Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Endterm

Beachten Sie: Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

Aufgabe 1

1P+1P+4P

Sie werfen eine faire Münze n-mal ($n \in \mathbb{N}$ fest) und erhalten so ein Wort $x = x_1 x_2 \ldots x_n$ aus $\{0,1\}^n$.

(a) Bestimmen Sie die W'keit in Abhängigkeit von n, dass das erhaltene Wort ein Palindrom ist, d.h. dass $x_1 x_2 \ldots x_{n-1} x_n = x_n x_{n-1} \ldots x_2 x_1$ gilt.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von n die W'keit, dass sich innerhalb der Sequenz x eine nicht leere Teilsequenz y wiederholt, d.h., dass es Wörter $u, v, w, y \in \{0,1\}^*$ gibt, so dass $x = uyvyw$ mit $y \neq \varepsilon$.

(c) Es sei $M_n \subseteq \{0,1\}^n$ das Ereignis, dass x weder 000 noch 111 als zusammenhängende Teilsequenz enthält.

Beispiel: $M_4 = \{0,1\}^4 \setminus \{0000, 0001, 1000, 1111, 1110, 0111\}$.

Die Fibonacci-Zahlen seien $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Zeigen Sie, dass $\Pr[M_n] = F_n / 2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis: Leiten Sie für den Induktionsschritt mit Hilfe des Satzes der totalen W'keit zunächst eine Rekursionsgleichung für $\Pr[M_n]$ für $n \geq 3$ her.

Aufgabe 2

3P+2P+3P

Die ZVen X, Y, Z sind unabhängig mit $X \sim \text{Bin}(6, 7/8)$, $Y \sim \text{Bin}(5, 7/8)$ und $Z \sim \text{Geo}(1/4)$.

Sei weiterhin $M := \max(X + Y, Z)$.

Bestimmen Sie die folgenden Werte auf vier Dezimalstellen genau.

(a) $\Pr[M > 10]$.

(b) $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$.

(c) Bestimmen Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\text{Var}[K] = 1$ gilt.

Aufgabe 3

4P

Es seien U, V, W, Y, Z unabhängige ZVen mit folgenden Verteilungen:

- $U \sim \exp(1/5)$.
- $V \sim \exp(2/3)$.
- W gleichverteilt auf $[1, 5]$.
- $Y \sim \mathcal{N}(-13, 1)$.
- $Z \sim \mathcal{N}(0, 5)$.

Bestimmen Sie den folgenden Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[(Z + \min(U + W, V + W)) \cdot (Y + Z)].$$

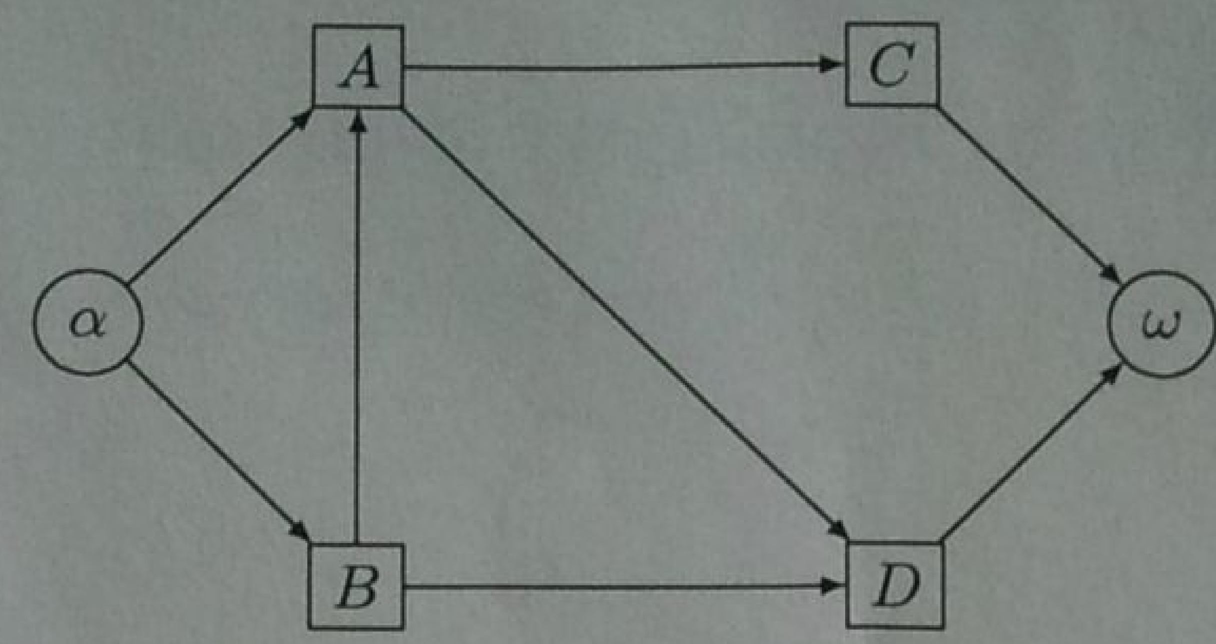
Geben Sie hierbei für jeden Rechenschritt eine stichwortartige Begründung (z.B. Linearität des Erwartungswerts, Unabhängigkeit von U/W von V^Z, etc.). Sie können auch Punkte für partiell ausgewertete Ausdrücke erhalten. Berechnen Sie den Erwartungswert daher soweit wie Ihnen möglich.

