Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

LÖSUNG

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist nicht abzugeben und wird nicht besprochen.

Eine Tabelle mit den auf diesem Blatt benötigten Quantilen finden Sie z.B. auf der Übungsseite unten verlinkt.

Aufgabe 11.1 — 0P

Ein Chip-Hersteller gibt an, dass seine Chips durchschnittlich mindestens 50 Monate halten. Sie kaufen 20 dieser Chips und messen ihre Lebensdauer. Die Chips haben im Schnitt 40 Monate gehalten mit einer Stichprobenstandardabweichung von $S = 30$ Monaten. (Die Stichprobenstandardabweichung ist die Wurzel der Stichprobenvarianz.)

(a) Zeigen Sie, dass die Angabe des Herstellers **nicht** abgelehnt werden kann (Signifikanzniveau 0.05).

(b) Die gleiche durchschnittliche gemessene Lebensdauer und die gleiche Stichprobenstandardabweichung vorausgesetzt, wieviele Chips hätten Sie kaufen müssen, um die Angabe des Herstellers ablehnen zu können?

Lösungsvorschlag: Der t-Test ist geeignet.

(a) Sei $\mu_0 = 50$, $\overline{X} = 40$ und $S = 30$. Für die Testgröße T gilt:

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S}\sqrt{n} = -\frac{1}{3}\sqrt{n}$$

Die Herstellerangabe ist die Nullhypothese $\mu \geq 50$, also $\mu \geq \mu_0$. Um das ablehnen zu können, muss $T < t_{n-1,0.05}$ gelten. Für $n = 20$ ergibt sich

$$-\frac{1}{3}\sqrt{20} = -1.49 \not< -1.73 \overset{\text{Tabelle}}{=} t_{19,0.05}\,,$$

folglich kann die Angabe des Herstellers nicht abgelehnt werden.

(b) Durch Ausprobieren stellt man fest, dass $n = 27$ das kleinste n ist, für das die Hypothese abgelehnt werden kann. Es gilt nämlich:

$$-\frac{1}{3}\sqrt{26} = -1.700 \not< -1.708 \overset{\text{Tabelle}}{=} t_{25,0.05} \qquad \text{aber}$$
$$-\frac{1}{3}\sqrt{27} = -1.732 < -1.706 \overset{\text{Tabelle}}{=} t_{26,0.05}$$

Aufgabe 11.2 — 0P

Die folgende Tabelle gibt die Ziehungshäufigkeiten der Superzahlen wieder:

Superzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	140	134	138	133	160	134	133	137	131	128

(Quelle: `http://www.lottozahlen-lottogewinne.de/lottostatistik.superzahl-haeufigkeiten.php`)

Wenden Sie den χ^2-Anpassungstest auf die Nullhypothese an, dass die Ziehungsw'keit für jede Superzahl $\frac{1}{10}$ ist (Signifikanzniveau 0.1).

Lösungsvorschlag: Es ergibt sich $n = 1368$. Außerdem gilt $p_i = 0.1$ für $i \in \{0, \ldots, 9\}$. Es folgt $T = 5.2$. Um die Nullhypothese abzulehnen, müsste $T > \chi^2_{9,0.9} \approx 14.7$ gelten. Folglich kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Aufgabe 11.3 (ehemalige Klausuraufgabe) **0P**

Während einer Prüfung wurde die Pulsfrequenz von 53 Studenten gemessen, wobei sich eine mittlere Pulsfrequenz von 86.7 Schlägen/min ergab. Auf Grund früherer Untersuchungen geht man davon aus, dass die Pulsfrequenzen von Menschen normalverteilt sind mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma = 10.3$ Schläge/min.

a) Zu testen ist die Hypothese $H_0 : \mu \geq 90$ gegen $H_1 : \mu < 90$.

Berechnen Sie die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit α, mit der die Nullhypothese noch abgelehnt werden kann.

