Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr

SS 2004
Lösungsblatt Mittelklausur
5. Juni 2004

Diskrete Strukturen II

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
		☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift

Allgemeine Hinweise

- **Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!**
- **Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!**
- **Bitte machen Sie deutlich erkennbar, welche Lösung zu welcher Aufgabe gehört.**
- **Extrem schwere Lesbarkeit kann im Zweifelsfall zu Punktabzug führen.**
- **Als einziges Hilfsmittel zur Klausur ist ein handbeschriebenes Blatt DIN A4 zugelassen. Bei Verwendung anderer Hilfsmittel wird die gesamte Klausur mit null Punkten bewertet.**
- **Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten. Insgesamt sind maximal 70 Punkte erreichbar.**

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	A8	Σ	Korrektor
Erstkorrektur										
Zweitkorrektur										

Aufgabe 1 (9 Punkte)

Mal wieder würfeln. Wir werfen zwei unabhängige ideale Würfel und definieren dabei die Ereignisse

$A :=$ Die Summe ist 2; $B :=$ Die Summe ist 7; $C :=$ Der 1. Würfel zeigt eine ungerade Zahl;

$D :=$ Der 2. Würfel zeigt eine ungerade Zahl; $E :=$ Die Summe ist ungerade.

Bitte berechnen Sie (jeweils in der entsprechenden Zeile) die untenstehenden Wahrscheinlichkeiten.

Für jeden richtigen Wert gibt es 1/2 Punkt, für jeden falschen wir Ihnen 1/2 Punkt abgezogen. Nicht berechnete Werte bringen null Punkte. Das Endergebnis wird aufgerundet, es gibt insgesamt nicht weniger als null Punkte.

---

a) $\Pr[A] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[A] = 1/36}$

b) $\Pr[B] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[B] = 1/6}$

c) $\Pr[C] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[C] = 1/2}$

d) $\Pr[D] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[D] = 1/2}$

e) $\Pr[E] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[E] = 1/2}$

f) $\Pr[A \cup B] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[A \cup B] = 7/36}$

g) $\Pr[A \cap B] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[A \cap B] = 0}$

h) $\Pr[A \cup C] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[A \cup C] = 1/2}$

i) $\Pr[A \cap C] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[A \cap C] = 1/36}$

j) $\Pr[A \setminus C] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[A \setminus C] = 0}$

k) $\Pr[C \setminus A] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[C \setminus A] = 17/36}$

l) $\Pr[D \setminus C] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[D \setminus C] = 1/4}$

m) $\Pr[B \cup \overline{D}] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[B \cup \overline{D}] = 7/12}$

n) $\Pr[B \cap \overline{D}] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[B \cap \overline{D}] = 1/12}$

o) $\Pr[C \cap D] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[C \cap D] = 1/4}$

p) $\Pr[D \cap E] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[D \cap E] = 1/4}$

q) $\Pr[C \cap E] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[C \cap E] = 1/4}$

r) $\Pr[C \cap D \cap E] =$ $\Longrightarrow$ $\mathbf{Pr[C \cap D \cap E] = 0}$

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Independence Day. Wir sagen, ein Würfel zeigt eine *hohe* Zahl, wenn er 4, 5 oder 6 zeigt. Sonst zeigt er eine *niedrige* Zahl. Wir werfen zwei unabhängige ideale Würfel und definieren

$$A := \text{Der erste Würfel zeigt eine hohe Zahl;}$$

$$B := \text{Der zweite Würfel zeigt eine hohe Zahl;}$$

$$C := \text{Genau ein Würfel zeigt eine hohe Zahl;}$$

$$D := \text{Die Summe ist 4;} \quad E := \text{Die Summe ist 5;} \quad F := \text{Die Summe ist 7.}$$

Bitte *beweisen oder widerlegen*[1] Sie die folgenden Aussagen.

