Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 1
29. April 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Vorbemerkung: Hausaufgaben haben Wiederholungscharakter und stellen grundsätzlich eine Lernkontrolle dar für Stoff der vorausgegangenen Übungsblätter bzw. Arbeitsblätter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt 1 beziehen sich die Hausaufgaben auf Stoff der verausgegangenen Semester.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe sowohl den Abgabetermin als auch die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir nehmen an, dass für das Ergebnis eines Experiments 3 Aussagen A, B und C sinnvoll sind, die unabhängig voneinander zutreffen können oder auch nicht.

1. Wie viele Aussagen auf der Basis von A, B und C gibt es, wenn äquivalente Aussagen nur einmal gezählt werden?

2. Geben Sie eine Boolesche Algebra $B = \langle S, \wedge, \vee, \neg \rangle$ mit möglichst wenig Elementen an, in der alle obigen Aussagen korrekt beschreibbar sind.

Lösungsvorschlag

1. Es gibt 8 Möglichkeiten dafür, dass die 3 Aussagen gleichzeitig zutreffen oder nicht zutreffen. Diesen 8 Möglichkeiten entsprechen jeweils disjunkte Aussagen der Form $L_A \cap L_B \cap L_C$ mit Literalen $L_A \in \{A, \neg A\}, L_B \in \{B, \neg B\}, L_C \in \{C, \neg C\}$.

   Aus diesen Aussagen lassen sich durch Vereinigung („Oder"-Verbindung) $2^8 = 256$ nicht äquivalente Aussagen bilden.

2. Wir ordnen den 8 möglichen disjunkten Aussagen die Zahlen $i \in [8]$ zu. Dann entspricht eine „Oder"-Verbindung von Aussagen einer Teilmenge von [8] und die Boolesche Algebra $B = \langle\, \mathcal{P}([8]), \cap, \cup, \bar{}\ \rangle$ liefert die korrekte Beschreibung der 256 Aussagen.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten 3 Fehlerarten A, B und C, die bei der Fertigung eines Bauteils auftreten. Wir nehmen an, dass die 3 Fehlerarten gleich häufig vorkommen. Die Ausgangskontrolle protokolliert bei 1000 fehlerhaften Bauteilen folgende Fehler.cd

5 Bauteile haben gleichzeitig die Fehler A, B und C,
25 Bauteile haben genau die Fehler A und B,
40 Bauteile haben genau die Fehler A und C und
50 Bauteile haben genau die Fehler B und C.

Wie viele von den 1000 fehlerhaften Bauteilen haben den Fehler A?
Beschreiben Sie die Situation zunächst mit einem Venn-Diagramm.

Lösungsvorschlag
Wir können A, B und C als Mengen auffassen unter der Annahme $|A| = |B| = |C|$.

(*Venn-Diagramm*)

Es gilt
$|A \cap B \cap C| = 5$, $|A \cap B \cap \overline{C}| = 25$, $|A \cap \overline{B} \cap C| = 40$, $|\overline{A} \cap B \cap C| = 50$.
Es folgt
$|A \cap B| = 30$, $|A \cap C| = 45$, $|B \cap C| = 55$.

Nach dem Inklusions/Exklusionsatz rechnen wir
$1000 = |A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$,
und gewinnen für $|A|$ die Gleichung $1000 = 3|A| - 30 - 45 - 55 + 5 = 3|A| - 125$.
Es folgt
$$|A| = 375\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

1. Listen Sie alle 2-elementigen Multiteilmengen von Ω auf.
2. Wie viele 6-elementigen Multiteilmengen von Ω gibt es?

Lösungsvorschlag
Wir notieren Multimengen in der Form $[a, b, \ldots]$ im Unterschied zur Mengennotierung $\{a, b, \ldots\}$.

1. $$[1,2], [1,3], [2,3], [1,1], [2,2], [3,3]\,.$$
2. Die Anzahl der m-elementigen Multiteilmengen einer n-elementigen Menge beträgt $\binom{n+m-1}{m}$.

   Für Ω ist die gesuchte Anzahl also $\binom{3+6-1}{6} = \binom{8}{6} = 28\,.$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Stirling-Formel $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))$ und Grenzwertrechenregeln die asymptotischen Abschätzungen

$$\ln(n!) \in \Theta(n \ln n)\,, \qquad \binom{2n}{n} \in \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)\,.$$

Lösungsvorschlag

- Durch Ersetzung von $n!$ mit Hilfe der Stirling-Formel erhalten wir

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n!}{n \cdot \ln n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))}{n \cdot \ln n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{2}\ln 2\pi n + n(\ln n - 1)}{n \cdot \ln n} \\
&= 1\,.
\end{aligned}$$

  Wegen $0 < 1 < \infty$ folgt $\ln(n!) \in \Theta(n \ln n)$.

