Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 9
29. Juni 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Die Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie wird von 300 Studenten besucht, wobei jeder der Studenten seine wöchentlichen Hausaufgaben unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{10}$ zur Korrektur abgibt. Die Übungsleitung ist an der Anzahl der Hausaufgaben X interessiert, die in der aktuellen Woche korrigiert werden müssen.

1. Sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Beweisen Sie die Gleichung $-\Phi(-x) = \Phi(x) - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

2. Approximieren Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes ein möglichst kleines Intervall, das X mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ enthält.

Hinweis: Nutzen Sie die Abschätzung $\Phi(\sqrt{2}) \approx \frac{95}{100}$ für Ihre Rechnung.

Lösungsvorschlag

Wir zeigen zunächst die Gleichung $-\Phi(-x) = \Phi(x) - 1$. Nach Vorlesung ist $\Phi(x)$ definiert als $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp(-\frac{t^2}{2}) \mathrm{d}t$. Wir formen daher um und erhalten

$$\begin{aligned}
\Phi(x) - 1 &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t - 1 \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{x}^{\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{-x} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \mathrm{d}t \\
&= -\Phi(-x).
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt der Gleichungskette folgt aus der Beobachtung, dass es sich beim Integrand $\exp(-\frac{t^2}{2})$ um eine gerade Funktion handelt.
Für die zweite Teilaufgabe stellen wir zunächst fest, dass die Anzahl der Hausaufgaben X binomialverteilt ist mit Parametern $n = 300$ und $p = \frac{4}{10}$. Damit können wir sofort den Erwartungswert und die Varianz bestimmen, nämlich

$$\mathbb{E}[X] = 300 \cdot \frac{4}{10} = 120 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[X] = 300 \cdot \frac{4}{10} \cdot \left(1 - \frac{6}{10}\right) = 72$$

Gemäß des zentralen Grenzwertsatzes können wir X also durch eine Normalverteilung mit gleichem Erwartungswert und Varianz annähern. Da die Dichte einer Normalverteilung durch eine symmetrische Glockenkurve um den Erwartungswert beschrieben ist, muss unser gesuchtes Intervall, welches ja möglichst klein sein soll, ebenfalls symmetrisch zum Erwartungswert sein. Wir suchen also ein $y > 0$, so dass $\Pr[120 - y \leq X \leq 120 + y] = 0.9$ gilt. Durch Umformen erhalten wir nun

$$\Pr[120 - y \leq X \leq 120 + y] = \Pr\left[-\frac{y}{\sqrt{72}} \leq \frac{X - 120}{\sqrt{72}} \leq \frac{y}{\sqrt{72}}\right]$$

wobei $\frac{X-120}{\sqrt{72}}$ einer standardnormalverteilten Zufallsvariable entspricht. Folglich können wir mit Hilfe der Verteilungsfunktion Φ und dem Resultat aus der ersten Teilaufgabe abschätzen zu

$$\Pr[120 - y \leq X \leq 120 + y] \approx \Phi\left(\frac{y}{\sqrt{72}}\right) - \Phi\left(-\frac{y}{\sqrt{72}}\right) = 2\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{72}}\right) - 1.$$

Nachdem X mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ in unserem Intervall liegen soll, muss also gelten

$$\Phi\left(\frac{y}{\sqrt{72}}\right) \approx \frac{95}{100}.$$

Aus dem Hinweis der Angabe folgern wir unmittelbar, dass y den Wert 12 haben muss, da somit gilt

$$\frac{12}{\sqrt{72}} = \frac{12}{6\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

Folglich wählen wir für unser Intervall die Grenzen 108 und 132.

Tutoraufgabe 2

Sei X_1 bis X_n eine Familie von n unabhängigen standardnormalverteilten Zufallsvariablen und $f(x_1, \ldots, x_n)$ ihre gemeinsame Dichte.

1. Zeigen Sie, dass $f(x_1, \ldots, x_n)$ ausschließlich vom Abstand des Vektors $(x_1, \ldots, x_n)$ zum Ursprung abhängt.

2. Geben Sie ein Verfahren an, um mit einem Zufallszahlengenerator für normalverteilte Zufallsvariablen gleichverteilte Punkte auf der Oberfläche der n-dimensionalen Einheitskugel zu erzeugen. Ein formaler Beweis ist nicht erforderlich.

