Aufgabe 6.1 **Abzugeben sind a), b) und c)** **2P+3P+2P**

(a) Es seien X und Y unabhängige Zufallsvariablen mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie:

$$G_{X+Y}(z) = G_X(z) \cdot G_Y(z).$$

Hinweis: Für jedes feste $z \in [0,1]$ sind z^X und z^Y ebenfalls ZVen.

.06.2012

$$G_X(z) = \mathbb{E}[z^X] = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Pr[X=k]$$

$$\leadsto G_X(z) \cdot G_Y(z) = \mathbb{E}[z^X]\,\mathbb{E}[z^Y]$$

für jedes $z \in [0,1]$:
z^X, z^Y unabh. ZVen

$$\overset{\downarrow}{=} \mathbb{E}[z^X \cdot z^Y] = \mathbb{E}[z^{X+Y}] = G_{X+Y}(z)$$

<u>Alternativ:</u>

$$\Pr[X+Y=k] \overset{X,Y \text{ unabh.}}{=} \sum_{i+j=k} \Pr[X=i]\Pr[Y=j]$$

$$\leadsto G_{X+Y}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \Pr[X+Y=k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{\sum_{i+j=k} z^i \Pr[X=i]\, z^j \Pr[Y=j]}_{\text{Cauchy-Produkt}}$$

absolut konvergent für $z \in [0,1]$

$$\overset{\downarrow}{=} \left(\sum_{i=0}^{\infty} z^i \Pr[X=i]\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} z^j \Pr[Y=j]\right)$$

(b) Es seien nun $N, X_1, X_2, \ldots$ unabhängige ZVen mit Werten in $\mathbb{N}_0$. Die X_i seien weiterhin identisch verteilt.

Es sei $Z := \sum_{i=1}^{N} X_i$. Die obere Grenze der Summe hängt somit ebenfalls von dem Elementarereignis ab.

Bedingen Sie auf die Ereignisse $[N = k]$ und zeigen Sie mit Hilfe des Satzes von der totalen W'keit:

$$G_Z(z) = G_N(G_{X_1}(z)).$$

Nebenrechnung:

$$\mathbb{E}[z^Z \mid N=k] = \sum_{j=0}^{\infty} z^j \Pr[Z=j \mid N=k]$$

$$\overset{Z=\sum_{i=1}^{N} X_i}{=} \sum_{j=0}^{\infty} z^j \Pr[X_1+\ldots+X_k=j \mid N=k]$$

$$\overset{N, X_1, \ldots, X_k \text{ unabh.}}{=} \sum_{j=0}^{\infty} z^j \Pr[X_1+\ldots+X_k=j]$$

$$= \mathbb{E}[z^{X_1+\ldots+X_k}]$$

$$\overset{z^{X_1}, \ldots, z^{X_k} \text{ unabh.}}{=} \mathbb{E}[z^{X_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[z^{X_k}]$$

$$\overset{X_1, \ldots, X_k \text{ identisch verteilt}}{=} G_{X_1}(z)^k$$

Damit:

$$G_Z(z) = \mathbb{E}[z^Z]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{E}[z^Z \mid N=k] \Pr[N=k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \underbrace{G_{X_1}(z)^k}_{\in[0,1] \text{ für } z\in[0,1]} \Pr[N=k]$$

$$= G_N(G_{X_1}(z))$$

(c) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariable.

Negative Binomialverteilung:

"Warten auf den n-ten Erfolg"

$\hat{=}$ Summe von n geo(p)-verteilten ZVen

Erzfkt zu Geo(p):

$$\sum_{k\geq 1} z^k p q^{k-1}$$

$$= pz \sum_{k\geq 0} (qz)^k$$

$$\overset{z\in[0,1]}{=} \frac{pz}{1-qz}$$

$\rightsquigarrow$ Erzfkt zu negativer Binomialverteilung

$$\left(\frac{pz}{1-qz}\right)^n$$

Aufgabe 6.2 **Abzugeben sind a), bi) und bii)** **2P+2P+2P**

Die kleine Maxi springt auf dem Bürgersteig hin- und her: In jedem Zeitschritt springt sie mit W'keit 1/2 einen Meter nach links bzw. mit W'keit 1/2 einen Meter nach rechts.

