Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 2
20. Mai 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $W_1 = \langle \Omega, \Pr \rangle$ an mit $\Omega = \mathbb{N}$ und $\Pr[\{1, 2\}] = 1$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Beispiels!
2. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $W_2 = \langle \Omega, \Pr \rangle$ an mit $\Omega = \mathbb{N}$, so dass $\Pr[x] \neq 0$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Beispiels!

Lösung

1. Am einfachsten setzt man $\Pr[1] = 1$ und $\Pr[i] = 0$ für alle $i \neq 1$.

   Dass W_1 ein (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum ist, folgt aus:
   1. $0 \leq \Pr[i] \leq 1$ für alle Elementarereignisse $i \in \Omega$.
   2. $\sum_{i \in \Omega} \Pr[i] = 1$.
2. Man setzt z. B. $\Pr[i] = 2^{-i}$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

   Dass W_2 ein (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum ist, folgt aus:
   1. $0 \leq \Pr[i] \leq 1$ für alle Elementarereignisse $i \in \Omega$.
   2. $\sum_{i \in \Omega} \Pr[i] = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = 1$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Spieler A würfelt mit drei üblichen 6-seitigen fairen Würfeln. Er zeigt Spieler B das Ergebnis nicht, sagt aber korrekterweise, dass die Summe der Augenzahlen der drei Würfel 7 ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 1 zeigt?

Lösung

Seien w_1, w_2, w_3 drei verschiedene Würfel und k_i die Augenzahl, die der Würfel w_i zeigt. Wir bestimmen die Anzahl anz_{S7} der Tripel (w_1, w_2, w_3) mit der Eigenschaft $w_1 + w_2 + w_3 = 7$. Diese Eigenschaft nennen wir $S7$.
Die Anzahl der geordneten 3-Zahl-Partitionen von 7 ist $\binom{7-1}{3-1}$. Da jeder von 3 Summanden einer 3-Zahl-Partition von 7 kleiner als 7 ist, entspricht jeder geordneten 3-Zahl-Partition von 7 ein Tripel (w_1, w_2, w_3) und umgekehrt. Es folgt

$$anz_{S7} = \binom{7-1}{3-1} = 15\,.$$

Nun gibt es genau 3 Würfe (w_1, w_2, w_3) mit Eigenschaft $S7$, die keine 1 enthalten, weil $2 + 2 + 2 = 6$ und damit nur einer der Würfel eine 3 und die beiden anderen Würfel eine 2 zeigen können.
Von den 15 Tripel mit Eigenschaft $S7$ enthalten genau 12 Tripel eine 1.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{4}{5}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 144\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ durch 3 oder 7 (oder beides) teilbar ist! Die Auswahl aus W sei dabei Laplace-verteilt.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine (Laplace)-zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 144\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ nicht gleichzeitig durch $4, 8$ und 12 teilbar?

Lösung

1. Sei A_i das Ereignis der Teilbarkeit durch i.

   Die Menge der Zahlen von 1 bis 144 teilt sich in 3 disjunkte, gleichgroße Teilmengen von Zahlen, die mit Rest 0, 1 bzw. 2 teilbar sind. Das Ereignis A_3, d. h. "teilbar durch 3" ist also eine Menge von 48 Ergebnissen von jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{144}$. Mithin gilt
   $$\Pr[A_3] = \frac{48}{144}\,.$$
   Nun gibt es genau 20 Zahlen aus $[1, 144]$, die durch 7 teilbar sind und es gibt genau 6 Zahlen aus $[1, 144]$, die durch 3 und 7 teilbar sind. Entsprechend erhalten wir
   $$\Pr[A_7] = \frac{20}{144} \quad \text{und} \quad \Pr[A_3 \cap A_7] = \Pr[A_{21}] = \frac{6}{144}\,.$$
   Die Siebformel liefert
   $$\begin{aligned} \Pr[A_3 \cup A_5] &= \Pr[A_3] + \Pr[A_7] - \Pr[A_3 \cap A_7] \\ &= \frac{48}{144} + \frac{20}{144} - \frac{6}{144} = \frac{31}{72}\,. \end{aligned}$$

2. Eine Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist, ist auch nicht durch 8 oder 12 teilbar. Es gilt also
   $$\bar{A}_4 = \bar{A}_4 \cap \bar{A}_8 \cap \bar{A}_{12}\,.$$
   Wegen $\Pr[A_4] = \frac{1}{4}$ folgt
   $$\Pr[\bar{A}_4 \cap \bar{A}_8 \cap \bar{A}_{12}] = 1 - \Pr[A_4] = \frac{3}{4}\,.$$
   Interpretiert man das durch die Angabe definierte Ereignis als $T = \overline{A_4 \cap A_8 \cap A_{12}}$, dann erhält man $T = \overline{A_{24}}$ und entsprechend $\Pr[T] = \frac{5}{6}$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir variieren das aus der Vorlesung bekannte „Ziegenproblem“ wie folgt.

