Universität Stuttgart
Formale Methoden der Informatik
Prof. J. Esparza/ M. Luttenberger

Sommersemester 2004/05
Übungsblatt 1

Übungen zu Model Checking

Abgabe bis zum

Aufgabe 1.1

Prof. Esparza hat sich überlegt, dass die Endnote in DW wie folgt festgelegt wird:

Er würfelt mit vier fairen Würfeln und nimmt dann das Minimum der vier so erhaltenen Zahlen als Endnote.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten für die Ergebnisse ,,Endnote ist 1" und ,,Endnote ist 5" für die folgende Modellierung:

Nehmen Sie als Menge der Elementarereignisse $\Omega_1 = \{1, \ldots, 6\}^4$. Das Elementarereignis (a, b, c, d) soll dabei als ,,Würfel 1 = a, Würfel = b, Würfel 3 = c, Würfel 4 = d" interpretiert werden.

Es gilt dann $P_1[\omega] = \frac{1}{6^4}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Lösungsvorschlag

a) Elementarereignisse: $\Omega = \{(i, j) \mid 1 \leq i, j \leq 6\}$
Elementarw'keiten: $\Pr[\omega] = \frac{1}{36}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Damit gilt auch $\Pr[A] = \frac{|A|}{36}$ für alle Ereignisse $A \subseteq \Omega$.

b)
- 1.te Herleitung:

  Sei $E_n \subseteq \Omega$ das Ereignis "Endnote $= n$" und $E_{\geq n}$ das Ereignis "Endnote $\geq n$".

  Es gilt dann $E_{\geq n+1} \cup E_n = E_{\geq n}$ mit $E_n \cap E_{\geq n+1} = \emptyset$, also auch

  $$\Pr[E_{\geq n+1}] + \Pr[E_n] = \Pr[E_{\geq n}] \text{ bzw } \Pr[E_n] = \Pr[E_{\geq n}] - \Pr[E_{\geq n+1}]$$

  mit $E_7 = \emptyset$. (ggf. an die Def. $\Pr[A] = \sum_{\omega \in A} \Pr[\omega]$ erinnern).

  Nun gilt für $1 \leq n \leq 6$

  $$\begin{aligned} \Pr[E_{\geq n}] &= \Pr[\{(i,j) \in \Omega \mid \min\{i,j\} \geq n\}] \\ &= \Pr[\{(i,j) \mid n \leq i, j \leq 6\}] \\ &= \tfrac{(7-n)^2}{36}. \end{aligned}$$

  Somit ergibt sich

  $$\Pr[E_n] = \frac{(7-n)^2 - (7-(n+1))^2}{36} = \frac{(7-n)^2 - (6-n)^2}{36}.$$

  Auswerten führt auf:

  $$\Pr[E_1] = \frac{11}{36}, \quad \Pr[E_2] = \frac{9}{36}, \quad \Pr[E_3] = \frac{7}{36}, \quad \Pr[E_4] = \frac{5}{36}, \quad \Pr[E_5] = \frac{3}{36}, \quad \Pr[E_6] = \frac{1}{36}.$$

- 2.te Herleitung (nach Dominik/Thomas): Damit das Minimum gleich n ist, müssen
  * entweder beide Würfel $= n$ sein ($\{(n, n)\}$),
  * oder einer der beiden Würfel $= n$ sein, der andere $> n$ ($\{(n, k), (k, n) \mid n < k \leq 6\}$).

  Man erhält also $\Pr[E_n] = \frac{1+2(6-n)}{36} = \frac{(7-n)^2-(6-n)^2}{36}$

c) Verallgemeinern von b).

Man hat jetzt $\Omega = \{1, 2, \ldots, 6\}^4$ mit $\Pr[\omega] = \frac{1}{6^4}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Entsprechend hat man dann $E_{\geq n} = \{(a, b, c, d) \mid n \leq a, b, c, d \leq 6\}$ mit $|E_n| = (7 - n)^4$ für $1 \leq n \leq 6$, so dass $\Pr[E_n] = \frac{(7-n)^4 - (6-n)^4}{6^4}$ folgt.

W'keiten für $E_1, E_2, \ldots, E_n$: $671/1296, 369/1296, 175/1296, 65/1296, 15/1296, 1/1296$.

