Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungen der Klausur
11. Oktober 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Für jedes nichtleere Ereignis $E \neq \emptyset$ eines Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ gilt $\Pr[E] \neq 0$.

2. Es gibt einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ mit $\Omega = \mathbb{N}$, so dass alle Elementarereignisse gleichwahrscheinlich sind.

3. Wir werfen zwei faire, 6-seitige Würfel. Die erhaltenen Augenzahlen seien a und b. Dann sind die Ereignisse $a = b$ und $|a + b| = 7$ gleichwahrscheinlich.

4. Die Funktion $f(s) = \frac{1}{12}(2+s)(3+s)$ ist eine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion, d. h. $G_X(s) = f(s)$ für eine existierende Zufallsvariable X.

5. Die Summe zweier unabhängiger Indikatorvariablen X und Y ist binomialverteilt.

6. Sei $X \sim \mathcal{N}(2, \frac{1}{2})$, dann gilt $(2X + 1) \sim \mathcal{N}(5, 2)$.

Lösung

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Falsch! Begründung: Jede Erweiterung $\Omega' = \Omega \cup \{e\}$ mit $\Pr[\{e\}] = 0$ ist ebenfalls ein Wahrscheinlichkeitsraum.

2. Falsch! Begründung: $1 \neq \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[\{i\}]$, wenn $\Pr[\{i\}] = p$ für alle i.

3. Wahr! Begründung. Es gibt 6 Ereignisse (x, y) mit $x = y$. Andererseits gilt $\{(w_1, w_2) \mid w_1 + w_2 = 7\} = \{(1, 6), (2, 5), (3, 4), (4, 3), (5, 2), (6, 1)\}$.

4. Wahr! Die Summe der Koeffizienten von s^i ist gleich 1.

5. Falsch! Das gilt nur, wenn beide Variablen die gleiche Verteilung besitzen.

6. Wahr! Lineare Transformation $Y = aX + b$.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Seien $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum und A, B Ereignisse über Ω.

1. Man zeige: Falls $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = 1$ gelten, dann gilt auch $\Pr[A \cap B] = 1$.

2. Man zeige: Falls A und B unabhängig sind und $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ gilt, dann gilt auch $|\Omega| \geq 4$.

3. Wir nehmen $\Pr[B] = \frac{11}{24}$ und die bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[B|A] = \frac{3}{4}$ und $\Pr[A|\overline{B}] = \frac{1}{13}$ an.

   Berechnen Sie $\Pr[A|B]$.

Lösung

1. Aus
   $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ folgt
   $\Pr[A \cup B] = 1 + 1 - \Pr[A \cap B]$, mithin $\Pr[A \cup B] + \Pr[A \cap B] = 2$.

   Wegen $\Pr[A \cup B] \leq 1$ folgt aus $\Pr[A \cap B] < 1$ ein Widerspruch. (3 P.)

2. $$\begin{aligned} \Pr[A \cap B] &= \Pr[A] \cdot \Pr[B] = \tfrac{1}{4} &\implies\quad& A \cap B \neq \emptyset\,, \\ \Pr[A \cap \overline{B}] &= \Pr[A] \cdot \Pr[\overline{B}] = \tfrac{1}{4} &\implies\quad& A \cap \overline{B} \neq \emptyset\,, \\ \Pr[\overline{A} \cap B] &= \Pr[\overline{A}] \cdot \Pr[B] = \tfrac{1}{4} &\implies\quad& \overline{A} \cap B \neq \emptyset\,, \\ \Pr[\overline{A} \cap \overline{B}] &= \Pr[\overline{A}] \cdot \Pr[\overline{B}] = \tfrac{1}{4} &\implies\quad& \overline{A} \cap \overline{B} \neq \emptyset\,. \end{aligned}$$

   (2 P.)

   Da alle 4 Mengen auf der rechten Seite der Implikationen paarweise disjunkt sind, folgt $|\Omega| \geq 4$. (1 P.)

3. Satz von Bayes:

   $$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[A|B] \cdot \Pr[B]}{\Pr[A|B] \cdot \Pr[B] \;+\; \Pr[A|\overline{B}] \cdot \Pr[\overline{B}]} \qquad \text{(2 P.)}$$

   Einsetzen:

   $$\frac{3}{4} = \frac{\Pr[A|B] \cdot \frac{11}{24}}{\Pr[A|B] \cdot \frac{11}{24} \;+\; \frac{1}{13} \cdot \frac{13}{24}} \qquad \text{(1 P.)}$$

   Auflösung nach $\Pr[A|B]$:

   $$\Pr[A|B] = \tfrac{3}{11}\,. \qquad \text{(1 P.)}$$

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Es liegen eine 5-Cent-, eine 10-Cent- und eine 20-Cent-Münze jeweils mit der Rückseite nach oben auf dem Tisch. Wir betrachten einen Zufallsprozess, der in jedem Schritt die Seiten einer Laplace-zufällig aus den 3 Münzen ausgewählten Münze wendet.

