# LÖSUNG

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Endterm

*Beachten Sie:* Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

### Aufgabe 1 **1P+1P+4P**

Sie werfen eine faire Münze $n$-mal ($n \in \mathbb{N}$ fest) und erhalten so ein Wort $x = x_1x_2 \dots x_n$ aus $\{0,1\}^n$.

(a) Bestimmen Sie die W'keit in Abhängigkeit von $n$, dass das erhaltene Wort ein Palindrom ist, d.h. dass $x_1x_2 \dots x_{n-1}x_n = x_nx_{n-1} \dots x_2x_1$ gilt.

(b) Bestimmen Sie in Abhängigkeit von $n$ die W'keit, dass sich innerhalb der Sequenz $x$ eine nicht leere Teilsequenz $y$ wiederholt, d.h., dass es Wörter $u, v, w, y \in \{0,1\}^*$ gibt, so dass $x = uyvyw$ mit $y \neq \varepsilon$.

(c) Es sei $M_n \subseteq \{0,1\}^n$ das Ereignis, dass $x$ weder 000 noch 111 als zusammenhängende Teilsequenz enthält.

*Beispiel*: $M_4 = \{0,1\}^4 \setminus \{0000, 0001, 1000, 1111, 1110, 0111\}$.

Die Fibonacci-Zahlen seien $F_0 = 1$, $F_1 = 1$ und $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ für $n \geq 2$.

Zeigen Sie, dass $\Pr[M_n] = F_n/2^{n-1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

*Hinweis*: Leiten Sie für den Induktionsschritt mit Hilfe des Satzes der totalen W'keit zunächst eine Rekursionsgleichung für $\Pr[M_n]$ für $n \geq 3$ her.

**Lösung:**

(a) Falls $n = 2k$ gerade ist, so können die ersten $k$ Zeichen $x_1 \dots x_k$ frei gewählt werden. Damit ist die W'keit $2^k/2^{2k} = 2^{-k}$.

Falls $n = 2k+1$ ungerade ist, so können die ersten $k+1$ Zeichen $x_1x_2x_3 \dots x_{k+1}$ frei gewählt werden: $2^{k+1}/2^{2k+1} = 2^{-k}$.

(b) Falls $n = 1$, so ist die W'keit gleich 0, da $\Omega = \{0,1\}$.

Für $n = 2$ ist die W'keit $1/2$, da $\Omega = \{00, 01, 10, 11\}$.

Für $n \geq 3$ wiederholt sich stets mindestens ein Zeichen, somit ist die W'keit 1.

(c)
- Induktionsanfang:

  Offensichtlich gilt $\Pr[M_1] = 1$ und $\Pr[M_2] = 1$.

  Nach Definition gilt $F_1 = 1$ und $F_2 = F_0 + F_1 = 1 + 1 = 2$.

  Damit folgt der Induktionsanfang: $F_1/2^0 = 1 = \Pr[M_1]$ und $F_2/2^1 = 1 = \Pr[M_2]$.

- Induktionsschritt:

  Damit $x_1x_2x_3 \dots x_n \in M_n$ gilt, muss entweder

  $$x_1 \neq x_2 \wedge x_2x_3 \dots x_n \in M_{n-1} \text{ oder } x_1 = x_2 \neq x_3 \wedge x_3x_4 \dots x_n \in M_{n-2}$$

  gelten. Wegen der Unabhängigkeit der Münzwürfe folgt:

  $$\begin{aligned}\Pr[M_n] &= \Pr[M_{n-1}] \cdot 1/2 + \Pr[M_{n-2}] \cdot 1/4 \\ &= \frac{F_{n-1}}{2^{n-2}} \cdot 1/2 + \frac{F_{n-2}}{2^{n-3}} \cdot 1/4 \\ &= \frac{F_{n-1} + F_{n-2}}{2^{n-1}} \\ &= \frac{F_n}{2^{n-1}}.\end{aligned}$$

**Aufgabe 2** **3P+2P+3P**

Die ZVen $X, Y, Z$ sind unabhängig mit $X \sim \text{Bin}(6, 7/8)$, $Y \sim \text{Bin}(5, 7/8)$ und $Z \sim \text{Geo}(1/4)$.

Sei weiterhin $M := \max(X + Y, Z)$.

Bestimmen Sie die folgenden Werte auf vier Dezimalstellen genau.

