Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 10
22. Juli 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien X_1 und X_2 unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit Parametern λ_1 bzw. λ_2.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion von $Y = X_1 + X_2$ durch Anwendung der Faltungsformel
$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1}(x) \cdot f_{X_2}(y - x)\,\mathrm{d}x$$
und vereinfachen Sie das Ergebnis im Fall $\lambda_1 = \lambda_2$ so weit wie möglich.

2. Seien X_1, X_2, X_3 unabhängig exponentialverteilt mit gleichem Parameter λ und $Y = X_1 + X_2 + X_3$. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Y in geschlossener Form.

Lösung

1. Es gilt $f_{X_1}(x) = \lambda_1 e^{-\lambda_1 x}$ und $f_{X_2}(x) = \lambda_2 e^{-\lambda_2 x}$. Damit folgt, wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2$ gilt, für $y \geq 0$
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda_1 e^{-\lambda_1 x} \cdot \lambda_2 e^{-\lambda_2 (y-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \int_0^y e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \left[\frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)x}}{\lambda_2 - \lambda_1} \right]_{x=0}^{x=y} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 e^{-\lambda_2 y} \cdot \frac{e^{(\lambda_2-\lambda_1)y} - 1}{\lambda_2 - \lambda_1} \\ &= \lambda_1 \lambda_2 \cdot \frac{e^{-\lambda_1 y} - e^{-\lambda_2 y}}{\lambda_2 - \lambda_1}\,. \end{aligned}$$
Im Fall $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$ gilt
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda (y-x)}\,\mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 e^{-\lambda y} \int_0^y \mathrm{d}x \\ &= \lambda^2 y e^{-\lambda y}\,. \end{aligned}$$
Für $y \leq 0$ folgt in allen Fällen direkt $f_Y(y) = 0$.

2. Wir wenden die Faltungsformel noch einmal an, und zwar auf $f_{X_1+X_2}$ und f_{X_3} wie folgt.

$$\begin{aligned}
f_Y(y) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X_1+X_2}(x) \cdot f_{X_3}(y-x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^y \lambda^2 x e^{-\lambda x} \cdot \lambda e^{-\lambda(y-x)}\,\mathrm{d}x \\
&= \lambda^3 e^{-\lambda y} \cdot \int_0^y x\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^3 y^2}{2} e^{-\lambda y}\,.
\end{aligned}$$

Die Verteilungsfunktion F_Y kann nun durch Integration der Dichtefunktion f_Y berechnet werden, wie es im Folgenden ausführlich dokumentiert wird. Wir wenden insbesondere partielle Integration an.

$$\begin{aligned}
F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{y} f_Y(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^y \frac{\lambda^3 x^2}{2} e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= (-\lambda^2) \int_0^y \frac{x^2}{2} \cdot (-\lambda) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= (-\lambda^2) \left[\frac{x^2}{2} \cdot e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=y} - (-\lambda^2) \int_0^y x \cdot e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda \int_0^y x \cdot (-\lambda) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda \left(\left[x \cdot e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=y} - \int_0^y e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \right) \\
&= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - \int_0^y (-\lambda) e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \\
&= (-\lambda^2) \frac{y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - \left[e^{-\lambda x}\right]_{x=0}^{x=y} \\
&= 1 - \frac{\lambda^2 y^2}{2} e^{-\lambda y} - \lambda y e^{-\lambda y} - e^{-\lambda y}\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und einer Standardabweichung $\sigma_X = 2$. Wir verwenden $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$ als Schätzvariable für μ, wobei die X_i unabhängige Wiederholungen von X seien. Wir setzen voraus, dass $\bar{X}$ für $n \geq 1500$ normalverteilt ist.

1. Leiten Sie eine möglichst kleine untere Schranke n_0 für n her, so dass für alle $n \geq n_0$ gilt

$$\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0{,}1] \geq 0{,}9\,.$$

Für das 0,95-Quantil der Standardnormalverteilung ist dabei $z_{0,95} \approx 1{,}65$ zu verwenden.

