Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 8
22. Juni 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilt ist, und sei $Y = e^{aX}$ mit $a > 0$.

1. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $\Pr[X \leq 1]$, $\Pr[X > 26 \mid X > 24]$ und $\Pr[X = 5]$ für $\lambda = 5$ explizit an.
2. Bestimmen Sie die Dichte $f_Y(y)$ der Zufallsvariable Y.
3. Für welche Werte von a existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$?

Lösungsvorschlag

Mit Hilfe der Verteilungsfunktion $F_X(x) = 1 - e^{-\lambda x}$ lässt sich die erste Wahrscheinlichkeit unmittelbar bestimmen

$$\Pr[X \leq 1] = F_X(1) = 1 - e^{-5} \approx 0{,}99326.$$

Für die Berechnung der zweiten Wahrscheinlichkeit nutzen wir aus, dass exponentialverteilte Zufallsvariablen gedächtnislos sind. Wir können also auflösen zu

$$\Pr[X > 26 \mid X > 24] = \Pr[X > 2] = 1 - \Pr[X \leq 2] = 1 - (1 - e^{-5\cdot 2}) = e^{-10} \approx 0{,}00005.$$

Da X eine kontinuierliche Zufallsvariable ist, ist die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen Punktes 0. Somit gilt für die letzte der gesuchten Wahrscheinlichkeiten schlicht

$$\Pr[X = 5] = 0.$$

Um die Dichte der Zufallsvariable Y zu bestimmen, analysieren wir deren Verteilungsfunktion $F_Y(y)$. Man beachte, dass X nur positive Werte annimmt. Folglich ist Y stets größer als 1. Für $y > 1$ gilt also

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr[e^{aX} \leq y] = \Pr\left[X \leq \frac{\ln(y)}{a}\right] = F_X\left(\frac{\ln(y)}{a}\right),$$

wobei wir im vorletzten Schritt ausnutzen, dass a positiv ist. Nachdem X exponentialverteilt ist, lässt sich die Verteilungsfunktion auch explizit angegeben, nämlich

$$F_Y(y) = F_X\left(\frac{\ln(y)}{a}\right) = 1 - e^{-\lambda\frac{\ln(y)}{a}} = 1 - y^{-\frac{\lambda}{a}}.$$

Leiten wir diese Funktion nun nach y ab, so erhalten wir schließlich die gesuchte Dichte

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \begin{cases} \frac{\lambda}{a} \cdot y^{-\frac{a+\lambda}{a}} & \text{falls } y > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Im letzten Aufgabenteil bestimmen wir nun, für welche Werte von a der Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$ existiert. Laut Vorlesung muss dazu das folgende Integral endlich sein

$$\int_{-\infty}^{\infty} |y| f_Y(y) \mathrm{d}y = \int_1^{\infty} y \cdot \frac{\lambda}{a} \cdot y^{-\frac{a+\lambda}{a}} \mathrm{d}y = \frac{\lambda}{a} \int_1^{\infty} y^{-\frac{\lambda}{a}} \mathrm{d}y.$$

Aus der Analysis ist bekannt, dass dies genau dann zutrifft, wenn der Exponent von y kleiner als -1 ist. Der konstante Faktor vor dem Integral ist dabei unerheblich. Demnach existiert der Erwartungswert von Y genau dann, wenn $\lambda > a$ gilt.

Tutoraufgabe 2

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X ist logarithmisch normalverteilt mit den Parametern μ und $\sigma > 0$, wenn ihre Dichte gegeben ist durch $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \cdot \exp(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2})$ für positive x und für alle anderen x gilt $f_X(x) = 0$.

1. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Y = \ln(X)$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert von X für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

Lösungsvorschlag

Ausgehen von der Dichte von X, bestimmen wir in einem ersten Schritt die Verteilungsfunktion von Y

$$F_Y(y) = \Pr[Y \le y] = \Pr[\ln(X) \le y] = \Pr[X \le e^y] = F_X(e^y).$$

Leiten wir diese nun nach y ab, so folgt aus der Kettenregel

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= F'_X(e^y) \\ &= e^y \cdot f_X(e^y) \\ &= \frac{e^y}{\sqrt{2\pi}\sigma e^y} \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(e^y)-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(y-\mu)^2}{2\sigma^2}\right). \end{aligned}$$

Offensichtlich handelt es sich hierbei um die Dichtefunktion einer mit Parametern μ und σ normalverteilten Zufallsvariable, was den Beweis vervollständigt. Kommen wir nun zum Erwartungswert von $\mathbb{E}[X]$ für die Parameter $\mu = 0$ und $\sigma = 1$. Aus der ersten Teilaufgabe wissen wir, dass $X = e^Y$ gilt und folglich auch

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[e^Y] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} e^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(x - \frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(\frac{1}{2} - \frac{(x-1)^2}{2}\right) \mathrm{d}x \\
&= \sqrt{e} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \exp\left(-\frac{(x-1)^2}{2}\right) \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass der Integrand einer Normalverteilung mit Erwartungswert und Dichte von jeweils 1 entspricht. Das Integral wird somit zu 1 und wir erhalten einen Erwartungswert von $\sqrt{e}$.

Tutoraufgabe 3

Seien X und Y zwei unabhängig kontinuierliche Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[|X| + |Y| \leq 1]$.

Hinweise: Veranschaulichen Sie sich das Ereignis $|X| + |Y| \leq 1$ anhand einer Skizze.

Lösungsvorschlag

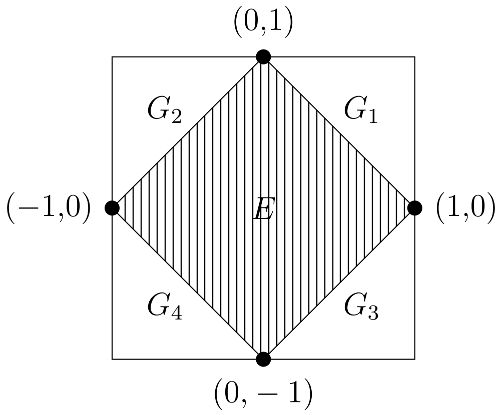

Abbildung 1: Skizze zu Tutoraufgabe 3

Da X und Y unabhängig sind, ist die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}(x, y)$ gegeben durch

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} & \text{falls } -1 \leq x, y \leq 1 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Außerdem sei die Menge E definiert als $\{(x, y) \mid |x| + |y| \leq 1\}$. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[|X| + |Y| \leq 1]$ ist somit

$$\Pr[|X| + |Y| \leq 1] = \frac{1}{4} \int_E 1 \mathrm{d}x \mathrm{d}y.$$

Man beachte, dass es sich bei diesem Integral um die Fläche der Menge E handelt. Um diese zu bestimmen, ist es hilfreich E zu skizzieren. Dazu stellen wir zunächst fest, dass E dem Schnitt von vier Halbräumen entspricht, nämlich

$$\begin{aligned}E &= \{(x,y) \mid |x|+|y| \leq 1\} \\ &= \{(x,y) \mid x+y \leq 1 \land -x+y \leq 1 \land x-y \leq 1 \land -x-y \leq 1 \land\} \\ &= \{(x,y) \mid x+y \leq 1\} \cap \{(x,y) \mid -x+y \leq 1\} \\ &\quad \cap \{(x,y) \mid x-y \leq 1\} \cap \{(x,y) \mid -x-y \leq 1\}.\end{aligned}$$

Die Menge E wir also durch die Geraden G_1 bis G_4, welche in der Skizze zu sehen sind, eingegrenzt. Somit ist auch ersichtlich, dass es sich bei E um ein Quadrat mit den Eckpunkten $(0,1)$, $(1,0)$, $(-1,0)$, $(0,-1)$ handelt. Nachdem dieses Quadrat eine Seitenlänge von $\sqrt{2}$ aufweist, ist der Flächeninhalt genau 2. Insgesamt beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit somit

$$\Pr[|X|+|Y| \leq 1] = \frac{1}{4} \cdot \int_E 1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{4} \cdot 2 = \frac{1}{2}.$$