(a) $\Pr[M > 10]$.

(b) $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6]$.

(c) Bestimmen Sie $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ so, dass für $K := \lambda \cdot X + \mu \cdot Z$ sowohl $\mathbb{E}[K] = 0$ als auch $\text{Var}[K] = 1$ gilt.

**Lösung:** Wegen der Unabhängig von $X$ und $Y$ gilt $X + Y \sim \text{Bin}(11, 7/8)$.

(a) $\Pr[M > 10] = 1 - \Pr[M \leq 10] = 1 - \Pr[X + Y \leq 10] \cdot \Pr[Z \leq 10]$ (Unabhängigkeit $X + Y$ und $Z$)

$\Pr[X + Y \leq 10] = 1 - \Pr[X + Y = 11] = 1 - (7/8)^{11} \approx 0.76980887085665017366409301757813$. (siehe oben)

$\Pr[Z \leq 10] = 1 - \Pr[Z > 10] = 1 - (3/4)^{10} \approx 0.94368648529052734375$.

$\Pr[M > 10] \approx 0.27354177231581833229512312755105$.

(b) Damit $X \cdot Y = 6$ muss $X = 6, Y = 1$ oder $X = 2, Y = 3$ oder $X = 3, Y = 2$ gelten. ($Y = 6$ nicht möglich, da $W_Y = \{0, \ldots, 5\}$ – was aber keinen Einfluss auf die Rechnung hat.)

In allen Fällen gilt $X + Y < 8$.

Somit $\Pr[M = 8 \mid X \cdot Y = 6] = \Pr[Z = 8 \mid X \cdot Y = 6] = \Pr[Z = 8] = (1/4)(3/4)^7 = \frac{2187}{65536} \approx 0.0333709716796875$. (Unabhängigkeit von $X \cdot Y$ und $Z$.)

(c)

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda \cdot \mathbb{E}[X] + \mu \cdot \mathbb{E}[Z] && \text{(Linearität von } \mathbb{E}\text{)} \\
&= \lambda \frac{21}{4} + \mu 4 \\
\mu &= -\frac{21}{16}\lambda \\
1 &= \lambda^2 \cdot \text{Var}[X] + \mu^2 \cdot \text{Var}[Z] && \text{(Unabhängigkeit von } X \text{ und } Z\text{, dann Regel für Skalierung)} \\
&= \lambda^2 \frac{21}{32} + \mu^2 12 \\
&= \lambda^2 \left(\frac{21}{32} + \frac{(21)^2 \cdot 3}{64}\right) \\
&= \lambda^2 \frac{21 \cdot 65}{64} \\
\lambda &= \pm \frac{8}{\sqrt{21 \cdot 65}} \approx \pm 0.2165327848 \\
\mu &= -\frac{21}{16}\lambda = - \pm \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{21}{65}} \approx - \pm 0.2841992800
\end{aligned}
$$

**Aufgabe 3** **4P**

Es seien $U, V, W, Y, Z$ unabhängige ZVen mit folgenden Verteilungen:

- $U \sim \exp(1/5)$.
- $V \sim \exp(2/3)$.
- $W$ gleichverteilt auf $[1, 5]$.
- $Y \sim \mathcal{N}(-13, 1)$.
- $Z \sim \mathcal{N}(0, 5)$.

Bestimmen Sie den folgenden Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[(Z + \min(U + W, V + W)) \cdot (Y + Z)].$$

Geben Sie hierbei für jeden Rechenschritt eine stichwortartige Begründung (z.B. Linearität des Erwartungswerts, Unabhängigkeit von $U/W$ von $V^Z$, etc.). Sie können auch Punkte für partiell ausgewertete Ausdrücke erhalten. Berechnen Sie den Erwartungswert daher soweit wie Ihnen möglich.

*Hinweis*: Bei geeignetem Vorgehen müssen Sie keinerlei Dichten oder Verteilungsfunktionen von Hand herleiten. Alle benötigten Erwartungswerte können mit Hilfe des Wissens aus der Vorlesung direkt aus den angegebenen Parameterwerten berechnet werden.

