Lösung

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 1

Abgabe bis zum 2.5. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Aufgabe 1.1 Abzugeben sind (a) und (b). 1P+2P

In einer aus Datenschutzgründen nicht genauer benannten Vorlesung mit 18 Übungsgruppen werden gruppenübergreifende Abgaben zugelassen. Auf einer Abgabe stehen somit jeweils zwei Gruppennummern. Sollten sich die Gruppennummern auf einer Abgabe unterscheiden, so wurde von der Übungsleitung festgelegt, dass die Abgabe in der Gruppe mit der niedrigeren Nummer zurückgegeben wird.

Wir wählen als Ergebnismenge $\Omega = [18] \times [18]$ die möglichen Paare von Gruppennummern auf einer Abgabe. Weiterhin sei $R_k \subseteq \Omega$ das Ereignis, dass eine Abgabe in Gruppe k zurückgegeben wird.

Nehmen Sie an, dass auf einer Abgabe jedes Paar $(i, j) \in \Omega$ von Gruppennummern mit der gleichen W'keit auftritt, also $\Pr[(i, j)] = 18^{-2}$.

(a) Bestimmen Sie $\Pr[R_k]$ für alle $k \in [18]$.

(b) Bestimmen Sie weiterhin das kleinste $K \in [18]$, sodass mit mindestens einer W'keit von 0.5 eine Abgabe auf eine Gruppe in $[K]$ fällt.

Lösung:

(a) Es gilt $R_k = \{(i, j) \in \Omega \mid \min(i, j) = k\} = \{(k, k)\} \cup \{(k, j), (i, k) \mid k < i, j \le 18\}$ mit $|R_k| = 1 + 2(18 - k)$.

Somit $\Pr[R_k] = \frac{1+2(18-k)}{18^2} = \frac{37-2k}{18^2}$.

(b) Es bleibt das kleinste K mit

$$\Pr\left[\bigcup_{k=1}^{K} R_k\right] = 18^{-2}\sum_{k=1}^{K}(37 - 2k) = 18^{-2}(37K - K(K + 1)) = 18^{-2}(36K - K^2) \ge 0.5$$

zu bestimmen. Also $0 \ge K^2 - 36K + 9 \cdot 18 = (18 - K)^2 - 9 \cdot 18$, d.h. $K \in [9(2 - \sqrt{2}), 9(2 + \sqrt{2})]$. Mit $K \in \mathbb{N}$ ergibt sich für das kleinste $K = 6$.

Aufgabe 1.2 Abzugeben sind (a) und (b) 3P+4P

Ein n-seitiges Objekt heißt ,,fair", falls bei einem Wurf jede seiner Seiten mit W'keit $1/n$ (nach ,,oben") zeigt.

(a) Wir betrachten zwei faire Würfel, deren Seiten mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ beschriftet sind.

Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die W'keit s_k, dass bei einem Wurf dieser beiden Würfel die Summe der angezeigten Zahlen gerade k ist.

Wie hängen die Werte s_k mit den Koeffizienten des Polynoms $(z + z^2 + \ldots + z^6)^2$ zusammen?

(b) Wir betrachten wiederum zwei faire Würfel.

Der eine Würfel ist mit den Zahlen $1, 3, 4, 5, 6, 8$ beschriftet. Der zweite Würfel ist noch unbeschriftet.

Ihre Aufgabe ist es, die Seiten des zweiten Würfels so zu beschriften, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die W'keit, dass bei einem Wurf dieser beiden Würfel deren Summe gerade k ist, ebenfalls s_k beträgt.

(Wir nehmen an, dass der zweite Würfel auch nach Beschriftung noch fair ist.)

(c) Geben Sie ein Verfahren an, um das Problem aus (b) allgemein zu lösen. D.h. gegeben nichtnegative ganze Zahlen $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_6$ als Beschriftung der Seiten des ersten fairen Würfels, finde – soweit möglich – eine Beschriftung $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_6$ des zweiten fairen Würfels, sodass die Augensumme immer noch mit W'keit s_k gerade k ist.

Lösung:

(a) Offensichtlich gilt $0 = s_0 = s_1 = s_{13} = s_{14} = \ldots$.