Lösungsvorschlag

Sei $(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ein beliebiger Punkt im n-dimensionalen Raum. Nachdem unsere Zufallsvariablen unabhängig sind gilt

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_{X_i}(x_i) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x_i^2}{2}\right) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}\right).$$

Betrachten wir einen weiteren Punkt $(y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, mit dem selben Abstand zum Ursprung wie $(x_1, \ldots, x_n)$, dann gilt $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_2 = \|(y_1, \ldots, y_n)\|_2$ und folglich auch $\sum_{i=1}^n x_i^2 = \sum_{i=1}^n y_i^2$. Insgesamt bedeutet das

$$f(x_1, \ldots, x_n) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{2}\right) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^n y_i^2}{2}\right) = f(y_1, \ldots, y_n),$$

was die erste Teilaufgabe beweist. Basierend auf dieser Beobachtung entwickeln wir nun das folgende Verfahren für die Erzeugung eines zufälligen Punktes auf der Kugeloberfläche. Zunächst werden mithilfe des Zufallszahlengenerators n unabhängige, zufällige Zahlen z_1 bis z_n generiert und zu einem n-dimensionalen Punkt $(z_1, \dots, z_n)$ zusammengefasst. Der Rückgabewert ist dann der normierte Punkt

$$\frac{(z_1, \dots, z_n)}{\|(z_1, \dots, z_n)\|_2}.$$

Wir begründen nun kurz informell warum dieses Verfahren einer Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche entspricht. Seien x und y zwei beliebige Punkte auf der Kugeloberfläche. Durch unsere Konstruktion werden exakt die Punkte auf x projiziert, die sich auf dem Strahl $\{cx \mid c > 0\}$ befinden. Das gleiche gilt auch für y und $\{cy \mid c > 0\}$. Des Weiteren wissen wir aus der ersten Teilaufgabe bereits, dass cx und cy für jedes Skalar $c > 0$ die gleiche Dichte haben. Insgesamt muss also auch die Dichte von x und y gleich sein, was bedeutet, dass eine Gleichverteilung auf der Kugeloberfläche vorliegt.

Tutoraufgabe 3

Zwei Mannschaften a und b treten bei einem Fußballspiel gegeneinander an. Die zeitlichen Abstände zwischen den Toren, die Mannschaft a erzielt, sind unabhängig expontentialverteilt mit Parameter $\lambda = \frac{1}{10}$ Minuten. Für Mannschaft b sind die Zeitabstände ebenfalls unabhängig exponentialverteilt, diesmal mit Parameter $\kappa = \frac{1}{20}$ Minuten.

1. Berechnen Sie den erwarteten Zeitpunkt des ersten Tores unter der Annahme, dass a und b unabhängig voneinander Ihre Tore schießen.

2. Leider haben Sie die ersten t Minuten des Spiels verpasst. Bestimmen Sie in Abhängigkeit von t die erwartete Anzahl an Toren, die in Ihrer Abwesenheit geschossen wurden.

3. Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung entspricht die Zeitspanne, die Sie ab t warten müssen, bis ein Spieler aus Mannschaft a das nächste Tor schießt?

Lösungsvorschlag

Sei X die Zeit die vergeht, bis das erste Tor fällt. Es handelt sich hierbei also um das Minimum zweiter unabhängiger, exponentialverteilter Zufallsvariablen mit Parametern λ bzw. κ. Nach Vorlesung ist X exponentialverteilt mit Parameter $\kappa + \lambda = \frac{3}{20}$ und der Erwartungswert ist demnach

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\kappa + \lambda} = \frac{20}{3} \approx 6{,}66667.$$

Bei der zweiten Aufgabe handelt es sich um zwei Poisson-Prozesse. Wir bezeichnen daher die Anzahl der Tore von Mannschaft a, die bis zum Zeitpunkt t erzielt wurden, mit $N(t)$ und die von Mannschaft b mit $M(t)$. Aus der Vorlesung wissen wir, dass $N(t)$ und $M(t)$ Poisson-verteilt sind mit Parameter $t\lambda$ bzw. $t\kappa$ und es gilt

$$\mathbb{E}[N(t)] = t\lambda = \frac{t}{10} \quad \text{bzw.} \quad \mathbb{E}[M(t)] = t\kappa = \frac{t}{20}.$$

Aus der Linearität des Erwartungswertes ergibt sich folglich eine Gesamtanzahl von

$$\mathbb{E}[N(t) + M(t)] = \frac{t}{10} + \frac{t}{20} = \frac{3t}{20}.$$

Für die dritte Aufgabe nehmen wir an, dass das letzte Tor der Mannschaft a zum Zeitpunkt $s < t$ gefallen ist. Ab s ist die Zeit bis zum nächsten Tor von a laut Angabe exponentialverteilt mit Parameter λ. Da allerdings bis t noch kein weiteres Tor für a gefallen ist, gilt aufgrund der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung, dass auch die Zeit bis zum nächsten Tor gemessen ab t exponentialverteilt ist mit Parameter λ.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Im Folgenden betrachten wir die Verteilung der Rundungsreste von kontinuierlichen Zufallsvariablen. Sei hierfür X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(x)$ und Y definiert als $X - \lfloor X \rfloor$.

