Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 6
2. Juni 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 8. Juni 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Zwei Spieler werfen je 6 mal eine faire Münze mit „Kopf" oder „Zahl".
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler gleich oft „Kopf" werfen?

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Aus einer Urne U_X bzw. U_Y werden zufällig Lose mit Werten $X \in \{1,2,3\}$ bzw. $Y \in \{4,5,6\}$ gezogen. Die Werte 2 und 5 sollen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, alle übrigen Werte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. X und Y seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen. Es sei $S = X + Y$. Sei S_i die i-te Durchführung bzw. Wiederholung der Ziehung S und Z sei der Mittelwert aus n Wiederholungen von S, d. h.

$$Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i \,.$$

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$.
2. Zeigen Sie für alle $n \geq 20$: $\quad \Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < 0,5] \geq 0,8$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ mit $\lambda \geq 0$.

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^2]$.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^{\underline{n}}]$ für die fallende Potenz $X^{\underline{n}}$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}(200, \frac{1}{100})$.

1. Berechnen Sie $\Pr[X > 8]$ approximativ mit der Poisson-Verteilung.
   (Taschenrechner benutzen!)
2. Bestimmen Sie mit der Markov-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.
3. Bestimmen Sie mit der Chernoff-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Vorbereitung 2

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1 cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Münze gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

Tutoraufgabe 1

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$. Für die Dichtefunktion f_X von X gelte $f_X(1) = \frac{1}{4}$ und $f_X(2) = \frac{1}{5}$. X_i sei die i-te Wiederholung von X. Wir bilden $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ in Abhängigkeit des Wertes einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen N, die den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit e^{-2} annehme.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ der Zufallsvariablen X an.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Z den Wert 0 annimmt.

   Hinweis: Man beachte, dass Z auch dann den Wert 0 annimmt, wenn $N = 0$ gilt.

Tutoraufgabe 2

1. Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

2. Ein Krankenhaus steht in einer Strasse der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

   Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?