Technische Universität München **Sommersemester 2009**
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

LÖSUNG

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – ProbeMT

Beachten Sie: **Soweit nicht anders angegeben, sind alle Antworten zu begründen!**

Aufgabe 1

- Es seien A und B zwei Ereignisse mit $\Pr[A] = 0.2$ und $\Pr[A \cup B] = 0.6$.
  a) Zeigen Sie $0.4 \le \Pr[B] \le 0.6$.
  b) Seien A und B unabhängig. Zeigen Sie $\Pr[B] = 0.5$.
- Sie werfen n Mal eine Münze. Sei $\Omega = \{Z, K\}^n$ und $\Pr[\omega] = 1/2^n$ für alle $\omega \in \Omega$. Sei A_1 das Ereignis, dass höchstens ein Mal „Z" erscheint. Sei A_2 das Ereignis, dass „Z" und „K" jeweils mindestens einmal erscheinen.
  c) Geben Sie für $n = 2$ die Ereignisse A_1 und A_2 als Teilmengen von Ω an. Sind für $n = 2$ die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?
  d) Sind für $n = 3$ die Ereignisse A_1 und A_2 unabhängig?
- Sie werfen 16 Reiskörner so auf ein Schachbrett, dass jedes Reiskorn mit derselben W'keit in ein bestimmtes der 64 Schachfelder fällt. Alle Reiskörner treffen dabei auf das Schachbrett. Es sei N die Anzahl der Reiskörner, die in das Feld links oben fallen.
  e) Geben Sie $\Pr[N = 0]$ an. Geben Sie die Approximation von $\Pr[N = 1]$ mittels der Poisson-Verteilung an.
  f) Bestimmen Sie mit Hilfe der Markov-Ungleichung ein möglichst kleines n, so dass $\Pr[N < n] \ge 0.95$ gilt.

Lösungsvorschlag:

a) Da $B \subseteq A \cup B$, folgt $\Pr[B] \le \Pr[A \cup B] = 0.6$. Mit der Siebformel gilt $\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]$ oder $\Pr[B] = \Pr[A \cup B] - \Pr[A] + \Pr[A \cap B] \ge \Pr[A \cup B] - \Pr[A] = 0.6 - 0.2 = 0.4$.

b) Es gilt außerdem $\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B]$. Mit der Siebformel also: $\Pr[B] = \Pr[A \cup B] - \Pr[A] + \Pr[A \cap B] = \Pr[A \cup B] - \Pr[A] + \Pr[A] \cdot \Pr[B]$, oder $\Pr[B] = 0.6 - 0.2 + 0.2 \cdot \Pr[B]$, oder $\Pr[B] = 0.5$.

c) $A_1 = \{ZK, KZ, KK\}$ mit $\Pr[A_1] = 3/4$.
$A_2 = \{ZK, KZ\}$ mit $\Pr[A_2] = 1/2$.
$A_1 \cap A_2 = \{\text{ZK, KZ}\}$ mit $\Pr[A_1 \cap A_2] = 1/2 \neq 3/8 = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$

d) $A_1 = \{KKK, ZKK, KZK, KKZ\}$ mit $\Pr[A_1] = 4/8 = 1/2$.
$A_2 = \Omega \setminus \{KKK, ZZZ\}$ mit $\Pr[A_2] = 6/8 = 3/4$.
$A_1 \cap A_2 = \{ZKK, KZK, KKZ\}$ mit $\Pr[A_1 \cap A_2] = 3/8 = 1/2 \cdot 3/4 = \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2]$, also unabhängig.

e)
$$\Pr[N = 0] = \left(1 - \frac{1}{64}\right)^{16} \quad \text{und } \Pr[N = 1] =\approx \frac{1}{4} e^{-\frac{1}{4}}.$$

f)
$$\Pr[N < n] = 1 - \Pr[N \ge n] \ge 1 - \frac{\mathbb{E}[N]}{n} = 1 - \frac{1}{4n} \overset{!}{\ge} 0.95 \Rightarrow n = 5.$$

Aufgabe 2

X und Y seien unabhängige, diskrete Zufallsvariablen, wobei X über $\{1, 2, \ldots, 31\}$ gleichverteilt ist, während Y gleichverteilt über $\{1, 2, \ldots, 25\}$ ist. X und Y geben dabei die Kantenlängen eines Rechtecks an. Mit A sei der Flächeninhalt, mit U der Umfang des durch X und Y bestimmten Rechtecks bezeichnet.

a) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von X und Y.

Hinweis:

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

b) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von U.

c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von A.

d) Bestimmen Sie die Varianz von A.

Lösungsvorschlag:

a) Mit $n = 31$ gilt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)}{2n} = \frac{n+1}{2} = 16 \\ \mathbb{E}[X^2] &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} k^2 \cdot \frac{1}{n} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} = 336 \\ \mathrm{Var}[X] &= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{4} = \frac{n^2-1}{12} = 80. \end{aligned}$$

Entsprechend folgt für Y mit $n = 25$:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Y] &= 13 \\ \mathbb{E}[Y^2] &= 221 \\ \mathrm{Var}[Y] &= 52. \end{aligned}$$

b) Mit $U = 2(X + Y)$ folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[U] &= 2 \cdot (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]) = 58 \\ \mathrm{Var}[U] &= 4 \cdot (\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]) = 528. \end{aligned}$$

c) Mit $A = XY$ und X, Y unabhängig gilt

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 208$$

d) Da X und Y unabhängig sind, sind auch X^2 und Y^2 unabhängig nach Folie 139, bzw. man rechnet leicht nach:

$$\Pr\left[X^2 = x^2, Y^2 = y^2\right] = \Pr[X = x, Y = y] = \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = y] = \Pr\left[X^2 = x^2\right] \cdot \Pr\left[Y^2 = y^2\right]$$

Man muss dabei beachten, dass X und Y nur positive Werte mit pos. W'keit annehmen.

