Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h.c. Wilfried Brauer

WS 2005
Diskrete Strukturen 2
Wiederholungsklausur
14. Oktober 2005

Wiederholungsklausur Diskrete Strukturen II

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Gesamtzahl erreichbarer Punkte beträgt 80.
- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	A9	Σ	Korrektor
Erstkorrektur											
Zweitkorrektur											

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als (Bruch-)Zahl oder Zahlenvektor (2 Punkte) oder mindestens als Formel (1 Punkt) an.
Hinweis: Beachten Sie, dass die Aufgabenstellungen u. U. mehr Informationen enthalten, als Sie zur korrekten Beantwortung benötigen.

Im Folgenden sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω und Wahrscheinlichkeit $\Pr$.

Wir nehmen an, dass beim 10 mal wiederholten Test einer Laplace-verteilten Zufallsvariablen $X : \{\omega_1, \omega_2\} \to \{0, 1\} = W_X$ bereits 9 mal die Zahl 1 und 1 mal die Zahl 0 erhalten wurde.
Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, bei der nächsten Ausführung des Tests die Zahl 1 zu erhalten? .... $\boxed{\mathbf{\frac{1}{2}}}$

Seien A und B komplementäre Ereignisse über Ω.
Geben Sie den Wert von $\Pr[A \cup B]$ an! .... $\boxed{1}$

Für eine Zufallsvariable X sei $\mathrm{Var}[X] = 1$.
Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X + X - 2X]$! .... $\boxed{0}$

Sei $f_X(x)$ die Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X. Welchen Wert besitzt $f_X(2)$, falls $f_X(x) = \frac{1}{2}$ für alle x zwischen -1 und +1 gilt? .... $\boxed{0}$

Wir betrachten Markovketten M mit 6 Zuständen.
Wieviele transiente Zustände kann M höchstens besitzen? ...... $\boxed{5}$

Lösungsvorschlag

Punkteverteilung: 2 pro richtige Zahl, 1 für Formel, 0 bei unbeantworteter Frage.

Aufgabe 2 (10 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als (Bruch-)Zahl oder Zahlenvektor (2 Punkte) oder mindestens als Formel (1 Punkt) an.

Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge Ω und Wahrscheinlichkeit Pr. Für Ereignisse A und B mit $B \setminus A \neq \emptyset$ seien $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.
Geben Sie $\Pr[A \setminus B]$ an! .... $\boxed{\mathbf{\frac{2}{3}}}$

Eine Urne enthalte 1 weissen, 2 schwarze und 3 rote, gleichartige Bälle. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Ziehungen genau einen weissen und einen schwarzen Ball zu ziehen? .... $\boxed{\mathbf{\frac{2}{15}}}$

Für die Dichtefunktion f_X einer diskreten Zufallsvariablen X mit $W_X = \{0, 1, \ldots, 20\}$ gelte $f_X(x) = \binom{20}{x}\left(\frac{2}{7}\right)^x\left(\frac{5}{7}\right)^{20-x}$. Geben Sie $\mathrm{Var}[X]$ an! .... $\boxed{\mathbf{\frac{200}{49}}}$

Wir betrachten eine erwartungstreue, diskrete Schätzvariable X für einen Parameter α. Für die Verteilungsdichte f_X gelte $f_X(i) = \frac{\exp^{-3}(3^i)}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Mit welchem Wert wird α durch X geschätzt? $\boxed{3}$

Wieviele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$? .... $\boxed{1}$

Lösungsvorschlag

Punkteverteilung: 2 pro richtige Zahl, 1 für Formel, 0 bei unbeantworteter Frage.

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir betrachten eine Urne, die 3 verschiedene Bälle der Farben R, G und B enthalte. Ein Zufallsexperiment bestehe darin, in wiederholten Schritten jeweils einen Ball aus der Urne zu nehmen bis der Ball B ("blauer Ball") gezogen wird. (Das Experiment ist also erst damit beendet, wenn ein blauer Ball gezogen wird.) Falls allerdings R oder G ("roter" bzw. "gelber" Ball) entnommen wird, soll stattdessen ein blauer Ball in die Urne zuückgelegt werden. Eine Zufallsvariable X sei definiert als die Anzahl der Schritte bis ein blauer Ball gezogen wird. (Offenbar gilt $X \geq 1$.)

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach Ausführung des Experiments ausschliesslich blaue Bälle in der Urne verblieben sind?

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsdichte von X !

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X !

(d) Welche Verteilungsdichte besitzt X, falls in dem Experiment stets statt neuer, blauer Bälle nur diejenigen Bälle wieder zurückgelegt werden, die gerade entnommen wurden?