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten eine Familie von kontinuierlichen Zufallsvariablen X_1 bis X_n mit gemeinsamer Dichtefunktion $f(x_1,\dots,x_n) = (\sqrt{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n \sigma_i)^{-1} \cdot \exp(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2})$, wobei μ_i und σ_i dem jeweiligen Erwartungswert sowie der Standardabweichung von X_i entsprechen. Bestimmen Sie die Randdichten $f_{X_i}(x_i)$, und zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X_i normalverteilt sind mit den Parametern μ_i und σ_i.

Lösungsvorschlag

Zur Bestimmung der Randdichte von X_i, fixieren wir x_i und integrieren über alle x_j mit $i \neq j$. Die entsprechende Dichtefunktion lautet demnach

$$f_{X_i}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x_1,\dots,x_n)\mathrm{d}x_1 \dots \mathrm{d}x_{i-1}\mathrm{d}x_{i+1}\dots\mathrm{d}x_n.$$

Um eine möglichst einfache Notation zu bewahren, führen wir unseren Beweis für $i = 1$ und weisen darauf hin, dass sich das Beweisprinzip auch auf beliebige andere Indizes übertragen lässt. In einem ersten Schritt formen wir die Randdichte $f_{X_1}(x_1)$ so um, dass wir alle Terme, die mit der Variable x_i in Verbindung stehen, aus dem Integral nehmen

$$\begin{aligned}
f_{X_1}(x_1) &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sqrt{(2\pi)^n}\prod_{i=1}^n \sigma_i\right)^{-1} \cdot \exp\left(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sqrt{2\pi}\sigma_1\right)^{-1} \cdot \left(\sqrt{(2\pi)^{n-1}}\prod_{i=2}^n \sigma_i\right)^{-1} \\
&\quad \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \cdot \exp\left(-\sum_{i=2}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n \\
&= \left(\sqrt{2\pi}\sigma_1\right)^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{(x_1-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}\right) \\
&\quad \cdot \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sqrt{(2\pi)^{n-1}}\prod_{i=2}^n \sigma_i\right)^{-1} \cdot \exp\left(-\sum_{i=2}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n.
\end{aligned}$$

Betrachten wir jetzt den Term vor dem Integral, so sehen wir, dass es sich um die gesuchte Dichte handelt. Das heißt, wir müssen lediglich zeigen, dass das Integral den Wert 1 annimmt. Dazu gehen wir ähnlich wie eben vor und ziehen x_2 aus dem Integral

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(\sqrt{(2\pi)^{n-1}}\prod_{i=2}^n \sigma_i\right)^{-1} \cdot \exp\left(-\sum_{i=2}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)\mathrm{d}x_2\dots\mathrm{d}x_n \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sqrt{2\pi}\sigma_2\right)^{-1} \cdot \exp\left(-\frac{(x_2-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}\right) \\
&\quad \cdot \left(\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left(\sqrt{(2\pi)^{n-2}}\prod_{i=3}^n \sigma_i\right)^{-1} \cdot \exp\left(-\sum_{i=3}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}\right)\mathrm{d}x_3\dots\mathrm{d}x_n\right)\mathrm{d}x_2.
\end{aligned}$$

Das äußere Integral besteht somit aus der Dichtefunktion einer normalverteilten Zufallsvariable mit Parameter μ_2 und σ_2 sowie dem inneren Integral, welches unabhängig von x_2

ist. Nachdem sich jede Dichtefunktion über $\mathbb{R}$ zu 1 integriert, können wir vereinfachen zu

$$\int_{\mathbb{R}^{n-2}} \left(\sqrt{(2\pi)^{n-2}} \prod_{i=3}^{n} \sigma_i \right)^{-1} \cdot \exp\left(-\sum_{i=3}^{n} \frac{(x_i - \mu_i)^2}{2\sigma_i^2} \right) \mathrm{d}x_3 \dots \mathrm{d}x_n.$$