Professor Evilsparza sind die Studenten viel zu aufgeregt während einer Klausur. Er führt daher folgenden Versuch durch: Vor der nächsten Klausur lässt er jeden der 165 Studenten ein Glas Bier trinken, da der enthaltene Hopfen beruhigend wirken soll, d.h. die Pulsfrequenz verringert.

Während dieser Prüfung wird eine mittlere Pulsfrequenz von 85.4 Schlägen/min gemessen.

Professor Evilsparza will nun *anhand der beiden Stichproben* entscheiden, ob er in weiteren Prüfungen ebenfalls den Studenten Bier verabreichen sollte.

b) Professor Evilsparza kann sich nicht entscheiden, ob er nun

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{\text{Bier}} < \mu_{\text{kein Bier}}$$

oder

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \leq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{\text{Bier}} > \mu_{\text{kein Bier}}$$

testen soll. Er will allerdings die W'keit auf 1% beschränken, dass er den Studenten Bier verabreicht, das Bier jedoch keine beruhigende Wirkung hat, d.h., dass er unnötig Geld ausgibt.

Wie sollte er daher die Hypothesen wählen? (Begründung!)

c) Führen Sie den entsprechenden Test durch. Welche Empfehlung können Sie Professor Evilsparza geben? ($\alpha = 0.01$)

Hinweis: Runden Sie auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

Lösungsvorschlag:

a) Gaußtest ($\sigma = 10.3$ bekannt) mit Testgröße:

$$\frac{86.7 - 90}{10.3}\sqrt{53} \approx -2,33.$$

H_0 wird abgelehnt, falls $-2.33 < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$. Also

$$-2.33 = z_\alpha = -z_{1-\alpha}.$$

Mit $z_{0.99} = 2.33$ folgt $\alpha = 0.01$.

b) Bei einem statistischen Test kann i.A. nur die Fehlerw'keit 1. Art mittels dem Signifikanzniveau α kontrolliert werden.

Nach Definition gilt nämlich, dass durch α die W'keit beschränkt ist, dass H_0 gilt, der Test aber H_0 ablehnt, und man daher auf Grund des Tests fäschlicherweise von der Gültigkeit von H_1 ausgeht.

Nach Aufgabenstellung soll die W'keit, dass man wegen dem Test von einem positiven Effekt des Biers ($\mu_{\text{Bier}} < \mu_{\text{kein Bier}}$) ausgeht, obwohl dies nicht gilt ($\mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}}$), durch 0.01 beschränkt werden.

Damit muss H_0 gerade $\mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}}$ sein mit $\alpha = 0.01$.

c) Zwei-Stichproben-Gauß-Test ($\sigma = 10.3$ bekannt) zu

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs } H_1 : \mu_{\text{Bier}} < \mu_{\text{kein Bier}}$$

und $\alpha = 0.01$.

Testgröße:

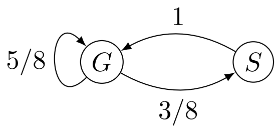
$$\sqrt{\frac{n \cdot m}{m+n}} \cdot \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma} \rightsquigarrow \sqrt{\frac{165 \cdot 53}{165 + 53}} \cdot \frac{85.4 - 86.7}{10.3} \approx -0.8.$$

H_0 kann also abgelehnt werden, falls $-0.8 < z_{0.01} = -2.33$ (bzw. $-0.8 > z_{0.99} = 2.33$, falls falsches Hypothesenpaar).

Anmerkung: Der Zwei-Stichproben-Gauß-Test wurde dieses Jahr nicht behandelt. Die Aufgabe wurde versehentlich trotzdem gestellt.

Aufgabe 11.4 **0P**

Aus der Midtermklausur wissen Sie, dass Prof. Evilsparza zu den Gemütszuständen ***G**ut gelaunt*, ***S**chlecht gelaunt* und *Rasend* fähig ist. Der Zustand *Rasend* sagt ihm nicht zu, daher ändert er sein Prüfungsverhalten: Sobald er schlecht gelaunt ist, lässt er den Prüfling auf jeden Fall durchfallen, sodass er danach wieder gut gelaunt ist. Die Markovkette sieht nun so aus, wobei Prof. Evilsparza anfangs gut gelaunt ist:



(a) Stellen Sie die Übergangsmatrix P auf.

