Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 6
8. Juni 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Die Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie wird von 344 Studenten gehört. Aus Erfahrung weiß die Übungsleitung jedoch, dass im Schnitt lediglich achtzig Prozent der Studenten die Klausur mitschreiben. Da die Übungsleitung umweltbewusst ist, möchte sie möglichst wenig Klausurangaben drucken. Es wird angenommen, dass die Studenten ihre Entscheidung die Klausur zu schreiben unabhängig voneinander treffen. Bestimmen Sie eine Mindestanzahl an Angaben, die die Übungsleitung bereitstellen muss, so dass diese mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $\frac{1}{20}$ nicht ausreichen.

Hinweise: Nutzen sie die erste Chernoff-Schranke aus Korollar 68 der Vorlesung.

Lösungsvorschlag

Sei X_i eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable, die angibt, ob der i-te Student zur Kalusur erscheint. Des Weiteren sei X die Anzahl aller Studenten, die die Klausur mitschreiben und ξ die Anzahl der ausgedruckten Angaben. Gesucht ist also ein ξ für das $\Pr[X \geq \xi] \leq \frac{1}{20}$. Da alle X_i unabhängig sind, können wir $\Pr[X \geq \xi]$ durch eine Chernoff-Schranke abschätzen. Wir folgen also dem Hinweis aus der Angabe und erhalten

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{-\frac{\delta^2\mu}{3}} \text{ für } 0 < \delta \leq 1.$$

Nachdem der Erwartungswert von X laut Angabe $344 \cdot \frac{8}{10}$ beträgt, können wir nach δ auflösen und erhalten

$$\begin{aligned}
& \exp\left(-\frac{\delta^2 \cdot 344 \cdot \frac{8}{10}}{3}\right) = \frac{1}{20} \\
\iff \quad & \frac{\delta^2 \cdot 344 \cdot \frac{8}{10}}{3} = \ln(20) \\
\iff \quad & \delta = \sqrt{\frac{\ln(20^3)}{344 \cdot \frac{8}{10}}} \\
\implies \quad & \delta \approx 0{,}18071.
\end{aligned}$$

Im letzten Schritt müssen wir noch ξ bestimmen. Durch die Chernoff-Schranke wissen wir bereits, dass ξ die folgende Ungleichung erfüllen muss

$$\xi \geq (1+\delta)\mu = \left(1 + \sqrt{\frac{\ln(20^3)}{344 \cdot \frac{8}{10}}}\right) \cdot 344 \cdot \frac{8}{10} \approx 324{,}93204.$$

Somit sollte die Übungsleitung mindestens 325 Klausuren drucken.

Tutoraufgabe 2

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Parameter $0 < p < 1$ ist logarithmisch verteilt, wenn für alle $x \in \mathbb{N}$ die Dichtfunktion definiert ist durch $f_X(x) = \frac{-p^x}{x \ln(1-p)}$ und für alle anderen x gilt $f_X(x) = 0$. Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ und nutzen Sie diese, um den Erwartungswert und die Varianz von X zu ermitteln.

Lösungsvorschlag

Die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer Zufallsvariable X, die ausschließlich Werte aus den natürlichen Zahlen einschließlich der 0 annimmt, ist definiert als

$$G_X(s) = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot s^x.$$

Für die logarithmische Verteilung mit $0 \leq s < \frac{1}{p}$ erhalten wir somit

$$\begin{aligned} G_X(s) &= \sum_{x=1}^{\infty} \left(\frac{-p^x}{x \ln(1-p)} \right) \cdot s^x \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \cdot \sum_{x=1}^{\infty} \frac{(ps)^x}{x} \\ &= \frac{-1}{\ln(1-p)} \cdot \ln\left(\frac{1}{1-ps} \right) \\ &= \frac{\ln(1-ps)}{\ln(1-p)}. \end{aligned}$$

Um den Erwartungswert von X zu ermitteln betrachten wir die erste Ableitung der wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion. Allgemein gilt

$$G'_X(1) = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot x \cdot 1^{x-1} = \mathbb{E}[X].$$

Wir leiten $G_X(s)$ also nach s ab

$$G'_X(s) = \frac{-p}{(1-ps)\ln(1-p)}$$

und setzen s gleich 1

$$\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{-p}{(1-p)\ln(1-p)}.$$

Mit ähnlicher Argumentation lässt sich auch der Erwartungswert von $X(X-1)$ bestimmen

$$G''_X(1) = \sum_{x=0}^{\infty} f_X(x) \cdot x(x-1) \cdot 1^{x-2} = \mathbb{E}[X(X-1)].$$

