Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 12
23. Juli 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Hersteller von Nahrungsmittelkonserven gibt die Haltbarkeit eines bestimmtes Produkts mit mindestens 50 Monaten an. Sie kaufen 20 derartige Konserven und messen ihre Haltbarkeit. Die Konserven haben im Schnitt 40 Monate gehalten mit einer Stichprobenstandardabweichung von $S = 30$ Monaten.

1. Zeigen Sie, dass die Angabe des Herstellers nicht abgelehnt werden kann (Signifikanzniveau 0.05).
2. Wie viele Konserven hätten Sie mindestens kaufen müssen, um die Angabe des Herstellers ablehnen zu können?

Lösungsvorschlag

Die Tabellenwerte für den t-Test wurden dem Buch von Schickinger/Steger entnommen.

1. Wir wenden einen t-Test an.

   Seien $\mu_0 = 50$, $\overline{X} = 40$ und $S = 30$. Für die Testgröße T gilt:

   $$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} = -\frac{1}{3}\sqrt{n}\,.$$

   Die Herstellerangabe liefert die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50 = \mu_0$.

   Um H_0 ablehnen zu können, muss $T < t_{n-1,0.05}$ gelten. Für $n = 20$ ergibt sich

   $$-\frac{1}{3}\sqrt{20} = -1.49 \not< -1.73 \overset{\text{Tabelle}}{\approx} t_{19,0.05}\,.$$

   H_0 kann folglich nicht abgelehnt werden.

2. Durch Auspobieren stellt man fest, dass $n = 27$ das kleinste n ist, für das die Hypothese abgelehnt werden kann. Es gilt:

   $$-\frac{1}{3}\sqrt{26} = -1.700 \not< -1.708 \overset{\text{Tabelle}}{\approx} t_{25,0.05}\,,$$

   aber

   $$-\frac{1}{3}\sqrt{27} = -1.732 < -1.706 \overset{\text{Tabelle}}{\approx} t_{26,0.05}\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Ein transienter Zustand einer Markov-Kette wird mit Wahrscheinlichkeit 1 verlassen.
2. Sei $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ die Übergangsmatrix einer Markov-Kette M mit entsprechenden Zuständen 1 und 2. M sei im Zustand 1. Dann ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, dass irgendwann ein Zustandsübergang in den Zustand 2 erfolgt.

Lösungsvorschlag

(Siehe auch die Folien der Zentralübung vom 22.7.10)

1. Wahr! Begründung:

   Für einen Zustand i gibt es die disjunkten Ereignisse
   „Zustand i wird nie verlassen" und
   „Zustand i wird irgendwann verlassen".

   Eines der beiden Ereignisse muss eintreten. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse ist also 1.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand i nie verlassen wird, ist 0, falls $p_{i,i} \neq 1$.

   Da i transient ist, gilt $p_{i,i} \neq 1$. Daraus folgt, dass i mit Wahrscheinlichkeit 0 nie verlassen wird, mithin wird i mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann verlassen.

2. Wahr! Die Behauptung besagt $f_{1,2} = 1$, d. h., dass die Ankunftswahrscheinlichkeit in Zustand 2 bei Start im Zustand 1 gleich 1 ist. Die Gleichung $f_{1,2} = 1$ folgt bereits aus der Strzuktur des Übergangsdiagramms (vgl. Zentralübung).

   Wir berechnen $f_{1,2}$ aus einem Gleichungssystem wie folgt. Wir nehmen als Zustandsmenge $S = \{1, 2\}$ an. Sei $j = 2$. Dann gilt für alle $i \in S$

   $$f_{i,2} = p_{i,2} + \sum_{k \neq 2} p_{i,k} \cdot f_{k,2} \,.$$

   Für $i = 1$ ergibt sich $f_{1,2} = p_{1,2} + p_{1,1} \cdot f_{1,2}$ und daraus $f_{1,2} = 0.5 + 0.5 \cdot f_{1,2}$. Es folgt $f_{1,2} = 1$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Anworten.

1. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die keinen absorbierenden Zustand besitzt.
2. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die nur transiente Zustände besitzt.

Lösungsvorschlag

1. Wahr! Beispiel: irreduzible Markovketten. Wenn eine Markovkette irreduzibel ist, dann besitzt sie keine absorbierenden Zustände.

2. Falsch! Begründung: Wenn alle Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit verlassen werden könnten, ohne zurückzukehren, dann müssten alle Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit gleichzeitig verlassen werden können, ohne zurückzukehren. Das aber ist ein Widerspruch.

   Alternative Begründung: Wenn es zu jedem Zustand i einen Pfad gibt, der nicht mehr durch Verlängerung auf i zurückgeführt werden kann, dann erhält man induktiv einen Widerspruch.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette M über den Zuständen $Q = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Verteilungen von M.

2. Geben Sie die Menge aller transienten Zustände von M an.

3. Geben Sie die Übergangsmatrix einer zeithomogenen Markov-Kette B mit drei Zuständen s_1, s_2, s_3 an, so dass s_1 transient ist, s_2 absorbierend ist und s_3 rekurrent ist.

Lösungsvorschlag

1. Gesucht ist die Menge aller Vektoren $\pi = (c_1, c_2, c_3)$ mit $c_i \geq 0$, so dass gilt

   $$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \qquad \text{und} \qquad \pi = \pi \cdot P\,.$$

   Daraus erhalten wir, dass π stationär ist genau dann, wenn gilt

   $$0 \leq c_1 \leq 1 \qquad \text{und} \qquad c_2 = \frac{1-c_1}{2} \qquad \text{und} \qquad c_3 = \frac{1-c_1}{2}\,.$$

   In Vektordarstellung:

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1\,.$$

   Bemerkung: P ist reduzibel und deshalb nicht ergodisch. Entsprechend gibt es keine Eindeutigkeit der stationären Verteilungen.

2. Aus dem Übergangsgraphen der Markov-Kette liest man ab, dass alle Zustände rekurrent sind, die Menge der transienten Zustände also leer ist.

3. Da absorbierende Zustände auch rekurrent sind, genügt es 2 absorbierende und 1 transienten Zustand zu konstruieren. Eines der möglichen Beispiele ist

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Tutoraufgabe 1

Zwei Zustände A und B einer Markov-Kette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient?

2. Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu sein?

Lösungsvorschlag

1. Die Klassen $\{0, 1\}$ und $\{2, 4\}$ sind rekurrent. Die Klasse $\{3, 5\}$ ist transient.

2. Da die Klasse $\{0, 1\}$ rekurrent ist und wir in ihr anfangen, ist die Wahrscheinlichkeit, nach längerer Zeit im Zustand 0 zu sein, durch die stationäre Verteilung von

   $$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

   gegeben:

   $$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0,5\pi_1 + 0,3\pi_2 = \pi_1 \\ 0,5\pi_1 + 0,7\pi_2 = \pi_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \pi_1 = 3/8 \\ \pi_2 = 5/8 \end{matrix}.$$

   Die 2x2-Matrix ist aperiodisch, weil alle Diagonalelemente positiv sind, und sie ist irreduzibel. Also ist die Matrix ergodisch.
   Folglich ist $\Pr[\text{Zustand 0 nach längerer Zeit}] = \pi_1 = 3/8$.

Tutoraufgabe 2

Die folgende Tabelle gibt die Ziehungshäufigkeiten der Superzahlen wieder:

Superzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	140	134	138	133	160	134	133	137	131	128

Wenden Sie den χ^2-Anpassungstest auf die Nullhypothese, dass nämlich die Ziehungswahrscheinlichkeit für jede Superzahl $\frac{1}{10}$ ist, an (Signifikanzniveau 0.1).

Lösungsvorschlag

Es ergibt sich $n = 1368$. Außerdem gilt $p_i = 0.1$ für $i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Es folgt $T = 5.2$. Um die Nullhypothese abzulehnen, müsste $T > \chi^2_{9,0.9} \approx 14.7$ gelten. Folglich kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.