Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Lösungsblatt 2
2. Mai 2014

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Sei $A = \{2x\,;\, x \in \mathbb{N}_0\}$. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $W_1 = (\Omega, \Pr)$ an mit $\Omega = \mathbb{N}_0$ und $\Pr[A] = 1$. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Beispiels!

2. Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $W_2 = (\Omega, \Pr)$ an mit $\Omega = \mathbb{N}_0$, so dass $0 < \Pr[\{x\}] < \frac{1}{2}$ für alle $x \in \Omega$ gilt. Beweisen Sie die Korrektheit Ihres Beispiels!

**Lösung**

Für Ergebnisse $x \in \Omega$ unterscheiden wir die Schreibweisen $\Pr(x)$ und $\Pr[\{x\}]$ für die Verteilungsfunktion $\Pr(x)$ bzw. dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr[\{x\}]$.

1. Am einfachsten setzt man $\Pr(0) = 1$ und $\Pr(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{N}$.

   Dass $W_1$ ein (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum ist, folgt wegen

   (i) $0 \le \Pr(x) \le 1$ für alle Elementarereignisse $x \in \Omega$,

   (ii) $\sum_{x\in\Omega} \Pr(x) = 1$.

   Nun gilt $\Pr[A] = \sum_{x\in A} \Pr(x) = 1$. (2P)

2. Wir definieren $A = \{n \in \mathbb{N}_0\,;\, n \bmod 2 = 0\}$ und $B = \{n \in \mathbb{N}_0\,;\, n \bmod 2 = 1\}$.

   $\{A, B\}$ bildet eine Partition der Ergebnismenge $\Omega$. Man setzt

   $$\begin{aligned} &\text{für alle } x \in A: && \Pr(x) = 3^{-\frac{x}{2}-1}\,, \\ &\text{für alle } x \in B: && \Pr(x) = 3^{-\frac{x-1}{2}-1}\,. \end{aligned}$$

   Mit Anwendung der geometrischen Reihe folgt

   $$\sum_{x\in A} \Pr(x) = \sum_{x\in A} 3^{-\frac{x}{2}-1} = \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{3}\right)^3 + \ldots = \frac{1/3}{1-1/3} = \frac{1}{2}\,.$$

   Für $B$ gilt Entsprechendes.

   Dass $W_2$ ein (diskreter) Wahrscheinlichkeitsraum ist, folgt aus:

   (i) $0 \le \Pr(x) \le \frac{1}{3} < \frac{1}{2} \le 1$ für alle Elementarereignisse $x \in \Omega$,

   (ii) $\sum_{x\in\Omega} \Pr(x) = \sum_{x\in A} \Pr(x) + \sum_{x\in B} \Pr(x) = 1$. (3P)

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Spieler $A$ würfelt mit drei üblichen 6-seitigen fairen Würfeln. Er zeigt Spieler $B$ das Ergebnis nicht, sagt aber korrekterweise, dass die Summe der Augenzahlen der drei Würfel 9 ist.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 5 zeigt?

2. Wie ändert sich diese Wahrscheinlichkeit, wenn Sie annnehmen, dass einer der Würfel unfair ist und tatsächlich die 5 dreimal so wahrscheinlich zeigt, wie die 1, während die übrigen Zahlen gleichwahrscheinlich gezeigt werden wie die 1?

**Lösung**

1. Seien $w_1, w_2, w_3$ drei verschiedene Würfel und $k_i$ die Augenzahl, die der Würfel $w_i$ zeigt. Sei $anz_9$ die Anzahl der Tripel $(w_1, w_2, w_3)$ mit der Eigenschaft $w_1 + w_2 + w_3 = 9$.

   Die Anzahl der geordneten 3-Zahl-Partitionen von 9 ist $\binom{9-1}{3-1} = 28$. Allerdings entsprechen denjenigen 3-Zahl-Partitionen, die zweimal die 1 enthalten, kein Wurf mit 3 Würfeln, denn kein Würfel kann 7 Augen zeigen. Es gibt genau die folgenden 3-Zahl-Partitionen, die zweimal die 1 enthalten: $(1, 1, 7)$, $(1, 7, 1)$ und $(7, 1, 1)$.

