Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / M. Luttenberger / S. Schwoon

Sommersemester 2007
Übungsblatt 3

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt wird am 9./10. Mai besprochen.

Aufgabe 3.1

Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter W'keitsraum. In der Vorlesung wurde jede Abbildung $X : \Omega \to \mathbb{R}$ als *(diskrete) Zufallsvariable* genannt, wobei mit $W_X := X(\Omega)$ der Wertebereich von X bezeichnet wurde.

Für jede beliebige Anzahl n von Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ und jede Abbildung $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ist somit auch

$$g(X_1, \ldots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R} : \omega \to g(X_1(\omega), \ldots, X_n(\omega))$$

eine Zufallsvariable, insbesondere ist damit $Z := X + Y$ eine Zufallsvariable.

a) Zeigen Sie, dass die Dichte von Z durch

$$f_Z(z) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(z - y, y)$$

gegeben ist.

b) In der Vorlesung wurde mittels der Definition

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega)\Pr[\omega]$$

gezeigt, dass $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$.

Zeigen Sie nun dasselbe Resultat, allerdings unter Verwendung der ursprünglichen Definition

$$\mathbb{E}[Z] = \sum_{z \in W_Z} z f_Z(z).$$

c) Wir betrachten speziell den W'keitsraum $(\Omega, \Pr)$ mit

$$\Omega = \{0, 1\}^2 \text{ und } \Pr(\omega) = p^{\#_1\omega}(1 - p)^{\#_0\omega},$$

d.h. wir betrachten Elementarereignisse, welche eine Versuchsreihe von 2 unabhängigen Experimenten repräsentieren, wobei jedes Experiment mit W'keit p gelingt und mit W'keit $1 - p$ scheitert. $\#_1\omega$ sei hierbei die Anzahl der 1en/erfolgreichen Experimente in ω.

Weiterhin betrachen wir die Zufallsvariablen $X_1, X_2 : \Omega \to \mathbb{R}$ mit $X_i(\omega) = \omega_i$. D.h. X_i gibt an, ob das i-te Experiment erfolgreich war oder nicht.

Sei nun wieder $Z = X_1 + X_2$. Berechnen Sie die Werte $f_Z(z)$ für $z = 0, 1, 2$ entsprechend *a)* und $\mathbb{E}[Z]$ entsprechend der Definition $\mathbb{E}[Z] = \sum_{z \in W_Z} z f_Z(z)$.

Lösungsvorschlag

a)

$$\begin{aligned} f_Z(z) &= \Pr[X+Y=z] \\ &= \sum_{y \in W_Y} \Pr[X+Y=z, Y=y] \\ &= \sum_{y \in W_Y} \Pr[X+y=z, Y=y] \\ &= \sum_{y \in W_Y} \Pr[X=z-y, Y=y] \\ &= \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(z-y, y). \end{aligned}$$

Für den Schritt von der ersten zur zweiten Zeile beachte man, dass $\{Y^{-1}(\{y\}) \mid y \in W_Y\}$ eine Partition von Ω bildet, d.h.

$$\Omega = \cup\{Y^{-1}(\{y\}) \mid y \in W_Y\} := \bigcup_{y \in W_y} Y^{-1}(\{y\}).$$

Entsprechend folgt natürlich das symmetrische Ergebnis

$$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, z-x).$$

b)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[Z] &= \sum_{z \in W_Z} z f_Z(z) \\ &= \sum_{z \in W_Z} z \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(z-y, y) \\ &= \sum_{z \in W_Z} \sum_{y \in W_Y} z f_{X,Y}(z-y, y) \\ &= \sum_{y \in W_Y} \sum_{z \in W_Z} z f_{X,Y}(z-y, y) \\ &= \sum_{y \in W_Y} \sum_{x \in W_X} (x+y) f_{X,Y}(x, y) \\ &= \sum_{y \in W_Y} y \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y) \\ &+ \sum_{x \in W_X} x \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y) \\ &= \sum_{y \in W_Y} y f_Y(y) \\ &+ \sum_{x \in W_X} x f_X(x) \\ &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]. \end{aligned}$$

Man beachte hier, dass das Umordnen der Summe nur erlaubt ist, d.h. den Grenzwert nicht verändet, da wir annehmen, dass $\mathbb{E}[|Z|] < \infty$ gilt, d.h., dass die Reihe absolut konvergiert.

