7.1.1 Zusammenhang zwischen der w.e. Funktion und den Momenten

Da

$$G_X(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k = \mathbb{E}[s^X]\,,$$

gilt

$$G'_X(1) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \Pr[X = k] = \mathbb{E}[X]\,.$$

Beispiel 73

Sei X binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(n, p)$, also

$$G_X(s) = (1 - p + ps)^n \,.$$

Dann gilt

$$G'_X(s) = n \cdot (1 - p + ps)^{n-1} \cdot p$$

und somit

$$\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = np \,.$$

Beispiel 73

Ebenso ergibt sich

$$\mathbb{E}[X(X-1)\dots(X-k+1)] = G_X^{(k)}(1)\,,$$

also etwa

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2\\ &= G''_X(1) + G'_X(1) - (G'_X(1))^2\,.\end{aligned}$$

Andere Momente von X kann man auf ähnliche Art und Weise berechnen.

Momenterzeugende Funktionen

Definition 74

Zu einer Zufallsvariablen X ist die momenterzeugende Funktion gemäß

$$M_X(s) := \mathbb{E}[e^{Xs}]$$

definiert.

Es gilt

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=0}^{\infty} \frac{(Xs)^i}{i!}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\mathbb{E}[X^i]}{i!} \cdot s^i$$

und

$$M_X(s) = \mathbb{E}[e^{Xs}] = \mathbb{E}[(e^s)^X] = G_X(e^s)\,.$$

7.2 Summen von Zufallsvariablen

Satz 75 (Erzeugende Funktion einer Summe)

Für unabhängige Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und die Zufallsvariable $Z := X_1 + \ldots + X_n$ gilt

$$G_Z(s) = G_{X_1}(s) \cdot \ldots \cdot G_{X_n}(s)\,.$$

Ebenso gilt

$$M_Z(s) = M_{X_1}(s) \cdot \ldots \cdot M_{X_n}(s)\,.$$

Beweis:

Wegen der Unabhängigkeit von $X_1, \ldots, X_n$ gilt

$$G_Z(s) = \mathbb{E}[s^{X_1+\ldots+X_n}] = \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] = G_{X_1}(s) \cdot \ldots \cdot G_{X_n}(s).$$

$\square$

Beispiel 76

Seien $X_1, \ldots X_k$ mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(n_i, p)$ unabhängige Zufallsvariable und $Z := X_1 + \ldots + X_k$. Dann gilt

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^{k} (1-p+ps)^{n_i} = (1-p+ps)^{\sum_{i=1}^{k} n_i}$$

und somit

$$Z \sim \mathrm{Bin}(\sum_{i=1}^{k} n_i, p)$$

(vgl. Satz 56).

Seien $X_1, \ldots, X_k \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ unabhängige Zufallsvariablen. Dann folgt für $Z := X_1 + \ldots + X_k$

$$G_Z(s) = \prod_{i=1}^{k} e^{\lambda(s-1)} = e^{k\lambda(s-1)}$$

und somit $Z \sim \mathrm{Po}(k\lambda)$ (vgl. Satz 59).

7.2.1 Zufällige Summen

Wir betrachten die Situation, dass $Z := X_1 + \ldots + X_N$, wobei N ebenfalls eine Zufallsvariable ist.

Satz 77

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_X(s)$. N sei ebenfalls eine unabhängige Zufallsvariable mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_N(s)$. Dann besitzt die Zufallsvariable $Z := X_1 + \ldots + X_N$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$.

Beweis:

Nach Voraussetzung ist $W_N \subseteq \mathbb{N}_0$. Deshalb folgt mit Satz 36

$$
\begin{aligned}
G_Z(s) &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^Z \mid N = n] \cdot \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1+\ldots+X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{E}[s^{X_1}] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[s^{X_n}] \cdot \Pr[N = n] \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (G_X(s))^n \cdot \Pr[N = n] \\
&= \mathbb{E}[(G_X(s))^N] \\
&= G_N(G_X(s))\,.
\end{aligned}
$$

$\square$

Beispiel 78 (Random Walk im d-dimensionalen Gitter $\mathbb{Z}^d$)

Wir betrachten ein Partikel, das sich zufällig auf den Punkten aus $\mathbb{Z}$ bewegt. Es starte im Punkt 0 und bewege sich in jedem Zeitschritt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ vom Punkt i zum Punkt $i+1$ („nach rechts") bzw. $i-1$ („nach links"). Man nennt dieses Experiment auch *Random Walk auf den ganzen Zahlen*. Abbildung 1 veranschaulicht diesen Prozess.

