LÖSUNG

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 18. Mai bis 10:15 abzugeben und wird am 18./19. Mai besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 3.1 — 2.5P+2.5P

Sie besitzen n Schlüssel und wollen eine Tür öffnen. Hierzu wählen Sie rein zufällig solange Schlüssel aus, bis Sie schließlich den richtigen finden. (Genau einer der n Schlüssel öffnet die Tür.)

Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariable, die die Anzahl der benötigten Versuche zählt, wenn

(a) jeder Schlüssel höchstens einmal verwendet wird (= ohne Zurücklegen).

(b) jeder Schlüssel beliebig oft verwendet werden kann (= mit Zurücklegen).

Hinweis: Sie benötigen die Verteilung der Zufallsvariable nicht. Gehen Sie entsprechend Beispiel 14 auf Folie 122 vor. Unterscheiden Sie, ob der erste Versuch bereits erfolgreich ist oder nicht.

Lösungsvorschlag: Sei X_n die entsprechende Zufallsvariable im Fall von n Schlüsseln. Wir partitionieren die Elementarereignisse nach dem Ausgang des ersten Versuchs: E_n für Erfolg, $\overline{E}_n$ für Misserfolg.

Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X_n] = \mathbb{E}[X_n|E_n] \cdot \Pr[E_n] + \mathbb{E}[X_n|\overline{E}_n] \cdot \Pr\left[\overline{E}_n\right].$$

In beiden Fällen gilt $\Pr[E_n] = 1/n$ und $\Pr\left[\overline{E}_n\right] = 1 - 1/n$. Auch gilt stets $\mathbb{E}[X_n|E_n] = 1$.

Im Fall mit Zurücklegen gilt weiter $\mathbb{E}[X_n|\overline{E}] = \mathbb{E}[X_n + 1]$, da das Experiment wieder von vorne beginnt.

Im Fall ohne Zurücklegen gilt hingegen $\mathbb{E}[X_n|\overline{E}] = \mathbb{E}[X_{n-1} + 1]$; wir starten dasselbe Experiment erneut, allerdings mit einem Schlüssel weniger.

Man erhält also mit Zurücklegen

$$\mathbb{E}[X_n] = 1 \cdot 1/n + \mathbb{E}[X_n + 1] \cdot (1 - 1/n) = 1 + (1 - 1/n) \cdot \mathbb{E}[X_n]$$

bzw. ohne Zurücklegen

$$\mathbb{E}[X_n] = 1 \cdot 1/n + \mathbb{E}[X_{n-1} + 1] \cdot (1 - 1/n) = 1 + (1 - 1/n) \cdot \mathbb{E}[X_{n-1}].$$

Mit Zurücklegen folgt daher direkt $\mathbb{E}[X_n] = n$. Ohne Zurücklegen erhält man mit $\mathbb{E}[X_1] = 1$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_n] &= 1 + \tfrac{n-1}{n} \cdot \mathbb{E}[X_{n-1}] \\
&= 1 + \tfrac{n-1}{n} \cdot (1 + \tfrac{n-2}{n-1} \cdot \mathbb{E}[X_{n-2}]) \\
&= \tfrac{n}{n} + \tfrac{n-1}{n} + \tfrac{n-2}{n} + \tfrac{n-2}{n} \cdot \mathbb{E}[X_{n-2}] \\
&= \ldots \\
&= \tfrac{1}{n} \textstyle\sum_{i=1}^{n} i \\
&= \tfrac{n+1}{2}.
\end{aligned}$$

Zum Vergleich: Rechnung unter Verwendung der Dichte

Seien X_a, X_b die Anzahl der Versuche in (a) bzw. (b).

