariable $X$ und $Y$ über $W$ wie folgt definiert.
$$X((\omega_1, \omega_2)) = Z(\omega_1) \quad \text{und} \quad Y((\omega_1, \omega_2)) = Z(\omega_2)\,.$$
(2P)

2. Es gilt $G(1) = 1$ und $F(1) = 1$, mithin

$$H(1) = F(G(1)) = F(1) = 1\,.$$

Mit der Kettenregel erhalten wir

$$H'(z) = F'(G(z)) \cdot G'(z)$$

und

$$H''(z) = F'(G(z)) \cdot G''(z) + F''(G(z)) \cdot G'(z)^2\,,$$

und damit

$$H'(1) = F'(G(1)) \cdot G'(1) = F'(1) \cdot G'(1) = \mathbb{E}[X_F] \cdot \mathbb{E}[X_G]$$

und

$$H''(1) = F'(1) \cdot G''(1) + F''(1) \cdot G'(1)^2 = \mathbb{E}[X_F] \cdot G''(1) + F''(1) \cdot \mathbb{E}[X_G]^2\,.$$

Mit $G''(1) = \mathrm{Var}[X_G] - \mathbb{E}[X_G] + \mathbb{E}[X_G]^2$ und $F''(1) = \mathrm{Var}[X_F] - \mathbb{E}[X_F] + \mathbb{E}[X_F]^2$ (siehe Vorlesung) erhalten wir

$$H''(1) = \mathbb{E}[X_F]\cdot\big(\mathrm{Var}[X_G] - \mathbb{E}[X_G] + \mathbb{E}[X_G]^2\big) + \big(\mathrm{Var}[X_F] - \mathbb{E}[X_F] + \mathbb{E}[X_F]^2\big)\cdot\mathbb{E}[X_G]^2\,.$$

(3P)

## Zusatzaufgabe 3 (Wiederholung des Ballot-Problems)

Peter und Paul spielen ein Spiel mit $n$ Runden, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine Runde gewinnt, während der Andere gleichzeitig verliert. Der Gewinner einer Runde erhält vom Verlierer einen Euro. Aus Gründen der Fairness sei $n$ geradzahlig. Nach jeder Runde bestimmt Peter seinen summarischen Spielerfolg, so dass der Gewinn positiv und der Verlust negativ bilanziert wird.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit kann Peter nach Spielende einen Gewinn von genau 2 € verbuchen?
2. Angenommen wir wissen, dass Peter bei Spielende 2 € Gewinn gemacht hat. Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Peter nach jeder Runde den Gesamtgewinn positiv bilanzieren konnte.

**Lösung**

1. Zunächst gilt, dass Peter bei $n$ Runden genau $a = x + 2$ Mal gewinnen muss, wenn er $b = x$ Mal verliert mit $a + b = n$. Es folgt $a = \frac{n+2}{2}$.

   Es gibt genau $\binom{n}{a}$ Möglichkeiten, die $a$ Gewinne auf die $n$ Runden zu verteilen. Alle Verteilungen sind gleichwahrscheinlich.

   Sei $p$ die Wahrscheinlichkeit, dass Peter nach Spielende einen Gewinn von genau 2 € verbuchen kann. Dann gilt

$$p = \binom{n}{a} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^a \left(\frac{1}{2}\right)^b = \binom{n}{\frac{n}{2}+1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\,.$$

2. Allerdings verletzen manche dieser Verteilungen die Bedingung, dass im Spielverlauf für Peter nie eine bilanzierte 0€ (leere Kasse) oder sogar ein Verlust auftreten darf.

   Zunächst gibt es Spielverläufe $A$, die mit einem Gewinn für Peter in der ersten Runde beginnen, und solche Spielverläufe $B$, die mit einem Verlust in der ersten Runde beginnen.

   Es gibt Anzahl $|B| = \binom{n-1}{\frac{n}{2}+1}$ Spielverläufe, die alle „schlecht" sind, weil sie Verlust für Peter bedeuten.

   Es gibt Anzahl $|A| = \binom{n-1}{\frac{n}{2}}$, die mit einem Gewinn in der ersten Runde beginnen. Davon gibt es aber solche Spielverläufe, die zwischendurch die obigen Bedingungen verletzen.