Für die restlichen W'keiten ergibt sich:

$$s_k = \frac{1}{36} \cdot |\{(i, k-i) \mid i, k-j \in [6]\}| .$$

Für $1 \leq k \leq 7$ folgt hieraus direkt $s_k = (k-1)/36$.

Für $8 \leq k \leq 12$ ergibt sich $s_k = (13-k)/36$ aus der Spiegelsymmetrie $(i,j) \mapsto (7-i, 7-j)$, unter welcher $s_k \mapsto s_{14-k}$ gilt.

Nach dem Cauchy-Produkt:

$$(z + z^2 + z^3 + \ldots + z^6)^2 = \sum_{k=2}^{12} z^k \sum_{i+j=k, i,j \in [6]} 1$$

Nun ist offensichtlich $\sum_{i+j=k,i,j\in[6]} 1 = 36 s_k$.

(b) Seien $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_6$ die zu bestimmenden Beschriftungen des zweiten Würfels.

Dann gilt $\Omega = \{1,3,4,5,6,8\} \times \{a_1, \ldots, a_6\}_M$ mit $\Pr[\omega] = 1/36$ für all $\omega \in \Omega$; bei $\{a_1, \ldots, a_6\}_M$ handelt es sich dabei formal um eine Multimenge, da z.B. $a_1 = a_6$ gelten könnte.

1. Weg:

- Die kleinste Augenzahl ist dann $1 + a_1$ wegen der Annahme $a_1 \leq a_2 \ldots \leq a_6$.

  Da $s_2 > 0$, folgt $a_1 = 1$.

  Da $s_2 = 1/36$, kann es nur Elementarereignis mit Augensumme 2 geben, also $a_1 < a_2$.
- Für die zweitkleinste Augenzahl kommt nur $1 + a_2$ in Frage, da $3 + a_1 = 4$

  Da $s_3 > 0$, muss $1 + a_2 = 3$, also $a_2 = 2$ gelten.

  Da $s_3 = 2/36$, muss es genau zwei Elementarereignisse mit Augensumme 3 geben: $(1, a_2)$ und $(1, a_3)$.

  Also $a_2 = a_3 = 2$ und $2 < a_4 \leq a_5 \leq a_6$.
- Die drittkleinste Augenzahl ist $3 + a_1 = 4$ und u.U. $1 + a_4 = 4$, $1 + a_5 = 4$, $1 + a_6 = 4$.

  Da $s_4 = 3/36$, folgt also $a_4 = a_5 = 3 < a_6$.
- Wegen $s_{12} = 1/36$ bleibt nur $a_6 = 4$.

2. Weg: Setze $p(z) = z + z^2 + \ldots + z^6$ und $q(z) = z + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^8$.

Sei $r(z) = z^{a_1} + z^{a_2} + \ldots + z^{a_6}$.

Dann ist der Koeffizient von z^k in $q(z) \cdot r(z)$ wiederum die Anzahl der Möglichkeiten, wie man die Zahl k aus den Beschriftungen kombinieren kann.

Es muss also $p(z)^2 = q(z) r(z)$ gelten.

Teilt man entsprechend $p(z)^2$ durch $q(z)$, so erhält man $r(z) = z + 2z^2 + 2z^3 + z^4$.

(c) Man prüft, ob $p(z)^2$ von $q(z) = z^{a_1} + z^{a_2} + \ldots + z^{a_6}$ geteilt wird. Falls ja, so lässt sich die Beschriftung des zweiten Würfels gerade anhand der Koeffizienten von $r(z) = \frac{p(z)^2}{q(z)}$ bestimmen. Es folgt, dass es höchstens eine Lösung jeweils geben kann.

Aufgabe 1.3 **Abzugeben ist (a).** **3P**

(a) Betrachten Sie folgendes Experiment:

1. Drei (unterschiedliche) Objekte a, b, c werden zufällig auf drei Tore verteilt. Jede mögliche Zuteilung der Objekte auf die Tore ist dabei gleichwahrscheinlich (W'keit 1/6).
2. Sie wählen das erste Tor mit W'keit p_1, das zweite Tor mit W'keit p_2 und das dritte Tor mit W'keit p_3, wobei $0 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 1$ und $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe eines geeigneten W'keitsraums $(\Omega, \Pr[])$ (anzugeben!).