2. Nun sei $n = 2500$. Geben Sie ein Konfidenzintervall für μ zum Konfidenzniveau 0,9 an!

Lösung

1. Es gilt
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[\bar{X}] &= \mathrm{Var}[\tfrac{1}{n}\textstyle\sum_{i=1}^{n} X_i] \\ &= \tfrac{1}{n^2}\textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{Var}[X_i] \\ &= \tfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot \sigma_X^2 = \tfrac{4}{n}.\end{aligned}$$

2. Wir setzen $\bar{\sigma}^2 = \mathrm{Var}[\bar{X}]$. Dann gilt $\bar{\sigma} = \frac{2}{\sqrt{n}}$.
$$\begin{aligned}\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0{,}1] &= \Pr[-0{,}1 < \bar{X} - \mu < 0{,}1] \\ &\approx \Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) \\ &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) - 1\,.\end{aligned}$$
Es gilt $2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) - 1 \geq 0,9$ genau dann, wenn $\Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) \geq 0,95$.
Mit dem Quantil $z_{0{,}95} \approx 1,65$ erhalten wir für n die Ungleichung
$$\tfrac{0{,}1}{\bar{\sigma}} = \tfrac{\sqrt{n}}{20} \geq 1,65\,,$$
d. h. $$n \geq 20^2 \cdot 1,65^2 = 1089.$$
Da die Normalverteilung $n \geq 1500$ voraussetzt, folgt
$$n \geq \max\{1500, 1089\} = 1500.$$

3. Für $n = 2500$ und einen zu bestimmenden Parameter c betrachten wir $\Pr[|\bar{X} - \mu| < c]$ und erhalten die Gleichung
$$\tfrac{c}{\bar{\sigma}} = \tfrac{c\sqrt{2500}}{2} = 1,65$$
mit der Lösung $c = \frac{3{,}3}{50} = 0,066$.
Das gesuchte Konfidenzintervall für μ ist demnach
$$\bar{X} - 0,066 < \mu < \bar{X} + 0,066.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zeigen oder widerlegen Sie:

1. Wenn zwei unabhängige Zufallsvariablen X und Y normalverteilt sind, dann ist auch ihre Differenz $X - Y$ normalverteilt.

2. Jede erwartungstreue Schätzvariable für einen Parameter δ schätzt den Erwartungswert von δ.

3. Die Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips setzt die Verfügbarkeit einer Stichprobe voraus.

4. Bei echten Alternativtests ist die Summe der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art und der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art stets gleich 1.

5. Wir betrachten eine erwartungstreue, diskrete Schätzvariable X für einen Parameter α. Für die Verteilungsdichte f_X gelte $f_X(i) = \frac{3^i e^{-3}}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$. Dann ist 3 der durch X für α geschätzte Wert.

Lösung

1. Wahr! Beweis: Linearkombinationen von unabhängigen und normalverteilten Zufallsvariablen sind wieder normalverteilt (Satz der Vorlesung).

2. Falsch! Da δ keine Zufallsvariable ist, kann auch der Erwartungswert von δ nicht definiert werden.

3. Wahr! Es wird die Wahrscheinlichkeit $L(\vec{x}; p)$ maximiert, wobei $\vec{x}$ eine Stichprobe ist.

4. Falsch! Echte Alternativtests werden mit dem Ziel konstruiert, beiden Fehlerarten eine kleine Wahrscheinlichkeit zu geben.

5. Wahr! Beweis: X ist Poisson-verteilt mit $\lambda = 3$. Damit gilt $\mathbb{E}[X] = 3$. Da X den Wert α erwartungstreu abschätzt gilt $\alpha = \mathbb{E}[X] = 3$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $\lambda > 0$ und $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängige und identisch verteilte kontinuierliche Zufallsvariable jeweils mit der gleichen Dichte

$$f(t) := \begin{cases} \frac{1}{2}\lambda^3 t^2 e^{-\lambda t} & : t \geq 0\,, \\ 0 & : \text{sonst}\,. \end{cases}$$

1. Sei $\vec{k} = (k_1, \ldots, k_n)$ ein Stichprobenvektor. Stellen Sie die Likelihood-Funktion $L(\vec{k}; \gamma)$ für den Parameter $\gamma = \frac{1}{\lambda}$ auf.