- Wir berechnen wieder den Grenzwert entsprechender Quotienten.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot (1+o(1))}{2\pi n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot (1+o(1))^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}}\,.
\end{aligned}$$

  Die Behauptung folgt aus $0 < \frac{1}{\sqrt{\pi}} < \infty$.

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

Lösungsvorschlag

Sei M eine endliche Multimenge. Dann gibt es eine Menge E und eine Funktion $h : E \to \mathbb{N}_0$, so dass jedes Element x' von M ein Vorkommen eines Elementes x ist von E und x' genau $h(x)$ mal in M vorkommt, und jedes $x \in E$ in M genau $h(x)$ Vorkommen besitzt.
Damit ist $\langle E, \Pr\rangle$ mit $\Pr[x] = \frac{h(x)}{|M|}$ ein diskreter endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Vorbereitung 2

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}\,, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}\,, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Lösungsvorschlag

Natürlich werden wir die Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse modellieren. Dies impliziert zunächst, dass A und B nicht gleichzeitig als Elementarereignisse ω mit $\omega \in \Omega$ modelliert werden können. Dann nämlich müsste das Ereignis $A \wedge B$ die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen, denn Elemtarereignisse sind unvereinbar.
Wir definieren die Bezeichnungen

$$o_1 = A \wedge B\,, \quad o_2 = A \wedge \neg B\,, \quad o_3 = \neg A \wedge B\,, \quad o_4 = \neg A \wedge \neg B$$

Da die o_i paarweise widersprüchlich sind und $o_1 \vee o_2 \vee o_3 \vee o_4$ allgemeingültig (tautologisch) ist, setzen wir

$$\Omega = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}\,.$$

Die Modellierung der Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zusammen mit der Gleichung $\sum_{1 \le i \le 4} \Pr(o_i) = 1$ liefert

$$\Pr(o_1) = \frac{1}{6}\,, \qquad \Pr(o_2) = \frac{1}{3}\,, \qquad \Pr(o_3) = \frac{1}{3}\,, \qquad \Pr(o_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Wir bemerken, dass gilt

$$\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}\,.$$

Vorbereitung 3

Modellieren Sie das Ziegenproblem der Tutoraufgabe 1 algorithmisch.

Lösungsvorschlag

1. Teilaufgabe:

   - Variante (W):

     1. Es gibt 3 Variable a, b, c mit Werten aus $\{\text{Ziege}, \text{Auto}\}$. O. B. d. A. setzen wir $a := \text{Auto}$, $b := \text{Ziege}$, $c := \text{Ziege}$.

     2. Eine der drei Variablen wird ausgewählt unter der Annahme, dass bei mehreren Aufrufen des Algorithmus, jede Variable gleich häufig ausgewählt wird. Die ausgewählte Variable sei x.

     3. Falls $x = a$, dann wird die Variable c entfernt.
     Falls $x = b$, dann wird die Variable c entfernt.
     Falls $x = c$, dann wird die Variable b entfernt.

     4. Nun wird die verbliebene Variable $y \neq x$ als Ergebnis gewählt.

   - Variante (NW):

     1. Es gibt 3 Variable a, b, c mit Werten aus $\{\text{Ziege}, \text{Auto}\}$. O. B. d. A. setzen wir $a := \text{Auto}$, $b := \text{Ziege}$, $c := \text{Ziege}$.

     2. Eine der drei Variablen wird ausgewählt unter der Annahme, dass bei mehreren Aufrufen des Algorithmus, jede Variable gleich häufig ausgewählt wird. Die ausgewählte Variable sei x.

     3. Falls $x = a$, dann wird die Variable c entfernt.
     Falls $x = b$, dann wird die Variable c entfernt.
     Falls $x = c$, dann wird die Variable b entfernt.

     4. Nun wird die Variable $y = x$ als Ergebnis gewählt.

2. Teilaufgabe:

   - Variante (W):

     1. Es gibt 3 Variable a, b, c mit Werten aus $\{\text{Ziege}, \text{Auto}\}$. O. B. d. A. setzen wir $a := \text{Auto}$, $b := \text{Ziege}$, $c := \text{Ziege}$.

     2. Eine der drei Variablen wird ausgewählt unter der Annahme, dass bei mehreren Aufrufen des Algorithmus, jede Variable gleich häufig ausgewählt wird. Die ausgewählte Variable sei x.

     3.1 Falls $x = a$, dann wird die Variable c entfernt und $y = b$ wird als Ergebnis gewählt.

     3.2 Falls $x = b$, dann wird gleich häufig die Variable b oder c entfernt. Falls b entfernt wurde, dann wird anschließend gleich häufig $y = a$ oder $y = c$ gewählt. Falls c entfernt wurde, dann wird das Ergebnis $y = a$ gewählt.