Lösungsvorschlag

(a) Es verbleiben genau dann ausschliesslich blaue Bälle in der Urne, falls entweder erst rot und dann gelb oder erst gelb und dann rot gezogen wird. Für die Gesamtwahrscheinlichkeit $\Pr[''\textit{alle verbleibenden Kugeln sind blau}'']$ gilt damit

$$\Pr[''\textit{alle verbleibenden Kugeln sind blau}''] = (\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}.$$

(2 Pkte.)

(b) Es gilt $W_X = \{1, 2, 3\}$, (1 Pkt.)

$\Pr[X = 1] = \frac{1}{3}$, (1 Pkt.)

$\Pr[X = 2] = \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}) = \frac{4}{9}$, (1 Pkt.)

$\Pr[X = 3] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3}) = \frac{2}{9}$. (1 Pkt.)

(c) $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{4}{9} \cdot 2 + \frac{2}{9} \cdot 3 = \frac{17}{9}$ (2 Pkte.)

(d) Es gilt $W_X = \mathbb{N}$,
und für $i \geq 1$

$\Pr[X = i] = \frac{1}{3} \cdot (\frac{2}{3})^{i-1}$. (2 Pkte.)

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Wir messen den Arbeitsaufwand an einer Landesgrenzstation als Anzahl der Fahrzeuge, die etwas zu verzollen haben. Wir nehmen an, daß pro Tag 80 PKW's und 20 LKW's eine Grenzstation passieren und ein PKW bzw. ein LKW mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{10}$ bzw. $\frac{1}{2}$ eine Ware zu verzollen hat. Die an einem Tag beobachtete Anzahl von PKW's bzw. LKW's mit zu verzollender Ware seien gegeben durch die Zufallsvariablen X bzw. Y.

(a) Bestimmen Sie $\Pr[Y = 2]$!

(b) Geben Sie die Verteilungsdichte von X an!

(c) Sei Z die Anzahl der Fahrzeuge pro Tag, die etwas zu verzollen haben, d. h. $Z = X + Y$. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(Z)$ und die Varianz $\operatorname{Var}[Z]$!

(d) Wir nehmen an, dass ein Stau an der Grenzstation entsteht, wenn 25 oder mehr Fahrzeuge Waren zu verzollen haben.

Zeigen Sie, dass wöchentlich höchstens mit einem einzigen Stau zu rechnen ist, d. h. präziser ausgedrückt

$$\Pr[Z \geq 25] \leq \frac{1}{7}.$$

Lösungsvorschlag

(a) Die Verteilungsdichte von Y ist binomial

$$\Pr[Y = i] = \binom{20}{i}(\tfrac{1}{2})^i(\tfrac{1}{2})^{20-i}. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

Es folgt $\quad \Pr[Y = 2] = 190 \cdot (\frac{1}{2})^{20}$. (1 Pkt.)

(b) Zunächst gilt $W_Y = \{0, 1, \ldots 80\}$. (1 Pkt.)
Die Verteilungsdichte von X ist binomial mit

$$\Pr[X = i] = \binom{80}{i}(\tfrac{1}{10})^i(\tfrac{9}{10})^{80-i}. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

(c)

$$\mathbb{E}(X) = np = 80 \cdot \tfrac{1}{10} = 8 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$
$$\mathbb{E}(Y) = 20 \cdot \tfrac{1}{2} = 10$$
$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y) = 18 \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})$$
$$\operatorname{Var}[X] = np(1-p) = 80 \cdot \tfrac{1}{10} \cdot \tfrac{9}{10} = 7,2 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$
$$\operatorname{Var}[Y] = 20 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2} = 5$$
$$\operatorname{Var}[Z] = \operatorname{Var}[X] + \operatorname{Var}[Y] = 12,2 \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})$$

(d)

$$\Pr[Z \geq 25] \leq \Pr[|Z - 18| \geq 7] \leq \frac{\operatorname{Var}[Z]}{7^2} \qquad \text{(2 Pkt.)}$$
$$= \tfrac{12,2}{49} \leq 0,25 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

Aufgrund eines Tippfehlers in der Angabe (25 sollte 28 heissen) wird eine genauere Abschätzung nicht verlangt.

Aufgabe 5 (10 Punkte)

Wir betrachten diskrete Zufallsvariable X und Y.

(a) Sei $X : \Omega \to \{0, 1\}$ eine Indikatorvariable mit $\mathrm{Var}[X] = \frac{4}{25}$.
Berechnen Sie $\mathbb{E}(X)$!

(b) Es gelte $\mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y)$.
Zeigen Sie, dass dann $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$ gilt.

(c) Seien X und Y unabhängig. Es gelte $\mathrm{Var}[X-Y] = 3$ und $\mathrm{Var}[2X+Y] = 5$.
Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X]$ und $\mathrm{Var}[Y]$!

