Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 2

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 02.05.2013 um 10:00

Aufgabe 2.1 3P

Konstruieren Sie einen endlichen W'keitraums $(\Omega, \Pr[])$ und zwei Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A] \neq \Pr[B]$, so dass gilt:

$$\Pr[A \cap B] \geq 9 \cdot \Pr[A] \cdot \Pr[B] > 0.$$

Aufgabe 2.2 2P

Prof. Evilsparza muss mündliche Prüfungen abnehmen. Maximal vergibt Prof. Evilsparza eine 2. Jeden Prüfling fragt er, ob dieser Fan des FC Bayern Münchens sei. Die Note des Prüflings richtet sich sowohl nach der eigentlich Antwort („ja"/„nein"), als auch nach seiner Sprache („nicht bayrisch"/„bayrisch"): Gibt der Prüfling an, ein Fan des FC Bayern Münchens zu sein, so verschlechtert sich die Note um 2. Antwortet der Prüfling auf bayrisch, so verschlechtert sich die Note um 1. (Die Notenverschlechterungen sind additiv, so dass alle Noten aus $\{2, 3, 4, 5\}$ möglich sind.)

Es gelte:

- Mit W'keit 0.7 ist der Prüfling kein Fan des FC Bayern Münchens.
- Mit W'keit 0.29 ist der Prüfling Fan des FC Bayern Münchens und spricht dazu noch bayrisch.
- Mit W'keit 0.21 spricht der Prüfling bayrisch, ist aber kein Fan des FC Bayern Münchens.

Sei N die Zufallsvariable, welche die Note des Studenten angibt. Bestimmen Sie die Dichte von N.

Aufgabe 2.3 6P+5P+4P

Wir betrachten folgendes Spiel:

Eine Urne enthält zwei Kugeln mit dem Wert -1 und drei Kugeln mit dem Wert $+1$. Zu Beginn beträgt Ihr Gewinn 0. In jeder Runde entnehmen Sie eine zufällige Kugel aus der Urne. Jede Kugel wird dabei mit derselben W'keit entnommen. Die entnommene Kugel wird nicht zurückgelegt. Der Wert der gezogenen Kugel wird zu Ihrem Gewinn addiert. Befinden sich noch Kugeln in der Urne, so dürfen Sie entscheiden, ob Sie noch eine Runde spielen oder doch aufhören.

(a) Wir betrachten die Strategie A, in der man solange spielt, bis der Gewinn das erste Mal positiv ist oder sich keine Kugeln mehr in der Urne befinden.

  (i) Stellen Sie obiges Spiel unter Strategie A als Baumdiagramm dar.

  (ii) Für diese feste Strategie kann der Gewinn als eine Zufallsvariable (ZV) G_A aufgefasst werden.

  Bestimmen Sie den Wertebereich, die Dichte, die Verteilungsfunktion, den Erwartungswert und die Varianz von G_A.

(b) Betrachten Sie nun die Strategie B, in welcher Sie, solange sich noch Kugeln in der Urne befinden, eine faire Münze werfen, um zu entscheiden, ob Sie weiterspielen oder aufhören.

  Unter dieser Strategie ist der Gewinn durch eine ZV G_B beschrieben.

  Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von G_B.

  Hinweis: Stellen Sie das zugehörige Baumdiagramm kompakt als gerichteten, akzyklischen Graphen dar, indem Sie die Knoten des Baumdiagramms identifizieren, die dieselbe Spielsituation darstellen.

(c) Bestimmen Sie eine Strategie C, so dass der Erwartungswert des Gewinns G_C unter dieser Strategie maximal ist.

  Hinweis: Die Lösung ist zu begründen.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 29.04.2013

Aufgabe 2.1

Wir betrachten folgendes Experiment: Zu Beginn befinden sich r_0 rote Kugeln und b_0 blaue Kugeln in einer Urne. In jedem Zug wird zufällig eine Kugel gezogen *und wieder zurückgelegt*; zusätzlich wird noch eine weitere neue Kugel in die Urne gelegt, welche dieselbe Farbe wie die gezogene Kugel hat. Das Experiment läuft n Züge lang.

Wir beschreiben die Verläufe des Experiments als Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{r, b\}$; sei $\Omega = \{r, b\}^n$.

Für (a), (b), (c) gelte $n = 3$, $r_0 = 2$, $b_0 = 4$.

(a) Sei $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ die ZV, welche angibt, ob im i-ten Zug eine rote Kugel gezogen wurde. Berechnen Sie $\Pr[X_2 = 1]$.

(b) Sei R_i die ZV, welche die Anzahl der roten Bälle in der Urne nach i Zügen zählt (also $\Pr[R_0 = r_0] = 1$).

Bestimmen Sie die Dichte der ZV R_2.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[R_3]$ (*Hinweis:* $R_3 = R_2 + X_3$).

(d) Bestimmen Sie für allgemeine Parameter n, r_0, b_0 die Dichte von R_k.

Aufgabe 2.2

Es sei $\Omega = \{0, 1\}^n$ mit $\Pr[\omega] = 2^{-n}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Jedes $\omega \in \Omega$ lässt sich in maximale Blöcke von 0en bzw. 1en partitionieren.

Wir definieren die folgenden ZVen auf Ω:

- $N : \Omega \to \mathbb{N}$ zählt die Anzahl der Blöcke.
- $X_i : \Omega \to \mathbb{N}_0$ gibt die Länge des i-ten Blocks an ($i \in [n]$).

Beispiel: Für $\omega = 0^1 1^2 0^3 1^{n-6}$ gilt dann $N(\omega) = 4$, $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 2$, $X_3(\omega) = 3$, $X_4(\omega) = n - 6$ und $X_i(\omega) = 0$ für $i \in [n] \setminus \{1, 2, 3, 4\}$.

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von X_1 und X_2.

(b) Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von X_2.

(c) Bestimmen Sie die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz von N.

- Verwenden Sie $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot z^k = n(n-1)z^2(1+z)^{n-2} + nz(1+z)^{n-1}$ aus HA 1.2.

Aufgabe 2.3

Wir betrachten den Laplace'schen W'keitsraum über $\Omega = [4]^3$. Die ZV X_i ($i \in [3]$) projiziert ein Elementarereignis $(x_1, x_2, x_3) \in \Omega$ auf seine i-Komponente, also $X_i(x_1, x_2, x_3) = x_i$.

Wir leiten von X_1, X_2, X_3 folgende ZV ab:

$$A := |X_1 - X_2|\,, B := X_3^A, C := \min\{X_1, X_3\}, D := A/C.$$

(a) Bestimmen Sie für jede der ZVn ihre Dichte, ihren Erwartungswert und ihre Varianz.

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von B und D.