Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Lösungsblatt Wiederholungsklausur
22. Oktober 2004

Diskrete Strukturen II

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Bachelor ☐ Lehramt | ☐ Inform. ☐ BioInf. ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- **Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!**
- **Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!**
- **Bitte machen Sie deutlich erkennbar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört.**
- **Extrem schwere Lesbarkeit kann im Zweifelsfall zu Punktabzug führen.**
- **Als einziges Hilfsmittel zur Klausur ist ein handbeschriebenes Blatt DIN A4 zugelassen. Bei Verwendung anderer Hilfsmittel wird die gesamte Klausur mit null Punkten bewertet.**
- **Bei Fragen, die nur mit Ja(J) oder Nein(N) zu beantworten sind, werden für eine falsche Antwort keine Punkte abgezogen.**
- **Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten. Insgesamt sind maximal 100 Punkte erreichbar.**

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	Σ	Korrektor
Erstkorrektur											
Zweitkorrektur											

Aufgabe 1 (16 Punkte)

Platonisches Würfeln. Weil uns das Würfeln mit einem normalen Würfel (Hexaeder) zu langweilig geworden ist, haben wir beschlossen, mit zwei Oktaedern, also Würfeln mit 8 Seiten zu spielen. Wir nehmen dabei an, dass die Oktaeder ideal (fair) und mit den Zahlen von 1 bis 8 beschriftet sind.
Wir betrachten folgende Ereignisse:
$A :=$ Das erste Oktaeder zeigt eine gerade Zahl.
$B :=$ Das zweite Oktaeder zeigt eine ungerade Zahl.
$C :=$ Die Summe der beiden Punktzahlen ist eine gerade Zahl.
$D :=$ Das Produkt der beiden Punktzahlen ist eine gerade Zahl.
$E :=$ Die Summe beider Punktzahlen ist 6.

(a) Bestimmen Sie den Erwartungswert für die geworfene Punktzahl beim Würfeln mit *einem* Oktaeder! .... $\mathbf{9/2}$

(b) Bestimmen Sie die Varianz für die geworfene Punktzahl beim Würfeln mit *einem* Oktaeder! .... $\frac{204}{8} - \frac{9}{2}^2 = \frac{21}{4}$

(c) $\Pr[A] =$ .... $\mathbf{1/2}$

(d) $\Pr[C] =$ .... $\mathbf{1/2}$

(e) $\Pr[D] =$ .... $\mathbf{3/4}$

(f) $\Pr[E] =$ .... $\frac{5}{64}$

(g) $\Pr[A \cap B]$ .... $\mathbf{1/4}$

(h) $\Pr[A \cup B]$ .... $\mathbf{3/4}$

(i) $\Pr[A|B]$ .... $\mathbf{1/2}$

(j) $\Pr[A \cap D]$ .... $\mathbf{1/2}$

(k) $\Pr[A \cup D]$ .... $\mathbf{3/4}$

(l) $\Pr[A|D]$ .... $\mathbf{2/3}$

(m) $\Pr[D|A]$ .... $\mathbf{1}$

(n) $\Pr[E \cap D]$ .... $\mathbf{2/64 = 1/32}$

(o) Sind die Ereignisse A und C unabhängig? .... ☑ J ☐ N

(p) Sind die Ereignisse A und D unabhängig? .... ☐ J ☑ N

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sport ist Mord. Der typische TUM-Student verbringt seinen wohlverdienten Winterurlaub in den Alpen. Da er sich nicht entscheiden kann, nimmt er nicht nur sein Snowboard, sondern auch die Ski und einen Schlitten mit. Wenn er an seinem Urlaubsziel ankommt, wird er mit 50% Wahrscheinlichkeit das Snowboard, mit 40% die Ski und anderenfalls den Schlitten auswählen, um sich damit auf die Piste zu stürzen.
Das Verletzungsrisiko, also die Wahrscheinlichkeit, an einem Tag einen Unfall zu haben, beträgt für das Snowboard 16%, für die Ski 25% und für den Schlitten 10%.

(a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der TU Student an seinem ersten Urlaubstag einen Wintersportunfall erleidet?

Lösungsvorschlag

$\Pr[\text{Unfall}] = 0.5 \cdot 0.16 + 0.4 \cdot 0.25 + 0.1 \cdot 0.1 = 19\%$

(b) Nehmen wir an, dass der Student an diesem ersten Tag keinen Unfall erlitten hat. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit dem Schlitten unterwegs war?