Definieren Sie die Ereignisse T_a, T_b, T_c, dass sich hinter dem gewählten Tor gerade Objekt a bzw. b bzw. c verbirgt.

Zeigen Sie dann, dass $\Pr[T_a] = \Pr[T_b] = \Pr[T_c] = 1/3$ gilt – egal welche (zulässigen) Werte p_1, p_2, p_3 haben.

(b) Betrachten Sie folgendes Experiment:

1. Es gibt drei Preisgelder $g_1 > g_2 > g_3 \geq 0$, die hinter drei Toren zufällig versteckt werden. Jede Zuteilung ist dabei gleichwahrscheinlich.
2. Kandidat: Wählt eines der drei Tore.
3. Quizmaster: Von den beiden nicht gewählten Toren öffnet er eines (siehe unten).
4. Kandidat: Wählt unter der verbleibenden zwei verschlossenen Toren ein Tor aus und erhält das dahinter verborgenen Preisgeld.

Der Kandidat weiss, wie sich der Quizmaster im 3. Schritt verhält. Eine Strategie für den Kandidaten ist dann eine Anweisung der Form:

"Falls der Quizmaster das Tor mit dem Preisgeld g_i öffnet, so wechsel mit W'keit p_i doch noch das Tor."

Eine Strategie ist somit ein Tripel (p_1, p_2, p_3) von W'keiten.

(i) Nehmen Sie an, dass der Quizmaster im 3. Schritt stets das Tor mit dem niedrigeren Preisgeld öffnet.

Welche Strategie würden Sie als Kandidat spielen, wenn Sie die W'keit maximieren wollen, dass Sie das Preisgeld g_1 erhalten?

(ii) Welches Tor würden Sie als Quizmaster im 3. Schritt wählen, wenn Sie die W'keit minimieren möchten, dass der Kandidat das Preisgeld g_1 erhält? Nehmen Sie an, dass der Kandidat eine wie oben beschriebene Strategie (p_1, p_2, p_3) benutzt und Sie diese Strategie sogar kennen.

Zeigen Sie, dass der Kandidat dennoch stets seine Strategie so wählen kann, dass er mit mindestens W'keit 1/3 das Preisgeld g_1 gewinnt.

Lösung:

(a) $\Omega = \{(\pi, t) \mid \pi \in S_3, t \in [3]\}$, wobei S_3 die Menge der Bijektionen $\{a, b, c\} \mapsto [3]$.

Dann gilt $\Pr[(\pi, t)] = \frac{1}{|S_3|} \cdot p_t = 1/6 \cdot p_t$ für $t \in [3]$.

Das Ereignis, dass der Kandidat Objekt a „trifft" ist $T_a = \{(\pi, t) \in \Omega \mid \pi(a) = t\}$.

Nun gibt es für jede Wahl von $t \in [3]$ genau 2 Bijektionen mit $\pi(a) = 3$.

Es folgt $\Pr[T_a] = \frac{2p_1+2p_2+2p_3}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$.

(b) Nach (a) können die ersten beiden Schritte als ein Schritt betrachtet werden. Mit W'keit 1/3 trifft der Kandidat jedes der Preisgelder.

Wir können also als Elementarereignisse die Tripel $(u, v, w) \in \Omega := \{g_1, g_2, g_3\}^2$ ansetzen: u ist das vom Kandidaten zuerst getroffene Preisgeld, v ist das vom Quizmaster entfernte Preisgeld und w ist das schließlich vom Kandidaten im letzten Schritt gewählte (gewonnene) Preisgeld.

(i) Hier gilt $\Pr[(u, v, w)] = 0$, falls $u = v$ oder $v = w$ oder $v \neq \min\{\{g_1, g_2, g_3\} - \{u\}\}$.

Es bleiben folgende Elementarereignisse übrig: $G_1 = \{(g_1, g_3, g_1), (g_2, g_3, g_1), (g_3, g_2, g_1)\}$.

