Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 7

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 12.06.2013 um 12:00

Vereinfachen Sie Terme soweit wie möglich. Unnötig komplizierte Antworten werden nicht gewertet.

Hinweis: Mit diesem Blatt beginnt der zweite Wertungsteil (für den Notenbonus).

Aufgabe 7.1 **2P+2P+2P+2P+2P+2P**

Prof. Evilsparza muss wiedermal eine Klausur schreiben lassen. Um sich das Korrigieren zu erleichtern, stellt er nur Fragen, welche mit „ja" oder „nein" zu beantworten sind. Insgesamt stellt er 120 solche Fragen. Prof. Evilsparza vergibt generell nur die Noten 4,3 und 3,7.

Sei N die Anzahl an richtigen Antworten eines Studenten, welcher bei jeder Frage unabhängig von allen anderen Fragen mit W'keit p die richtige Antwort gibt. Dann gilt $N \sim \mathrm{Bin}(120, p)$. Prof. Evilsparza will die 3,7 nur vergeben, falls die Anzahl der korrekten Antworten des Studenten darauf hindeuten, dass dieser nicht einfach nur rät: Helfen Sie Prof. Evilsparza, indem Sie *unter der Annahme von* $p = 0.5$ ein *möglichst kleines* $k \in \mathbb{N}_0$ bestimmen, für welches $\Pr[N > k] \leq 0.1$ gilt.

(a) Verwenden Sie folgende Schranken, um ein *möglichst kleines* $k \in \mathbb{N}_0$ zu bestimmen:

   (i) Markov: $\Pr[N \geq \delta] \leq \frac{\mathbb{E}[N]}{\delta}$ für $\delta > 0$.

   (ii) Chebyshev: $\Pr[|N - \mathbb{E}[N]| \geq \delta] \leq \frac{\mathrm{Var}[N]}{\delta^2}$ für $\delta > 0$.

   (iii) Chernoff: $\Pr[N \geq (1+\delta)\mathbb{E}[N]] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mathbb{E}[N]}$ für $\delta > 0$.

   Hinweis: Verwenden Sie für diese Aufgabe ein CAS, um sich die Schranke plotten zu lassen. Bestimmen Sie δ auf zwei Nachkommastellen genau.

(b) Nutzen Sie im Spezialfall $X \sim \mathrm{Bin}(n, 1/2)$ die Symmetrie der Binomialverteilung aus, um mit Hilfe der Chebyshev-Ungleichung zu zeigen:

$$\Pr[X \geq \mathbb{E}[X] + \delta] \leq \frac{n}{8 \cdot \delta^2} \quad \text{für } \delta > 0.$$

(c) Verwenden Sie auch (b), um ein *möglichst kleines* $k \in \mathbb{N}_0$ mit $\Pr[N > k] \leq 0.1$ zu bestimmen.

(d) Bestimmen Sie nun mit Hilfe eines CAS das *kleinste* $k^* \in \mathbb{N}_0$. Verwenden Sie das Ergebnis aus (c) als Startwert für die Suche nach k^*.

Aufgabe 7.2 **2P+2P**

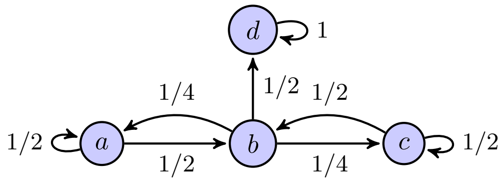
Die ZVn $N, X_1, X_2, \ldots$ sind unabhängig mit Wertebereich in $\mathbb{N}_0$. Weiterhin besitzen alle X_i dieselbe Dichte. Setze $S := \sum_{i=1}^{N} X_i$.

(a) Mit G_S, G_N, G_{X_1} seien die zugehörigen erzeugenden Funktionen bezeichnet.

   Zeigen Sie mit Hilfe des Satzes der totalen W'keit: $G_S(z) = G_N(G_{X_1}(z))$ für $z \in [0, 1]$.

(b) Bestimmen Sie mit Hilfe von (a) und der Eindeutigkeit von erzeugenden Funktionen die Dichte von S, wenn $N \sim \mathrm{Poi}(\lambda)$ und $X_i \sim \mathrm{Ber}(p)$ gilt.

Aufgabe 7.3 **2P+2P**



Wie in TA 4.2 betrachten wir wieder die Experimente $(\Omega_s, \Pr_s[])$ mit $\Omega_s := [s \rightsquigarrow d]^{d=1}$, dass man schließlich den Zustand d erreicht, wenn man im Zustand s startet. Für jedes dieser Experimente zählt die ZV N wieder die Schritte, bis man den Zustand d (das erste Mal) erreicht hat. Mit $G_s(z) := \mathbb{E}_s[z^N]$ sei die zugehörige erzeugende Funktion bezeichnet.