(b) Berechnen Sie durch Matrix-Vektor-Multiplikationen die W'keit, dass Prof. Evilsparza nach drei Prüflingen gut gelaunt ist.

(c) Berechnen Sie die Eigenwerte und (rechten) Eigenvektoren von P. Bestimmen Sie damit eine Diagonalisierung von P, d.h., bestimmen Sie eine Matrix B und eine Diagonalmatrix D, sodass $P = BDB^{-1}$ gilt.

(d) Benutzen Sie die Diagonalisierung, um die W'keit zu berechnen, dass Prof. Evilsparza nach 20 Prüflingen gut gelaunt ist.

(e) Nach wie vielen Prüfungen ist Prof. Evilsparza im Schnitt zum ersten Mal schlecht gelaunt? Das heißt, bestimmen Sie h_{GS}. Bestimmen Sie auch h_G.

(f) Ist der Zustand G absorbierend? Ist S absorbierend? Ist die Markovkette irreduzibel? Sind G und/oder S transient und/oder rekurrent? Ist die Markovkette aperiodisch? Ist die Markovkette ergodisch?

(g) Auf lange Sicht, in wieviel Prozent der Zeit ist Prof. Evilsparza gut gelaunt? Das heißt, berechnen Sie die stationäre Verteilung π der Markovkette.

Lösungsvorschlag:

(a)

$$P = \begin{pmatrix} 5/8 & 3/8 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Es gilt:

$$\begin{aligned} q_0 &= (1;0) \\ q_1 &= q_0 P = (5/8;3/8) = (0.625;0.375) \\ q_2 &= q_1 P = (49/64;15/64) \approx (0.77;0.23) \\ q_3 &= q_2 P = (365/512;147/512) \approx (0.71;0.29) \end{aligned}$$

Die W'keit, dass Prof. Evilsparza gut gelaunt ist, ist jeweils der erste Eintrag.

(c) Die Eigenwerte sind 1 und $-\frac{3}{8}$. Dazugehörige rechte Eigenvektoren sind $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \end{pmatrix}$. Daraus ergibt sich die Diagonalisierung:

$$P = BDB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3/8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/11 & 3/11 \\ 3/11 & -3/11 \end{pmatrix}$$

(d)

$$q_{20} = q_0 P^{20} = q_0 (BDB^{-1})^{20} = q_0 BD^{20} B^{-1} = (1;0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3/8)^{20} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/11 & 3/11 \\ 3/11 & -3/11 \end{pmatrix} \approx (0.727;0.273)$$

Folglich ist Prof. Evilsparza nach 20 Prüflingen mit W'keit ≈ 0.727 gut gelaunt.

(e) Gefragt ist nach der "hitting time" T_{GS} und ihrem Erwartungswert $\mathbb{E}T_{GS} = h_{GS}$. In diesem einfachen Fall kann man direkt die Verteilung von T_{GS} angeben: Es gilt $T_{GS} \sim \text{Geo}(3/8)$ und daher $h_{GS} = 8/3$. Für größere Markovketten stellt man ein Gleichungssystem für h_{ij} auf (wie in der Midterm). Hier erhält man:

$$h_{GS} = 1 + p_{GG} h_{GS} = 1 + \frac{5}{8} h_{GS} \quad \text{mit der eindeutigen Lösung } h_{GS} = 8/3\,.$$

Aus der Markovkette kann man leicht ablesen, dass $h_{SG} = 1$. Daher gilt $h_G = 1 + p_{GS} \cdot h_{SG} = 1 + \frac{3}{8} \cdot 1 = 11/8$.

(f) Die Zustände G und S sind nicht absorbierend. Die Markovkette ist irreduzibel. Daraus folgt mit Lemma 113, dass G und S rekurrent sind und nicht transient. Die Markovkette ist aperiodisch, denn G liegt auf einer Schleife und S liegt auf zwei geschlossenen Wegen von S nach S der Längen 2 und 3 mit $\mathrm{ggT}(2,3) = 1$. Die Markovkette ist ergodisch, weil sie irreduzibel und aperiodisch ist.