Es sei X diejenige diskrete Zufallsvariable, die die Anzahl der Schritte (≥ 1) zählt, bis zum ersten Mal alle Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegen.
(Offenbar gilt beispielsweise $\Pr[X=1] = 0$.)

1. Bestimmen Sie $\Pr[X=3]$ (mit Begründung)!
2. Bestimmen Sie $\Pr[X=n]$ für gerades n (mit Begründung)!
3. Nehmen Sie an, dass genau eine der 3 Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt, während also die anderen beiden Münzen mit der Rückseite nach oben liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass nach 2 Schritten wiederum genau eine der Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt?
4. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X.

Lösung

Volle Punktzahl nur mit entsprechender Begründung!

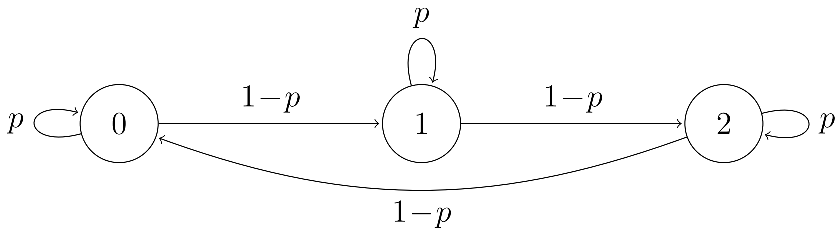
1. $\Pr[X=3] = \frac{2}{9}$. (2 P.)
2. $\Pr[X=n] = 0$ für gerades n. (2 P.)
3. $p = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$. (3 P.)
4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_X(n) = \begin{cases} \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & : n \text{ ungerade und } n > 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

(3 P.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Wir betrachten eine Markov-Kette M mit der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2\}$ und der Folge $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ von Zufallsvariablen, die durch das folgende Übergangsdiagramm in Abhängigkeit eines Parameters p mit $0 < p < 1$ gegeben ist:



1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P von M.
2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[T_{0,2} = 3]$ an. Dabei sei $T_{0,2}$ die Zufallsvariable der Übergangszeit von Zustand 0 in den Zustand 2.
3. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit $h_{0,2}$. Der Rechenweg muss aus Ihrem Protokoll hervorgehen.
4. Berechnen Sie die stationäre Verteilung q^T von M.

Lösung

1.
$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix}. \qquad \text{(1 P.)}$$

2. $\Pr[T_{0,2} = 3] = p(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p) = 2p(1-p)^2$. (2 P.)

3.
$$\begin{aligned} h_{0,2} &= 1 + p \cdot h_{0,2} + (1-p) \cdot h_{1,2} \\ h_{1,2} &= 1 + 0 \cdot h_{0,2} + p \cdot h_{1,2} && \text{(2 P.)} \\ \Longrightarrow \quad h_{1,2} &= \frac{1}{1-p}. \\ \Longrightarrow \quad h_{0,2} &= 1 + p \cdot h_{0,2} + (1-p) \cdot \frac{1}{1-p} \\ &= \frac{2}{1-p} && \text{(2 P.)} \end{aligned}$$

4. Aus $q^T P = q^T$ folgt
$$\begin{aligned} p \cdot q_0 + (1-p) \cdot q_2 &= q_0 \\ (1-p) \cdot q_0 + (1-p) \cdot q_1 &= q_1 \\ (1-p) \cdot q_1 + p \cdot q_2 &= q_2 && \text{(1 P.)} \\ \Longrightarrow \quad q_1 &= q_3 \\ q_1 &= q_2 && \text{(1 P.)} \end{aligned}$$
Wegen $q_0 + q_1 + q_2 = 1$ folgt $q^T = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$. (1 P.)

Aufgabe 5 (8 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable und $(X|X \geq t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die entsprechende bedingte Zufallsvariable mit Dichte $f_{X|X\geq t}(x) = \Pr[X = x \mid X \geq t]$. Wir nehmen stets $\Pr[X \geq t] \neq 0$ und die Existenz entsprechender Erwartungswerte an.

1. Zeigen Sie die folgende Ungleichung für bedingte Erwartungswerte:

$$t \leq \mathbb{E}[X \mid X \geq t]\,.$$

2. Wir nehmen zusätzlich $\Pr[X < t] \neq 0$ an. Zeigen Sie mit Benutzung obiger Ungleichung die folgende Verschärfung der Markov-Ungleichung:

$$t \cdot \Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t]\,.$$

3. Sei X Poisson-verteilt mit Dichte f_X und $f_X(0) = e^{-1}$ (e ist die Eulersche Zahl). Beweisen Sie durch Anwendung der Chebyshev-Ungleichung

$$\Pr[X \geq 11] \leq \frac{1}{100}\,.$$

Lösung

1.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X \mid X \geq t] &= \sum_{x \in W_{X|X\geq t}} x \cdot \Pr[X = x \mid X \geq t] && \text{(1 P.)} \\ &\geq t \cdot \underbrace{\sum_{x \in W_{X|X\geq t}} \Pr[X = x \mid X \geq t]}_{=1}\,. && \text{(2 P.)} \end{aligned}$$

