HA 10.1 $\quad n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$X_n \sim \Gamma(\lambda, n)$, Dichte von X_n: $f_n(x) = \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$

Erinnerung: $\Gamma(n) = (n-1)!$ für $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

$$F_n(t) = \Pr[X_n \leq t] = \int_{-\infty}^{t} f_n(x)\, dx$$

für $t > 0$ (sonst 0)

$$= \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

Produktregel mit $U = x^{n-1}$, $v = e^{-\lambda x}$, $u = (n-1)x^{n-2}$, $V = -\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x}$

$$= \left[-\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{1}{\lambda} \cdot x^{n-1} \cdot e^{-\lambda x} \right]_0^t + \int_0^t \frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{n-1}{\lambda} \cdot x^{n-2} e^{-\lambda x}\, dx$$

$\frac{\lambda^n}{\Gamma(n)} \cdot \frac{n-1}{\lambda} = \frac{\lambda^{n-1}}{\Gamma(n-1)}$ da $\Gamma(n) = (n-1)!$

$$= -\frac{(t\lambda)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda t} + F_{n-1}(t)$$

$\Rightarrow$ Induktion führt auf:

Poisson-Verteilung mit Parameter λt

$$F_n(t) = 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(t\lambda)^k}{k!} \cdot I_{(0,\infty)}(t)$$

<u>$n=1$:</u> $\Gamma(\lambda, 1) \mathrel{\hat{=}} \mathrm{Exp}(\lambda)$

$$\Rightarrow F_1(t) = (1 - e^{-\lambda t})\, I_{(0,\infty)}(t) \quad \checkmark$$

<u>$n \to n+1$:</u>

$$F_{n+1}(t) \underset{\uparrow}{=} -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + F_n(t)$$

vorangegangene Rechnung für $t > 0$, sonst $F_{n+1}(t) = 0$

Induktion

$$= -\frac{(\lambda t)^n}{n!} e^{-\lambda t} + 1 - e^{-\lambda t} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$$= 1 - e^{-\lambda t} \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(\lambda t)^k}{k!}$$

$\square$

Bemerkung:

Poisson-Prozess: $N_t = \max \{ k \in \mathbb{N} \mid \underbrace{T_1 + T_2 + \ldots + T_k}_{=: S_k \sim \Gamma(\lambda, k)} \leq t \}$

$$\Rightarrow \Pr[N_t = n] = \Pr[S_n \leq t < S_{n+1}]$$

$$= \Pr[t < S_{\ +1} \wedge \neg (S \ > t)]$$

$$= \Pr[\text{"} t < S_{n+1} \text{"} \setminus \text{"} t < S_n \text{"}]$$

$$= (1 - F_{n+1}(t)) - (1 - F_n(t))$$

$$= F_n(t) - F_{n+1}(t)$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

$$\Rightarrow N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$$

HA 10.2

- $T_1, T_2, \ldots, T_n$ unabhängig mit $T_i \sim exp(\lambda)$
  → Zum Beispiel misst T_i die Lebensdauer einer Glühbirne oder eines radioaktiven Atoms

→ Betrachten n solche Objekte parallel

$T_{(k)} \hat{=}$ Zeitpunkt, an dem die k-te Glühbirne kaputt bzw. der k-te radioaktive Zerfall stattfindet (nicht T_k!)

→ Tutor übungen: $P_r[T_{(k)} \leq t] = 1 - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} F(t)^j (1-F(t))^{n-j}$

→ Ableiten führt auf Dichte von T_k:

$$f_{(k)}(t) = k \cdot \binom{n}{k} F(t)^{k-1} \cdot (1-F(t))^{n-k} \cdot f(t)$$

(war angegeben)

$$f_{(k)}(t) = k \cdot \binom{n}{k} F(t)^{k-1} \cdot (1-F(t))^{n-k} \cdot f(t)$$

$$= k \binom{n}{k} (1-e^{-\lambda t})^{k-1} \cdot e^{-\lambda(n+1-k)t} \cdot \lambda \quad (t \geq 0)$$