In unserem Fall ist die zweite Ableitung von $G_X(s)$ äquivalent zu

$$G''_X(s) = \frac{-p^2}{(1-ps)^2 \ln(1-p)} \quad .$$

Wir bestimmen die Varianz von X somit wie folgt:

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}[X] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X]^2 \\
&= \frac{-p^2}{(1-p)^2 \ln(1-p)} + \frac{-p}{(1-p)\ln(1-p)} - \frac{p^2}{(1-p)^2 \ln(1-p)^2} \\
&= \frac{-p^2 \ln(1-p)}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2} + \frac{-p(1-p)\ln(1-p)}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2} + \frac{-p^2}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2} \\
&= \frac{-p(\ln(1-p)+p)}{(1-p)^2(\ln(1-p))^2}.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 3

Sei X_i eine Familie von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_X(s)$. Des Weiteren sei Z definiert als $\sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei N eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$ ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ gilt.

1. Angenommen N ist Poisson-verteilt mit Parameter λ und X_i Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Bestimmen Sie $G_Z(s)$ und benennen Sie die entsprechende Verteilung von Z.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_i]$ gilt.

Lösungsvorschlag

Aus der Vorlesung wissen wir, dass die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen der Zufallsvariablen N sowie X_i gegeben sind durch

$$G_N(s) = e^{\lambda(s-1)} \quad \text{und} \quad G_X(s) = 1 - p + ps.$$

Wenn wir diese nun in die Gleichung aus der Angabe einsetzen und rechnen erhalten wir

$$G_Z(s) = e^{\lambda((1-p+ps)-1)} = e^{\lambda p(s-1)}.$$

Die Funktion $G_Z(s)$ stimmt also mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion einer mit Parameter λp Poisson-verteilten Zufallsvariable überein. Gemäß dem Eindeutigkeitssatz ist Z demnach Poisson-verteilt. Kommen wir nun zur zweiten Teilaufgaufgabe. Wie wir bereits in der vorherigen Tutoraufgabe gesehen haben, entspricht die erste Ableitung einer wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion für $s = 1$ dem Erwartungswert der entsprechenden Zufallsvariable. Die ursprüngliche wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion nimmt hingegen den Wert 1 an, wie wir anhand der folgenden Gleichung leicht sehen

$$G_X(1) = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) \cdot 1^x = \sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1.$$

Insgesamt ergibt sich somit der Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Z] = G_Z'(1) = G_N'(G_X(1)) \cdot G_X'(1) = G_N'(1) \cdot G_X'(1) = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_i].$$

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Mit großem Ärger stellen Sie fest, dass Sie wieder vergessen haben, welche der beiden Münzen aus Tutoraufgabe 1 von Übungsblatt 2 a und welche b ist. Zumindest erinnern Sie sich noch daran, dass Münze a mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ Kopf zeigt wohingegen Münze b nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Kopf zeigt. Angenommen Sie wählen zufällig eine der beiden Münzen und werfen diese genau fünfundsiebzigmal. Zeigen Sie mithilfe der Chernoff-Ungleichung, dass es möglich ist, die Münzen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ korrekt zu identifizieren.

Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzungen $e^{13} > 400000$ und $\left(\frac{50}{37}\right)^{37} < 100000$.

Lösungsvorschlag

Ein sinnvolles Verfahren besteht darin, genau dann zu vermuten, dass Sie Münze a gewählt haben, wenn häufiger Kopf als Zahl gefallen ist. Wir beweisen nun, dass die Wahrscheinlichkeit, mit der Sie sich fälschlicherweise für b entscheiden, kleiner als $\frac{1}{4}$ ist. Der umgekehrte Fall, also eine fälschliche Entscheidung für a, lässt sich analog zeigen. Sei X_i eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable, die den Wert 1 annimmt, falls im i-ten Wurf Kopf erscheint. Des Weiteren sei X die Gesamtzahl aller Kopfwürfe, also $\sum_{i=1}^{75} X_i$. Unter der Annahme mit Münze a zu werfen, ist der Erwartungswert von X gleich

$$\mu = \frac{2}{3} \cdot 75 = 50.$$

Wir interessieren uns für die Wahrscheinlichkeit, dass weniger als die Hälfte der Würfe Kopf gezeigt hat, also $\Pr[X \leq 37]$. Nachdem sich Chernoff-Schranken auf den Erwartungswert beziehen, setzen wir

$$\delta = 1 - \frac{37}{\mu} = \frac{13}{50},$$

denn somit gilt

$$\Pr[X \leq 37] = \Pr[X \leq (1-\delta)\mu].$$

Mit der Ungleichung aus Satz 66 der Vorlesung folgt

$$\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}}\right)^{\mu} = \left(\frac{e^{-\frac{13}{50}}}{\left(\frac{37}{50}\right)^{\frac{37}{50}}}\right)^{50} = \frac{e^{-13}}{\left(\frac{37}{50}\right)^{37}}.$$