Zum Zeitpunkt $t = 0$ befindet sie sich vor der Eingangstür ihres Wohnhauses. Diese Position sei mit 0 bezeichnet. Sei Z_t die ZV, die die Position von Maxi nach $t \in \mathbb{N}_0$ Zeitschritten angibt ($\Pr[Z_0 = 0] = 1$).

(a) Bestimmen Sie die Dichte von Z_t in Abhängigkeit von t.

i. ter Sprung: $\Pr[S_i = k] = \begin{cases} 1/2, & k = \pm 1 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

Position nach t Sprüngen:

$$Z_t = \sum_{i=1}^{t} S_i$$

$$S_i = 2R_i - 1 \text{ für } R_i \sim \mathrm{Ber}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow Z_t = -t + 2\underbrace{\sum_{i=1}^{t} R_i}_{=: X_t \sim \mathrm{Bin}\left(t, \frac{1}{2}\right)}$$

$$\rightsquigarrow \Pr[Z_t = k]$$

$$= \Pr\left[X_t = \frac{k+t}{2}\right]$$

$$= \binom{t}{\frac{k+t}{2}} 2^{-t}$$

(b) Betrachten Sie die rationale Funktion $f_t(z) = (z + 1/z)^t$ $(t \in \mathbb{N}_0)$.

(i) Durch Ausmultiplizieren lässt sie als eine Summe $\sum_{k=-t}^{t} c_k^{(t)} z^k$ darstellen.

Wie hängen die Koeffizienten $c_k^{(t)}$ mit der Dichte von Z_t zusammen? (Begründung!)

(ii) Argumentieren Sie anhand der Resultate zu erzeugenden Funktionen und A6.1 (a), dass $Z_t = -t + 2X_t$ für eine geeignete ZV $X_t \sim \mathrm{Bin}(t, 1/2)$.

(i) $\Pr[Z_t = k] = c_k^{(t)} \cdot 2^{-t}$

Induktion:

$t=0$: $\cdot \Pr[Z_0 = 0] = 1$

$\cdot \left(z + \frac{1}{z}\right)^0 = 1 \cdot z^0$ ✓

$t \Rightarrow t+1$: $\cdot \Pr[Z_{t+1} = k]$

$$= \sum_{j \in \mathbb{Z}} \Pr[Z_{t+1} = k \mid Z_t = j] \Pr[Z_t = j]$$

$$= \frac{1}{2} \Pr[Z_t = k-1] + \frac{1}{2} \Pr[Z_t = k+1]$$

Induktion

$$\overset{\downarrow}{=} \frac{1}{2}\left(2^{-t} c_{k-1}^{(t)}\right) + \frac{1}{2}\left(2^{-t} c_{k+1}^{(t)}\right)$$

$$= 2^{-(t+1)}$$

$\cdot\ c_k^{(t+1)} = [z^k]\left(z + \frac{1}{z}\right)^{t+1}$

$$= [z^k]\left(z + \frac{1}{z}\right) \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k^{(t)} z^k$$

$$= c_{k-1}^{(t)} + c_{k+1}^{(t)}$$

(ii) Sei $X_t := \frac{Z_t + t}{2}$

$$\mathbb{E}[z^{X_t}] = \mathbb{E}\left[z^{\frac{Z_t+t}{2}}\right] \overset{u=\sqrt{z}}{=} \mathbb{E}[u^{Z_t+t}]$$

$$= u^t \cdot \mathbb{E}[u^{Z_t}]$$

$$\overset{(i)}{=} u^t \cdot 2^{-t}\left(u + \frac{1}{u}\right)^t$$

$$= 2^{-t}(u^2+1)^t$$

$$\overset{u=\sqrt{z}}{=} 2^{-t}(z+1)^t$$

$\rightsquigarrow$ Eindeutigkeit der Erzfkt: $X_t \sim \mathrm{Bin}(t, \frac{1}{2})$

Maxi ändert ihr Verhalten: In jedem Zeitschritt springt sie mit W'keit $1/2p$ einen Meter nach links bzw. mit W'keit $1/2p$ einen Meter nach rechts und mit W'keit $1-p$ verändert sie ihre Position nicht.