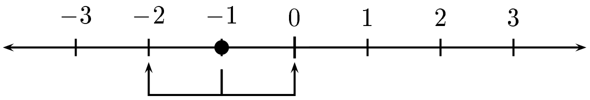


Abbildung: Random Walk auf den ganzen Zahlen

Für $k \in \mathbb{N}$ bezeichne H_k das Ereignis $H_k :=$ „Partikel befindet sich im k-ten Schritt im Punkt 0“. Die Anzahl der Schritte nach rechts bzw. nach links bis zum k-ten Schritt ist binomialverteilt mit den Parametern $n = k$ und $p = 1/2$.

Für die Wahrscheinlichkeit $h_k := \Pr[H_k]$ erhalten wir deshalb

$$h_k = \binom{k}{k/2} 2^{-k}\,,$$

falls k gerade ist und $h_k = 0$ sonst.

Verallgemeinerung auf $\mathbb{Z}^d$, $d \in \mathbb{N}$:

$$h_k = \left(\binom{k}{k/2} 2^{-k}\right)^d \text{ für } k \text{ gerade.}$$

Sei h'_k die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel im k-ten Schritt zum ersten Mal zum Punkt 0^d zurückkehrt, und sei $r := \sum_{k=1}^{\infty} h'_k$ die Wahrscheinlichkeit, dass das Partikel irgendwann zum Startpunkt zurückkehrt.

Wie hängt r von d ab?

Der gerade beschriebene Prozess hat die Eigenschaft, dass sich das Experiment nach jedem Besuch im Zustand 0 wieder genauso verhält wie beim Start des Prozesses im Zustand 0. Mit solchen Ereignissen beschäftigt sich die Erneuerungstheorie (engl. renewal theory).

Definition 79

Die Ereignisse $H_1, H_2, \ldots$ heißen rekurrent, wenn für $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i > j$ gilt, dass

$$\Pr[H_i \mid \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j] = \Pr[H_{i-j}] \,.$$

Die Zufallsvariable Z mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe die Wartezeit bis zum Auftreten des ersten Ereignisses H_k. Die Dichte von Z ist definiert durch

$$\Pr[Z = k] = \Pr[\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k],$$

für $k \in \mathbb{N}$ und $\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k]$.

Definition 80

Für $i \in \mathbb{N}$ bezeichne $h_i := \Pr[H_i]$ die Auftrittswahrscheinlichkeit im i-ten Zeitschritt. Wir setzen $h_0 := 1$ und erhalten die erzeugende Funktion der Auftrittswahrscheinlichkeiten gemäß

$$H(s) := \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k \,.$$

Ferner sei die erzeugende Funktion der Wartezeit Z gegeben durch

$$T(s) := \sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Z = k] \cdot s^k \,.$$

Bemerkung:

$H(s)$ ist keine wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion im Sinne der Definition. So gilt i.a. nicht $H(1) = 1$. Auch $T(s)$ stellt keine „echte“ wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion dar, da

$$\Pr[Z = \infty] = 1 - \sum_{k \in \mathbb{N}_0} \Pr[Z = k] = 1 - T(1)$$

fehlt!

Satz 81

Für rekurrente Ereignisse gilt

$$H(s) = \frac{1}{1 - T(s)}\,.$$

Beweis:

[Skizze]Nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für die Auftrittswahrscheinlichkeit h_n $(n \in \mathbb{N})$

$$h_n = \Pr[H_n] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[H_n \mid Z = k] \cdot \Pr[Z = k]\,.$$

Gemäß der Definition eines rekurrenten Ereignisses gilt für $k < n$

$$\Pr[H_n \mid Z = k] = \Pr[H_n \mid \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{k-1} \cap H_k] = \Pr[H_{n-k}]$$