Für $t>0$:
$f(t) = \lambda e^{-\lambda x}$
$F(t) = 1-e^{-\lambda x}$

ⓐ $\cdot \Pi_{T_{(2)}}(z) = \mathbb{E}[e^{z \cdot T_{(2)}}] = \int_0^\infty n(n-1) \cdot (1-e^{-\lambda t}) \cdot e^{-\lambda(n-1)t} \cdot \lambda e^{zt} dt$

$$= \left(\int_0^\infty e^{-(\lambda(n-1)-z)t} dt - \int_0^\infty e^{-(\lambda n - z)t} dt \right) \lambda n(n-1)$$

$\cdot \frac{\lambda(n-1)-z}{\lambda(n-1)-z}$ $\qquad$ $\cdot \frac{\lambda n - z}{\lambda n - z}$

$(z \neq \lambda)$

$$= \left(\frac{1}{(\lambda(n-1)-z)} - \frac{1}{(\lambda n - z)} \right) \lambda n \cdot (n-1)$$

$$= \frac{\lambda n - z - \lambda(n-1) + z}{(\lambda(n-1)-z)(\lambda n - z)} \lambda n \cdot (n-1) = \frac{\lambda n}{(\lambda n - z)} \frac{\lambda(n-1)}{(\lambda(n-1)-z)}$$

λ

$$\leadsto M_{T_{(2)}}(z) = \frac{\lambda n}{(\lambda n - z)} \cdot \frac{\lambda(n-1)}{(\lambda(n-1) - z)} \quad (\text{für } |z| < \lambda)$$

momenterzeugende Funktion zur $Exp(\lambda n)$

momenterzeugende Funktion zur $Exp(\lambda(n-1))$

$\Longrightarrow$ $T_{(2)}$ ist die Summe zweier unabh. ZVn, wobei die eine $Exp(\lambda n)$-verteilt ist, die andere $Exp(\lambda(n-1))$

$$M_{T(3)}(z) = \int_0^\infty \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \lambda \left(1-e^{-\lambda t}\right)^2 e^{-\lambda(n-2)t} e^{zt}\, dt$$

$$= \int_0^\infty \frac{n(n-1)(n-2)}{2} \lambda \left(1-e^{-\lambda t}\right) \left(e^{-\lambda(n-2)t} - e^{-\lambda(n-1)t}\right) e^{zt}\, dt$$

strukturell dieselben Integration wie

für $k=2$

$$= \frac{n}{2} \frac{\lambda(n-1)}{(\lambda(n-1)-z)} \cdot \frac{\lambda(n-2)}{(\lambda(n-2)-z)} - \frac{n-2}{2} \frac{\lambda n}{(\lambda n-z)} \frac{\lambda(n-1)}{(\lambda(n-1)-z)}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{n\lambda^2(n-1)(n-2)(\lambda n - z) - (n-2)\lambda^2 n(n-1)(\lambda(n-2)-z)}{(\lambda n - z)(\lambda(n-1)-z)(\lambda(n-2)-z)}$$

$$= \frac{\lambda^2 n(n-1)(n-2)}{2} \cdot \frac{\overbrace{\cancel{\lambda n - z - \lambda(n-2) + z}}^{=2\lambda}}{(\lambda n - z)(\lambda(n-1)-z)(\lambda(n-2)-z)} \qquad \square$$

(b)

$$\mathbb{E}[T_{(k)}] = \mathbb{E}[\Delta_0 + \Delta_1 + \dots + \Delta_{k-1}]$$

$$= \frac{1}{\lambda n} + \frac{1}{\lambda(n-1)} + \dots + \frac{1}{\lambda(n+1-k)}$$

$$Var[T_{(k)}] = Var[\Delta_0] + Var[\Delta_1] + \dots + Var[\Delta_{k-1}]$$

$\Delta_0, \dots, \Delta_k$ unabh.

$$= \frac{1}{(\lambda n)^2} + \frac{1}{(\lambda(n-1))^2} + \dots + \frac{1}{(\lambda(n+1-k))^2}$$

HA 10.3

- $T_i \sim \exp(10^{-3})$: Lebensdauer der i-ten eingesetzten Glühbirne
- $T_1, T_2, \ldots$ unabh.
- Anzahl an defekten Glühbirnen im Zeitraum $[0, t]$

$$N_t = \underline{\max} \{ k \in \mathbb{N} \mid T_1 + T_2 + \ldots + T_k \leq t \}$$