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
\Pr[\text{Schlitten}|\text{unfallfrei}] &= \frac{\Pr[\text{unfallfrei}|\text{Schlitten}] \cdot \Pr[\text{Schlitten}]}{\Pr[\text{unfallfrei}]} \\
&= \frac{\Pr[\text{unfallfrei}|\text{Schlitten}] \cdot \Pr[\text{Schlitten}]}{1 - \Pr[\text{Unfall}]} \\
&= \frac{0.09}{0.81} \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

(c) Angenommen, der Student hatte am ersten Tag einen Unfall. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mit dem Snowboard oder mit den Ski unterwegs war?

Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
\Pr[\text{SB oder Ski}|\text{Unfall}] &= 1 - \frac{\Pr[\text{Schlitten} \wedge \text{Unfall}]}{\Pr[\text{Unfall}]} \\
&= 1 - \frac{0.1 \cdot 0.1}{0.19} \\
&= \frac{18}{19} \approx 0.947
\end{aligned}$$

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Urnengang.
Urne A enthält drei rote und zwei gelbe Bälle.
Urne B enthält vier gelbe und zwei blaue Bälle.
Urne C enthält einen gelben und einen blauen Ball.
Zunächst wird ein Ball Z aus Urne C zufällig gezogen und in Urne A abgelegt.
Der andere Ball aus Urne C wird in Urne B gelegt.
Nun ziehen wir zufällig einen Ball X aus der Urne A und einen Ball Y aus der Urne B.

(a) Wie groß ist $\Pr[X \text{ ist gelb}]$?

(b) Wie groß ist $\Pr[X \text{ ist rot und Y ist blau}]$?

(c) Wie groß ist $\Pr[X \text{ ist gelb } | Y \text{ ist blau}]$?

(d) Angenommen wir legen alle 13 Bälle in eine Urne und ziehen daraus 5 Bälle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass von diesen 5 Bällen genau 3 nicht gelb sind?

Geben Sie die exakten Ergebnisse jeweils als Bruch an!

Lösungsvorschlag

(a)

$$0.5 \cdot \left(\frac{2}{6} + \frac{3}{6} \right) = \frac{5}{12}$$

(b)

$$\frac{3}{6} \cdot 0.5 \cdot \left(\frac{2}{7} + \frac{3}{7} \right) = \frac{5}{28}$$

(c)

$$\begin{aligned} \Pr[X = \text{gelb} | Y = \text{blau}] &= \frac{\Pr[X = \text{gelb} \cap Y = \text{blau}]}{\Pr[Y = \text{blau}]} \\ &= \frac{0.5 \cdot (3/6 \cdot 3/7 + 2/6 \cdot 2/7)}{5/14} \\ &= \frac{13}{30} \end{aligned}$$

(d)

$$\frac{\binom{6}{3} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{13}{5}} = \frac{140}{423}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Es druckt nicht.

In einem Netzwerk befinden sich 10 Rechner, die in einem Zeitintervall jeweils unabhängig und mit Wahrscheinlichkeit $p = 0.1$ auf einen Drucker zugreifen.
(Formel genügt.)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der Drucker in einem bestimmten Intervall unbeschäftigt ist? ....

$\boxed{\mathbf{(1-0.1)^{10} \approx 0.35}}$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einem bestimmten Intervall mindestens zwei Druckaufträge ankommen? ....

$\boxed{\mathbf{1 - \binom{10}{1} \cdot 0.9^9 \cdot 0.1^1 - 0.9^{10}}}$

Wie groß ist der Erwartungswert für die Anzahl der Druckaufträge in einem Intervall? ....

$\boxed{\boldsymbol{np = 10 \cdot 0.1 = 1}}$

Wie groß ist die Varianz für die Anzahl der Druckaufträge in einem Intervall? ....

$\boxed{\mathbf{10 \cdot 0.1 \cdot 0.9 = 0.9}}$

Durch einen Fehler in der Druckersteuerung wird in jedem Intervall mit Wahrscheinlichkeit 0.5% ein leeres Blatt ausgegeben. Sei X die Nummer des Intervalls, in dem das erste Mal ein Blatt verschwendet wird.
(Bitte Zahlenwert angeben!)
Hinweis: $(6e)^{-1} \approx 0.061$

Wie groß ist der Erwartungswert von X? ....

$\boxed{\mathbf{1/0.5\% = 200}}$

Wie groß ist die Varianz von X? ....

$\boxed{\mathbf{(1-0.5\%)/0.5\%^2}}$

Wie groß ist ungefähr die Wahrscheinlichkeit, dass in 200 Intervallen die Anzahl der verschwendeten Blätter genau 3 beträgt? ....

$\boxed{\boldsymbol{e^{-1} \cdot 1^3/3!}}$

Aufgabe 5 (16 Punkte)

Retrospektive. Lassen Sie das letzte Semester DS-II noch einmal Revue passieren und beantworten Sie dabei die folgenden Fragen:

a) Welche Verteilungen verbindet man generell mit Wartezeiten (diskret / kontinuierlich)? Welche Eigenschaft ist beiden Verteilungen gemein?

