Technische Universität München (I7) **Sommer 2012**
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund **26. Juli 2012**

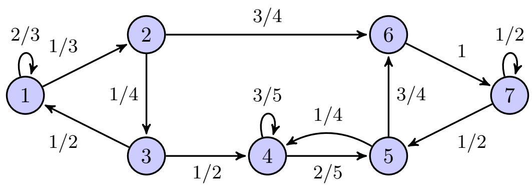
Lösung

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 12

Abgabe bis zum 18.7. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Aufgabe 12.1 Abzugeben: a),b) 1P+2P



(a) Klassifizieren Sie die Zustände der Markov-Kette mit obigem Übergangsgraph in transient, positiv-rekurrent und null-rekurrent.

(b) Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit $h_4 = \mathbb{E}[T_4]$.

(c) Die bedingte ZV $N = \min\{n \geq 1 \colon X_n \in \{4,5,6,7\}\} \mid [X_0 = 1]$ zählt die Zeitschritte, bis man, startend in Zustand 1, einen der Zustände aus $\{4,5,6,7\}$ erreicht.

(i) Zeigen Sie, dass $\Pr[N < \infty] = 1$.

(ii) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[N]$ und $\mathrm{Var}[N]$.

Hinweis: Wie muss man die Markov-Kette tranformieren, damit sich N als Übergangszeit $T_{s,t}$ auffassen lässt?

(d) Besitzt diese Markov-Kette eine eindeutige stationäre Verteilung?

Lösung:

(a) Die Zustände $\{1,2,3\}$ sind transient, die Zustände $\{4,5,6,7\}$ sind positiv-rekurrent. Null-rekurrente Zustände existieren nicht (da die MK endlich ist).

(b)

$$\begin{array}{lcl}
\mathbb{E}[T_4] & = & \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\mathbb{E}[T_{5,4}+1] = 1 + \frac{2}{5}\mathbb{E}[T_{5,4}] \\
\mathbb{E}[T_{5,4}] & = & \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\mathbb{E}[T_{6,4}+1] = 1 + \frac{3}{4}\mathbb{E}[T_{6,4}] \\
\mathbb{E}[T_{6,4}] & = & \mathbb{E}[T_{7,4}+1] \\
\mathbb{E}[T_{7,4}] & = & \frac{1}{2}\mathbb{E}[T_{7,4}+1] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[T_{5,4}+1] \\
\rightsquigarrow \mathbb{E}[T_{7,4}] & = & 1 + \frac{1}{2}\mathbb{E}[T_{7,4}] + \frac{1}{2}(1 + \frac{3}{4}\mathbb{E}[T_{6,4}] = \frac{15}{8} + \frac{7}{8}\mathbb{E}[T_{7,4}]) \\
\rightsquigarrow \mathbb{E}[T_{7,4}] & = & 15 \\
\rightsquigarrow \mathbb{E}[T_{6,4}] & = & 16 \\
\rightsquigarrow \mathbb{E}[T_{5,4}] & = & 13 \\
\rightsquigarrow \mathbb{E}[T_4] & = & 31/5 = 6.2
\end{array}$$

(c) Wir transformieren die MK so dass wir die SCC $\{4,5,6,7\}$ zu einem neuen Knoten t zusammenfassen. Wir berechnen die erzeugende Funktion $G_{1,t}$ durch Lösen des Systems

$$\begin{array}{lcl}
G_{1,t} & = & \frac{2}{3}xG_{1,t} + \frac{1}{3}xG_{2,t} \\
G_{2,t} & = & \frac{3}{4}x + \frac{1}{4}xG_{3,t} \\
G_{3,t} & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xG_{1,t}
\end{array}$$

…es ergibt sich $G_{1,t}(x) = \frac{6x^2+x^3}{24-16x-x^3}$

$$\Pr[N < \infty] = G_{1,t}(1) = 1$$

Mithilfe der erzeugenden Funktion können wir relativ leicht (d.h. mechanisch) den Erwartungswert und die Varianz berechnen (ohne nochmals für jeden Parameter ein Gleichungssystem zu lösen): $G'_{1,t}(x) = \frac{12x+3x^2}{24-16x-x^3} - \frac{(6x^2+x^3)(-16-3x^2)}{(24-16x-x^3)^2}$
$\mathbb{E}[N] = G'_{1,t}(1) = \frac{34}{7}(\approx 4.86)$

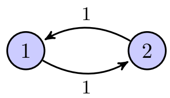
Für die Varianz sei an $\mathbb{E}[X(X-1)] = G''_{1,t}(1)$ erinnert. Damit ist $\mathrm{Var}[X] = G''_{1,t}(1) + G'_{1,t}(1) - (G'_{1,t}(1))^2$.