Es gibt 10 Türen und hinter 9 Türen ist eine Ziege. Nur hinter einer einzigen Tür befindet sich keine Ziege sondern ein Auto, das der Kandidat gewinnen will. Nachdem der Kandidat die Tür mit Nr. 1 ausgewählt hat, öffnet der Moderator 5 andere Türen, hinter denen jeweils eine Ziege sitzt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Kandidat das Auto, wenn er schließlich eine geschlossene Tür wählt, aber nicht die Tür mit Nr. 1?

Lösung

Wir bezeichnen das Ereignis, dass sich das Auto hinter der Tür i befindet, mit A_i. Dann gilt für $\overline{A_1} = A_2 \cap A_3 \cap \ldots \cap A_{10}$

$$\Pr[\overline{A_1}] = \frac{9}{10}\,.$$

Wenn der Moderator 5 Türen öffnet, dann ist unter der Voraussetzung, dass das Auto nicht hinter Tür 1 ist, das Auto hinter einer von 4 Türen. Die richtige Wahl kann dann mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ getroffen werden.

Wenn der Kandidat also eine geschlossene Tür wählt, aber nicht die Tür mit Nr. 1, dann wird er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{40}$ bzw. in $22,5\,\%$ der Fälle das Auto gewinnen.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Thema sind unabhängige Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert. Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.

  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. Beweis!

- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i. Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s|A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. Beweis!

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

Lösung

Ähnlich wie bei linear unabhängigen Vektoren bezieht sich der Begriff der Unabhängigkeit stets auf eine Menge von Elementen. Insbesondere ist eine Menge S von Ereignissen genau dann unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $X \subseteq S$ gilt

$$\Pr\left[\bigcap_{A\in X} A\right] = \prod_{A\in X} \Pr[A]\,.$$

1. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ wird mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet.

$$\begin{aligned}
\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s]\cdot\Pr[A^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1}\cdot\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\sum_{s\in\{0,1\}^k}\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

<u>1. Schritt:</u>
Im Fall einer einelementigen Ereignismenge $\{A_1\}$ haben wir nur für $X = \{A_1\}$ die Gleichung $\Pr[\bigcap_{A\in\{A_1\}} A] = \prod_{A\in\{A_1\}} \Pr[A]$ zu beweisen, die trivialerweise gilt.

<u>2. Schritt:</u>
Die Menge der Durchschnitte A^s mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine 2^k-Partition von Ω. Bei der Konstruktion eines Ereignisses A_{k+1}, so dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen A^s in konstantem Verhältnis p_{k+1} zu $1-p_{k+1}$.

Wir gehen nach Lemma 23 der Vorlesung vor und zeigen für alle $s \in \{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung $\Pr[A^s] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.$

Falls $s_{k+1} = 1$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap A_{k+1} = B^{(s_1,\ldots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\
&= p_{k+1}\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\
&= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \;=\; \prod_{i\in[k+1]}\Pr[A_i^{s_i}]\,.
\end{aligned}$$

Falls $s_{k+1} = 0$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap \overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)}] \\
&= \Pr[A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \cdot \Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\
&= (1 - p_{k+1}) \cdot \Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\
&= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}] \cdot \Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.
\end{aligned}$$

2. Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$. Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

   <u>Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.</u>

   Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

   Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$. Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

   <u>Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.</u>

   Wir haben nun die Partition

$$\begin{aligned}
A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 &&= [9, 12]\,, \\
A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 &&= [13, 16]\,, \\
A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} &&= [1, 8]\,, \\
A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} &&= [17, 24]\,.
\end{aligned}$$

   Seien $B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$ und $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.
   Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

   <u>Wir setzen $C = A_3$ und erhalten $\Pr[C] = \frac{1}{4}$.</u>

   Die Menge aller Vereinigungen von Durchschnitten A^s bildet eine Boolsche Algebra.

Tutoraufgabe 1

Wir wollen mit einem Test feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte infektiöse Krankheit vorliegt, wenn der Test positiv war. Die Krankheit trete bei Menschen mit der Häufigkeit 10^{-5} auf. Bei gesunden Menschen sei der Test mit Wahrscheinlichkeit $0,001$ positiv, bei schon erkrankten Menschen sei der Test in 95% der Fälle positiv.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiv ausgefallenen Test keine Infektion vorliegt?

Lösung

Es seien I bzw. T das Ereignis "Infektion" bzw. "Testergebnis positiv". Dann gilt

$$\Pr[I] = 10^{-5}, \quad \Pr[\bar{I}] = 1 - 10^{-5}, \quad \Pr[T|I] = 0,95, \quad \Pr[T|\bar{I}] = 0,001\,.$$

Mit dem Satz von Bayes folgt

$$\Pr[I|T] = \frac{\Pr[T|I] \cdot \Pr[I]}{\Pr[T|I] \cdot \Pr[I] + \Pr[T|\bar{I}] \cdot \Pr[\bar{I}]} = 0,009411\ldots\,.$$

und

$$Pr[\bar{I}|T] = 0,990589\ldots\quad.$$

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten das folgende Experiment:

- 1. Schritt: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis das erste Mal Kopf erscheint. Es sei k die Anzahl der dazu ausgeführten Münzwürfe.
- 2. Schritt: Es wird ein fairer 6-seitiger Würfel k-mal geworfen mit Ergebnissen aus der Menge $[6]$.