   Es folgt
   $$anz_9 = \binom{9-1}{3-1} - 3 = 28 - 3 = 25\,.$$

   Durch einfaches Auszählen findet man, dass es genau 9 der 25 Würfe $(w_1, w_2, w_3)$ gibt, die eine 5 enthalten, weil nur genau ein Würfel eine 5 zeigen kann und die Verteilung der Augenzahlen auf die beiden anderen Würfel sich dann aus $1 + 3$, $2 + 2$ und $3 + 1$ ergibt.

   Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist also $\frac{9}{25}$. (2P)

2. Sei $w_3$ der unfaire Würfel. Wir bezeichnen die geworfene Augenzahl von $w_3$ mit $v$. Es bedeute $\sum = 9$ die Eigenschaft eines Wurfes, dass die Summe der Augenzahlen gleich 9 ist. Es bedeute $5 \in W$ die Eigenschaft eines Wurfes, dass einer der Würfel die 5 zeigt.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem Wurf der drei Würfel $v = 5$ gilt, ist $\Pr[v = 5] = \frac{3}{8}$. Für $i \neq 5$ gilt $\Pr[v = i] = \frac{1}{8}$.

   Falls $v = 5$ gilt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass dann $\sum = 9$ gilt, gleich $\frac{3}{36}$.

   Falls $v = 6$ oder $v = 4$ gilt, ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\sum = 9$ gilt und eine 5 dabei ist, gleich 0.

   Falls $v = 3$ bzw. $v = 2$ bzw. $v = 1$ gelten, ist die Wahrscheinlichkeit, dass $\sum = 9$ gilt und eine 5 dabei ist, jeweils gleich $\frac{2}{36}$.

   Damit folgt
   $$\begin{aligned}
   \Pr[\textstyle\sum=9 \wedge 5\in W] &= \tfrac{3}{8} \cdot \tfrac{3}{36} + 3 \cdot \tfrac{1}{8} \cdot \tfrac{2}{36} = \tfrac{5}{96}\,, \\
   \Pr[\textstyle\sum=9] &= \tfrac{3}{8}\cdot\tfrac{3}{36} + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{2}{36} + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{4}{36} + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{5}{36} + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{6}{36} + \tfrac{1}{8}\cdot\tfrac{5}{36} = \tfrac{31}{8\cdot 36}\,, \text{ mithin} \\
   \Pr[5\in W \mid \textstyle\sum = 9] &= \tfrac{15}{31}\,.
   \end{aligned}$$
   (3P)

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 150\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ durch 3 oder 7 (oder beides) teilbar ist! Die Auswahl aus $W$ sei dabei Laplace-verteilt.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine (Laplace)-zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 150\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ gleichzeitig nicht durch $4, 6$ und 8 teilbar?

**Lösung**

1. Sei $A_i$ das Ereignis der Teilbarkeit durch $i$.

   Die Menge der Zahlen von 1 bis 150 teilt sich in 3 disjunkte, gleichgroße Teilmengen von Zahlen, die mit Rest 0, 1 bzw. 2 teilbar sind. Das Ereignis $A_3$, d. h. "teilbar durch 3" ist also eine Menge von 50 Ergebnissen von jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{150}$. Mithin gilt
   $$\Pr[A_3] = \frac{50}{150} = \frac{1}{3}\,.$$
   Nun gibt es genau 21 Zahlen aus $[1, 150]$, die durch 7 teilbar sind und es gibt genau 7 Zahlen aus $[1, 150]$, die durch 3 und 7 teilbar sind. Entsprechend erhalten wir
   $$\Pr[A_7] = \frac{21}{150} \quad \text{und} \quad \Pr[A_3 \cap A_7] = \Pr[A_{21}] = \frac{7}{150}\,.$$
   Die Siebformel liefert
   $$\begin{aligned}\Pr[A_3 \cup A_7] &= \Pr[A_3] + \Pr[A_7] - \Pr[A_3 \cap A_7] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{21}{150} - \frac{7}{150} = \frac{32}{75}\,.\end{aligned}$$
   (2P)

2. Eine Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist, ist auch nicht durch 8 teilbar. Es gilt also
   $$\bar{A}_4 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_8 = \bar{A}_4 \cap \bar{A}_6\,, \quad \Pr[\bar{A}_4 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_8] = 1 - \Pr[A_4 \cup A_6]\,.$$
   Wegen $\Pr[A_4] = \frac{37}{150}$, $\Pr[A_6] = \frac{25}{150}$ und $\Pr[A_4 \cap A_6] = \frac{12}{150}$ folgt
   $$\Pr[\bar{A}_4 \cap \bar{A}_6 \cap \bar{A}_8] = 1 - \left(\frac{37}{150} + \frac{25}{150} - \frac{12}{150}\right) = \frac{2}{3}\,.$$
   (3P)

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir variieren das aus der Vorlesung bekannte „Ziegenproblem“ wie folgt.