Geometrische Verteilung und Exponentialverteilung (beide gedächtnislos) .....

b) Wenn die Chernoff-Abschätzung in der Regel genauer ist als die von Chebyshev, warum benutzt man dann nicht immer Chernoff?

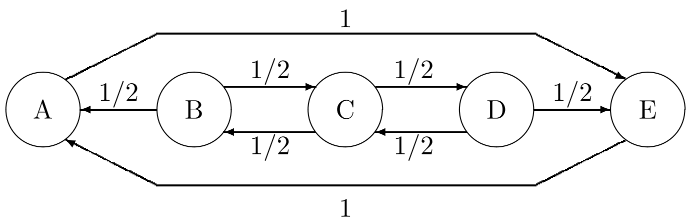
Weil nicht immer die Voraussetzungen für die Anwendung erfüllt sind. ....

c) Kann ein Maximum-Likelihood-Schätzer erwartungstreu sein? .... ✔ | N

d) Warum sollte man die Varianz einer Zufallsvariablen X mit $\frac{1}{n-1} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_i})^2$ und nicht (wie es evtl. intuitiver wäre) mit $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X_i})^2$ abschätzen?

Weil der erste Schätzer erwartungstreu ist, der zweite nicht. ....

e) In der untenstehenden Markovkette wollen wir die erwartete Anzahl h_{BD} von Schritten berechnen, die wir benötigen, um von Zustand B nach Zustand D zu kommen. Gibt es dabei ein Problem? (Wenn nicht, berechnen Sie bitte den Erwartungswert.)



Erwartungswert existiert nicht (A und E bilden rekurrente Klasse ....

f) Was ist die Auflösung von Bertrands Paradox (Zur Erinnerung: Auf die Frage "*Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine zufällig in einen Kreis gezeichnete Sehne länger als die Seite des einbeschriebenen gleichseitigen Dreiecks?*" gibt es mehrere widersprüchliche Antworten)?

Der Begriff "zufällig gezeichnete Sehne" ist nicht wohldefiniert ....

g) Sei G_X die Erzeugendenfunktion einer Zufallsvariablen X (also $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k$). Beweisen Sie $G'_X(1) = \mathbb{E}(X)$

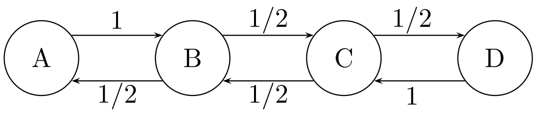
$\mathbf{G'_X(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot k \cdot s^{k-1} \quad \Longrightarrow \quad G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot k = E(X)}$ ......

h) Eine Famile hat $n \geq 1$ Kinder mit Wahrscheinlichkeit $\alpha \cdot p^n$ (wobei $\alpha < \frac{1-p}{p}$). Wie groß ist Pr[Familie ist kinderlos]?

$\mathbf{\Pr[k = 0] = 1 - \Pr[k \geq 1] = 1 - \sum_{n \geq 1} \alpha \cdot p^n = 1 - \alpha \frac{p}{1-p}}$ ....

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Where do we go from here? Berechnen Sie für die folgende Markovkette die Wahrscheinlichkeiten $p_A(t)$, $p_B(t)$, $p_C(t)$ und $p_D(t)$, sich nach längerer Zeit t im Zustand A, B, C bzw. D zu befinden.



(Hinweis: Wie in der Zentralübung gezeigt, benötigen Sie keine Matrizenrechnung, denn nach längerer Zeit gilt $p_X(t) = p_X(t-1)$ für $X \in \{A, B, C, D\}$.)

Lösungsvorschlag

Wir bezeichnen $p_A(t) = p_A(t-1)$ mit p_A. Dann gilt

$$p_A = \frac{1}{2} p_B$$

$$p_B = p_A + \frac{1}{2} p_C$$

$$p_C = p_D + \frac{1}{2} p_B$$

$$p_D = \frac{1}{2} p_C$$

woraus wegen $p_A + p_B + p_C + p_D = 1$ unmittelbar

$$p_A = p_D = \frac{1}{6}$$

sowie

$$p_B = p_C = \frac{1}{3}$$

folgt.

Aufgabe 7 (16 Punkte)

Defekte. Und wieder mal (wie so oft in DS-II) haben wir es mit einer Fabrik zu tun, bei der ein hergestelltes Produkt (unabhängig von den anderen) mit Wahrscheinlichkeit 0.05 kaputt ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter den nächsten 100 Produkten höchstens 8 (also ≤ 8) kaputt sind:

a) Wenn Sie genau rechnen (Formel genügt)?

b) Nach der Ungleichung von Markov?

c) Nach der Ungleichung von Chebyshev?

d) Nach der Ungleichung von Chernoff?

e) Approximativ nach der Poisson-Verteilung (Formel genügt)?

f) Approximativ nach dem zentralen Grenzwertsatz?

