Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

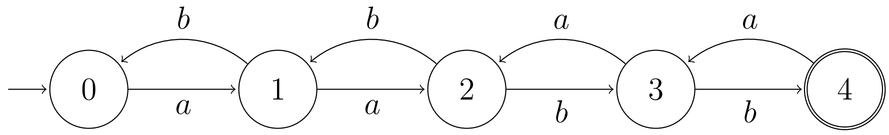
Sommersemester 2015
Lösungsblatt 6
3. Juni 2015

Theoretische Informatik

Vorbemerkung: Betrachten Sie die folgenden Haus- und Zusatzaufgaben insbesondere als Wiederholung, für die Sie zwei Wochen Zeit haben!

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $Q = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Durch die folgende Grafik sei ein nichtdeterministischer endlicher Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ gegeben.



1. Bestimmen Sie $\hat{\delta}(\{2\}, b)$!

2. Zeigen Sie, dass die Sprache $L(\alpha)$ des regulären Ausdrucks $\alpha = aab(ab)^*b$ in der von A akzeptierten Sprache $L(A)$ enthalten ist, d. h. $L(\alpha) \subseteq L(A)$.

3. Konstruieren Sie mit dem Potenzmengenverfahren einen deterministischen endlichen Automaten B, der $L(A)$ akzeptiert.

   Stellen Sie den erhaltenen Automaten B durch einen Übergangsgraphen dar.

4. Konstruieren Sie eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$, die $L(A)$ erzeugt.

Lösung

Vorbehaltlich einer Punktedetaillierung:

1. $\hat{\delta}(\{2\}, b) = \{1, 3\}$ (1P)

2. $w \in L(\alpha)$ impliziert $w = aabxb$ mit einem $x \in (ab)^*$.

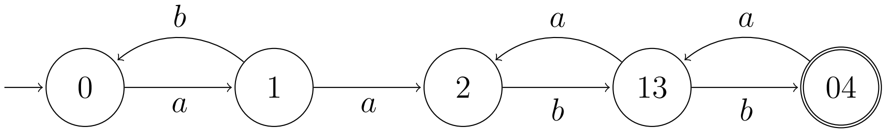
   Es gibt einen Übergang von 0 mit aab in 3. Anschließend gibt es für die Eingabe x einen Übergang nach 3. Abschließend bewirkt die Eingabe von b einen Übergang zu dem Endzustand 4. (1P)

3. Anwendung des Potenzmengenverfahrens mit Kurznotation:

$q \subseteq Q$	$\hat{\delta}(q, a)$	$\hat{\delta}(q, b)$
0	1	$\emptyset$
1	2	0
2	$\emptyset$	13
13	2	04
04	13	$\emptyset$
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$

(1P)

Endzustand ist 04.
<u>Darstellung als Graph.</u> Fehlende Pfeile gehen nach $\emptyset$:



(1P)

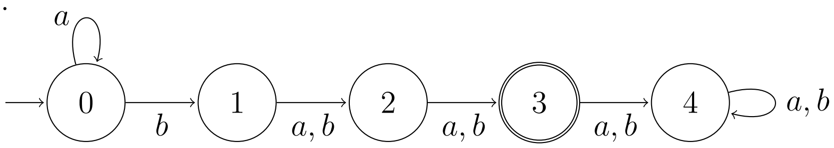
4. $V = \{S, A_1, A_2, A_3, A_4\}$.
   $S \to aA_1,\ A_1 \to aA_2 \mid bS,\ A_2 \to bA_1 \mid bA_3,\ A_3 \to aA_2 \mid bA_4 \mid b,\ A_4 \to aA_3\,.$ (1P)

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir definieren für alle $k \in \mathbb{N}$ einen deterministischen endlichen Automaten (d. h. DFA) $A_k = (Q_k, \Sigma, \delta_k, 0, \{k\})$ mit $k{+}2$ Zuständen aus $Q_k = \{0, 1, \ldots, k, k{+}1\} \subset \mathbb{N}_0$. δ_k sei für alle Zustände q mit $1 \leq q \leq k$ und $x \in \Sigma$ definiert durch

$$\delta_k(0, a) = 0, \quad \delta_k(0, b) = 1, \quad \delta_k(q, x) = q + 1, \quad \delta_k(k + 1, x) = k + 1\,,$$

z. B. für $k = 3$:



1. Zeigen Sie für alle $k \geq 1$, dass der DFA A_k minimal ist für die Sprache $L(A_k)$.

   <u>Hinweis</u>: Zustände i, j mit $i < j$ sind unterscheidbar, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt, so dass $\hat{\delta}(i, w)$ ein Endzustand ist und gleichzeitig $\hat{\delta}(j, w)$ <u>kein</u> Endzustand ist.

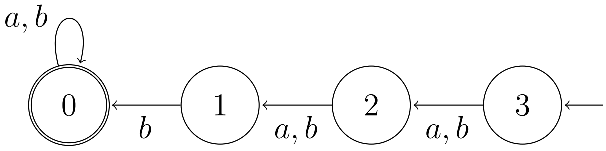
2. Wir betrachten die folgende Aussage: Es gibt eine reguläre Sprache L, so dass die kanonischen (deterministischen) Minimalautomaten für L bzw. für die gespiegelte Sprache L^R nicht die gleiche Anzahl von Zuständen besitzen!

   Begründen Sie mit Hilfe eines geeigneten Beispiels, dass diese Aussage wahr ist.

Lösung

1. Alle Zustände sind vom Start aus erreichbar.
   Falls $0 \leq i < j \leq k + 1$ gelten $\hat{\delta}(i, b^{k-i}) = k$ und $\hat{\delta}(j, b^{k-i}) = k + 1$. (2P)

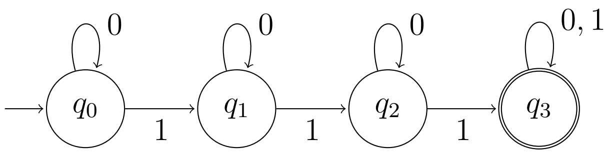
2. L sei gegeben durch

   Man vergleiche nun die entsprechenden (deterministischen) Minimalautomaten für L und L^R. (2P)

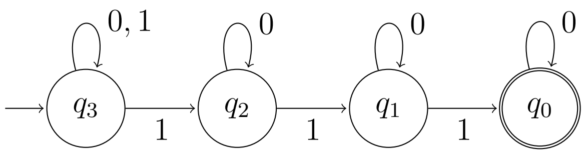
Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0, 1\}$. Der folgende Übergangsgraph definiert einen deterministischen endlichen Automaten $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, \{q_3\})$.



