Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist nicht abzugeben und wird am 27./28. April besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 0.1 — 0P

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in [n]$. Bestimmen Sie die Mächtigkeit folgender Mengen:

(a) $A := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_i \neq s_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k\}$.

(b) $B := [n]^k$.

(c) $C := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < s_2 < \ldots < s_k\}$.

(d) $D := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k\}$.

Notation: Die natürlichen Zahlen beginnend mit 1 werden mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Weiter gelte $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $[k]$ die Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$. Falls A eine Menge ist und $k \in \mathbb{N}$, so bezeichnet A^k die Menge der k-Tupel über A.

Aufgabe 0.2 — 0P

Zeigen Sie:

(a) Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ sei $s_{k,l}(q) := \sum_{i=k}^{k+l} q^i$. Dann gilt:

$$s_{k,l}(q) = \frac{q^k - q^{k+l+1}}{1-q}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $s_{k,l}(q) - q \cdot s_{k,l}(q)$.

(b) Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $l \in \mathbb{N}$ sei $S_l(q) := \sum_{i=0}^{l} (i+1) q^i$. Dann gilt:

$$S_l(q) = \frac{1 - q^{l+2}}{(1-q)^2} - (l+2) \frac{q^{l+1}}{1-q}$$

Hinweis: Betrachten Sie $S_{l+1}(q) - q \cdot S_l(q)$.

(c) Es sei $q \in [0, 1)$. Dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty} (i+1) q^i = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Aufgabe 0.3 — 0P

In einem Fahrstuhl befinden sich 6 Personen. Der Fahrstuhl hält auf insgesamt 4 Stockwerken, wobei jeder Fahrgast auf einem der Stockwerke aussteigt und keine neuen Fahrgäste hinzusteigen.

(a) Wir unterscheiden nicht zwischen den Fahrgästen.

   i) Geben Sie eine formale Beschreibung der Menge, welche gerade alle möglichen Zuteilungen der Fahrgäste auf die Stockwerke enthält.

   ii) Wie viele Elemente enthält die Menge?

   iii) Wie viele Fälle gibt es, in denen genau 3 Fahrgäste im zweiten Stock aussteigen?

(b) Wir unterscheiden nun zwischen den Fahrgästen.

i) Beschreiben Sie wieder formal die Menge, die alle möglichen Zuteilungen der Fahrgäste auf die Stockwerke enthält.

ii) Bestimmen Sie wieder die Mächtigkeit der gesuchten Menge.

iii) Wie viele Fälle gibt es, in denen auf jedem Stockwerk mindestens ein Fahrgast aussteigt?

Aufgabe 0.4 **0P**

Beim Poker wird bekanntlich mit 52 Karten gespielt. Jede der Karten trägt dabei einen der 13 Kartenwerte $2 < 3 < \ldots < 10 < B < D < K < A$ und eine der vier Farben $\diamondsuit < \heartsuit < \spadesuit < \clubsuit$, wobei jede der 52 Kombinationen genau einmal vorkommt. Jede Karte ist damit durch ein Paar aus Kartenwert und Farbe beschrieben, z.B. $10\spadesuit$.

Eine *Hand* eines Spielers besteht aus genau fünf verschiedenen Karten, wobei folgende Kartenkombinationen unterschieden werden:

- Royal Flush: Die fünf Karten setzen sich aus den Kartenwerten $10, B, D, K, A$ zusammen, wobei alle fünf Karten dieselbe Farbe besitzen.
  Bsp.: $10\spadesuit, B\spadesuit, D\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit$.
- Straight Flush: Alle fünf Karten haben diesselbe Farbe, die Kartenwerte sind durchgehend, wobei auch $A, 2, 3, 4, 5$ erlaubt ist. Es handelt sich jedoch um keinen Royal Flush.
  Bsp.: $4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit$.
- Vierling: Vier Karten desselben Wertes.
  Bsp.: $3\clubsuit, 3\spadesuit, 3\heartsuit, 3\diamondsuit, 2\spadesuit$.
- Full House: Je drei bzw. zwei Karten desselben Wertes.
  Bsp.: $2\clubsuit, 2\spadesuit, 3\heartsuit, 3\spadesuit, 3\diamondsuit$.
- Flush: Alle fünf Karten haben dieselbe Farbe, bilden aber keinen Straight oder Royal Flush.
  Bsp.: $2\spadesuit, 5\spadesuit, 7\spadesuit, 9\spadesuit, A\spadesuit$.
- Straße: Fünf aufeinanderfolgende Kartenwerte, jedoch kein Flush. Auch hier ist $A, 2, 3, 4, 5$ zulässig.
  Bsp.: $4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, 8\heartsuit$.
- Drilling: Genau drei Karten desselben Wertes, jedoch kein Full House.
  Bsp.: $3\spadesuit, 3\heartsuit, 3\diamondsuit, 2\heartsuit, 5\spadesuit$.
- Zwei Paare: Zwei Kartenpaare desselben Wertes, jedoch kein Vierling oder Full House.
  Bsp.: $2\spadesuit, 2\heartsuit, A\clubsuit, A\diamondsuit, 3\clubsuit$.
- Ein Paar: Genau zwei Karten haben denselben Wert, es handelt sich jedoch um keine der vorangegangenen Kombinationen.
  Bsp.: $A\clubsuit, A\diamondsuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 7\heartsuit$.

Royal Flush ist dabei die Hand mit dem höchsten Wert, gefolgt von Straight Flush, usw.

Eine *Hand* kann als geordnetes 5-Tupel, also eine $(52, 5)$-Kombination ohne Wiederholung, beschrieben werden, da die Reihenfolge der einzelnen Karten eines Spielers irrelevant ist.

(a) Überprüfen Sie, dass die seltenere Hand den höheren Wert hat, d.h. wie viele Möglichkeiten gibt es für einen Royal Flush, für einen Straight Flush, etc?

(b) Beim *Texas Hold'Em* hat ein Spieler selbst zwei Karten, während fünf weitere Karten allen Spielern zur Verfügung stehen. Jeder Spieler kann sich dann aus den insgesamt jeweils sieben Karten die beste *Hand* heraussuchen, d.h. die fünf Karten, die für ihn die beste Kartenkombination bilden.

Bsp.: Sie haben die Karten $7\clubsuit, 9\spadesuit$ erhalten. Weiterhin stehen allen Spielern die Karten $5\heartsuit, 5\spadesuit, 6\diamondsuit, 8\spadesuit, 8\heartsuit$ zur Verfügung. Sie können hieraus ein Paar, Zwei Paare oder eine Straße bilden. Da die Straße den höchsten Wert von diesen drei Möglichkeiten besitzt, werden diese sieben Karten als Straße für Sie gewertet.

i) Bestimmen Sie für die *Texas Hold'Em*-Variante die Anzahl der Möglichkeiten für einen Royal Flush. Vergleich Sie auch die relativen Häufigkeiten für einen Royal Flush in der klassichen Variante mit fünf Karten und im Texas Hold'em.