Wenn wir nun dem Hinweis aus der Angabe folgen, erhalten wir letztendlich

$$\Pr[X \leq 37] \leq \frac{e^{-13}}{\left(\frac{37}{50}\right)^{37}} = \frac{\left(\frac{50}{37}\right)^{37}}{e^{13}} < \frac{100000}{400000} = \frac{1}{4}$$

und wissen, dass Sie mit einer Wahrscheinlichkeit kleiner $\frac{1}{4}$ die Münze falsch identifiziert haben. Im Umkehrschluss bedeutet das, dass Sie mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens $\frac{3}{4}$ richtig liegen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable und t eine beliebige reelle Zahl. Beweisen Sie mithilfe der Markov-Ungleichung, dass die Abschätzungen $\Pr[X \geq t] \leq \inf_{s \geq 0} \frac{M_X(s)}{\exp(ts)}$ bzw. $\Pr[X \leq t] \leq \inf_{s \leq 0} \frac{M_X(s)}{\exp(ts)}$ gültig sind.

Lösungsvorschlag

Sei $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{>0}$ eine beliebige monoton wachsende Funktion die von den reellen Zahlen auf die positiven reellen Zahlen abbildet. Sollte X einen Wert größer gleich t annehmen, dann muss auch $f(X)$ größer gleich $f(t)$ sein. Man beachte außerdem, dass die Zufallsvariable $f(X)$ lediglich positive Werte annimmt und $f(t)$ ebenfalls stets positiv ist. Wir können demnach die Markov-Ungleichung anwenden und erhalten

$$\Pr[X \geq t] \leq \Pr[f(X) \geq f(t)] \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}.$$

Betrachten wir nun die Funktion $f(x) = e^{xs}$. Offensichtlich handelt es sich für beliebige Parameter $s \geq 0$ um eine monoton wachsende Funktion mit Wertebereich in den positiven reellen Zahlen und es folgt

$$\Pr[X \geq t] \leq \inf_{s \geq 0} \frac{\mathbb{E}[e^{Xs}]}{e^{ts}} = \inf_{s \geq 0} \frac{M_X(s)}{\exp(ts)}.$$

Die zweite Ungleichung lässt sich ähnlich herleiten. Unter der Annahme, dass $f(x)$ monoton fallend ist, gilt

$$\Pr[X \leq t] \leq \Pr[f(X) \geq f(t)] \leq \frac{\mathbb{E}[f(X)]}{f(t)}.$$

Da $f(x)$ für beliebige Parameter $s \leq 0$ die geforderten Bedingungen erfüllt, können wir schließen, dass

$$\Pr[X \leq t] \leq \inf_{s \leq 0} \frac{\mathbb{E}[e^{Xs}]}{e^{ts}} = \inf_{s \leq 0} \frac{M_X(s)}{\exp(ts)},$$

was den Beweis vervollständigt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und positiver Standardabweichung σ. Die einseitige Chebychev-Ungleichung ist gegeben durch $\Pr\left[X \geq \mu + c\sigma\right] \leq \frac{1}{1+c^2}$ für beliebige $c > 0$. Beweisen Sie die Korrektheit der Ungleichung. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

1. Zeigen Sie zunächst, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[\frac{(X-t)^2}{(\mu+c\sigma-t)^2}]$ für $t < \mu + c\sigma$ größer gleich $\Pr[X \geq \mu + c\sigma]$ ist.

2. Finden sie anschließend einen Parameter t, der den obigen Erwartungswert minimiert, um die einseitige Chebychev-Ungleichung zu belegen.

