Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 4

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 15.05.2013 um 12:00

Aufgabe 4.1 — 2P+3P+2P+2P+3P

Die kleine Maxi vertreibt sich die Zeit damit, eine faire Münze solange zu werfen, bis die letzten drei Würfe das Muster 110 ergeben.

(a) Beschreiben Sie das Experiment durch ein Markov-Diagramm.

(b) Die ZV W zählt die Anzahl der Würfe, bis Maxi aufhört.

Leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\Pr[W \geq n]$ her.

Hinweis: Schauen Sie sich TA 3.1 nochmals an. Wie kann man $[W \geq n]$ mittels Z_{n-1} ausdrücken? Sie können für diese Aufgabe ein CAS verwenden. Geben Sie aber alle relevanten Teilergebnisse an.

(c) Verwenden Sie den für $\Pr[W \geq n]$ in (b) bestimmten Ausdruck, um $\mathbb{E}[W]$ mittels der Formel $\mathbb{E}[W] = \sum_{n\geq 1} \Pr[W \geq n]$ zu berechnen.

Hinweis: Vereinfachen Sie den Ausdruck von Hand soweit wie möglich. Zum Auswerten können Sie wieder ein CAS verwenden.

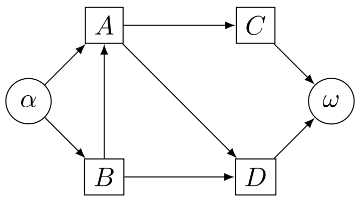
Nach einer Weile kommt Maxis Freundin Renate vorbei und will mitspielen. Maxi lässt Renate nun die Münze werfen, bis die letzten drei Würfe gerade das Muster 100 oder 111 ergeben. Bei 100 gewinnt Maxi, sonst Renate.

(d) Stellen Sie wieder das entsprechende Markov-Diagramm auf.

(e) Haben Maxi und Renate dieselbe Gewinnw'keit?

Aufgabe 4.2 — 2P+2P+4P

Das folgende elektrische System besteht aus den Komponenten A, B, C, D, wobei der Signalweg von α nach ω führt.



Bei der Herstellung kann jede Komponente unabhängig von allen anderen Komponenten mit einer W'keit p fehlerhaft sein. Das System selbst ist allerdings solange funktionsfähig, wie es einen Pfad von α nach ω gibt, entlang welchem alle Komponenten fehlerfrei sind.

(a) Berechnen Sie die W'keit, dass das System funktionsfähig ist, unter der Bedingung, dass Komponente A defekt ist.

Hinweis: Sei A das Ereignis, dass Komponente A funktioniert. Entsprechend für B, C, D. Stellen Sie eine aussagenlogische Formel auf, die gerade aussagt, wann das System funktioniert.

(b) Berechnen Sie die W'keit, dass das System funktionsfähig ist.

Vereinfachen Sie den erhaltenen Ausdruck soweit wie möglich.

(c) Sie N die ZV, welche zählt, wie viele Komponenten defekt sind. N ist offensichtlich binomial verteilt.

Bestimmen Sie die Dichte von N unter der Bedingung, dass das System funktionsfähig ist.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 13.05.2013

Aufgabe 4.1

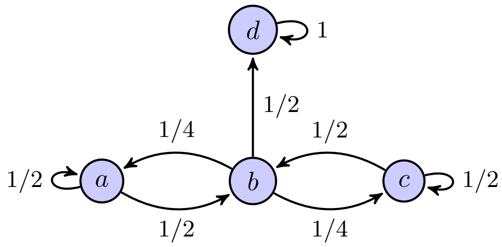
Sei $(\Omega, \Pr[])$ ein diskreter W-Raum, X eine ZV mit $\mathbb{E}[|X|] < \infty$, B ein Ereignis mit $\Pr[B] > 0$ und $A_1, A_2, \ldots$ paarweise disjunkte Ereignisse mit $B \subseteq \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ und $\Pr[B \cap A_i] > 0$ für alle $i \in \mathbb{N}$. (Siehe auch Satz 59.)

Dann gilt:

$$\mathbb{E}[X \mid B] = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{E}[X \mid B \cap A_i] \cdot \Pr[A_i \mid B]\,.$$

Aufgabe 4.2

Wir betrachten nochmals das Markov-Diagramm (Q, T, δ) aus TA 3.1:



Allerdings betrachten wir nun für jeden möglichen Startzustand $s \in Q := \{a, b, c, d\}$ das Experiment, dass man irgendwann Zustand d erreicht: Sei $\Omega_s := [s \rightsquigarrow d]^{d=1}$ und $\Pr[]$ das in der Vorlesung für Markov-Diagramme definiert Maß. Wir betrachten nun parallel die vier W'keitsräume $(\Omega_s, \Pr_s[])$ für $s \in Q$, wobei $\Pr_s[A] := \Pr[A]$ für alle $A \subseteq \Omega_s$. (Der zusätzliche Index dient nur zur Erinnerung, in welchem Experiment wir uns gerade befinden.)

(a) Machen Sie sich klar, dass $(\Omega_s, \Pr_s[])$ tatsächlich ein diskreter W'keitsraum ist für jedes $s \in Q$.

Wie in TA 3.1 definieren wir auf jedem Ω_s die ZVn N und Z_i: Für $\pi = q_0 q_1 q_2 \ldots q_{l-1} q_l \in \Omega_s$ sei $N(\pi)$ die Pfadlänge; Z_i gebe wieder die nach i Schritten erreichte Position an, d.h. $Z_i(\pi) = q_i$, falls $i \leq l$, ansonsten gelte wieder $Z_i(q_0 q_1 \ldots q_{l-1} q_l) = q_l (= d)$. (Wir könnten N und Z_i noch mit einem Index s versehen, um uns den Startzustand zu merken, aber das erledigt $\Pr_s[]$ schon.)

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{E}_s[N] = \sum_{t \in sT} \mathbb{E}_t[N + 1] \cdot \delta(s, t)$.

Der Erwartungswert $\mathbb{E}_s[N]$ ist dabei bzgl. $(\Omega_s, \Pr_s[])$ zu verstehen.

(c) Stellen Sie ein lineares Gleichungssystem in den Unbekannten $\mathbb{E}_s[N]$ auf und berechnen Sie dann $\mathbb{E}_a[N]$.

(d) Berechnen Sie die Varianz von N bzgl. dem Experiment $(\Omega_a, \Pr_a[])$, das in Zustand a startet.

Aufgabe 4.3

Es seien U, V, W, Y, Z unabhängige ZVen mit $U \sim \mathrm{geo}(1/5)$, $V \sim \mathrm{geo}(2/3)$, W gleichverteilt auf $[5]$, $Y \sim \mathrm{bin}(10, 0.4)$ und $Z \sim \mathrm{bin}(8, 0.75)$.

Bestimmen Sie: $\mathbb{E}[(Z + \min(U + W, V + W)) \cdot (Y + Z)]$.