Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 6
28. Mai 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 8. Juni 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Die Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie wird von 344 Studenten gehört. Aus Erfahrung weiß die Übungsleitung jedoch, dass im Schnitt lediglich achtzig Prozent der Studenten die Klausur mitschreiben. Da die Übungsleitung umweltbewusst ist, möchte sie möglichst wenig Klausurangaben drucken. Es wird angenommen, dass die Studenten ihre Entscheidung die Klausur zu schreiben unabhängig voneinander treffen. Bestimmen Sie eine Mindestanzahl an Angaben, die die Übungsleitung bereitstellen muss, so dass diese mit einer Wahrscheinlichkeit von höchstens $\frac{1}{20}$ nicht ausreichen.

Hinweise: Nutzen sie die erste Chernoff-Schranke aus Korollar 68 der Vorlesung.

Tutoraufgabe 2

Eine diskrete Zufallsvariable X mit Parameter $0 < p < 1$ ist logarithmisch verteilt, wenn für alle $x \in \mathbb{N}$ die Dichtfunktion definiert ist durch $f_X(x) = \frac{-p^x}{x \ln(1-p)}$ und für alle anderen x gilt $f_X(x) = 0$. Bestimmen Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ und nutzen Sie diese, um den Erwartungswert und die Varianz von X zu ermitteln.

Tutoraufgabe 3

Sei X_i eine Familie von unabhängigen und identisch verteilten Zufallsvariablen mit der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion $G_X(s)$. Des Weiteren sei Z definiert als $\sum_{i=1}^{N} X_i$, wobei N eine diskrete Zufallsvariable mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$ ist. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ gilt.

1. Angenommen N ist Poisson-verteilt mit Parameter λ und X_i Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Bestimmen Sie $G_Z(s)$ und benennen Sie die entsprechende Verteilung von Z.

2. Zeigen Sie, dass $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X_i]$ gilt.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Mit großem Ärger stellen Sie fest, dass Sie wieder vergessen haben, welche der beiden Münzen aus Tutoraufgabe 1 von Übungsblatt 2 a und welche b ist. Zumindest erinnern Sie sich noch daran, dass Münze a mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ Kopf zeigt wohingegen Münze b nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Kopf zeigt. Angenommen Sie wählen zufällig eine der beiden Münzen und werfen diese genau fünfundsiebzigmal. Zeigen Sie mithilfe der Chernoff-Ungleichung, dass es möglich ist, die Münzen mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ korrekt zu identifizieren.

Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzungen $e^{13} > 400000$ und $\left(\frac{50}{37}\right)^{37} < 100000$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable und t eine beliebige reelle Zahl. Beweisen Sie mithilfe der Markov-Ungleichung, dass die Abschätzungen $\Pr[X \geq t] \leq \inf_{s\geq 0} \frac{M_X(s)}{\exp(ts)}$ bzw. $\Pr[X \leq t] \leq \inf_{s\leq 0} \frac{M_X(s)}{\exp(ts)}$ gültig sind.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit Erwartungswert μ und positiver Standardabweichung σ. Die einseitige Chebychev-Ungleichung ist gegeben durch $\Pr\left[X \geq \mu + c\sigma\right] \leq \frac{1}{1+c^2}$ für beliebige $c > 0$. Beweisen Sie die Korrektheit der Ungleichung. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

1. Zeigen Sie zunächst, dass der Erwartungswert $\mathbb{E}[\frac{(X-t)^2}{(\mu+c\sigma-t)^2}]$ für $t < \mu + c\sigma$ größer gleich $\Pr[X \geq \mu + c\sigma]$ ist.
2. Finden sie anschließend einen Parameter t, der den obigen Erwartungswert minimiert, um die einseitige Chebychev-Ungleichung zu belegen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort.

1. Sie werfen zwei Würfel, die die Ziffern von eins bis sechs jeweils mit gleicher Wahrscheinlichkeit zeigen. Seien a die Ziffer des ersten und b die des zweiten Wurfs. Die Ereignisse $a = b$ und $|a - b| = 1$ sind gleichwahrscheinlich.
2. Ein Ereignis E kann zu sich selbst unabhängig sein.
3. Falls $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable mit $\mathbb{E}[X^2] = 0$ ist, dann gilt $X(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
4. Für alle diskreten Zufallsvariablen X, die nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annehmen, ist der Erwartungswert stets ungleich der Varianz.
5. Wir betrachten eine diskrete Zufallsvariable X, die nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annimmt. Angenommen die Dichtefunktion von X ist durch $f_X(x) = \frac{2^x e^{-2}}{x!}$ für $x \in \mathbb{N}_0$ gegeben. Dann ist die Varianz von X gleich 2.
6. Es existiert eine diskrete Zufallsvariable X, die ausschließlich Werte aus $\mathbb{N}_0$ annimmt mit $\Pr[X = 0] + \mathbb{E}[X] = \frac{1}{2}$.

7. Es gibt keine Zufallsvariable X mit zugehöriger wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion $G_X(s) = \frac{1}{1-s}$.

8. Sei $G_X(s) = \frac{1+s}{2}$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer diskreten Zufallsvariablen X. Dann ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X = 2]$ gleich 0.

9. Sei $X \sim \mathrm{Bin}(2, \frac{1}{2})$, dann gilt $(X + X) \sim \mathrm{Bin}(4, \frac{1}{2})$.

10. Andrey Andreyevich Markov war Student bei Pavnuti Lvovich Chebychev.