Alternativ verallgemeinert man die 2.ter Herleitung (nach Dominik/Thomas):

Man wählt zunächst l aus 4 Würfeln, welche $= n$ sein sollen, die verbleibenden $4 - l$ Würfel müssen $> n$ sein ($(6 - n)^{4-l}$ Möglichkeiten). Dies führt auf:

$$\Pr[E_n] = \sum_{l=1}^{4} \binom{4}{l} (6 - n)^{4-l}.$$

Aufgabe 1.2

Prof. Esparza ist nicht zufrieden mit dem Verfahren aus der letzten Aufgabe, es erhalten viel zu viele Studenten eine gute Note. Er überlegt sich daher ein neues Verfahren:

Die vergangenen Jahre haben gezeigt, dass etwa 60% aller Studenten die Klausur nicht bestehen, 12% eine Vier, 17% eine Drei, 10% eine Zwei und die verbleibenden 1% eine Eins bekommen.

Er möchte daher einen fünfseitigen Würfel verwenden, dessen Seiten mit ,,durchgefallen", ,,4", ,,3", ,,2" und ,,1" bedruckt sind, und die Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Seite oben liegt, soll mit der statistischen Häufigkeit von oben übereinstimmen.

- Prof. Esparza hat allerdings nur eine faire Münze zur Verfügung. Er überlegt sich folgendes Verfahren, um den gewünschten fünfseitigen Würfel damit zu simulieren:

  (a) Er wirft die Münze zunächst sieben Mal, wobei er Kopf als 0, Zahl als 1 notiert. Er erhält auf diese Weise eine Zeichenkette $a_1 a_2 \ldots a_7$ der Länge 7 über dem Alphabet $\{0, 1\}$.

  (b) Diese Zeichenkette $a_1 \ldots a_7$ interpretiert er als die Binärdarstellung einer Zahl z, d.h. er erhält somit eine Zahl z zwischen 0 und 127.

  (c) Gilt $z > 99$, so erzeugt er eine neue Zeichenkette, d.h. er geht zurück zu (a).

  (d) Ansonsten:

    – $z = 99$ interpretiert er als eine ,,Eins" seines zu simulierenden Würfels.

    – Für $z \in [89, 99)$ setzt er eine ,,Zwei" an.

    – Die ,,Drei" gibt er, falls $z \in [72, 89)$ gilt.

    – Mit $z \in [60, 72)$ gibt es eine ,,Vier".

    – $z \in [0, 60)$ interpretiert er schließlich als ,,Durchgefallen".

  Zeigen Sie, dass Prof. Esparza tatsächlich den gewünschten Würfel simuliert. Zeigen Sie zunächst, dass Prof. Esparza mit Wahrscheinlichkeit 1 schließlich eine Zahl zwischen 0 und 99 erhält, und dass er jede solche Zahl mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{100}$ erhält.

- Prof. Esparza möchte sichergehen, dass seine Münze tatsächlich fair ist. Er ersetzt daher in dem obigen Verfahren einen Münzwurf wie folgt:

  Er wirf die Münze jeweils zweimal. Das Ergebnis 01 (= Kopf, dann Zahl) interpretiert er als 0, 10 als 1, im Fall der Ergebnisse 00 und 11 wiederholt er das Experiment.

  Zeigen Sie, dass dieses Verfahren tatsächlich mit Wahrscheinlich $\frac{1}{2}$ jeweils eine 0 bzw. eine 1 liefert, solange die Münze mit nicht verschwindender Wahrscheinlichkeit sowohl Kopf als auch Zahl liefert.

Lösungsvorschlag

Wir wählen als Ergebnismenge

$$\Omega = \{(w_1, \dots, w_n, r) \mid 100 \le w_1, \dots, w_n \le 127, 1 \le r \le 99\} = \{100, \dots, 127\}^*\{0, \dots, 99\},$$

d.h. das Elementarereignis $\omega = w_1 \dots w_n r$ entspricht "1. Wurf $= w_1 > 99$, 2. Wurf $= w_2 > 99$, $\dots$, n.ter Wurf $= w_n > 99$, $n+1$.ter Wurf $= r \ge 99$".

Hierbei wird die Dezimaldarstellung zur Repräsentation der 7 Münzwürfe verwendet, z.B. $(100.0000)_2 = (64)_{10}$. Da die Münzen fair sind, ergibt sich jede Zahl zwischen 0 und 127 mit W'keit $\frac{1}{128}$. Damit setzen wir als Elementarw'keit für $\omega = w_1 \dots w_n r \in \Omega$ an:

$$\Pr[w_1 \dots w_n r] = \left(\frac{1}{128}\right)^n \frac{1}{128}.$$

Definiert man für $0 \le r \le 99$, $100 \le n \le 127$ das Ereignis $E_{r,n}$ als "Nach genau n erfolglosen Würfen ergibt sich r", so folgt

$$E_{r,n} = \{w_1 \dots w_n r \in \Omega \mid 100 \le w_1, \dots, w_n \le 127\}$$

mit $|E_{r,n}| = 28^n$

$$\Pr[E_{r,n}] = \sum_{\omega \in E_{r,n}} \Pr[\omega] = \sum_{\omega \in E_{r,n}} \frac{1}{128^{n+1}} = \frac{|E_{r,n}|}{128^{n+1}} = \left(\frac{28}{128}\right)^n \frac{1}{128}.$$