Dann gilt:

(a)

$$\begin{aligned}
\Pr[X_a = 0] &= 0,\\
\Pr[X_a = 1] &= 1/n,\\
\Pr[X_a = 2] &= (n-1)/n \cdot 1/(n-1) = 1/n,\\
\Pr[X_a = 3] &= (n-1)/n \cdot (n-2)/(n-1) \cdot 1/(n-2) = 1/n,\\
&\vdots\\
\Pr[X_a = n] &= (n-1)/n \cdot (n-2)/(n-1) \cdot \ldots \cdot 2/3 \cdot 1/2 \cdot 1 = 1/n,\\
\Pr[X_a > n] &= 0.
\end{aligned}$$

Es folgt

$$\mathbb{E}[X_a] = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k \cdot \Pr[X_a = k] = \sum_{k=1}^{n} k \cdot 1/n = 1/n \cdot n \cdot (n+1)/2 = (n+1)/2.$$

(b) $\Pr[X_b = k] = (1 - 1/n)^{k-1} \cdot 1/n$ für $k \in \mathbb{N}$ mit $\Pr[X_b = 0] = 0$. Es folgt

$$\mathbb{E}[X_b] = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} k \cdot \Pr[X_b = k] = \sum_{k \geq 1} k \cdot (1 - 1/n)^{k-1} \cdot 1/n = 1/n \cdot \sum_{k \geq 0} (k+1) \cdot (1 - 1/n)^k = 1/n \cdot 1/(1 - (1 - 1/n))^2 = n.$$

Wegen der Auswertung der Reihe siehe A0.2(c).

Aufgabe 3.2 — 1.5P+1P+1P+1.5P

(a) Sie schreiben eine Multiple-Choice-Klausur über reziproke Quandularphysiologie. Eine Aufgabe hat 4 mögliche Antworten, genau eine davon ist richtig. Sie dürfen eine beliebige Teilmenge der 4 möglichen Antworten ankreuzen. Wenn Sie die richtige Antwort angekreuzt haben, bekommen Sie 3 Punkte, aber Sie bekommen für jede falsche Antwort, die Sie angekreuzt haben, einen Punkt abgezogen. Eine negative Punktezahl ist möglich.

Sie wissen nichts über reziproke Quandularphysiologie und können die Antworten nur raten. Berechnen Sie den Erwartungswert der Punktzahl, die Sie erreichen, wenn Sie 0, 1, 2, 3 oder 4 Antworten zufällig ankreuzen.

(b) Wir betrachten eine Verallgemeinerung: Eine Aufgabe hat n mögliche Antworten, genau eine davon ist richtig. Sie dürfen wieder eine beliebige Teilmenge der Antworten ankreuzen. Wenn Sie die richtige Antwort angekreuzt haben, bekommen Sie $n-1$ Punkte, aber Sie bekommen für jede falsche Antwort, die Sie angekreuzt haben, einen Punkt abgezogen.

Betrachten Sie die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$, wobei X_i angibt, wie viele Punkte Sie bei der i-ten Antwortmöglichkeit bekommen. Wenn Sie Antwort i nicht ankreuzen, ist $X_i = 0$. Wenn Sie Antwort i ankreuzen, gilt entweder $X_i = n-1$ oder $X_i = -1$.

(i) Berechnen Sie den Erwartungswert von X_i, wenn Sie Antwort i ankreuzen.

(ii) Was ist der Erwartungswert der Gesamtpunktzahl $X_1 + \cdots + X_n$ und wie hängt er von der Zahl der angekreuzten Antworten ab?

(c) Wir kehren zum Fall $n = 4$ zurück. Der Prüfungsausschuss hat entschieden, dass die Gesamtpunktzahl, die ein Student für eine Aufgabe bekommt, mindestens 0 sein muss. Um das zu erreichen, bekommen Sie nun 0 Punkte, wenn Sie nach den alten Regeln eine negative Punktzahl erreicht hätten. Wenn Sie nach den alten Regeln eine positive Punktzahl erreicht hätten, bekommen Sie diese Punktzahl auch nach den neuen Regeln. Berechnen Sie wiederum den Erwartungswert der Punktzahl, die Sie erreichen, wenn Sie 0, 1, 2, 3 oder 4 Antworten zufällig ankreuzen.

(d) Wir betrachten weiterhin den Fall $n = 4$ und Punktevergabe nach den neuen Regeln. Berechnen sie die Varianz für die Punktzahl für die Fälle, dass Sie 1 und dass sie 3 Antworten ankreuzen.

