SS 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2010SS/dwt/uebung/

8. Juli 2010

ZÜ XI Blatt 11: Wiederholung rekurrente Ereignisfolgen

1. Blatt 9, HA 1

Wir werfen eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ „Zahl“ zeigt. Wir betrachten für eine Folge von Würfen $W_1, W_2, \ldots$ das Ereignis $E(i,k)$, beim i-ten Wurf weniger als $(\frac{i}{2}+k)$-mal „Kopf“ geworfen zu haben.

Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\forall k > 0 : \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} E(i,k)\right] = 0\,.$$

Wir widerlegen die Behauptung!

Zunächst
begründen wir den Zusammenhang der Aufgabe mit

rekurrenten Ereignissen

und insbesondere mit dem

„Random Walk“.

Wir betrachten Zufallsvariablen K_i und Z_i für die Anzahl der Ergebnisse „Kopf" bzw. „Zahl", die bei i Würfen eingetreten sind.

Beide Variablen sind als eine Summe von Indikatorvariablen binomialverteilt.
Allerdings sind beide voneinander abhängig, denn es gilt

$$K_i + Z_i = i\,.$$

Sei $D_i = K_i - Z_i$.

Es gilt $D_i = K_i - (i - K_i) = 2K_i - i$ mit $W_{D_i} \subseteq [-i, i]$.

Die Dichte von D_i ergibt sich aus der Dichte von K_i wie folgt.

$$f_{D_i}(j) = \begin{cases} f_{K_i}\left(\frac{j+i}{2}\right) & : -i \leq j \leq i \text{ und } j + i \text{ gerade} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Die Ereignisfolge $H_k = [D_k = 0]$, $k = 1, 2, \ldots$ ist rekurrent mit

$$\Pr[H_k] = \begin{cases} \binom{k}{k/2} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k/2} & : \quad k \text{ gerade} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten die erzeugende Funktion

$$H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$$

der Auftrittswahrscheinlichkeiten und zeigen, dass

$$H(1) \text{ konvergiert}.$$

Mit Korollar 83 der Vorlesung folgt dann, dass die Ereignisse H_k mit positiver Wahrscheinlichkeit nie eintreten.

In der Sprache des Random Walk bedeutet dies, dass bei der Brown'schen Bewegung ein Teilchen nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Start zurückkehrt, falls die Wahrscheinlichkeiten der Links- bzw. Rechtsbewegung ungleich $1/2$ sind.

Wir schätzen $H(1)$ wie folgt ab und benutzen dabei die Stirlingformel für die Näherung (siehe Vorl.)

$$\binom{2k}{k} = c_k \cdot \frac{2^{2k}}{\sqrt{k}}\,.$$

mit einer nicht näher spezifizierten,
positiven, für alle k beschränkten Funktion c_k mit $c_k \leq c$.

$$
\begin{aligned}
H(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \\
&= \sum_{k\in 2\mathbb{N}_0} \binom{k}{k/2} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k/2} = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{2^{2k}}{\sqrt{k}} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{2^{2k}}{\sqrt{k}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2k} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{8}{9}\right)^{k} \\
&< c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{k} \\
&= c \cdot 9 < \infty .
\end{aligned}
$$

$H(1)$ konvergiert also, d.h., $\Pr[Z = \infty] \neq 0$.

Wir widerlegen nun die Gleichung

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} E(i,k)\right] = 0\,.$$

für $k = 1$.

Das Ereignis $E(i,k)$ ist gleichbedeutend mit $K_i < \frac{i}{2} + k$, d. h.

$$D_i = 2K_i - i < i + 2k - i = 2k\,.$$

In der Sprache der Brown'schen Bewegung für $d = 1$ bedeutet dies, dass das Teilchen nach dem i-ten Schritt auf der linken Seite von $2k$ liegt.

Das Ereignis

$$E_n = \bigcap_{i=1}^{n} E(i,k)$$

heißt dann, dass sich das Teilchen vom Start bis zum n-ten Schritt stets auf der linken Seite von $2k$ bzw. 2 befindet.

Wir haben berechnet, dass das Teilchen mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht mehr zum Nullpunkt zurückkehrt.

Da die Wahrscheinlichkeit für die Linksbewegung größer ist als die Wahrscheinlichkeit einer Rechtsbewegung, gibt es auch eine positive Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen nach links geht und dann nie mehr zum Nullpunkt zurückkehrt.

Dies heißt aber, dass das Teilchen mit positiver Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite von 2 bleibt, im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} \Pr[E_n] = 0$.