2. Bestimmen Sie den ML-Schätzer für γ durch Maximieren von $L(\vec{k}; \gamma)$.

Lösung

1.

$$\begin{aligned} L(\vec{k}; \gamma) &= \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{2\gamma^3} k_i^2 e^{-\frac{1}{\gamma} k_i} \right) \\ &= \frac{1}{2^n} \frac{1}{\gamma^{3n}} \left(\prod_{i=1}^{n} k_i^2 \right) e^{-\frac{1}{\gamma} \sum_{i=1}^{n} k_i} \,. \end{aligned}$$

Zwecks besserer Lesbarkeit kann man Bezeichnungen $C := \frac{1}{2^n} \left(\prod_{i=1}^{n} k_i^2 \right)$ und $K := \sum_{i=1}^{n} k_i$ einführen und kann dann wie folgt schreiben.

$$L(\vec{k}; \gamma) = \frac{C}{\gamma^{3n}} e^{-\frac{K}{\gamma}} \,.$$

2. Wir bestimmen bei gegebener Stichprobe $\vec{k}$ das Maximum der Funktion $L(\vec{k};\gamma)$ von γ.

   Nullstellen der Ableitung von L nach γ:

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L(\vec{k};\gamma) \quad = \quad -C\cdot 3n\gamma^{-3n-1}e^{-\frac{K}{\gamma}} + C\gamma^{-3n}K\gamma^{-2}e^{-\frac{K}{\gamma}}\,.$$

   Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}L(\vec{k};\gamma) = 0$ genau dann, wenn

   $$\gamma = \frac{K}{3n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{3n}\,.$$

   Damit gibt es genau eine Nullstelle. Da $L(\vec{k};\gamma) > 0$ für alle γ und $L(\vec{k};\gamma) \to 0$ sowohl für $\gamma \to 0$ als auch für $\gamma \to +\infty$ gilt, folgt, dass die Nullstelle ein Maximum ist.

   Damit ist

   $$U = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i}{3n}$$

   der gesuchte ML Schätzer für γ.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Auf zwei unabhängigen Servern stehe ein Web-Dienst zur Verfügung. Es soll festgestellt werden, welcher Server schnellere Antwortzeiten liefert. Dazu werden $n = 1000$ Anfragen an die Server geschickt und es wird festgestellt, von welchem Server die Antwort zuerst eintrifft. Dabei gehen wir davon aus, dass Pakete nicht gleichzeitig empfangen werden können. In 540 Fällen antwortet Server A vor Server B.

Wir wählen als Nullhypothese H_0 die Aussage, dass Server B im Mittel schneller ist als Server A.

Kann man für einen entsprechenden statistischen Test auf einem Signifikanzniveau von $\alpha = 0,04$ die Nullhypothese annehmen?
Formulieren Sie hierzu den Test und weisen Sie Ihre Behauptung nach.

Lösung

Sei X eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Wert 1 genau dann, wenn A schneller antwortet als B. Wir schreiben $p = \Pr[X = 1]$. Seien X_i für $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ unabhängige Wiederholungen von X mit $n = 1000$. Dann ist die Testgröße $T = \sum_{i=1}^{n} X_i$ binomialverteilt.

Wir formulieren einen approximativen Binomialtest.

Nullhypothese H_0: $p < \frac{1}{2}$, Alternative H_1: $p \geq \frac{1}{2}$.