Es folgt $\Pr[G_1] = 1/3 \cdot (1 - p_3) + 1/3 \cdot p_3 + 1/3 \cdot p_2 = 1/3 + 1/3 \cdot p_2$.

Die optimale Strategie, wenn man die W'keit g_1 zu gewinnen maximieren möchte, ist somit, sich mit W'keit $p_2 = 1$ umzuentscheiden, wenn das Preisgeld g_2 im 3. Schritt gezeigt wird.

(ii) Sei q_i die W'keit, dass, wenn der Kandidat g_i im 2. Schritt trifft, der Quizmaster das niedrigere der beiden verbleibenden Preisgelder dem Kandidaten zeigt.

Das Ereignis G_1, dass der Kandidat g_1 gewinnt, ist dann $\{(g_1, g_2, g_1), (g_1, g_3, g_1), (g_2, g_3, g_1), (g_3, g_2, g_1)\}$.

Es gilt:

$$\Pr[G_1] = 1/3[(1 - q_1)(1 - p_2) + q_1(1 - p_3) + q_2 p_3 + q_3 p_2] = 1/3[1 - p_2 + q_1(p_2 - p_3) + q_2 p_3 + q_3 p_2].$$

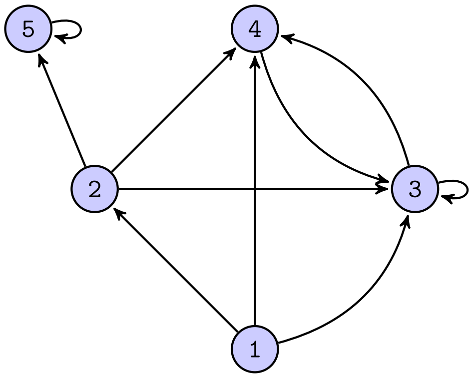
Sollte $p_3 > p_2$ gelten, so ist die optimale Strategie für den Quizmaster $q_1 = 1, q_2 = 0, q_3 = 0$; ansonsten sollte er die Strategie $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ benutzen, wenn er die W'keit $\Pr[G_1]$ minimieren möchte.

Da der Kandidat dies natürlich auch weiss, wird er stets eine Strategie mit $p_2 = 0$ spielen, womit der Quizmaster $q_1 = q_2 = q_3 = 0$ stets spielt, und so der Kandidat stets mit W'keit 1/3 das höchste Preisgeld gewinnt.

Aufgabe 1.4 **Abzugeben sind (a),(b),(c),(d) und (e)** **1P+1P+1P+1P+3P**

Der Digraph D rechts beschreibt einen Ausschnitt des Intarwebs.

1: `TUM.de`
2: `wikipedia.org`
3: `icanhascheezburger.com`
4: `4chan.org`
5: `youtube.com`



(a) Geben Sie die starken Zusammenhangskomponenten von D an.

(b) Stellen Sie die Adjazenzmatrix $A = (a_{i,j})_{i,j\in[5]}$ von D auf. $a_{i,j}$ sollte dabei einer möglichen Kante von i nach j entsprechen.

(c) Berechnen Sie A^2. Wie lässt sich der Eintrag $[i, j]$ von A^2 interpretieren? (und allgemein: was ist die Interpretation von A^n für $n \in \mathbb{N}$?). Was bringt diese Interpretation?

(d) Der kleine Michel (3 Jahre) surft "zufällig" in diesem Ausschnit des Intarwebs umher, indem er von einer Seite mit k ausgehenden Links auf einen Link mit der Wahrscheinlichkeit $1/k$ klickt. Angenommen Michel startet auf `TUM.de`. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich nach genau 3 Klicks auf `4Chan.org` befindet?

Mit d_i sei der Ausgangsgrad des Knotens i in D bezeichnet, z.B. $d_3 = 2$. Die "gewichtete Adjazenzmatrix" W ergibt sich aus A, indem die i-te Zeile $(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,5})$ mit $1/d_i$ multipliziert wird.

(e) Stellen Sie W für den Graphen D auf.

Wie lässt sich W verwenden, um Frage (d) für jedes Paar von Webseiten und jede feste Anzahl n von Klicks zu beantworten? Beweisen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Induktion.

(f) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die W'keit an, dass sich Michel nach genau n Klicks auf `4chan.org` befindet.

