Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Lösungsblatt 3
9. Mai 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir verknüpfen Hausaufgabe 4 und Tutoraufgabe 2 von Blatt 1 wie folgt.
Sei Ω_1 die Menge aller Paare von Farbmerkmalen aus $\{w, s, r\}$, d.h., $\Omega_1 = \{(x, y)\,;\, x, y \in \{w, s, r\}\}$. Dann lassen sich die Ergebnisse (Elementarereignisse) der in HA 4 von Blatt 1 beschriebenen zufälligen Ziehung durch Ω_1 beschreiben.

1. Bestimmen Sie den HA 4 zugrunde liegenden diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \Pr)$! Zeigen Sie, dass keine Laplace-Verteilung vorliegt.

2. Seien E_1 bzw. E_2 das Ereignis, dass beim ersten bzw. zweiten Zug ein schwarzer Ball gezogen wird. Sind E_1 und E_2 unabhängig? Beweis!

3. Die Ziehung in HA 4 lässt sich nach TA 2 durch einen Laplace-verteilten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_2, \Pr)$ beschreiben, so dass die Elementarereignisse $x \in \Omega_1$ eineindeutig gewissen Ereignissen $E \subseteq \Omega_2$ mit $\Pr(x) = \Pr[E]$ entsprechen.

   Bestimmen Sie Ω_2 und definieren Sie eine Abbildung $X : \Omega_2 \to \Omega_1$ so dass $\Pr(x) = \Pr[X = x]$ gilt.

Bemerkung: HA 4 ist Spezialfall eines Aufgabentypus, in dem die Auswahlen von Elementen verschiedener Sorten betrachtet werden. In Übungsblatt 4 wird dieser Aufgabentypus zu hypergeometrischen bzw. poly-hypergeometrischen Verteilungen führen.

Lösung

Sei $F = \{w, s, r\}$. Wir notieren geordnete Paare (x, y) als Wörter xy. Die erste bzw. zweite Komponente von $z \in \{w, s, r\}^2$ seien $X(z)$ bzw. $Y(z)$. Dann sind X, Y Zufallsvariable auf Ω_1.

1. Berechnung der Wahrscheinlichkeitsdichte $\Pr(z)$.

$$\begin{array}{lll} \Pr(ww) = 0\,, & \Pr(ws) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6}\,, & \Pr(wr) = \frac{1}{7} \cdot \frac{4}{6}\,, \\ \Pr(sw) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}\,, & \Pr(ss) = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6}\,, & \Pr(sr) = \frac{2}{7} \cdot \frac{4}{6}\,, \\ \Pr(rw) = \frac{4}{7} \cdot \frac{1}{6}\,, & \Pr(rs) = \frac{4}{7} \cdot \frac{2}{6}\,, & \Pr(rr) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6}\,. \end{array}$$

   Nach Konstruktion entsprechend dem zu Grunde liegenden Algorithmus ist Pr eine Dichtefunktion mit $\sum_{z \in \Omega_1} \Pr(z) = 1$, was in obiger Matrix leicht verifizierbar ist, d.h., $(\Omega_1, \Pr)$ definiert einen Wahrscheinlichkeitsraum.

   Da offenbar nicht alle Funktionswerte von Pr gleich sind, liegt keine Laplace-Verteilung vor. (2P)

2. Es gelten

$$\begin{aligned}
\Pr[E_1] &= & &= \tfrac{2}{7}\,,\\
\Pr[E_2] &= \Pr[\{ws, ss, rs\}] & &\\
&= \Pr(ws) + \Pr(ss) + \Pr(rs) & &\\
&= \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{2}{6} + \tfrac{2}{7}\cdot\tfrac{1}{6} + \tfrac{4}{7}\cdot\tfrac{2}{6} & &= \tfrac{2}{7}\\
\Pr[E_1 \cap E_2] &= \Pr(ws) & &\\
&= \tfrac{1}{7}\cdot\tfrac{2}{6} & &= \tfrac{1}{21}\,.
\end{aligned}$$

Es folgt $\Pr[E_1 \cap E_2] = \frac{1}{21} \neq \frac{2}{7}\cdot\frac{2}{7} = \Pr[E_1]\cdot\Pr[E_2]$, mithin sind E_1 und E_2 abhängig. (1P)

3. Wir definieren $\Omega_2 = [21]$ und die Ereignisse E durch die folgende Zuordnung.

$$\begin{array}{lll}
ww \to \emptyset\,, & ws \to \{1\}\,, & wr \to \{2,3\}\,,\\
sw \to \{4\}\,, & ss \to \{5\}\,, & sr \to [6,9]\,,\\
rw \to [10,11]\,, & rs \to [12,15]\,, & rr \to [16,21]\,.
\end{array}$$

Die Laplace-Verteilung bedingt $\Pr(x) = \frac{1}{21}$ für alle $x \in \Omega_2$. Für $x \to E$ gilt offensichtlich $\Pr(x) = \Pr[E]$.

