Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 10

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 03.07.2013 um 12:00

Vereinfachen Sie Terme soweit wie möglich. Unnötig komplizierte Antworten werden nicht gewertet.

Hinweis: Verwenden Sie für die Standardnormalverteilung die Tabelle auf wikipedia.

Aufgabe 10.1 — 2P

Bestimmen Sie für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ mit Hilfe einer geeigneten Induktion die Verteilungsfunktion einer $\Gamma(\lambda, n)$-verteilten ZV.

Bemerkung: Um möglichen Missverständnissen vorzubeugen: Es ist ein integralfreier Ausdruck für die Verteilungsfunktion gesucht; insbesondere sollte der Ausdruck für $n = 1$ gerade $(1 - e^{-\lambda x}) \cdot I_{(0,\infty)}(x)$ sein.

Aufgabe 10.2 — 3P+4P

Seien $T_1, T_2, \ldots, T_n$ unabhängige, $\exp(\lambda)$-verteilte ZVn, die jeweils die Lebenszeit eines radioaktiven Atoms beschreiben. Nach TA 8.2 wissen Sie, dass der Zeitpunkt $T_{(k)}$, an dem (mindestens) k Atome zerfallen sind, die Verteilungsfunktion

$$F_{(k)}(t) = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} F(t)^j (1 - F(t))^{n-j} \text{ mit } F(t) = (1 - e^{-\lambda t}) \cdot I_{(0,\infty)}(t)$$

besitzt. Wegen $F_{(1)}(t) = 1 - e^{-n\lambda t}$ folgt hieraus z.B. sofort $T_{(1)} \sim \exp(n\lambda)$ (siehe auch VL). Durch Ableiten und Vereinfachen erhält man daraus die Dichte von $T_{(k)}$ (nicht zu zeigen!):

$$f_{(k)}(t) = k \cdot \binom{n}{k} \cdot F(t)^{k-1} \cdot (1 - F(t))^{n-k} \cdot f(t) \text{ mit } f(t) = \lambda e^{-\lambda t} I_{(0,\infty)}(t).$$

Auf Grund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung sollte man annehmen, dass zum Zeitpunkt des ersten Zerfalls alle verbleibenden $n - 1$ Zerfallsexperimente (mit W'keit 0 zerfallen zwei Elemente zum selben Zeitpunkt) von neuem beginnen, so dass die Differenz $\Delta_1 := T_{(2)} - T_{(1)}$ gerade $\exp((n-1)\lambda)$-verteilt und unabhängig von $\Delta_0 := T_{(1)}$ sein sollte. Mit anderen Worten sollte $T_{(2)} = \Delta_0 + \Delta_1$ für unabhängige ZVn $\Delta_0 \sim \exp(n\lambda)$ und $\Delta_1 \sim \exp((n-1)\lambda)$ gelten. Allgemein sollte daher gelten:

$$T_{(k)} = \Delta_0 + \ldots + \Delta_{k-1} \text{ für unabhängige ZVn } \Delta_0, \ldots, \Delta_{k-1} \text{ mit } \Delta_i \sim \exp((n-i)\lambda). \quad (*)$$

(a) Überprüfen Sie die Behauptung $(*)$ für $T_{(2)}$ und $T_{(3)}$ mit Hilfe von momenterzeugenden Funktionen.

D.h. bestimmen Sie die momenterzeugende Funktion von $T_{(k)}$ mittels der oben angegebenen Dichte und überprüfen Sie dann, dass diese mit der momenterzeugenden Funktion von $\Delta_0 + \ldots + \Delta_{k-1}$ (mit den Annahmen aus $(*)$) übereinstimmt.

(b) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[T_{(k)}]$ und $\mathrm{Var}[T_{(k)}]$ unter Verwendung von $(*)$.

Aufgabe 10.3 — 1P+2P+2P+2P+2P+2P

Die Übungsleitung von Prof. Evilsparza kann sich auf Grund der bescheidenen Bezahlung nur eine Lampe in der Wohnung leisten, welche noch mit alten Glühbirnen betrieben wird. Auf Grund der neusten Verordnungen der EU, hat sich die Übungsleitung noch mit einem Vorrat von 50 Glühbirnen eingedeckt; die Lebensdauern (in Betriebsstunden gemessen) dieser Glühbirnen seien als unabhängig und jeweils $\exp(10^{-3})$-verteilt angenommen.