$G''_{1,t}(x) = \frac{112(-72-9x^2+2x^3)}{(24-16x-x^2)^3}$ (mit Maple). $\mathrm{Var}[X] = \frac{542}{49} \approx 11.06$.

(d) Ja, denn die MK hat nur eine bottom SCC ($\{4,5,6,7\}$).

Aufgabe 12.2 **Abzugeben** **1P+1P+1P**

Wir betrachten die Markov-Kette mit folgendem Übergangsgraphen:



(a) Leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\Pr_\alpha[X_n = 1]$ in Abhängigkeit von der Startverteilung α her.

(b) Bestimmen Sie die stationäre Verteilung der Markov-Kette.

(c) Für welche Startverteilungen α konvergiert die Markov-Kette gegen die stationäre Verteilung?

Lösung:

(a)

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

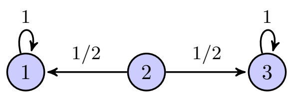
Es ist $P^{2n} = I_2$ und $P^{2n+1} = P$ für $n \in \mathbb{N}_0$. Daher ist $\alpha \cdot P^n = \alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$ für n gerade und $\alpha \cdot = (\alpha_2, \alpha_1)$ für n ungerade. Also $\Pr_\alpha[X_n = 1] = \alpha_1$ für n gerade und $\Pr_\alpha[X_n = 1] = \alpha_2$ für n ungerade.

(b) Aus der vorherigen Aufgabe folgt sofort, dass $\pi = (0.5, 0.5)$ die (eindeutige) stationäre Verteilung ist.

(c) Nur für $\pi = (0.5, 0.5)$ gilt, dass $\lim_{n\to\infty} \pi \cdot P^n = \pi$.

Aufgabe 12.3 **Abzugeben** **2P**

Gegen welche Verteilung konvergiert die Verteilung von X_n in Abhängigkeit von der Startverteilung für die Markov-Kette mit folgendem Übergangsgraphen?



Lösung:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Seit $\pi = (\pi_1, \pi_2, \pi_3)$ die Startverteilung. Es gilt $P^2 = P$. Also ist $\lim_{n\to\infty} \pi \cdot P^n = \pi \cdot P = (\pi_1 + \frac{\pi_2}{2}, 0, \pi_3 + \frac{\pi_2}{2})$.

Aufgabe 12.4 **Abzugeben** **1P+2P+2P+2P**

Betrachten Sie folgendes Programm zur Simulation eines Würfels:

```
int state  = 0;
int result = 0;

while( true ) {
  if(state == 0) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 1; } else { state = 2; }
  }
  if(state == 1) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 3; } else { state = 4; }
  }
  if(state == 2) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 5; } else { state = 6; }
  }
  if(state == 3) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 1; } else { state = 7; result = 1;}
  }
  if(state == 4) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 7; result = 2; } else { state = 7; result = 3;}
  }
  if(state == 5) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 7; result = 4; } else { state = 7; result = 5;}
  }
  if(state == 6) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 7; result = 6; } else { state = 2;}
  }
  if(state == 7) { state = 7 };
}
```

Nehmen Sie an, dass randomCoin() eine faire Münze implementiert, d.h., die Werte 0 und 1 immer mit jeweils W'keit 1/2 zurückgibt.

(a) Beschreiben Sie das Programm als eine Markov-Kette mit Zuständen $(s, r) \in \{0, 1, 2, \ldots, 7\} \times \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.

Es reicht, den Übergangsgraphen zu zeichnen.

(b) Bestimmen Sie $\Pr[T_{s,t} < \infty]$ für $(s, t) = ((0, 0), (7, 1))$ und für $(s, t) = ((0, 0), (7, 2))$.