Die Nullhypothese mit Signifikanzniveau $\alpha = 0,04$ anzunehmen, heißt aber, die triviale Alternative mit Signifikanzniveau $\alpha = 0,04$ abzulehnen. Um also das Testschema des approximativen Binomialtests nach Vorlesung anwenden zu können, bezeichnen wir die Alternative H_1 als H'_0 und H_0 als H'_1.

Nun testen wir, ob die Hypothese H'_0 mit Signifikanzniveau $\alpha = 0,04$ abgelehnt werden kann. Wir setzen also

Nullhypothese H'_0: $p \geq \frac{1}{2}$, Alternative H'_1: $p < \frac{1}{2}$,

und wenden den approximativen Binomialtest wie folgt an.
Mit $p_0 = \frac{1}{2}$ und $T = h$ sei

$$Z = \frac{h - np_0}{\sqrt{np_0(1 - p_0)}} = \frac{540 - 500}{\sqrt{250}} \approx 2.5298\ldots .$$

Das Ablehnungskriterium für H'_0 mit $\alpha = 0.04$ ist $Z < z_{0.04} \approx -0{,}9599$.

Dieses Kriterium ist wegen $Z = \frac{540-500}{\sqrt{250}} > z_{0.04}$ nicht erfüllt, d. h. wir können H_0 nicht mit Signifikanz $\alpha = 0,04$ annehmen.

Es gilt ganz im Gegenteil, dass H_0 mit Signifikanzniveau $\alpha = 0.04$ abgelehnt werden kann. Dies folgt aus $Z > z_{1-\alpha} \approx 1{,}6667$.

Vorbereitung 2

Seien $T_1, T_2, \dots$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit gleichem Parameter λ. Seien $S_n = \sum_{i=1}^{n} T_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$.

Man zeige für alle $n \in \mathbb{N}$ für die Verteilungsfunktion von S_n, dass für alle $t \geq 0$ gilt:

$$F_{S_{n+1}}(t) = -\frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} + F_{S_n}(t)\,.$$

Lösung

Zunächst beweisen wir

$$F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) = \frac{1}{\lambda} f_{S_{n+1}}(t)\,.$$

Beweis:

$$\begin{aligned}
F_{S_{n+1}}(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_T(T) \cdot \left(\int_{-\infty}^{t-T} f_{S_n}(S)\,\mathrm{d}S \right) \mathrm{d}T \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_T(T) \cdot F_{S_n}(t-T)\,\mathrm{d}T \\
&= \int_0^t f_T(T) \cdot F_{S_n}(t-T)\,\mathrm{d}T \\
&= [F_T(T) F_{S_n}(t-T)]_{T=0}^{T=t} + \int_0^t F_T(T) f_{S_n}(t-T)\,\mathrm{d}T \\
&= \int_0^t (1 - \frac{1}{\lambda} f_T(T)) f_{S_n}(t-T)\,\mathrm{d}T \\
&= \int_0^t f_{S_n}(t-T)\,\mathrm{d}T - \frac{1}{\lambda} \int_0^t f_T(T) \cdot f_{S_n}(t-T)\,\mathrm{d}T \\
&= F_{S_n}(t) - \frac{1}{\lambda} f_{S_{n+1}}((t)\,.
\end{aligned}$$

Nun beweisen wir durch Induktion über $n \geq 1$

$$f_{S_n}(t) = \begin{cases} \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} & \text{für } t \geq 0\,, \\ 0 & \text{sonst}\,. \end{cases}$$

Beweis:

Für $n = 1$ gilt die Formel, da für $t \geq 0$ $f_T(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ gilt.

Induktionsschritt von n auf $n+1$ für alle $n \geq 1$:

$$\begin{aligned}
f_{S_{n+1}}(t) &= \int_0^t f_T(t-x) f_{S_n}(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^t \lambda e^{-\lambda(t-x)} \cdot \frac{\lambda^n t^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^{n+1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} \int_0^t x^{n-1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\lambda^{n+1} t^n}{n!} e^{-\lambda t}\,.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 1

Sei $T = X_1 + X_2 + X_3$ eine Zufallsvariable, wobei X_1, X_2 und X_3 unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit p seien. Wir betrachten T als Stichprobenvariable zum Test der Hypothese $H_0 : p \geq \frac{1}{3}$ mit Ablehnungsbereich $\tilde{K} = \{0, 1, 2\}$.