Sei N_t die Anzahl an defekten Glühbirnen innerhalb von t Betriebsstunden. Nach Vorlesung ist N_t Poisson-verteilt.

(a) Wie viele Birnen müssen im Mittel über einen Zeitraum von 5500 Betriebsstunden auf Grund eines Defekts ausgetauscht werden?

(b) Wie hoch ist die W'keit, dass innerhalb von 5500 Betriebsstunden mehr als 10 Birnen ausgetauscht werden müssen?

(i) Bestimmen Sie die gesuchte W'keit von Hand.

(ii) Es kann gezeigt werden, dass für $0 \leq x < 0.5N + 1$ gilt:

$$e^x - 2 \cdot \frac{x^{N+1}}{(N+1)!} < \sum_{k=0}^{N} \frac{x^k}{k!} \leq e^x$$

Approximieren Sie hiermit die gesuchte W'keit.

(iii) Approximieren Sie nur zum Vergleich die Poisson-Verteilung durch eine $\mathrm{Bin}(1000, p)$-Verteilung für geeignetes p.

i. Verwenden Sie dann die Chernoff-Ungleichung, um die gesuchte W'keit zu approximieren.

ii. Verwenden Sie den ZGWS, um die gesuchte W'keit zu approximieren.

(c) Die Übungsleitung ist daran interessiert den spätesten Zeitpunkt t_0 (in Betriebsstunden) zu ermitteln, für den noch $\Pr[N_{t_0} < 50] \geq 0.99$ gilt.

(i) Ermitteln Sie eine erste grobe Schätzung für t_0, indem Sie t_0 so wählen, dass die erwartete Anzahl an defekten Birnen gerade 50 beträgt.

(ii) Verwenden Sie nun die Approximation aus (b-ii) unter Verwendung eines CAS, um diese Frage zu beantworten.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 01.07.2013.

Aufgabe 10.1

Das „German-tank problem" bestand darin, dass die Alliierten im zweiten Weltkrieg versuchten, anhand der Seriennummern auf eroberten deutschen Panzern die Gesamtzahl deutscher Panzer eines Typs abzuschätzen. Hierbei wurde die Annahme gemacht, dass die Seriennummern auf den eroberten Panzern unabhängig und gleichverteilt auf einer Menge $\{1, \ldots, M\}$ waren.

Um die Rechnungen zu vereinfachen, betrachten wir das analoge Problem für den Fall einer stetigen Gleichverteilung auf dem Intervall $[0, M]$. Der Parameter $M > 0$ ist dabei unbekannt und soll anhand der beobachteten Werte $x_1, \ldots, x_n$ geschätzt werden.

Hierzu seien $X_1, \ldots, X_n$ unahbängige ZVen, jeweils gleichverteilt auf $[0, M]$.

(a) Aus der Vorlesung wissen Sie, dass das Stichprobenmittel $\overline{X} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ einen Schätzer für den Erwartungswert der X_i ist.

Definieren Sie die Konstante c_1 so, dass $T_1 := c_1 \cdot \overline{X}$ ein erwartungstreuer Schätzer T_1 für M ist.

(b) Konstruieren Sie zum Vergleich basierend auf dem Maximum-Likelihood-Prinzip einen Schätzer S für M.

(c) Überprüfen Sie: Der ML-Schätzer S aus (b) ist nicht erwartungstreu bzgl. dem Parameter M.

Definieren Sie die Konstante c_2 so, dass $T_2 := c_2 \cdot S$ ein erwartungstreuer Schätzer für M ist.

(d) Vergleichen Sie die beiden Schätzer anhand des mittleren quadratischen Fehlers.

Welcher Schätzer ist konsistent im quadratischen Mittel?

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $\mathrm{MSE}(T) = \mathrm{Var}[T] + (\mathbb{E}[T - M])^2$ für einen Schätzer T des Parameter M.

(e) Vergleichen Sie die beiden Schätzer bzgl. der Größe des jeweiligen (symmetrischen) Konfidenzintervalls zum Signifikanzniveau α.

