Technische Universität München
Institut für Informatik
Prof. Dr. Angelika Steger
Martin Marciniszyn
Alexander Offtermatt-Souza
Jan Remy

Sommersemester 2003
Lösungsblatt

Diskrete Strukturen II

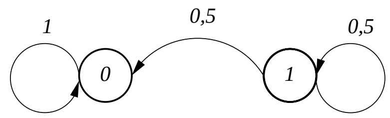
Aufgabe 1. Was trifft zu? (7 Punkte)

Entscheiden Sie, welche der folgenden Aussagen zutreffen. Begründen Sie Ihre Antwort indem Sie gegebenenfalls rechnen, die Vorlesung bzw. das Buch zitieren oder Gegenbeispiele angeben.

(a) Für $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und $a > 0$ gilt $aX \sim \text{Exp}\left(\frac{\lambda}{a}\right)$.

(b) Für alle Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt $\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]$.

(c) Die Markov-Kette mit nebenstehendem Übergangsdiagramm
(1) ist aperiodisch.
(2) ist irreduzibel.
(3) hat eine eindeutige stationäre Verteilung.



(d) Wenn eine Markov-Kette ergodisch ist, hat sie eine eindeutige stationäre Verteilung.

(e) Wenn eine Markov-Kette eine eindeutige stationäre Verteilung hat, ist sie ergodisch.

Lösungsvorschlag

(a) Wahr. Satz 2.2.4 aus *Diskrete Strukturen – Band 2* anwenden.

(b) Falsch. Gegenbeispiel: Sei X_1 Bernoulli-verteilt mit $p = 0,5$ und $X_2 = X_1$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_1] &= \mathbb{E}[X_2] = \frac{1}{2} \\
\mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] &= \frac{1}{4} \\
\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] &= 1 \cdot \Pr[X_1 = 1 \wedge X_2 = 1] = \Pr[X_2 = 1 \mid X_1 = 1] \cdot \Pr[X_1 = 1] = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

(c) (1) Die Kette ist aperiodisch, weil *beide* Zustände eine Schleife besitzen.
(2) Sie ist *nicht* irreduzibel, weil $p_{0,1}^{(n)} = 0$ für alle $n \geq 1$.
(3) Sie hat eine stationäre Verteilung. Diese lautet $\pi = (1, 0)$.

(d) Wahr. Satz 4.19.

(e) Falsch. Gegenbespiel siehe (c).

Aufgabe 2. Zufallsgraph (6 Punkte)

Sei G ein ungerichteter einfacher Graph auf der Knotenmenge $V = \{1, 2, \ldots, n\}$, wobei für jede der $\binom{n}{2}$ möglichen Kanten unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p entschieden wird, ob sie in G existiert oder nicht. Die Anzahl der Kanten, die mit einem Knoten inzidieren, heißt der *Grad* des Knotens. Für $i \in V$ bezeichne D_i den Grad des Knotens i und $D = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i$ sei der *Durchschnittsgrad* von G.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}[D_i]$ für alle $i \in V$ und $\mathbb{E}[D]$.

(b) Zeigen Sie

(1) $\Pr\left[D_i \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D_i]\right] \leq e^{-\frac{\mathbb{E}[D_i]}{8}}$ für alle $i \in V$ und

(2) $\Pr\left[\min\{D_i : i \in V\} \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D]\right] \leq ne^{-\frac{\mathbb{E}[D]}{8}}$.

Lösungsvorschlag

(a) $D_i = \mathrm{Bin}(n-1, p) \Rightarrow \mathbb{E}[D_i] = p(n-1)$

$$\mathbb{E}[D] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} D_i\right] = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} D_i = \frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n} p(n-1) = p(n-1) = \mathbb{E}[D_i] \quad \forall i \in V.$$

(b) (1) Anwendung der Ungleichung von Chernoff, Korollar 1.90

$$\Pr\left[D_i \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D_i]\right] = \Pr\left[D_i \leq \left(1 - \frac{1}{2}\right)\mathbb{E}[D_i]\right] \leq e^{-\frac{\mathbb{E}[D_i]}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2} = e^{-\frac{\mathbb{E}[D_i]}{8}}$$

(2) Anwendung der Booleschen Ungleichung, Korollar 1.7

$$\begin{aligned}
&\Pr\left[\min\{D_i : i \in V\} \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D]\right] = \\
&= \Pr\left[D_1 \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D] \vee D_2 \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D] \vee \ldots \vee D_n \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D]\right] \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} \Pr\left[D_i \leq \frac{1}{2}\mathbb{E}[D]\right] \leq ne^{-\frac{\mathbb{E}[D]}{8}}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. Glühbirnen (6 Punkte)

Für n Glühbirnen ergab sich aus Dauertests eine durchschnittliche Lebensdauer von 98 Tagen. Es wird angenommen, dass die Lebensdauern der Glühbirnen unabhängig, identisch geometrisch verteilt sind mit unbekannter Wahrscheinlichkeit p. Schätzen Sie p mit der Maximum Likelihood Methode, indem Sie die Likelihood-Funktion aufstellen und damit den ML-Schätzwert für p durch ausführliche Rechnung bestimmen.