1. Stellen Sie die Ergebnisse des Experiments entsprechend als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum dar und beweisen Sie, dass Ihre Darstellung korrekt ist, d.h., dass die Definitionsbedingungen eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes erfüllt sind.
2. Es sei M_k das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt genau k-mal geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[M_k]$.
3. Es sei A das Ereignis, dass in den k Würfen des Würfels genau einmal eine 6 geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[A|M_k]$ und $\Pr[A]$.
4. Bestimmen Sie $\Pr[M_k|A]$.

Lösung

1. Seien $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in [6]\}$ und $\Pr[(x_1, x_2, \ldots, x_k)] = 2^{-k}6^{-k}$.
   Offenbar gilt $0 \leq \Pr[e] \leq 1$ für alle $e \in \Omega$. Wir zeigen noch $\Pr[\Omega] = 1$ wie folgt.
   $$\Pr[\Omega] = \sum_{x \in \Omega} \Pr[x] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{6^k} 2^{-k}6^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1\,.$$

2. $\Pr[M_k] = 2^{-k}$.

3. Man kann die Idee einer Fallunterscheidung in k Fälle haben, so dass genau an der Stelle $i \in [k]$ eine 6 steht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist je $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass an allen anderen Stellen eine der restlichen 5 Zahlen steht, ist dann $(\frac{5}{6})^{k-1}$. Nun summiert man über alle k Fälle.
   $$\Pr[A|M_k] = k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k}\,.$$
   Wir rechnen mit totaler Wahrscheinlichkeit.
   $$\begin{aligned}\Pr[A] &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[A|M_k] \cdot \Pr[M_k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k} \cdot 2^{-k} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k \\ &= \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{k+1} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k\,.\end{aligned}$$
   Mit $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ folgt
   $$\Pr[A] = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{1 - \frac{5}{12}}\right)^2 = \frac{12}{49}\,.$$

4.
   $$\begin{aligned}\Pr[M_k|A] &= \frac{Pr[A|M_k] \cdot \Pr[M_k]}{\Pr[A]} \\ &= \frac{k}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot 2^{-k} \cdot \frac{49}{12} = \frac{k}{5} \cdot \frac{49}{12} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k\,.\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 3

Für alle $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{0,1\}^n$ mit $n \geq 2$ sei $Pr[\omega] = 2^{-n}$. Wir definieren die $n+1$ Ereignisse $A_i := \{\omega \in \Omega\ ;\ \omega_i = 1\}$ und $B := \{\omega \in \Omega\ ;\ \sum_i \omega_i \text{ ist ungerade}\}$ sowie die Ereignismengen

$$F_1 = \{A_1, \ldots, A_n, B\}, \qquad F_2 = \{A_1, \ldots, A_n\}, \qquad F_3 = \{A_2, \ldots, A_n, B\}.$$

Welche dieser Mengen sind unabhängig? Beweis!

Hinweis: Nutzen Sie das in Vorbereitungsaufgabe 1 definierte Verfahren.

Lösung

Zunächst stellen wir $\Pr[B] = \frac{1}{2}$ fest. Außerdem gilt $\Pr[A_i] = \frac{1}{2}$ für alle $i \in [n]$, denn $|A_i| = 2^{n-1}$, d.h. $\Pr[A_i] = 2^{-n} \cdot 2^{n-1}$.

- Die Menge F_1 ist abhängig, denn wegen $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{(1, 1, \ldots, 1)\}$ gilt einerseits

  $$Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap B] = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2^{-n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

  und andererseits

  $$Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot Pr[A_n] \cdot Pr[B] = \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

  Eine alternative Argumentation stellt fest, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ gleich 0 oder 1 ist. Die Unabhängigkeit würde aber den Wert $\frac{1}{2}$ erfordern.

- Die Menge F_2 ist nach Lemma 23 unabhängig, denn für beliebiges $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ gilt

  $$Pr[\bigcap_{i\in[n]} A_i^{s_i}] = 2^{-n} = \prod_{i\in[n]} Pr[A_i^{s_i}]\,.$$

- Auch die Menge F_3 ist unabhängig. Wir zeigen dies mit dem Verfahren aus Vorbereitungsaufgabe 1.

  Zunächst stellen wir fest, dass die Menge $A_2, A_3, \ldots, A_n$ unabhängig ist. Sämtliche Durchschnitte $A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)} = \bigcap_{i\in[2,n]} A_i^{s_i}$ enthalten genau 2 Elemente $(0, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n)$ und $(1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n)$.

  Nun ist klar, dass die Bedingung B aus jeder dieser Mengen $A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)}$ genau ein Element auswählt. Damit gilt $\Pr[B \mid A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)}] = \frac{1}{2}$ und das Verfahren aus VA 1 liefert uns die unabhängige Menge $A_2, A_3, \ldots, A_n, B$.