Wenden wir dieses Verfahren weitere $(n-2)$-mal an, so sehen wir, dass sich das Integral letztendlich zu 1 auflöst und unser Beweis ist vollständig.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sie fahren mit der U-Bahn vom Marienplatz nach Garching. Leider bleibt Ihr Zug aufgrund einer Betriebsstörung an einem zufälligen und gleichverteilten Punkt der Strecke stehen. Da eine Weiterfahrt nicht möglich ist, entscheiden Sie sich, zu Fuß nach Garching bzw. zurück zum Marienplatz zu gehen, je nachdem welche Station näher ist. Praktischerweise verläuft Ihr Fußweg parallel zur Bahnstrecke. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Strecke, die Sie zu Fuß zurücklegen müssen. Sie dürfen annehmen, dass der Gesamtweg Länge 1 in einer passenden Einheit hat.

Lösungsvorschlag

Sei X eine gleichverteilte Zufallsvariable auf dem Intervall $[0,1]$. Demnach entspricht die Wegstrecke, die Sie zu Fuß zurücklegen müssen, der Zufallsvariable $\min\{X, 1-X\}$. Gemäß der Definition des Erwartungswertes rechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\min\{X, 1-X\}] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \min\{x, 1-x\} \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1 \cdot \min\{x, x-1\} \mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x \mathrm{d}x \right) + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x) \mathrm{d}x \right) \\
&= \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Auf demselben Weg können wir auch die Varianz ermitteln. Dazu bestimmen wir zunächst den Wert von $\mathbb{E}[(\min\{X, 1-X\})^2]$, nämlich

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(\min\{X, 1-X\})^2] &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot (\min\{x, 1-x\})^2 \mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 1 \cdot (\min\{x, x-1\})^2 \mathrm{d}x \\
&= \left(\int_0^{\frac{1}{2}} x^2 \mathrm{d}x \right) + \left(\int_{\frac{1}{2}}^1 (1-x)^2 \mathrm{d}x \right) \\
&= \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{1}{2}} + \left[x - x^2 + \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 \\
&= \frac{1}{12},
\end{aligned}$$

und erhalten somit eine Varianz von

$$\mathrm{Var}[\min\{X, 1-X\}] = \mathbb{E}[(\min\{X, 1-X\})^2] - \mathbb{E}[\min\{X, 1-X\}]^2 = \frac{1}{12} - \frac{1}{16} = \frac{1}{48}.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(x)$. Bestimmen Sie ausgehend von $f_X(x)$ die Dichtefunktion der linear transformierten Zufallsvariable $Y = aX + b$ für beliebige Parameter $a, b \in \mathbb{R}$. Gehen Sie insbesondere auf den Fall $a = 0$ ein.

Lösungsvorschlag

Für die Bestimmung der Dichtefunktion $f_Z(x)$ unterscheiden wir die drei Fälle $a = 0$, $a > 0$ und $a < 0$. Sollte a gleich 0 sein, so reduziert sich die Verteilungsfunktion von Y zu

$$F_Y(x) = \Pr[Y \leq x] = \Pr[aX + b \leq x] = \Pr[b \leq x] = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < b \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Da es sich hierbei nicht um eine stetige Funktion handelt, ist Y keine kontinuierliche Zufallsvariable im Sinne der Vorlesung und wir können Y demnach auch keine kontinuierliche Dichte zuordnen. Allerdings lässt sich Y durch die diskrete Dichtefunktion

$$f_Y(x) = \Pr[Y = x] = \begin{cases} 1 & \text{falls } x = b \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

beschreiben. Für den Fall, dass a größer als 0 ist, lautet die Verteilungsfunktion

$$F_Y(x) = \Pr[Y \leq x] = \Pr[aX + b \leq x] = \Pr\left[X \leq \frac{x-b}{a}\right] = F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Leitet man $F_X(\frac{x-b}{a})$ nun nach x ab, so erhalten wir die gesuchte Dichtefunktion, nämlich