Sei Y_t die ZV, die die Position von Maxi nach $t \in \mathbb{N}_0$ Zeitschritten angibt.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von Y_t.

$$Y_t = \sum_{i=1}^{t} A_i \text{ mit } Pr[A_i = k] = \begin{cases} \frac{1}{2}p, & k \in \{-1, 1\} \\ 1-p, & k = 0 \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Y_t] = t\,\mathbb{E}[A_1]$$
$$= t\left(-\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}p\right) = 0$$

$$Var[Y_t] = t\,Var[A_1]$$
$$\underset{\mathbb{E}[A_1]=0}{=} t\left(1 \cdot \frac{1}{2}p + 1 \cdot \frac{1}{2}p\right) = tp.$$

Aufgabe 6.3 **Abzugeben ist a)** **3P**

Bei der Herstellung von Chips können Fehler aufgrund von strukturellen Defekten im verwendeten Wafer auftreten. Die W'keit, dass ein Bereich der Fläche a auf dem Wafer mindestens einen strukturellen Defekt aufweist, sei $c \cdot a \in (0, 1)$ für eine geeignete Konstante $c > 0$.

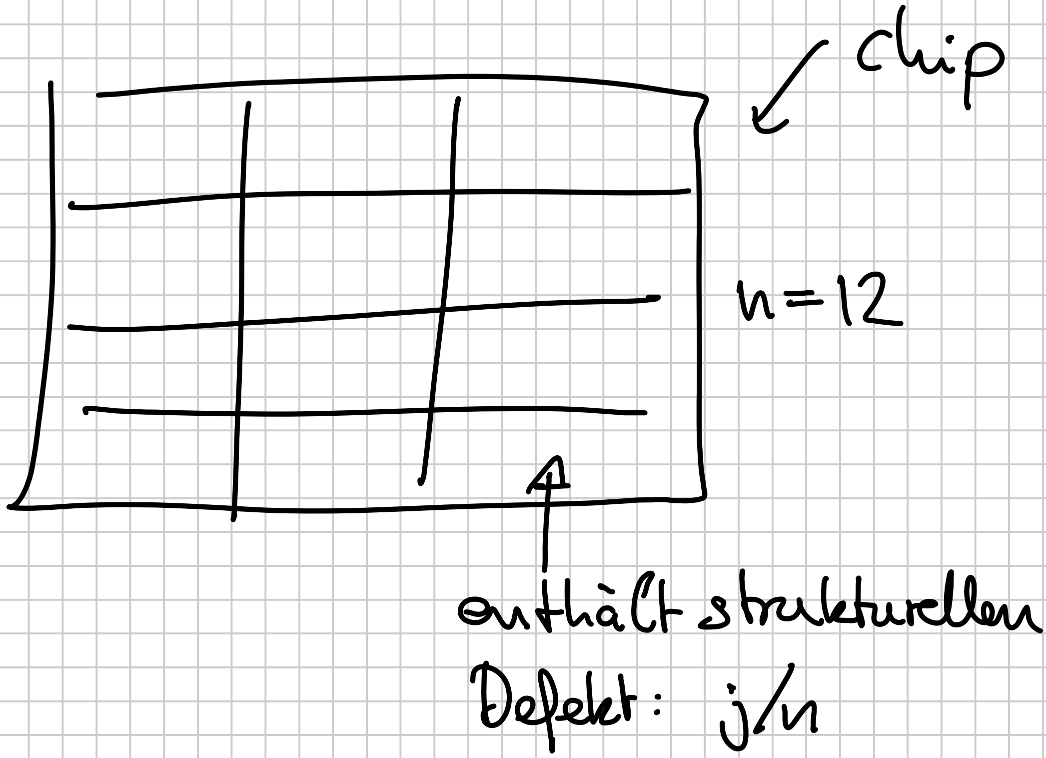
Wir sind an der ZV D interessiert, welche die Anzahl der strukturellen Defekte innerhalb eines Chips mit Fläche a zählt.