Beispiel: Da $\Pr_d[N = 0] = 1$ gilt, folgt $G_d(z) = \mathbb{E}_d[z^N] = z^0 \cdot \Pr_d[N = 0] = 1$.

(a) In TA 4.2 hatten Sie gesehen, dass $\mathbb{E}_a[N] = 1/2 \cdot \mathbb{E}_a[N+1] + 1/2 \cdot \mathbb{E}_b[N+1]$ gilt. Ganz entsprechend kann gezeigt werden, dass für alle $z \in [0, 1]$ gilt:

$$G_a(z) = \mathbb{E}_a[z^N] = 1/2 \cdot \mathbb{E}_a[z^{N+1}] + 1/2 \cdot \mathbb{E}_b[z^{N+1}] = 1/2 \cdot z \cdot G_a(z) + 1/2 \cdot z \cdot G_b(z)$$

Stellen Sie die entsprechenden Gleichungen für $G_b(z)$ und $G_c(z)$ auf.

Hinweis: Schauen Sie sich auch die Lösungsskizze zu HA 5.3 an.

(b) Lösen Sie das Gleichungssystem aus (a). Betrachten Sie hierfür die $G_s(z)$ als gewöhnliche Variablen.

Überprüfen Sie Ihr Ergebnis. Aus TA 4.2 wissen Sie, dass $\mathbb{E}_a[N] = \mathbb{E}_c[N] = 6$ und $\mathbb{E}_b[N] = 4$ gilt.

Tutoraufgaben: Besprechung in Woche vom 10.06.2013.

Aufgabe 7.1

Diese Aufgabe greift das Bertrand'sche Paradoxon nochmals auf.

(a) Sei R gleichverteilt auf $(0, 1]$ der Radius eines zufälligen Kreises.

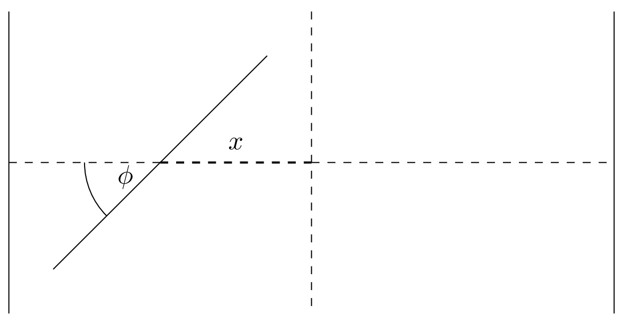
Bestimmen Sie jeweils die Dichte der ZV A, welche die Fläche des Kreises angibt.

(b) Sei nun A gleichverteilt auf $[0, \pi]$ die Fläche eines zufälligen Kreises.

Bestimmen Sie jeweils die Dichte der ZV, welche den Radius des Kreises angibt.

(Hinweis: bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion)

Aufgabe 7.2

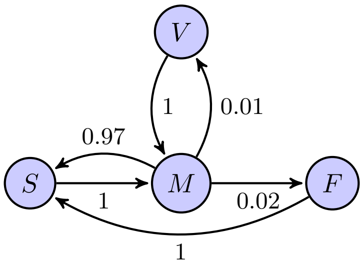


Betrachten Sie folgendes Experiment: Eine Nadel der Länge 1cm wird zufällig auf ein Tischtuch geworfen, welches abwechselnd in blaue und weiße Streifen der Breite 2cm unterteilt ist.

Bestimmen Sie die W'keit, dass die Nadel nicht vollständig in einem solchen Streifen enthalten ist. Nehmen Sie an, dass sowohl der Abstand x des Nadelmittelpunkts zur Mittellinie eines Streifens als auch die Orientierung ϕ der Nadel reinzufällig sind.

Aufgabe 7.3

Wir betrachten ein einfaches Kommunikationsprotokoll für ein System bestehend aus einem Sender, einem Medium und einem Empfänger.