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Durch ähnliches Vorgehen lässt sich auch der Fall, dass a kleiner als 0 ist abhandeln. Erneut bestimmen wir die Verteilungsfunktion von Y

$$F_Y(x) = \Pr[aX + b \leq x] = \Pr\left[X \geq \frac{x-b}{a}\right] = 1 - \Pr\left[X < \frac{x-b}{a}\right] = 1 - F_X\left(\frac{x-b}{a}\right).$$

Man beachte, dass X kontinuierlich ist und die Wahrscheinlichkeit $\Pr\left[X < \frac{x-b}{a}\right]$ somit identisch ist zu $\Pr\left[X \leq \frac{x-b}{a}\right]$, was den letzten Umformungsschritt rechtfertigt. Leiten wir nun nach x ab, so erhalten wir

$$f_Y(x) = F_Y'(x) = -F_X'\left(\frac{x-b}{a}\right) = -\frac{1}{a} \cdot f_X\left(\frac{x-b}{a}\right)$$

und wir sind fertig.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Übungsleitung für Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie möchte sich einen Kaffee kaufen und verlässt daher ihr Büro für $X \sim \exp(\frac{1}{5})$ Minuten. Obwohl das Postfach der Übungsleitung am Anfang der Kaffeepause noch leer ist, trifft in der Zeit bis zu ihrer Rückkehr exakt alle 10 Minuten eine neue E-Mail ein. Sei Y die Anzahl der E-Mails, die die Übungsleitung bei ihrer Rückkehr vorfindet.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y \geq i]$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und ermitteln sie die Dichtefunktion von Y.
2. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable Y in dem Sinne gedächtnislos ist, als dass gilt $\Pr[Y \geq i + j \mid Y \geq j] = \Pr[Y \geq i]$ für beliebige $i, j \in \mathbb{N}_0$.

Lösungsvorschlag

Die Übungsleitung findet genau dann mindestens i E-Mails in ihrem Postfach vor, wenn sie mehr als $10 \cdot i$ Minuten abwesend war. Damit ist also $\Pr[Y \geq i] = \Pr[X \geq 10 \cdot i]$. Letztere Wahrscheinlichkeit können wir mithilfe der Information, dass X exponentialverteilt ist, unmittelbar berechnen, da gilt

$$\Pr[Y \geq 10 \cdot i] = 1 - \Pr[X < 10 \cdot i] = 1 - F_X(10 \cdot i).$$

Wie in Tutoraufgabe 3, nutzen wir hierbei aus, dass X kontinuierlich ist und die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X < 10 \cdot i]$ demnach gleich $\Pr[X \leq 10 \cdot i]$ sein muss. Setzen wir nun die Verteilungsfunktion von X explizit ein, so folgt aus der obigen Gleichung

$$\Pr[Y \geq i] = 1 - (1 - e^{-\frac{1}{5} \cdot 10 \cdot i}) = e^{-2i}.$$

Nachdem es sich bei Y um eine diskrete Zufallsvariable handelt, können wir ihre Dichte über die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y = i]$ angeben

$$f_Y(i) = \Pr[Y = i] = \Pr[Y \geq i] - \Pr[Y \geq i + 1] = e^{-2i} - e^{-2i-2}.$$

Um die Gedächtnislosigkeit von Y zu zeigen, nutzen wir die Definition von bedingter Wahrscheinlichkeit und rechnen

$$\begin{aligned}
\Pr[Y \geq i + j \mid Y \geq j] &= \frac{\Pr[Y \geq i + j, Y \geq j]}{\Pr[Y \geq j]} \\
&= \frac{\Pr[Y \geq i + j]}{\Pr[Y \geq j]} \\
&= \frac{e^{-2(i+j)}}{e^{-2j}} \\
&= e^{-2i} \\
&= \Pr[Y \geq i].
\end{aligned}$$