Wir definieren $X(e) = x$ für $x \to E$ und alle $e \in E$. (2P)

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei $W = (\Omega, \Pr)$ mit $\Omega = [1, 60] \subseteq \mathbb{N}$, so dass alle Ergebnisse aus Ω gleichwahrscheinlich sind. Seien X_1 und X_2 Indikatorvariablen über W, deren Verteilung durch die folgenden Ereignisse gegeben ist:

$$A := X_1^{-1}(1) \;=\; [1, 15] \quad \text{und} \quad B := X_2^{-1}(1) \;=\; [13, 24]\,.$$

1. Zeigen Sie, dass die Variablen X_1 und X_2 unabhängig sind.
2. Geben Sie eine Indikatorvariable X_3 mit $\Pr[X_3 = 1] = \frac{1}{3}$ an, so dass die Variablen X_1, X_2, X_3 unabhängig sind.

Hinweis: $[1, n] = \{i \in \mathbb{N}\,;\ 1 \le i \le n\}$.

Lösung

1. $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{5}$.

$$\begin{aligned}
\Pr[A \cap B] &= \Pr[[13, 15]] = \tfrac{1}{20} = \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{1}{5} = \Pr[A]\cdot\Pr[B]\,,\\
\Pr[A \cap \overline{B}] &= \Pr[[1, 12]] \;\;= \tfrac{1}{5} \;= \tfrac{1}{4}\cdot\tfrac{4}{5} = \Pr[A]\cdot\Pr[\overline{B}]\,,\\
\Pr[\overline{A} \cap B] &= \Pr[[16, 24]] = \tfrac{3}{20} = \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{1}{5} = \Pr[\overline{A}]\cdot\Pr[B]\,,\\
\Pr[\overline{A} \cap \overline{B}] &= \Pr[[25, 60]] = \tfrac{3}{5} \;= \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{4}{5} = \Pr[\overline{A}]\cdot\Pr[\overline{B}]\,.
\end{aligned}$$

(2P)

2. Man nehme aus allen 4 Mengen $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$ ein Drittel der Elemente,

   z. B. $C = [9, 13] \cup [22, 36]$,

   und setze $X_3^{-1}(1) = C$. (1P)

3. Mit $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{5}$, $\Pr[C] = \frac{1}{3}$ gilt wegen totaler Wahrscheinlichkeit zusammen mit Unabhängigkeit der Variablen

$$\begin{aligned}\Pr[X = 1] &= \Pr[A \cap \overline{B} \cap \overline{C}] + \Pr[\overline{A} \cap B \cap \overline{C}] + \Pr[\overline{A} \cap \overline{B} \cap C] \\ &= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} + \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{26}{60}\,.\end{aligned}$$

(2P)

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei $W = (\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse E bezeichnen wir $\Omega \setminus E$ mit $\overline{E}$.

1. Wir beobachten Ereignisse A und B und wissen, dass A mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[A] = \frac{1}{10}$ eintritt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass B eintritt, wenn A bzw. $\overline{A}$ eingetreten ist, sei $\Pr[B|A] = \frac{5}{9}$ bzw. $\Pr[B|\overline{A}] = \frac{1}{9}$.

   Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass A oder B eintritt, als Bruchzahl!

2. Seien C und X Ereignisse aus W mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[C|X] = \frac{2}{9}$, $\Pr[X|C] = \frac{1}{10}$ und $\Pr[C|\overline{X}] = \frac{2}{3}$.

   Berechnen Sie $\Pr[X]$.