1. Beweisen Sie durch Anwendung eines Minimierungsalgorithmus, dass A minimal ist in dem Sinne, dass für keine zwei verschiedenen Zustände $p, q \in Q$ die Äquivalenzbeziehung $p \equiv_A q$ gilt.

2. Durch geeignete „Spiegelung“ gewinnt man aus A den NFA $A^R = (Q, \Sigma, \delta^R, \{q_3\}, \{q_0\})$ wie folgt:



   Definieren Sie ein Verfahren zur Überprüfung der Gleichung $L(A) = L(A^R)$ und begründen Sie dessen Korrektheit.

   Beweisen Sie nun durch Anwendung Ihres Verfahrens die Gleichheit der Sprachen $L(A)$ und $L(A^R)$!

   Geben Sie einen regulären Ausdruck α für die Sprache $L(A)$ an, so dass also $L(\alpha) = L(A)$ gilt.

Lösung

1. Anwendung des Minimierungsverfahrens, beginnend bei der letzten Zeile mit $p \not\equiv_A q_3$ für $p \neq q_3$:

   $$\delta(q_1, 1) = q_2 \wedge \delta(q_2, 1) = q_3 \wedge q_2 \not\equiv_A q_3 \implies q_1 \not\equiv_A q_2,$$
   $$\delta(q_0, 1) = q_1 \wedge \delta(q_1, 1) = q_2 \wedge q_1 \not\equiv_A q_2 \implies q_0 \not\equiv_A q_1,$$
   $$\delta(q_0, 1) = q_1 \wedge \delta(q_2, 1) = q_3 \wedge q_1 \not\equiv_A q_3 \implies q_0 \not\equiv_A q_2.$$

	q_0	q_1	q_2
q_1			
q_2			
q_3	X	X	X

   ,

	q_0	q_1	q_2
q_1	X		
q_2	X	X	
q_3	X	X	X

   .

   Ergebnis: $p \neq q \implies p \not\equiv_A q$. (2P)

2. Verfahren:

   1. Durch Potenzmengenverfahren konstruiert man einen zu A^R äquivalenten DFA B.

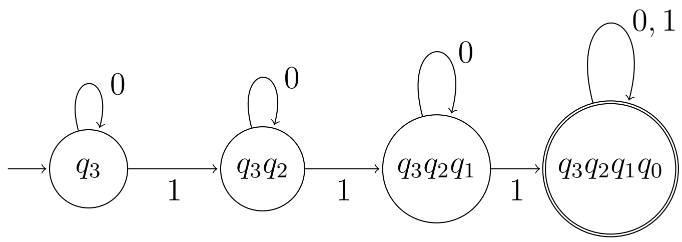
2. Durch Minimierungsverfahren konstruiert man einen zu B äquivalenten DFA C.
3. Nun prüft man, ob C aus A^R durch einfache Umbezeichnung der Zustände hervorgeht.

1. Anwendung des Potenzmengenverfahrens mit Kurznotation:

p	$\delta(p,0)$	$\delta(p,1)$
q_3	q_3	q_3q_2
q_3q_2	q_3q_2	$q_3q_2q_1$
$q_3q_2q_1$	$q_3q_2q_1$	$q_3q_2q_1q_0$
$q_3q_2q_1q_0$	$q_3q_2q_1q_0$	$q_3q_2q_1q_0$

mit $q_3q_2q_1q_0$ als einzigem Endzustand.

Darstellung als Graph:

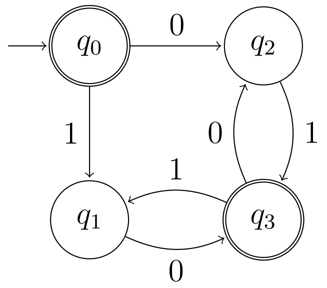


2. und 3.: Da der Automat B bis auf Umbezeichnung der Zustände identisch ist mit Automat A, ist B bereits minimal und $L(B) = L(A)$. Es folgt $L(A^R) = L(A)$.

$\alpha = 0^*10^*10^*1(0|1)^*$. (2P)

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Ein endlicher Automat $A = (Q, \Sigma, \delta, \{0\}, F)$ sei durch folgende Grafik gegeben:



1. Geben Sie einen regulären Ausdruck α an, so dass $L(A) = L(\alpha)$ gilt. Geben Sie einen NFA mit 3 Zuständen an, der $L(A)$ akzeptiert.

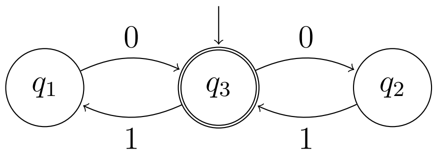
2. Beweisen Sie durch Konstruktion des Myhill-Nerode-Automaten (Quotientenautomaten), dass ein minimaler DFA für die Sprache $L(A)$ 4 Zustände besitzt.

   Stellen Sie den konstruierten Automaten graphisch dar.

3. Zeigen Sie für jede reguläre Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ mit Komplement $\overline{L} = \Sigma^* \setminus L$, dass der minimale Automat für L und der minimale Automat für $\overline{L}$ gleich viele Zustände besitzen.

Lösung

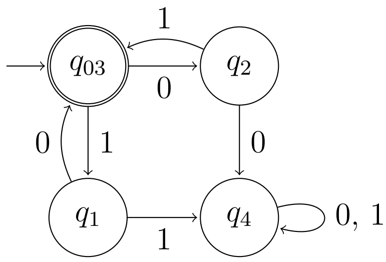
1. $\alpha = (01|10)^*$.



(1P)

2. Wir fügen einen Zustand q_4 als Fangzustand für fehlende Übergänge hinzu. Mit X werden beim Start des Minimierungsverfahrens diejenigen Zellen beschriftet, die wegen der Endzustände unterschieden werden können.

q_0				
X	q_1			
X	$1/1$	q_2		
$\equiv$	X	X	q_3	
X	$1/1$	$0/1$	X	q_4



(2P)

3. Komplementierung der Menge der Endzustände läßt die Anzahl der Zustände invariant. (1P)

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$S \to AB \mid BX\,,$$
$$A \to BA \mid a\,, \qquad B \to XX \mid b\,, \qquad X \to AB \mid b\,.$$

1. Beweisen Sie durch Anwendung des Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus, dass $baabb \in L(G)$ gilt.

   Fertigen Sie dazu ein übersichtliches Protokoll an und lassen Sie genügend Platz für die Eintragung der jeweils relevanten Syntaxbäume von Ableitungen im Sinne von Teilaufgabe 2.

2. Berechnen Sie nun mit einer geeigneten Erweiterung des CYK-Algorithmus alle existierenden verschiedenen Syntaxbäume für Ableitungen des Wortes *baabb*!