Lösungsvorschlag:

(a) Sei X die ZV, die die Punktzahl angibt.

- Wenn Sie keine Antwort ankreuzen, ist $X = 0$, folglich $\mathbb{E}X = 0$.
- Wenn Sie eine Antwort ankreuzen, ist sie mit W'keit $\frac{1}{4}$ richtig und Sie bekommen 3 Punkte, und mit W'keit $\frac{3}{4}$ ist sie falsch und Sie bekommen -1 Punkt, folglich $\mathbb{E}X = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot (-1) = 0$.
- Wenn Sie zwei Antworten ankreuzen, ist mit W'keit $\frac{1}{2}$ die richtige Antwort dabei und Sie bekommen $3 + (-1) = 2$ Punkte, mit W'keit $\frac{1}{2}$ sind beide Antworten falsch und sie bekommen $(-1) + (-1) = -2$ Punkte, folglich $\mathbb{E}X = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot (-2) = 0$.
- Wenn Sie drei oder vier Antworten ankreuzen, ist aus ähnlichen Gründen ebenfalls $\mathbb{E}X = 0$.

(b) Wenn Antwort i angekreuzt wird, gilt $\mathbb{E}X_i = \frac{1}{n} \cdot (n-1) + \frac{n-1}{n} \cdot (-1) = 0$. Wenn Antwort i nicht angekreuzt wird, gilt ebenfalls $\mathbb{E}X_i = 0$. Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt daher in jedem Fall $\mathbb{E}[X_1 + \cdots + X_n] = \mathbb{E}X_1 + \cdots + \mathbb{E}X_n = 0 + \cdots + 0 = 0$. Dieser Erwartungswert hängt nicht von der Zahl der angekreuzten Antworten ab.

(c) Sie Y die Punktzahl nach den neuen Regeln.

- Wenn Sie 0 oder 4 Antworten ankreuzen, ist offenbar $Y = 0$.
- Wenn Sie eine Antwort ankreuzen, ist sie mit W'keit $\frac{1}{4}$ richtig und Sie bekommen 3 Punkte, und mit W'keit $\frac{3}{4}$ ist sie falsch und Sie bekommen 0 Punkte, folglich $\mathbb{E}X = \frac{1}{4} \cdot 3 + \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}$.
- Wenn Sie zwei Antworten ankreuzen, ist mit W'keit $\frac{1}{2}$ die richtige Antwort dabei und Sie bekommen $3+(-1) = 2$ Punkte, mit W'keit $\frac{1}{2}$ sind beide Antworten falsch und sie bekommen 0 Punkte, folglich $\mathbb{E}X = \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 0 = 1$.
- Wenn Sie drei Antworten ankreuzen, ist mit W'keit $\frac{3}{4}$ die richtige Antwort dabei und Sie bekommen $3 + (-1) + (-1) = 1$ Punkt, mit W'keit $\frac{1}{4}$ sind die drei Antworten falsch und sie bekommen 0 Punkte, folglich $\mathbb{E}X = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}$.

(d) Es gilt nach Vorlesung $\mathrm{Var}[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}Y)^2$.
Falls 1 Antwort angekreuzt wird, gilt $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{1}{4} \cdot 9 + \frac{3}{4} \cdot 0 = \frac{9}{4}$, folglich $\mathrm{Var}[Y] = \frac{9}{4} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{27}{16} = 1.6875$.
Falls 3 Antworten angekreuzt werden, gilt $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{3}{4} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 0 = \frac{3}{4}$, folglich $\mathrm{Var}[Y] = \frac{3}{4} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{16} = 0.1875$.
Intuitiv: Egal, ob man 1 und 3 Antworten ankreuzt, man bekommt denselben Erwartungswert. Die Varianz bei 3 Antworten, ist aber kleiner, das ist also weniger riskant.

Aufgabe 3.3 **1.5P+1.5P+2P**

(a) Zeigen Sie:

$$\left|\{(s_1, \ldots, s_j) \in \{1, \ldots, n\}^j \mid s_1 + \cdots + s_j \leq n\}\right| = \binom{n}{j}$$

Hinweis: Auch wenn Sie das nicht bewiesen haben, können Sie obige Gleichung für die folgende Teilaufgabe benutzen.