3. Sei $W = (\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $\Pr[\omega] \neq 0$ für alle $\omega \in \Omega$. Kann es in W zwei verschiedene, unabhängige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ geben, für die $|A| = |B| = 2$ gilt? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Lösung

1. Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned}\Pr[B] &= \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] \;+\; \Pr[B|\overline{A}] \cdot \Pr[\overline{A}] \\ &= \tfrac{5}{9} \cdot \tfrac{1}{10} \;+\; \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{9}{10} \;=\; \tfrac{7}{45}\,.\end{aligned}$$

   Siebformel:

$$\begin{aligned}\Pr[A \cup B] &= \Pr[A] \;+\; \Pr[B] \;-\; \Pr[A \cap B] \\ &= \tfrac{1}{10} \;+\; \tfrac{7}{45} \;-\; \tfrac{1}{18} \;=\; \tfrac{1}{5}\,.\end{aligned}$$

(1P)

2. Satz von Bayes:

$$\Pr[X|C] = \frac{\Pr[C|X]\cdot\Pr[X]}{\Pr[C|X]\cdot\Pr[X] \;+\; \Pr[C|\overline{X}]\cdot\Pr[\overline{X}]}$$

   Einsetzen:

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{2}{9}\cdot\Pr[X]}{\frac{2}{9}\cdot\Pr[X] \;+\; \frac{2}{3}\cdot(1-\Pr[X])}$$

   Auflösung nach $\Pr[X]$:

$$\Pr[X] = \tfrac{1}{4}\,. \qquad \text{(2P)}$$

3. Antwort: Nein.

   Beweis:
   Wir schreiben abkürzend $p_i = \Pr(\omega_i)$
   und setzen o. B. d. A. $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ mit

$$Pr[A] = p_1 + p_2 \qquad \text{und} \qquad Pr[B] = p_1 + p_3 \qquad \text{und} \qquad Pr[A\cap B] = p_1.$$

   Es gilt

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1\,.$$

   Die Unabhängikeit impliziert

$$p_1 = (p_1+p_2)\cdot(p_1+p_3)\,,$$

   d. h.

$$p_1 = (1-p_3)\cdot(1-p_2) = 1 - p_3 - p_2 + p_2\cdot p_3\,,$$

   mithin

$$p_1 + p_2 + p_3 = 1 = 1 + p_2\cdot p_3\,.$$

   Wegen $p_2\cdot p_3 \neq 0$ ist die letzte Gleichung aber nicht erfüllbar. (2P)

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir gehen aus von einem Zufallsexperiment mit Ereignissen aus einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$, bei dessen Ausführung stets mindestens eines von 3 bestimmten Ereignissen $A, B, C \subseteq \Omega$ eintritt. A und B seien unabhängige Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$. Es sei C disjunkt zu A und B.

1. Berechnen Sie $\Pr[A\cup B]$ und $\Pr[C]$!

2. Geben Sie ein konkretes Beispiel für $(\Omega, \Pr)$ an.

Lösung

1. $$\begin{aligned}\Pr[A \cup B] &= \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]\\ &= \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A] \cdot \Pr[B] \;=\; \tfrac{3}{4}\,.\end{aligned}$$
   Aus $1 = \Pr[\Omega] = \Pr[C] + \Pr[A \cup B]$ folgt $\Pr[C] = \frac{1}{4}$. (3P)

2. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ eine 4-elementige Ergebnismenge.
   Wir setzen für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ $\Pr[\omega_i] = \frac{1}{4}$.
   Dann erfüllen $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ und $C = \{\omega_4\}$
   die gewünschten Eigenschaften. (2P)

Zusatzaufgabe 1 (wird nicht korrigiert)

Sei $n \in \mathbb{N}$. Man zeige:
Paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}$ unabhängig sind.

Lösung

$\Rightarrow$:
Seien $A_1, A_2, \ldots, A_n$ paarweise verschieden und unabhängig. Dann haben wir für alle $s_1 \in W_{I_{A_1}}, \ldots s_n \in W_{I_{A_n}}$ zu zeigen, dass gilt

$$\Pr[I_{A_1} = s_1, \ldots, I_{A_n} = s_n] = \Pr[I_{A_1} = s_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[I_{A_n} = s_n]\,.$$

