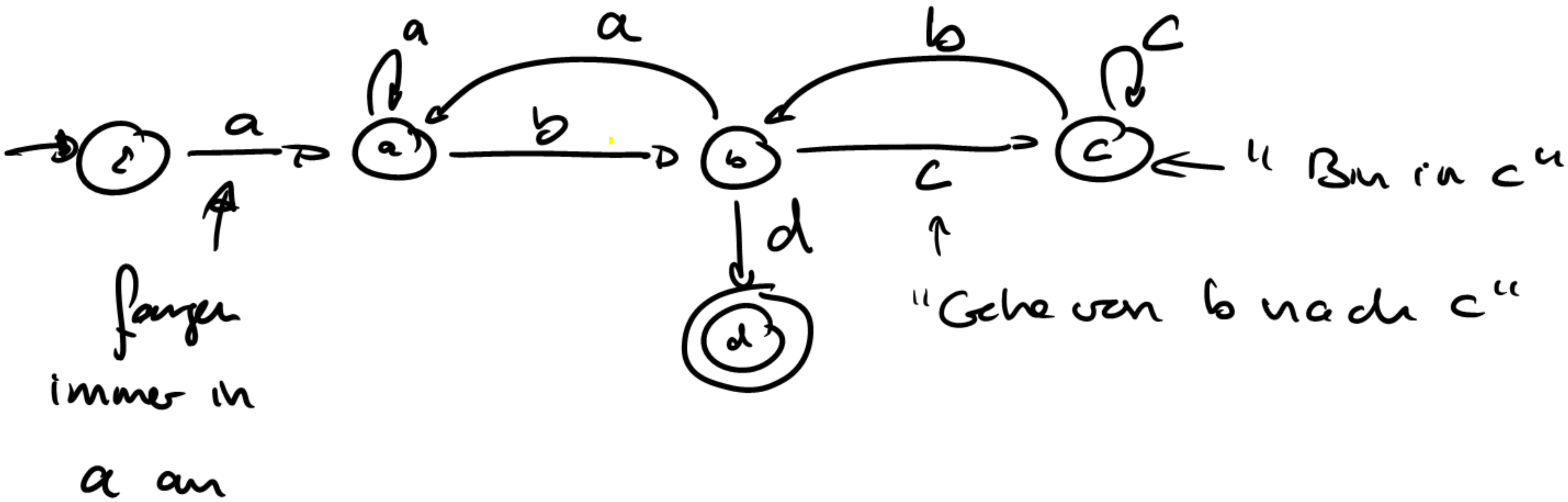
TA 3.1

(a)



$\leadsto$ Ω ist eine reguläre Sprache.

$$\Omega = L(a a^* b (a a^* b + c c^* b)^* d)$$

(b) **Bemerkung:**

Man muss sich hier genau die VL-Folien anschauen.

Ein Markov-Diagramm ist ein endlicher Digraph mit Kantengewichten mit:

- Q die endliche Knoten-/Zustandsmenge
- $T \subseteq Q \times Q$ die Kanten/Transitionen
- $\delta : T \longrightarrow [0, 1]$
  ohne 0

"Massenerhaltung"

$$\text{mit } \forall s \in Q : \underbrace{\sum_{t \in sT} \delta(s, t)}_{} = 1$$

Nachfolger

- Nach VL definiert man nun für jeden endlichen Pfad $s_0 s_1 s_2 s_3 \dots s_\ell$ im Graphen (Q, T) das Maß $\Pr[s_0 \dots s_\ell] = \prod_{i=0}^{\ell-1} \delta(s_i, s_{i+1})$

analog zur Pfadregel in "Baumdiagrammen"
(= Markov-Diagramme mit (Q,T) ein Baum)

Pr wird dann geliftet auf jede präfix-freie Menge von Pfaden mit demselben Startzustand:
(endlich)

→ präfix-frei: Kein Pfad kann zu einem anderen Pfad der Menge fortgesetzt werden.