Lösungsvorschlag

(a) Mit $p = \mathbb{E}(X)$ gilt $\quad \mathrm{Var}[X] = p(1-p) = \frac{4}{25}$. (1 Pkt.)
Mithin gilt $\quad p^2 - p + \frac{4}{25} = 0$
mit den beiden Lösungen

$$p_1 = \frac{2}{10} \text{ und } p_2 = \frac{8}{10}. \qquad \text{(2 Pkte.)}$$

(b)

Aus	$\mathbb{E}((X+Y)(X-Y)) = \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y)$	
folgt	$\mathbb{E}(X^2 - Y^2) = \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y)$,	(1 Pkt.)
	$\mathbb{E}(X^2 - Y^2) = (\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y))(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y))$,	(1 Pkt.)
	$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) = \mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(Y)^2$.	(1 Pkt.)
Daraus folgt	$\mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2$,	(1 Pkt.)
d.h.	$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[Y]$	

(c)

Es gilt	$\mathrm{Var}[X-Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 3$	(1 Pkt.)
und	$\mathrm{Var}[2X+Y] = 4 \cdot \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 5$.	(1 Pkt.)
Es folgt	$\mathrm{Var}[X] = \frac{2}{3}$ und $\mathrm{Var}[Y] = \frac{7}{3}$.	(1 Pkt.)

Aufgabe 6 (5 Punkte)

Wir betrachten eine zeithomogene Markovkette über den Zuständen $Q = \{0, 1\}$ mit den Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ Die Übergangsmatrix sei

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Die (diskrete Verteilungs-)Dichtefunktion von X_0, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1)$.

(a) Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1 !

(b) Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen!

Lösungsvorschlag

(a)

$$q_1 = (s_0, s_1)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = (\frac{2}{3}s_0 + \frac{1}{2}s_1, \frac{1}{3}s_0 + \frac{1}{2}s_1),$$

(2 Pkte.)

d. h. $f_{X_1}(0) = \frac{2}{3}s_0 + \frac{1}{2}s_1$ und $f_{X_1}(1) = \frac{1}{3}s_0 + \frac{1}{2}s_1$.

(b) Eine stationäre Startverteilung q_0 genügt den folgenden Gleichungen.

$$\begin{aligned} (s_0, s_1)\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} &= (s_0, s_1), \\ s_0 + s_1 &= 1 \end{aligned}$$

(2 Pkte.)

mit der eindeutigen Lösung

$$q_0 = (\tfrac{3}{5}, \tfrac{2}{5}).$$

(1 Pkt.)

Aufgabe 7 (5 Punkte)

Eine Münze mit 2 Zentimeter Durchmesser wird auf einen Boden geworfen, der Schachbrettartig schwarz-weiss gefliesst ist mit quadratischen Fliessen der Kantenlänge 4 Zentimeter. Die Verfugung sei ideal, so dass alle Fliessen nahtlos aneinanderstossen (Fugen der Breite 0). Die Münze soll an allen Positionen des Fliessenbodens mit gleicher Wahrscheinlichkeitsdichte zu liegen kommen.
Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze vollständig (ohne eine Fuge zu überlappen) auf einer weissen Fliesse zu liegen kommt! Begründen Sie dabei Ihre Berechnungsschritte.

Lösungsvorschlag

Wir betrachten den Mittelpunkt der Münze.
Zunächst hat die Wahrscheinlichkeit, dass der Mittelpunkt der Münze auf einer weissen Fliesse zu liegen kommt, den Wert $\frac{1}{2}$.

$$\mathrm{Pr}\left[''Mittelpunkt\ auf\ weisser\ Fliesse''\right] = \frac{1}{2}.$$

(1 Pkt.)

Falls der Mittelpunkt bereits die Bedingung erfüllt, auf einer weissen Fliesse zu liegen, dann bestimmt sich die Wahrscheinlichkeit, dass die Münze vollständig (ohne eine Fuge zu überlappen) auf einer weissen Fliesse zu liegen kommt, aus dem Flächenverhältnis des geometrischen Orts aller Punkte, die vom Fliessenrand mindestens den Abstand 1 cm haben zur Gesamtfläche einer weissen Fliesse.

(1 Pkt.)

Der geometrischen Orts aller Punkte, die vom Fliessenrand mindestens den Abstand 1 cm haben, ist die in der Fliesse zentrierte Quadratfläche mit Seitenlänge 2 cm.

(1 Pkt.)

Die gesuchte Wahrscheinlichhkeit Pr ist demnach gegeben durch

$$\mathrm{Pr}\left[''Mittelpunkt\ vollständig\ auf\ weisser\ Fliesse''\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{16} = \frac{1}{8}.$$

(2 Pkt.)

Aufgabe 8 (10 Punkte)

Wir betrachten eine Zufallsvariable X, die mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Werte 0, 1 und 2 annimmt, es gelte $W_X = \{0, 1, 2\}$. Des weiteren sei eine Zufallsvariable Y gegeben mit $W_Y = \{1, 2\}$, $\Pr[Y = 1] = p$ und beliebigem p, $0 < p < 1$.

