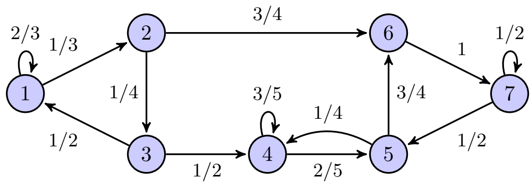
Technische Universität München (I7) **Sommer 2012**
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund **10. Juli 2012**

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 12

Abgabe bis zum 18.7. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Aufgabe 12.1 Abzugeben: a),b) 1P+2P



(a) Klassifizieren Sie die Zustände der Markov-Kette mit obigem Übergangsgraph in transient, positiv-rekurrent und null-rekurrent.

(b) Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit $h_4 = \mathbb{E}[T_4]$.

(c) Die bedingte ZV $N = \min\{n \geq 1 \colon X_n \in \{4, 5, 6, 7\}\} \mid [X_0 = 1]$ zählt die Zeitschritte, bis man, startend in Zustand 1, einen der Zustände aus $\{4, 5, 6, 7\}$ erreicht.

(i) Zeigen Sie, dass $\Pr[N < \infty] = 1$.

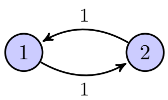
(ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[N]$ und $\mathrm{Var}[N]$.

Hinweis: Wie muss man die Markov-Kette tranformieren, damit sich N als Übergangszeit $T_{s,t}$ auffassen lässt?

(d) Besitzt diese Markov-Kette eine eindeutige stationäre Verteilung?

Aufgabe 12.2 Abzugeben 1P+1P+1P

Wir betrachten die Markov-Kette mit folgendem Übergangsgraphen:



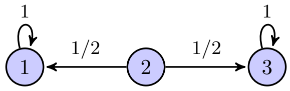
(a) Leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\Pr_\alpha[X_n = 1]$ in Abhängigkeit von der Startverteilung α her.

(b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette.

(c) Für welche Startverteilungen α konvergiert die Markov-Kette gegen die stationäre Verteilung?

Aufgabe 12.3 Abzugeben 2P

Gegen welche Verteilung konvergiert die Verteilung von X_n in Abhängigkeit von der Startverteilung für die Markov-Kette mit folgendem Übergangsgraphen?



Aufgabe 12.4 **Abzugeben** **1P+2P+2P+2P**

Betrachten Sie folgendes Programm zur Simulation eines Würfels:

```
int state  = 0;
int result = 0;

while( true ) {
  if(state == 0) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 1; } else { state = 2; }
  }
  if(state == 1) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 3; } else { state = 4; }
  }
  if(state == 2) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 5; } else { state = 6; }
  }
  if(state == 3) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 1; } else { state = 7; result = 1;}
  }
  if(state == 4) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 7; result = 2; } else { state = 7; result = 3;}
  }
  if(state == 5) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 7; result = 4; } else { state = 7; result = 5;}
  }
  if(state == 6) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 7; result = 6; } else { state = 2;}
  }
  if(state == 7) { state = 7 };
}
```

Nehmen Sie an, dass randomCoin() eine faire Münze implementiert, d.h., die Werte 0 und 1 immer mit jeweils W'keit 1/2 zurückgibt.

(a) Beschreiben Sie das Programm als eine Markov-Kette mit Zuständen $(s, r) \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\} \times \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.

Es reicht, den Übergangsgraphen zu zeichnen.

(b) Bestimmen Sie $\Pr[T_{s,t} < \infty]$ für $(s, t) = ((0, 0), (7, 1))$ und für $(s, t) = ((0, 0), (7, 2))$.

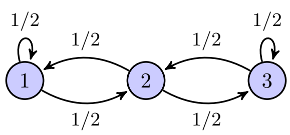
(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[T_{s,t} \mid T_{s,t} < \infty] = \frac{G'_{s,t}(1)}{G_{s,t}(1)}.$$

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_{s,t} \mid T_{s,t} < \infty]$ für $(s, t) = ((0, 0), (7, 1))$.

Aufgabe 12.5 **Abzugeben: a),b),c)** **1P+2P+2P**

Wir betrachten den folgenden Übergangsgraphen einer Markov-Kette:



(a) Stellen Sie die Übergangsmatrix P auf.

(b) Diagonalisieren Sie P und bestimmen Sie das Verhalten der Markov-Kette für $n \to \infty$ in Abhängigkeit von der Startverteilung.

(c) Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen der Rückkehrzeit $T_i = \tau_{i,i}$ für $i \in \{1, 2, 3\}$.

(d) Überprüfen Sie, dass $(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3})$ eine stationäre Verteilung der Markov-Kette ist.

($h_i = \mathbb{E}[T_i]$.)