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_T von T!
2. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art!
3. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art unter der Annahme, dass $H_1 : p \leq \frac{1}{4}$ eine echte Alternative zu H_0 sei!

Lösung

1. T ist binomialverteilt mit
$$f_T(i) = \binom{3}{i} p^i (1-p)^{3-i} \text{ und } W_T = \{0, 1, 2, 3\}.$$
Allgemein gilt
$$\begin{aligned}
F_T(i) &= \Pr[T \leq i]. \\
F_T(0) &= (1-p)^3, \\
F_T(1) &= (1-p)^3 + 3p(1-p)^2 \\
&= 1 - 3p^2 + 2p^3, \\
F_T(2) &= 1 - p^3, \\
F_T(3) &= 1.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \max\nolimits_{p \in H_0} \Pr[T \in \tilde{K}] \\
&= \max\nolimits_{p \geq \frac{1}{3}} F_T(2) \\
&= \max\nolimits_{p \geq \frac{1}{3}} (1 - p^3) \\
&= 1 - \left(\tfrac{1}{3}\right)^3 = \tfrac{26}{27}.
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \max\nolimits_{p \in H_1} \Pr[T \notin \tilde{K}] \\
&= \max\nolimits_{p \leq \frac{1}{4}} f_T(3) \\
&= \max\nolimits_{p \leq \frac{1}{4}} p^3 \\
&= \left(\tfrac{1}{4}\right)^3 = \tfrac{1}{64}.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

Ein Hersteller von Nahrungsmittelkonserven gibt die Haltbarkeit eines bestimmtes Produkts mit mindestens 50 Monaten an. Sie kaufen 20 derartige Konserven und messen ihre Haltbarkeit. Die Konserven haben im Schnitt 40 Monate gehalten mit einer Stichprobenstandardabweichung von $S = 30$ Monaten.

1. Zeigen Sie, dass die Angabe des Herstellers nicht abgelehnt werden kann (Signifikanzniveau 0.05).
2. Wie viele Konserven hätten Sie mindestens kaufen müssen, um die Angabe des Herstellers ablehnen zu können?

Lösung

Die Tabellenwerte für den t-Test wurden dem Buch von Schickinger/Steger entnommen.

1. Wir wenden einen t-Test an.

   Seien $\mu_0 = 50$, $\overline{X} = 40$ und $S = 30$. Für die Testgröße T gilt:

   $$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S} \cdot \sqrt{n} = -\frac{1}{3}\sqrt{n}\,.$$

   Die Herstellerangabe liefert die Nullhypothese $H_0 : \mu \geq 50 = \mu_0$.

   Um H_0 ablehnen zu können, muss $T < t_{n-1,0.05}$ gelten. Für $n = 20$ ergibt sich

   $$-\frac{1}{3}\sqrt{20} = -1.49 \not< -1.73 \overset{\text{Tabelle}}{\approx} t_{19,0.05}\,.$$

   H_0 kann folglich nicht abgelehnt werden.

2. Durch Auspobieren stellt man fest, dass $n = 27$ das kleinste n ist, für das die Hypothese abgelehnt werden kann. Es gilt:

   $$-\frac{1}{3}\sqrt{26} = -1.700 \not< -1.708 \overset{\text{Tabelle}}{\approx} t_{25,0.05}\,,$$

   aber

   $$-\frac{1}{3}\sqrt{27} = -1.732 < -1.706 \overset{\text{Tabelle}}{\approx} t_{26,0.05}\,.$$

Tutoraufgabe 3

Seien $T_1, T_2, \ldots$ unabhängige exponentialverteilte Zufallsvariablen mit gleichem Parameter λ. Beispiel: Aufgabe zu Grenzkontrollen im vorausgegangenen Übungsblatt mit $\lambda = \frac{1}{30}$.