   Stellen Sie alle Syntaxbäume für Ableitungen von *baabb* graphisch dar!

Lösung

1.

15 S, B, S, X				
14 $\emptyset$	25 X, S			
13 $\emptyset$	24 $\emptyset$	35 S, X, B		
12 A	23 $\emptyset$	34 S, X	45 B, S	
11 B, X	22 A	33 A	44 B, X	55 B, X
b	a	a	b	b

(3P)

2. Es gibt genau 2 Syntaxbäume zu folgenden Ableitungen:

   B_1: $S \rightarrow_G AB \rightarrow_G BAB \rightarrow_G^* baabb\,.$

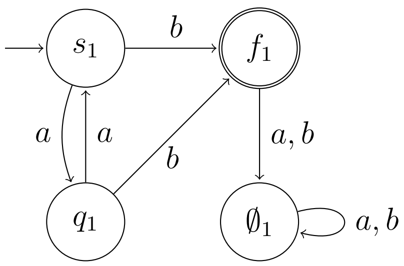
   B_2: $S \rightarrow_G BX \rightarrow_G BAB \rightarrow_G^* baabb\,.$

(1P)

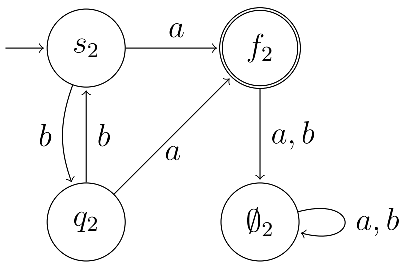
Hausaufgabe 6 (5 Punkte)

Wir betrachten die endlichen Automaten A_1 und A_2 über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b\}$, die durch die folgenden Graphen gegeben sind:

A_1:



A_2:



1. Geben Sie einen regulären Ausdruck für $L(A_1)$ an und zeigen Sie $L(A_1) \cap L(A_2) = \emptyset$.
2. Geben Sie einen zu A_1 äquivalenten, minimalen DFA B_1 an und beweisen Sie dessen Minimalität.

   Der Minimalitätsbeweis soll durch Anwendung eines entsprechenden Konstruktionverfahrens für Quotientenautomaten geliefert werden.
3. Seien $\Gamma = \Sigma \cup \{\#\}$ und $L = L(A_1)\{\#\}L(A_2)$. Geben Sie einen minimalen DFA C an, so dass $L = L(C)$ gilt.

4. Auf Γ^* ist eine Äquivalenzrelation $\equiv_L$ wie folgt definiert: Für alle $u, v \in \Gamma^*$ gilt

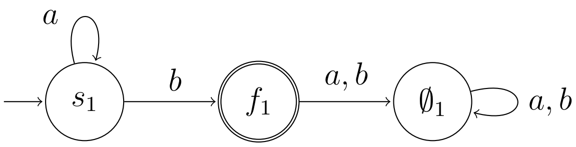
$$u \equiv_L v \quad \Longleftrightarrow \quad \forall w \in \Gamma^*.\ uw \in L \Leftrightarrow vw \in L\,.$$

   Man zeige: Falls $u \in L(A_1)$ und $v \in L(A_2)$, dann gilt $u \not\equiv_L v$, d. h. u und v sind nicht äquivalent im Sinne von $\equiv_L$.

Lösung

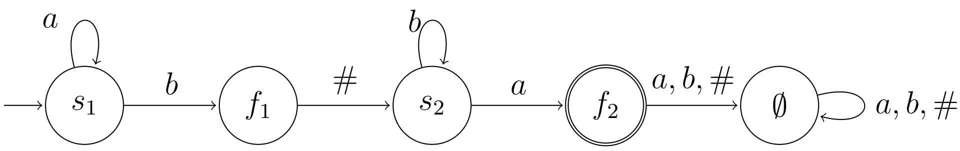
1. Es gilt $L(a^*b) = L(A_1)$ und $L(b^*a) = L(A_2)$. Wörter aus $L(A_1)$ enden mit b und Wörter aus $L(A_2)$ enden mit a. Daraus folgt $L(A_1) \cap L(A_2) = \emptyset$. (1P)

2.



   f_1 ist als Endzustand nicht äquivalent zu Nichtendzuständen. Der Fangzustand $\emptyset$ ist nicht äquivalent zu s_1, weil $L(\emptyset) = \emptyset \neq L(A_1) = L(s_1)$. (1P)

3. Im folgenden Graph seien alle undefinierten Übergänge ergänzend zum Zustand $\emptyset$ geführt.



   (1P)

4. Seien $u \in L(A_1)$ und $v \in L(A_2)$.

   Wir nehmen $u \equiv_L v$ an und führen diese Annahme wie folgt zum Widerspruch.

   Wir setzen $w = \#v$. Dann folgt $uw = u\#v \in L$.

   Und wegen $u \equiv_L v$ folgt nun auch $vw \in L$, mithin $v\#v \in L$.

   Nach Definition von L folgt $v \in L(A_1)$.

   Nach Teilaufgabe 1 gilt aber $L(A_1) \cap L(A_2) = \emptyset$. Widerspruch! (2P)

Hausaufgabe 7 (4 Punkte)

Widerlegen Sie die Regularität der folgenden Sprachen (mit Hilfe des Pumping-Lemmas):

1. $L_1 = \{w \in \{0,1\}^*\,;\ w^R = w\}$

2. $L_2 = \{w \in \{0,1\}^*\,;\ |w|_0 \geq |w|_1\}\,.$

Dabei bedeutet w^R die Umkehrung von w („Rückwärtslesen“), und $|w|_a$ gibt die Anzahl der Zeichen a in einem Wort w an, d.h. $|w|_a = \#_a(w)$.

Lösung

1. Wir nehmen an, dass L_1 regulär ist und leiten mittels des Pumping-Lemmas daraus einen Widerspruch her.

   Sei $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl. Dann ist sicherlich $0^n 1 0^n \in L_1$. Es gibt also für z eine Zerlegung uvw mit $v \neq \epsilon$ und $|uv| \leq n$, so dass $(*)$ $uv^i w \in L_1$ für alle $i \in \mathbb{N}$.