1. Bestimmen Sie die Dichtefunktion von Y in Abhängigkeit von $f_X(x)$.

2. Angenommen X ist exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$. Geben Sie die Dichtefunktion von Y explizit an.

Hinweise: Nutzen Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y \leq x, \lfloor X \rfloor = i]$ für $i \in \mathbb{Z}$ in der ersten Teilaufgabe.

Lösungsvorschlag

Zunächst stellen wir fest, dass die Zufallsvariable Y ausschließlich Werte zwischen 0 und 1 annehmen kann. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y \leq x]$ ist also 0 für $x < 0$ und 1 für $x \geq 1$, was wiederum bedeutet, dass die Dichte von Y an diesen Stellen 0 ist. Im Folgenden betrachten wir daher ausschließlich den Bereich $0 \leq x < 1$. Dazu nutzen wir dem Hinweis aus der Angabe und bestimmen die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y \leq x, \lfloor X \rfloor = i]$. Man beachte, dass $Y \leq x$ und $\lfloor X \rfloor = i$ genau dann erfüllt ist, wenn X ein Wert zwischen i und $i + x$ annimmt. Es gilt also

$$\Pr[Y \leq x, \lfloor X \rfloor = i] = \Pr[X - \lfloor X \rfloor \leq x, \lfloor X \rfloor = i] = \Pr[i \leq X \leq i + x] = \int_i^{i+x} f_X(t)dt.$$

Da es sich für verschiedene i um disjunkte Ereignisse handelt und der abgerundete Wert von X stets eine ganze Zahl ist gilt außerdem

$$F_Y(x) = \Pr[Y \leq x] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Pr[Y \leq x, \lfloor X \rfloor = i] = \sum_{i \in \mathbb{Z}} \int_i^{i+x} f_X(t)\mathrm{d}t.$$

Leiten wir nun nach x ab, so erhalten wir die gesuchte Dichtefunktion

$$f_Y(x) = F'_Y(x) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (F'_X(i + x) - F'_X(i)) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} (F'_X(i + x) - 0) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} f_X(i + x).$$

Nehmen wir nun an, dass X mit Parameter λ exponentialverteilt ist. Setzen wir die entsprechende Dichte von X in das Ergebnis der ersten Teilaufgabe ein, so erhalten wir

$$f_Y(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda(x+i)}.$$

Man beachte, dass wir lediglich über alle nicht negativen i aufsummieren. Der Grund hierfür ist, dass die Dichte einer exponentialverteilten Zufallsvaraible 0 ist für alle $x < 0$. Durch weiteres Umformen können wir unseren Term in eine geometrischen Reihe überführen und erhalten

$$\lambda e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{\infty} e^{-\lambda i} = \lambda e^{-\lambda x} \sum_{i=0}^{\infty} (e^{-\lambda})^i = \frac{\lambda e^{-\lambda x}}{1 - e^{-\lambda}}.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Eine Übungsgruppe für Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie besteht aus 10 Studenten, die allesamt sehr müde sind. Die Dauer bis zum Einschlafen eines einzelnen Studenten sei exponentialverteilt und unabhängig von den anderen Teilnehmern. Im Mittel kann sich jeder Studenten bis zur Hälfte der Übungsstunde wachhalten.

1. Berechnen Sie Wahrscheinlichkeit, dass nach der Hälfte der Übungsstunde noch alle Studenten wach sind.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit schlafen mindestens die Hälfte der Studenten während der Übungsstunde ein?

3. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz für die Anzahl der schlafenden Studenten am Ende der Übungsstunde.

