Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Lösungsblatt Abschlussklausur
1. Oktober 2007

# Einführung in die Theoretische Informatik

| Name | Vorname | Studiengang | Matrikelnummer |
|---|---|---|---|
| ................ | ................ | ☐ Diplom ☐ Inform.<br>☐ Bachelor ☐ BioInf.<br>☐ Lehramt ☐ WirtInf. | ................ |

| Hörsaal | Reihe | Sitzplatz | Unterschrift |
|---|---|---|---|
| ................ | ................ | ................ | ................ |

## Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 105 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | Σ | Korrektor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Erstkorrektur | | | | | | | |
| Zweitkorrektur | | | | | | | |

## Aufgabe 1 (8 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch). Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ □□
Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb der Aufgabe 1).

Der Durchschnitt zweier kontextsensitiver Sprachen ist wieder kontextsensitiv. . . . . . . . . . ✔ | N

Der Durchschnitt zweier kontextfreier Sprachen ist wieder kontextfrei. . . . . . J | ✔

Die Aussage, dass alle bekannten, in der Vorlesung besprochenen Formalisierungen des Berechenbarkeitsbegriffs äquivalent sind, bezeichnet man als die Church'sche These. . . . . . . . . . J | ✔

Der Wertebereich einer berechenbaren Funktion ist entscheidbar. . . . . . . . . . . J | ✔

Das allgemeine Halteproblem ist eine Typ-0-Sprache. . . . . . . . . . ✔ | N

Sei $T$ eine Turingmaschine, die, für jede Eingabe, keinen der (Schreib-/Lese)Köpfe je nach links bewegt. Dann ist die akzeptierte Sprache $L(T)$ regulär. . . . . . . . . . ✔ | N

Jede berechenbare totale Funktion $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ist $\mu$-rekursiv. . . . . . . . . . ✔ | N

Gegeben sei eine berechenbare Auflistung aller Turingmaschinen, die jedem Wort $w \in \{0,1\}^*$ eine Turingmaschine $M_w$ zuordnet. Dann ist die Sprache $L = \{w \in \{0,1\}^* ;\, M_w \text{ hält für jede Eingabe nach höchstens 10 Schritten}\}$ entscheidbar. . . . . . . . . . ✔ | N

## Aufgabe 2 (7 Punkte)

Sei $G$ eine kontextfreie Grammatik und $L = L(G)$ die von $G$ erzeugte Sprache. Sei $n$ eine für $L$ gültige Konstante aus dem Pumping-Lemma. Beweisen Sie:

1. Falls $L$ endlich ist ($|L| \in N_0$), dann gibt es **kein** Wort $z \in L$ der Länge $|z|$, so dass $n \leq |z| < 2n$ gilt.

2. Falls $L$ unendlich ist ($|L| \notin N_0$), dann gibt es ein Wort $z \in L$ der Länge $|z|$, so dass $n \leq |z| < 2n$ gilt.

---

**Lösungsvorschlag**

1. Gäbe es ein Wort $z \in L$ mit $n \leq |z| < 2n$, (1 P.)
   dann gäbe es auch eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq n$ und $a_i := uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. (1 P.)

   Wegen $|vx| \geq 1$ wären alle $a_i \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ paarweise verschieden. (1 P.)
   $L$ könnte also nicht endlich sein. Widerspruch!

2. Da $L$ unendlich ist, gibt es ein $z \in L$ mit $|z| \geq n$. (1 P.)

   Sei also $z \in L$ mit $|z| \geq n$.

   Falls $|z| < 2n$ gilt, dann ist die Aussage bewiesen.
   Falls $|z| \geq 2n$ gilt, dann konstruieren wir ein $z_1 \in L$ mit $n \leq |z_1| < |z|$ wie folgt: Wir zerlegen $z$ gemäß Pumping-Lemma in $z = uvwxy$, so dass $|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq n$ und $uv^iw^ixy \in L$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$. (1 P.)

   Wir setzen für $z_1 = uv^0wx^0y = uwy$. (1 P.)