Es gibt 8 Türen und hinter 7 Türen ist eine Ziege. Nur hinter einer einzigen Tür befindet sich keine Ziege sondern ein Auto, das der Kandidat gewinnen will. Nachdem der Kandidat die Tür mit Nr. 1 ausgewählt hat, öffnet der Moderator 4 andere Türen, hinter denen jeweils eine Ziege sitzt.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt der Kandidat das Auto, wenn er schließlich eine geschlossene Tür wählt, aber nicht die Tür mit Nr. 1? Ist diese Wahl optimal?

**Lösung**
Wir bezeichnen das Ereignis, dass sich das Auto hinter der Tür $i$ befindet, mit $A_i$. Dann gilt $\overline{A_1} = A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_8$ und

$$\Pr[\overline{A_1}] = \frac{7}{8}\,.$$

Wenn der Moderator 4 Türen öffnet, dann ist unter der Voraussetzung, dass das Auto nicht hinter Tür 1 ist, das Auto hinter einer von 3 Türen. Die richtige Wahl kann dann mit bedingter Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ getroffen werden.

Wenn der Kandidat also eine geschlossene Tür wählt, aber nicht die Tür mit Nr. 1, dann wird er mit Wahrscheinlichkeit $\frac{7}{24}$ bzw. in ca. 29 % der Fälle das Auto gewinnen.
Die Strategie ist optimal, denn offensichtlich gewinnt er das Auto nur mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, wenn er bei Tür 1 bleibt.

(5P)

---

***Hinweis:*** *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

---

## Vorbereitung 1

Thema sind unabhängige Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = (\Omega, \Pr)$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \le p_i \le 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum $W$ eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von $n$ verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert. Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit $p_i$ zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.

  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. Beweis!

- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von $k$ Ereignissen $A_i$. Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis $B^s$ mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s|A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent $s_i$ sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. Beweis!

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse $A, B, C$ mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

**Lösung**

Ähnlich wie bei linear unabhängigen Vektoren bezieht sich der Begriff der Unabhängigkeit stets auf eine Menge von Elementen. Insbesondere ist eine Menge $S$ von Ereignissen genau dann unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $X \subseteq S$ gilt

$$\Pr\left[\bigcap_{A\in X} A\right] = \prod_{A\in X} \Pr[A]\,.$$

1. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ wird mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet.

$$\begin{aligned}\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\ &= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s]\cdot\Pr[A^s] \\ &= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1}\cdot\Pr[A^s] \\ &= p_{k+1}\sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[A^s] \\ &= p_{k+1}\,.\end{aligned}$$

   1. Schritt:
   Im Fall einer einelementigen Ereignismenge $\{A_1\}$ haben wir nur für $X = \{A_1\}$ die Gleichung $\Pr[\bigcap_{A\in\{A_1\}} A] = \prod_{A\in\{A_1\}} \Pr[A]$ zu beweisen, die trivialerweise gilt.
   2. Schritt:
   Die Menge der Durchschnitte $A^s$ mit $s = (s_1,\ldots,s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine $2^k$-Partition von $\Omega$. Bei der Konstruktion eines Ereignisses $A_{k+1}$, so dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen $A^s$ in konstantem Verhältnis $p_{k+1}$ zu $1-p_{k+1}$.

   Wir gehen nach Lemma 23 der Vorlesung vor und zeigen für alle $s \in \{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung $\Pr[A^s] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]$.

   Falls $s_{k+1} = 1$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap A_{k+1} = B^{(s_1,\ldots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}\Pr[A^s] &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\ &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\ &= p_{k+1}\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\ &= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \;=\; \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.\end{aligned}$$

Falls $s_{k+1} = 0$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap \overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)}] \\
&= \Pr[A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \cdot \Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\
&= (1 - p_{k+1}) \cdot \Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \\
&= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}] \cdot \Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\,] \;=\; \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.
\end{aligned}$$

2. Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$. Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a+1, \dots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

   Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.

   Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

   Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$. Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

   Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

   Wir haben nun die Partition

$$\begin{aligned}
A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 &&= [9, 12]\,, \\
A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 &&= [13, 16]\,, \\
A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} &&= [1, 8]\,, \\
A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} &&= [17, 24]\,.
\end{aligned}$$

   Seien $B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$ und $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.
   Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

   Wir setzen $C = A_3$ und erhalten $\Pr[C] = \frac{1}{4}$.

   Die Menge aller Vereinigungen von Durchschnitten $A^s$ bildet eine Boolsche Algebra.

## Vorbereitung 2

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

$$X := \text{Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis } \texttt{C} \text{ gezogen wurde.}$$

**Lösung**

Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n \cdot Pr[X = n] \\
&= \sum_{n\geq 1} n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} \frac{1}{(1 - \frac{5}{6})^2} = 6\,.
\end{aligned}$$

Wegen

$$\mathbb{E}[X^2] \quad = \quad \sum_{n\geq 1} n^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n(n-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sum_{n\geq 2} n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 60,
\end{aligned}$$

mithin

$$\mathbb{E}[X^2] = 66$$

und

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 30.$$

## Tutoraufgabe 1

Wir wollen mit einem Test feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte infektiöse Krankheit vorliegt, wenn der Test positiv war. Die Krankheit trete bei Menschen mit der Häufigkeit $10^{-5}$ auf. Bei gesunden Menschen sei der Test mit Wahrscheinlichkeit $0,001$ positiv, bei schon erkrankten Menschen sei der Test in 95% der Fälle positiv.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiv ausgefallenen Test keine Infektion vorliegt?

**Lösung**

Es seien $I$ bzw. $T$ das Ereignis "Infektion" bzw. "Testergebnis positiv". Dann gilt

$$\Pr[I] = 10^{-5}, \quad \Pr[\bar{I}] = 1 - 10^{-5}, \quad \Pr[T|I] = 0,95, \quad \Pr[T|\bar{I}] = 0,001\,.$$

Mit dem Satz von Bayes folgt

$$\Pr[I|T] = \frac{\Pr[T|I] \cdot \Pr[I]}{\Pr[T|I] \cdot \Pr[I] + \Pr[T|\bar{I}] \cdot \Pr[\bar{I}]} = 0,009411\ldots\,.$$

und

$$Pr[\bar{I}|T] = 0,990589\ldots \ .$$

## Tutoraufgabe 2

Wir betrachten das folgende Experiment:

- 1. Schritt: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis das erste Mal Kopf erscheint. Es sei $k$ die Anzahl der dazu ausgeführten Münzwürfe.

- 2. Schritt: Es wird ein fairer 6-seitiger Würfel $k$-mal geworfen mit Ergebnissen aus der Menge [6].

1. Stellen Sie die Ergebnisse des Experiments entsprechend als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum dar und beweisen Sie, dass Ihre Darstellung korrekt ist, d.h., dass die Definitionsbedingungen eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes erfüllt sind.
2. Es sei $M_k$ das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt genau $k$-mal geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[M_k]$.
3. Es sei $A$ das Ereignis, dass in den $k$ Würfen des Würfels genau einmal eine 6 geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[A|M_k]$ und $\Pr[A]$.
4. Bestimmen Sie $\Pr[M_k|A]$.

**Lösung**

1. Seien $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k)\,;\, k \in \mathbb{N}, x_i \in [6]\}$ und $\Pr[(x_1, x_2, \ldots, x_k)] = 2^{-k}6^{-k}$.

   Offenbar gilt $0 \le \Pr[e] \le 1$ für alle $e \in \Omega$. Wir zeigen noch $\Pr[\Omega] = 1$ wie folgt.

$$\Pr[\Omega] = \sum_{x\in\Omega} \Pr[x] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{6^k} 2^{-k}6^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1\,.$$

2. $\Pr[M_k] = 2^{-k}$.

