Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 12
13. Juli 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 20. Juli 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Nachdem Sie auf Übungsblatt 10 zu viele Experimente mit Wolpertingern durchgeführt haben, fühlen Sie sich von diesen possierlichen Tierchen verfolgt. Sie sind davon überzeugt, dass eine Katastrophe passieren wird, falls Sie an zwei aufeinanderfolgenden Tagen einen Wolpertinger sehen. Angenommen Ihnen erscheint jeden Tag unabhängig und mit gleicher Warhscheinlichkeit $p > 0$ ein Wolpertinger.

1. Modellieren Sie das Szenario durch eine Markov-Kette.
2. Wie viele Tage erwarten Sie bis zur Katastrophe wenn Sie am Vortag keinen Wolperdinger gesehen haben?
3. Wenn Sie einen Wolpertinger sehen, aber noch kein katastrophales Ereignis eingetreten ist, haben Sie einen gestressten Tag. Wie hoch ist an einem solchen Tag die Wahrscheinlichkeit, einen weiteren gestressten Tag zu erleben?

Tutoraufgabe 2

Sei X_t mit $t \geq 0$ eine endliche Markov-Kette über der Zustandsmenge S mit einer stationären Verteilung π. Beweisen oder widerlegen Sie die Behauptung $\lim_{t\to\infty} p_{ij}^{(t)} = \pi_j$ mit $i, j \in S$ für ergodische Markov-Ketten, irreduzible Markov-Ketten und aperiodische Markov-Ketten.

Tutoraufgabe 3

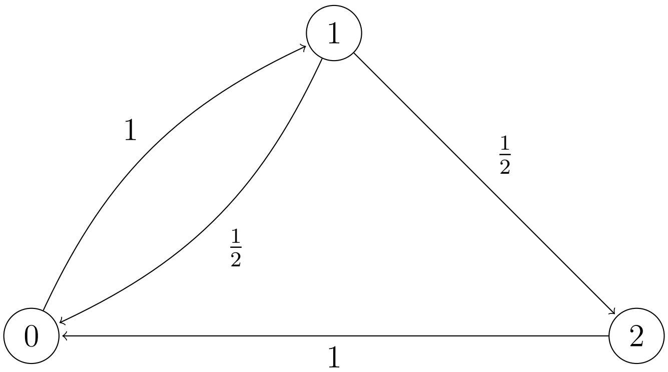
Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage. Handelt es sich bei X_t mit $t \geq 0$ um eine Markov-Kette über den Zuständen $S = \{0, \ldots, n\}$, so ist auch $X_t \bmod k$ eine Markov-Kette mit $R = \{0, \ldots, k-1\}$ Zuständen.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei X_i für $i \geq 0$ eine Familie von unabhängigen Zufallsvariablen, die jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Werte 1 und -1 annehmen. Des Weiteren sei $Y_t = (\sum_{i=0}^{t} X_i) \bmod 4$ mit $t \geq 0$ eine Markov-Kette über den Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm für Y_t und geben Sie mit kurzer Begründung an, ob es sich um eine ergodische Markov-Kette handelt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Berechnen Sie alle stationären Verteilungen π einer Markov-Kette mit dem folgendem Übergangsdiagramm.



Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wahr oder Falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Seien X und Y unabhängige standardnormalverteilte Zufallsvariablen, dann ist der Durchschnitt $\frac{X+Y}{2}$ ebenfalls standardnormalverteilt.

2. Die Zufallsvariablen X_1 bis X_n seien unabhängig und identisch verteilt mit Standardabweichung σ und Erwartungswert μ. Des Weiteren sei $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Zufallsvariable $Z_n = \frac{Y_n - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$ ist asymptotisch standardnormalverteilt.

3. Es existieren zwei kontinuierliche Dichtefunktionen $f(x)$ und $g(x)$, die keiner Gleichverteilung entsprechen, so dass $f(x) \cdot g(x)$ ebenfalls eine Dichtefunktion ist.

4. Die Exponentialverteilung ist die einzige kontinuierliche Verteilung mit Wertebereich in den positiven reellen Zahlen, die gedächtnislos ist.

5. Sind X, Y zwei unabhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen, dann gilt $\mathbb{E}\left[\frac{X}{Y}\right]$ ist gleich $\frac{\mathbb{E}[X]}{\mathbb{E}[Y]}$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wahr oder Falsch? Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Sei X eine Zufallsvariable mit Varianz σ^2 und sei $\bar{X}$ das Stichprobenmittel über n unabhängigen Stichprobenvariablen X_i, dann ist $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$ ein erwartungstreuer Schätzer für σ^2.

2. Das 0,5-Quantil der Standardnormalverteilung ist 0.
3. Für jede erwartungstreue Schätzvariable X ist der Bias gleich dem Erwartungswert von X.
4. Bei echten Alternativtests ist die Summe der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers erster Art und der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers zweiter Art stets 1.
5. Falls ein Maximum-Likelihood-Schätzwert existiert, so ist er eindeutig.