**Lösung:**

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[(Z + \min(U + W, V + W)) \cdot (Y + Z)] && (1)\\
=&\mathbb{E}[(Z + W + \min(U, V)) \cdot (Y + Z)] && (2)\\
=&\mathbb{E}[ZY + Z^2 + (W + \min(U, V)) \cdot (Y + Z)] && (3)\\
=&\mathbb{E}[Z] \cdot \mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z^2] + (\mathbb{E}[W] + \mathbb{E}[\min(U, V)]) \cdot (\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z]) && (4)\\
=&\mathbb{E}[Z] \cdot \mathbb{E}[Y] + \mathrm{Var}[Z] + (\mathbb{E}[W] + \mathbb{E}[\min(U, V)]) \cdot (\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Z]) && (5)\\
=&0 \cdot (-13) + 5 + (3 + 15/13) \cdot (-13 + 0) && (6)\\
=&5 - 39 - 15 && (7)\\
=&-49 && (8)
\end{aligned}$$

Begründungen:

(1) $\to$ (2): $\min(a + b, a + c) = a + \min(b, c)$.

(2) $\to$ (3): partielles Ausmultiplizieren des Integranden

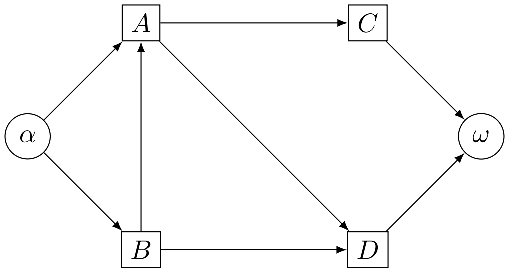
(3) $\to$ (4): Multiplikativität von $\mathbf{E}$ für unabhängige ZV ($Z, Y$ unabhängig; $W + \min(U, V)$ unahbängig von $Y + Z$, da $W, U, V, Y, Z$ unabhängig), dann Linearität des EW.

(4) $\to$ (5): $\mathbb{E}[Z^2] = \mathrm{Var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2$ mit $\mathbb{E}[Z] = 0$.

(5) $\to$ (6): $\min(U, V) \sim \exp(1/5 + 2/3)$; EWs nach bekannten Formeln aus Vorlesung.

**Aufgabe 4** **2P+3P**

Folgendes elektrisches System besteht aus den Komponenten $A, B, C, D$, wobei der Signalweg von $\alpha$ nach $\omega$ führt.




Die Lebenszeit jeder Komponente ist unabhängig von den anderen Komponenten exp(1)-verteilt. So bezeichnet $A \leq t$ das Ereignis, dass die Komponente $A$ zu einem Zeitpunkt $t > 0$ bereits defekt ist.

Das System ist zum Zeitpunkt $t > 0$ funktionstüchtig, solange es einen Pfad von $\alpha$ nach $\omega$ gibt, entlang welchem alle Komponenten noch funktionstüchtig sind.

(a) Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist, unter der Bedingung, dass zu diesem Zeitpunkt $t > 0$ die Komponente $A$ defekt ist.

(b) Bestimmen Sie die W'keit, dass das System zum Zeitpunkt $t > 0$ defekt ist.

*Bemerkung*: Vereinfachen Sie die erhaltenen Ausdrücke soweit wie möglich.

**Lösung:**

(a) Damit kein Weg von $\alpha$ nach $\omega$ existiert, wenn $A$ defekt ist, dürfen nicht sowohl $B$ als auch $D$ noch funktionieren. Somit:

$$\Pr[\text{defekt} \mid A \leq t] = \Pr[\neg(B > t \wedge D > t) \mid A \leq t] = \Pr[\neg(B > t \wedge D > t)] = 1 - \Pr[B > t] \cdot \Pr[D > t] = 1 - e^{-2\lambda t}.$$

Man verwendet, dass (1) $B$ und $D$ unabhängig von $A$ sind, (2) $B$ und $D$ unahbängig sind.

**Alternativ:** $\neg(B > t \wedge D > t) \equiv B \leq t \vee D \leq t \equiv \min(B, D) \leq t$ mit $\min(B, D) \sim \exp(2)$.

(b) Im Fall, dass $A > t$, müssen sowohl $C$ als auch $D$ defekt sein:

$$\Pr[\text{defekt} \mid A > t] = \Pr[C \leq t \wedge D \leq t \mid A > t] = \Pr[C \leq t] \cdot \Pr[D \leq t] = (1 - e^{-\lambda t})^2.$$

Wieder verwendet man, dass (1) $C$ und $D$ unabhängig von $A$ sind und (2) $C$ und $D$ unabhängig sind.

