Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 0

Abgabe bis zum 25.04.2012 bis 08:30 Uhr im DWT-Briefkasten im Untergeschoss..

Alle Antworten und Rechenwege sind zu begrï¿½nden, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Notation

- Natürliche Zahlen (positive ganze Zahlen): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Nichtnegative ganze Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- Für $n \in \mathbb{N}_0$: $[n] := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ mit $[0] = \emptyset$ die leere Menge.
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}\}$
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$.
- Intervalle bezüglich $\mathbb{R}$: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ etc.
- Mächtigkeit einer Menge M: $|M|$.
- Potenzmenge einer Menge M: $2^M = \{A \mid A \subseteq M\}$.
- Menge aller k-Tupel über einer Menge M mit $k \in \mathbb{N}_0$: $M^k = \{(m_1, \ldots, m_k) \mid m_1, \ldots, m_k \in M\}$ wobei $M^0 = \{\varepsilon\}$ mit $\varepsilon = ()$ das leere Wort/Tupel.

Aufgabe 1 **Abzugeben sind (e), (h), (i), (k) und (m).** **1P + 1P + 1P + 1P + 1P = 5P**

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der folgender Mengen an, wie man ihre Mächtigkeit berechnen kann (nicht nach Schwierigkeit geordnet):

(a) $A := \{\mathcal{P} \subseteq 2^{[n]} \mid \mathcal{P}$ ist eine Partition von [n]$\}$.

(b) $B := \{\mathcal{P} \in A \mid |\mathcal{P}| = k\}$.

(c) $C := \{f : [k] \to [n]\}$.

(d) $D := \{f : [k] \to [n] \mid f$ surjektiv $\}$.

(e) $E := \{f : [k] \to [n] \mid f$ injektiv $\}$.

(f) $F := \{f : [k] \to [n] \mid f$ bijektiv $\}$.

(g) $G := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_i \neq s_j$ für $1 \leq i < j \leq k\}$.

(h) $H := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < s_2 < \ldots < s_k\}$.

(i) $I := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k\}$.

(j) $J := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n\}$.

(k) $K := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k \leq n\}$.

(l) $L := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n\}$.

(m) $M := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k \leq n\}$.

Aufgabe 2 **Abzugeben sind (ai), (aii) und (aiii).** **1P + 1P + 1P = 3P)**

Es seien $j, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie folgende Identitäten der Binomialkoeffizienten:

- **(i)** $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.
- **(ii)** $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.
- **(iii)** $\sum_{0 \le k \le n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$.
- (iv) $\sum_{0 \le k \le n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.
- (v) $\sum_{k \ge 0} \binom{m}{k}\binom{n}{l-k} = \binom{m+n}{l}$.

(b) Verwenden Sie ii) und iii) um folgenden Ausdruck soweit wie möglich zu vereinfachen:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} \text{ für } n \ge m \ge 0.$$

(c) Berechnen Sie den Koeffizienten des Monoms $a^3 b^5 c^7$ in $(a+b+c)^{15}$.

(d) Gegeben sei ein rechteckiges $n \times m$–Gitter, d.h. formal ein Graph mit Knotenmenge $V = [n] \times [m]$ und Kantenmenge $E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} : |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1\}$. Wie viele *kürzeste* Pfade führen vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (n, m). *(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst aus welchen "Bewegungen" ein* kürzester *Pfad besteht!)*

Aufgabe 3 **Abzugeben sind (a) und (e).** **1P + 1P = 2P**

Berechnen Sie

(a) $\sum_{i=N}^{M} x^i \quad (N \le M)$

(b) $\sum_{i=0}^{\infty} 5^{-i}$

(c) $\sum_{i=0}^{\infty} i x^{i-1} \quad (|x| < 1)$

(d) $\sum_{i=0}^{\infty} i x^{i+3} \quad (|x| < 1)$

(e) $\lim_{n \to \infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{2}{7}^{i} \frac{1}{6}^{(n-i)}$