Für jede richtige Antwort erhalten Sie 1 Punkt, für jede falsche wird Ihnen 1 Punkt abgezogen. Nicht bearbeitete oder bewiesene Aussagen bringen null Punkte, ingesamt bringt diese Aufgabe nicht weniger als null Punkte.

---

a) A und F sind unabhängig. .... X Richtig ◯ Falsch
Beweis: $\Pr[\mathbf{A} \cap \mathbf{F}] = \mathbf{1/12 = 1/2 \cdot 1/6} = \Pr[\mathbf{A}] \cdot \Pr[\mathbf{F}]$

b) A und D sind unabhängig. .... ◯ Richtig X Falsch
Beweis: $\Pr[\mathbf{A} \cap \mathbf{D}] = \mathbf{0 \neq 1/2 \cdot 1/12} = \Pr[\mathbf{A}] \cdot \Pr[\mathbf{D}]$

c) A und E sind unabhängig. .... ◯ Richtig X Falsch
Beweis: $\Pr[\mathbf{A} \cap \mathbf{E}] = \mathbf{1/36 \neq 1/2 \cdot 4/36} = \Pr[\mathbf{A}] \cdot \Pr[\mathbf{E}]$

d) $\Pr[A \cap B \cap C] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \cdot \Pr[C]$ .... ◯ Richtig X Falsch
Beweis: $\Pr[\mathbf{A} \cap \mathbf{B} \cap \mathbf{C}] = \mathbf{0} \neq \Pr[\mathbf{A}] \cdot \Pr[\mathbf{B}] \cdot \Pr[\mathbf{C}]$

e) A und C sind unabhängig. .... X Richtig ◯ Falsch
Beweis: $\Pr[\mathbf{A} \cap \mathbf{C}] = \mathbf{1/4 = 1/2 \cdot 1/2} = \Pr[\mathbf{A}] \cdot \Pr[\mathbf{C}]$

f) C und E sind unabhängig. .... X Richtig ◯ Falsch
Beweis: $\Pr[\mathbf{C} \cap \mathbf{E}] = \mathbf{1/18 = 1/2 \cdot 1/9} = \Pr[\mathbf{C}] \cdot \Pr[\mathbf{E}]$

g) $\Pr[A \cap C \cap E] = \Pr[A] \cdot \Pr[C] \cdot \Pr[E]$ .... X Richtig ◯ Falsch
Beweis: $\Pr[\mathbf{A} \cap \mathbf{C} \cap \mathbf{E}] = \mathbf{1/36 = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 4/36} = \Pr[\mathbf{A}] \cdot \Pr[\mathbf{C}] \cdot \Pr[\mathbf{E}]$

h) A, C und E bilden eine unabhängige Familie. .... ◯ Richtig X Falsch
Beweis: **Folgt unmittelbar aus c)**

[1] Bei Fehlen eines Beweises erhalten Sie unabhängig von Ihrer Antwort *null* Punkte.

Aufgabe 3 (2+1+2+2=7 Punkte)

Der Kaffeewettbewerb. Eine Gruppe von n Leuten trifft sich zum Kaffeeklatsch. Dabei spielen sie folgendes Spiel, um zu entscheiden, wer den Kaffee und den ganzen Kuchen bezahlen muss:

- Jeder wirft eine Münze.
- Wenn alle Münzen *bis auf eine genau das gleiche Motiv* (also Kopf oder Zahl) zeigen, dann zahlt die Person, deren Münze das andere Motiv zeigt.
- Das Spiel geht wieder von vorne los, wenn noch niemand feststeht, der zahlt.

Es ist klar, dass das Spiel in sinnvoller Weise erst ab drei Personen gespielt werden kann. Sie sollen nun folgende Aufgaben lösen:

a) Wie ist die Anzahl der Runden verteilt? (Begründung!)

b) Wenn $n = 3$ ist, wie viele Runden des Spiels erwarten wir?

c) Wie hängt der Erwartungswert allgemein von n ab?

d) Wie hängt die Varianz der Anzahl der Runden allgemein von n ab?