Insgesamt folgt mit dem Satz der totatlen W'keit:

$$\begin{aligned}
\Pr[\text{defekt}] &= \Pr[\text{defekt} \mid A > t] \Pr[A > t] + \Pr[\text{defekt} \mid A \leq t] \Pr[A \leq t] \\
&= (1 - e^{-2\lambda t})(1 - e^{-\lambda t}) + (1 - e^{-\lambda t})^2 e^{-\lambda t} \\
&= 1 - 3e^{-2\lambda t} + 2e^{-3\lambda t}
\end{aligned}$$

**Aufgabe 5** **4P+3P**

Sie werfen einen fairen Würfel, von dessen sechs Seiten je zwei mit $a$ bzw. $b$ bzw. $c$ beschriftet sind, bis Sie das erste Mal die Situation beobachten, dass alle drei Zeichen hintereinander auftreten.

*Beispiel*: Mögliche Experimentabläufe sind $a, b, c$ und $b, c, c, b, c, a$ und $b, a, b, c$.

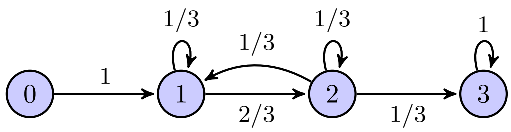
(a) Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe einer Markov-Kette mit genau den Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Der Zustand $i \in S$ sollte dabei bedeuten, dass die Ergebnisse der letzten $i$ Würfe alle verschieden waren.

*Bemerkung*: Der Übergangsgraph ist ausreichend.

(b) Was ist die erwartete Anzahl von Würfen, bis das Experiment endet?

**Lösung:**

(a) Übergangsgraph:




Erklärung (nicht verlangt): Variante des Coupon-Collector-Problems, man stoppt allerdings erst, wenn die letzten drei Würfe paarweise verschieden waren.

Sei $\Sigma = \{a, b, c\}$ und $x, y, z \in \Sigma$.

Zustand 0 ist der Experimentbeginn und entspricht dem partiellen Ablauf $\varepsilon$. Mit W'keit 1 erhält im ersten Wurf ein $x \in \Sigma$ und wechselt in Zustand 1.

Zustand 1 entspricht allen partiellen Experimentverläufen, die nur aus einem Wurf bestehen oder auf $xx$ mit $x \in \{a, b, c\}$ enden. Mit W'keit 1/3 erhält man im nächsten Wurf nochmals $x$, womit man in Zustand 1 bleibt. Mit W'keit 2/3 erhält man ein $y \neq x$, worauf man in Zustand 2 wechselt.

Zustand 2 entspricht allen partiellen Abläufen, die auf $xy$ enden mit $x \neq y$. Mit W'keit erhält man nochmals $y$, womit der Suffix des Ablaufs $xyy$ ist, d.h. man muss in Zustand 1 zurück. Mit W'keit 1/3 erhält man $x$, d.h. der Suffix ist $xyx$, so dass man in Zustand 2 bleibt. Schließlich erhält man mit W'keit 1/3 ein $z \in \Sigma \setminus \{x, y\}$, so dass der Suffix die Form $xyz$ mit $\{x, y, z\} = \Sigma$ hat, d.h. man wechselt in Zustand 3, da das Experiment beendet ist.

Zustand 3 entspricht allen vollständigen Experimentverläufen, die auf $xyz$ mit $\{x, y, z\} = \Sigma$ enden. Mit W'keit 1 bleibt man dann in jedem weiteren Zeitschritt in Zustand 3.

(b)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[T_{0,3}] &= 1 + \mathbb{E}[T_{1,3}] && = 7 \\
\mathbb{E}[T_{1,3}] &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}[T_{1,3}] + \frac{2}{3} \cdot \mathbb{E}[T_{2,3}] && = 6 \\
\mathbb{E}[T_{2,3}] &= 1 + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}[T_{1,3}] + \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}[T_{2,3}] && = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\mathbb{E}[T_{1,3}]
\end{aligned}$$

**Aufgabe 6** **4P+6P**

Es sei $\theta > 0$. Die ZVen $X_1, \ldots, X_n$ seien unabhängig und jeweils exp(1)-verteilt.