   Offensichtlich muss $uv = 0^k$ für $0 < k \leq n$ gelten, also $u = 0^i$ und $v = 0^j$ mit $i+j = k$ und $j > 0$. Dann ist aber $uv^2w = 0^i 0^{2j} 0^{n-k} 1 0^n \notin L_1$, denn $i + 2j + n - k > n$. Dies steht im Widerspruch zu $(*)$, d.h. unsere ursprüngliche Annahme, dass L_1 regulär ist, kann nicht stimmen. (2P)

2. Angenommen, L_2 wäre regulär. Dann können wir das Pumping-Lemma anwenden. Sei also $n \in \mathbb{N}$ eine Pumping-Lemma-Zahl. Das Wort $z = 0^n 1^n$ ist in L_2. Es gibt daher eine Zerlegung uvw mit $v \neq \epsilon$, $|uv| \leq n$ und $uv^i w \in L_2$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Aus unserer Wahl von z folgt, dass $u = 0^i$ und v^j mit $j > 0$ gilt. Allerdings ist $uv^0w = 0^i 0^{n-i-j} 1^n \notin L_2$, ein Widerspruch zum Pumping-Lemma. Also kann L_2 nicht regulär sein. (2P)

Zusatzaufgabe 4 (wird nicht korrigiert)

Die Permutationssprache L_P zu einer Sprache L besteht aus allen Permutationen aller Wörter in L. Formal setzen wir:

$$L_P = \{u_{\pi(1)} \cdots u_{\pi(k)} \,;\, k \in \mathbb{N},\ \pi \text{ Permutation und } u_1 \cdots u_k \in L\}$$

1. Geben Sie eine alternative, möglichst einfache Beschreibung der Permutationssprache zu der Sprache $L = L((ab)^*)$ an.

2. Verwenden Sie das Pumping-Lemma, um anhand dieser Sprache zu zeigen, dass reguläre Sprachen nicht abgeschlossen sind unter Permutation (d.h. für eine reguläre Sprache L ist L_P nicht zwangsläufig regulär).

Lösung

1. L_P ist die Sprache der Wörter, die aus gleich vielen a und b bestehen.

2. Angenommen, L_P sei regulär. Nach dem Pumping-Lemma können wir nun ein $n > 0$ wählen, so dass für alle $z \in L_P$ mit $|z| \geq n$ eine Zerlegung $z = uvw$ existiert mit $v \neq \epsilon$, $|uv| \leq n$ und $uv^i w \in L_P$ für alle $i \geq 0$. Wir nennen n eine Pumping-Lemma-Zahl.

   Es gilt $a^n b^n \in L_P$. Sei also $z = a^n b^n$. Für jede Zerlegung $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$ und $v \neq \epsilon$ gilt $v = a^m$ für ein $m > 0$. Dann besteht aber uv^2w aus $m + n$ Vorkommen von a und n Vorkommen von b und ist damit nicht in L_P enthalten.

   Somit erhalten wir einen Widerspruch zur Regularität von L_P.

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Berechenbarkeitsbegriffe beruhen auf endlichen Regelsystemen, deren Regeln einzeln effektiv angewendet werden können, um Elemente zu erzeugen bzw. zu benennen. Insgesamt werden dadurch induktiv Mengen dargestellt bzw. erzeugt. Formal werden die erzeugten Mengen als Durchschnitt aller Mengen dargestellt, die in gewissem Sinne abgeschlossen sind gegenüber der Erzeugung von Elementen.

Sei $X = (X_1, X_2)$ ein Tupel von Mengen $X_1, X_2 \subseteq \Sigma^*$ mit $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten das folgende Regelsystem H mit drei Implikationen.

$$H: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow\ aa \in X_1\,, \\ (2) & x \in X_2 & \Longrightarrow\ xa \in X_1\,, \\ (3) & x \in X_1 & \Longrightarrow\ ax \in X_2\,. \end{array}$$

Das Tupel $X = (X_1, X_2)$ heißt H-abgeschlossen, falls die Implikationen (1), (2) und (3) gelten.

1. Seien I eine nicht leere Indexmenge und $Y = (Y_i)_{i\in I}$ eine Familie von H-abgeschlossenen Mengentupeln $Y_i = (Y_{i,1}, Y_{i,2})$. Zeigen Sie, dass der Durchschnitt
$$\bigcap Y = \left(\bigcap_{i\in I} Y_{i,1},\, \bigcap_{i\in I} Y_{i,2} \right).$$
ebenfalls H-abgeschlossen ist.
2. Zeigen Sie, dass es zu jedem Tupel $A = (A_1, A_2)$ ein kleinstes H-abgeschlossenes Tupel A^H gibt, so dass $A \subseteq A^H$. Dabei sei die Mengeninklusion komponentenweise auf 2-Tupel erweitert. A^H heißt dann die H-abgeschlossene Hülle von A oder das von A erzeugte H-abgeschlossene Mengentupel.
3. Seien $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$. Beweisen Sie induktiv mit Hilfe der H-Abgeschlossenheit, dass alle Wörter in L_1 aus einer geraden Anzahl von Buchstaben a bestehen.
4. Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.
$$S \ \rightarrow\ aa \mid Ba\,, \qquad\qquad B \ \rightarrow\ aS\,.$$
Sei $(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H$. Zeigen Sie $L_G = L_1$.

Bemerkung: Das Regelsystem H und die Grammatik G entsprechen sich in kanonischer Weise.

Lösung

Grundlegendes Beispiel ist die Erzeugung von Darstellungen von natürlichen Zahlen, bei der es eine Regel gibt, die es erlaubt, an eine schon erzeugte Zahldarstellung durch Anfügen eines Striches die nachfolgende Zahl darzustellen. Als Startregel kann man das Hinschreiben eines einzelnen Striches zur Darstellung der Zahl 1 betrachten. Die Menge der natürlichen Zahlen wird dann als kleinste, gegenüber der Regelanwendung abgeschlossenen Menge dargestellt.

Induktive Beweise hängen eng mit dieser Betrachtungseise zusammen. Sie kann insbesondere bei kontextfreien Sprachen demonstriert werden, wie folgt.

1. Die Beweise sind für alle Implikationen gleichartig. Wir betrachten nur die Implikation (2).
Sei $X = (X_1, X_2) = \left(\bigcap_{i\in I} Y_{i,1},\, \bigcap_{i\in I} Y_{i,2} \right)$.
Zu zeigen: $\quad x \in X_2 \implies xa \in X_1$.
Sei $x \in X_2$.
Dann gilt $x \in Y_{i,2}$ für alle $i \in I$ (Durchschnittseigenschaft).
Da alle Y_i H-abgeschlossen sind, folgt $xa \in Y_{i,1}$ für alle $i \in I$.
Damit folgt $xa \in X_1$ (Durchschnittseigenschaft), mithin Implikation (2).