Lösungsvorschlag

Sei $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, wobei x_i die Lebensdauer der i-ten Glühbirne bezeichne.
Likelihoodfunktion:

$$L(\mathbf{x}, p) = \prod_{i=i}^{n} (1-p)^{x_i - 1} \cdot p \quad \to \quad \text{Max } p$$

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}, p) \quad &:= \quad \log L(\mathbf{x}, p) = \sum_{i=1}^{n} \log((1-p)^{x_i-1} \cdot p) = \\ &= \quad \sum_{i=1}^{n} ((x_i - 1) \log(1-p) + \log p) \end{aligned}$$

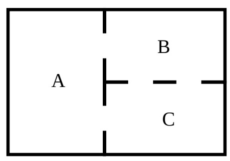
$\frac{d}{dp} f(\mathbf{x}, p) = 0$ notwendig für ein Maximum:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dp} f(\mathbf{x}, p) \quad &= \quad \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - 1) \frac{1}{(1-p)} \cdot (-1) + \frac{1}{p} \right) \\ &= \quad \frac{n}{p} + \frac{n - \sum_{i=1}^{n} x_i}{1-p} \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow \\ \frac{1}{p} \quad &= \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \Rightarrow p = \frac{1}{98} \end{aligned}$$

Mit der 2. Ableitung ist zu überprüfen, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

Aufgabe 4. Nachtwächter (8 Punkte)

Ein Nachtwächter bewegt sich in nebenstehendem Museum mit den drei Räumen A, B und C. Bei jedem Raumwechsel wählt er einen Durchgang unabhängig von früheren Entscheidungen gleichverteilt aus. Die Zufallsvariable X_n beschreibe den Raum, in dem sich der Wächter nach dem n-ten Wechsel befindet.



(a) Bestimmen Sie Zustandsraum, Übergangsmatrix und Übergangsgraph der Markov-Kette $\{X_n\}_{n \geq 0}$.

(b) Begründen Sie detailliert, warum diese Markov-Kette ergodisch ist.

(c) Berechnen Sie die stationäre Verteilung.

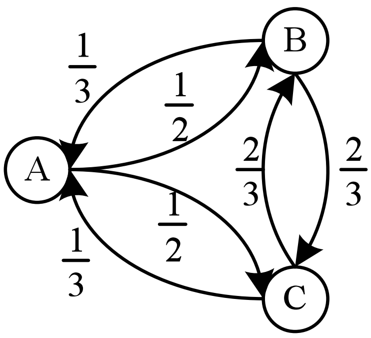
Lösungsvorschlag

(a) Zustandsraum: $X_n \in \{A, B, C\} := Z$

Übergangsmatrix:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix}$$

Übergangsdiagramm:



(b) X_n ist irreduzibel, weil der Graph stark zusammenhängend ist, und aperiodisch, weil jeder Knoten $i \in Z$ auf zwei geschlossen Wegen mit teilerfremden Längen liegt.

A:

$$\begin{aligned} W_1 &= A - B - A, |W_1| = 2 \\ W_2 &= A - B - C - A, |W_2| = 3 \end{aligned}$$

B und C analog. $\{X_n\}_{n \geq 0}$ ist ergodisch.

(c) Bestimmung der stationären Verteilung durch Auflösen des LGS:

$$(\pi_A, \pi_B, \pi_C) \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \end{pmatrix} = (\pi_A, \pi_B, \pi_C)$$

Lösung: $(\pi_A, \pi_B, \pi_C) = (\frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{3}{8})$

Aufgabe 5. Verkaufsabschlüsse (7 Punkte)

Ein Verkäufer war bei 900 Gesprächen 108 mal erfolgreich. Kann er aufgrund dieses Ergebnisses die Nullhypothese „Höchstens 10% meiner Gespräche führen zu einem Erfolg" auf dem 2, 5% Signifikanzniveau verwerfen? Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe eines geeigneten statistischen Tests. Sie können dabei annehmen, dass der Grenzwertsatz von DeMoivre eine brauchbare Nährerung liefert.
Quantil der Standardnormalverteilung: $z_{0,975} = 1,9600$

Lösungsvorschlag

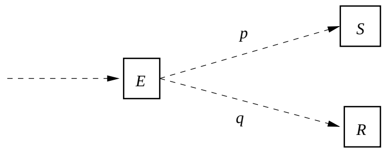
Approximativer Binomialtest.
$n = 900, h = 108, p_0 = 0,1$
$H_0 : p \leq p_0$ und $H_1 : p > p_0$

$$Z = \frac{h - np_0}{\sqrt{np_0(1-p_0)}} = \frac{108 - 90}{\sqrt{900 \cdot 0,1 \cdot 0,9}} = 2 > z_{0,975}$$

Die Hypothese kann auf einen Niveau von 2,5 % verworfen werden.

Aufgabe 6. Spam Verteilung (6 Punkte)

Die Anzahl E der Emails, die man an einem Tag erhält, sei Poisson-verteilt mit Parameter λ. Eine Email ist mit Wahrscheinlichkeit p Spam und mit Wahrscheinlichkeit $q = 1-p$ regulär. Zeigen Sie, dass die Anzahl S der Spam Emails Poisson-verteilt ist mit Parameter $p\lambda$.



Lösungsvorschlag

$$\begin{aligned}
\Pr[S=i] &= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr[S=i \mid E=i+j] \Pr[E=i+j] \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{i+j}{i} p^i q^j \cdot e^{-\lambda} \frac{\lambda^{i+j}}{(i+j)!} \\
&\overset{\lambda=\lambda(p+q)}{=} \frac{(p\lambda)^i}{i!} \cdot e^{-p\lambda} \cdot \underbrace{\sum_{j=0}^{\infty} \frac{(q\lambda)^j}{j!} \cdot e^{-q\lambda}}_{1} \\
&= \frac{(p\lambda)^i}{i!} \cdot e^{-p\lambda}
\end{aligned}$$

$\Rightarrow S \sim \mathrm{Po}(p\lambda)$