"entfaltet" das Diagramm → in einen (unendlichen) Baum

- P: präfix-freie Menge von endlichen Pfaden aus (Q, T)

$$Pr[P] := \sum_{\pi \in P} \underbrace{Pr[\pi]}_{\text{bereits definiert}}$$

$\rightsquigarrow$ Nach VL ist also Pr im Fall von Markov-Diagrammen nicht nur auf Ω definiert

- In dieser Aufgabe: $\Omega = [a \rightsquigarrow d]^{d=1}$

$\hat{=}$ alle endlichen Pfade von a nach d, die d genau einmal besuchen (dort enden)

sondern auf allen Pfaden in (Q, T)

- Notation aus VL:

$[s \rightsquigarrow t]^{u=i}$: alle endlichen Pfade von s nach t, die u genau i-mal besuchen

$[s \rightsquigarrow t]_k^{u=i}$: wie oben, nur Pfade haben Länge genau k

Beachte: $[s \rightsquigarrow t]^{t=1}$ ist präfix-frei; die Pfade haben genau ein t als letztes Zeichen.

<u>Nach VL:</u> $Pr\left[[s \rightsquigarrow t]^{t=1} \right] = 1$

falls jeder Zustand Q auf einem Pfad aus $[s \rightsquigarrow t]^{t=1}$ liegt.

- Zustand nach i Schritten: Z_i

<u>Für $s \neq d$:</u>

$$[Z_i = s] = \underbrace{[a \rightsquigarrow s]^{d=0}_i}_{\text{Pfade der Länge } i \text{ von } a \text{ nach } s\text{, die } d \text{ \underline{nicht} besuchen}} \overset{\text{Konkatenation von Pfaden}}{\circ} \underbrace{[s \rightsquigarrow d]^{d=1}}_{\text{Pfade von } s \text{ nach } d\text{, die in } d \text{ enden.}}$$

<u>Beachte:</u> $\Pr\left[[s \rightsquigarrow d]^{d=1}\right] = 1$

(! Das ist kein Ereignis in Ω, sondern das Gewicht aller Pfade)

Für s=d:

$$[z_i = d] \overset{\text{nach Aufgabe}}{=} [a \rightsquigarrow d]^{d=1}_{\leq i}$$

Daher:

$$\Pr[z_i = d] = 1 - \Pr[z_i \in \{a, b, c, d\}]$$

- $\Pr[Z_1 = a]$

$$= \Pr[\{ \underset{Z_0}{a}\, \pi \in \Omega \mid \pi \in \underbrace{[a \rightsquigarrow d]^{d=1}}_{=\Omega} \}]$$

Z_1

$$= \sum_{\pi \in [a \rightsquigarrow d]^{d=1}} \Pr[a\, \pi]$$

$$= \sum_{\pi \in [a \rightsquigarrow d]^{d=1}} \delta(a,a) \Pr[\pi]$$

$$= \delta(a,a)\, \underbrace{\Pr[[a \rightsquigarrow d]^{d=1}]}_{=1}$$

$$= \delta(a,a) = \frac{1}{2}$$

Interpretation:
Machen einen Schritt von a nach a ($\delta(a,a)$), danach startet das Experiment neu ($[a \rightsquigarrow d]^{d=1}$)

- $\Pr[Z_1 = b]$

$$= \Pr\Big[\{\underset{\substack{\| \\ s_0}}{a}\ \underset{\substack{\| \\ s_1}}{b}\ s_2\, s_3 \dots s_k \in \Omega\}\Big]$$

$$= \Pr\Big[\{a\pi \mid \pi \in [b \rightsquigarrow d]^{d=1}\}\Big]$$

$$= \delta(a,b)\ \underbrace{\Pr\big[[b \rightsquigarrow d]^{d=1}\big]}_{=1 \text{ nach VL}}$$

$$= \delta(a,b) = 1/2$$

Interpretation: $\rightarrow$ siehe TA 4.1

Mache einen Schritt $a \rightarrow b$, dann betrachte das neue Experiment $[b \rightsquigarrow d]^{d=1}$.

- $Pr[Z_1 = c] = Pr[\underbrace{\{ a\,c\,s_2 s_3 \dots s_k \in \Omega \}}_{= \emptyset \text{, da } (a,c) \notin T}]$

  $= 0$

- Analog $Pr[Z_1 = d] = 0$.