   Es gilt $z_1 \in L$.

   Wegen $|vx| \geq 1$ gilt $|z_1| < |z|$.

   Wegen $|vwx| \leq n$ gilt $n \leq |z_1|$. ($\frac{1}{2}$ P.)

   Offenbar kann das Argument solange wiederholt werden, bis nach endlich vielen Wiederholungen ein $z_1 \in L$ gefunden ist mit $n \leq |z_1| < 2n$. ($\frac{1}{2}$ P.)

## Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $L \subseteq \{a, b, c\}^*$ mit

$$L = \{a^i b^j c^k\,;\, i, j, k \in \mathbb{N}_0,\ j < i \text{ und } j < k\}\,.$$

1. Stellen Sie $L$ dar als Durchschnitt kontextfreier Sprachen $L_1$ und $L_2$. Zeigen Sie die Kontextfreiheit für die von Ihnen gewählten Sprachen $L_1$ und $L_2$.
2. Geben Sie eine kontextsensitive Grammatik $G$ an, die $L$ erzeugt.

---

**Lösungsvorschlag**

1. Es gilt $L = L_1 \cap L_2$ mit

   $L_1 = \{a^i b^j c^k\,;\, i, j, k \in \mathbb{N}_0, j < i\}$ und $L_2 = \{a^i b^j c^k\,;\, i, j, k \in \mathbb{N}_0, j < k\}$ (1 P.)

   $$\begin{array}{lcl} S & \to & XTY \mid XY \mid XT \mid X, \\ T & \to & aTb \mid ab\,, \\ X & \to & aX \mid a\,, \\ Y & \to & cY \mid c\,. \end{array} \quad \text{(1 P.)} \qquad \begin{array}{lcl} S & \to & XTY \mid XY \mid TY \mid Y\,, \\ T & \to & bTc \mid bc\,, \\ X & \to & aX \mid a\,, \\ Y & \to & cY \mid c\,. \end{array} \quad \text{(1 P.)}$$

2. Die folgende Lösung verfolgt den Gedanken, $a^i b^i c^i$ für $i \geq 1$ als Elemente der Sprache $L(T)$ zu produzieren und am Anfang beliebig viele $a$ und am Ende beliebig viele $c$ (mindesetens je eines) zu den Elementen von $\{\epsilon\} \cup L(T)$ hinzuzufügen.

   $$\begin{array}{lcl} S & \to & ATC \mid AC\,, \\ A & \to & Aa \mid a\,, \\ C & \to & cC \mid c\,. \end{array} \quad \text{(1 P.)}$$

   $L(T)$ erzeugen wir zunächst mit monotoner Grammatik, wie folgt. # verwenden wir als Variable zur Erzeugung terminaler $c$ an der rechten Seite.

   $$\begin{array}{lcl} T & \to & aT'B\# \mid aBC'\,, \\ T' & \to & aT'BC' \mid aBC'\,, \\ B & \to & b\,, \\ \# & \to & c\,, \end{array} \quad \text{(1 P.)}$$

   $$C'B \to BC'\,, \quad \text{(1 P.)}$$
   $$C'\# \to \#c\,. \quad \text{(1 P.)}$$

   Wir ersetzen die beiden letzten, nichtkontextsensitiven Regeln.

   $$C'B \to \bar{C}B\,, \quad \bar{C}B \to \bar{C}C'\,, \quad \bar{C}C' \to BC'\,,$$
   $$C'\# \to C''\#\,, \quad C''\# \to C''c\,, \quad C''c \to \#c\,. \quad \text{(1 P.)}$$

## Aufgabe 4 (7 Punkte)

Gegeben sei die Sprache $L \subseteq \{d, e\}^*$ mit

$$L = \{d^{2i}e^i\,;\ i \in \mathbb{N}_0\}\,.$$

Geben Sie einen deterministischen Kellerautomaten (DPDA) an, der $L$ entweder mit Endzuständen oder mit leerem Keller akzeptiert.