Für Indikatorvariablen gilt $W_{I_{A_i}} \subseteq \{0, 1\}$, d. h. $s_i \in \{0, 1\}$ für alle i. Mit der Bezeichnungsweise von Lemma 23 der Vorlesung folgt

$$A^{s_i} = \{\omega\,;\, I_{A_i}(\omega) = s_i\}\,.$$

Mithin folgt durch Anwendung von Lemma 23

$$\begin{aligned}\Pr[I_{A_1} = s_1, \ldots, I_{A_n} = s_n] &= \Pr[A^{s_1} \cap \ldots \cap A^{s_n}]\\ &= \Pr[A^{s_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A^{s_n}]\\ &= \Pr[I_{A_1} = s_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[I_{A_n} = s_n]\,.\end{aligned}$$

$\Leftarrow$:
Seien die Indikatorvariablen $I_{A_1}, I_{A_2}, \ldots, I_{A_n}$ unabhängig. Dann folgt durch Anwendung von Satz 46 der Vorlesung für die Mengen $S_i = \{1\}$ für alle i, dass die Ereignisse $X_1 \in S_1$, $\ldots$, $X_n \in S_n$ unabhängig sind.
Da die Ereignisse $X_i \in S_i$ identisch sind mit den entsprechenden Ereignissen A_i, folgt die zu beweisende Aussage.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

$$Z := \text{Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis beide } \mathtt{O} \text{ gezogen wurden.}$$

Lösung

Es gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] = 2\cdot(\frac{2}{6})\cdot\frac{1}{5} + 3\cdot\binom{2}{1}(\frac{2\cdot 4}{6\cdot 5})\cdot\frac{1}{4} + 4\cdot\binom{3}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 5\cdot 4})\cdot\frac{1}{3} + \\ +5\cdot\binom{4}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3})\cdot\frac{1}{2} + 6\cdot\binom{5}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}) = \frac{14}{3}.\end{aligned}$$

Wegen

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z^2] = 4\cdot(\frac{2}{6})\cdot\frac{1}{5} + 9\cdot\binom{2}{1}(\frac{2\cdot 4}{6\cdot 5})\cdot\frac{1}{4} + 16\cdot\binom{3}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 5\cdot 4})\cdot\frac{1}{3} + \\ +25\cdot\binom{4}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3})\cdot\frac{1}{2} + 36\cdot\binom{5}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}) = \frac{70}{3}\end{aligned}$$

ist

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{14}{9}.$$

Vorbereitung 2

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2\cdot\mathrm{Var}[X] + 2\cdot\mathrm{Var}[Y]\,.$$
2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y)\cdot(X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y]\cdot\mathbb{E}[X-Y]\,.$$

Lösung

Zur Lösung von Gleichungen, die Erwartungswert und Varianz enthalten, benötigt man die folgenden Beziehungen für Zufallsvariable $X, X_1, \ldots, X_n$ über demselben Wahrscheinlichkeitsraum, und beliebige $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

<u>Linearität des Erwartungswerts:</u>

$$\mathbb{E}[a_1X_1 + a_2X_2 + \ldots + a_nX_n] = a_1\mathbb{E}[X_1] + a_2\mathbb{E}[X_2] + \ldots + a_n\mathbb{E}[X_n]\,.$$

<u>Varianz als Differenz:</u>

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Varianz affin transformierter Variablen:

$$\mathrm{Var}\,[aX+b] = a^2\mathrm{Var}\,[X]\,.$$

1.
$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\,[X+Y] + \mathrm{Var}\,[X-Y] \\
&\qquad = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 + \mathbb{E}[(X-Y)^2] - \mathbb{E}[X-Y]^2 \\
&\qquad = 2\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[Y^2] - (2\mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[Y]^2) \\
&\qquad = 2\cdot \mathrm{Var}\,[X] + 2\cdot \mathrm{Var}\,[Y]\,.
\end{aligned}$$

2. Es gilt
$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) \;&\Rightarrow\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&\Rightarrow\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2
\end{aligned}$$

   und damit, mit Benützung der Linearität von $\mathbb{E}$,
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] &= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] \\
&= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) \\
&= \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y]\,.
\end{aligned}$$

Vorbereitung 3

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1,\ldots,6$ einmal vorgekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariablen X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$!