(g) Es gibt mehrere Möglichkeiten, die stationäre Verteilung zu berechnen.

i) Nach Satz 114 gilt $\pi_G = 1/h_G = 8/11 = 0.\overline{72}$ und somit $\pi_S = 1 - \pi_G = 3/11 = 0.\overline{27}$.

ii) Mit der Diagonalisierung gilt:

$$\pi = \lim_{t\to\infty} q_t = \lim_{t\to\infty} q_0 P^t = \lim_{t\to\infty} q_0 B D^t B^{-1} = \lim_{t\to\infty} (1;0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & (-3/8)^{20} \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 8/11 & 3/11 \\ 3/11 & -3/11 \end{pmatrix}$$
$$= (1;0) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -8/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8/11 & 3/11 \\ 3/11 & -3/11 \end{pmatrix} = (8/11; 3/11)$$

iii) Für die stationäre Verteilung π gilt $\pi = \pi P$. Sie ist also ein linker Eigenvektor zum Eigenwert 1. Diese Eigenvektoren sind skalare Vielfache von $(8;3)$. Wegen $\pi_G + \pi_S = 1$ folgt $\pi = (8/11; 3/11)$.

Es folgt, dass Prof. Evilsparza in ca. 73% der Zeit gut gelaunt ist.

Aufgabe 11.5 **0P**

a) V ist eine stetige ZV, die gleichverteilt über $[0,1]$ ist.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz der stetigen ZV $K_V := \sqrt[3]{V}$, die die Kantenlänge des Würfels mit Volumen V angibt.

b) K ist eine stetige ZV, die gleichverteilt über $[0,1]$ ist.

Bestimmen Sie jeweils die Verteilungsfunktion, die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz der stetigen ZV $V_K := K^3$, die das Volumen des Würfels mit Kantenlänge K angibt.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion.

Lösungsvorschlag:

a) Mit $V = K_V^3$ folgt:

$$\begin{aligned} F_{K_V}(k) &= \Pr[K_V \le k] = \Pr\left[K_V^3 \le k^3\right] = \Pr\left[V \le k^3\right] = F_V(k^3) \\ &= k^3 \cdot I_{[0,1]}(k^3) + I_{(1,\infty)}(k^3) = k^3 \cdot I_{[0,1]}(k) + I_{(1,\infty)}(k). \end{aligned}$$

Durch Ableiten:

$$f_{K_V}(k) = F'_{K_V}(k) = 3k^2 \cdot I_{[0,1]}(k).$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[K_V] &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} k \cdot f_{K_V}(k)\ dk = 3\int_0^1 k^3\ dk = \frac{3}{4}. \\ \mathbb{E}[K_V^2] &= \textstyle\int_{\mathbb{R}} k^2 \cdot f_{K_V}(k)\ dk = 3\int_0^1 k^4\ dk = \frac{3}{5}. \\ \mathrm{Var}[K_V^2] &= \tfrac{3}{5} - \tfrac{9}{16} = \tfrac{3}{80}. \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} F_V(v) &= \Pr[V \le v] = \Pr\left[K^3 \le v\right] = \Pr\left[K \le v^{1/3}\right] \\ &= I_{[0,1]}(v^{1/3})v^{1/3} + I_{(1,\infty)}(v^{1/3}) = I_{[0,1]}(v)v^{1/3} + I_{(1,\infty)}(v). \\ f_V(v) &= \tfrac{1}{3}v^{-2/3}. \\ \mathbb{E}[V] &= \tfrac{1}{3}\textstyle\int_0^1 v^{1/3}\ dv = \frac{1}{4}. \\ \mathbb{E}[V^2] &= \tfrac{1}{3}\textstyle\int_0^1 v^{4/3}\ dv = \frac{1}{7}. \\ \mathrm{Var}[V] &= \tfrac{1}{7} - \tfrac{1}{16} = \tfrac{9}{112}. \end{aligned}$$