Schließlich folgt, dass für $0 \le r \le 99$ das Ergebnis $E_r :=$ "Schließlich ergibt sich r" geschrieben werden kann als

$$E_r = \bigcup_{n \ge 0} E_{r,n}.$$

Da die $E_{r,n}$ disjunkt sind, folgt also

$$\Pr[E_r] = \sum_{n \ge 0} \Pr[E_{r,n}] = \sum_{n \ge 0} \left(\frac{28}{128}\right)^n \frac{1}{128} = \frac{1}{1 - \frac{28}{128}} \frac{1}{128} = \frac{1}{100}.$$

Da die Ereignisse E_r eine Partition von Ω bilden (für $0 \le r \le 99$), ist dies auch der formale Beweis, dass es sich tatsächlich um einen diskreten W'keitsraum handelt.

Aufgabe 1.3

Sei

$$\Omega = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \mid \{\pi_1, \dots, \pi_n\} = \{1, \dots, n\}\}$$

die Menge der Permutationen von $\{1, \dots, n\}$ mit

$$\Pr[\omega] = \frac{1}{n!}.$$

Weiterhin sei für $i \in \{1, \dots, n\}$

$$A_i = \{(\pi_1, \dots, \pi_n) \in \Omega \mid \pi_i = i\}$$

das Ereignis, dass zumindest das Element i an der richtigen Stelle steht, und

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n$$

entsprechend das Ereignis, dass mindestens ein Element an der richtigen Stelle steht.

(a) Berechnen Sie $\Pr[A_i]$ für $1 \le i \le n$.

(b) Berechnen Sie $\Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_k}]$ für $1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_k \le n$ und $1 \le k \le n$.

(c) Verwenden Sie nun die Siebformel, um eine Formel für $\Pr[A]$ zu erhalten. Bestimmen Sie mittels dieser den Grenzwert von $\Pr[A]$ für $n \to \infty$.

Hinweis:

$$e^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}.$$

Lösungsvorschlag

Die Menge der Elementarereignisse ist wie vorgegeben

$$\Omega = \{(\pi_1, \ldots, \pi_n) \mid \{\pi_1, \ldots, \pi_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}\}.$$

Weiterhin wird eine Gleichverteilung aller Elementarereignisse angenommen, d.h.

$$\Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{n!}.$$

a) Nach Aufgabenstellung soll $A_i \subseteq \Omega$ das Ereignis "An der i-ten Stelle steht i" sein, d.h.

$$A_i = \{(\pi_1, \ldots, \pi_n) \in \Omega \mid \pi_i = i\}.$$

Damit können die verbleibenden $n-1$ Elemente beliebig, ohne Wiederholung, unter Beachtung der Reihenfolge noch verteilt werden, d.h. $|A_i| = (n-1)!$ und daher

$$\Pr[A_i] = \frac{(n-1)!}{n!}.$$

b) Das Ereignis $A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}$ (für $1 \leq k \leq n$ und $i_1 < \ldots < i_k$) bedeutet, dass mindestens die k Elemente $i_1, \ldots, i_k$ bereits an ihrem korrekten Platz stehen, d.h. es können noch $n-k$ Elemente permutiert werden, also $|A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = (n-k)!$, und daher

$$\Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \frac{(n-k)!}{n!}.$$

c) Für das Ereignis $A :=$ "Mindestens ein Element ist bereits an seinem Platz" gilt

$$\Pr[A] = \Pr[A_1 \cup \ldots \cup A_n]$$

– da die A_i allerdings nicht paarweise disjunkt sind, können die W'keiten $\Pr[A_i]$ nicht einfach summiert werden, stattdessen muss – wie angegeben – die Siebformel verwendet werden (ggf. nochmals das Bild für den Fall $A \cup B \cup C$ aus den Folien anzeichnen):

$$\begin{aligned}
\Pr[A] &= \Pr[A_1 \cup A_2 \ldots \cup A_n] \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \underbrace{\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq n}}_{=\frac{n!}{k!(n-k)!}} \underbrace{\Pr(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})}_{=\frac{(n-k)!}{n!}} \\
&= \textstyle\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{1}{k!} \\
&= \textstyle(1-1) - \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k!} \\
&= \textstyle 1 - \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k} \frac{1}{k!}
\end{aligned}$$

Damit ergibt sich:

$$\lim_{n \to \infty} \Pr[A] = 1 - e^{-1} \approx 0,6321.$$