Als Wiederholung, was beim Umordnen von konvergenten, aber nicht absolut konvergenten Reihen passieren kann, sei auf den Riemannschen Umordnungsatz verwiesen, siehe

http://de.wikipedia.org/wiki/Riemannscher_Umordnungssatz.

c) Z ist nur zu den Werten $\{0,1,2\}$ fähig. Für $z \in \{0,1,2\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \sum_{x_2 \in \{0,1\}} f_{X_1,X_2}(z-x_2,x_2) \\
&= f_{X_1,X_2}(z-0,0) + f_{X_1,X_2}(z-1,1) \\
&= \Pr[X_1 = z, X_2 = 0] + \Pr[X_1 = z-1, X_2 = 1] \\
&= \begin{cases} \Pr[X_1 = 0, X_2 = 0] & = (1-p)^2 & \text{falls } z = 0 \\ \Pr[X_1 = 1, X_2 = 0] + \Pr[X_1 = 0, X_2 = 1] & = 2p(1-p) & \text{falls } z = 1 \\ \Pr[X_1 = 1, X_2 = 1] & = p^2 & \text{falls } z = 2 \end{cases} \\
&= \binom{2}{z} p^z (1-p)^{2-z}.
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$\mathbb{E}[Z] = 0 \cdot (1-p)^2 + 1 \cdot 2(1-p)p + 2 \cdot p^2 = 2p.$$

Aufgabe 3.2

Sei $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter W'keitsraum. Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ zwei Zufallsvariablen, für welche $\mu := \mathbb{E}[X]$ und $\nu := \mathbb{E}[Y]$ definiert sind.

Man definiert dann die *Kovarianz* als

$$\mathrm{Kov}[X,Y] := \mathbb{E}[(X-\mu)(Y-\nu)].$$

Anmerkung: X und Y heißen *unkorreliert*, falls $\mathrm{Kov}[X,Y] = 0$ gilt.

a) Man nehme an, dass $\mathbb{E}[X^2]$,$\mathbb{E}[Y^2]$ und $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ definiert sind.

Zeigen Sie, dass

$$\begin{array}{lll} i) & \mathrm{Kov}[X,Y] & = \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \\ ii) & \mathrm{Kov}[aX+b, cY+d] & = ac \cdot \mathrm{Kov}[X,Y] \\ iii) & \mathrm{Var}[X+Y] & = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] + 2\mathrm{Kov}[X,Y] \end{array}$$

gilt.

Anmerkungen:

zu i) Wie Sie in der Vorlesung sehen werden, gilt für unabhängige Zufallsvariablen stets $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$, d.h. unabhängige Zufallsvariablen sind auch stets unkorreliert.

zu iii) Es gilt $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$ also bereits, falls X und Y unkorreliert sind.

b) Wir betrachten den diskreten W'keitsraum $(\Omega, \Pr)$ mit

$$\Omega = \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\} \text{ mit } \Pr[\omega] = \frac{1}{4} \text{ für alle } \omega \in \Omega.$$

Wir definieren die beiden Zufallsvariablen X und Y mittels

$$X(\omega) := \sin\omega \text{ und } Y(\omega) := \cos\omega.$$

Diese sind abhängig, da z.B.

$$\Pr[X=0, Y=0] = \Pr[\{0,\pi\} \cap \{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\}] = \Pr[\emptyset] = 0 \neq \frac{1}{4} = \Pr[X=0]\Pr[Y=0].$$

Berechnen Sie $\mathrm{Kov}[X,Y]$!

