Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 3
5. Mai 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 11. Mai 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.“

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

2. Eine Urne enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle. Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

   Wie viele Bälle enthielt die Urne zu Beginn?

   (Wir setzen entsprechende Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit voraus).

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 120\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ durch 3 oder 5 (oder beides) teilbar ist! Die Auswahl aus W sei dabei Laplace-verteilt.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine (Laplace)-zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 120\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ nicht durch $4, 8$ und 12 teilbar?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die folgende Tabelle zeige die Wahrscheinlichkeit $\Pr[k]$ an, dass eine Familie k Kinder hat (wir vernachlässigen die Wahrscheinlichkeit höherer Kinderzahlen).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Pr[k]$	0.3	0.2	0.2	0.13	0.09	0.04	0.025	0.01	0.004	0.001

Wenn Jungen- und Mädchengeburten gleich wahrscheinlich sind, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Mädchen mindestens einen Bruder hat?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir wollen mit einem Test feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte infektiöse Krankheit vorliegt, wenn der Test positiv war. Die Krankheit trete bei Menschen mit der Häufigkeit 10^{-5} auf. Bei gesunden Menschen sei der Test mit Wahrscheinlichkeit $0,001$ positiv, bei schon erkrankten Menschen sei der Test in 95% der Fälle positiv.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiv ausgefallenen Test keine Infektion vorliegt?

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Thema sind unabhängige Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert. Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.

  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. Beweis!

- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i. Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s|A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. Beweis!

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

   In welchem Zusammenhang steht diese Aufgabe mit Hausaufgabe 1 von Blatt 1?

Tutoraufgabe 1

Für alle $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{0,1\}^n$ mit $n \geq 2$ sei $Pr[\omega] = 2^{-n}$. Wir definieren die $n+1$ Ereignisse $A_i := \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega_i = 1\}$ und $B := \{\omega \in \Omega\ ;\ \sum_i \omega_i \text{ ist ungerade}\}$ sowie die Ereignismengen

$$F_1 = \{A_1, \ldots, A_n, B\}, \qquad F_2 = \{A_1, \ldots, A_n\}, \qquad F_3 = \{A_2, \ldots, A_n, B\}.$$

Welche dieser Mengen sind unabhängig? Beweis!

Hinweis: Nutzen Sie das in Vorbereitungsaufgabe 1 definierte Verfahren.

Tutoraufgabe 2

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. $X :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.
2. $Y :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.
3. $Z :=$ Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis beide `O` gezogen wurden.

Tutoraufgabe 3

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2 \cdot \mathrm{Var}[X] + 2 \cdot \mathrm{Var}[Y]\,.$$
2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y) \cdot (X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[X-Y]\,.$$