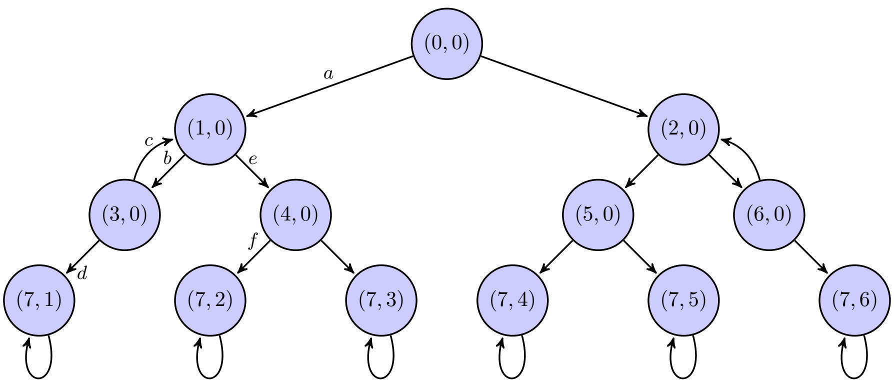
(c) Zeigen Sie, dass

$$\mathbb{E}[T_{s,t} \mid T_{s,t} < \infty] = \frac{G'_{s,t}(1)}{G_{s,t}(1)}.$$

(d) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_{s,t} \mid T_{s,t} < \infty]$ für $(s, t) = ((0, 0), (7, 1))$.

Lösung:

(a) Alle Kanten im Übergangsgraphen haben Wkeit 1/2 (bis auf die Selbstschleifen, die mit Wkeit 1 beschriftet sind). Kanten, die wir später noch benötigen, haben wir mit Labels $a, b, \ldots, f$ versehen.



(b) Zuerst für $(s, t) = ((0, 0), (7, 1))$: Wir interessieren uns für das Gesamtgewicht aller endlichen Pfade von $(0, 0)$ nach $(7, 1)$. Diese Menge ist beschrieben durch die reguläre Sprache $L_1 = L(ab(cb)^*d)$ und deren Gewicht ist $\Pr[L_1] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} = 1/6$.

Die Pfade von $(0, 0)$ nach $(7, 2)$ sind von der Form $L_2 = L(a(bc)^*ef)$ und haben das Gewicht $\Pr[L_2] = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = 1/6$.

(c) Es gilt $\Pr[T_{s,t} < \infty] = G_{s,t}(1)$ und

$$\mathbb{E}[T_{s,t} \mid T_{s,t} < \infty] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n \cdot \Pr[T_{s,t} = n \mid T_{s,t} < \infty] = \sum_{n \in \mathbb{N}_0} n \cdot \frac{\Pr[T_{s,t} = n]}{\Pr[T_{s,t} < \infty]} = \frac{G'_{s,t}(1)}{G_{s,t}(1)}$$

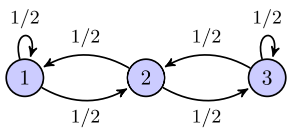
(d) Sei $(s,t) = ((0,0),(7,1))$: Wir stellen die erzeugende Funktion für die Pfade von s nach t auf:

$$\begin{array}{lcl} G_{s,t}(x) & = & \frac{1}{2}xG_{(1,0),t} \\ G_{(1,0),t}(x) & = & \frac{1}{2}xG_{(2,0),t}(x) \\ G_{(2,0),t}(x) & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}xG_{(1,0),t}(x) \\ \rightsquigarrow G_{(1,0),t}(x) & = & \frac{\frac{1}{4}x^2}{1-\frac{1}{4}x^2} \\ \rightsquigarrow G_{s,t}(x) & = & \frac{\frac{1}{8}x^3}{1-\frac{1}{4}x^2} \end{array}$$

Damit ergibt sich $\mathbb{E}[T_{s,t} \mid T_{s,t} < \infty] = \frac{G'_{s,t}(1)}{G_{s,t}(1)} = 11/3$

Aufgabe 12.5 **Abzugeben: a),b),c)** **1P+2P+2P**

Wir betrachten den folgenden Übergangsgraphen einer Markov-Kette:



(a) Stellen Sie die Übergangsmatrix P auf.

(b) Diagonalisieren Sie P und bestimmen Sie das Verhalten der Markov-Kette für $n \to \infty$ in Abhängigkeit von der Startverteilung.

(c) Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen der Rückkehrzeit $T_i = \tau_{i,i}$ für $i \in \{1,2,3\}$.