Lösungsvorschlag

a-i)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kov}[X,Y] &= \mathbb{E}[(X-\mu)(Y-\nu)] \\
&= \mathbb{E}[XY-\mu Y-\nu X+\mu\nu] \\
&= \mathbb{E}[XY]-\mu\mathbb{E}[Y]-\nu\mathbb{E}[X]+\mu\nu \\
&= \mathbb{E}[XY]-2\mu\nu+\mu\nu \\
&= \mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]
\end{aligned}$$

a-ii)

$$\begin{aligned}
\mathrm{Kov}[aX+b,cY+d] &= \mathbb{E}[(aX+b-\mathbb{E}[aX+b])(cY+d-\mathbb{E}[cY+d])] \\
&= \mathbb{E}[(aX+b-a\cdot\mathbb{E}[X]-b)(cY+d-c\cdot\mathbb{E}[Y]-d)] \\
&= \mathbb{E}[a(X-\mu)c(Y-\nu)] \\
&= ac\cdot\mathrm{Kov}[X,Y]
\end{aligned}$$

a-iii) Zunächst macht man sich klar, dass $\mathbb{E}[(X+Y)^2]$ definiert ist:

- Ist Ω endlich, so existiert $\mathbb{E}[(X+Y)^2]$ sicherlich.
- Ansonsten sei $\Omega=\{\omega_i \mid i\in\mathbb{N}\}$. Dann gilt für jedes $N\in\mathbb{N}$:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\sum_{i=0}^{N}(X(\omega_i)+Y(\omega_i))^2\Pr[\omega_i] \\
\leq\ &\textstyle\sum_{i=0}^{N}(2\max\{X(\omega_i),Y(\omega_i)\})^2\Pr[\omega_i] \\
\leq\ &\textstyle\sum_{i=0}^{N}(4\cdot X(\omega_i)^2+4\cdot Y(\omega_i)^2)\Pr[\omega_i] \\
\leq\ &4\cdot\mathbb{E}[X^2]+4\cdot\mathbb{E}[Y^2]<\infty.
\end{aligned}$$

  Damit ist $\sum_{i=0}^{N}(X(\omega_i)+Y(\omega_i))^2\Pr[\omega]$ monoton wachsend und von oben beschränkt, also konvergent.

  Man beachte, dass die Existenz von $\mathbb{E}[X\cdot Y]$ hierbei nicht benötigt wird, bzw. auch aus diesem Beweis folgt mittels der Linearität des Erwartungswertes.
- Unter Verwendung der Existenz von $\mathbb{E}[X\cdot Y]$ folgt direkt aus der Linearität von $\mathbb{E}[\cdot]$, dass $\mathbb{E}[(X+Y)^2]$ definiert ist:

$$\infty>\mathbb{E}[X^2]+2\cdot\mathbb{E}[XY]+\mathbb{E}[Y^2]=\mathbb{E}[X^2+2XY+Y^2]=\mathbb{E}[(X+Y)^2].$$

Somit ist $\mathrm{Var}[X+Y]$ definiert.

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X+Y] &= \mathbb{E}[(X+Y)^2]-\mathbb{E}[(X+Y)]^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2]+\mathbb{E}[Y^2]+2\mathbb{E}[XY]-(\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y])^2 \\
&= \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2+\mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2+2\cdot(\mathbb{E}[XY]-\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]) \\
&= \mathrm{Var}[X]+\mathrm{Var}[Y]+2\cdot\mathrm{Kov}[X,Y].
\end{aligned}$$

b) Man berechnet zunächst

$$\mathbb{E}[X]=\frac{1}{4}(0+1+0-1)=0$$

und

$$\mathbb{E}[Y]=\frac{1}{4}(1+0-1+0)=0.$$

Damit gilt

$$\mathrm{Kov}[X,Y]=\mathbb{E}[X\cdot Y]-\mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y]=\frac{1}{4}(0\cdot 1+1\cdot 0+0\cdot(-1)+(-1)\cdot 0)-0=0.$$

Man sieht also, dass unkorrelierte Zufallsvariablen immer noch abhängig sein können.

Aufgabe 3.3

Prof. Esparza ist mit seinem TUM-Gehalt nicht zufrieden und plant daher in Aktien zu investieren. Zur Auswahl stehen:

- Aktie A, mit der eine Rendite von 6 Prozent erwartet werden kann mit Standardabweichung 3 Prozent;
- Aktie B, mit der eine Rendite von 10 Prozent erwartet werden kann mit Standardabweichung 4 Prozent.