(k+1)-te Glühbirne geht erst zu einem Zeitpunkt > t kaputt

Nach VL (siehe auch Bemerkung zu HA 10.1): $N_t \sim \mathrm{Poi}(10^{-3} \cdot t)$

(a) $t = 5500 \rightsquigarrow N_{5500} \sim \mathrm{Poi}(5.5) \rightsquigarrow$ 5.5 defekte Birnen in diesem Zeitraum im Mittel.

(b)

- $Pr[N_{5500} \geq 10] = 1 - Pr[N_{5500} \leq 10]$

$$= 1 - \sum_{k=0}^{10} \frac{5.5^k}{k!} \cdot e^{-5.5}$$

$$\approx 0.02525$$

- Approximation von $\sum_{k=0}^{10} \frac{5.5^k}{k!}$: $(5.5 \leq \frac{1}{2} \cdot 10 + 1 ✓)$

$$\underbrace{e^{5.5} - 2 \cdot \frac{5.5^{11}}{11!}}_{\approx 244.69 - 6.98 = 237.71} \leq \underbrace{\sum_{k=0}^{10} \frac{5.5^k}{k!}}_{\text{genauer Wert: } 238.5131550} \leq \underbrace{e^{5.5}}_{= 244.69}$$

nicht verlangt, nur zum Vergleich

$\rightsquigarrow Pr[N_{5500} > 10] \approx 0.02853$

- Nach VL: $\mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n}) \approx \mathrm{Poi}(\lambda)$
  für n groß genug

hier: $n = 1000$, $\lambda = 5.5$

<u>Frage:</u> Lässt sich N_{5500} durch ein ZV

$A \sim \mathrm{Bin}(1000, 0.0055)$

approximieren?

$\rightarrow$ <u>Chernoff</u>: $\Pr[A > 10] = \Pr[A \geq 11]$

$$= \Pr[A \geq (1+1)5.5] \leq \left(\frac{e^1}{(1+1)^{1+1}}\right)^{5.5}$$

$$\approx 0.1195$$

- <u>2. Frage:</u>

Lässt sich N_t über Umweg über Binomialverteilung mittels ZGWS approximieren?

$N_{5500} \sim \mathrm{Poi}(5.5)$

approximieren durch $A \sim \mathrm{Bin}(1000, 0.0055)$

Dann nach ZGWS:

[Beachte: $\mathbb{E}[A] = 5.5$, $\mathrm{Var}[A] = 5.5 \cdot 0.9945 \geq 5$

also ist nach VL der ZGWS auf A anwendbar]

$$\Pr[A > 10] = 1 - \Pr[A \leq 10] = 1 - \Pr\left[\frac{A - \mathbb{E}[A]}{\sqrt{\mathrm{Var}[A]}} \leq \frac{10-5.5}{\sqrt{\dots}}\right]$$

$$\approx 1 - \Phi\left(\frac{10-5.5}{\sqrt{5.5 \cdot 0.9945}}\right) = 0.02686$$

c. $\mathbb{E}[N_t] = \lambda t = t \cdot 10^{-3} \overset{!}{=} 50$

$\rightsquigarrow t = 50\,000$

- $\underline{\text{Ziel:}}$ maximiere $t > 0$ unter Bedingung

$$\Pr[N_t < 50] \geq 0.99$$

$$\Pr[N_t < 50] = \sum_{k=0}^{49} \frac{(10^{-3} \cdot t)^k}{k!} \cdot e^{-t \cdot 10^{-3}}$$

$$\geq e^{-10^{-3} \cdot t} \left(e^{10^{-3} t} - \frac{(10^{-3} t)^{50}}{50!} \cdot 2 \right)$$

$$= 1 - \frac{(10^{-3} \cdot t)^{50}}{50!} \cdot 2 \cdot e^{-10^{-3} \cdot t}$$

$\underset{\text{hinreichend}}{\Longrightarrow}\ \geq 0.99 \quad \Longrightarrow$ Plotten & ablesen.