Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Sommersemester 2009
Übungsblatt 2

LÖSUNG

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 11. Mai bis 10:15 abzugeben und wird am 11./12. Mai besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 2.1 **2.5P+2.5P**

(a) Spieler A würfelt mit drei 6-seitigen Würfeln. Er zeigt Spieler B das Ergebnis nicht, sagt ihm aber, dass alle drei Würfel paarweise verschiedene Ergebnisse zeigen.

Wie hoch ist die W'keit, dass einer der Würfel eine 6 zeigt?

(b) Spieler A würfelt mit zehn 6-seitigen Würfeln und sagt dieses Mal Spieler B nur, dass er mindestens eine 6 gewürfelt hat.

Wie hoch ist die W'keit, dass er mindestens zwei 6en gewürfelt hat?

Hinweis: Alle Würfel sind fair, d.h., bei jedem Wurf wird jede mögliche Augenzahl mit derselben W'keit angezeigt.

Lösungsvorschlag:

(a) E sei das Ereignis, dass alle drei Würfel paarweise verschiedene Augenzahlen zeigen. Es gilt $|E| = 6 \cdot 5 \cdot 4$ und daher $\Pr[E] = \frac{6\cdot5\cdot4}{6^3} = \frac{10}{18}$.

Es sei F das Ereignis, dass mindestens eine 6 gezeigt wird. Dann ist die W'keit

$$\Pr[F \mid E] = \frac{\Pr[F \cap E]}{\Pr[E]}$$

gesucht. Für $F \cap E$ überlegt man sich, dass man 3 Möglichkeiten hat, um festzulegen, welcher der drei Würfel die 6 zeigt. Für die verbleibenden zwei Würfel gibt es dann noch $5 \cdot 4$ Möglichkeiten. Man erhält:

$$\Pr[F \mid E] = \frac{3 \cdot 5 \cdot 4}{6 \cdot 5 \cdot 4} = 1/2.$$

(b) Es sei E das Ereignis, dass von zehn Würfeln mindestens einer eine 6 zeigt. Sei $\overline{E}$ das Komplementereignis, d.h. , dass keine 6 fällt. Dann gilt $\Pr\left[\overline{E}\right] = (5/6)^{10}$ und $\Pr[E] = 1 - (5/6)^{10}$.

F sei das Ereignis, dass höchstens einer der Würfel eine 6 zeigt.

Gesucht ist dann

$$\Pr\left[\overline{F} \mid E\right] = \frac{\Pr\left[E \cap \overline{F}\right]}{\Pr[E]} = \Pr[E \setminus F \mid E] = 1 - \Pr[F \mid E]\,.$$

$F \cap E$ ist nun das Ereignis, dass genau einer der Würfel eine 6 zeigt, also $|F \cap E| = \binom{10}{1} \cdot (5/6)^9 \cdot 1/6 = 2 \cdot (5/6)^{10}$.

Man erhält:

$$1 - \Pr[F \mid E] = 1 - \frac{\Pr[F \cap E]}{\Pr[E]} = 1 - \frac{2 \cdot (5/6)^{10}}{1 - (5/6)^{10}} = \frac{1 - 3 \cdot (5/6)^{10}}{1 - (5/6)^{10}}$$

Aufgabe 2.2 **1.5P+1.5P+2P**

Sie haben zwei 6-seitige Würfel, mit A bzw. B bezeichnet. Würfel A hat 4 rote und 2 blaue Seiten. Würfel B hat 2 rote und 4 blaue Seiten.

Sie führen folgendes Experiment durch:

Zunächst werfen Sie eine Münze. Zeigt diese Kopf, so wählen Sie Würfel A, ansonsten wählen Sie Würfel B. Mit dem gewählten Würfel führen Sie dann n Würfe durch.

Nehmen Sie an, dass sowohl die Münze als auch die beiden Würfel fair sind.

(a) Zeigen Sie, dass Sie mit W'keit 1/2 im i-ten ($i \leq n$) Wurf des Experiments rot als Ergebnis erhalten.

(b) Nehmen Sie an, Sie hätten bereits zweimal gewürfelt und jeweils rot erhalten.

Wie hoch ist die W'keit, auch im dritten Durchlauf rot zu erhalten?

(c) Sie haben n-mal gewürfelt und immer rot erhalten.

Wie hoch ist die W'keit, dass Sie Würfel A verwenden?

Hinweis: Der Satz von Bayes könnte hilfreich sein.

Lösungsvorschlag: Mit A (B) bezeichnen wir das Ereignis, dass Würfel A (B) gewählt wurde, d.h., dass die Münze zu Beginn Kopf (Zahl) gezeigt hat.

Dann gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = 1/2$.

