Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 12
14. Juli 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: Donnerstag, 22. Juli 2010, 12 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Hersteller von Nahrungsmittelkonserven gibt die Haltbarkeit eines bestimmtes Produkts mit mindestens 50 Monaten an. Sie kaufen 20 derartige Konserven und messen ihre Haltbarkeit. Die Konserven haben im Schnitt 40 Monate gehalten mit einer Stichprobenstandardabweichung von $S = 30$ Monaten.

1. Zeigen Sie, dass die Angabe des Herstellers nicht abgelehnt werden kann (Signifikanzniveau 0.05).
2. Wie viele Konserven hätten Sie mindestens kaufen müssen, um die Angabe des Herstellers ablehnen zu können?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Anworten.

1. Ein transienter Zustand einer Markov-Kette wird mit Wahrscheinlichkeit 1 verlassen.
2. Sei $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ die Übergangsmatrix einer Markov-Kette M mit entsprechenden Zuständen 1 und 2. M sei im Zustand 1. Dann ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, dass irgendwann ein Zustandsübergang in den Zustand 2 erfolgt?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Anworten.

1. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die keinen absorbierenden Zustand besitzt.
2. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die nur transiente Zustände besitzt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette M über den Zuständen $Q = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Verteilungen von M.
2. Geben Sie die Menge aller transienten Zustände von M an.
3. Geben Sie die Übergangsmatrix einer zeithomogenen Markov-Kette B mit drei Zuständen s_1, s_2, s_3 an, so dass s_1 transient ist, s_2 absorbierend ist und s_3 rekurrent ist.

Tutoraufgabe 1

Zwei Zustände A und B einer Markov-Kette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient?

2. Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu sein?

Tutoraufgabe 2

Die folgende Tabelle gibt die Ziehungshäufigkeiten der Superzahlen wieder:

Superzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	140	134	138	133	160	134	133	137	131	128

Wenden Sie den χ^2-Anpassungstest auf die Nullhypothese, dass nämlich die Ziehungswahrscheinlichkeit für jede Superzahl $\frac{1}{10}$ ist, an (Signifikanzniveau 0.1).