Lösung:

(a) Es gibt vier SCCs: $\{1\}$,$\{2\}$,$\{3, 4\}$ und $\{5\}$. Zur Definition: Eine SCC ist eine Äquivalenzklasse der Erreichbarkeitsrelation. Die Erreichbarkeitsrelation ist definiert als der reflexiv, transitive Abschluss der Kantenrelation. Diese Definition von SCC ist sinnvoll, da die SCCs dann eine Partition der Knotenmenge darstellen und falls man jede SCC zu einem Knoten kontrahiert der resultierende Graph ein DAG ist (nützlich für algorithmische Anwendungen). Bemerkung: z.B. mit dem Algorithmus von Tarjan kann man alle SCCs eines Digraphen in linearer Zeit finden.

(b) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(c) $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Der Eintrag $A^n_{i,j}$ enthält die Anzahl der Pfade der Länge genau n von i nach j (Beweis z.B. durch vollständige Induktion).

(d) Es gibt drei Pfade der Länge 3 von 1 nach 4 (man könnte z.B. den Eintrag $A^3_{1,4}$ berechnen um sicher zu gehen keinen Pfad zu vergessen): $[1, 2, 3, 4]$, $[1, 3, 3, 4]$ und $[1, 4, 3, 4]$. Die Wahrscheinlichkeiten, dass Michel diese Pfade nimmt sind: $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{18}, \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{12}$ und $\frac{1}{3} \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit nach genau 3 Sprüngen von 1 aus in 4 zu landen ist daher $\frac{1}{18} + \frac{1}{12} + \frac{1}{6} = \frac{11}{36} (\approx 0.306)$

(e) W lässt sich im Wesentlichen aus A "ablesen": $W = \begin{bmatrix} 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

$W_{i,j}^n$ liefert die Wahrscheinlichkeit, nach genau n Schritten von i nach j zu gelangen, falls man in jedem Knoten den Nachfolgeknoten uniform zufällig wählt (und mit W'keit 1 in Knoten i startet). Beweis durch Induktion nach n: Sei V die Knotenmenge des Markov-Diagramms.

- $n = 1$: Das ist genau die Definition von W.
- $n \to n+1$: Seien $i, j \in V$ zwei Knoten. Sei $p_{i,j}^{(n+1)}$ die W'keit in genau $n+1$ Schritten von i nach j zu gelangen. Dann gilt

$$p_{i,j}^{(n+1)} = \sum_{\substack{\pi = i,\dots,j \\ \pi \text{Pfad der Länge } (n+1)}} \Pr[\pi] = \sum_{k \in V} \sum_{\substack{\pi = i,\dots,k \\ \pi \text{Pfad der Länge } n}} \Pr[\pi] \cdot \Pr[(k,j)] =$$
$$\overset{IV}{=} \sum_{k \in V} W_{i,k}^n \cdot W_{k,j} = W_{i,j}^{n+1}$$

  Die letzte Gleichheit gilt nach Definition der Matrizenmultiplikation.

(f) Die Matrix W lässt sich zwar nicht diagonalisieren, besitzt jedoch einen Jordansche Normalform über $\mathbb{R}$. Es gilt $W = P \cdot J \cdot P^{-1}$ mit

$$J = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -9 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/27 & -2/27 & 0 \\ 0 & 0 & 16/27 & 8/27 & 1/9 \\ 0 & 0 & 4/9 & 2/9 & 1/3 \\ 3 & 0 & -2 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

(Anmerkung: Das ist nicht vorzurechnen. Haben wir auch nur mittels eines CAS berechnet. Es geht mehr um die Idee, dass Diagonalisierung bzw. JNF hilfreich sein können.)

Dann ist die W'keit nach n Klicks und startend in 1 sich auf 4 zu befinden gerade $(1,0,0,0,0) \cdot P \cdot J^n P^{-1} \cdot (0,0,0,1,0)^\top$.

Man überprüft leicht, dass für $n \geq 2$ dann gilt:

$$J^n = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Damit berechnet man für $n \geq 2$, dass $(W^n)_{1,4} = -2/27 \cdot (-1/2)^n + 8/27$.