Der Sender übergibt Nachrichten an das Medium (z.B. Netzwerk) ($S \xrightarrow{1} M$), welches die Nachrichten dann an den Empfänger übermittelt. Mit W'keit 0.01 kommt es dabei zu einem Übertragungsabbruch, wodurch die Nachricht verloren geht ($M \xrightarrow{0.01} V$). In diesem Fall versucht das Medium erneut die Nachricht zu übermitteln ($V \xrightarrow{1} M$). Mit W'keit 0.02 kommt die Nachricht nur fehlerhaft beim Empfänger an ($M \xrightarrow{0.02} F$), während mit W'keit 0.97 die Nachricht ohne Fehler übermittelt wird ($M \xrightarrow{0.97} S$). Sobald der Empfänger eine Nachricht (fehlerfrei oder nicht) empfangen hat, übergibt der Sender die nächste Nachricht an das Medium ($F \xrightarrow{1} M$).

Bisher haben wir bei einem Markov-Diagramm nur Experimente der Form $[s \rightsquigarrow d]^{d=1}$ betrachtet, die mit W'keit $\Pr\left[[s \rightsquigarrow d]^{d=1}\right] = 1$ nach endlich vielen Schritten in einem vorgegebenen Zielzustand d geendet haben. Im Fall eines Protokolls, welches prinzipiell für immer aktiv ist, sind wir i.A. allerdings an den unendlichen Abläufen interessiert.

Sei $Q = \{S, M, V, F\}$ die Zustandsmenge des obigen Markov-Diagramms, T die Menge der Transitionen und δ die Gewichte der Transitionen. (δ spielt im Weitern keine Rolle mehr.) Die Abläufe des Protokolls sind durch die unendlichen Pfade in dem Graphen (Q, T) gegeben, welche in S beginnen. Diese Menge sei mit $\mathbb{P}$ bezeichnet. Jeder solche Pfad lässt sich durch eine unendliche Sequenz (unendliches Wort) aus $Q^\omega = \{(z_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \mid \forall i \in \mathbb{N}_0 \colon z_i \in Q\}$ beschreiben, welche mit S beginnt.

(a) Bekanntlich ist die Menge $\{0,1\}^\omega$ überabzählbar, genauer $|\{0,1\}^\omega| = |\mathbb{R}|$.

Zeigen Sie, dass bereits die Menge $\mathbb{P} \subseteq Q^\omega$ überabzählbar ist.

Um die Notation zu vereinfachen, betrachten wir im Folgenden Q^ω statt nur $\mathbb{P}$.

Ganz analog zu $\mathbb{R}^n$ und den Borelschen Mengen beschränkt man sich bei Q^ω ebenfalls auf eine möglichst kleine σ-Algebra $\mathcal{Z}(Q)$: Den Platz der Intervalle bei den Borel-Mengen nehmen in diesem Fall die *Zylindermengen* ein, welche von der Form uQ^ω für ein $u = u_0u_1 \ldots u_l \in Q^*$ sind; die Menge uQ^ω beschreibt gerade alle potentiellen Abläufe, welche in den ersten $l+1$ Schritten genau die Zustände u_0 bis u_l besucht. Neben diesen Zylindermengen enthält $\mathcal{Z}(Q)$ nur noch die Mengen, die eine σ-Algebra notwendigerweise enthalten muss, d.h. falls A in $\mathcal{Z}(Q)$ enthalten ist, so ist auch das Komplement $\overline{A} := Q^\omega \setminus A$ in $\mathcal{Z}(Q)$ enthalten, und, falls $A_1, A_2, \ldots$ abzählbar viele Ereignisse aus $\mathcal{Z}(Q)$ sind, so ist auch ihre Vereinigung $\bigcup_{i\in\mathbb{N}_0} A_i$ in $\mathcal{Z}(Q)$ enthalten. Ansonsten enthält $\mathcal{Z}(Q)$ keine weiteren Mengen.

(b) Auf $\Omega = Q^\omega$ können wir wieder die ZVn Z_k definieren, die den Zustand angeben, in dem man sich nach k Schritten befindet, d.h. $[Z_k = z] := \{(z_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \in Q^\omega \mid z_k = z\}$.

  (i) Zeigen Sie, dass $[Z_k = z] \in \mathcal{Z}(Q)$.

  (ii) Zeigen Sie, dass $\mathbb{P} \in \mathcal{Z}(Q)$.

(c) Stellen Sie folgende informell beschriebenen Ereignisse formal als Mengen aus $\mathcal{Z}(Q)$ dar:

  (i) „Der Sender kann unendlich viele Nachrichten verschicken." (Keine Verklemmung.)

  (ii) „Es gehen nur endlich viele Nachrichten verloren."

  (iii) „Immer wenn eine Nachricht verloren geht, kommt es schließlich zu einer fehlerhaften Übertragung der betroffenen Nachricht."

  (iv) „Es werden unendlich viele Nachrichten übertragen, dabei werden nie zwei Nachrichten hintereinander fehlerhaft übertragen."