Lösung

Das Experiment kann in 6 aufeinanderfolgende Phasen eingeteilt werden. In jeder Phase $i \in [6]$ werden Augenzahlen geworfen, die in vorausgegangenen Phasen schon einmal gewürfelt worden sind und zwar so lange, bis eine neue Augenzahl geworfen wird, die bisher noch nicht geworfen wurde. Dann genau ist die Phase i abgeschlossen. Falls $i < 6$, dann fährt man man mit Phase $i+1$ fort.
Wenn wir der Phase i eine Menge $g \subseteq [6]$ mit $|g| = i-1$ zuordnen, dann läßt sich für Phase i die Ergebnismenge $\Omega = \{x_1x_2\ldots x_n \in [6]^n\,;\, n\in\mathbb{N}\}$ zusammen mit der Teilmenge

$$\Omega_g = \{x_1x_2\ldots x_{n-1}z \in [6]^*\ ;\ n\in\mathbb{N},\, x_k\in g,\, z\in([6]\setminus g)\}$$

betrachten. Wir definieren für $n\in\mathbb{N}$ das Ereignis

$$E_n = \{x_1x_2\ldots x_{n-1}z \in [6]^*\,;\, x_k \in g,\, z\in([6]\setminus g)\}$$

und ordnen ihm die folgende Wahrscheinlichkeit zu:

$$\Pr_g[E_n] \;=\; \left(\frac{|g|}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{6-|g|}{6} \;=\; \left(\frac{i-1}{6}\right)^{n-1}\cdot\left(1-\frac{(i-1)}{6}\right)\,.$$

Das Ereignis E_n bedeutet, dass wir $n-1$ mal eine in den früheren Phasen schon gewürfelte Augenzahl würfeln und beim n-ten Wurf eine bisher nicht gewürfelte Augenzahl erhalten. Damit können wir für die Phase i eine Zufallsvariable $X_i : \Omega_g \to \mathbb{R}$ definieren, die jeweils die Anzahl n der Würfe in der Phase i ausgibt.
X_i ist eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1 - \frac{(i-1)}{6}$. Für Erwartungswert und Varianz folgt nach Vorlesung

$$\mathbb{E}[X_i] = p^{-1} = \frac{6}{6-i+1} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X_i] = \frac{1-p_i}{p_i^2} = \left(\frac{6}{6-i+1}\right)^2 \cdot \frac{(i-1)}{6}\,.$$

Da die Menge der X_i unabhängig ist, gilt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{6} p_i^{-1} = 6/6 + 6/5 + 6/4 + \cdots + 6/1 = 14.7$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1-p_i}{p_i^2} = 0 + \frac{5/6}{1/36} + \frac{4/6}{4/36} + \cdots + \frac{1/6}{25/36} = 38.99.$$

Vorbereitung 4

Sei $(K, +, \cdot)$ ein Körper. Man beweise durch vollständige Induktion, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und $x_1, x_2, \ldots, x_n \in K$ gilt:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n}(1-x_i) &= 1 - \sum_{1\le i_1\le n} x_{i_1} \\
&\quad + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} x_{i_1}\cdot x_{i_2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^l \cdot \sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le n} x_{i_1}\cdot \ldots \cdot x_{i_l} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^n \cdot x_1 \cdot \ldots \cdot x_n\,.
\end{aligned}$$

Lösung

Wir beweisen die Eigenschaft $P(n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, wobei $P(n)$ genau dann wahr sei, wenn die Gleichung für alle $x_1, \ldots, x_n$ gilt.

$\underline{n = 1:}$
alle Summen sind leer mit Ausnahme der ersten Summe, d. h. $P(1)$ ist äquivalent mit der Gleichung $(1 - x_1) = 1 - x_1$, die natürlich gültig ist.

$\underline{n \to n+1:}$

Wir setzen $P(n)$ voraus und beweisen $P(n+1)$.

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_i) &= (1-x_{n+1})\left(1-\textstyle\sum_{1\le i_1\le n} x_{i_1}\right) \\
&\quad + (1-x_{n+1})\textstyle\sum_{1\le i_1<i_2\le n} x_{i_1}\cdot x_{i_2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (1-x_{n+1})(-1)^l \textstyle\sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le n} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_l} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (1-x_{n+1})(-1)^n\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n\,. \\
&= 1-x_{n+1}-\textstyle\sum_{1\le i_1\le n} x_i \\
&\quad + \textstyle\sum_{1\le i_1\le n} x_i x_{n+1} + \sum_{1\le i_1<i_2\le n} x_{i_1}\cdot x_{i_2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^l\cdot \sum_{1\le i_1<\ldots<i_{l-1}\le n} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{l-1}}x_{n+1} + (-1)^l\cdot\sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le n} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_l} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^n\textstyle\sum_{1\le i_1<\ldots<i_{n-1}\le n} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_{n-1}}x_{n+1} + (-1)^n\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n \\
&\quad + (-1)^{n+1}\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_n x_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Wir fassen zusammen zu