Beweis (Forts.):

sowie

$$\Pr[H_n \mid Z = n] = 1$$
$$\Pr[H_n \mid Z = k] = 0 \text{ für } k > n\,.$$

Damit folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$h_n = \sum_{k=1}^{n} h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k] = \sum_{k=0}^{n} h_{n-k} \cdot \Pr[Z = k]\,.$$

Für $n = 0$ ergibt die rechte Seite dieser Gleichung 0. Damit entsteht durch Faltung der beiden Folgen $(h_0, h_1, \ldots)$ und $(\Pr[Z = 0], \Pr[Z = 1], \ldots)$ die Folge $(0, h_1, h_2, \ldots)$. Für die erzeugenden Funktionen gilt deshalb $H(s) - 1 = H(s)T(s)$.

□

Beispiel 82

In dem einfachen Fall, dass die Ereignisse $H_1, H_2, \ldots$ unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p eintreten, ist die Wartezeit geometrisch verteilt.

$$H(s) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} ps^k = 1 + \frac{sp}{1-s} = \frac{sp + 1 - s}{1-s}\,.$$

Daraus folgt

$$T(s) = 1 - \frac{1}{H(s)} = 1 - \frac{1-s}{sp+1-s} = \frac{sp}{1-(1-p)s}\,.$$

$T(s)$ ist also die w.e. Funktion der geometrischen Verteilung mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Korollar 83

Für rekurrente Ereignisse gilt $\Pr[Z < \infty] = 1$ *genau dann, wenn* $H(1) = \infty$ *ist, wenn also die Summe* $\sum_{k=1}^{\infty} h_k$ *der Auftrittswahrscheinlichkeiten divergiert.*

Beweis:

Nach Satz 81 gilt $T(s) = (H(s) - 1)/H(s)$. Daraus folgt

$$\Pr[Z < \infty] = T(1) = 1 - 1/H(1)\,.$$

$\square$

Beispiel 84

Wir wenden Korollar 83 auf den Random Walk im $\mathbb{Z}^d$ an.
Aus der Stirlingformel folgt

$$n! = \Theta(\sqrt{n}(n/e)^n)$$

und damit für $d = 1$

$$\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} = \Theta\left(\frac{\sqrt{2n}(2n)^{2n}}{e^{2n}} \cdot \left(\frac{e^n}{\sqrt{n}n^n}\right)^2\right)$$
$$= \Theta\left(\frac{2^{2n}}{\sqrt{n}}\right).$$

Beispiel (Forts.)

Also

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} 2^{-2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-1/2}) = \infty,$$

da die Summe $\sum_{k=0}^{\infty} 1/k^{\alpha}$ *für* $\alpha \leq 1$ *divergiert. Nach Korollar 83 kehrt das Partikel also mit Wahrscheinlichkeit* 1 *immer wieder zum Ausgangspunkt zurück.*

Beispiel (Forts.)

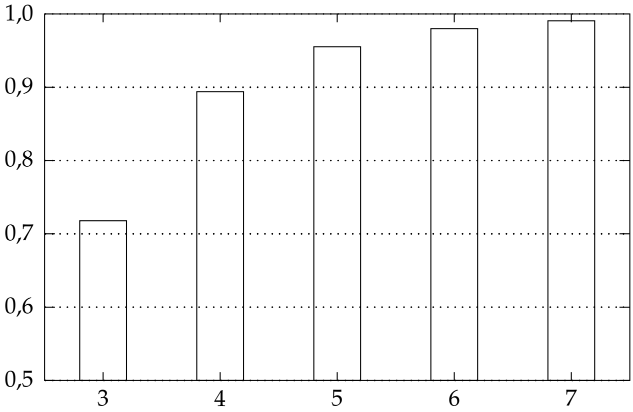
Für $d \in \mathbb{N}$ gilt allgemein

$$H(1) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k = \sum_{k=0}^{\infty} \Theta(k^{-(1/2)d}).$$

Für $d = 1$ und $d = 2$ divergiert diese Summe, während sie für $d \geq 3$ konvergiert. Das Partikel kehrt also im ein- und im zweidimensionalen Raum mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Ausgangspunkt zurück, im drei- oder höherdimensionalen Raum jedoch nicht mehr. Im dreidimensionalen Fall gilt

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{„Partikel kehrt nie zum Ausgangspunkt zurück“}]\\
&= \Pr[Z = \infty] = 1/H(1) = 1/\sum_{k=0}^{\infty}(\binom{2k}{k}2^{-2k})^3\\
&\approx 0{,}7178\,.
\end{aligned}$$

Beispiel (Forts.)