(a) Wir approximieren D durch eine Folge von ZVen D_n:

Wir unterteilen den Chip in n disjunkte, gleichgroße Bereiche, und lassen D_n dann die Bereiche zählen, welche *mindestens einen Defekt* aufweisen. (D_n nimmt also nur Werte in $\{0, 1, \dots, n\}$ an.)

Bestimmen Sie die Verteilung und den Erwartungswert von D_n.

Welche Verteilung sollte man für D ansetzen?



$\rightsquigarrow D_n \sim \text{Bin}\left(n, \frac{ca}{n}\right)$

W'keit, dass ein struktureller Defekt in einem Bereich der Größe $\frac{a}{n}$ liegt

$\rightsquigarrow \mathbb{E}[D_n] = ca$ konstant.

$\rightsquigarrow$ Vorlesung: Verteilung von D_n $(n \to \infty)$ konvergiert gegen $\text{Poi}(c \cdot a)$

$\rightsquigarrow D \sim \text{Poi}(c \cdot a)$

(b) Ein struktureller Defekt muss noch nicht zu einem eigentlichen Fehler des Chips führen.

Nehmen Sie nun an, dass $D \sim \mathrm{Po}(\lambda)$. Weiterhin sei F_i die Bernoulli-verteilte ZV, welche angibt, ob der i-te Defekt zu einem Fehler führt. Es gelte $\Pr[F_i = 1] = p$. Alle ZV $Y, F_1, F_2, \ldots$ seien unabhängig.

Dann zählt $F = \sum_{i=1}^{D} F_i$ die strukturellen Defekte, die Ursache für einen tatsächlichen Fehler sind.

Bestimmen Sie mit Hilfe des in A6.1 (b) die Verteilung von F.

$$G_F(z) = G_D(G_{F_1}(z)) \quad | \text{nach A6.1(b)}$$

$$\cdot\ \underbrace{G_D(z) = e^{\lambda(z-1)}}_{D \sim \mathrm{Poi}(\lambda)}$$

$$\cdot\ G_{F_1}(z) = (1-p) + pz$$

nach Vorlesung

$$\leadsto G_F(z) = e^{\lambda((1-p+pz)-1)}$$

$$= e^{\lambda(pz-p)}$$

$$= \underbrace{e^{\lambda p(z-1)}}_{\text{Erzfkt von Poi}(\lambda p)}$$

$\leadsto$ Eindeutigkeit der Erzfkt:

$$F \sim \mathrm{Poi}(\lambda p)$$

Prof. E. muss überraschend eine mündliche Prüfung abhalten. Er gibt dem Studenten eine gezinkte Münze, wobei er dem Studenten nur sagt, dass die Münze eine der beiden Seite mit W'keit 0.6 zeigt, die andere entsprechend mit W'keit 0.4. Er sagt dem Studenten jedoch nicht, ob die wahrscheinlichere Seite Kopf oder Zahl ist.

Prof. E. erlaubt dem Studenten, die Münze genau 257 zu werfen. Der Student besteht die Prüfung, wenn er die wahrscheinlichere Seite nach diesen Würfen korrekt benennt.

Zeigen Sie, dass der Student mit einer W'keit von mindestens 3/4 bestehen kann.

Hinweis: Zeigen Sie mit Hilfe von Chernoff, dass Demokratie funktioniert!

Sei $X_i \sim \mathrm{Ber}(0.6)$.

X_i ist also genau dann gleich 1, falls das wahrscheinlichere Ereignis eintritt.

Setze $S = \sum_{i=1}^{257} X_i$

"Demokratie": Mehrheitsentscheid

W'keit, dass Mehrheit falsch entscheidet:

$\Pr[S < \frac{257}{2}] = \Pr[S \leq 127]$

❷ $\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$ für alle $0 < \delta \leq 1$, $\mu = \mathbb{E}[S] = 154{,}2$

$\delta \approx 0{,}1764$

$\leq e^{-154{,}2 \cdot \frac{0{,}1764^2}{2}}$

≈ 0.091

$\leadsto \Pr[S > \frac{257}{2}] \geq 3/4.$