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^{n+1}(1-x_i) &= 1-\sum_{1\le i_1\le n+1} x_{i_1} \\
&\quad + \sum_{1\le i_1<i_2\le n+1} x_{i_1}\cdot x_{i_2} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^l\cdot\sum_{1\le i_1<\ldots<i_l\le n+1} x_{i_1}\cdot\ldots\cdot x_{i_l} \\
&\quad \vdots \\
&\quad + (-1)^{n+1}\cdot x_1\cdot\ldots\cdot x_{n+1}\,.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 1

Sei T eine nicht leere Menge von n Tieren. T bestehe aus genau a Ochsen und b Eseln, so dass also $a + b = n$ gilt. Die Wahrscheinlichkeit, dass von $r \neq 0$ ausgewählten Tieren genau x Tiere Ochsen sind, ist gegeben durch

$$\Pr(x) = \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{r-x}}{\binom{n}{r}} .$$

Sei nun $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, r\} \subseteq \mathbb{N}_0$. Zeigen Sie, dass $(\Omega, \Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Lösung

Offensichtlich gilt $0 \leq \Pr(x)$. Wir zeigen nun $\Pr[\Omega] = 1$ wie folgt.
Wir zitieren die Vandermonde'sche Identität für Produkte von Binomialkoeffizienten, die bekannt ist aus der Vorlesung Diskrete Strukturen. Danach gilt für alle obigen a, b, r

$$\sum_{x=0}^{r} \left[\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{r-x} \right] = \binom{a+b}{r} .$$

Wegen $a + b = n$ folgt mit diesem Ergebnis

$$\begin{aligned}
\Pr[\Omega] &= \sum_{x=0}^{r} \Pr(x) \\
&= \sum_{x=0}^{r} \frac{\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{r-x}}{\binom{n}{r}} \\
&= \binom{n}{r}^{-1} \cdot \sum_{x=0}^{r} \left[\binom{a}{x} \cdot \binom{b}{r-x} \right] \\
&= 1 .
\end{aligned}$$

Damit gilt auch $\Pr(x) \leq 1$ für alle $x \in \Omega$.

Bemerkung: Man beachte den Zusammenhang mit der hypergeometrischen Verteilungsdichte.

Tutoraufgabe 2

Sei $W = (\Omega_n, \Pr)$ mit $\Omega_n = \{a, b, c\}^n$, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass a bzw. b bzw. c in der i-ten Komponente von $w \in \Omega_n$ auftritt jeweils $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$ seien.
Wir betrachten die Zufallsvariablen $X_a, X_b, X_c : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, die einem Wort w entsprechend die Anzahl der enthaltenen a bzw. b bzw. c zuordnen.

1. Sind X_a, X_b, X_c unabhängig? Begründung!
2. Geben Sie die gemeinsame Dichte der Variablen X_a und X_b an!
   Geben Sie die entsprechenden Randdichten von X_a und X_b an!
3. Berechnen Sie den Erwartungswert von X_c.

Lösung
Wir können auch schreiben

$$\Omega_n = \{w \in \{a,b,c\}^*;\ |w| = n\}\,.$$

Wir bezeichnen mit w_i im Folgenden stets den i-ten Buchstaben eines Wortes w, d. h. es gelte $w = w_1 w_2 \dots w_n$. Gegeben seien beliebige Buchstaben $x_1, x_2 \dots x_n \in \{a,b,c\}$. Dann gilt

$$\Pr_n(x_1 x_2 \dots x_n) = \Pr(x_1) \cdot \Pr(x_2) \cdot \ldots \cdot \Pr(x_n)\,.$$

Für ein beliebiges Wort w bezeichnen wir mit w_a bzw. w_b bzw. w_c die Anzahl der Buchstaben a bzw. b bzw. c in w. Wegen der Kommutativität der Multiplikation folgt

$$\Pr_n(w) = \left(\frac{1}{2}\right)^{w_a} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{w_b} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{w_c}\,.$$