WS(„Keine Rückkehr zum Anfang“) für den Random Walk in $\mathbb{Z}^d$

8. Formelsammlung

8.1 Gesetze zum Rechnen mit Ereignissen

Im Folgenden seien A und B, sowie $A_1, \ldots, A_n$ Ereignisse. Die Notation $A \uplus B$ steht für $A \cup B$ und zugleich $A \cap B = \emptyset$ (disjunkte Vereinigung). $A_1 \uplus \ldots \uplus A_n = \Omega$ bedeutet also, dass die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ eine Partition der Ergebnismenge Ω bilden.

$\Pr[\emptyset] = 0$
$0 \leq \Pr[A] \leq 1$
$\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$
$A \subseteq B \implies \Pr[A] \leq \Pr[B]$

$\forall i \neq j : A_i \cap A_j = \emptyset \implies$ $\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] = \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Additionssatz
$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ allgemeine Form: siehe Satz 9	Inklusion/Exklusion, Siebformel
$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n A_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[A_i]$	Boolesche Ungleichung
$\Pr[A\|B] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]}$ für $\Pr[B] > 0$	Def. bedingte Ws.

$B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B\|A_i] \cdot \Pr[A_i]$	Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit
$\Pr[B] > 0,\ B \subseteq A_1 \uplus \ldots \uplus A_n \implies$ $\Pr[A_i\|B] = \frac{\Pr[B\|A_i]\cdot\Pr[A_i]}{\sum_{i=1}^{n}\Pr[B\|A_i]\cdot\Pr[A_i]}$	Satz von Bayes
$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2\|A_1] \cdot$ $\ldots \cdot \Pr[A_n\|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]$	Multiplikationssatz
A und B unabhängig $\iff$ $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$	Definition Unabhängigkeit

8.2 Erwartungswert und Varianz diskreter Zufallsvariablen

Sei X eine diskrete Zufallsvariable. Für Erwartungswert und Varianz gelten die folgenden Formeln (sofern $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$ existieren).

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \sum_{x \in W_X} x \cdot \Pr[X = x] \\ &= \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot \Pr[\omega] \\ \Bigg(&= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i], \quad \text{falls } W_X \subseteq \mathbb{N}_0 \Bigg) \end{aligned}$$

Erwartungswert

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^2] \\ &= \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot (x - \mathbb{E}[X])^2 \end{aligned}$$

Varianz

8.3 Gesetze zum Rechnen mit Zufallsvariablen

Seien a, b, a_1, ..., $a_n \in \mathbb{R}$, $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\iff$ für alle $(a_1, \ldots, a_n)$: $\Pr[X_1 = a_1, \ldots, X_n = a_n] = \Pr[X_1 = a_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = a_n]$
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\implies$ $f_1(X_1), \ldots, f_n(X_n)$ unabhängig
$\mathbb{E}[a \cdot X + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$

$X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \implies \mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[Y]$	Monotonie des Erwartungswerts
$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X \mid A_i] \cdot \Pr[A_i]$	
$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$	
$\mathrm{Var}[a \cdot X + b] = a^2 \cdot \mathrm{Var}[X]$	

$\mathbb{E}[a_1X_1 + \ldots + a_nX_n]$ $= a_1\mathbb{E}[X_1] + \ldots + a_n\mathbb{E}[X_n]$	Linearität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Longrightarrow$ $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$	Multiplikativität des Erwartungswerts
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängig $\Longrightarrow$ $\mathrm{Var}[X_1 + \ldots + X_n] = \mathrm{Var}[X_1] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]$	Varianz einer Summe

$X \geq 0 \implies$ $\Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X]/t$ für $t > 0$	Markov
$\Pr[\lvert X - \mathbb{E}[X] \rvert \geq t]$ $\leq \mathrm{Var}[X]/t^2$ für $t > 0$	Chebyshev
siehe Satz 63	Gesetz der großen Zahlen