   Nach dem Ballotschen Spiegelungsprinzip (siehe DS Vorlesung vom WS12/13) lassen sich diese „schlechten" Spielverläufe wie folgt berechnen:

   Jeder „schlechte" Spielverlauf lässt sich einem fiktiven Spielverlauf zuordnen, der bei -1€ startet und bei +2€ endet, also den Spielverläufen $B$ entsprechen.

   Wir fassen das Ergebnis wie folgt zusammen, wobei $q$ die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit sei.

$$q = \frac{|A| - |B|}{|A| + |B|}\,.$$

---

***Hinweis:*** *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

---

## Vorbereitung 1

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1 cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Münze gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

**Lösung**

Die Gleichverteilung von Punkten auf einer Fläche bedeutet, dass gleich große Flächenstücke im Mittel gleich oft von erzeugten Punkten berührt werden, hier z. B. durch den Mittelpunkt geworfener Münzen.

Die Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden horizontalen Linien teilt sich in gleich große Bereiche $B_1$ und $B_2$ von Lagepositionen der Münze, wenn $B_1$ die Menge von Punkten umfasst mit größerem Abstand als 1 zu einer der beiden Linien und $B_2$ die übrigen Punkte zwischen den Linien enthält.

Die Münze berührt genau dann eine der Linien, wenn deren Mittelpunkt in $B_2$ fällt.

Da die Flächen von $B_1$ und $B_2$ gleich groß sind, berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit 1/2 eine der beiden Linien.

Da wir davon ausgehen, dass jeder der Zwischenräume zwischen benachbarten Linien mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden, berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit 1/2 irgendeine Linie.

## Vorbereitung 2

Seien $A$, $B$ und $C$ jeweils (unabhängig) gleichverteilt über $[0,1]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Lösungen der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ reellwertig sind?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $A \cdot C$ und verwenden Sie für die sich anschließende Rechnung $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.

**Lösung**

$A$, $B$ und $C$ sind kontinuierliche Zufallsvariable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Alle Lösungen sind genau dann reell, wenn $B^2 \geq 4AC$ gilt. Es gibt höchstens 2 Lösungen.

Wir definieren den 3-dimensionalen Körper $V := \{(A,B,C)\,;\, B^2 \geq 4AC \wedge 0 \leq A,B,C \leq 1\}$.

Aus Gründen der Unabhängigkeit und Gleichverteilung der $A,B,C$ ist $\Pr[B^2 \geq 4AC]$ durch das Verhältnis des Volumens von $V$ zum Volumen des Einheitswürfels $[0,1]^3$ bestimmt. Das Volumen des Einheitswürfels ist 1.

Wir definieren noch $F(B) := \{(A,C)\,;\, B^2 \geq 4AC \wedge 0 \leq A,C \leq 1\}$ und erhalten

$$
\begin{aligned}
\Pr[B^2 \geq 4AC] &= \int_V \mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}C \\
&= \int_0^1 \left( \int_{F(B)} \mathrm{d}A\,\mathrm{d}C \right) \mathrm{d}B \\
&= \int_0^1 \left( \int_0^{B^2/4} \mathrm{d}A + \int_{B^2/4}^1 \frac{B^2/4}{A} \,\mathrm{d}A \right) \mathrm{d}B \\
&= \int_0^1 \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} \ln \frac{B^2}{4} \,\mathrm{d}B \\
&= \frac{\ln 2}{6} + \frac{5}{36} \approx 25.4\%\,.
\end{aligned}
$$

## Vorbereitung 3

Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten die Menge $\Omega^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $x_1, x_2, \ldots$ von Elementen der Menge $\Omega$ und definieren für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ die Mengen $A_{i,e} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}\,;\, \omega_i = e\} \subseteq \Omega^{\mathbb{N}}$. Dabei bedeutet $\omega_i$ das $i$-te Folgenelement der Folge $\omega$. Sei $\mathcal{E} = \{A_{i,e}\,;\, i \in \mathbb{N}, e \in \Omega\}$.

Man zeige:

Es gibt einen Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega^{\mathbb{N}}, \sigma_{\Omega^{\mathbb{N}}}(\mathcal{E}), \Pr_{\mathbb{N}})$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ gilt

$$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}] = \Pr(e)\,.$$

**Lösung**

Wir definieren $\Pr_{\mathbb{N}}$ wie folgt. Wir konstruieren

1. die Wahrscheinlichkeit des Komplements

$\Pr_{\mathbb{N}}[\overline{A_{i,e}}] = 1 - \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}]$.