3. Man kann die Idee einer Fallunterscheidung in $k$ Fälle haben, so dass genau an der Stelle $i \in [k]$ eine 6 steht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist je $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass an allen anderen Stellen eine der restlichen 5 Zahlen steht, ist dann $(\frac{5}{6})^{k-1}$. Nun summiert man über alle $k$ Fälle.

$$\Pr[A|M_k] = k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k}\,.$$

   Wir rechnen mit totaler Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}
\Pr[A] &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[A|M_k] \cdot \Pr[M_k] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k} \cdot 2^{-k} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k \\
&= \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{k+1} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k\,.
\end{aligned}$$

   Mit $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n = \frac{1}{(1-x)^2}$ folgt

$$\Pr[A] = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{5}{12}}\right)^2 = \frac{12}{49}\,.$$

4.

$$\begin{aligned}\Pr[M_k|A] &= \frac{Pr[A|M_k]\cdot\Pr[M_k]}{\Pr[A]}\\ &= \frac{k}{5}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^k\cdot 2^{-k}\cdot\frac{49}{12} = \frac{k}{5}\cdot\frac{49}{12}\cdot\left(\frac{5}{12}\right)^k .\end{aligned}$$

## Tutoraufgabe 3

Für alle $\omega = (\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\Omega = \{0,1\}^n$ mit $n\geq 2$ sei $Pr[\omega] = 2^{-n}$. Wir definieren die $n+1$ Ereignisse $A_i := \{\omega\in\Omega\ ;\ \omega_i = 1\}$ und $B := \{\omega\in\Omega\ ;\ \sum_i \omega_i \text{ ist ungerade}\}$ sowie die Ereignismengen

$$F_1 = \{A_1,\ldots,A_n,B\},\qquad F_2 = \{A_1,\ldots,A_n\},\qquad F_3 = \{A_2,\ldots,A_n,B\}.$$

Welche dieser Mengen sind unabhängig? Beweis!

Hinweis: Nutzen Sie das in Vorbereitungsaufgabe 1 definierte Verfahren.

**Lösung**

Zunächst stellen wir $\Pr[B] = \frac{1}{2}$ fest. Außerdem gilt $\Pr[A_i] = \frac{1}{2}$ für alle $i\in[n]$, denn $|A_i| = 2^{n-1}$, d.h. $\Pr[A_i] = 2^{-n}\cdot 2^{n-1}$.

- Die Menge $F_1$ ist abhängig, denn wegen $A_1\cap\cdots\cap A_n = \{(1,1,\ldots,1)\}$ gilt einerseits

  $$Pr[A_1\cap\ldots\cap A_n\cap B] = \begin{cases}0 & \text{falls } n \text{ gerade}\\ 2^{-n} & \text{falls } n \text{ ungerade}\end{cases}$$

  und andererseits

  $$Pr[A_1]\cdot\ldots\cdot Pr[A_n]\cdot Pr[B] = \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

  Eine alternative Argumentation stellt fest, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit von $B$ unter der Bedingung $A_1\cap\ldots\cap A_n$ gleich 0 oder 1 ist. Die Unabhängigkeit würde aber den Wert $\frac{1}{2}$ erfordern.

- Die Menge $F_2$ ist nach Lemma 23 unabhängig, denn für beliebiges $s = (s_1,s_2,\ldots,s_n)$ gilt

  $$Pr[\bigcap_{i\in[n]} A_i^{s_i}] = 2^{-n} = \prod_{i\in[n]} Pr[A_i^{s_i}]\,.$$

- Auch die Menge $F_3$ ist unabhängig. Wir zeigen dies mit dem Verfahren aus Vorbereitungsaufgabe 1.

  Zunächst stellen wir fest, dass die Menge $A_2,A_3,\ldots,A_n$ unabhängig ist. Sämtliche Durchschnitte $A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)} = \bigcap_{i\in[2,n]} A_i^{s_i}$ enthalten genau 2 Elemente $(0,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n)$ und $(1,\omega_2,\omega_3,\ldots,\omega_n)$.

  Nun ist klar, dass die Bedingung $B$ aus jeder dieser Mengen $A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)}$ genau ein Element auswählt. Damit gilt $\Pr[B\mid A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)}] = \frac{1}{2}$ und das Verfahren aus VA 1 liefert uns die unabhängige Menge $A_2,A_3,\ldots,A_n,B$ .

## Tutoraufgabe 4

Wie in Vorbereitungsaufgabe 2 wählen wir nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

$$X := \text{Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis } \texttt{C} \text{ gezogen wurde.}$$

**Lösung**

Es gilt

$$\mathbb{E}[X] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{21}{6}.$$

Wegen

$$\mathbb{E}[X^2] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 36 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{91}{6}$$

ist

$$\operatorname{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{35}{12}.$$