(b) Sie führen folgendes mehrstufiges Experiment durch: In jedem Schritt wählen Sie zufällig und gleichverteilt eine Zahl zwischen 1 und n aus, d.h., in jedem Schritt und für alle i mit $1 \leq i \leq n$ ist die W'keit, dass Sie die Zahl i ziehen, gleich $\frac{1}{n}$. Das Experiment endet, nachdem die Summe der gezogenen Zahlen das erste Mal größer als n ist. Die Zufallsvariable X gibt an, nach wie viel Schritten das Experiment endet. Zeigen Sie:

$$\Pr[X \geq j+1] = \frac{\binom{n}{j}}{n^j} \qquad \text{für alle } j = 0, 1, \ldots$$

(c) Laut Vorlesung gilt: $\mathbb{E}[X] = \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j]$. Folgern Sie:

$$\mathbb{E}[X] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$$

Hinweis: Multiplizieren Sie $(1 + \frac{1}{n})^n$ aus!

Lösungsvorschlag:

(a) Man stelle sich n Punkte in einer Reihe vor. Es werden j Trennstriche in die Zwischenräume gesetzt, in jeden Zwischenraum höchstens einen Trennstrich. (Hinter den letzten Punkt darf auch einer der j Trennstriche gesetzt werden.) Dafür gibt es $\binom{n}{j}$ Möglichkeiten. Weiterhin gibt es eine 1-zu-1-Abbildung zwischen der Menge

$$M := \{(s_1, \ldots, s_j) \in \{1, \ldots, n\}^j \mid s_1 + \cdots + s_j \leq n\}$$

und den beschriebenen Trennstrich-Bildern: Diese Abbildung weist dem Tupel $(s_1, \ldots, s_j)$ dasjenige Trennstrich-Bild zu, in dem s_1 die Zahl der Punkte vor dem ersten Trennstrich ist und in dem für alle i mit $2 \leq i \leq j$ gilt, dass s_i Punkte zwischen dem $(i-1)$-ten und dem i-ten Trennstrich liegen. Folglich hat M ebenfalls $\binom{n}{j}$ Elemente.

(b) Betrachte ein erweitertes Experiment, in dem auf jeden Fall genau j Schritte durchgeführt werden (also j Zahlen gezogen werden), egal ob die Summe schon größer n war oder nicht. Für das ursprüngliche Experiment gilt $X \geq j+1$ genau dann, wenn im erweiterten Experiment die Summe der Zahlen höchstens n ist. Daher ist $\Pr[X \geq j+1]$ gleich der W'keit, dass nach genau j Ziehungen die Summe höchstens n ist. Jede Folge von j Ziehungen entspricht einem Tupel aus M und jede Ziehung ist gleich wahrscheinlich, daher gilt:

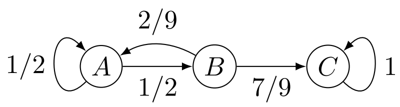
$$\Pr[X \geq j+1] \quad = \quad \frac{|M|}{n^j} \quad \stackrel{\text{mit (a)}}{=} \quad \frac{\binom{n}{j}}{n^j}$$

(c) Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{j=1}^{\infty} \Pr[X \geq j] && \text{(laut Angabe)}\\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \Pr[X \geq j+1] && \text{(Indexverschiebung)}\\
&= \sum_{j=0}^{n} \Pr[X \geq j+1] && (\text{denn } \Pr[X \geq n+2] = 0)\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{j} && \text{(mit (b))}\\
&= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^{j} \cdot 1^{n-j} &&\\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n} && \text{((rückwärts) ausmultiplizieren)}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.4 **2P+1.5P+1.5P**

In Aufgabe 2.4 hatten Sie folgendes Markov-Diagramm genauer betrachtet:



Die Ereignismenge Ω war dabei als die Menge der endlichen Pfade beginnend in A und endend in C, die C genau einmal besuchen, definiert worden, d.h., $\Omega := \Pi_A^C$.