- $\Pr[Z_2 = a]$

$$= \sum_{s \in T_a} \Pr[Z_2 = a \mid Z_1 = s] \Pr[Z_1 = s]$$

T_a: Vorgänger von a

$$[Z_2 = a \wedge Z_1 = s] = [a \rightsquigarrow s]_1^{d=0} \circ (s,a) \circ [a \rightsquigarrow d]^{d=1}$$

$\circ$: Katalenation

$$[Z_1 = s] = [a \rightsquigarrow s]_1^{d=0} \circ [s \rightsquigarrow d]^{d=1}$$

$$\rightsquigarrow \Pr[Z_2 = a \mid Z_1 = s] = \frac{\Pr[[a \rightsquigarrow s]_1^{d=0}]\, \delta(s,a) \cdot 1}{\Pr[[a \rightsquigarrow s]_1^{d=0}] \cdot 1}$$

$$= \underbrace{\delta(a,a)}_{1/2} \underbrace{\Pr[Z_1 = a]}_{1/2} + \underbrace{\delta(b,a)}_{1/4} \underbrace{\Pr[Z_1 = b]}_{1/2} = \frac{3}{8}$$

• <u>Analog</u>: $\Pr[Z_2 = b] = \sum_{s \in Tb} \delta(s,b) \Pr[Z_1 = s]$

$$= \underbrace{\delta(a,b)}_{1/2} \underbrace{\Pr[Z_1 = a]}_{1/2} + \delta(c,b) \underbrace{\Pr[Z_1 = c]}_{= 0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

$$\bullet \Pr[Z_2 = c] = \overbrace{\delta(b,c)}^{1/4} \overbrace{\Pr[Z_1 = b]}^{1/2} + \overbrace{\delta(c,c)}^{1/2} \overbrace{\Pr[Z_1 = c]}^{0}$$

$$= \underline{\underline{\frac{1}{8}}}$$

$$\Pr[Z_2 = d] = 1 - \Pr[Z_1 \in \{a,b,c\}] = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$$

- **Allgemein:**

Intuitiv sollte das klar sein

$$\Pr[Z_{k+1} = t] = \sum_{s \in \underline{T_t}} \Pr[Z_k = s]\, \delta(s,t)$$

Vorgänger von t (bzgl T)

Formal:

s.d.t.W.

$$\Pr[Z_{k+1} = t] \overset{\downarrow}{=} \sum_{s \in T_t} \Pr[Z_k = s] \Pr[Z_{k+1} = t \mid Z_k = s]$$

$$\Pr[Z_{k+1} = t \mid Z_k = t]$$

$$= \frac{\Pr[Z_{k+1} = t \wedge Z_k = s]}{\Pr[Z_k = s]} \overset{*}{=} \delta(s,t)$$

$$\overset{*}{=} \begin{cases} t \neq d: & \dfrac{\Pr\left[[a \rightsquigarrow s]_k^{d=0} \circ [s \rightsquigarrow t]_1^{d=0} \circ [t \rightsquigarrow d]^{d=1}\right]}{\Pr\left[[a \rightsquigarrow s]_k^{d=0} \circ [s \rightsquigarrow d]^{d=1}\right]} = \delta(s,t) \\[2ex] t = d \wedge s \neq d: & \dfrac{\Pr\left[[a \rightsquigarrow s]_k^{d=0} \circ [s \rightsquigarrow d]_1\right]}{\Pr\left[[a \rightsquigarrow s]_k^{d=0} \circ [s \rightsquigarrow d]^{d=1}\right]} = \delta(s,d) \\[2ex] t = d \wedge s = d: & \dfrac{\Pr\left[[a \rightsquigarrow d]_k^{d=1}\right]}{\Pr\left[[a \rightsquigarrow d]_k^{d=1}\right]} = 1 \end{cases}$$

(mit delta(s,t):=0 falls (s,t) nicht in T)