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[A^2] &= \mathbb{E}[X^2 \cdot Y^2] = \mathbb{E}[X^2] \cdot \mathbb{E}[Y^2] = 74256 \\ \mathrm{Var}[A] &= \mathbb{E}[A^2] - \mathbb{E}[A]^2 = 30992 \end{aligned}$$

Aufgabe 3

Sie messen die Temperatur mit zwei Thermometern. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 geben die Messergebnisse der beiden Thermometer an. Die Thermometer sind geeicht, das bedeutet $\mathbb{E}[X_1] = \mathbb{E}[X_2] = \mu$, wobei μ die echte Temperatur ist. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind unabhängig und es gilt $\mathrm{Var}[X_1] = v_1$ und $\mathrm{Var}[X_2] = v_2$, wobei v_1 und v_2 möglicherweise verschieden, aber bekannt sind. Betrachten Sie die Zufallsvariable $X = (1 - w) \cdot X_1 + w \cdot X_2$, wobei $w \in [0, 1]$.

a) Geben Sie $\mathbb{E}[X]$ an.

b) Bestimmen Sie w so, dass $\mathrm{Var}[X]$ minimiert wird.

Lösungsvorschlag:

a) $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(1 - w)X_1 + wX_2] = (1 - w)\mathbb{E}[X_1] + w\mathbb{E}[X_2] = (1 - w)\mu + w\mu = \mu.$

b) $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[(1 - w)X_1 + wX_2] = (1 - w)^2\mathrm{Var}[X_1] + w^2\mathrm{Var}[X_2] = (1 - w)^2 v_1 + w^2 v_2.$
Ableiten nach w ergibt $-2(1 - w)v_1 + 2wv_2$. Gleich 0 setzen ergibt: $wv_1 + wv_2 = v_1 \Leftrightarrow w = \frac{v_1}{v_1+v_2}$.

Aufgabe 4

Die Kovarianz von zwei Zufallsvariablen X, Y ist so definiert:

$$\mathrm{Kov}[X,Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)]$$

Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$: $\mathrm{Kov}[X+a, Y+b] = \mathrm{Kov}[X,Y]$.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kov}[X+a, Y+b] &= \mathbb{E}[(X + a - \mathbb{E}[X+a])(Y + b - \mathbb{E}[Y+b])] \\
&= \mathbb{E}[(X + a - (\mathbb{E}X + \mathbb{E}a))(Y + b - (\mathbb{E}Y + \mathbb{E}b))] \\
&= \mathbb{E}[(X + a - \mathbb{E}X - a)(Y + b - \mathbb{E}Y - b)] \\
&= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)(Y - \mathbb{E}Y)] \\
&= \mathrm{Kov}[X,Y]
\end{aligned}$$

Aufgabe 5

Seien $X_1, \ldots, X_{100}$ diskrete unabhängige Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf $\{1, \ldots, 20\}$ sind.

a) Die Zufallsvariable $Y_i \sim \mathrm{Bin}(1; \frac{8}{20})$ nimmt genau dann den Wert 1 an, wenn $X_i > 12$ gilt. Auf dem beigefügten Formelblatt finden Sie die Chernoff-Schranken aus der Vorlesung. Bestimmen Sie mit diesen die *best mögliche* obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100} \geq 50$$

b) Sei $X = X_1 + \cdots + X_{100}$. Zeigen Sie mit der Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 1300] < 0.03$$

Hinweise: Es gilt $\mathrm{Var}[X_1] = 133/4$. Vergleichen Sie $\Pr[X \geq 1300]$ und $\Pr[X \leq 800]$.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt $p := \Pr[Y_i = 1] = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$.
Sei $Y = Y_1 + \cdots + Y_{100}$.
Es gilt $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$ und $\mathbb{E}[Y] = 100 \cdot \mathbb{E}[Y_1] = 100 \cdot 0.4 = 40$. Also:

$$\Pr[Y \geq 50] = \Pr\left[Y \geq (1 + \underbrace{0.25}_{=:\delta}) \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{40}\right] = \ldots$$

Wegen $\geq$ kommen nur die Schranken 1) und 4) von dem gegebenen Formelblatt in Frage. Entweder wertet man nun beide aus, oder man erinnert sich aus der Vorlesung, dass sich 1) durch Überapproximation von 4) ergibt, so dass 4) stets genauer ist:

$$\ldots \leq \left(\frac{e^{0.25}}{1.25^{1.25}}\right)^{40} \approx 0.31$$

b) Aus Symmetriegründen gilt $\Pr[X \geq 1300] = \Pr[X \leq 800]$. Außerdem $\mathbb{E}[X] = 100 \cdot \mathbb{E}[X_1] = 100 \cdot 10.5 = 1050$ und $\mathrm{Var}[X] \overset{\text{unabh.}}{=} 100 \cdot \frac{133}{4} = 3325$. Folglich gilt:

$$\Pr[X \geq 1300] = \frac{1}{2}\left(\Pr[X \geq 1300] + \Pr[X \leq 800]\right) = \frac{1}{2}\Pr[|X - 1050| \geq 250] \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{Var}[X]}{250^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3325}{250^2} = 0.0266$$

Chernoff-Schranken:

Es seien $X_1, \dots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(1; p_i)$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu = \mathbb{E}[X]$:

1) $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/3}$ für $0 < \delta < 1.81$
2) $\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$ für $0 < \delta \leq 1$
3) $\Pr[|X-\mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$ für le $0 < \delta \leq 1$
4) $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$ für $\delta \geq 0$
5) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mu$.