Lösungsvorschlag

a) Da wir jedesmal die gleiche Erfolgswahrscheinlichkeit haben und so lange spielen, bis der Erfolg eintritt, haben wir eine *geometrische Verteilung* vorliegen.

b) Es gibt 8 Möglichkeiten für die Kombination der Münzwürfe, lediglich bei zwei davon (KKK und ZZZ) ist das Spiel nicht beendet. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer Runde das Spiel beendet wird, 6/8 und wir erwarten damit (siehe Teilaufgabe c) $8/6 \approx 1.33$ Runden, bis das Spiel vorbei ist.

c) Allgemein ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Spiel in einer Runde beendet wird, gleich

$$\frac{2 \cdot \binom{n}{1}}{2^n} = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Da wir eine geometrische Verteilung vorliegen haben, ist

$$\mathbf{E}[\# \text{ Runden}] = \frac{1}{p} = \frac{2^{n-1}}{n}.$$

d) Da wir eine geometrische Verteilung vorliegen haben, ist

$$\mathrm{Var}[\# \text{ Runden}] = \frac{1-p}{p^2} = \frac{1 - \frac{n}{2^{n-1}}}{\left(\frac{n}{2^{n-1}}\right)^2} = \left(\frac{2^{n-1}}{n}\right)^2 - \frac{2^{n-1}}{n}.$$

Aufgabe 4 (8+1=9 Punkte)

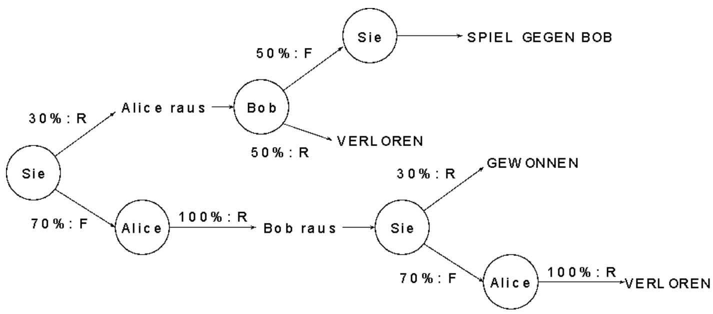
Quizshow. Gratulation! Sie sind zur weltberühmten Quizshow "Du bist gefeuert!" eingeladen worden. Ihre Mitspieler beim Quiz sind Alice und Bob.
Die Quizshow funktioniert folgendermaßen: Der Reihe nach muss jeder Spieler eine Frage beantworten. Beantwortet er sie falsch, ist der nächste Spieler dran; beantwortet er sie richtig, darf er einen Mitspieler wählen, der dann das Spiel verlassen muss (egal, ob er schon einmal dran war oder nicht). Danach kommt der nächste Spieler dran. Das Ganze geht so lange, bis nur noch ein Spieler übrigbleibt.
Es wurde per Los entschieden, dass Sie die erste Frage beantworten müssen. Dann kommt Alice, dann Bob, und dann wieder Sie usw. Ihre Wahrscheinlichkeit, eine Frage richtig zu beantworten, ist 30%, die von Alice 100%[2] und die von Bob 50%.
Jeder Spieler maximiert seine Gewinnchancen, wenn er einen anderen Spieler "feuert". Das heißt, er wählt diesen so, dass seine eigenen Chancen auf einen Gewinn möglichst groß sind.

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie gewinnen, wenn Sie die erste Frage richtig beantworten? Wie groß ist sie, wenn Sie die erste Frage falsch beantworten? Zeichnen Sie zur Lösung der Aufgabe einen Entscheidungsbaum.

b) Angenommen, man kann bei einer Frage auch "passen" (also sie nicht beantworten), was dann als falsche Antwort gewertet wird. Was wäre dann eine optimale Strategie für Sie, um zu gewinnen?