     3.3 Falls $x = c$, dann wird gleich häufig die Variable b oder c entfernt.
     Anschließend wird gleich häufig $y = x$ oder $y \neq x$ gewählt.

- Variante (W):

  1. Es gibt 3 Variable a, b, c mit Werten aus $\{\text{Ziege}, \text{Auto}\}$. O. B. d. A. setzen wir $a := \text{Auto}$, $b := \text{Ziege}$, $c := \text{Ziege}$.

  2. Eine der drei Variablen wird ausgewählt unter der Annahme, dass bei mehreren Aufrufen des Algorithmus, jede Variable gleich häufig ausgewählt wird. Die ausgewählte Variable sei x.

  3.1 Falls $x = a$, dann wird die Variable c entfernt und $y = a$ wird als Ergebnis gewählt.

  3.2 Falls $x = b$, dann wird gleich häufig die Variable b oder c entfernt. Falls b entfernt wurde, dann wird anschließend gleich häufig $y = a$ oder $y = c$ gewählt. Falls c entfernt wurde, dann wird das Ergebnis $y = b$ gewählt.

  3.3 Falls $x = c$, dann wird gleich häufig die Variable b oder c entfernt. Anschließend wird gleich häufig $y = x$ oder $y \neq x$ gewählt.

Tutoraufgabe 1

Am 9. September 1990 wurde folgendes Problem in der „Ask Marylin“ Kolumne des Parade Magazine gestellt:

> *„Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, 'Do you want to pick door number 2?' Is it to your advantage to switch your choice of doors?“*

Dieses Problem ist auch bekannt als das „Ziegenproblem“ bzw. „Monty-Hall Dilemma“.

1. Welches ist die bessere Strategie – wechseln (W) oder nicht (NW)? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie das Auto, wenn Sie die bessere Strategie verwenden?

2. Ändert sich der Sachverhalt, wenn der Moderator <u>unabhängig von der Kandidatenwahl</u> eine der beiden Türen mit einer Ziege öffnet (also evtl. auch die vom Kandidaten gewählte Tür)?

3. Ein populärer Einwand gegen die korrekte Lösung von 1. ist folgender:

   > Ein UFO landet im Zuschauerraum und ein Außerirdischer springt auf die Bühne. Er sieht eine offene Ziegentür und zwei geschlossene Türen. Seine Chancen stehen also 1:1, dass er die richtige Tür wählt.

   Warum überträgt sich dies nicht auf den Kandidaten?

Lösungsvorschlag

Stellt man die in der Vorbereitungsaufgabe definierten Algorithmen baumartig dar, ergeben sich sofort die Wahrscheinlichkeiten für die entsprechenden Ergebnisse. Man kann aber auch wie folgt argumentieren.

1. Im Fall der Strategie NW gewinnt der Kandidat das Auto genau dann, wenn er von Anfang an die richtige Tür gewählt hat.

$$\begin{aligned} Pr[\text{Autogewinn mit NW}] &= Pr[\text{richtige Tür gewählt}] \\ &= \frac{1}{\#\text{ Anzahl der Türen}} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

   Mit Strategie W gewinnt man das Auto genau dann, wenn man eine der <u>falschen</u> Türen gewählt hat. Der Moderator zeigt einem die zweite falsche Tür mit einer Ziege und man wählt zwangsweise die Tür mit dem Auto.

$$\begin{aligned} Pr[\text{Autogewinn mit W}] &= Pr[\text{falsche Tür gew.}] \\ &= \frac{2}{\#\text{ Anzahl der Türen}} \\ &= \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

   Man sollte also auf jeden Fall die Tür wechseln.

2. Es ist nun jeweils zu berücksichtigen, dass der Moderator auch die Tür öffnen kann, welche der Kandidat gewählt hat. Der Kandidat wird also unter Umständen zum Umentscheiden „gezwungen". Für seine modifizierte NW-Strategie MNW gilt mithin:

$$\begin{aligned} & Pr[\text{Autogewinn mit MNW}] \\ = \; & Pr[\text{richtige Tür gew.}] \\ & + Pr[\text{falsche Tür gew.}] \cdot Pr[\text{gew. Tür geöffnet}] \cdot Pr[\text{richtig umentschieden}] \\ = \; & \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Für die Strategie W gilt zunächst, dass nur dann ein Autogewinn zu erwarten ist, wenn :

$$\begin{aligned} & Pr[\text{Autogewinn mit W}] \\ = \; & Pr[\text{falsche Tür gew.}] \cdot Pr[\text{gew. Tür geöffnet}] \cdot Pr[\text{richtig umentschieden}] \\ & + Pr[\text{falsche Tür gew.}] \cdot Pr[\text{gew. Tür nicht geöffnet}] \cdot Pr[\text{richtig umentschieden}] \\ = \; & \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Bei dieser Spielvariante führen also beide Strategien gleichwahrscheinlich zu einem Autogewinn.

