Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 11. Mai bis 10:15 abzugeben und wird am 11./12. Mai besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 2.1 — 5P

(a) Spieler A würfelt mit drei 6-seitigen Würfeln. Er zeigt Spieler B das Ergebnis nicht, sagt ihm aber, dass alle drei Würfel paarweise verschiedene Ergebnisse zeigen.

Wie hoch ist die W'keit, dass einer der Würfel eine 6 zeigt?

(b) Spieler A würfelt mit zehn 6-seitigen Würfeln und sagt dieses Mal Spieler B nur, dass er mindestens eine 6 gewürfelt hat.

Wie hoch ist die W'keit, dass er mindestens zwei 6en gewürfelt hat?

Hinweis: Alle Würfel sind fair, d.h., bei jedem Wurf wird jede mögliche Augenzahl mit derselben W'keit angezeigt.

Aufgabe 2.2 — 5P

Sie haben zwei 6-seitige Würfel, mit A bzw. B bezeichnet. Würfel A hat 4 rote und 2 blaue Seiten. Würfel B hat 2 rote und 4 blaue Seiten.

Sie führen folgendes Experiment durch:

Zunächst werfen Sie eine Münze. Zeigt diese Kopf, so wählen Sie Würfel A, ansonsten wählen Sie Würfel B. Mit dem gewählten Würfel führen Sie dann n Würfe durch.

Nehmen Sie an, dass sowohl die Münze als auch die beiden Würfel fair sind.

(a) Zeigen Sie, dass Sie mit W'keit 1/2 im i-ten ($i \leq n$) Wurf des Experiments rot als Ergebnis erhalten.

(b) Nehmen Sie an, Sie hätten bereits zweimal gewürfelt und jeweils rot erhalten.

Wie hoch ist die W'keit, auch im dritten Durchlauf rot zu erhalten?

(c) Sie haben n-mal gewürfelt und immer rot erhalten.

Wie hoch ist die W'keit, dass Sie Würfel A verwenden?

Hinweis: Der Satz von Bayes könnte hilfreich sein.

Aufgabe 2.3 — 5P

Wir betrachten folgendes Experiment:

- 1. Schritt: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis das erste Mal Kopf angezeigt wird.

  Es sei k die Anzahl der ingesamt ausgeführten Münzwürfe.

- 2. Schritt: Es wird ein fairer sechsseitiger Würfel k-mal geworfen.

(a) Geben Sie einen geeigneten diskreten W'keitsraum an, d.h., repräsentieren Sie die Expreminentverläufe geeignete als Elementarereignisse und ordnen Sie diesen dann die Elementarw'keiten zu.

Zeigen Sie dann, dass es sich tatsächlich um einen diskreten W'keitsraum handelt.

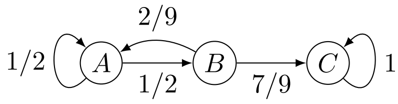
(b) Es sei M_k das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt genau k-mal geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[M_k]$.

(c) Es sei A das Ereignis, dass genau eine 6 gewürfelt wird. Bestimmen Sie $\Pr[A \mid M_k]$ und damit $\Pr[A]$.

(d) Bestimmen Sie $\Pr[M_k \mid A]$.

Aufgabe 2.4 **5P**

Betrachten Sie folgendes Markov-Diagramm:



Als Ereignismenge Ω wählen wir die endlichen Pfade beginnend in A und endend in C, die C genau einmal besuchen. In der Vorlesung wurde diese Menge mit Π_A^C bezeichnet, d.h. $\Omega := \Pi_A^C$.

Wir stellen uns nun vor, dass wir zum Zeitpunkt $t = 0$ uns im Zustand A befinden. In jedem Zeitschritt $t \to t+1$ bewegen wir uns zufällig entlang einer der ausgehenden Kanten des Zustands, in dem wir uns zum Zeitpunkt t befinden. Das Experiment stoppt, sobald wir den Zustand C erreicht haben, d.h., ein Experimentverlauf ist gerade ein Pfad aus Π_A^C.

Aus der Vorlesung wissen Sie, dass $\Pr\left[\Pi_A^C\right] = 1$ gilt, d.h., das Experiment stoppt mit W'keit 1 schließlich.

Für $X \in \{A, B, C\}$ sei X_t das Ereignis, dass wir uns zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ im Zustand X befinden. Formal:

$$X_t := \{q_0 q_1 q_2 \dots q_l \in \Pi_A^C \mid l \geq t \wedge q_t = X\}.$$

Es gilt damit z.B. $A_0 = \Pi_A^C$ und daher $\Pr[A_0] = 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $\Pr[A_{t+1}] = 1/2 \cdot \Pr[A_t] + 2/9 \cdot \Pr[B_t]$ gilt für alle $t \in \mathbb{N}_0$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Pr[A_{k+2}] = 1/2 \cdot \Pr[A_{k+1}] + 1/9 \cdot \Pr[A_k]$ gilt für alle $k \in \mathbb{N}_0$.

(c) Überprüfen Sie mittels vollständiger Induktion, dass $\Pr[A_t] = 4/5 \cdot (2/3)^t + 1/5 \cdot (-1/6)^t$ für alle $t \in \mathbb{N}_0$ gilt.

(d) Bestimmen Sie die W'keit, dass das Experiment spätestens zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ endet.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass $\Pr[Y_{t+1} \mid X_t] = \delta(X, Y)$ für alle $X, Y \in \{A, B, C\}$ gilt.