Lösungsvorschlag

a) Betrachten wir den folgenden Entscheidungsbaum:



Wie wir an dem Baum sehen, gewinnen wir mit einer Wahrscheinlichkeit von 30%, wenn die erste Frage falsch beantwortet wurde. Wir gewinnen mit

$$50\% \cdot 30\% + (50\% \cdot 70\%)^1 \cdot 50\% \cdot 30\% + (50\% \cdot 70\%)^2 \cdot 50\% \cdot 30\% + \cdots =$$

$$50\% \cdot 30\% + (0.35)^1 \cdot 50\% \cdot 30\% + (0.35)^2 \cdot 50\% \cdot 30\% + \cdots =$$

$$15\% \cdot \sum_{k=0} 0.35^k = 15\% \cdot \frac{1}{1 - 0.35} = \frac{3}{13} \approx 23\%$$

wenn wir die erste Frage richtig beantwortet haben.

b) Wie man aus a) sieht, ist es die beste Strategie, die erste Frage zu passen. Dann gewinnen wir mit einer Wahrscheinlichkeit von 30%.

---

[2]Alice ist aufgrund ihrer Berufstätigkeit als Kryptographin sehr schlau.

Aufgabe 5 (2+2+1+2+4=11 Punkte)

Urnen - eine gute Wahl. Urne A enthält zwei rote und drei weiße Bälle. Urne B enthält fünf rote und einen blauen Ball. Ein zufällig gezogener Ball aus A wird in B gelegt. Dann ziehen wir einen Ball aus B.

a) Wie groß ist Pr[Beide gezogenen Bälle sind rot]?

b) Wie groß ist Pr[Der zweite gezogenen Ball ist rot]?

c) Wie groß ist Pr[erster Ball ist rot | zweiter Ball ist rot]?

d) Wie groß ist Pr[erster Ball ist rot | zweiter Ball ist blau]?

Betrachten Sie nun eine Urne, die fünf rote und zehn blaue Bälle enthält. Ein Ball wird zufällig gezogen und dann zurück gelegt. Dann werden zusätzlich zehn Bälle mit der gleichen Farbe wie der gezogene Ball zur Urne hinzugefügt. Wir ziehen nun aus der Urne zufällig einen Ball.

e) Wenn der zweite gezogene Ball rot ist, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass auch der erste gezogene rot war?

Lösungsvorschlag

a)

$$\Pr[\text{Beide gezogenen Bälle sind rot}] = \Pr[\text{1. Ball rot}] \cdot \Pr[\text{2. Ball rot} \mid \text{1. Ball rot}] =$$
$$= \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{7} = \frac{12}{35}.$$

b)

$$\Pr[\text{2.Ball rot}] = \Pr[\text{1. Ball rot}] \cdot \Pr[\text{2. Ball rot} \mid \text{1. Ball rot}] +$$
$$+ \Pr[\text{1. Ball weiß }] \cdot \Pr[\text{2. Ball rot} \mid \text{1. Ball weiß}] =$$
$$= \frac{12}{35} + \frac{3}{5} \cdot \frac{5}{7} = \frac{27}{35}.$$

c)

$$\Pr[\text{1. Ball rot} \mid \text{2. Ball rot}] = \frac{\Pr[\text{Beide Bälle rot}]}{\Pr[\text{2. Ball rot}]} = \frac{12/35}{27/35} = \frac{4}{9}.$$

d)

$$\Pr[\text{1. Ball rot} \mid \text{2. Ball blau}] = \frac{\Pr[\text{1. Ball rot und 2. Ball blau}]}{\Pr[\text{2. Ball blau}]} = \frac{2/5 \cdot 1/7}{1/7} = \frac{2}{5}.$$

e)

$$\Pr[\text{1. Ball rot} \mid \text{2. Ball rot}] = \frac{\Pr[\text{Beide Bälle rot}]}{\Pr[\text{2. Ball rot}]} =$$
$$= \frac{\Pr[\text{Beide Bälle rot}]}{\Pr[\text{2. Ball rot} \mid \text{1. Ball rot}] \cdot \Pr[\text{1. Ball rot}] + \Pr[\text{2. Ball rot} \mid \text{1. Ball blau}] \cdot \Pr[\text{1. Ball blau}]} =$$
$$= \frac{5/15 \cdot 15/25}{5/15 \cdot 15/25 + 10/15 \cdot 5/25} = \frac{15}{25} = 60\%.$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Lotto. In der Lotterie “5 aus 39” werden fünf verschiedene Zahlen aus $\{1, 2, \ldots, 39\}$ zufällig ausgewählt. Was ist der Erwartungswert für die *größte* der fünf Zahlen?