In Matrixform: $z_{k+1} = z_k \cdot \Big(\delta(s,t) \Big)_{s,t \in Q}$

mit $z_k = \Big(\Pr[Z_k = s] \Big)_{s \in Q}$

$$\leadsto z_3 = \left(\frac{3}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4} \right) \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \left(\frac{1}{4}, \underline{\underline{\frac{1}{4}}}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8} \right)$$

$$\Pr[Z_2 = s \mid Z_3 = b] = \overbrace{\Pr[Z_3 = b \mid Z_2 = s]}^{\delta(s,b)} \frac{\Pr[Z_2 = s]}{\Pr[Z_3 = b]} = \frac{\delta(s,b) \Pr[Z_2 = s]}{1/4}$$

$$\leadsto \Pr[Z_2 = a \mid Z_3 = b] = \frac{1/2 \cdot 3/8}{1/4} = \frac{3}{4}, \quad \Pr[Z_2 = c \mid Z_3 = b] = \frac{1/2 \cdot 1/8}{1/4} = \frac{1}{4}$$

- $M := \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Bemerkung: Es reicht $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ zu diagonalisieren,

da nur hiervon $\left(Pr[Z_k = s] \right)_{s \in \{a,b,c\}}$ abhängt.

- Und nach Aufgabenstellung gilt ja:

$$Pr[Z_k = d] = 1 - Pr[Z_k \in \{a,b,c\}]$$

$$M' = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} = Q \cdot J \cdot Q^{-1}$$

$$J = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{2}, \frac{\bar{\phi}}{2}, \frac{\phi}{2}\right)$$

$$Q = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -\phi & -\bar{\phi} \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \text{mit } \phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\bar{\phi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

$$Q^{-1} = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -\bar{\phi} & -2 & -\bar{\phi} \\ \phi & 2 & \phi \end{pmatrix}$$

$$\leadsto \Pr[z_k \neq d] = (1,0,0) \cdot (M')^k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\phi^2 = \phi + 1$$

$$\bar{\phi}^2 = \bar{\phi} + 1$$

$$F_0 := 0$$

$$F_1 = 1$$

$$F_{k+2} = F_k + F_{k+1} = \frac{\phi^k - \bar{\phi}^k}{\phi - \bar{\phi}}$$

$$= (-1,1,1) \cdot]^k \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -(\bar{\phi}+1) \\ \phi + 1 \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$= (-1,1,1) \cdot 2^{-k} \cdot \mathrm{diag}(1, \bar{\phi}^k, \phi^k) \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\phi}^2 \\ \phi^2 \end{pmatrix} \frac{1}{\phi - \bar{\phi}}$$

$$= (-1,1,1) \begin{pmatrix} 0 \\ -\bar{\phi}^{k+2} \\ \phi^{k+2} \end{pmatrix} \frac{2^{-k}}{\phi - \bar{\phi}}$$

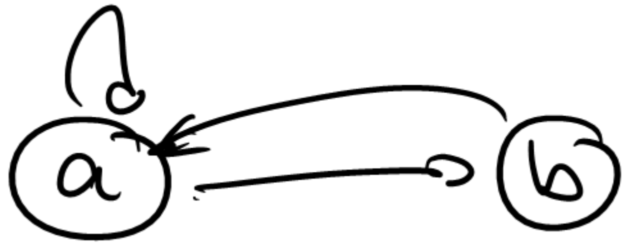
$$= 2^{-k} \frac{\phi^{k+2} - \bar{\phi}^{k+2}}{\phi - \bar{\phi}} = 2^{-k} F_{k+2}$$

Anmerkung:

Fibonacci: $F_{k+2} = F_{k+1} + F_k$

$$\hat{=} \quad (F_{k+2}, F_{k+1}) = (F_{k+1}, F_k) \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccc} & a & b \\ \begin{matrix} a \\ b \end{matrix} & \multicolumn{2}{c}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}} \end{array} \quad \hat{=}$$



"Fibonacci-Graph"

TA 3.2

VL:

$\{A_1, \dots, A_n\}$ unabh.

(Def 44) gdw. $\forall k \in [n]\ \forall 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n:$

$$\Pr[A_{i_1} \cap \dots \cap A_{i_k}] = \prod_{j=1}^{k} \Pr[A_{i_j}]$$

(Lem 45) gdw. $\forall\ s_1, \dots, s_n \in \{0,1\}: \Pr[A_1^{s_1} \cap A_2^{s_2} \cap \dots \cap A_n^{s_n}] = \prod_{i=1}^{n} \Pr[A_i^{s_i}]$

(mit $A^0 := \Omega \setminus A$, $A^1 := A$)

Lem 46: $\{A, B, C\}$ unabh. impliziert $\{A \cap B, C\}$, $\{A \cup B, C\}$

(a) $\{A_1, \dots, A_{10}\}$ unabh.