Für die Wertemengen von X_a, X_b und X_c gilt

$$W_{X_a} = W_{X_b} = W_{X_c} = \{0,1,2,\dots,n\}\,.$$

1. Offensichtlich sind die Zufallsvariablen X_a, X_b, X_c abhängig, da für die Summe $X_a + X_b + X_c = n$ gelten muss. Wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[X_a = n, X_b = n, X_c = n] &= 0\\
&\neq \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{n} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n}\\
&= \Pr[X_a = n] \cdot \Pr[X_b = n] \cdot \Pr[X_c = n]\,.
\end{aligned}$$

2. Definitionsgemäß gilt für die gemeinsame Dichte f_{X_a,X_b} von X_a und X_b

$$f_{X_a,X_b}(x,y) = \Pr_n[X_a = x, X_b = y]\,,\ \forall x,y \in \{0,1,2,\dots,n\}\,.$$

Für alle übrigen reellen Werte von x und y ist die Dichte gleich 0. Für alle Paare x, y mit $x + y > n$ ergibt sich ebenfalls die Dichte 0.

Es gilt die Ereignisgleichung

$$\begin{aligned}
E &:= (X_a = x, X_b = y)\\
&= \{w \in \Omega_n\,;\ (X_a(w) = x) \wedge (X_b(w) = y) \wedge (X_c(w) = n - (x+y))\}\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
f_{X_a,X_b}(x,y) &= \Pr[E]\\
&= |E| \cdot \Pr(a)^x \cdot \Pr(b)^y \cdot \Pr(c)^{n-x-y}\\
&= \frac{n!}{x!y!(n-x-y)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{y} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-x-y}\,.
\end{aligned}$$

Die Randdichten der gemeinsamen Dichte von X_a und X_b sind gleich den Dichten der entsprechenden Variablen X_a und X_b. Wir berechnen zunächst die Dichte von X_a und benutzen eine abkürzende Notation $\overline{a}$ für ein Zeichen aus $\{b,c\}$.

$$\begin{aligned}
E_a &:= (X_a = x)\\
&= \{w \in \{a,\bar{a}\}^n\,;\ (X_a(w) = x) \wedge (\text{Anzahl der Zeichen ungleich a}) = n - x)\}\,.
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
f_{X_a}(x) &= \Pr[E_a] \\
&= |E_a| \cdot \Pr(a)^x \cdot \Pr(\bar{a})^{n-x} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-x} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n .
\end{aligned}$$

Die Formel gilt auch für $x > n$.

Wir berechnen die Dichte von X_b wie folgt.

$$\begin{aligned}
E_b &:= (X_b = x) \\
&= \{w \in \{b, \bar{b}\}^n \,;\, (X_b(w) = x) \wedge (\text{Anzahl der Zeichen ungleich b}) = n - x)\} .
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\begin{aligned}
f_{X_b}(x) &= \Pr[E_b] \\
&= |E_b| \cdot \Pr(b)^x \cdot \Pr(\bar{b})^{n-x} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^x \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{n-x} .
\end{aligned}$$

Die Formel gilt auch für $x > n$.

Offensichtlich sind die Variablen X_a, X_b binomialverteilt. Das gleiche gilt auch für X_c im Folgenden.

3. Es gilt

$$\begin{aligned}
f_{X_c}(x) &= \Pr[E_c] \\
&= |E_c| \cdot \Pr(c)^x \cdot \Pr(\bar{c})^{n-x} \\
&= \frac{n!}{x!(n-x)!} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-x} .
\end{aligned}$$

Mithin folgt nach Vorlesung für binomialverteilte Variable

$$\mathbb{E}[X_c] = \frac{n}{6} .$$

Tutoraufgabe 3

In einem Schützenverein haben Anfänger beim Tontaubenschießen nur eine Trefferquote von 10%.

1. Seien $i \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt ein Anfänger bei k Schüssen genau i Treffer?

2. Wir wollen die Leistung von 100 Anfängern mit Noten bewerten. Note 2 bedeutet, dass der Schütze bei 2 Schüssen genau 1 Treffer erzielt. Nun lassen wir jeden der 100 Schützen (je) 2 Schussversuche machen und bezeichnen mit X die Anzahl der Schützen, die die Note 2 erhalten.

   Geben Sie die Dichtefunktion der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an! Berechnen Sie den Erwartungswert von X!

Lösung

1. Die Antwort ist $\binom{k}{i}(\frac{1}{10})^i(\frac{9}{10})^{k-i}$. Wir wollen aber auch die Herleitung der Antwort sehen.