Wir bezeichnen weiterhin mit R_i (B_i) das Ereignis, dass sich im i-ten Wurf rot (blau) ergibt.

(a) Wir nehmen an, dass Würfel A gewählt wurde. Dieser zeigt bei jedem Wurf mit W'keit 2/3 rot, insbesondere auch in einem i-ten Wurf, d.h.

$$\Pr[R_i \mid A] = 2/3.$$

Wurde hingegen Würfel B gewählt, so ergibt sich in einem i-ten Wurf mit W'keit 1/3 rot. Also:

$$\Pr[R_i \mid B] = 1/3.$$

Insgesamt:

$$\Pr[R_i] = \Pr[R_i \mid A] \cdot \Pr[A] + \Pr[R_i \mid B] \cdot \Pr[B] = 2/3 \cdot 1/2 + 1/3 \cdot 1/2 = 1/2.$$

(b) Wir suchen die W'keit $\Pr[R_3 \mid R_1 \cap R_2]$. Nach Definition ist dies:

$$\Pr[R_3 \mid R_1 \cap R_2] = \frac{\Pr[R_3 \cap R_2 \cap R_1]}{\Pr[R_1 \cap R_2]}.$$

Wir betrachten zunächst den Zähler und spalten diesen Mittels Bedingung an den gewählten Würfel auf:

$$\begin{aligned}\Pr[R_3 \cap R_2 \cap R_1] &= \Pr[R_3 \cap R_2 \cap R_1 \mid A] \cdot \Pr[A] + \Pr[R_3 \cap R_2 \cap R_1 \mid B] \cdot \Pr[B] \\ &= (2/3)^3 \cdot 1/2 + (1/3)^3 \cdot 1/2 = 1/3 \cdot 1/2 = 1/6.\end{aligned}$$

Ganz analog erhält man $\Pr[R_1 \cap R_2] = ((2/3)^2 + (1/3)^2) \cdot 1/2 = 5/18$, womit $\Pr[R_3 \mid R_1, R_2] = \frac{1/6}{5/18} = 3/5$ folgt.

Allgemein:

Je mehr "rot" man nacheinander würfelt, umso höher solte die W'keit sein, dass man Würfel A verwendet, womit die W'keit, auch im nächsten Wurf "rot" zu erhalten, gegen die W'keit, dass man mit Würfel A "rot" würfelt, streben sollte, was man leicht nachrechnet:

$$\Pr\left[R_n \mid \bigcap_{i=1}^{n-1} R_i\right] = \frac{(2/3)^n + (1/3)^n}{(2/3)^{n-1} + (1/3)^{n-1}} = \frac{2/3 + 1/3 \cdot 2^{-n+1}}{1 + 2^{-n+1}} \xrightarrow{n \to \infty} 2/3.$$

(c) Jetzt ist die W'keit $\Pr[A \mid \bigcap_{i=1}^{n} R_i]$ gesucht.

$$\Pr\left[A \mid \bigcap_{i=1}^{n} R_i\right] = \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} R_i \mid A\right] \cdot \frac{\Pr[A]}{\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} R_i]}.$$

Offensichtlich gilt $\Pr[\bigcap_{i=1}^n R_i \mid A] = (2/3)^n$ und $\Pr[A] = 1/2$. Für $\Pr[\bigcap_{i=1}^n R_i]$ spaltet man wieder mittels der Bedingung auf den gewählten Würfel auf:

$$\begin{aligned}\Pr[\textstyle\bigcap_{i=1}^n R_i] &= \Pr[\textstyle\bigcap_{i=1}^n R_i \mid A] \cdot \Pr[A] + \Pr[\textstyle\bigcap_{i=1}^n R_i \mid B] \cdot \Pr[B] \\ &= (2/3)^n \cdot 1/2 + (1/3)^n \cdot 1/2 \\ &= (2^n + 1)/3^n \cdot 1/2.\end{aligned}$$

Es folgt:

$$\Pr\left[A \mid \bigcap_{i=1}^n R_i\right] = (2/3)^n \cdot \frac{1/2}{(2^n+1)/3^n \cdot 1/2} = \frac{2^n}{2^n+1}.$$

Aufgabe 2.3 **1P+1P+2P+1P**

Wir betrachten folgendes Experiment:

- 1. Schritt: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis das erste Mal Kopf angezeigt wird.

  Es sei k die Anzahl der ingesamt ausgeführten Münzwürfe.
- 2. Schritt: Es wird ein fairer sechsseitiger Würfel k-mal geworfen.

(a) Geben Sie einen geeigneten diskreten W'keitsraum an, d.h., repräsentieren Sie die Expreminentverläufe geeignet als Elementarereignisse und ordnen Sie diesen dann die Elementarw'keiten zu.

Zeigen Sie dann, dass es sich tatsächlich um einen diskreten W'keitsraum handelt.

