Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 10
29. Juni 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 6. Juli 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten eine beliebige Konvexkombination $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ über n unabhängigen Stichprobenvariablen von X.

1. Zeigen Sie, dass es sich bei Y um einen erwartungstreuen Schätzer für $\mathbb{E}[X]$ handelt.
2. Bestimmen Sie Koeffizienten λ_i, welche die Effizienz von Y optimieren. Beweisen Sie Ihre Konstruktion.

Hinweis: Zeigen Sie in der zweiten Teilaufgabe zunächst, dass die gewichtete Summe $\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2$ größer gleich $\frac{1}{n^2}$ ist.

Tutoraufgabe 2

Im Rahmen einer wissenschaftlichen Studie fangen Sie n zufällig und unabhängig gewählte Wolpertinger und vermessen diese. Die Größe des i-ten Wolpertingers sei gegeben durch die Stichprobenvariable X_i. Aus früheren Studien wissen Sie, dass die Variablen X_i auf dem Intervall $[0, m]$ gleichverteilt sind, wobei m die noch unbekannte Größe des größten Wolperdingers ist. Ausgehend von ihren Stichproben möchten Sie m abschätzen.

1. Definieren Sie einen Koeffizienten c, so dass das gewichtete Stichprobenmittel $c \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für m ist.
2. Konstruieren Sie zum Vergleich einen Maximum-Likelihood-Schätzer für m und zeigen Sie, dass dieser nicht erwartungstreu ist. Bestimmen Sie außerdem einen Koeffizienten um dies zu korrigieren.

Tutoraufgabe 3

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ, einer Standardabweichung von 2 und dem Stichprobenmittel $\bar{X}$ über n unabhängige Stichproben.

1. Leiten Sie eine möglichst kleine untere Schranke für n her, so dass die Wahrscheinlichkeit $\Pr[|\bar{X} - \mu| \leq \frac{1}{10}]$ größer als $\frac{8}{10}$ ist.
2. Sei die Anzahl der Stichproben nun gleich 1600. Geben Sie ein möglichst kleines Konfidenzintervall für μ mit Konfidenzniveau $\frac{8}{10}$ an.

Hinweis: Nutzen Sie die Tabelle der Standardnormalverteilung auf der letzten Seite des Übungsblattes.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien x_1 bis x_n unabhängige Stichproben einer Zufallsvariable X. Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzwert für den Parameter λ unter der Annahme, dass X Poisson-verteilt ist. Bestimmen Sie außerdem den Maximum-Likelihood-Schätzwert für den Parameter p unter der Annahme, dass X geometrisch verteilt ist.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sie befinden sich in einer fremden Stadt, in der es insgesamt n Taxis gibt. Um die Fahrzeuge zu identifizieren, besitzt jedes Taxi eine eindeutigen Nummer von 1 bis n. Während Ihres Aufenthalts fahren Sie zehnmal Taxi, wobei Sie sich die jeweiligen Identifikationsnummern merken. Ihre Wahl der Taxis sei unabhängig und gleichwahrscheinlich. Angenommen die größte Identifikationsnummer, die Sie beobachten, ist 100. Bestimmen Sie eine möglichst kleine obere Schranke für n mit einem Konfidenzniveau von $\frac{9}{10}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine beliebige Zufallsvariable mit endlichem Erwartungswert und Varianz. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass das Stichprobenmittel $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ ein erwartungstreuer Schätzer für den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ ist und die Stichprobenvarianz $\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für die Varianz $\mathrm{Var}[X]$. Im Folgenden möchten wir die beiden Schätzer genauer analysieren.

1. Seien x_1 bis x_n und y_1 bis y_n zwei Reihen unabhängiger Stichproben von X und μ_x bzw. μ_y die durch das Stichprobenmittel geschätzten Erwartungswerte. Des Weiteren bezeichnen wir die auf beiden Reihen basierende Schätzung mit μ_{xy}. Zeigen Sie, dass wenn $\mu_x = \mu_y$ gilt auch $\mu_x = \mu_{xy}$ gelten muss.

2. Beweisen Sie nun, dass diese Eigenschaft auf die Stichprobenvarianz und die entsprechenden Schätzungen σ_x^2, σ_y^2 sowie σ_{xy}^2 nicht notwendigerweise zutrifft.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sie möchten die Anzahl n der Fische im See hinter dem Fakultätsgebäude des Maschinenbaus bestimmen. Hierzu haben Sie sich folgendes Verfahren überlegt. Zunächst fangen Sie eine zufällige Stichprobe von m Fischen und markieren diese geeignet, bevor Sie sie zurück in den See lassen. Nach einiger Zeit fangen Sie eine weitere zufällige Stichprobe von k Fischen. Sei X die Anzahl der bereits markierten Fische in der zweiten Stichprobe. Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für n basierend auf X.

Hinweis: Betrachten Sie das Verhältnis der Likelihood-Funktion für zwei konsekutive Werte von n, also $\frac{L(x;n)}{L(x;n-1)}$

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999