Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 18. Mai bis 10:15 abzugeben und wird am 18./19. Mai besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 3.1 — 2.5P+2.5P

Sie besitzen n Schlüssel und wollen eine Tür öffnen. Hierzu wählen Sie rein zufällig solange Schlüssel aus, bis Sie schließlich den richtigen finden. (Genau einer der n Schlüssel öffnet die Tür.)

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable, die die Anzahl der benötigten Versuche zählt, wenn

(a) jeder Schlüssel höchstens einmal verwendet wird (= ohne Zurücklegen).

(b) jeder Schlüssel beliebig oft verwendet werden kann (= mit Zurücklegen).

Hinweis: Sie benötigen die Verteilung der Zufallsvariable nicht. Gehen Sie entsprechend Beispiel 14 auf Folie 122 vor. Unterscheiden Sie, ob der erste Versuch bereits erfolgreich ist oder nicht.

Aufgabe 3.2 — 1.5P+1P+1P+1.5P

(a) Sie schreiben eine Multiple-Choice-Klausur über reziproke Quandularphysiologie. Eine Aufgabe hat 4 mögliche Antworten, genau eine davon ist richtig. Sie dürfen eine beliebige Teilmenge der 4 möglichen Antworten ankreuzen. Wenn Sie die richtige Antwort angekreuzt haben, bekommen Sie 3 Punkte, aber Sie bekommen für jede falsche Antwort, die Sie angekreuzt haben, einen Punkt abgezogen. Eine negative Punktezahl ist möglich.

Sie wissen nichts über reziproke Quandularphysiologie und können die Antworten nur raten. Berechnen Sie den Erwartungswert der Punktzahl, die Sie erreichen, wenn Sie 0, 1, 2, 3 oder 4 Antworten zufällig ankreuzen.

(b) Wir betrachten eine Verallgemeinerung: Eine Aufgabe hat n mögliche Antworten, genau eine davon ist richtig. Sie dürfen wieder eine beliebige Teilmenge der Antworten ankreuzen. Wenn Sie die richtige Antwort angekreuzt haben, bekommen Sie $n-1$ Punkte, aber Sie bekommen für jede falsche Antwort, die Sie angekreuzt haben, einen Punkt abgezogen.

Betrachten Sie die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, wobei X_i angibt, wie viele Punkte Sie bei der i-ten Antwortmöglichkeit bekommen. Wenn Sie Antwort i nicht ankreuzen, ist $X_i = 0$. Wenn Sie Antwort i ankreuzen, gilt entweder $X_i = n-1$ oder $X_i = -1$.

  (i) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_i, wenn Sie Antwort i ankreuzen.

  (ii) Was ist der Erwartungswert der Gesamtpunktzahl $X_1 + \cdots + X_n$ und wie hängt er von der Zahl der angekreuzten Antworten ab?

(c) Wir kehren zum Fall $n = 4$ zurück. Der Prüfungsausschuss hat entschieden, dass die Gesamtpunktzahl, die ein Student für eine Aufgabe bekommt, mindestens 0 sein muss. Um das zu erreichen, bekommen Sie nun 0 Punkte, wenn Sie nach den alten Regeln eine negative Punktzahl erreicht hätten. Wenn Sie nach den alten Regeln eine positive Punktzahl erreicht hätten, bekommen Sie diese Punktzahl auch nach den neuen Regeln. Berechnen Sie wiederum den Erwartungswert der Punktzahl, die Sie erreichen, wenn Sie 0, 1, 2, 3 oder 4 Antworten zufällig ankreuzen.

(d) Wir betrachten weiterhin den Fall $n = 4$ und Punktevergabe nach den neuen Regeln. Berechnen sie die Varianz für die Punktzahl für die Fälle, dass Sie 1 und dass sie 3 Antworten ankreuzen.

Aufgabe 3.3 **1.5P+1.5P+2P**

(a) Zeigen Sie:

$$\left|\{(s_1,\ldots,s_j)\in\{1,\ldots,n\}^j \mid s_1+\cdots+s_j\le n\}\right| = \binom{n}{j}$$

Hinweis: Auch wenn Sie das nicht bewiesen haben, können Sie obige Gleichung für die folgende Teilaufgabe benutzen.

(b) Sie führen folgendes mehrstufiges Experiment durch: In jedem Schritt wählen Sie zufällig und gleichverteilt eine Zahl zwischen 1 und n aus, d.h., in jedem Schritt und für alle i mit $1 \le i \le n$ ist die W'keit, dass Sie die Zahl i ziehen, gleich $\frac{1}{n}$. Das Experiment endet, nachdem die Summe der gezogenen Zahlen das erste Mal größer als n ist. Die Zufallsvariable X gibt an, nach wie viel Schritten das Experiment endet. Zeigen Sie:

$$\Pr[X \ge j+1] = \frac{\binom{n}{j}}{n^j} \qquad \text{für alle } j = 0,1,\ldots$$

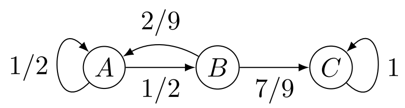
(c) Laut Vorlesung gilt: $\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \ge j]$. Folgern Sie:

$$\mathbb{E}[X] = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

Hinweis: Multiplizieren Sie $(1+\frac{1}{n})^n$ aus!

Aufgabe 3.4 **2P+1.5P+1.5P**

In Aufgabe 2.4 hatten Sie folgendes Markov-Diagramm genauer betrachtet:



Die Ereignismenge Ω war dabei als die Menge der endlichen Pfade beginnend in A und endend in C, die C genau einmal besuchen, definiert worden, d.h., $\Omega := \Pi_A^C$.

In dieser Aufgabe soll bestimmt werden, wie viele Schritte Sie im Erwartungswert benötigen, um von A schließlich nach C zu kommen. Hierfür sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ die Zufallsvariable, die angibt, nach wie vielen Schritten C erreicht wird, d.h., für $\omega \in \Omega$ ist $X(\omega)$ die Länge des Pfades ω.

(a) In Aufgabe 2.4 hatten Sie gezeigt, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Pr[A_{k+2}] = 1/2 \cdot \Pr[A_{k+1}] + 1/9 \cdot \Pr[A_k]$$

gilt, wobei A_k das Ereignis war, dass Sie sich nach k Schritten im Zustand A befinden.

Zeigen Sie unter der Verwendung der Rekursionsformel für $\Pr[A_k]$, dass auch

$$\Pr[X = k+4] = 1/2 \cdot \Pr[X = k+3] + 1/9 \cdot \Pr[X = k+2] \ \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

gilt und folgern Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = 2\cdot\Pr[X=2] + 3\cdot\Pr[X=3] + \frac{1}{2}\cdot(\mathbb{E}[X+1] - 3\cdot\Pr[X=2]) + \frac{1}{9}\cdot\mathbb{E}[X+2]$$

gilt, indem Sie die Rekursionsformel in die Definition von $\mathbb{E}[X]$ einsetzen.

Bestimmen Sie hiermit dann $\mathbb{E}[X]$.

(b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie alternativ $\mathbb{E}[X]$ mittels dem Ansatz aus Beispiel 15 auf Folie 126 berechnen. Das heißt, partitionieren Sie die Pfade geeignet bezüglich ihres Präfixes.

(c) Berechnen Sie mit dem Ansatz aus (b) auch die Varianz von X.