(b) Es sei M_k das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt genau k-mal geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[M_k]$.

(c) Es sei A das Ereignis, dass genau eine 6 gewürfelt wird. Bestimmen Sie $\Pr[A \mid M_k]$ und damit $\Pr[A]$.

(d) Bestimmen Sie $\Pr[M_k \mid A]$.

Lösungsvorschlag:

- $\Omega = \{(w_1, \ldots, w_k) \mid k \geq 1,\ w_j \in [6]\} = [6]^+$ mit $\Pr[(w_1, \ldots, w_k)] = 2^{-k}6^{-k}$. Dann gilt:

$$\Pr[\Omega] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{6^k} 2^{-k}6^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{1/2}{1-1/2} = 1.$$

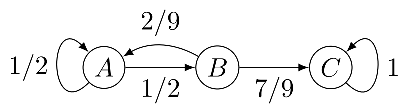
- $\Pr[M_k] = 2^{-k}$.
- Bsp.: $\Pr[A \mid M_2] = \frac{\Pr[A \cap M_2]}{\Pr[M_2]} = \Pr[\{(m_1, m_2, 6, w_2), (m_1, m_2, w_1, 6) \mid w_1, w_2 \in [5]\}]\, 2^2 = (2 \cdot 12^{-2} \cdot 5) \cdot 2^2 = 10/36$.

  Allgemein: $\Pr[A \mid M_k] = \binom{k}{1} \cdot 1/6 \cdot (5/6)^{k-1} = k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k}$.

  $\Pr[A] = \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[A \mid M_k] \cdot \Pr[M_k] = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{k}{1} \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k} \cdot 2^{-k} = 1/5 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot (5/12)^k = 1/5 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot (5/12)^{k+1} = 1/12 \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(5/12)^k = 1/12 \frac{1}{(1-5/12)^2} = 12/49$.
- $\Pr[M_k \mid A] = \Pr[A \mid M_k] \cdot \frac{\Pr[M_k]}{\Pr[A]} = k/5 \cdot (5/6)^k \cdot 2^{-k} \cdot 49/12 = k \cdot (49/60) \cdot (5/12)^k$.

Aufgabe 2.4 **1.5P+1.5P+1P+1P**

Betrachten Sie folgendes Markov-Diagramm:



Als Ereignismenge Ω wählen wir die endlichen Pfade beginnend in A und endend in C, die C genau einmal besuchen. In der Vorlesung wurde diese Menge mit Π_A^C bezeichnet, d.h. $\Omega := \Pi_A^C$.

Wir stellen uns nun vor, dass wir zum Zeitpunkt $t = 0$ uns im Zustand A befinden. In jedem Zeitschritt $t \to t+1$ bewegen wir uns zufällig entlang einer der ausgehenden Kanten des Zustands, in dem wir uns zum Zeitpunkt t befinden. Das Experiment stoppt, sobald wir den Zustand C erreicht haben, d.h., ein Experimentverlauf ist gerade ein Pfad aus Π_A^C.

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass $\Pr\left[\Pi_A^C\right] = 1$ gilt, d.h., das Experiment stoppt mit W'keit 1 schließlich.

Für $X \in \{A, B, C\}$ sei X_t das Ereignis, dass wir uns zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ im Zustand X befinden. Formal:

$$X_t := \{q_0 q_1 q_2 \ldots q_l \in \Pi_A^C \mid l \geq t \wedge q_t = X\}.$$

Es gilt damit z.B. $A_0 = \Pi_A^C$ und daher $\Pr[A_0] = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Pr[A_{t+1}] = 1/2 \cdot \Pr[A_t] + 2/9 \cdot \Pr[B_t]$ gilt für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Pr[A_{k+2}] = 1/2 \cdot \Pr[A_{k+1}] + 1/9 \cdot \Pr[A_k]$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Überprüfen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\Pr[A_t] = 4/5 \cdot (2/3)^t + 1/5 \cdot (-1/6)^t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(d) Bestimmen Sie die W'keit, dass das Experiment spätestens zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ endet.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\Pr[Y_{t+1} \mid X_t] = \delta(X, Y)$ für alle $X, Y \in \{A, B, C\}$ gilt.