(f) Konstruieren Sie anhand jedes der beiden Schätzer einen Test, um sich zwischen den Alternativen $H_0\colon M \geq M_0$ und $H_1\colon M < M_0$ für ein $M_0 > 0$ zum Signifikanzniveau α zu entscheiden.

Bestimmen Sie jeweils die Fehlerw'keit zweiter Art.

Aufgabe 10.2

In der Vorlesung haben Sie die Inversionsmethode gesehen, welche es erlaubt, eine beliebig verteilte ZV X mit Hilfe einer auf $[0, 1]$ gleichverteilten ZV U zu simulieren:

$$F_X(t) = F_U(F_X(t)) = \Pr[U \leq F_X(t)] = \Pr\left[F_X^{-1}(U) \leq t\right] = F_{F_X^{-1}(U)}(t).$$

(a) Zeigen Sie zunächst, dass man mit Hilfe der Inversionsmethode Gleichverteilungen über beliebigen Intervallen $[a, b]$ simulieren kann.

In vielen wichtigen Fällen lässt sich F_X^{-1} nicht mit vertretbaren Aufwand berechnen bzw. approximieren. Eine Möglichkeit ist dann die sogenannte Verwerfungsmethode.

(b) Betrachten Sie den Zufallsvektor $\vec{U} \in \mathbb{R}^2$, welcher auf der Menge $D := \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in [0,1]^2 \mid x_1 + x_2 \leq 1\}$ gleichverteilt ist (vgl. auch HA 8.3). D ist gerade das Dreieck mit Ecken $(0,0), (1,0), (0,1)$ und vollständig in dem Einheitsquadrat $[0,1]^2$ eingeschlossen.

Wir können sehr einfach einen auf $S := [0,1]^2$ gleichverteilten Zufallsvektor $\vec{V} = (V_1, V_1)$ erzeugen, da V_1, V_2 unabhängige, auf $[0,1]$ gleichverteilte ZV sind.

Die Verwerfungsmethode hat nun gerade ihren Namen daher, dass man in diesem Fall eine Sequenz von unabhängigen, auf $[0,1]^2$ gleichverteilten Punkten $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n$ erzeugt, jedoch nur die Punkte behält, welche auch in D liegen – alle anderen Punkte werden verworfen.

(i) Wie viele Punkte müssen Sie im Mittel verwerfen?

(ii) Zeigen Sie:

$\vec{V}$ ist gleichverteilt auf D unter der Bedingung, dass V in D liegt,

d.h. $\Pr\left[\vec{V} \in A \mid \vec{V} \in D\right] = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(D)}$ für jedes $A \in \mathcal{B}(D)$.

(iii) Wie könnte man für das vorgegebene D auch die verworfenen Punkte noch verwenden?

Die Verwerfungsmethode kann nicht nur zur Simulation von mehrdimensionalen Gleichverteilungen verwendet werden. Als Beispiel betrachten wir eine standardnormalverteilte ZV und simulieren diese (approximativ):

(c) Sei $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ mit Verteilungsfunktion Φ und Dichte ϕ.

(i) Bestimmen Sie $a > 0$, so dass $\Pr[-a \leq X \leq a] \geq 0.999$.

(ii) Sei $\vec{V} = (V_1, V_2)$ gleichverteilt auf $S := [-a, a] \times [0, \phi(0)]$ und sei $D := \{\vec{x} = (x_1, x_2) \in S \mid x_2 \leq \phi(x_1)\}$.

Zeigen Sie für $t \in [-a, a]$: $\Pr\left[V_1 \leq t \mid \vec{V} \in D\right] = \Phi(t) + \varepsilon$ mit $|\varepsilon| \leq 0.001$.

(iii) Wie viele Samples müssen Sie im Mittel verwerfen?

Bemerkung: Die Verwerfungsmethode lässt sich auch allgemeiner formulieren, so dass der obige Fehlerterm vermieden werden kann, siehe wikipedia für weitere Informationen. Speziell für die Simulation normalverteilter ZV verwendet man häufig andere Algorithmen, z.B. die Box-Muller-Methode oder die Polar-Methode.