3. Im 3. Fall wird eine andere Strategie beschrieben, nämlich die zufällige Auswahl des 2. Schritts des Kandidaten. Allerdings verwendet der Kandidat dann nicht die Information, was er im ersten Schritt gewählt hatte. Die Argumentation überträgt sich deshalb nicht auf den Kandidaten.

Tutoraufgabe 2

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Kopf“ zeigt und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Zahl“. Wir werfen eine solche Münze n mal, dabei erhalten wir k mal „Kopf“ und $n-k$ mal „Zahl“.

1. Bestimmen Sie den zu n zugehörigen Ergebnisraum Ω_n.
2. Sei n gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel*.)
3. Wie groß ist $Pr[\, k \text{ gerade}\,]$ in Abhängigkeit von n?
4. Wie groß ist $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (n-i+1)\text{-ter Wurf}]$?
5. Betrachten Sie folgende Variante von Teilaufgabe 4: Eine un̲faire Münze wird $2n$ mal geworfen. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, „Kopf“ zu werfen, p, mit $0 < p < 1$.

   Wie groß ist nun $Pr[\forall i \leq n : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (2n-i)\text{-ter Wurf}]$?

Lösungsvorschlag

1. Wir können jedes Elementarereignis eines n-maligen Münzwurfs als Zeichenreihe $x_1 \dots x_n$ der Länge n darstellen, wobei x_i = “K” wenn beim i-ten Wurf “Kopf” gefallen ist und x_i = “Z” sonst. Daher ist

   $$\Omega_n = \{x_1 \dots x_n \mid x_i \in \{K, Z\}\}$$

   also die Menge aller Strings der Länge n über dem Alphabet $\{K, Z\}$. Damit ist auch klar, dass $|\Omega_n| = 2^n$.

2. Sei A_n das Ereignis “$k = n/2$ bei n-maligem Werfen einer Münze” für gerade n. Dann ist

   $$|A_n| = \binom{n}{n/2} = \frac{n!}{(n/2)!(n-n/2)!} = \frac{n!}{((n/2)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n}{\pi n \cdot (n/2e)^n} = 2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

   und somit

   $$Pr[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega_n|} \sim \frac{2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}}{2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

3. Sei A_n das Ereignis “k ist gerade bei n-maligem Werfen einer Münze”. Dann können wir durch Induktion zeigen, dass

   $$|A_n| = |\overline{A_n}| = \frac{1}{2}|\Omega_n|.$$

   Für Ω_1 ist dies klar. Sei $|A_i| = |\overline{A_i}| = \frac{1}{2}|\Omega_i|$ für ein $i > 1$. Dann ist

   $$A_{i+1} = \{x_1 \dots x_i K \mid k \text{ ungerade für } x_1 \dots x_i\} \dot\cup \{x_1 \dots x_i Z \mid k \text{ gerade für } x_1 \dots x_i\}$$

   $$\Rightarrow |A_{i+1}| = |A_i| + |\overline{A_i}| = |\Omega_i| = \frac{1}{2}|\Omega_{i+1}|.$$

   Mithin gilt

   $$Pr[A_n] = \frac{\frac{1}{2}|\Omega_n|}{|\Omega_n|} = \frac{1}{2}.$$

4. Sei A_n das Ereignis "$\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$: Ergebnis i-ter Wurf = Ergebnis $n-i+1$-ter Wurf bei n-maligem Werfen einer Münze". Für gerade n ist

$$|A_n| = |\{x_1 \dots x_{n/2} x_{n/2} \dots x_1 \mid x_i \in \{K, Z\}\}| = 2^{n/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

während für ungerades n gilt

$$|A_n| = |\{x_1 \dots x_{(n-1)/2} x_{\lceil n/2 \rceil} x_{(n-1)/2} \dots x_1 \mid x_i \in \{K, Z\}\}| = 2 \cdot 2^{(n-1)/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

Daher ist

$$Pr[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega_n|} = \frac{2^{\lceil n/2 \rceil}}{2^n} = \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}}$$

5. Wenn wir im i-ten der ersten n Würfe "Kopf" werfen, dann müssen wir im korrespondierenden $2n-i$-ten Wurf ebenfalls "Kopf" werfen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist p^2. Analog ist die Wahrscheinlichkeit für ein korrespondierendes "Zahl"-Paar $(1-p)^2$. Für jedes $m \leq n$ gibt es $\binom{n}{m}$ Möglichkeiten, m mal Kopf zu werfen. Daher ist

$$Pr[\forall i \leq n : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } 2n-i\text{-ter Wurf}] =$$

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} p^{2m} (1-p)^{2(n-m)} = (2p^2 - 2p + 1)^n .$$

Bemerken Sie, dass durch Einsetzen von $p = \frac{1}{2}$ unser Ergebnis aus Teilaufgabe 4) bestätigt wird.