Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 7
9. Juni 2010

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 16. Juni 2010, 14 Uhr in die* **DWT Briefkästen**

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir machen $n$ unabhängige Würfe mit je 3 fairen Würfeln. $Y$ sei die Summe aller gewürfelten Augen.

1. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz von $Y$!
2. Zeigen Sie, dass $Y$ mit 99%-iger Wahrscheinlichkeit im Intervall $\frac{21}{2}n \pm 5\sqrt{35n}$ liegt.

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Es sei $M_1$ eine Maschine, die bei Aufruf zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine der Zahlen 1, 2, 3 oder 4 ausgibt. Wir bezeichnen die entsprechende Zufallsvariable mit $N$. Eine Maschine $M_2$ werfe bei Aufruf eine faire Münze, die entweder „Kopf“ oder „Wappen“ zeigt.

Wir betrachten einen Algorithmus $A$, dessen Ausführung in 2 Schritten ein Ergebnis erzeugt. Im ersten Schritt wird $M_1$ veranlasst, eine Zahl $k$ auszugeben. Im zweiten Schritt wird $M_2$ $k$ mal aufgerufen. Das Ergebnis einer Ausführung von $A$ definieren wir als diejenige Zahl, die angibt, wie oft im zweiten Schritt „Kopf“ geworfen wurde.
Es sei $Y$ die Zufallsvariable, die die Ergebnisse des Algorithmus $A$ beschreibt.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_N(z)$ für $N$ an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.
3. Berechnen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_Y(z)$ für $Y$.

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $F(z)$ bzw. $G(z)$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für eine Zufallsvariable $X_F$ bzw. $X_G$. Sei $H(z) = F(G(z))$.

Berechnen Sie $H(1)$, $H'(1)$ und $H''(1)$ in Abhängigkeit ggf. von $\mathbb{E}[X_F]$, $\mathrm{Var}[X_F]$, $\mathbb{E}[X_G]$ und $\mathrm{Var}[X_G]$.

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $A$, $B$ und $C$ jeweils (unabhängig) gleichverteilt über $[0, 1]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Lösungen der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ reellwertig sind?
(Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $A \cdot C$ und verwenden Sie für die sich anschließende Rechnung $\int x^2 \ln x \; \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.)

*__Hinweis:__ Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

## Vorbereitung 1

1. Sei $(H_n)_{n\geq 1}$ eine rekurrente Ereignisfolge. Die Zufallsvariable $Z$ mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe für $k \in \mathbb{N}$ die Wartezeit $Z = k$ bis zum Eintreten des ersten Ereignisses $H_k$ der Ereignisfolge.

   Zeigen Sie die Ungleichung
   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Pr[Z = k] \leq 1\,.$$

2. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Indikatorvariablen mit gleicher Bernoulli-Verteilung.

   Zeigen Sie, dass die Folge $(H_n)_{n\geq 1}$ der Ereignisse $H_n = (X_n = 1)$ rekurrent ist.

## Tutoraufgabe 1

Peter und Paul spielen ein Spiel, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gewinnt. In jeder Runde setzt jeder von ihnen € 10 ein (der Gewinner erhält dann € 20).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter € 100 Gewinn gemacht hat, bevor er € 50 Verlust macht?

2. Wenn Peter erst mal seinen Gewinn hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt auf € 50 Verlust kommt?

## Tutoraufgabe 2

Bei einem Einwahlserver für $n = 10^3$ Teilnehmer nehmen wir an, dass zu einem festen Zeitpunkt jeder Teilnehmer mit Wahrscheinlichkeit $p = 0,05$ Zugriff auf den Server wünscht.

Berechnen Sie eine Näherung der Wahrscheinlichkeit, mit der gleichzeitig mehr als 55 Verbindungswünsche auftreten? Approximieren Sie dabei die Binomialverteilung durch die entsprechende Normalverteilung und benutzen Sie ggf. geeignete Tabellen für die Werte der Standardnormalverteilung.

## Tutoraufgabe 3

Wir benutzen die Funktion $h(t) = 0.027 + 0.0025 \cdot (t - 40)^2$ für $t \in \mathbb{R}$, um die „Sterblichkeitsrate" durch Lungenkrebs von Kettenraucherinnen abzuschätzen, die mindestens $t \geq 40$ Jahre alt sind. Ihre Lebensdauer sei $X$ und es gelte
$$\Pr[X > t \mid X > 40] = \exp\left(-\int_{40}^{t} h(s)\mathrm{d}s\right)\,.$$

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine 45-jährige Kettenraucherin mindestens 50 Jahre alt wird?