Bitte geben Sie bei Teilaufgabe b), c) und d) eine *untere* Schranke für die Wahrscheinlichkeit an. (Hinweis: $e^4 \approx 54$, $(9/5)^9 \approx 198$, $\sqrt{4.75} \approx 2.2$, für die Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung gilt $\Phi(15/11) \approx 0.916$)

Lösungsvorschlag

Bezeichne X die Anzahl der kaputten Produkte, dann ist $\mathbf{E}[X] = 5$ und $\mathrm{Var}[X] = 4.75$.

a) $\Pr[X \leq 8] = \sum_{i=0}^{8} \binom{100}{i} \cdot 0.05^i \cdot 0.95^{100-i}$.

b) $\Pr[X \leq 8] = 1 - \Pr[X \geq 9] \geq 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9} \approx 44\%$.

c) $\Pr[X \leq 8] = 1 - \Pr[X \geq 9] \geq 1 - \frac{4.75}{4^2} = 1 - \frac{4.75}{16} \approx 70\%$.

d) $\Pr[X \leq 8] = 1 - \Pr[X \geq 9] \geq 1 - \left(\frac{e^{4/5}}{(9/5)^{9/5}}\right)^5 = 1 - \frac{e^4}{(9/5)^9} \approx 1 - \frac{54}{198} = \frac{8}{11} \approx 73\%$.

e) $\Pr[X \leq 8] \approx e^{-5} \cdot \sum_{k=0}^{8} \frac{5^k}{k!}$

f) $\Pr[X \leq 8] = \Pr[\frac{X-5}{\sqrt{4.75}} \leq \frac{8-5}{\sqrt{4.75}}] \approx \Phi(15/11) \approx 91.6\%$

Aufgabe 8 (9 Punkte)

Gleichung mit zwei Unbekannten. Die Zufallsvariable X hat die Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} a + bx^2 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Wenn $\mathbb{E}(x) = \frac{3}{5}$, wie groß sind a und b?
(Hinweis: Unterbestimmten Gleichungssystemen sollte mit einer fundamentalen Eigenschaft von Dichtefunktionen zu Leibe gerückt werden.)

Lösungsvorschlag

Wir wissen

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\ \mathrm{d}x = 1 \implies \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x = 1 \implies a + \frac{b}{3} = 1$$

und ferner

$$\frac{3}{5} = \int_0^1 x \cdot f(x)\ \mathrm{d}x = \frac{a}{2} + \frac{b}{4}.$$

Wir müssen also das Gleichungssystem

$$3a + b = 3, 10a + 5b = 12$$

lösen, was unmittelbar $a = 3/5$ und $b = 6/5$ ergibt.

Aufgabe 9 (11 Punkte)

Seien X und Y unabhängige, mit Parameter λ exponentialverteilte Zufallsvariablen.

a) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ der Zufallsvariablen $Z = \frac{X}{X+Y}$.

b) Welchen Wertebereich besitzt Z?

c) Welcher Verteilung entspricht $F_Z(z)$ aufgrund von a) und b)?

(Hinweis: $\int k \cdot e^{k \cdot u} \, \mathrm{d}u = e^{k \cdot u} + C$.)

Lösungsvorschlag

a)

$$
\begin{aligned}
F_Z(z) = \Pr[Z \le z] &= \Pr[\frac{X}{X+Y} \le z] \\
&= \Pr[(X,Y) \in \{(x,y) \mid x/(x+y) \le z\}] \\
&= \Pr[(X,Y) \in \{(x,y) \mid y \ge x(1-z)/z\}] \\
&= \int\int_{\{(x,y) \mid y \ge x(1-z)/z, x \ge 0, y \ge 0\}} \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \int_{x(1-z)/z}^\infty \lambda^2 e^{-\lambda(x+y)} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left(\int_{x(1-z)/z}^\infty \lambda e^{-\lambda y} \, \mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x} \left(-e^{-\lambda(x(1-z)/z)} \right) \mathrm{d}x \\
&= \int_0^\infty \lambda e^{-\frac{\lambda}{z} x} \, \mathrm{d}x \\
&= z \int_0^\infty \frac{\lambda}{z} e^{-\frac{\lambda}{z} x} \, \mathrm{d}x \\
&= z
\end{aligned}
$$

b) $0 \le Z \le 1$.

c) Die Variable Z ist gleichverteilt auf $[0, 1]$.