In dieser Aufgabe soll bestimmt werden, wie viele Schritte Sie im Erwartungswert benötigen, um von A schließlich nach C zu kommen. Hierfür sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ die Zufallsvariable, die angibt, nach wie vielen Schritten C erreicht wird, d.h., für $\omega \in \Omega$ ist $X(\omega)$ die Länge des Pfades ω.

(a) In Aufgabe 2.4 hatten Sie gezeigt, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$

$$\Pr[A_{k+2}] = 1/2 \cdot \Pr[A_{k+1}] + 1/9 \cdot \Pr[A_k]$$

gilt, wobei A_k das Ereignis war, dass Sie sich nach k Schritten im Zustand A befinden.

Zeigen Sie unter der Verwendung der Rekursionsformel für $\Pr[A_k]$, dass auch

$$\Pr[X = k+4] = 1/2 \cdot \Pr[X = k+3] + 1/9 \cdot \Pr[X = k+2] \ \text{ für alle } k \in \mathbb{N}_0$$

gilt und folgern Sie, dass

$$\mathbb{E}[X] = 2 \cdot \Pr[X = 2] + 3 \cdot \Pr[X = 3] + \frac{1}{2} \cdot (\mathbb{E}[X+1] - 3 \cdot \Pr[X = 2]) + \frac{1}{9} \cdot \mathbb{E}[X+2]$$

gilt, indem Sie die Rekursionsformel in die Definition von $\mathbb{E}[X]$ einsetzen.

Bestimmen Sie hiermit dann $\mathbb{E}[X]$.

(b) Überprüfen Sie Ihr Ergebnis, indem Sie alternativ $\mathbb{E}[X]$ mittels dem Ansatz aus Beispiel 15 auf Folie 126 berechnen. Das heißt, partitionieren Sie die Pfade geeignet bezüglich ihres Präfixes.

(c) Berechnen Sie mit dem Ansatz aus (b) auch die Varianz von X.

Lösungsvorschlag:

(a) i) Es gilt $\Pr[X = k+2] = 1/2 \cdot 7/9 \cdot \Pr[A_k]$, da es genau einen Weg der Länge 2 gibt, der nach C führt ohne C davor schon zu besuchen; dieser Weg startet in A.

Damit folgt aus der Rekursion für A_k für all $k \in \mathbb{N}_0$:

$$
\begin{aligned}
\Pr[X = k+4] &= 7/18 \cdot \Pr[A_{k+2}]\\
&= 7/18 \cdot (1/2 \cdot \Pr[A_{k+1}] + 1/9 \cdot \Pr[A_k])\\
&= 1/2 \cdot 7/18 \cdot \Pr[A_{k+1}] + 1/9 \cdot 7/18 \cdot \Pr[A_k]\\
&= 1/2 \cdot \Pr[X = k+3] + 1/9 \cdot \Pr[X = k+2]\,.
\end{aligned}
$$

ii) Man rechnet zunächst nach, dass $\Pr[X=0] = \Pr[X=1] = 0$, $\Pr[X=2] = 1/2 \cdot 7/9 = 7/18$ und $\Pr[X=3] = 1/2 \cdot 1/2 \cdot 7/9 = 7/36$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \textstyle\sum_{k\geq 0} k \cdot \Pr[X=k] \\
&= 2 \cdot \Pr[X=2] + 3 \cdot \Pr[X=3] + \textstyle\sum_{k\geq 4} k \cdot \Pr[X=k] \\
&= 2 \cdot \Pr[X=2] + 3 \cdot \Pr[X=3] + \textstyle\sum_{k\geq 0} (k+4) \cdot \Pr[X=k+4] \\
&= 2 \cdot \Pr[X=2] + 3 \cdot \Pr[X=3] + \textstyle\sum_{k\geq 0} (k+4) \cdot (1/2 \cdot \Pr[X=k+3] + 1/9 \cdot \Pr[X=k+2]) \\
&= 2 \cdot \Pr[X=2] + 3 \cdot \Pr[X=3] + 1/2 \cdot \textstyle\sum_{k\geq 3} (k+1) \cdot \Pr[X=k] + 1/9 \cdot \textstyle\sum_{k\geq 0} (k+2) \cdot \Pr[X=k] \\
&= 2 \cdot \Pr[X=2] + 3 \cdot \Pr[X=3] + 1/2 \cdot (\mathbb{E}[X+1] - 3 \cdot \Pr[X=2]) + 1/9 \cdot \mathbb{E}[X+2]
\end{aligned}$$

