Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 4
11. Mai 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 18. Mai 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Ein Übungsblatt in Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie umfasst vier Hausaufgaben für die es jeweils bis zu fünf Punkte gibt. Vereinfachend gehen wir davon aus, dass die Studenten ihre Punkte zufällig erzielen. Dabei entsprechen die Zufallsvariablen X_1 bis X_4 der jeweiligen Punktezahl pro Aufgabe. Die gemeinsame Dichtefunktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ist gegeben durch $\prod_{i=1}^{4} \frac{15-x_i}{75}$ für alle ganzzahligen x_i zwischen 0 und 5. In allen anderen Fällen hat die Dichte den Wert 0.

1. Bestimmen Sie die Randdichten f_{X_1} bis f_{X_4}.
2. Sind die Zufallsvariablen X_1 bis X_4 unabhänig?
3. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der insgesamt erzielten Hausaufgabenpunkte eines Übungsblattes.

Tutoraufgabe 2

Seien X und Y zwei unabhängige, diskrete und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(X)$. Bestimmen Sie die Dichte und die Verteilung von $\max\{X, Y\}$ und $\min\{X, Y\}$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $F(x)$.

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten eine Familie von n unabhängigen und diskreten Zufallsvariablen X_i die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ die Werte -1 oder 1 annehmen. Sei $f_n(x)$ die Dichte der Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie anhand des Faltungssatzes aus der Vorlesung, dass für alle x zwischen $-n$ und n mit geradem $x + n$ gilt, $f_n(x) = 2^{-n} \cdot \binom{n}{\frac{x+n}{2}}$ und für alle anderen x die Dichtefunktion 0 ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass für zwei disjunkte Indexmengen $I, J \subseteq [n]$ die Zufallsvariablen $\sum_{i \in I} X_i$ und $\sum_{j \in J} X_j$ ebenfalls unabhängig sind.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen, so dass die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ existieren. Die Kovarianz ist definiert als $\text{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

1. Zeigen Sie, dass die Kovarianz von X und Y gleich 0 ist, falls es sich um unabhängige Zufallsvariablen handelt.

2. Neben der Unabhängigkeit von X und Y nehmen wir im Folgenden zusätzlich an, dass X und Y identisch verteilt sind. Berechnen Sie den Wert von $\text{Cov}[X+Y, X-Y]$.

3. Definieren Sie nun einen passenden diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ mit unabhängigen und identisch verteilten X und Y, so dass $X+Y$ und $X-Y$ abhängig sind.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten ein Deck aus 52 Karten mit den Farben $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$ und $\clubsuit$ sowie den Werten von 1 bis 10, B, D und K. Angenommen Sie ziehen eine Hand aus vier verschiedenen Karten und gruppieren diese nach ihrer Farbe bzw. ihrem Wert. Die Zufallsvariablen X und Y entsprechen jeweils der Anzahl an Karten in der größten gleichfarbigen bzw. gleichwertigen Gruppe. Ziehen Sie bspw. die Hand $\{\diamondsuit 4, \heartsuit 4, \heartsuit B, \clubsuit 4\}$ so gilt $X = 2$ und $Y = 3$. Bestimmen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ sowie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ unter der Annahme, dass jede Hand gleich wahrscheinlich ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage. Zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn X^2 und Y^2 unabhängig sind.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Übungsleitung in Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie wertet eine Klausur als erfolgreich, wenn der Notenschnitt besser als im vorherigen und darauffolgenden Jahr ist. Um die Häufigkeit solcher Klausuren zu ermitteln, betrachten wir $n + 2$ aufeinanderfolgenden Klausuren. Dabei wird jeder Klausur ein eindeutiger Rang zwischen 1 und $n + 2$ entsprechend des Notenschnitts zugewiesen. Der Einfachheit halber gehen wir im Folgenden davon aus, dass jede Rangfolge gleich wahrscheinlich ist und keine identischen Notenschnitte vorkommen.

1. Sei X_i eine Indikatorvariable, die für alle $1 < i < n + 2$ genau dann 1 ist, wenn die i-te Klausur erfolgreich ist. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\sum_{i=2}^{n+1} X_i]$.

2. Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i \cdot X_j]$ in Abhängigkeit von $|i - j|$ für beliebige $1 < i, j < n + 2$.

3. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus der vorherigen Teilaufgabe um den Wert von $\text{Var}[\sum_{i=2}^{n+1} X_i]$ für $n \geq 3$ zu ermitteln.

Hinweis: Sie dürfen die Identität $\text{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{1 \geq i,j \geq n} \text{Cov}[X_i, X_j]$ ohne Beweis benutzen.