2. Satz für bedingte Erwartungswerte

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t] + \mathbb{E}[X \mid X \geq t] \cdot \Pr[X \mid X \geq t] && \text{(1 P.)} \\ &\geq \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t] + t \cdot \Pr[X \mid X \geq t]\,. && \text{(1 P.)} \end{aligned}$$

3. Es gelten $\mathbb{E}[X] = 1$ und $\mathrm{Var}[X] = 1$. (1 P.)

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 11] &\leq \Pr[|X - 1| \geq 10] && \text{(1 P.)} \\ &= \Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq 10] \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{10^2} && \text{(1 P.)} \\ &= \frac{1}{100}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Seien X und Y kontinuierliche Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy^2 & : \quad 0 \leq x \leq 1,\, 0 \leq y \leq 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Randdichte $f_X(x)$.
2. Bestimmen Sie den Wert der Verteilungsfunktion $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
3. Zeigen Sie die Unabhängigkeit der Variablen X und Y.

Lösung

1. $f_X(x) = 2x$. Berechnung für $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 6xy^2\,\mathrm{d}y && \text{(2 P.)} \\ &= 2x \cdot \left[y^3\right]_0^1 \;=\; 2x\,. && \text{(1 P.)} \end{aligned}$$

2. $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{1}{32}$. Berechnung:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} 6xy^2\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot \left[y^3\right]_0^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x && \text{(2 P.)} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 2x \cdot \frac{1}{8}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{8} \cdot \left[x^2\right]_0^{\frac{1}{2}} \;=\; \frac{1}{32}\,. && \text{(1 P.)} \end{aligned}$$

3. Mit

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 6xy^2\,\mathrm{d}x \\ &= 3y^2 \cdot \left[x^2\right]_0^1 \;=\; 3y^2\,. && \text{(1 P.)} \end{aligned}$$

für alle $0 \leq y \leq 1$ folgt $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$ für alle $0 \leq x, y \leq 1$.
Ansonsten gilt $f_{X,Y}(x,y) = 0 = f_X(x) \cdot f_Y(y)$. (1 P.)

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Wir betrachten einen Spielautomaten, der in jedem Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p \geq \frac{3}{4}$ auf Gewinn für den Betreiber entscheidet. Allerdings kommt es vor, dass der Automat aufgrund einer fehlerhaften Verhaltensänderung dauerhaft nur mit Wahrscheinlichkeit $p \leq \frac{1}{4}$ in einem Spiel auf Gewinn entscheidet. Der Betreiber testet den Automaten mit einer Stichprobe von 12 Spielen und nimmt dabei an, dass die Anzahl T des Auftretens eines Gewinns nach dem Satz von DeMoivre als normalverteilte Zufallsvariable angenähert werden darf.

1. Formulieren Sie einen Test zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : p \geq \frac{3}{4}$, die Sie ablehnen, wenn bei 12 Spielen höchstens 6 Mal Gewinn gemacht wird.

   Berechnen Sie näherungsweise den Wert des Fehlers 1. Art.

2. Bestimmen Sie zu Ihrem Test den Wert des Fehlers 2. Art unter der Annahme, dass $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{4}$ ausgeschlossen werden kann.

Hinweis: Für die Standardnormalverteilung Φ gilt $\Phi(2) \approx 0.9772$.

Lösung

1. Der Ablehnungsbereich sei $\tilde{K} = \{0, 1, \ldots, 6\}$. (1 P.)

   Es sei $\tilde{T} = \dfrac{T - 12p}{\sqrt{12p(1-p)}}$. (1 P.)

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \max_{p \geq \frac{3}{4}} \Pr[T \leq 6] \\
&\approx \max_{p \geq \frac{3}{4}} \Phi\left(\frac{6 - 12p}{\sqrt{12p(1-p)}}\right) && \text{(1 P.)} \\
&= \Phi\left(\frac{6 - 12 \cdot \frac{3}{4}}{\sqrt{12 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}}\right) && \text{(1 P.)} \\
&= \Phi(-2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228\,. && \text{(1 P.)}
\end{aligned}$$

2. Die echte Alternative zu H_0 ist also $H_1 : p \leq \frac{1}{4}$. (1 P.)

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \max_{p \leq \frac{1}{4}} \Pr[T \notin \tilde{K}] \\
&= \max_{p \leq \frac{1}{4}} (1 - \Pr[T \leq 6]) && \text{(1 P.)} \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{6 - 12 \cdot \frac{1}{4}}{\sqrt{12 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{4}}}\right) && \text{(1 P.)} \\
&= 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228\,.
\end{aligned}$$