(Hinweis: $\displaystyle\sum_{k=a}^{b} \frac{k!}{c!(k-1-c)!} = \frac{(b-c)(b+1)\binom{b}{c} - (a^2-a-ac)\binom{a-1}{c}}{2+c}$.)

Lösungsvorschlag

Für ein festes $5 \leq k \leq 39$ gibt es genau $\binom{k-1}{4}$ Möglichkeiten, fünf Zahlen (ohne Beachtung der Reihenfolge) aus $\{1, 2, \ldots, 39\}$ so zu wählen, dass k das Maximum dieser Zahlen ist. Sei die Zufallsvariable X das Maximum der jeweils gewählten fünf Zahlen, dann ist für $5 \leq k \leq 39$

$$\Pr[X = k] = \frac{\binom{k-1}{4}}{\binom{39}{5}}$$

und somit

$$\mathbf{E}[X] = \sum_{k=5}^{39} k \cdot \Pr[X = k] = \frac{1}{\binom{39}{5}} \cdot \sum_{k=5}^{39} k \cdot \binom{k-1}{4} \overset{\text{Hinweis}}{=}$$

$$= \frac{1}{\binom{39}{5}} \cdot \frac{(39-4)(39+1)\binom{39}{4} - (5^2 - 5 - 5 \cdot 4)\binom{5-1}{4}}{2+4} = \frac{\binom{39}{4}}{\binom{39}{5}} \cdot \frac{35 \cdot 40 - 0}{6} =$$

$$= \frac{5}{35} \cdot \frac{35 \cdot 40 - 0}{6} = \frac{200}{6} \approx 33.33$$

Aufgabe 7 (8 Punkte)

Zug um Zug. Wir wählen ohne Zurücklegen nacheinander Buchstaben des Wortes `DEPOSITOR`. Wie viele Züge mit welcher Varianz erwarten wir, wenn wir aufhören, sobald ein Buchstabe des Wortes `STOP` gezogen wird?

Lösungsvorschlag

Sei X die Anzahl der Züge. Das Wort `DEPOSITOR` hat 9 Buchstaben, davon gehören 5 zu `STOP` (das `O` kommt doppelt vor). Damit sind wir nach spätestens 5 Zügen fertig und es gilt

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{k=1}^{5} k \cdot \Pr[\text{genau } k \text{ Züge}] =$$

$$= 1 \cdot \frac{5}{9} + 2 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + 3 \cdot \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 8} \cdot \frac{5}{7} + 4 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot \frac{5}{6} + 5 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot \frac{5}{5} =$$

$$= \frac{5}{9} + \frac{5}{9} + \frac{5}{14} + \frac{10}{63} + \frac{5}{126} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{70}{126} = 1 + \frac{84}{126} = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3}.$$

Zur Berechnung der Varianz bestimmen wir zunächst $\mathbf{E}(X^2)$:

$$\mathbf{E}(X^2) = \sum_{k=1}^{5} k^2 \cdot \Pr[\text{genau } k \text{ Züge}] =$$

$$= 1 \cdot \frac{5}{9} + 4 \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{5}{8} + 9 \cdot \frac{4 \cdot 3}{9 \cdot 8} \cdot \frac{5}{7} + 16 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2}{9 \cdot 8 \cdot 7} \cdot \frac{5}{6} + 25 \cdot \frac{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} \cdot \frac{5}{5} =$$

$$= \frac{5}{9} + \frac{10}{9} + \frac{15}{14} + \frac{40}{63} + \frac{25}{126} = \frac{15}{9} + \frac{240}{126} =$$

$$= 1 + \frac{6}{9} + 1 + \frac{114}{126} = 2 + \frac{2}{3} + \frac{19}{21} = 2 + \frac{33}{21} = \frac{25}{7}.$$

