

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 3

Abgabe bis zum 16.5. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im Infler-Forum posten :).

### Aufgabe 3.1      Abzugeben

3P

Jeden Morgen begibt sich Prof. Evilparza an die Universität. Wenn es nicht regnet, so macht er mit W'keit 0.7 noch einen kurzen Abstecher in die nächste Bäckerei, um sich dort einen Kaffee zu holen; mit W'keit 0.3 begibt er sich direkt an die Universität, ohne einen Kaffee getrunken zu haben. Im Fall von Regen, nimmt er mit W'keit 0.9 den Bus und muss daher auf seinen Kaffee verzichten; nur mit W'keit 0.1 packt er seinen Regenschirm aus, um sich seinen Kaffee doch noch zu holen.

Sollte der Professor seinen morgendlichen Kaffee nicht getrunken haben, und sollte es dazu auch noch regnen, so zeigt er seine Verachtung der Studentenschaft mit W'keit 0.5, indem er den ersten Studenten, der ihm über den Weg läuft, exmatrikuliert. Im Fall von Sonnenschein, aber fehlendem Kaffee, steigt diese W'keit auf 0.7.

Hat der Professor seinen Kaffee getrunken, aber es regnet, so beträgt diese W'keit nur 0.3; während er im verbleibenden Fall, dass er sowohl seinen Kaffee hatte, als auch die Sonne scheint, mit W'keit 0.8 exmatrikuliert.

Aus Erfahrung wissen Sie, dass es an einem Morgen, an dem Prof. Evilparza einen Studenten exmatrikuliert, es mit W'keit 0.6 regnet.

Berechnen Sie die Regenw'keit.

### Aufgabe 3.2      Abzugeben.

3P

Es seien  $\{A_1, A_2, \dots, A_6\}$  unabhängige Ereignisse in einem diskreten W'keitsraum  $(\Omega, \Pr[\cdot])$ .

Sind auch  $\{A_1 \cap \overline{A_3}, \overline{A_2} \cup (A_4 \cap \overline{A_5}), A_6\}$  unabhängig? Beweisen Sie jeden Ihrer Schritte!

### Aufgabe 3.3      Abzugeben sind (a),(b) und (c)

2P+3P+2P

Es sei  $\Omega = \{0, 1\}^n$  mit  $\Pr[\omega] = 2^{-n}$  für alle  $\omega \in \Omega$ .

Jedes  $\omega \in \Omega$  lässt sich in maximale Blöcke von 0en bzw. 1en partitionieren.

Wir definieren die folgenden ZVen auf  $\Omega$ :

- $N: \Omega \rightarrow \mathbb{N}$  zählt die Anzahl der Blöcke.
- $X_i: \Omega \rightarrow \mathbb{N}_0$  gibt die Länge des  $i$ -ten Blocks an ( $i \in [n]$ ).

*Beispiel:* Für  $\omega = 0^1 1^2 0^3 1^{n-6}$  gilt dann  $N(\omega) = 4$ ,  $X_1(\omega) = 1$ ,  $X_2(\omega) = 2$ ,  $X_3(\omega) = 3$ ,  $X_4(\omega) = n - 6$  und  $X_i(\omega) = 0$  für  $i \in [n] \setminus \{1, 2, 3, 4\}$ .

(a) Zeigen Sie, dass  $X_2$  die folgende Dichte hat:

$$\Pr[X_2 = j] = \begin{cases} 2^{-n+1} & \text{falls } j = 0 \\ 2^{-j} & \text{falls } 0 < j < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $X_2$ .

*Hinweis:* A0.3 könnte hilfreich sein.

(c) Bestimmen Sie die Dichte von  $N$ .

(d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von  $N$ .

- Zeigen Sie zunächst, dass  $\frac{d}{dz} (z(1+z)^{n-1}) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} (j+1) z^j$ .
- Wie hängen  $\mathbb{E}[N(N+1)]$  und  $z^2(1+z)^{n-1}$  zusammen?

**Aufgabe 3.4**      **Abzugeben ist (a)****3P**

Sie werfen eine faire Münze solange, bis sich zum ersten Mal das Ergebnis ändert, z.B.  $KKZ$  oder  $ZZZZK$ . Sie notieren sich die Anzahl der Würfe, in denen Sie stets dasselbe Ergebnis erhalten haben. Insgesamt wiederholen Sie dieses Experiment  $l$ -mal. Die ZV  $X_i$  bezeichne die im  $i$ -ten Experiment notierte Anzahl an Würfeln.

Sei nun  $Y := \max\{X_1, \dots, X_l\}$ .

- (a) Bestimmen Sie die Verteilung von  $Y$  und zeigen Sie, dass  $\Pr[Y > \log_2 l] \approx 1 - e^{-1}$  für große  $l$ .
- (b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von  $Y$ .

**Aufgabe 3.5**      **Abzugeben.****2P+2P**

- (a) Definieren Sie diskrete ZVen  $X_n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) mit Wertebereich  $\mathbb{N}_0$ , sodass  $\mathbb{E}[X_n] \rightarrow \infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[X_n \geq 1] = 0$ .
- (b) Es sei  $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge von diskreten ZVen mit Wertebereich  $\mathbb{N}_0$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[X_n] = 0$ .

Beweisen Sie ausgehend von der Definition von  $\mathbb{E}[X_n]$ , dass dann auch  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr[X_n \geq 1] = 0$  gilt.