Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 9
22. Juni 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 29. Juni 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Die Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie wird von 300 Studenten besucht, wobei jeder der Studenten seine wöchentlichen Hausaufgaben unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{10}$ zur Korrektur abgibt. Die Übungsleitung ist an der Anzahl der Hausaufgaben X interessiert, die in der aktuellen Woche korrigiert werden müssen.

1. Sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Beweisen Sie die Gleichung $-\Phi(-x) = \Phi(x) - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Approximieren Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein möglichst kleines Intervall, das X mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ enthält.

Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzung $\Phi(\sqrt{2}) \approx \frac{95}{100}$ für Ihre Rechnung.

Tutoraufgabe 2

Sei X_1 bis X_n eine Familie von n unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen und $f(x_1, \ldots, x_n)$ ihre gemeinsame Dichte.

1. Zeigen Sie, dass $f(x_1, \ldots, x_n)$ ausschließlich vom Abstand des Vektors $(x_1, \ldots, x_n)$ zum Ursprung abhängt.

2. Geben Sie ein Verfahren an, um mit einem Zufallszahlengenerator für normalverteilte Zufallsvariablen gleichverteilte Punkte auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel zu erzeugen. Ein formaler Beweis ist nicht erforderlich.

Tutoraufgabe 3

Zwei Mannschaften a und b treten bei einem Fußballspiel gegeneinander an. Die zeitlichen Abstände zwischen den Toren, die Mannschaft a erzielt, sind unabhängig expontentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{10}$ Minuten. Für Mannschaft b sind die Zeitabstände ebenfalls unabhängig exponentialverteilt, diesmal mit Parameter $\kappa = \frac{1}{20}$ Minuten.

1. Berechnen Sie den erwarteten Zeitpunkt des ersten Tores unter der Annahme, dass a und b unabhängig voneinander Ihre Tore schießen.

2. Leider haben Sie die ersten t Minuten des Spiels verpasst. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die erwartete Anzahl an Toren, die in Ihrer Abwesenheit geschossen wurden.

3. Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht die Zeitspanne, die Sie ab t warten müssen, bis ein Spieler aus Mannschaft a das nächste Tor schießt?

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Verteilung der Rundungsreste von kontinuierlichen Zufallsvariablen. Sei hierfür X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(x)$ und Y definiert als $X - \lfloor X \rfloor$.

1. Bestimmen Sie die Dichtefunktion von Y in Abhängigkeit von $f_X(x)$.
2. Angenommen X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Geben Sie die Dichtefunktion von Y explizit an.

Hinweise: Nutzen Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y \leq x, \lfloor X \rfloor = i]$ für $i \in \mathbb{Z}$ in der ersten Teilaufgabe.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Eine Übungsgruppe für Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie besteht aus 10 Studenten, die allesamt sehr müde sind. Die Dauer bis zum Einschlafen eines einzelnen Studenten sei exponentialverteilt und unabhängig von den anderen Teilnehmern. Im Mittel kann sich jeder Studenten bis zur Hälfte der Übungsstunde wachhalten.

1. Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit, dass nach der Hälfte der Übungsstunde noch alle Studenten wach sind.
2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schlafen mindestens die Hälfte der Studenten während der Übungsstunde ein?
3. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz für die Anzahl der schlafenden Studenten am Ende der Übungsstunde.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten ein zufälliges Polynom $X \cdot x^2 + Y \cdot x + Z$, dessen Koeffizienten X, Y und Z unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariablen auf dem Interval $[-1, 1]$ sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt das Polynom keine reelle Nullstelle?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien V, W, X, Y, Z unabhängige Zufallsvariablen, so dass V und W exponentialverteilt sind den mit Parameter $\lambda_1 = \frac{1}{5}$ bzw. $\lambda_2 = \frac{3}{40}$. Des Weiteren sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[-\pi, 3 - \pi]$ und Y normalverteilt mit Erwartungswert -4 und Varianz 2. Bei Z handelt es sich um eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[\mathrm{Var}[X] \cdot \min\{V + X, W + X\} \cdot (Y + 2Z) \cdot (\mathrm{Var}[3Y - 2Z])^{-1}]$ und dokumentieren Sie Ihre Rechenschritte geeignet.

Hinweis: Für diese Aufgabe müssen Sie keine Dichte oder Verteilung explizit herleiten.