Durch Einsetzen der W'keiten erhält man:

$$\mathbb{E}[X] = 3/2 + 11/18 \cdot \mathbb{E}[X] \text{ bzw. } \mathbb{E}[X] = 18/7 \cdot 3/2 = 27/7.$$

(b) Wir partitioniern die Pfade entsprechend Ihrem Präfix. Ein Wort $w \in \{A, B, C\}^*$ wird hierfür mit dem Ereignis identifiziert, dass ein Pfad aus Π_A^C mit dem Präfix w beginnt. Z.B. gilt $\Pr[A] = 1$, da jeder Pfad mit A beginnt; es gilt $\Pr[AB] = 1/2$ und $\Pr[AC] = 0$.

Insbesondere gilt:

- Die Ereignisse AA, ABA, ABC bilden eine Partition von Π_A^C.
- $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X|A]$, da wir stets in A beginnen.
- $\mathbb{E}[X|AA] = \mathbb{E}[X+1|A] = 1 + \mathbb{E}[X|A]$, da wir einen Schritt machen, der uns in den Startzustand zurückführt, womit das Experiment quasi neugestartet wird.
- $\mathbb{E}[X|ABA] = \mathbb{E}[X+2|A] = 2 + \mathbb{E}[X|A]$ entsprechend zu $\mathbb{E}[X|AA]$.
- $\mathbb{E}[X|ABC] = 2$, da das Experiment endet, sobald C das erste Mal besucht wird.

Es folgt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X|AA] \cdot \Pr[AA] + \mathbb{E}[X|ABA] \cdot \Pr[ABA] + \mathbb{E}[X|ABC] \cdot \Pr[ABC] \\
&= (1 + \mathbb{E}[X]) \cdot 1/2 + (2 + \mathbb{E}[A]) \cdot 1/9 + 2 \cdot 7/18 \\
&= 11/18 \cdot \mathbb{E}[X] + 3/2.
\end{aligned}$$

Für die Varianz $\mathrm{Var}[X]$ gilt nach Vorlesung

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Es muss somit nur noch $\mathbb{E}[X^2]$ bestimmt werden. Man kann wieder die Pfade mittels ihres Präfix partitionieren, allerdings muss man beachten, dass nun z.B.

$$\mathbb{E}[X^2|AA] = \mathbb{E}[(X+1)^2|A] = \mathbb{E}[X^2 + 2X + 1|A] = \mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X] + 1$$

gilt!

Damit erhält man:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X^2|AA] \cdot \Pr[AA] + \mathbb{E}[X^2|ABA] \cdot \Pr[ABA] + \mathbb{E}[X^2|ABC] \cdot \Pr[ABC] \\
&= \mathbb{E}[(X+1)^2] \cdot \Pr[AA] + \mathbb{E}[(X+2)^2] \cdot \Pr[ABA] + \mathbb{E}[4] \cdot \Pr[ABC] \\
&= (\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[X] + 1) \cdot 1/2 + (\mathbb{E}[X^2] + 4 \cdot \mathbb{E}[X] + 4) \cdot 1/9 + 4 \cdot 7/18 \\
&= 11/18 \cdot \mathbb{E}[X^2] + (1 + 4/9) \cdot \mathbb{E}[X] + 1/2 + 4/9 + 14/9 \\
&= 11/18 \cdot \mathbb{E}[X^2] + 13/9 \cdot 27/7 + 2.5 \\
&= 11/18 \cdot \mathbb{E}[X^2] + 113/14,
\end{aligned}$$

also $\mathbb{E}[X^2] = 113/14 \cdot 18/7 = 1017/49$.

Es folgt $\mathrm{Var}[X] = (1017 - 729)/49 = 288/49$.