(a) Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen $G_X(z)$ bzw. $G_Y(z)$ für X bzw. Y !

(b) Nun betrachten wir folgendes Zufallsexperiment. Zunächst wird die Zufallsvariable Y getestet. Der Wert von Y bestimmt, ob die Zufallsvariable X nur ein erstes Mal getestet wird mit Wert X_1, oder ob X auch ein zweites Mal getestet wird mit Wert X_2 beim zweiten Test. Je nachdem bestimmen wir dann $Z = X_1$ oder $Z = X_1 + X_2$.

Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen Z !

(c) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion $G_Z(z)$!

(d) Geben Sie für $p = \frac{1}{2}$ die Verteilungsdichte von Z an!

Lösungsvorschlag

(a)
$$G_X(z) = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{3}z + \tfrac{1}{3}z^2 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$
$$G_Y(z) = pz + (1-p)z^2 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

(b) Es liegt ein Mischexperiment vor mit erzeugender Funktion

$$G_Z(z) = G_Y(G_X(z)).$$

Es gilt $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 2 = 1$ und $\mathbb{E}(Y) = p \cdot 1 + (1-p) \cdot 2 = 2 - p$ (2 Pkte.)

und damit

$$\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(Y) \cdot \mathbb{E}(X) = 2 - p.$$

(1 Pkt.)

(c)
$$G_Z(z) = p(\tfrac{1}{3}(1 + z + z^2)) + (1-p)(\tfrac{1}{3}(1 + z + z^2))^2 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$
$$= (\tfrac{1}{9} + \tfrac{2}{9}p) + (\tfrac{2}{9} + \tfrac{1}{9}p)z + \tfrac{3}{9}z^2 + (1-p)\tfrac{2}{9}z^3 + (1-p)\tfrac{1}{9}z^4 \qquad \text{(2 Pkte.)}$$

(d) Für $p = \frac{1}{2}$ gilt

$$G_Z(z) = \tfrac{2}{9} + \tfrac{5}{18}z + \tfrac{1}{3}z^2 + \tfrac{1}{9}z^3 + \tfrac{1}{18}z^4. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

Damit gilt $W_Z = \{0, 1, 2, 3, 4\}$ und

$$\begin{aligned}
f_Z(0) &= \frac{2}{9}, \\
f_Z(1) &= \frac{5}{18}, \\
f_Z(2) &= \frac{1}{3}, \\
f_Z(3) &= \frac{1}{9}, \\
f_Z(4) &= \frac{1}{18}.
\end{aligned}$$

(1 Pkt.)

Aufgabe 9 (10 Punkte)

Sei X eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Sei $T = X_1 + X_2$ eine Zufallsvariable, wobei X_1 und X_2 unabhängige Kopien von X sein sollen, d. h., X_1, X_2 sind ebenfalls Bernoulli-verteilt mit gleichem Parameter p.
Wir betrachten T als Stichprobenvariable zum Test der Hypothese $H_0 : p \leq \frac{1}{3}$. Der Ablehnungsbereich des Tests sei $K = \{2\}$.

(a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von T an.

(b) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art (Signifikanzniveau) α_1 ! Begründen Sie dabei Ihre Berechnungsschritte!

(c) Wir nehmen an, dass die echte Alternative $H_1 : p \geq \frac{2}{3}$ bekannt sei. Dies bedeutet, dass H_1 gelte, wenn H_0 nicht gilt.

Berechnen Sie damit die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art α_2 ! Begründen Sie dabei Ihre Berechnungsschritte!

Lösungsvorschlag

(a) T ist binomialverteilt auf den Werten aus $W_T = \{0, 1, 2\}$ mit Dichtefunktion

$$f_T(t) = \binom{2}{t} p^t (1-p)^{2-t} \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

Für die Verteilungsfunktion F_T ergibt sich

$$F_T(0) = (1-p)^2 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

$$F_T(1) = (1-p)^2 + \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1$$

$$= 1 - p^2 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

$$F_T(2) = 1 \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

Im übrigen gilt $F_T(t) = 1$ für $t \geq 2$.

(b)

$$\alpha_1 = \max_{p \geq \frac{2}{3}} \Pr[T \in K] \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

$$= \max_{p \geq \frac{2}{3}} F_T(0) \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

$$= \max_{p \geq \frac{2}{3}} (1-p)^2 = \frac{1}{9} \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

(c)

$$\alpha_2 = \max_{p \leq \frac{1}{3}} \Pr[T \notin K] \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

$$= \max_{p \leq \frac{1}{3}} (1 - F_T(0)) \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

$$= \max_{p \leq \frac{1}{3}} (1 - (1-p)^2) = \frac{5}{9} \qquad \text{(1 Pkt.)}$$