Lösungsvorschlag

Nach Definition des Erwartungswertes gilt

$$\mathbb{E}\left[\frac{(X-t)^2}{(\mu+c\sigma-t)^2}\right] = \sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \frac{(x-t)^2}{(\mu+c\sigma-t)^2}.$$

Da weder $\Pr[X = x]$ noch $(x-t)^2$ oder $(\mu + c\sigma - t)^2$ negativ sein können, lässt sich diese Summe abschätzen mit

$$\sum_{x \in W_X} \Pr[X = x] \cdot \frac{(x-t)^2}{(\mu+c\sigma-t)^2} \geq \sum_{\substack{x \in W_X \\ x \geq \mu + c\sigma}} \Pr[X = x] \cdot \frac{(x-t)^2}{(\mu+c\sigma-t)^2}.$$

Außerdem setzen wir $t < \mu + c\sigma$ voraus, weshalb $(x-t)^2 \geq (\mu + c\sigma - t)^2$ für alle $x \geq \mu + c\sigma$ gelten muss. Wir können also eine weitere Abschätzung treffen und erhalten das gesuchte Ergebnis

$$\begin{aligned}
\sum_{\substack{x \in W_X \\ x \geq \mu + c\sigma}} \Pr[X = x] \cdot \frac{(x-t)^2}{(\mu + c\sigma - t)^2} &\geq \sum_{\substack{x \in W_X \\ x \geq \mu + c\sigma}} \Pr[X = x] \cdot \frac{(\mu + c\sigma - t)^2}{(\mu + c\sigma - t)^2} \\
&= \sum_{\substack{x \in W_X \\ x \geq \mu + c\sigma}} \Pr[X = x] \\
&= \Pr[X \geq \mu + c\sigma].
\end{aligned}$$

Im Folgenden suchen wir einen Parameter t, der den Erwartungswert von $\frac{(X-t)^2}{(\mu + c\sigma - t)^2}$ minimiert und folglich eine möglichst starke Abschätzung liefert. Dafür nutzen wir die folgende Umformung

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left[\frac{(X-t)^2}{(\mu + c\sigma - t)^2}\right] &= \frac{\mathbb{E}[(X-t)^2]}{(\mu + c\sigma - t)^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[((X-\mu) + (\mu - t))^2]}{(\mu + c\sigma - t)^2} \\
&= \frac{\mathbb{E}[\sigma^2 + 2 \cdot (X - \mu) \cdot (\mu - t) + (t - \mu)^2]}{(\mu + c\sigma - t)^2} \\
&= \frac{\sigma^2 + 2 \cdot \mathbb{E}[(X\mu - Xt - \mu^2 + \mu t)] + (t - \mu)^2}{(\mu + c\sigma - t)^2} \\
&= \frac{\sigma^2 + (t-\mu)^2}{(\mu + c\sigma - t)^2}.
\end{aligned}$$

Sei nun $f(t)$ definiert als $\frac{\sigma^2 + (t-\mu)^2}{(\mu + c\sigma - t)^2}$. Ableiten der Funktion $f(t)$ nach t ergibt

$$\begin{aligned}
f'(t) &= \frac{2 \cdot (t - \mu) \cdot (\mu + c\sigma - t)^2 + (\sigma^2 + (t-\mu)^2) \cdot 2 \cdot (\mu + c\sigma - t) \cdot (-1)}{(\mu + c\sigma - t)^4} \\
&= \frac{2 \cdot ((t-\mu) \cdot (\mu + c\sigma - t) - (\sigma^2 + (t-\mu)^2))}{(\mu + c\sigma - t)^3} \\
&= \frac{2 \cdot (c\sigma(t - \mu) - \sigma^2)}{(\mu + c\sigma - t)^3} \\
&= \frac{2c\sigma(t - (\mu - \frac{\sigma}{c}))}{(\mu - c\sigma - t)^3}.
\end{aligned}$$

Damit ist $f'(t)$ genau dann 0, wenn t gleich $\mu - \frac{\sigma}{c}$ ist. Nachdem die zweite Ableitung von f an diesem Punkt positiv ist, haben wir das globale Minimum der Funktion gefunden. Des Weiteren ist $\mu - \frac{\sigma}{c} < \mu + c\sigma$ und demnach ein zulässiger Parameter für die Abschätzung aus der ersten Teilaufgabe. Wir betrachten also $f(\mu - \frac{\sigma}{c})$ und berechnen

$$f\left(\mu - \frac{\sigma}{c}\right) = \frac{\sigma^2 + ((\mu - \frac{\sigma}{c}) - \mu)^2}{(\mu + c\sigma - (\mu - \frac{\sigma}{c}))^2} = \frac{\sigma^2 + (\frac{\sigma}{c})^2}{(c\sigma + \frac{\sigma}{c})^2} = \frac{1 + (\frac{1}{c})^2}{c^2 + (\frac{1}{c})^2} = \frac{\frac{1+c^2}{c^2}}{(\frac{1+c^2}{c})^2} = \frac{1}{1+c^2},$$

wodurch wir die einseitige Chebychev-Ungleichung bewiesen haben.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Sie werfen zwei Würfel, die die Ziffern von eins bis sechs jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit zeigen. Seien a die Ziffer des ersten und b die des zweiten Wurfs. Die Ereignisse $a = b$ und $|a - b| = 1$ sind gleichwahrscheinlich.

