Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungen der Mittelklausur
24. Juni 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Korrektor
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. In jedem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \Pr \rangle$ gibt es ein Elementarereignis $e \in \Omega$ mit $\Pr[e] \neq 0$.
2. Es gibt keinen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega, \Pr \rangle$ mit $|\Omega| = 1$.
3. Für jede diskrete Zufallsvariable X ist das zweite zentrale Moment gleich der Varianz $\mathrm{Var}[X]$.
4. Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $\lambda < 0$. Dann ist die Funktion $f : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $f(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ und $f(i) = 0$ für alle $i \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$ keine (diskrete) Dichtefunktion.
5. Falls X Poisson-verteilt ist, dann ist auch $X+1$ Poisson-verteilt.
6. Jede konstante Folge $(H_i)_{i\in\mathbb{N}}$, die für alle $i \in \mathbb{N}$ aus Ereignissen H_i gleich einem Ereignis H besteht (d. h. $H_i = H$), ist rekurrent.

Lösung

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Wahr! Es gilt $\sum_{e\in\Omega} \Pr[e] = 1$.
2. Falsch! $\langle \{1\}, \Pr \rangle$ mit $\Pr[1] = 1$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $|\Omega| = 1$.
3. Wahr! Nach Definition.
4. Wahr! $f(1) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^1}{1!} < 0$.
5. Falsch! Wegen $W_{X+1} = \mathbb{N}$ gilt $f_{X+1}(0) = 0 \neq \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!}$ für alle λ.
6. Falsch! $\Pr[H_3|\overline{H_1} \cap H_2] = \Pr[H|\emptyset]$ ist nicht definiert.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Seien $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ und $\overline{A} = \Omega \setminus A$ für Ereignisse A über Ω. Wir betrachten Ereignisse A und B, so dass die folgenden bedingten bzw. unbedingten Wahrscheinlichkeiten gelten.

$$\Pr[A] = \frac{1}{3}, \quad \Pr[B|A] = \frac{5}{12}, \quad \Pr[A|B] = \frac{1}{5}.$$

1. Zeigen Sie, dass die Ereignisse A und B abhängig sind.
2. Berechnen Sie $\Pr[B|\overline{A}]$ als Bruchzahl.
3. Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$ als Bruchzahl.

Lösung

1. $\Pr[A] = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{5} = \Pr[A|B]$. (2P)
2. Satz von Bayes:
$$\begin{aligned} \Pr[A|B] &= \frac{\Pr[B|A] \cdot \Pr[A]}{\Pr[B|A] \cdot \Pr[A] + \Pr[B|\overline{A}] \cdot \Pr[\overline{A}]} \\ \frac{1}{5} &= \frac{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} + \Pr[B|\overline{A}] \cdot \frac{2}{3}}. \end{aligned}$$
Daraus $\Pr[B|\overline{A}] = \frac{5}{6}$. (3P)
3. $\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} = \frac{5}{36}$,
$\Pr[B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] + \Pr[B|\overline{A}] \cdot \Pr[\overline{A}] = \frac{5}{12} \cdot \frac{1}{3} + \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{3} = \frac{25}{36}$.
Einsetzen in Siebformel:
$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] = \frac{8}{9}$. (3P)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Wir werfen gleichzeitig und unabhängig mit einem blauen und einem roten fairen Würfel und definieren eine diskrete Zufallsvariable X wie folgt:
Falls der rote Würfel eine höhere Augenzahl zeigt als der blaue Würfel, dann sei der Wert von X gleich 0. Andernfalls sei X durch die Augenzahl des blauen Würfels gegeben. Wenn beispielsweise der blaue Würfel die Augenzahl 6 zeigt, dann hat X stets den Wert 6. Es gilt $W_X = \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$.

1. Geben Sie die Dichtefunktion f_X für X an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X|X \neq 0]$ der bedingten Variablen $X|X \neq 0$.
3. Wir wiederholen das Werfen der Würfel so lange, bis im n-ten Wurf zum ersten Mal der rote Würfel eine höhere Augenzahl zeigt als der blaue Würfel.

   Sei X_i für $i \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariable für den i-ten Wurf. Die Verteilung der X_i ist also identisch mit der Verteilung von X.
   Seien N und Y Zufallsvariable, wobei N den Wert n liefere und $Y = \sum_{i=1}^{N} X_i$ gelte.

   Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[N]$ von N.

   Berechnen Sie nun den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$ von Y.