2. Zunächst ist (Σ^*, Σ^*) offenbar ein H-abgeschlossenes Tupel.
   Außerdem gilt $A_1 \subseteq \Sigma*$ und $A_2 \subseteq \Sigma*$, d.h. $A \subseteq (\Sigma^*, \Sigma^*)$.
   Damit ist die Familie Y aller H-abgeschlossenen Y_i mit $A \subseteq Y_i$ nicht leer.
   Damit ist der Durchschnitt $\bigcap Y$ das gesuchte A^H, d.h.
   $$A^H = \bigcap (Y_i\,;\, A \subseteq Y_i \text{ und } Y_i \text{ ist } H\text{-abgeschlossen}).$$

3. Seien $P \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Wörter geradzahliger Länge,
   und $Q \subseteq \Sigma^*$ die Menge aller Wörter ungeradzahliger Länge.
   Dann ist (P, Q) offenbar H-abgeschlossen, denn
   Regel (1): $aa \in P$,
   Regel (2): aus $x \in Q$ folgt $xa \in P$, und
   Regel (3): aus $x \in P$ folgt $ax \in Q$.
   Es folgt
   $$(L_1, L_2) = (\emptyset, \emptyset)^H = (\emptyset, \emptyset)^H \cap (P, Q) \subseteq (P, Q),$$
   d.h. $L_1 \subseteq P$, mithin sind alle Wörter aus L_1 geradzahlig.

4. Bemerkung: Das Regelsystem H und die Grammatik G entsprechen sich in kanonischer Weise. Die kanonische Umsetzung geschieht wie folgt:
   Sei $V = \{S, B\}$. Jeder Variablen $X \in V$ wird die Sprache $L(X) := \{w \in \Sigma^*\,;\, X \xrightarrow[G]{}^* w\}$ zugeordnet.
   Damit erhält man ein System $(L(S), L(B)) \subseteq (\Sigma^*, \Sigma^*)$.
   Wir ordnen jeder Produktionsregel der Grammatik eine Implikation zu wie folgt:

$P:$	$\gg$	$H:$			
$S \to aa$	$\gg$	(H_1)		$\Longrightarrow$	$aa \in X_1$,
$S \to Ba$	$\gg$	(H_2)	$x \in X_2$	$\Longrightarrow$	$xa \in X_1$,
$B \to aS$	$\gg$	(H_3)	$x \in X_1$	$\Longrightarrow$	$ax \in X_2$.

   Sei (L_1, L_2) die H-abgeschlossene Hülle des Tupels der leeren Mengen $(\emptyset, \emptyset)$. Dann gilt
   $$(L(S), L(B)) = (L_1, L_2).$$
   Beweis:
   (L_S, L_B) ist offenbar H-abgeschlossen,
   und natürlich gilt $(\emptyset, \emptyset) \subseteq (L_S, L_B)$.
   Daraus folgt $(L_1, L_2) \subseteq (L_S, L_B)$.
   Die Umkehrung $(L_S, L_B) \subseteq (L_1, L_2)$ zeigt man induktiv über die Länge $n \in \mathbb{N}$ der Ableitungen
   $X \to \alpha_1 \to \alpha_2 \ \ldots \ \to \alpha_n = w \in \Sigma^*$
   oder kurz $X \xrightarrow[n]{} w$ für $X \in V$ wie folgt.
   Sei $X \to \alpha_1 \to \alpha_2 \ \ldots \ \to \alpha_n = w \in \Sigma^*$
   oder kurz $X \xrightarrow[n]{} w$ für $X \in V$.
   <u>$n = 1$:</u>
   Dann gilt $S \to \alpha_1 = w = aa$. Mit Regel H_1 folgt $aa \in L_1$.
   <u>$n \to n+1$ und $n \geq 1$:</u>
   <u>$X = S$:</u>
   Es gilt $S \to Ba \xrightarrow[n]{} w = xa$ mit $B \xrightarrow[n]{} x$ (s. Zerlegungssatz Bl.4, VA3.1).
   Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x \in L_2$.
   Nach Regel H_2 folgt $xa \in L_1$.
   <u>$X = B$:</u>
   Es gilt $B \to aS \xrightarrow[n]{} w = ax$ mit $S \xrightarrow[n]{} x$ (s. Zerlegungssatz Bl.4, VA3.1).
   Nach Induktionsvoraussetzung gilt $x \in L_1$.
   Nach Regel H_3 folgt $ax \in L_2$.

Vorbereitung 2

Wir betrachten die Grammatik $G = (\{S,T\},\{a,b\},P,S)$ mit den Produktionen

$$S \to aSb \mid SS \mid \epsilon\,, \qquad T \to TaTb \mid \epsilon\,.$$

Wir definieren $L(X) := \{w \in \Sigma^*\,;\, X \underset{G}{\to}^* w\}$ für $X \in V$. Zeigen Sie jeweils per Induktion:

1. $L(T) \subseteq L(S)$.
2. Wenn $w \in L(T)$, dann ist auch $awb \in L(T)$.
3. Wenn $v \in L(T)$ und $w \in L(T)$, dann ist auch $vw \in L(T)$.
4. $L(S) \subseteq L(T)$.

Lösung

Letztendlich besagen 1. zusammen mit 4. die Gleichheit der Sprachen $L(S)$ und $L(T)$, d.h., $L_G(S) = L(S) = L(T) = L_G(T)$.
Offenbar gilt $L(S) = L_{G_S}$
mit der Grammatik $G_S = (\{S\},\{a,b\},P,S)$ und den Produktionen $S \to aSb \mid SS \mid \epsilon$,
während $L(T) = L_{G_T}$ gilt
mit Grammatik $G_T = (\{T\},\{a,b\},P,T)$ und den Produktionen $T \to TaTb \mid \epsilon$.
G ist in gewisser Weise die disjunkte Vereinigung von Grammatiken G_S und G_T, wenn man von den Axiomen absieht.

1. Es gibt T-Regeln und S-Regeln. Aus den T-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem T mit zwei Implikationen für die Menge X_T.

   Die Regeln sind unabhängig von X_S, d.h. X_S kommt in den Prämissen der Regeln nicht vor:

   $$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow\ \epsilon \in X_T\,, \\ (2) & x,y \in X & \Longrightarrow\ xayb \in X_T\,. \end{array}$$

   Dann ist zu zeigen, dass $L(S)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von T-Regeln, d.h.,

   $$T: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow\ \epsilon \in L(S)\,, \\ (2) & x,y \in L(S) & \Longrightarrow\ xayb \in L(S)\,. \end{array}$$

   (1): Es gilt $\epsilon \in L(S)$.

   (2): Seien $x, y \in L(S)$.

   Dann gibt es die Ableitung $S \underset{P}{\to} SS \underset{G}{\to} SaSb \underset{G}{\to}^* xaSb \underset{G}{\to}^* xayb$, d.h., $xayb \in L(S)$.

   Es folgt die T-Abgeschlossenheit für $L(S)$.

