Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 3

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 08.05.2013 um 12:00

Aufgabe 3.1 **2P+2P+2P+2P**

Es sei $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine endliche Menge von Punkten im $\mathbb{R}^2$. *Notation*: $\vec{x}_i = (x_i, y_i)$.

$\Pr[]$ sei ein beliebiges W'keitsmaß auf Ω.

Die ZVen $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ projizieren ein Elementarereignis (Punkt) auf die jeweilige Koordinate, z.B. $Y(\vec{x}_i) = y_i$.

(a) Sei speziell $n = 4$ mit $\vec{x}_1 = (-1, 2)$, $\vec{x}_2 = (3, 2)$, $\vec{x}_3 = (-1, -2)$, $\vec{x}_4 = (1, -5)$ und $\Pr[\vec{x}_1] = 1/3$, $\Pr[\vec{x}_2] = 1/6$, $\Pr[\vec{x}_3] = 3/8$ und $\Pr[\vec{x}_4] = 1/8$.

(i) Bestimmen Sie die Dichten von X, Y und berechnen Sie $(\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$.

(ii) Sei $\vec{p} = (2, -2)$ und D die ZV, welche den euklidischen Abstand eines Elementarereignisses (Punktes) von $\vec{p}$ angibt.

Bestimmen Sie die Dichte von D und $\mathbb{E}[D^2]$.

(b) Sei nun $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ eine beliebige endliche Menge, $\Pr[]$ ein W'keitsmaß auf Ω und $\vec{p} \in \mathbb{R}^2$ beliebig. D gebe wieder den Abstand eines zufälligen Punktes von $\vec{p}$ an.

(i) Für welche Wahl von $\vec{p}$ ist $\mathbb{E}[D^2]$ minimal?

(ii) Wie lässt sich $\mathbb{E}[D^2]$ für dieses $\vec{p}$ mittels der Varianz darstellen?

Hinweis: Verwenden Sie $\mathbb{E}[Z] = \sum_{\omega \in \Omega} Z(\omega) \cdot \Pr[\omega]$ für eine beliebige ZV Z mit $\mathbb{E}[Z] < \infty$.

Aufgabe 3.2 **4P+8P**

Wir betrachten ein Turnier von 2^n Spielern bestehend aus n Runden, wobei in jeder Runde je zwei Spieler gegen einander antreten, und nur der Gewinner in die nächste Runde weiterkommt. Zu Beginn jeder Runde werden die Paarungen dabei rein zufällig bestimmt, jede mögliche Wahl sei gleich wahrscheinlich.

Den Spielern sind Nummern entsprechend ihrer Position in einer Rangliste zugeordnet, d.h. $[2^n]$ die Menge aller Teilnehmer, Spieler i ist schlechter als Spieler j genau dann, wenn $i > j$.

Die Partien einer Runde werden in einer festen Reihenfolge gespielt: Unter allen verbleibenden Partien wird stets die Partie mit dem schlechtesten Spieler als nächstes gespielt. Bei jeder Partie zweier Spieler gewinne der bessere der beiden stets mit W'keit $p \in (0, 1)$ – unabhängig von allen anderen Partien des Turniers.

(a) Es gelte $n = 2$.

Zeichnen Sie ein Baumdiagramm zu obigem mehrstufigen Experiment.

Bestimmen Sie dann folgende W'keiten in Abhängigkeit von p:

- Spieler 1 gewinnt.
- Spieler 1 spielt in der letzten Runde gegen Spieler 2.
- Spieler 1 spielt irgendwann gegen Spieler 2.

(b) Sei n beliebig:

(i) Wie viele Elementareignisse (Pfade) gibt es?

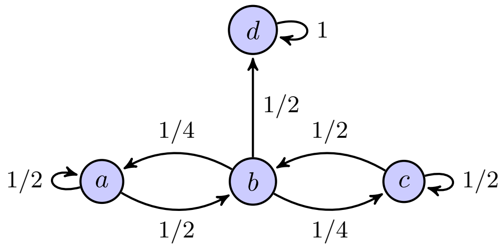
Hinweis: Stellen Sie jedes Elementarereignis als einen geeignet sortierten Turnierbaum dar.

(ii) Bestimmen Sie die W'keiten für die Ereignisse aus (a) für beliebiges n.

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 06.05.2013

Aufgabe 3.1

Wir betrachten das Experiment, das durch folgendes Markov-Diagramm beschrieben ist:



Die Ergebnismenge Ω sei die Menge aller endlichen Pfade von a nach d, die d genau einmal besuchen (also dort enden).

(a) Ω kann als Sprache über dem Alphabet $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ aufgefasst werden ($\Omega \subseteq \Sigma^*$).

Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten an, der genau Ω akzeptiert.

(b) Für $i \in \mathbb{N}$ sei Z_i die ZV mit $W_{Z_i} = \Sigma$, die angibt, in welchem Zustand man sich **nach** i Würfen befindet.

Falls d bereits in weniger als i Würfen erreicht wurde, gelte auch $Z_i = d$.

- Bestimmen Sie die Dichte von Z_1.
- Bestimmen Sie die Dichte von Z_2 mit Hilfe des Satzes der totalen W'keit.
- Setze
$$\vec{z}_k := \begin{pmatrix}\Pr[Z_k = a] & \Pr[Z_k = b] & \Pr[Z_k = c] & \Pr[Z_k = d]\end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie für $k \geq 0$:
$$\vec{z}_{k+1} = \vec{z}_k \cdot \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \\ 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
- Bestimmen Sie die Dichte von Z_2 unter der Bedingung $Z_3 = b$.
- Diagonalisieren Sie die obige Matrix und leiten Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\Pr[Z_k = d]$ her.

Aufgabe 3.2

Wir betrachten einen beliebigen diskreten W'keitsraum $(\Omega, \Pr[])$.

Für $A \subseteq \Omega$ ist I_A die Indikatorzufallsvariable mit $I_A(\omega) = 1$, falls $\omega \in A$, und $I_A(\omega) = 0$ sonst.

(a) Es seien $\{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$ unabhängige Ereignisse.

Zeigen Sie, dass die ZVn $\{I_{A_2} \cdot (1 - I_{A_3}), I_{\overline{A_1 \cup (A_4 \cap \overline{A_5})}}, I_{A_6}\}$ unabhängig sind.

(b) Seien X, Y, Z unabhängige ZVn mit Werten in $\mathbb{N}$. Weiterhin sei $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ und $g\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$.

Zeigen Sie, dass auch die ZVn $f(X)$ und $g(Y, Z)$ unabhängig sind.