Hinweis: Bei geeignetem Vorgehen müssen Sie keinerlei Dichten oder Verteilungsfunktionen von Hand herleiten. Alle benötigten Erwartungswerte können mit Hilfe des Wissens aus der Vorlesung direkt aus den angegebenen Parameterwerten berechnet werden.

Aufgabe 4

2P+3P

Folgendes elektrisches System besteht aus den Komponenten A, B, C, D, wobei der Signalweg von α nach ω führt.



Die Lebenszeit jeder Komponente ist unabhängig von den anderen Komponenten exp(1)-verteilt. So bezeichnet $A \leq t$ das Ereignis, dass die Komponente A zu einem Zeitpunkt $t > 0$ bereits defekt ist.

Das System ist zum Zeitpunkt $t > 0$ funktionstüchtig, solange es einen Pfad von α nach ω gibt, entlang welchem alle Komponenten noch funktionstüchtig sind.

(a) Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, unter der Bedingung, dass zu diesem Zeitpunkt $t > 0$ die Komponente A defekt ist.

(b) Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist.

Bemerkung: Vereinfachen Sie die erhaltenen Ausdrücke soweit wie möglich.

Aufgabe 5

4P+3P

Sie werfen einen fairen Würfel, von dessen sechs Seiten je zwei mit a bzw. b bzw. c beschriftet sind, bis Sie das erste Mal die Situation beobachten, dass alle drei Zeichen hintereinander auftreten.

Beispiel: Mögliche Experimentabläufe sind a, b, c und b, c, c, b, c, a und b, a, b, c.

(a) Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe einer Markov-Kette mit genau den Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Der Zustand $i \in S$ sollte dabei bedeuten, dass die Ergebnisse der letzten i Würfe alle verschieden waren.

Bemerkung: Der Übergangsgraph ist ausreichend.

(b) Was ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis das Experiment endet?

Aufgabe 6

4P+6P

Es sei $\theta > 0$. Die ZVen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und jeweils exp(1)-verteilt.

Schließlich gelte $Y_i := \theta + X_i$.

(a) Wir betrachten den Schätzer $T_1 := \overline{Y} - 1$, wobei $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ das Stichprobenmittel der Y_i ist.

- Zeigen Sie, dass T_1 als Schätzer für θ konsistent im quadratischen Mittel ist.
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Signifikanzniveau α ein möglichst kleines Konfidenzintervall für T_1 als Schätzer für θ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

(b)
- Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer T_2 für θ in Abhängigkeit von einer Stichprobe $y_1, \ldots, y_n$ der $Y_1, \ldots, Y_n$.

  Hinweis: Achten Sie darauf, für welche Werte von θ die Likelihood-Funktion positive Werte annimmt.
- Entscheiden Sie, ob T_2 ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.
- Entscheiden Sie, ob T_2 konsistent im quadratischen Mittel für θ ist.