   Da $L(T)$ die T-abgeschlossene Hülle von $\emptyset$ ist, folgt $L(T) \subseteq L(S)$.
2. Siehe 4.
3. Siehe 4.
4. Aus den S-Produktionen erhalten wir das folgende Regelsystem S mit drei Implikationen für eine Menge X_S:

   $$S: \quad \begin{array}{lll} (1) & & \Longrightarrow\ \epsilon \in X_S\,, \\ (2) & x \in X_S & \Longrightarrow\ axb \in X_S\,, \\ (3) & x,y \in X_S & \Longrightarrow\ xy \in X_S\,. \end{array}$$

   Dann ist zu zeigen, dass $L(T)$ abgeschlossen ist gegenüber der Anwendung von S-Regeln, d.h.,

   $$S: \quad \begin{array}{llll} (1) & & \Longrightarrow\ \epsilon \in L(T)\,, & \\ (2) & w \in L(T) & \Longrightarrow\ awb \in L(T)\,, & \text{(Teilaufg. 2)} \\ (3) & v,w \in L(T) & \Longrightarrow\ vw \in L(T)\,. & \text{(Teilaufg. 3)} \end{array}$$

   (1): Es gilt $\epsilon \in L(T)$.

   (2): Sei $w \in L(T)$.

Dann gibt es die Ableitung $T \underset{P}{\rightarrow} TaTb \underset{G}{\rightarrow} aTb \underset{G}{\rightarrow}^* awb$,
d.h., $awb \in L(T)$.

(3): Seien $v, w \in L(T)$.

Dann gibt es eine Ableitung $T \underset{G}{\rightarrow}^* Tw \underset{G}{\rightarrow} w$, da die Reihenfolge der terminalen ϵ-Produktionen beliebig wählbar ist und zuvor stets eine Variable T am Wortanfang steht, falls keine ϵ-Produktion angewandt wurde.

Es folgt $T \underset{G}{\rightarrow}^* Tw \underset{G}{\rightarrow}^* vw$, d.h. $vw \in L(T)$.

Damit gilt die S-Abgeschlossenheit für $L(T)$.

Da $L(S)$ die S-abgeschlossene Hülle von $\emptyset$ ist, folgt $L(S) \subseteq L(T)$.

Vorbereitung 3

Gegeben sei der Kellerautomat $K = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta)$ mit $\Sigma = \{a, b, \#\}$, $\Gamma = \{Z_0, X, Y, Z\}$ und der Übergangsfunktion

$$\begin{array}{lllllllll} \delta(q,\epsilon,Z_0) & = & \{(q,XZ)\}\,, & \delta(q,a,X) & = & \{(q,XY)\}\,, & & & \\ \delta(q,\#,X) & = & \{(q,\epsilon)\}\,, & \delta(q,b,Y) & = & \{(q,\epsilon)\}\,, & \delta(q,a,Z) & = & \{(q,\epsilon)\}\,. \end{array}$$

1. Geben Sie eine Berechnung als Konfigurationsfolge an, die zeigt, dass K das Wort $a\#ba$ mit leerem Keller akzeptiert, d. h., dass $a\#ba \in L_\epsilon(K)$ gilt.
2. Modifizieren Sie die Übergangsfunktion δ so zu einer Funktion δ', dass für den Kellerautomaten $K' = (\{q\}, \Sigma, \Gamma, q, Z_0, \delta')$ gilt: $L_\epsilon(K') = (L_\epsilon(K))^*$.

Lösung

1. $$\begin{aligned} (q, a\#ba, Z_0) &\rightarrow_K (q, a\#ba, XZ) \\ &\rightarrow_K (q, \#ba, XYZ) \\ &\rightarrow_K (q, ba, YZ) \rightarrow_K (q, a, Z) \rightarrow_K (q, \epsilon, \epsilon) \end{aligned}$$
2. Wenn man δ als Übergangsrelation auffasst, dann ist

   $$\delta' = \delta \cup \{(q, a, Z) \rightarrow (q, Z_0),\ (q, \boldsymbol{\epsilon}, Z_0) \rightarrow (q, \epsilon)\}\ .$$

   Der erste neue Übergang erlaubt den Rücksprung zum Anfang. Der zweite neue Übergang stellt sicher, dass auch das leere Wort akzeptiert wird.

Tutoraufgabe 1

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$. In Satz 72 der Vorlesung wird die Menge $V' = \{A \in V\, ;\, (\exists w \in \Sigma^*)[A \underset{G}{\rightarrow}^* w]\}$ betrachtet. Die Variablen aus V' nennen wir erzeugend und eine Teilmenge $T \subseteq V$ nennen wir erzeugend abgeschlossen oder reduktiv abgeschlossen, falls gilt

$$\text{(Regel } e\text{)} \qquad (A \to \alpha) \in P, \quad \alpha \in (T \cup \Sigma)^* \quad \Longrightarrow \quad A \in T\,.$$

1. Mit $\emptyset^e$ bezeichnen wir die erzeugend abgeschlossene Hülle der leeren Menge. Die Berechnung von $\emptyset^e$ erfordert Aufwand $O(|V| \cdot s(G))$. Begründung!
2. Sei G kontextfrei. Zeigen Sie, dass $V' = \emptyset^e$ gilt.
3. Diskutieren Sie die Frage, woran das nahegelegte Verfahren für die Entscheidung der Leerheit der Sprache $L(G)$ bei kontextsensitiven Grammatiken G i.A. scheitert.

Lösung

1. Der folgende Algorithmus berechnet $\emptyset^e$ in T:

   $T := \emptyset$
   wiederhole:
   $\quad T' := T$
   $\quad$ **für jedes** $(A \to \alpha) \in P$:
   $\quad\quad$ **wenn** $\alpha \in (T \cup \Sigma)^*$: $T := T \cup \{A\}$
   bis $T = T'$

   Da T in jedem Durchlauf der äußeren Schleife um mindestens ein Element wächst und $T \subseteq V$ ist, läuft diese Schleife maximal $|V|$ mal. In jedem solchen Durchlauf läuft die innere Schleife exakt $|P|$ mal, wobei in jedem Durchlauf für $(A \to \alpha) \in P$ geprüft werden muss, ob $\alpha \in (T \cup \Sigma)^*$ ist, d.h. es muss jedes Symbol in α betrachtet werden. Wenn man annimmt, dass sämtliche Mengenoperationen (Hinzufügen, Test auf "enthalten sein") konstante Zeit benötigen, betragen die Kosten ür diese innere Schleife somit höchstens

   $$\sum_{(A\to\alpha)\in P} \underbrace{|\alpha|}_{\alpha \in (T\cup\Sigma)^*} + \underbrace{1}_{T := T \cup \{A\}} \leq s(G) + |P| \leq 2s(G)$$

   Der Vergleich $T = T'$ am Ende der äußeren Schleife lässt sich in konstanter Zeit realisieren, wenn man sich mit einem Flag merkt, ob man ein Element hinzugefügt hat.

