Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 6. Juli bis 10:15 abzugeben und wird am 6./7. Juli besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 8.1 **je 1P**

Seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathbb{E}X_i = 0.8$ und Standardabweichung $\sigma = 0.4$.
Seien $Y_n := X_1 + \cdots + X_n$ und $A_n := \frac{Y_n}{n}$.
Berechnen Sie folgende Grenzwerte.

(a) $\lim_{n\to\infty} \Pr[A_n = 0.8]$

(b) $\lim_{n\to\infty} \Pr[0.7n < Y_n < 0.9n]$

(c) $\lim_{n\to\infty} \Pr[Y_n < 0.8n + 0.8\sqrt{n}]$

(d) $\lim_{n\to\infty} \Pr[0.79 < A_n < 0.81]$

Aufgabe 8.2 **1P+2P+2P**

Ein Restaurant hat 400 Gäste am Tag. Im Durchschnitt bestellen 20% einen Nachtisch. Sei X die Zahl der Gäste, die Nachtisch bestellen. Wir interessieren uns für ein Intervall, das X mit W'keit 0.95 enthält.
Hinweis: Benutzen Sie in dieser Aufgabe den Zentralen Grenzwertsatz und rechnen Sie mit $\Phi(2) = 0.975$.

(a) Das gesuchte Intervall soll möglichst klein sein. Begründen Sie (informell), warum das Intervall symmetrisch um 80, also von der Form $[80 - y, 80 + y]$ sein sollte.

(b) Berechnen Sie y.

(c) Wie viele Gäste müsste das Restaurant haben, damit mit 95-prozentiger W'keit zwischen 19 und 21 Prozent der Gäste Nachtisch bestellen?

Aufgabe 8.3 **1P+1P+2P+1P+2P**

90% der Computerchips eines bestimmten Herstellers haben eine erwartete Lebensdauer von 150 Monaten, mit einer Standardabweichung von 50 Monaten. 10% der Chips weisen aber einen Materialfehler auf. Die fehlerhaften Chips halten im Mittel nur 20 Monate, mit einer Standardabweichung von 10 Monaten. Sie haben einen Chip von diesem Hersteller gekauft. Sei die Zufallsvariable X seine Lebensdauer in Monaten und seien „schlecht“ bzw. „gut“ die Ereignisse, dass der Chip den Materialfehler aufweist bzw. nicht aufweist.

(a) Zeigen Sie: $\Pr[X \geq 50] \geq 0.9 \cdot \Pr[X \geq 50 \mid \text{„gut“}]$.

(b) Benutzen Sie (a) und die Chebyshev-Ungleichung, um eine untere Schranke für $\Pr[X \geq 50]$ zu berechnen.

Setzen Sie im folgenden sowohl für schlechte als auch für gute Chips eine normalverteilte Lebensdauer voraus.

(c) Berechnen Sie $\Pr[X \geq 50]$.

(d) Nach genau 50 Monaten geht Ihr Chip kaputt. Sie interessieren sich für die W'keit, dass Sie einen fehlerhaften Chip erwischt haben. Ihr Übungspartner schlägt vor, dafür die bedingte W'keit $\Pr[\text{„schlecht“} \mid X = 50]$ zu berechnen. Wo liegt das Problem?

(e) Berechnen Sie $\Pr[\text{„schlecht“} \mid 50 - \varepsilon \leq X \leq 50 + \varepsilon]$ für kleine ε.

Hinweis: Benutzen Sie $\int_{50-\varepsilon}^{50+\varepsilon} f(x)\, dx \approx 2\varepsilon \cdot f(50)$ für kleine ε.

Aufgabe 8.4 **2P+2P**

Es seien $T_1, T_2, T_3, \ldots$ unabhängige und identisch verteilte ZV mit $T_i \sim \exp(\lambda)$ und $\lambda > 0$. Für $n \geq 1$ bezeichne S_n die Summe $\sum_{i=1}^n T_i$.

(a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass S_n die folgende Dichte besitzt:

$$f_{S_n}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

(b) Zeigen Sie nun, dass für die Verteilungsfunktion von S_n für $z \geq 0$ und $n \geq 2$ gilt:

$$F_{S_n}(z) = -\frac{\lambda^{n-1} z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} - F_{S_{n-1}}(z).$$

Geben Sie dann $F_{S_n}(z)$ in geschlossener Form an.

Hinweis: Sie dürfen verwenden, dass S_n und T_{n+1} unabhängig sind.