Schließlich gelte $Y_i := \theta + X_i$.

(a) Wir betrachten den Schätzer $T_1 := \overline{Y} - 1$, wobei $\overline{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ das Stichprobenmittel der $Y_i$ ist.

- Zeigen Sie, dass $T_1$ als Schätzer für $\theta$ konsistent im quadratischen Mittel ist.
- Bestimmen Sie in Abhängigkeit vom Signifikanzniveau $\alpha$ ein möglichst kleines Konfidenzintervall für $T_1$ als Schätzer für $\theta$ mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes.

(b)
- Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer $T_2$ für $\theta$ in Abhängigkeit von einer Stichprobe $y_1, \ldots, y_n$ der $Y_1, \ldots, Y_n$.

  *Hinweis*: Achten Sie darauf, für welche Werte von $\theta$ die Likelihood-Funktion positive Werte annimmt.
- Entscheiden Sie, ob $T_2$ ein erwartungstreuer Schätzer für $\theta$ ist.
- Entscheiden Sie, ob $T_2$ konsistent im quadratischen Mittel für $\theta$ ist.

**Lösung:**

(a) $\mathbb{E}[T_1] = \mathbb{E}[\overline{Y} - 1] = \mathbb{E}[\theta + \overline{X} - 1] = \theta$, somit ist $T_1$ erwartungstreu. (Nach Vorlesung: $\mathbb{E}[\overline{X}] = \mathbb{E}[X_i] = 1$.)

Da $T_1$ erwartungstreu: $\mathbb{E}[(T_1 - \theta)^2] = \mathrm{Var}[T_1] = \mathrm{Var}[\overline{X}] = 1/n \xrightarrow{n\to\infty} 0$. Somit ist $T_2$ konsistent im quadratischen Mittel für $\theta$. (Nach Vorlesung: $\mathrm{Var}[U + a] = \mathrm{Var}[U]$ und $\mathrm{Var}[\overline{X}] = \frac{1}{n}\mathrm{Var}[X_i] = \frac{1}{n}$.)

$\Pr[|T_1 - \theta| > \delta] \overset{!}{\leq} \alpha$. Mit $\mathbb{E}[T_1] = \theta$ und $\mathrm{Var}[T_1] = \frac{1}{n}$ gilt nach ZGWS approximativ:

$\Pr\left[\frac{|T_1-\theta|}{\sqrt{1/n}} \leq \sqrt{n}\delta\right] \approx 2 - 2\Phi(\sqrt{n}\delta)$

Somit $\Phi(\sqrt{n}\delta) \geq 1 - \alpha/2$, d.h.

$\delta \geq \frac{\Phi^{-1}(1-\alpha/2)}{\sqrt{n}}$.

(b) Dichte von $Y_i$ für $t \geq \theta$:

$\Pr[Y_i \leq t] = \Pr[X_i + \theta \leq t] = \Pr[X_i \leq t - \theta]$, somit $f(t) = e^{-(t-\theta)} I_{[\theta,\infty)}(t)$.

Falls ein $y_i < \theta$ existiert, dann ist $L = 0$. Falls $y_i \geq \theta$ für alle $y_i$, dann ist die (log) L-Funktion:

$$\log L(\vec{y}; \theta) = \log\left(\prod_{i=1}^{n} f(y_i)\right) = \sum_{i=1}^{n}(\theta - y_i) = n\theta - \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Funktion wächst mit $\theta \to \infty$, es muss aber $\theta \leq \min(y_1, \ldots, y_n)$ gelten.

Somit $T_2 = \min(Y_1, \ldots, Y_n)$.

$\mathbb{E}[T_2] = \mathbb{E}[\min(\theta + X_1, \ldots, \theta + X_n)] = \theta + \mathbb{E}[\min(X_1, \ldots, X_n)] = \theta + \frac{1}{n}$, da $\min(X_1, \ldots, X_n) \sim \exp(n)$. Also nicht erwartungstreu.

$$\mathbb{E}[(T_2 - \theta)^2] = \mathbb{E}[(\min(X_1, \ldots, X_n))^2] = \mathrm{Var}[\min(X_1, \ldots, X_n)] + \mathbb{E}[\min(X_1, \ldots, X_n)]^2 = 2n^{-2}.$$

Damit konsistent im quadratischen Mittel.