2. die $A_{i,e}$ als unabhängige Ereignisse:

$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1} \cap \ldots \cap A_{i_k,e_k}] = \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_k,e_k}]$.

3. die Wahrscheinlichkeit für beliebige endliche Vereinigungen mit der Siebformel:

$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1} \cup \ldots \cup A_{i_k,e_k}] = \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1}] + \ldots + \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_k,e_k}] - \ldots$

4. die Wahrscheinlichkeit für beliebige abzählbare Vereinigungen als Limes:

$\Pr_{\mathbb{N}}[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n] = \lim_{n\to\infty} \Pr_{\mathbb{N}}[A_1 \cup \ldots \cup A_n]$.

Die Ausarbeitung der Beweise ist Gegenstand der Maßtheorie.

## Tutoraufgabe 1

Peter und Paul spielen ein Spiel mit $n$ Runden, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine Runde gewinnt, während der Andere gleichzeitig verliert. Der Gewinner einer Runde erhält vom Verlierer einen Euro. Aus Gründen der Fairness sei $n$ geradzahlig. Nach jeder Runde bestimmen Peter und Paul ihren summarischen Spielerfolg, so dass jeder seinen Gewinn positiv und den Verlust negativ bilanziert.

Angenommen wir wissen, dass Paul am Spielende 100€ Gewinn gemacht hat.

Bestimmen Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass Peter nach keiner Runde einen Gewinn von 50 € bilanzieren konnte.

**Lösung**

Aus der Sicht von Paul ist der Spielverlauf so, dass er nie einen Verlust von 50€ macht, so lange bis er nach $n$ Runden genau einen Gewinn von 100€ bilanziert.
Zunächst gilt, dass Paul bei $n$ Runden genau $a = x + 100$ Mal gewinnen muss, wenn er $b = x$ Mal verliert mit $a + b = n$. Es folgt $a = \frac{n+100}{2}$.

Es gibt genau $\binom{n}{a}$ Möglichkeiten, die $a$ Gewinne auf die $n$ Runden zu verteilen. Alle Verteilungen sind gleichwahrscheinlich.

Allerdings verletzen manche dieser Verteilungen die Bedingung, dass im Spielverlauf für Paul kein Verlust von 50€ auftreten darf. Nach dem Ballotschen Spiegelungsprinzip (siehe DS Vorlesung vom WS12/13) lassen sich die „schlechten" Spielverläufe wie folgt berechnen:

Jeder „schlechte" Spielverlauf lässt sich einem fiktiven Spielverlauf zuordnen, der bei -100€ startet und bei +100€ endet.
Es gibt genau $\binom{n}{(n+200)/2}$ Möglichkeiten von „schlechten" Spielverläufen. Wir fassen das Ergebnis wie folgt zusammen, wobei $p$ die gesuchte bedingte Wahrscheinlichkeit sei.

$$p = \frac{\binom{a+b}{a} - \binom{a+b}{a+50}}{\binom{a+b}{a}}.$$

## Tutoraufgabe 2

1. Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

2. Ein Krankenhaus steht in einer Straße der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

   Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?

**Lösung**

1. Sei $D$ der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt. Für $0 \le x \le 1$ ist

   $$\Pr[D \le x] = \frac{x^2 \cdot \pi}{1^2 \cdot \pi} = x^2 \,.$$

   Da für eine Verteilungsfunktion $F(x)$ zu einer Dichte $f(x)$

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{dt}$$

   gilt, folgt für die Dichte der Verteilung von $D$ für alle $x$ mit $0 < x < 1$

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x^2 = 2x \,.$$

   Außerhalb von $[0, 1]$ gilt $f(x) = 0$.

2. Ein auf $[0, \ell]$ gleichverteiltes $X$ besitzt auf $[0, \ell]$ die Dichte $\frac{1}{\ell}$. Es gilt

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X-a|] &= \mathbb{E}\left[|X-a| \,|\, 0 \le X \le a\right] \cdot \frac{a}{\ell} \;+\; \mathbb{E}\left[|X-a| \,|\, a \le X \le \ell\right] \cdot \frac{\ell - a}{\ell} \\ &= \frac{a}{\ell} \int_0^a (a-x) \cdot \frac{1}{a}\,\mathrm{d}x \;+\; \frac{\ell - a}{\ell} \int_a^\ell (x-a) \cdot \frac{1}{\ell - a}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{a^2}{2\ell} \;+\; \frac{(\ell - a)^2}{2\ell} \,. \end{aligned}$$

   Man kann nach $a$ differenzieren, um das Minimum $a = \frac{\ell}{2}$ zu finden.