2. Ein Ereignis E kann zu sich selbst unabhängig sein.

3. Falls $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] = 0$ ist, dann gilt $X(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

4. Für alle diskreten Zufallsvariablen X, die nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annehmen, ist der Erwartungswert stets ungleich der Varianz.

5. Wir betrachten eine diskrete Zufallsvariable X, die nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annimmt. Angenommen die Dichtefunktion von X ist durch $f_X(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$ für $x \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Dann ist die Varianz von X gleich 2.

6. Es existiert eine diskrete Zufallsvariable X, die ausschließlich Werte aus $\mathbb{N}_0$ annimmt mit $\Pr[X = 0] + \mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$.

7. Es gibt keine Zufallsvariable X mit zugehöriger wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion $G_X(s) = \frac{1}{1-s}$.

8. Sei $G_X(s) = \frac{1+s}{2}$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer diskreten Zufallsvariablen X. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X = 2]$ gleich 0.

9. Sei $X \sim \text{Bin}(2, \frac{1}{2})$, dann gilt $(X + X) \sim \text{Bin}(4, \frac{1}{2})$.

10. Andrey Andreyevich Markov war Student bei Pavnuti Lvovich Chebychev.

Lösungsvorschlag

1. **Falsch:** Die Würfe werden durch einen Wahrscheinlichkeitsraum von Paaren (a, b) modelliert, wobei jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist. Sei E_1 das Ereignis $a = b$ und E_2 das Ereignis $|a - b| = 1$. Durch einfaches Abzählen erhalten wir $|E_1| = 6$ und $|E_2| = 10$, was die Behauptung widerlegt.

2. **Wahr:** Tritt das Ereignis E mit Wahrscheinlichkeit 0 bzw. 1 ein so gilt

   $$\Pr[E \cap E] = \Pr[E] = 0 \text{ bzw. } 1 = \Pr[E] \cdot \Pr[E],$$

   was die Bedingung für Unabhängigkeit erfüllt.

3. **Falsch:** Sei $\Omega = \{a, b\}$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Pr[a] = 1$ und $\Pr[b] = 0$. Wir definieren die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X(a) = 0$ und $X(b) = 1$. Dann gilt

   $$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \cdot 1 + 1^2 \cdot 0 = 0.$$

4. **Falsch:** Als Gegenbeispiel betrachte eine Zufallsvariable X die den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit 1 annimmt. Dann ist sowohl der Erwartungswert als auch die Varianz von X genau 0.

5. **Wahr:** An der Dichtefunktion erkennen wir, dass X Poisson-verteilt mit Parameter 2 ist. Nach Vorlesung ist die Varianz von X damit ebenfalls 2.

6. **Falsch:** Es gilt $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=0}^{\infty} i \cdot \Pr[X = i]$ und folglich

$$\Pr[X = 0] + \mathbb{E}[X] \geq \Pr[X = 0] + \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X = i] = 1,$$

was der Behauptung widerspricht.

7. **Wahr:** Die zu $\frac{1}{1-s}$ gehörige Potenzreihe ist $\sum_{i=0}^{\infty} 1 \cdot s^i$. Wegen der Eindeutigkeit der Potenzreihendarstellung wäre X also eine Zufallsvariable, die jeder natürlichen Zahl einschließlich der 0 eine Wahrscheinlichkeit von 1 zuordnet. Dies ist ein Widerspruch zur Definition von Wahrscheinlichkeitsräumen.

8. **Wahr:** Nach Vorlesung gilt $\Pr[X = 2] = \frac{G''_X(0)}{2!}$. Da $G''_X(s) = 0$ ist, folgt sofort die Behauptung.

9. **Falsch:** Die Zufallsvariable $X + X$ kann lediglich die Werte 0, 2 und 4 annehmen. Wäre $X + X$ binomialverteilt mit Parametern 4 und $\frac{1}{2}$, so würden auch 1 und 3 mit positiver Wahrscheinlichkeit angenommen werden. $X + X$ kann also nicht $\text{Bin}(4, \frac{1}{2})$ verteilt sein.

10. **Wahr:** Siehe Vorlesung S.155.