   Somit kommt man insgesamt auf eine Laufzeit von $O(|V| \cdot s(G))$.
   (Beweis von Manuel Eberl)

2. Wir zeigen, dass V' e-abgeschlossen ist wie folgt:

   Seien $(A \to \alpha) \in P$, $\quad \alpha \in (V' \cup \Sigma)^*$ mit $\alpha = u_1 A_1 u_2 A_2 \ldots u_n A_n u_{n+1}$, $u_i \in \Sigma^*$ und $A_i \in V'$ für alle i.

   Dann gilt $A_i \underset{G}{\rightarrow}^* w_i$ für gewisse $w_i \in \Sigma^*$.

Es folgt $A \underset{G}{\rightarrow}^* u_1 w_1 u_2 w_2 \ldots u_n w_n u_{n+1} = w \in \Sigma^*$, d.h. $A \in V'$, woraus aber $\emptyset^e \subseteq V'$ folgt.

Nun zeigen wir die Umkehrung $V' \subseteq \emptyset^e$ induktiv über die Länge $n \in \mathbb{N}$ der Ableitungen $A \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \ \ldots \ \rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ für $A \in V'$.

oder kurz $A \underset{n}{\rightarrow} w$ für $A \in V'$ wie folgt.

Sei $A \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \ \ldots \ \rightarrow \alpha_n = w \in \Sigma^*$ für $A \in V'$.

<u>$n = 1$:</u>

Für $n = 1$ ist $A \rightarrow \alpha_1 = w$ eine terminale Produktion, die natürlich die Prämisse der Regel e erfüllt. Daraus folgt, dass $A \in \emptyset^e$ gilt.

<u>$n \rightarrow n + 1$ für $n \geq 1$:</u>

Sei $A \rightarrow \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \ \ldots \ \rightarrow \alpha_{n+1} = w \in \Sigma^*$ für $A \in V'$.

Dann gilt $\alpha_1 = u\beta$ mit $u \in \Sigma^*$ und $\beta \underset{n}{\rightarrow} w$. Es folgt bei geeignetem Induktionsschema, dass $u\beta \in (\emptyset^e \cup \Sigma)^*$ gilt. Nach Regel e muss also $A \in \emptyset^e$ gelten.

3. Die Produktionen $S \rightarrow AB, AX \rightarrow aX, X \rightarrow b$ zeigen, dass $L(A)$ leer sein kann, obwohl $L(S)$ nicht leer ist. Es gibt hier Variable, die für sich allein nutzlos sind, aber im Kontext trotzdem „nützlich“ sind. Man kann die Sprache $L(S)$ also nicht mit den besprochenen Regeln aus den Sprachen $L(A)$ und $L(B)$ aufbauen.

Tutoraufgabe 2

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Wir betrachten die Sprache $L = \{w \in \Sigma^* \,;\, \#_a(w) = 2 \cdot \#_b(w)\}$ und die Grammatik $G = (\{S\}, \Sigma, P, S)$ mit den folgenden Produktionen:

$$S \ \rightarrow \ aSaSb \mid aSbSa \mid bSaSa \mid SS \mid \epsilon$$

1. Zeigen Sie $L(G) \subseteq L$, d.h., dass die Grammatik G „korrekt“ ist für die Sprache L.
2. Zeigen Sie, dass alle Wörter $w \in L$ in der Grammatik G ableitbar sind, d.h., dass die Grammatik G „vollständig“ ist bezüglich der Sprache L.
3. G ist lediglich „nullierbar kontextfrei“. Geben Sie nun eine kontextfreie Grammatik G' für die Sprache L an.

Lösung

1. Induktion über die Erzeugung von $w \in L(S)$:
   - <u>$S \rightarrow \epsilon$</u>: Dann ist $w = \epsilon$, und die Behauptung gilt offensichtlich.
   - <u>$S \rightarrow aSaSb$</u>: Sei $w = auavb$ mit $u, v \in L(S)$. Nach Induktionshypothese gilt die Behauptung für u und v, und damit ist auch

     $$\#_a(w) = \#_a(u) + \#_a(v) + 2 = 2 \cdot (\#_b(u) + \#_b(v) + 1) = 2 \cdot \#_b(w)$$
   - Die Fälle $S \rightarrow aSbSa$ und $S \rightarrow bSaSa$ sowie $S \rightarrow SS$ sind analog.

2. <u>Bemerkung</u>: Die Produktion $S \rightarrow SS$ ist notwendig, weil sonst $aabbaa$ nicht ableitbar ist.

   <u>Vollständigkeitsbeweis:</u>

   Wir betrachten die Differenz $\Delta(w) = \#_a(w) - 2\#_b(w)$. Für alle $w \in L$ gilt $\Delta(w) = 0$. Wir bemerken, dass Δ in Schritten von 1 ansteigt, aber in Schritten von 2 absteigt.

   Falls es für ein $w \in L$ eine Zerlegung $u, v \in L$ gibt, so dass $u, v \in L_G$, dann folgt auch $w \in L_G$ wegen $S \underset{P}{\rightarrow} SS \underset{G}{\rightarrow}^* uv = w$.

   Wir setzen nun voraus, dass w keine SS-Zerlegung der obigen Art besitzt. Dann kann auch nicht eine Zerlegung $w = bub$ existieren, weil dies notwendigerweise eine Nullstelle von Δ im Inneren von w zur Folge hätte.

   - <u>Fall $w = aub$:</u> Dann muss es eine Zerlegung $u = sat$ geben mit $s, t \in L$, denn es gilt $\Delta(au) = 2$ und Δ steigt von 0 aus in Schritten von 1, ohne dass $\Delta < 0$ erreicht wird.
   - <u>Fall $w = bua$:</u> Die analoge, aber in gewissem Sinne zum vorausgehenden Fall punktsymmetrische Argumentation zeigt, dass es eine Zerlegung $u = sat$ geben muss mit $s, t \in L$.
   - <u>Fall $w = aua$:</u> Es gilt $\Delta(a) = 1$ und $\Delta(au) = -1$. Mithin muss es ein b geben, so dass $u = sbt$ mit $s, t \in L$.

   In allen Fällen reichen die Produktionen aus, um $w \in L$ nachzuweisen.

