Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 5
19. Mai 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 31. Mai 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Sei X eine Zufallsvariable über einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ mit $\Pr[x] \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie:

   Falls $\text{Var}[X + X] = \text{Var}[X] + \text{Var}[X]$ gilt, dann ist X eine Konstante, d.h. für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ gilt $X(x_1) = X(x_2)$.

2. Sei X eine Bernoulli-verteilte Variable (Indikatorvariable) mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

   (a) Zeigen Sie die Relationen $0 \leq \text{Var}[X] \leq \frac{1}{4}$.

   (b) Sei $\text{Var}[X] = \frac{5}{36}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

3. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable, für die $\text{Var}[X] = \mathbb{E}[X]$ gilt. Berechnen Sie $\Pr[X = 2]$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ das erste Mal mindestens zweimal vorgekommen ist. Der Wert der Zufallsvariablen X sei durch die Anzahl der Würfe bestimmt.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Mit einem fairen Würfel mit Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird wie folgt gespielt. Beim Start wird der Würfel 1 mal geworfen. Die geworfene Augenzahl sei x. Dem Wurf geben wir die Nummer 0. Nun wird so lange gewürfelt, bis wieder x erscheint. Die dabei (nach dem Wurf Nummer 0) geworfenen Augenzahlen y mit $y \neq x$ werden addiert. Das Ergebnis sei die Zufallsvariable Z.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X_i die Augenzahl im i-ten Wurf mit $1 \leq i \leq n - 1$. Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung, dass beim Start die Augenzahl x geworfen wurde und das Spiel im n-ten Schritt endet.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel im n-ten Schritt?

3. Geben Sie für Z die Dichtefunktion und den Erwartungswert an.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir setzen beim Würfeln Laplace-Verteilung voraus.

1. Was ist wahrscheinlicher:
   (a) bei fünfmal Würfeln mindestens einen Fünfer zu würfeln?
   (b) bei zehnmal Würfeln mindestens zwei Dreier zu würfeln?
2. Sie würfeln so lange, bis Sie einen Einser bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Einser beim fünften Wurf bekommen?
3. Sie würfeln so lange, bis Sie drei Einser (nicht notwendig hintereinander) bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den dritten Einser beim siebten Wurf erhalten?

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

X sei Poisson-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X+1)^{-1}]$.

Vorbereitung 2

Eine Firma stellt Kuchen mit Rosinen her. Hierfür werden $\lambda \cdot N$ Rosinen in den Teig für N Kuchen gegeben, woraufhin die ganze Masse so gut durchmischt wird, dass wir annehmen können, dass jede einzelne Rosine mit derselben Wahrscheinlichkeit in einem der Kuchen landet. N ist unbekannt und groß.

Wie groß muss die durchschnittliche Zahl λ von Rosinen pro Kuchen sein, wenn höchstens durchschnittlich jeder hundertste Kuchen keine Rosinen enthalten darf?

Vorbereitung 3

Zwei Arbeiter A und B kontrollieren unabhängig eine Tagesproduktion. A und B protokollieren k_1 bzw. k_2 tatsächliche Fehler. Beide Protokolle stimmen in $k_{1,2}$ Einträgen überein. Es sei n die Anzahl der tatsächlich aufgetretenen Produktionsfehler. Wir nehmen an, dass die Arbeiter jeden der n Fehler mit Wahrscheinlichkeit p_1 bzw. p_2 registriert haben.

Es seien X_1 bzw. X_2 die Zufallsvariablen, die die Anzahl der von Arbeiter A bzw. B gefundenen Fehler angeben. Wie sind die X_i verteilt? Für welche Werte von n gilt

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \geq 0.1] \leq 0.01\,?$$

Tutoraufgabe 1

1. Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

2. Beweisen Sie (analog zum Beweis der Chernoff-Schranken in der Vorlesung), dass die Chernoff-Schranke auch für Poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten ein Chamäleon, das in den nächsten 10 Stunden 500 Insekten fangen muss, um seinen Kalorienbedarf zu decken. Pro Stunde passieren das Chamäleon in Reichweite genau 100 Insekten, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{6}$ gefangen. Die anderen 40 sind groß und können mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gefangen werden.

Sei Z die Zufallsvariable der Anzahl der in den nächsten 10 Stunden gefangenen Insekten. Schätzen Sie jeweils mit den Ungleichungen nach Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Z \geq 500]$ ab, mit der das Chamäleon nicht verhungert.

Tutoraufgabe 3

Wir starten mit einem Euro Kapital $K_0 = 1$ und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze: Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze. Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz. Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich 4/3 des Einsatzes als Gewinn.

1. Welchen Gewinn X_n erwarten wir bei n Würfen?

   Gegen welchen Grenzwert strebt der erwartete Gewinn $\mathbb{E}[X_n]$ für $n \to \infty$?

2. Das Kapital K_n sei gegeben durch $K_n = X_n + 1$. Es sei $Y_n = K_n/K_{n-1}$ mit (logarithmischem) Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[\ln Y_n]$. Zeigen Sie, dass $K_n \leq \exp(\mu n/2)$ gilt mit einer für wachsendes n gegen 1 strebenden Wahrscheinlichkeit, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\frac{\ln(K_n)}{n} \leq \frac{\mu}{2}\right] = 1\,.$$

   Hinweis: Nutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen.

3. Interpretieren Sie die Ergebnisse! Erklären Sie insbesondere den scheinbaren Widerspruch eines erwarteten unendlichen Gewinns und der Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital gegen 0 strebt!