Seien $S_n = \sum_{i=0}^{n} T_i$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir betrachten den Stochastischen Prozess $(X(t))_{t>0}$, der gegeben ist durch

$$X(t) := \max\{n \in \mathbb{N}_0\,;\, S_n \leq t\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass für alle $t > 0$ und $n \in \mathbb{N}_0$ die folgende Gleichung gilt:

   $$f_{X(t)}(n) = \Pr[S_n \leq t < S_{n+1}]\,.$$

2. Nach Vorlesung sind für alle $t > 0$ die Variablen $X(t)$ Poisson-verteilt. Geben Sie eine explizite Darstellung der Dichtefunktion $f_{X(t)}$ an.

3. Beweisen Sie die vorgenannte explizite Darstellung der Dichtefunktion $f_{X(t)}$ durch direkte Berechnung und ohne Benutzung der Kenntnis, dass $X(t)$ Poisson-verteilt ist.

Lösung

1. Korrektur: Ursprünglich sollte $f_{X(t)}(n) = \Pr[S_n \le t \le S_{n+1}]$ bewiesen werden. Dies wurde nun korrigiert.

   Für $n = 0$ wird $S_n = 0$ gesetzt, wie üblich bei leeren Summen.

   Nun gilt $m = \max\{n \in \mathbb{N}_0\,;\, S_n \le t\}$ genau dann, wenn $S_m \le t < S_{m+1}$. Damit folgt $X(t) = m \iff (S_m \le t < S_{m+1})$, mithin

   $$f_{X(t)}(m) = \Pr[X(t) = m] = \Pr[S_m \le t < S_{m+1}]\,.$$

   Bemerkung: Der Wertebereich der Zufallsvariablen $X(t)$ ist $\mathbb{N}_0 \cup \{\infty\}$, denn sie ist erst dann vollständig definiert, wenn man ∞ bei der Maximumsbildung zuläßt. Allerdings muss $\Pr[X(t) = \infty] = 0$ für alle $t > 0$ gesetzt werden, wie man durch Betrachtung der Verteilungsfunktion F_{S_n} und Grenzwertbildung für $n \to \infty$ zeigen kann.

2. Genau genommen gilt diese Aussage nur, wenn man die Betrachtung von ∞ ausschließt, denn eine Poisson-Verteilung sieht ∞ nicht vor. Die auf $\mathbb{N}_0$ eingeschränkte Dichtefunktion von $X(t)$ ist aber sehr wohl eine Poisson-Dichtefunktion.

   Wir benutzen, die in der Vorlesung mitgeteilte Tatsache, dass für alle $t > 0$ die Variablen $X(t)$ Poisson-verteilt sind mit Parameter $\lambda \cdot t$. Es folgt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

   $$f_{X(t)}(n) = \frac{(\lambda t)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda \cdot t}\,.$$

3. Wir benutzen die in Vorbereitungsaufgabe 2 bewiesene Rekursionsformel für die Verteilungsfunktion F_{S_n}.

   Die Ereignisse $(t < S_n)$ und $(S_n \le t < S_{n+1})$ sind disjunkt und es gilt $t < S_{n+1} \iff (t < S_n) \vee (S_n \le t < S_{n+1})$, weil stets $S_n \le S_{n+1}$ gilt. Daraus folgt

   $$\Pr[t < S_{n+1}] = \Pr[t < S_n] + \Pr[S_n \le t < S_{n+1}]\,.$$

   Wir rechnen

   $$\begin{aligned} f_{X(t)}(n) &= \Pr[S_n \le t < S_{n+1}] \\ &= \Pr[t < S_{n+1}] - \Pr[t < S_n] \\ &= (1 - F_{S_{n+1}}(t)) - (1 - F_{S_n}(t)) \\ &= F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t) \\ &= \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}\,. \end{aligned}$$