Damit ist

$$\mathrm{Var}(X) = \mathbf{E}(X^2) - \mathbf{E}(X)^2 = \frac{25}{7} - \frac{25}{9} = \frac{50}{63}.$$

Aufgabe 8 (1+3+2+4=10 Punkte)

Wüste Insekten. Insektenfallen wurden in einer Wüste aufgestellt. Sie werden täglich geleert. Aus Erfahrung wissen wir, dass pro Tag im Schnitt 1 Krabbelkäfer und 2,1 Wühltermiten in einer Falle gefangen werden. Beide Insektenarten kommen jeweils gleichverteilt und in großer Anzahl in der Wüste vor und gehen unabhängig voneinander in die Fallen. Nach einem Tag öffnen wir nun eine Falle. Wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass

a) keine Wühltermiten in dieser Falle sind?

b) mindestens vier Krabbelkäfer in dieser Falle sind?

c) Schätzen Sie die Varianz der Anzahl der Krabbelkäfer in der Falle ab.

d) Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit aus Teilaufgabe b) mit Hilfe der Ungleichung von Chebyshev und durch die Ungleichung von Chernoff ab und vergleichen Sie die Ergebnisse mit denen von b).

(Hinweis: Verwenden Sie $e^3 \approx 20.1$, $e^{-1} \approx 0.36$ und $e^{-2.1} \approx 0.12$.)

Lösungsvorschlag

Wir können zur Approximation der Wahrscheinlichkeit die Poisson-Verteilung mit $\lambda = 1$ (Krabbelkäfer) bzw. $\lambda = 2.1$ (Wühltermiten) heranziehen.

a)

$$\Pr[\text{keine Wühltermiten}] \approx e^{-2.1} \cdot \frac{2.1^0}{0!} \approx 0.12$$

b)

$$\Pr[\geq 4 \text{ Krabbelkäfer}] = 1 - \Pr[\leq 3 \text{ Krabbelkäfer}] \approx 1 - e^{-1} \cdot \left(\frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!}\right) \approx$$

$$\approx 1 - 0.36 \cdot \frac{16}{6} = 1 - 0.96 = 4\%$$

c) Für eine binomialverteilte Zufallsvariable X gilt

$$\mathrm{Var}(X) = np(1-p) = \mathbf{E}(X) \cdot (1-p) \leq \mathbf{E}(X).$$

(Alternativ: Für eine Poisson-verteilte Zufallsvariable X ist $\mathrm{Var}[X] = \lambda$.)

d) Chebyshev: Um die Chebyshev-Ungleichung anwenden zu können, müssen wir die Varianz der Anzahl der Krabbelkäfer abschätzen, was bereits in c) geschehen ist. Damit gilt

$$\Pr[\geq 4 \text{ Krabbelkäfer}] = \Pr[|\#\text{Krabbelkäfer} - 1| \geq 3] \leq$$

$$\leq \frac{\mathrm{Var}[\#\text{Krabbelkäfer}]}{9} \leq \frac{\mathbf{E}[\#\text{Krabbelkäfer}]}{9} = \frac{1}{9} \approx 11\%$$

Chernoff:

$$\Pr[\geq 4 \text{ Krabbelkäfer}] = \Pr[\geq (1+3) \cdot 1 \text{ Krabbelkäfer}] \leq \left(\frac{e^3}{4^4}\right)^1 = \frac{20.1}{256} \approx \frac{4}{50} = 8\%$$

Ein Vergleich der Ergebnisse zeigt, dass beide Ungleichungen die Wahrscheinlichkeit in b) überschätzen, die Chernoff-Schranke ist hierbei allerdings um Einiges genauer.