- $1 - I_{A_3}(\omega) = 1$ gdw. $I_{A_3}(\omega) = 0$

  gdw. $\omega \notin A_3$

  gdw. $\omega \in \Omega \setminus A_3$

  gdw. $I_{\overline{A_3}}(\omega) = 1$

$\rightsquigarrow \quad 1 - I_{A_3}(\omega) = I_{\overline{A_3}}(\omega)$

- $(I_{A_2} \cdot I_{\overline{A_3}})(\omega) = 1$ gdw. $I_{A_2}(\omega) = 1 \wedge I_{\overline{A_3}}(\omega) = 1$

  gdw. $\omega \in A_2 \quad \wedge \quad \omega \in \overline{A_3}$

  gdw. $\omega \in A_2 \cap \overline{A_3}$

  gdw. $I_{A_2 \cap \overline{A_3}}(\omega) = 1$

- Damit zu zeigen:

$$\{ \overbrace{I_{A_2 \cap \overline{A_3}}}^{X},\ \overbrace{I_{\overline{A_1 \cup (A_4 \cap \overline{A_5})}}}^{Y},\ \overbrace{I_{A_6}}^{Z} \} \text{ unabh.}$$

nach Def 47 gilt das gdw.

Für alle $x, y, z \in \{0,1\}$:

$$\Pr[X=x, Y=y, Z=z] = \Pr[X=x]\Pr[Y=y]\Pr[Z=z]$$

Da aber für jede Indikatorvariable I_B gilt:

$$[I_B = 0] = \overline{B} = B^0, \quad [I_B = 1] = B = B^1$$

folgt mit Lem 45, dass man nur zeigen muss, dass

$$\{ A_2 \cap \overline{A_3},\ \overline{A_1 \cup (A_4 \cap \overline{A_5})},\ A_6 \} \text{ unabh.}$$

$$\equiv \overline{A_1} \cap (\overline{A_4} \cup A_5)$$

$$\{A_1, A_2, \dots, A_6\} \text{ unabh.}$$

$$\underset{L45}{\Longleftrightarrow} \{\overline{A_1}, A_2, \overline{A_3}, \overline{A_4}, A_5, A_6\} \text{ unabh.}$$

$$\underset{L46}{\Longrightarrow} \{A_2 \cap \overline{A_3}, \overline{A_1}, \overline{A_4}, A_5, A_6\} \text{ unabh.}$$

$$\underset{L46}{\Longrightarrow} \{A_2 \cap \overline{A_3}, \overline{A_1}, \overline{A_4} \cup A_5, A_6\} \text{ unabh.}$$

$$\underset{L46}{\Longrightarrow} \{A_2 \cap \overline{A_3}, \overline{A_1} \cap (\overline{A_4} \cup A_5), A_6\} \text{ unabh.} \quad \square$$

L46 betrachtet nur $\{A, B, C\}$ unabh. Gilt aber natürlich auch für $\{A_1, \dots, A_n\}$

(b) Zu zeigen: $\Pr[f(X)=u, g(Y,Z)=v] = \Pr[f(X)=u] \cdot \Pr[g(Y,Z)=v]$ (*)

Gegeben: X, Y, Z unabh., $W_X = W_Y = W_Z = \mathbb{N}$, $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $g: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$

$$\Pr[f(X)=u, g(Y,Z)=v]$$

$$= \Pr[X \in f^{-1}(u), (Y,Z) \in g^{-1}(v)]$$

$$= \sum_{x \in f^{-1}(u)} \sum_{(y,z) \in g^{-1}(v)} \Pr[X=x, Y=y, Z=z]$$

$$\overset{X,Y,Z \text{ unab.}}{=} \sum_{x \in f^{-1}(u)} \sum_{(y,z) \in g^{-1}(v)} \Pr[X=x] \Pr[Y=y] \Pr[Z=z]$$

$$\overset{Y,Z \text{ unab}}{=} \left(\sum_{x \in f^{-1}(u)} \Pr[X=x] \right) \left(\sum_{(y,z) \in g^{-1}(v)} \Pr[Y=y, Z=z] \right) = (*) \quad \square$$