Lösungsvorschlag

Sei X_1 bis X_{10} eine Familie von unabhängigen exponentialverteilten Zufallsvariablen mit Parameter $\lambda = 2$. Die Wahrscheinlichkeit, dass der i-te Student zur Hälfte der Übungsstunde noch wach ist beträgt

$$\Pr\left[X_i > \frac{1}{2}\right] = 1 - F_{X_i}\left(\frac{1}{2}\right) = 1 - (1 - e^{-2\cdot\frac{1}{2}}) = \frac{1}{e} \approx 0{,}36787.$$

Nachdem die Studenten Unabhängig von einander Einschlafen, ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Studenten nach der Hälfte der Übung noch wach sind somit

$$\left(\frac{1}{e}\right)^{10} \approx 0{,}00005.$$

Im Gegensatz dazu ist die Wahrscheinlichkeit, dass ein Student am Ende der Tutorübung eingeschlafen ist genau

$$\Pr[X_i \leq 1] = F_{X_i}(1) = 1 - e^{-2} \approx 0{,}86466.$$

Wir definieren nun die diskrete Zufallsvariable Y als Anzahl der Studenten, die während der Übungsstunde einschlafen. Bei Y handelt es sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parameter $n = 10$ und $p = 1 - e^{-2}$. Somit berechnet sich die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens die Hälfte der Studenten einschläft wie folgt

$$\Pr[Y \geq 5] = \sum_{i=5}^{10} \Pr[Y = i] = \sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} \cdot (1 - e^{-2})^i \cdot (e^{-2})^{10-i} \approx 0{,}99921.$$

Da Y binomialverteilt ist, könne wir außerdem unmittelbar den Erwartungswert und die Varianz angeben

$$\mathbb{E}[Y] = 10 \cdot (1 - e^{-2}) \approx 8{,}64665 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[Y] = 10 \cdot (1 - e^{-2}) \cdot e^{-2} \approx 1{,}17020$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten ein zufälliges Polynom $X \cdot x^2 + Y \cdot x + Z$, dessen Koeffizienten X, Y und Z unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariablen auf dem Interval $[-1, 1]$ sind. Mit welcher Wahrscheinlichkeit besitzt das Polynom keine reelle Nullstelle?

Lösungsvorschlag

Ein Polynom zweiten Grades besitzt genau dann keine reelle Nullstelle, wenn seine Diskriminante kleiner als 0 ist. Es muss also gelten

$$Y^2 - 4XZ < 0.$$

Sollte eine der beiden Zufallsvariablen X und Z echt kleiner als 0 sein, während die andere echt größer als 0 ist, kann diese Ungleichung offensichtlich nicht erfüllt sein. Wir sind also lediglich and den Fällen interessiert, bei denen X und Z das gleich Vorzeichne haben und können somit umformen zu

$$Y^2 - 4XZ < 0 \iff Y^2 < 4XZ \iff |Y| < \sqrt{4XZ} \iff -\sqrt{4XZ} < Y < \sqrt{4XZ}.$$

Für den Fall, dass X und Z beide kleiner 0 sind, ergibt sich hieraus die folgende Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[X > 0, Z > 0, -\sqrt{4XZ} < Y < \sqrt{4XZ}] = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\sqrt{4xz}}^{\sqrt{4xz}} f_{X,Y,Z}(x, y, z) \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

Nachdem X, Y und Z unabhängig sind, lässt sich ihre gemeinsame Dicht als Produkt der Randdichten auffassen, wobei jede Randdichte den konstant Wert $\frac{1}{2}$ auf dem Interval $[-1, 1]$ annimmt und anderenfalls 0 ist. Also können wir weiter umformen zu

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_{-\min\{\sqrt{4xz},1\}}^{\min\{\sqrt{4xz},1\}} \left(\frac{1}{2}\right)^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \left(\frac{1}{2}\right)^3 \int_0^1 \int_0^1 2\min\{\sqrt{4xz}, 1\}\mathrm{d}z\mathrm{d}x.$$

Um das Minimum aufzulösen machen wir die folgende Fallunterscheidung. Damit $\sqrt{4xz}$ kleiner als 1 ist, muss z kleiner $\frac{1}{4x}$ sein. Anderseits kann z höchsten 1 sein und somit folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^3 \int_0^1 \int_0^{\min\{\frac{1}{4x},1\}} 2(\sqrt{4xz})\mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \frac{1}{2} \int_0^1 \int_0^{\min\{\frac{1}{4x},1\}} (\sqrt{xz})\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{xz^3}\right]_0^{\min\{\frac{1}{4x},1\}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{3} \int_0^1 \sqrt{x \cdot \min\left\{\frac{1}{4x}, 1\right\}^3} \mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