---

**Lösungsvorschlag**

$L$ wird mit Endzuständen akzeptiert von dem Kellerautomaten
$K = (Q, \{c, d\}, \{Z_0, D\}, \delta, q_0, Z_0, F)$ ($\frac{1}{2}$ P.)

mit $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}$,

$F = \{q_0, q_4\}$ ($\frac{1}{2}$ P.)

und der Übergangsfunktion $\delta$ wie folgt.

$\delta(q_0, d, Z_0) = (q_1, DZ_0)$, (1 P.)

$\delta(q_1, d, D) = (q_1, DD)$, (1 P.)

$\delta(q_1, e, D) = (q_2, \epsilon)$, (1 P.)

$\delta(q_2, \epsilon, D) = (q_3, \epsilon)$, (1 P.)

$\delta(q_3, e, D) = (q_2, \epsilon)$, (1 P.)

$\delta(q_3, \epsilon, Z_0) = (q_4, \epsilon)$. (1 P.)

## Aufgabe 5 (10 Punkte)

Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, die für alle $n \geq 3$ der linearen Rekursion $f(n) = f(n-1)+f(n-2)+f(n-3)$ genügt. Ausserdem gelte $f(0) = 0, f(1) = 1, f(2) = 2$.

1. Zeigen Sie, dass $f$ primitiv-rekursiv ist.
2. Sei $W_f$ der Wertebereich von $f$, d. h. $W_f = \{f(n)\,;\, n \in \mathbb{N}_0\}$. Zeigen Sie, dass $W_f$ entscheidbar ist.
3. Sei $g : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ die Umkehrfunktion von $f$ auf dem Wertebereich $W_f$ von $f$, d. h., dass für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $n = g(f(n))$ und für $y \notin W_f$ gilt, dass $g(y)$ nicht definiert ist. Zeigen Sie, dass $g$ $\mu$-rekursiv ist.

*Hinweis:* Es ist nicht notwendig, eine geschlossene Darstellung von $f$ explizit zu berechnen.

**Lösungsvorschlag**

1. Dass $f$ primitiv-rekursiv ist, folgt aus dem folgenden *LOOP*-Programm, das den Funktionswert von $f$ für $n \geq 3$ in der Variablen $x_2$ berechnet.

   $x_0 := 0;\ x_1 := 1;\ x_2 := 2;\ x_3 := n-2;$
   $LOOP\ x_3\ DO$
   $x_4 := x_0+x_1+x_2;\ x_0 := x_1;\ x_1 := x_2;\ x_2 := x_4;$
   $END;$

   (3 P.)

2. Offenbar ist $f$ streng monoton wachsend, d. h., es gilt $f(n-1) < f(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Ausserdem gilt $4 < f(4)$.

   Daraus folgt $n < f(n)$ für alle $n \geq 4$. (1 P.)

   Die charakteristische Funktion $\chi_{W_f}(n)$ ist damit wie folgt berechenbar. (1 P.)

   $$\chi_{W_f}(n) = \begin{cases} 1 & : \quad n \in \{0,1,2,3\}\,, \\ 1 & : \quad (\exists m \leq n)[f(m) = n]\,, \\ 0 & : \quad \text{sonst}\,. \end{cases}$$

   (2 P.)

3. Es gibt mehrere Lösungswege.

   1. Möglichkeit:

   Sei $\quad \bar{g}(m, y) \;=\; |f(m) - y|.$ (1 P.)
   $\bar{g}$ ist primitiv-rekursiv.

   Dann gilt $\quad g(y) \;=\; (\bar{g})_\mu(y).$ (2 P.)

   2. Möglichkeit:

   Wir betrachten folgendes Programm, das offenbar durch ein *WHILE*-Programm darstellbar ist.

   $n := 0;\ z := f(n);$
   **while** $z \neq y$ **do**
   $\quad n := n + 1;\ z := f(n)\ ;$
   **end**

   $g(y)$ wird in der Variablen $n$ berechnet. (3 P.)