Lösung

1. $f_X(0), f_X(1), \ldots, f_X(6) = \frac{15}{36}, \frac{1}{36}, \frac{2}{36}, \frac{3}{36}, \frac{4}{36}, \frac{5}{36}, \frac{6}{36}$. (3P)
2. Sei X' die bedingte Variable mit Dichte

   $f_{X'}(0) = 0$ und $f_{X'}(i) = \frac{f_X(i)}{\Pr[X \neq 0]} = \frac{36}{21} f_X(i)$ für $i \neq 0$. (2P)

   Dann gilt $\mathbb{E}[X|X \neq 0] = \frac{1}{21}(1 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2) = \frac{91}{21}$. (1P)
3. N ist geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{15}{36}$. $\mathbb{E}[N] = \frac{36}{15}$. (2P)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Y|N = n] \cdot p(1-p)^{n-1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[X|X \neq 0] \cdot (n-1) \cdot p(1-p)^{n-1} \\
&= \mathbb{E}[X|X \neq 0] \cdot \mathbb{E}[N-1] \\
&= \frac{91}{21} \cdot \frac{21}{15} = \frac{91}{15}.
\end{aligned}$$

   Es gilt auch $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]$. (Siehe dazu Tutoraufgabe 3 von Blatt 6.) (2P)

   Bemerkung: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[N] \cdot (p\mathbb{E}[X|X = 0] + (1-p)\mathbb{E}[X|X \neq 0]) \\
&= \frac{1}{p}(1-p)\mathbb{E}[X|X \neq 0] = (\mathbb{E}[N] - 1) \cdot \mathbb{E}[X|X \neq 0]\,.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Wir betrachten ein Münzwurfexperiment, das darin besteht, jede von drei unterschiedlichen Münzen A bzw. B bzw. C so lange zu werfen, bis Kopf erscheint. Dabei nehmen wir an, dass die Erfolgswahrscheinlichkeiten für einen einzigen Wurf mit A bzw. B bzw. C die Werte $p_1 = \frac{1}{3}$ bzw. $p_2 = \frac{1}{2}$ bzw. $p_3 = \frac{2}{3}$ sind. Die Münzen A und C sind also unfair.

X_A bzw. X_B bzw. X_C seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen, die die Anzahl der Würfe mit A bzw. B bzw. C zählen. Die Gesamtzahl der Würfe sei gegeben durch die Zufallsvariable $Y = X_A + X_B + X_C$.

1. Sei $G_Y(s)$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion für Y. Bestimmen Sie $G'_Y(0)$.
2. Sei f_Y die Dichtefunktion von Y. Bestimmen Sie $f_Y(4)$.
3. Bestimmen Sie den Erwartungwert $\mathbb{E}[Y]$.
4. Zeigen Sie $\Pr[Y \geq 16{,}5] \leq \frac{1}{10}$.

   Hinweis: Benutzen Sie die Ungleichung von Chebyshev.

Lösung

1. $f_Y(1) = 0$. Daraus folgt $G'_Y(0) = 0$. (2P)
2. $f_Y(4) = p_1p_2p_3(1 - p_1) + p_1p_2p_3(1 - p_2) + p_1p_2p_3(1 - p_3) = \frac{1}{6}$. (3P)
3. $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X_A] + \mathbb{E}[X_B] + \mathbb{E}[X_C] = \frac{13}{2}$. (2P)
4. $\mathrm{Var}[Y] = \mathrm{Var}[X_A] + \mathrm{Var}[X_B] + \mathrm{Var}[X_C] = \frac{35}{4}$.

   $\Pr[Y \geq 16{,}5] = \Pr[|Y - 6{,}5| \geq 10] \leq \frac{35}{400} \leq \frac{1}{10}$. (3P)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Wir betrachten die Menge $\{\mathtt{A}, \mathtt{U}, \mathtt{T}, \mathtt{O}\}$ der Buchstaben des Wortes `AUTO` als Box, aus der wir einzelne Buchstaben Laplace-verteilt und unabhängig genau 5 Mal (mit Zurücklegen) zufällig auswählen wollen. Beispiel: Es könnten dreimal `O` und zweimal `U` gewählt werden.

Seien X bzw. Y diskrete Zufallsvariablen, die die Anzahl der gewählten `O` bzw. `T` in der 5-elementigen Auswahl der Buchstaben zählen.

1. Geben Sie die Dichtefunktionen für X und Y explizit an. Bekannte Funktionen können Sie dabei verwenden. Geben Sie insbesondere für $\Pr[X = 2]$ einen arithmetischen Ausdruck an.

2. Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $\Pr[X = 1, Y = 1]$.

3. Sind die Ereignisse $X = 1$ und $Y = 1$ unabhängig? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung

1. $f_X(i) = b(i; 5, \frac{1}{4})$.
   $\Pr[X = 2] = \binom{5}{2}(\frac{1}{4})^2 \cdot (\frac{3}{4})^3$. (2P)

2. $\Pr[X = 1, Y = 1] = 5 \cdot 4 \cdot (\frac{1}{4})^2(\frac{2}{4})^3$ (2P)

3. Nein! $\Pr[X = 1, Y = 1] \neq \Pr[X = 1] \cdot \Pr[Y = 1]$ (2P)