3. $G' = (\{S, T\}, \Sigma, P', T)$ mit den folgenden Produktionen

$$\begin{array}{rcl}
S & \rightarrow & aSaSb \mid aSbSa \mid bSaSa \mid SS\,, \\
S & \rightarrow & aaSb \mid abSa \mid baSa\,, \\
S & \rightarrow & aSab \mid aSba \mid bSaa\,, \\
S & \rightarrow & aab \mid aba \mid baa\,, \\
T & \rightarrow & S \mid \epsilon\,.
\end{array}$$

Tutoraufgabe 3

Zeigen Sie mit Hilfe des Lemmas von Ogden, dass die folgende Sprache L nicht kontextfrei ist.

$$L = \{a^n b^n c^i\,;\, i, n \in \mathbb{N}, i \neq n\}$$

Lösung

Angenommen L ist kontextfrei. Sei n eine Konstante, deren Existenz durch Ogdens Lemma bewiesen wurde. Sei $z = a^n b^n c^{n+n!}$. Markiere die a's in z. Nach Ogdens Lemma gibt es eine Zerlegung $z = uvwxy$, so dass vx mindestens ein a enthält, vwx höchstens n a's enthält und $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$ gilt. Falls v oder x verschiedene Buchstaben enthalten, entsteht durch v^2 bzw. x^2 ein Teilwort aus $a^+b^+a^+b^+$ oder $b^+c^+b^+c^+$ oder sogar aus $a^+b^+c^+a^+b^+c^+$, so dass die entstehenden Wörter keinesfalls zu L gehören können.

Daher müssen v und x „rein“ sein: $v, x \in a^* \cup b^* \cup c^*$. Da vx mindestens ein a enthält, gilt $v \in a^+$ oder $x \in a^+$.

1. Fall: $v \in a^+$ und $x \in b^+$.
Sei $p := |v|$. Wegen $1 \leq p \leq n$ ist p ein Teiler von $n!$. Sei q mit $pq = n!$. Nach Ogden ist $z' = uv^{q+1}wx^{q+1}y \in L$. Das Wort uwy enthält genau $(n-p)$-mal a. Daher enthält z' genau
$$n - p + p(q+1) = n + n!$$
a's. Also ist in z' die Anzahl der a's gleich der Anzahl der c's, Widerspruch zu $z' \in L$.

2. Fall: ($v \in a^+$ und $x \notin b^+$) oder $v \notin a^+$.
Dann enthält uv^2wx^2y unterschiedlich viele a's und b's, Widerspruch zu $uv^2wx^2y \in L$.

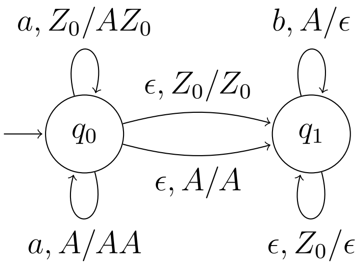
Tutoraufgabe 4

1. Konstruieren Sie für die folgende Sprache $L = \{a^n b^{4n}\ ;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ einen Kellerautomaten, der L durch Endzustände akzeptiert.
2. Geben Sie einen Kellerautomaten an, der die Sprache $\{a^n b^n\ ;\ n \in \mathbb{N}_0\}$ mit leerem Keller akzeptiert. Geben Sie die Konfigurationsfolge an, die der Automat durchläuft, wenn er das Wort a^3b^3 liest.
3. Eine Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ sei durch folgende Produktionen gegeben.
$$\begin{aligned} S &\to aAB\,, \\ A &\to Sa \mid Sb \mid a\,, \\ B &\to Bb \mid Sb \mid b\,. \end{aligned}$$
Konstruieren Sie systematisch einen PDA K, der $L(G)$ durch leeren Keller akzeptiert.

Lösung

1. Der Kellerautomat $M = (\{q_0, q_1, q_2, q_3\}, \{a, b\}, \{A, B, Z_0\}, \delta, q_0, Z_0, \{q_0, q_3\})$, wobei
$$\begin{aligned} \delta(q_0, a, *) &= \{(q_1, AAAA*)\}\,, \\ \delta(q_1, a, *) &= \{(q_1, AAAA*)\}\,, \\ \delta(q_1, b, A) &= \{(q_2, \epsilon)\}\,, \\ \delta(q_2, b, A) &= \{(q_2, \epsilon)\}\,, \\ \delta(q_2, \epsilon, Z_0) &= \{(q_3, Z_0)\}\,, \end{aligned}$$
akzeptiert L durch Endzustände q_0, q_3.

2. Kellerautomat in graphischer Notation:



Beim Lesen von a^3b^3 durchläuft der Automat die Konfigurationsfolge
$(q_0, aaabbb, Z_0) \to_M (q_0, aabbb, AZ_0) \to_M (q_0, abbb, AAZ_0) \to_M (q_0, bbb, AAAZ_0)$
$\to_M (q_1, bbb, AAAZ_0) \to_M (q_1, bb, AAZ_0) \to_M (q_1, b, AZ_0) \to_M (q_1, \epsilon, Z_0) \to_M (q_1, \epsilon, \epsilon)$.

3. Man kann eine Standardkonstruktion anwenden und erhält sofort einen Automaten K mit nur einem Zustand, der mit leerem Keller akzeptiert.

   Wir formen im ersten Schritt die Grammatik so in eine Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$ um, dass alle Produktionen die Form $C \to eD_1D_2 \ldots D_k$ besitzen mit $e \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

   Wir setzen $V' = V \cup \{A_a, B_b\}$ und definieren P' durch die folgenden Regeln.

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aAB\,, \\ A & \to & SA_a \mid SB_b \mid a\,, \\ B & \to & BB_b \mid SB_b \mid b\,, \\ A_a & \to & a\,, \\ B_b & \to & b\,. \end{array}$$

   Sei $K = (Q, \Sigma, \Gamma, q_0, S, \delta, \emptyset)$ mit $Q = \{q_0\}$, $\Gamma = \{S, A, B, A_a, B_b\}$. Dabei ist S das initiale Kellersymbol. δ ergibt sich aus den entsprechenden Produktionen wie folgt.

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl} \delta(q_0, a, S) & = & \{(q_0, AB)\}\,, & & & \\ \delta(q_0, \epsilon, A) & = & \{(q_0, SA_a), (q_0, SB_b)\}\,, & \delta(q_0, a, A) & = & \{(q_0, \epsilon)\}\,, \\ \delta(q_0, \epsilon, B) & = & \{(q_0, BB_b), (q_0, SB_b)\}\,, & \delta(q_0, b, B) & = & \{(q_0, \epsilon)\}\,, \\ \delta(q_0, a, A_a) & = & \{(q_0, \epsilon)\}\,, & \delta(q_0, b, B_b) & = & \{(q_0, \epsilon)\}\,. \end{array}$$