Wir nehmen vereinfachend an, dass A und B sich völlig unabhängig voneinander entwickeln. Das TU-Gehalt ist groß genug, dass Prof. Esparza es quasi kontinuierlich auf A und B verteilen kann, d.h., er investiert von seinem Gehalt $(1-m)$ in A und m in B, wobei $0 \leq m \leq 1$.

a) Wir modellieren die Renditen von A bzw. B mit Zufallsvariablen X_A bzw. X_B. Geben Sie $\mu(m) = \mathbb{E}[(1-m)X_A + mX_B]$ und die Standardabweichung $\sigma(m)$ von $(1-m)X_A + mX_B$ an. Das entspricht der erwarteten Rendite und ihrer Standardabweichung von Prof. Esparzas Portfolio.

b) Prof. Esparzas Frau ist recht risikobewusst und wünscht, dass die Standardabweichung von Prof. Esparzas Portfolio möglichst klein ist. Bestimmen Sie daher m_{min} so, dass $\sigma(m_{\text{min}})$ minimal ist.

c) Skizzieren Sie in einem Diagramm, wie $\sigma(m)$ und $\mu(m)$ zusammenhängen. Beschriften Sie die X-Achse mit σ und die Y-Achse mit μ und skizzieren Sie die Punktmenge $\{(\sigma(m), \mu(m)) \mid 0 \leq m \leq 1\}$. Inwiefern wäre es nicht vernünftig von Prof. Esparza, nur A zu kaufen?

Lösungsvorschlag

a) Aufgrund der Linearität des Erwartungswerts haben wir

$$\mu(m) = \mathbb{E}[(1-m)X_A + mX_B] = (1-m)\cdot 6 + m \cdot 10 = 4m + 6\,.$$

Für die Standardabweichung $\sigma(m)$ gilt nach Satz 17 und Satz 30 der Folien:

$$\begin{aligned}
\sigma(m) &= \sqrt{\mathrm{Var}((1-m)X_A + mX_B)} && \text{(Definition Standardabweichung)}\\
&= \sqrt{\mathrm{Var}((1-m)X_A) + \mathrm{Var}(mX_B)} && \text{(Satz 30)}\\
&= \sqrt{(1-m)^2\mathrm{Var}(X_A) + m^2\mathrm{Var}(X_B)} && \text{(Satz 17)}\\
&= \sqrt{9(1-m)^2 + 16m^2} = \sqrt{25m^2 - 18m + 9}\,.
\end{aligned}$$

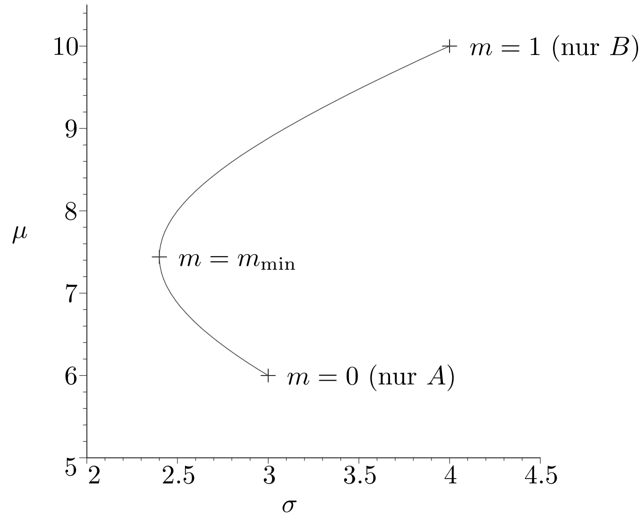
b) Es ist äquivalent und einfacher, $\mathrm{Var}(m) := (\sigma(m))^2 = 25m^2 - 18m + 9$ zu minimieren:

$$\mathrm{Var}'(m) = 50m - 18 \stackrel{!}{=} 0\,,$$

also folgt

$$m_{\text{min}} = \frac{18}{50} = 0.36\,.$$

c)



Prof. Esparza sollte nicht nur A kaufen. Wenn er $m = m_{\min}$ statt $m = 0$ wählt, kann er bei geringerem Risiko eine höhere Rendite erwarten. Mit demselben Argument sollte er $0 \leq m < m_{\min}$ vermeiden.
Bemerkung: In der Portfoliotheorie nennt man den Bereich $m_{\min} \leq m \leq 1$ in obiger Skizze *"effizienter Rand"*.