Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 1
20. April 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 27. April 2015, 12 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ besteht aus einer abzählbaren Ergebnismenge Ω und einem Wahrscheinlichkeitsmaß Pr, welche jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ einen Wert $\Pr[\omega]$ zwischen 0 und 1 zuweist. Die Summe der Elementarwahrscheinlichkeiten addiert sich dabei stets zu 1. Eine Teilmenge $E \subseteq \Omega$ wird Ereignis genannt. Die Wahrscheinlichkeit von E ist definiert als $\Pr[E] = \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$. Beweisen Sie anhand dieser grundlegenden Definitionen folgende Aussagen für beliebige Ereignisse E und F.

1. $\Pr[\emptyset] = 0$ und $\Pr[\Omega] = 1$
2. $0 \leq \Pr[E] \leq 1$
3. Für zwei disjunkte E und F gilt $\Pr[E \cup F] = \Pr[E] + \Pr[F]$
4. $\Pr[\Omega \setminus E] = 1 - \Pr[E]$
5. $E \subseteq F$ impliziert $\Pr[E] \leq \Pr[F]$

Tutoraufgabe 2

Sie werfen zwei Würfel mit den Ziffern 1 bis 6 und bilden anschließend durch aneinanderreihen der Ziffern die kleinstmögliche Dezimalzahl. Würfeln Sie bspw. 4 und 3, so erhalten Sie 34. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse unter der Annahme, dass jedes Ziffernpaar mit derselben Wahrscheinlichkeit auftritt.

1. Die erhaltene Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.
2. Die Zehnerziffer ist die Hälfte der Einerziffer.
3. Die Zahl ist kleiner als 46.

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten folgendes Spiel. Zwei Personen a und b werfen abwechselnd eine Münze bis einer der beiden zum ersten Mal Zahl wirft und somit gewinnt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass a bzw. b das Spiel für sich entscheidet, wenn die Wahrscheinlichkeit für Kopf $0 < p < 1$ beträgt und a den ersten Wurf macht? Ist das Spiel fair?

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Bei einem Pferderennen treten drei Pferde a, b und c gegeneinander an. Konstruieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ für den Ausgang des Rennens, so dass a mit einer Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ vor b das Ziel erreicht, b mit einer Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ vor c das Ziel erreicht und c mit einer Wahrscheinlichkeit größer $\frac{1}{2}$ vor a das Ziel erreicht.

Hinweis: Sie dürfen davon ausgehen, dass es keinen Gleichstand zwischen Pferden gibt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Bei der Ziehung der Lottozahlen werden zufällig sechs verschiedene Gewinnzahlen zwischen 1 und 49 bestimmt. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich bei vier oder mehr dieser Gewinnzahlen um aufeinanderfolgende Zahlen handelt, wenn man davon ausgeht, dass jeder Ausgang einer Ziehung gleich wahrscheinlich ist?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sie stehen mit einer anderen Person an einer Bushaltestelle, an der in regelmäßigen Abständen ein Bus hält. Da die Busse bereits sehr voll sind, kann jedoch immer nur eine Person einsteigen. Wir gehen davon aus, dass jeder Wartende mit gleicher Wahrscheinlichkeit einsteigen darf. Zusätzlich erreichen in der Zeit bis zum nächsten Bus jeweils zwei neue Personen die Haltestelle.

1. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit mit der Sie im n-ten Bus mitfahren.
2. Zeigen Sie anschließend, dass die Wahrscheinlichkeit mit der Sie spätestens im n-ten Bus mitfahren genau $\frac{n}{n+1}$ ist.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

In einer Übungsgruppe für Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie haben n Studenten ihren Namen nicht auf dem Deckblatt ihrer Hausaufgaben angegeben. Die korrigierten Hausaufgaben teilt der Tutor daher zufällig unter den entsprechenden Studenten aus. Mit welcher Wahrscheinlichkeit bekommt keiner der n Studenten seine eigene Hausaufgabe zurück, wenn man davon ausgeht, dass alle Zuordnungen von Hausaufgaben an Studenten gleich wahrscheinlich sind? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für $n \to \infty$?

Hinweis: Benutzen Sie die Siebformel aus der Vorlesung und machen Sie sich mit der Reihendarstellung der e-Funktion vertraut.