   Es gibt zunächst 2 Ereignisse. Sei ω_t das Ereignis „ein Anfänger hat mit einem abgegebenen Schuss die Tontaube getroffen“, entsprechend sei $\omega_{\bar{t}}$ das Ereignis „ein Anfänger hat mit einem abgegebenen Schuss die Tontaube nicht getroffen“. Die betrachtete Ergebnismenge ist $\Omega = \{\omega_t, \omega_{\bar{t}}\}$ und die Wahrscheinlichkeitsfunktion ist $\Pr[\omega_t] = \frac{1}{10}$, $\Pr[\omega_{\bar{t}}] = \frac{9}{10}$ Wir definieren eine Indikatorvariable S für das Treffereignis.

   $$S(\omega_t) = 1 \qquad \text{und} \qquad S(\omega_{\bar{t}}) = 0\,.$$

   mit der Dichtefunktion

   $$f_S(0) = \frac{9}{10} \qquad \text{und} \qquad f_S(1) = \frac{1}{10}\,.$$

   Sei S_k die k-te Wiederholung eines Schusses. Dann ist die Anzahl i der Treffer bei k Schüssen gegeben durch

   $$T_k = \sum_{j=1}^{k} S_j \qquad \text{mit} \qquad W_{T_k} = \{0, 1, \ldots, k\}\,.$$

   T_k ist binomialverteilt ($T_k \sim \text{Bin}(k, \frac{1}{10})$) mit der Dichtefunktion

   $$f_{T_k} = \binom{k}{i}\left(\frac{1}{10}\right)^i\left(\frac{9}{10}\right)^{k-i}\,.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Anfänger die Note zwei erzielt ist

   $$\Pr[T_2 = 1] = f_{T_2}(1) = \binom{2}{1}\left(\frac{1}{10}\right)^1\left(\frac{9}{10}\right)^1 = 0,18\,.$$

   Wir definieren die Indikatorvariable Z, die angeben soll, ob ein Anfänger die Note 2 erhält oder nicht. Die Dichtefunktion für Z ist gegeben durch

   $$f_Z(0) = 0,82 \qquad \text{und} \qquad f_Z(1) = 0,18,$$

   Sei G_j die j-te Wiederholung (Parallelausführung) der Zufallsvariablen Z für $1 \leq j \leq 100$. Dann ist für 100 Wiederholungen die Anzahl X der erfolgreichen Ausführung dieser Variablen (Note 2) gegeben durch

   $$X = \sum_{j=1}^{100} G_j \qquad \text{mit} \qquad W_X = \{0, 1, \ldots, 100\}\,.$$

   X ist binomialverteilt ($X \sim \text{Bin}(100, p)$ mit $p = 0,18$) mit dem Erwartungswert

   $$\mathbb{E}[X] = 100 \cdot 0,18 = 18\,.$$

Tutoraufgabe 4

Angenommen eine Maschine gehe an jedem Betriebstag mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ kaputt.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine 10 Tage lang hintereinander störungsfrei arbeitet?

2. Wie groß ist die erwartete Anzahl k von hintereinander folgenden störungsfreien Tagen einer Maschine, unter der Annahme, dass die Maschine am Tag $k+1$ defekt ist?

Lösung

1. Es wurde nicht gefordert, dass die Maschine am 11. Tag kaputt geht. (Der Gewinn wird ausbezahlt, wenn die Maschine den 10. Tag störungsfrei überstanden hat.)
   10 störungsfreie Tage beobachtet man also mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = \left(\frac{2}{3}\right)^{10} = \frac{1024}{59049}.$$

2. Jede Maschine, die am n. Tag kaputt geht, war $(n-1)$ Tage störungsfrei. Die Wahrscheinlichkeit p, am n. Tag kaputt zu gehen, ist

$$p = \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{3}.$$

   Die Erwartungswert der Anzahl X störungsfreier Tage vor einem Defekt für eine Maschine ist also

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n\geq 2} (n-1)(\tfrac{2}{3})^{n-1} \cdot \tfrac{1}{3},$$

   d. h.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \tfrac{2}{9} \sum_{n\geq 1} n \cdot (\tfrac{2}{3})^{n-1} \\ &= \tfrac{2}{9} \cdot \tfrac{1}{(1-\frac{2}{3})^2} = 2. \end{aligned}$$