(d) Überprüfen Sie, dass $(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3})$ eine stationäre Verteilung der Markov-Kette ist.

$(h_i = \mathbb{E}[T_i].)$

Lösung:

(a)

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

(b) Die Eigenwerte von P sind $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$. Die dazugehörigen Eigenvektoren sind $(1,1,1)$, $(1,0,-1)$ und $(1,-2,1)$.

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

mit

$$T^{-1} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & 0 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Sei

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Dann ist $P = T \cdot D \cdot T^{-1}$ und daher $\lim_{n\to\infty} P^n = T \lim_{n\to\infty} D^n T^{-1} = T \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} T^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Das heißt $\lim_{n\to\infty} \pi P^n = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$ für **jede** Startverteilung π.

Im Allgemeinen: für eine doppelt-stochastische $n \times n$ Übergangsmatrix ist die stationäre Verteilung immer $(1/n, \ldots, 1/n)$ (und falls die MK aperiodisch und irreduzibel ist, konvergiert jede Startverteilung gegen diese stationäre Verteilung).

(c) Aus Symmetriegründen ist natürlich $G_{1,1} = G_{3,3}$.

$$\begin{array}{lcl}
G_{1,1}(x) & = & \frac{1}{2}xG_{2,1}(x) + \frac{1}{2}x \\
G_{2,1}(x) & = & \frac{1}{2}xG_{3,1}(x) + \frac{1}{2}x \\
G_{3,1}(x) & = & \frac{1}{2}xG_{3,1}(x) + \frac{1}{2}xG_{2,1}(x) = \frac{xG_{2,1}}{2-x} \\
\rightsquigarrow G_{2,1}(x) & = & \frac{1}{2}x + \frac{x^2G_{2,1}}{4-2x} = \frac{x/2}{1-\frac{x^2}{4-2x}} = \frac{2x-x^2}{4-2x-x^2} \\
\rightsquigarrow G_{1,1}(x) & = & \frac{x}{2} + \frac{x^2-\frac{x^3}{2}}{4-2x-x^2}
\end{array}$$

Schön ist: $G_{1,1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \sum_{i\geq 0} \frac{F_i}{2^i}x^{i+3}$ mit $F_0 = 0$ $F_1 = 1$ und $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ den Fibonacci-Zahlen.

Es bleibt $G_{2,2}$ (beachte, dass wegen Symmetrie wieder gilt $G_{1,2}(x) = G_{3,2}(x)$):

$$\begin{array}{lcl}
G_{2,2}(x) & = & \frac{1}{2}xG_{1,2}(x) + \frac{1}{2}xG_{3,2}(x) = xG_{1,2}(x) \\
G_{1,2}(x) & = & \frac{1}{2}xG_{1,2}(x) + \frac{1}{2}x = \frac{x}{2-x} \\
\rightsquigarrow G_{2,2}(x) & = & \frac{x^2}{2-x} = \frac{x^2}{2}\sum_{i\geq 0}\frac{1}{2^i}x^i = \sum_{i\geq 0}\frac{1}{2^{i+1}}x^{i+2}
\end{array}$$

Andere Lösung:

Anstatt die erzeugende Funktion aus der MK durch ein Gleichungssystem mechanisch abzuleiten, kann man (hier) die Koeffizienten der Potenzreihendarstellung der EF direkt berechnen.

Jeder Pfad der Länge n hat das selbe Gewicht 2^{-n}, also reicht es Pfade zu zählen. Sei a_n die Anzahl Pfade von 1 nach 1 der Länge genau n, b_n die Pfade von 2 nach 1 und c_n die Pfade von 3 nach 1 (der Länge exakt n).

Dann gilt für $n \geq 2$: $b_n = c_{n-1}$ und $c_n = c_{n-1} + b_{n-1}$. Daher gilt für $n \geq 3$ $a_n = b_{n-1}$. Also wenn man alles zusammensetzt: $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ für $n \geq 3$. (Die Sonderfälle sind $a_1 = 1, a_2 = 1$)

Damit ergibt sich ebenso $G_{1,1}(x) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{4} + \sum_{n\geq 0}\frac{a_n}{2^n}x^{n+3}$.

$G_{2,2}$ lässt sich ebenso durch Abzählen von Pfaden finden.

(d) Nachrechnen…