# Tutoraufgabe 3

1. Seien $X$ und $Y$ unabhängige und positivwertige kontinuierliche Zufallsvariablen. Drücken Sie die Dichtefunktion $f_Z$ von $Z = X/Y$ durch die Dichtefunktionen $f_X$ und $f_Y$ von $X$ bzw. $Y$ aus.

2. Die Zufallsvariablen $X$ und $Y$ seien gegeben durch die Koordinaten eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in \{(s,t); s^2 + t^2 \le 4\}$ der $x, y$-Ebene.

   Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$!

   Sind $X$ und $Y$ unabhängig? Begründung!

   Berechnen Sie die Randdichten $f_X$ und $f_Y$!

**Lösung**

1. Wir berechnen die Dichte $f_Z$ als Ableitung der Verteilung $F_Z$. Da $X$ und $Y$ positivwertig sind, gilt zunächst $f_X(x) = 0$ und $f_Y(y) = 0$ für alle $x \leq 0$ und $y \leq 0$. Daraus folgt ohne Rechnung $f_Z(z) = 0$ für alle $z \leq 0$, mithin $F_Z(z) = 0$ für alle $z \leq 0$.

   Für die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ gilt

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) &= \Pr[Z \leq z] \\
&= \Pr[X/Y \leq z] \\
&= \Pr[(X,Y) \in \{(x,y)\,;\, x \leq zy\}] \\
&= \int_{\{(x,y)\,;\,x \leq zy\}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{\{(x,y)\,;\,0<x,0<y,x \leq zy\}} f_X(x) \cdot f_Y(y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty f_Y(y) \cdot \left( \int_0^{z \cdot y} f_X(x)\ \mathrm{d}x \right)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty f_Y(y) \cdot F_X(zy)\ \mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

   Damit errechnet sich die Dichte zu

$$
\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_0^\infty f_Y(y) \cdot F_X(zy)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty f_Y(y) \cdot f_X(zy) \cdot y\ \mathrm{d}y\,.
\end{aligned}
$$

2. (a) Die gegebene Punktmenge $K = \{(s,t); s^2 + t^2 \leq 4\}$ ist eine Kreisscheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0)$. Gleichverteilung auf der Kreisscheibe bedeutet für die Dichte die Gleichung

$$f_{X,Y}(x,y) = c$$

   für alle $(x,y) \in K$ mit einer konstanten Zahl $c$. Außerhalb von $K$ ist die Dichte gleich 0. Das Integral über $\mathbb{R}^2$ muss 1 ergeben. Da für die Kreisfläche $F_K = 4\pi$ gilt, folgt

$$c = \frac{1}{4\pi}\,.$$

   (b) Wären $X$ und $Y$ unabhängig, dann müsste für die Verteilungsfunktionen $F_{X,Y}$, $F_X$ und $F_Y$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)\,.$$

   Dies führt man zum Widerspruch, in dem man für $(x,y) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ zeigt

$$F_{X,Y}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \neq F_X(-\sqrt{2}) \cdot F_Y(-\sqrt{2})\,.$$

Auf der Menge $B = \{(x,y)\,;\,(x \le -\sqrt{2}) \wedge (y \le -\sqrt{2})\}$ hat die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}$ den Wert 0. Damit gilt

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) &= \Pr[X \le -\sqrt{2}\ ,\ Y \le -\sqrt{2}] \\
&= \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_B f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Randverteilungen $F_X(-\sqrt{2})$ und $F_Y(-\sqrt{2})$ dagegen sind beide nicht gleich Null.

$$\begin{aligned}
F_X(-\sqrt{2}) &= \Pr[X \le -\sqrt{2}] \\
&= \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\ \mathrm{d}v\right]\ \mathrm{d}u \\
&= \int_{-1}^{-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4-u^2}}{2\pi}\ \mathrm{d}u \\
&\ne 0
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $F_Y(-\sqrt{2}) \ne 0$.

(c) Die Randdichten berechnen sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}\,,
\end{aligned}$$

und analog folgt

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}\,.$$