HA 1.1

Dabei $P_1 \quad P_2 \quad P_3 \quad P_4 \quad P_5 \; \dots \dots \quad P_{14} \quad P_{15}$

über Kanal A: $P_{a_1} \; P_{a_2} \; P_{a_3} \; P_{a_4}$ mit $1 \leq a_1 < a_2 < a_3 < a_4 \leq 15$

über Kanal B: $P_{b_1} \; P_{b_2} \; P_{b_3}$ mit $1 \leq b_1 < b_2 < b_3 \leq 15$

über Kanal C: $P_{c_1} \; P_{c_2} \; P_{c_3} \; P_{c_4} \; P_{c_5}$ mit $1 \leq c_1 < \dots < c_5 \leq 15$

über Kanal D: $P_{d_1} \; P_{d_2} \; P_{d_3}$ mit $1 \leq d_1 < d_2 < d_3 \leq 15$

und $\{a_1, a_2, a_3, a_4\} \cup \{b_1, b_2, b_3\} \cup \{c_1, \dots, c_5\} \cup \{d_1, d_2, d_3\}$

$= \{1, 2, \dots, 15\}$

Möglichkeiten für $\{a_1, \dots, a_4\}$:

$$\binom{15}{4} = \frac{15!}{4!\,\underline{\underline{11!}}}$$

<u>Beachte:</u> Reihenfolge der a_i ist egal, da wir nur die aufsteigende Sortierung verwenden werden

$\rightsquigarrow$ Entsprechend für $\{b_1, b_2, b_3\}$: $\binom{11}{3}$

$\{c_1, \dots, c_5\}$: $\binom{8}{5}$

$\{d_1, d_2, d_3)$: $\binom{3}{3}$

$\rightsquigarrow$ <u>Insgesamt:</u> $\quad \binom{15}{4} \cdot \binom{11}{3} \binom{8}{5} \binom{3}{3}$

$$= \frac{15!}{4!\,3!\,5!\,3!} = 12612600$$

HA 1.2

Erinnerung: $(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} a^i b^{n-i}$

Damit: $$(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$$

Damit gilt auch: $$\frac{d^i}{dz^i} (1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^i}{dz^i} z^k$$

Speziell für $i=1$ bzw $i=2$:

$$n(1+z)^{n-1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k\, z^{k-1}$$

$$n\cdot(n-1)(1+z)^{n-2} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{k(k-1)}_{=0 \text{ für } k=0 \text{ oder } k=1} z^{k-2}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k^2 z^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k(k-1) z^k$$

$$+ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} k \, z^k$$

$$= z^2 \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d^2}{dz^2} z^k$$

$$+ z \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{d}{dz} z^k$$

$$= z^2 \, n(n-1) \, (1+z)^{n-2}$$

$$+ z \quad n \quad (1+z)^{n-1}$$

HA 1.3

$$\Omega = [6]^2 = \{ \underset{\uparrow}{(1},\underset{\uparrow}{1)}, (1,2), \dots, (6,6)\}$$

1. Würfel, 2. Würfel

$$\Pr[\omega] = \frac{1}{36} \quad \text{für } \omega \in \Omega$$

a) $A = \{ (i,i) \mid i \in [6] \} \Rightarrow |A| = 6 \Rightarrow \Pr[A] = \frac{6}{36} = \underline{1/6}$

b) $B = \{ (i,2i), (2i,i) \mid i \in [3] \} \Rightarrow |B| = 6 \Rightarrow \Pr[C] = \underline{1/6}$

c) $\Omega \setminus C =$ "≤ 31 oder $= 31$"

"≤ 31" = "Beide Würfel ≤ 2" $= [2] \times [2]$

"$= 31$" $= \{ (1,3), (3,1) \} \rightsquigarrow \Pr[\Omega \setminus C] = \frac{6}{36} = 1/6$

$\rightsquigarrow \Pr[C] = 5/6$

AA 1.4

Baumdiagramm:

1 Urne $\downarrow$ 2. Urne $\downarrow$

$$(\overline{s, w}\ ,\ \overline{3-s, 5-w})$$

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & & (s,w,\ 3-s,5-w) \arrow[dl, "\frac{1}{2}"'] \arrow[dr, "\frac{1}{2}"] & & \\
 & (s,w) \arrow[dl, "\frac{s}{s+w}"'] \arrow[d, "\frac{w}{s+w}"] & & (3-s, 5-w) \arrow[d, "\frac{3-s}{8-s-w}"'] \arrow[dr, "\frac{5-w}{8-s-w}"] & \\
\text{schwarz} & \text{weiß} & & \text{schwarz} & \text{weiß}
\end{tikzcd}$$

1. Urne gewählt

2. Urne gewählt

W'keit, eine schwarze Kugel zu ziehen:

$$\boxed{\frac{1}{2} \cdot \frac{s}{s+w} + \frac{1}{2}\ \frac{3-s}{8-s-w}}$$

soll maximiert werden

Unterscheide die Fälle $s = 0, 1, 2, 3$

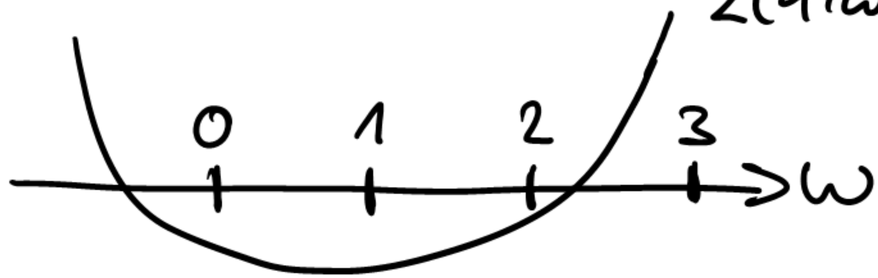
Fall $s=0$: Gewinnw'keit: $\frac{1}{2}\,\frac{3}{8-\omega}$

maximal für $\omega = 5$: $\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{3} = \underline{\underline{1/2}}$

Fall $s=1$ Gewinnw'keit: $\frac{1}{2}\,\frac{1}{1+\omega} + \frac{1}{\cancel{2}}\,\frac{\cancel{2}}{7-\omega}$

$\rightsquigarrow$ Ableitung $\left(\frac{d}{d\omega}\right)$: $-\frac{1}{2(\omega+1)^2} + \frac{1}{(\omega-7)^2} = \frac{(\omega+9)^2-128}{2(1+\omega)^2(\omega-7)^2}$

$\rightsquigarrow$ $(\omega+9)^2 - 128$:



$\rightsquigarrow$ Maximum wird am Rand angenommen:

Für $\omega=0$: $\underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{7}}}$ Für $\omega=5$: $\frac{1}{12} + \frac{1}{2}$

Fall $s=2$: Symmetrisch zu $s=1$ für $w := 5-w$

Fall $s=3$: Symmetrisch zu $s=2$ für $w := 5-w$

$\rightsquigarrow$ Gewinnw'keit maximal für $s=1, w=0$