Lösungsvorschlag:

(a) Jeder Pfad, der zum Zeitpunkt $t+1$ den Zustand A besucht, muss zum Zeitpunkt t entweder in A oder in B gewesen sein, d.h. man hat $A_{t+1} = (A_{t+1} \cap A_t) \cup (A_{t+1} \cap B_t)$ und damit:

$$\Pr[A_{t+1}] = \Pr[A_{t+1} \cap A_t] + \Pr[A_{t+1} \cap B_t]\,.$$

Mit $\Pr[A_{t+1} \cap A_t] = \Pr[A_{t+1} \mid A_t] \cdot \Pr[A_t]$ und $\Pr[A_{t+1} \cap B_t] = \Pr[A_{t+1} \mid B_t] \cdot \Pr[B_t]$ folgt:

$$\Pr[A_{t+1}] = \Pr[A_{t+1} \mid A_t] \cdot \Pr[A_t] + \Pr[A_{t+1} \mid B_t] \cdot \Pr[B_t]\,.$$

Mit dem gegebenen Hinweis gilt nun noch $\Pr[A_{t+1} \mid A_t] = 1/2$ und $\Pr[A_{t+1} \mid B_t] = 2/9$, also

$$\Pr[A_{t+1}] = 1/2 \cdot \Pr[A_t] + 2/9 \cdot \Pr[B_t]\,.$$

(b) Da jeder Pfad, der sich zum Zeitpunkt $t+1$ in B befindet, zum Zeitpunkt t in A gewesen sein muss, folgt $\Pr[B_{t+1}] = \Pr[B_{t+1} \mid A_t] \cdot \Pr[A_t] = 1/2 \cdot \Pr[A_t]$.

Mit (a) folgt somit:

$$\Pr[A_{t+2}] = 1/2 \cdot \Pr[A_{t+1}] + 2/9 \cdot 1/2 \cdot \Pr[A_t]\,.$$

(c) Es gilt $\Pr[A_0] = 1$ und $\Pr[A_1] = 1/2$. Für $t \geq 2$ kann $\Pr[A_t]$ mittels der Rekursionsformel aus (b) berechnet werden. Wir zeigen hiermit, dass $\Pr[A_t] = 4/5 \cdot (2/3)^t + 1/5 \cdot (-1/6)^t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt.

$(t = 0)$

Linke Seite: $\Pr[A_0] = 1$.

Rechte Seite: $4/5 + 1/5 = 1$.

$(t = 1)$

Linke Seite: $\Pr[A_1] = 1/2$.

Rechte Seite: $4/5 \cdot 2/3 - 1/5 \cdot 1/6 = (16-1)/30 = 1/2$.

$(t \geq 2)$:

Linke Seite: $\Pr[A_t] = 1/2 \cdot \Pr[A_{t-1}] + 1/9 \cdot \Pr[A_{t-2}]$.

Nach Induktion gilt: $\Pr[A_k] = 4/5 \cdot (2/3)^k + 1/5 \cdot (-1/6)^k$ für $k < t$.

Einsetzen:

$$\begin{aligned}
\Pr[A_t] &= 1/2 \cdot (4/5 \cdot (2/3)^{t-1} + 1/5 \cdot (-1/6)^{t-1}) + 1/9 \cdot (4/5 \cdot (2/3)^{t-2} + 1/5 \cdot (-1/6)^{t-2}) \\
&= 4/5 \cdot (2/3)^{t-2}(1/2 \cdot 2/3 + 1/9) + 1/5 \cdot (-1/6)^{t-2}(-1/2 \cdot 1/6 + 1/9) \\
&= 4/5 \cdot (2/3)^{t-2} \cdot 4/9 + 1/5 \cdot (-1/6)^{t-2} \cdot 1/36 \\
&= 4/5 \cdot (2/3)^t + 1/5 \cdot (-1/6)^t \\
&= \text{ rechte Seite}\,.
\end{aligned}$$

(d) Es gilt $\Pr[C_{t+2}] = 7/9 \cdot \Pr[B_{t+1}] = 7/9 \cdot 1/2 \cdot \Pr[A_t]$ also

$$\Pr[C_{t+2}] = 14/45 \cdot (2/3)^t + 7/90 \cdot (-1/6)^t$$

für $t \geq 0$. Für $t < 2$ gilt $\Pr[C_t] = 0$.

Die W'keit, dass das Experiment zum Zeitpunkt $t \geq 2$ endet, ist damit:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{t} \Pr[C_k] &= \sum_{k=2}^{t} \left(14/45 \cdot (2/3)^{k-2} + 7/90 \cdot (-1/6)^{k-2}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{t-2} \left(14/45 \cdot (2/3)^{k} + 7/90 \cdot (-1/6)^{k}\right) \\
&= 14/45 \cdot \tfrac{1-(2/3)^{t-1}}{1-2/3} + 7/90 \cdot \tfrac{1-(-1/6)^{t-1}}{1+1/6} \\
&= 14/15 \cdot (1 - (2/3)^{t-1}) + 1/15 \cdot (1 - (-1/6)^{t-1}) \\
&= 1 - 14/15 \cdot (2/3)^{t-1} - 1/15 \cdot (-1/6)^{t-1}.
\end{aligned}$$