Da wir nun erneut ein Minimum vor uns haben, machen wir eine weitere Fallunterscheidung. Ist x größer als $\frac{1}{4}$, so ist $\frac{1}{4x}$ kleiner als 1 und es gilt

$$\frac{1}{3} \int_{\frac{1}{4}}^1 \sqrt{x \cdot \left(\frac{1}{4x}\right)^3} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int_{\frac{1}{4}}^1 \frac{1}{8x} \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{\ln(x)}{8}\right]_{\frac{1}{4}}^1 = \frac{\ln(4)}{24}.$$

Ist x hingegen kleiner als $\frac{1}{4}$, so wertet sich das Integral aus zu

$$\frac{1}{3}\int_0^{\frac{1}{4}} \sqrt{x \cdot 1^3}\mathrm{d}x = \frac{1}{3} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3}\right]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{1}{36}.$$

Insgesamt gilt also

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3 \int_0^1 \int_0^{\min\{\frac{1}{4x},1\}} 2(\sqrt{4xz})\mathrm{d}z\mathrm{d}x = \frac{\ln(4)}{24} + \frac{1}{36}.$$

Kommen wir nun zurück zum Fall, dass $\sqrt{4xz}$ größer als 1 ist. Dazu muss einerseits x größer als $\frac{1}{4}$ sein und gleichzeitig y größer als $\frac{1}{4x}$. Wir setzen also die entsprechenden Integrationsgrenzen ein und rechnen

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2}\right)^3 \int_{\frac{1}{4}}^1 \int_{\frac{1}{4x}}^1 2\mathrm{d}z\mathrm{d}x &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int_{\frac{1}{4}}^1 [z]_{\frac{1}{4x}}^1 \,\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \int_{\frac{1}{4}}^1 1 - \frac{1}{4x}\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left[x - \frac{\ln(x)}{4}\right]_{\frac{1}{4}}^1 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(1 - \left(\frac{1}{4} + \frac{\ln(4)}{4}\right)\right) \\
&= \frac{3}{16} - \frac{\ln(4)}{16}.
\end{aligned}$$

Zusammen mit unseren bisherigen Resultaten ist die Wahrscheinlichkeit keine reellen Nullstellen zu haben für positive X und Z also

$$\left(\frac{\ln(4)}{24} + \frac{1}{36}\right) + \left(\frac{3}{16} - \frac{\ln(4)}{16}\right) = \frac{31}{144} - \frac{\ln(4)}{48}.$$

Sind X und Z negativ, so haben wir aus Gründen der Symmetrie die gleiche Wahrscheinlichkeit. Alles in Allem ist die Wahrscheinlichkeit keine reellen Nullstellen zu haben demnach

$$2 \cdot \left(\frac{31}{144} - \frac{\ln(4)}{48}\right) = \frac{31}{72} - \frac{\ln(4)}{24} \approx 0{,}37279.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien V, W, X, Y, Z unabhängige Zufallsvariablen, so dass V und W exponentialverteilt sind den mit Parameter $\lambda_1 = \frac{1}{5}$ bzw. $\lambda_2 = \frac{3}{40}$. Des Weiteren sei X gleichverteilt auf dem Intervall $[-\pi, 3 - \pi]$ und Y normalverteilt mit Erwartungswert -4 und Varianz 2. Bei Z handelt es sich um eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Bestimmen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[\mathrm{Var}[X] \cdot \min\{V + X, W + X\} \cdot (Y + 2Z) \cdot (\mathrm{Var}[3Y - 2Z])^{-1}]$ und dokumentieren Sie Ihre Rechenschritte geeignet.

Hinweis: Für diese Aufgabe müssen Sie keine Dichte oder Verteilung explizit herleiten.

Lösungsvorschlag

Zunächst stellen wir fest, dass die Varianz von X gegeben ist durch

$$\mathrm{Var}[X] = \frac{(-\pi - (3-\pi))^2}{12} = \frac{3}{4}$$

und die Varianz von $(\mathrm{Var}[3Y - 2Z])^{-1}$ durch

$$\mathrm{Var}[3Y - 2Z] = 3^2 \cdot 2 + (-2)^2 \cdot 1 = 22.$$

Außerdem können wir das Minimum $\min\{V + X, W + X\}$ umformen zu $X + \min\{V, W\}$. Der gesuchte Erwartungswert vereinfacht sich also zu

$$\mathbb{E}\left[\frac{3}{88} \cdot (X + \min\{V, W\}) \cdot (Y + 2Z)\right]$$

Nachdem unsere Zufallsvariablen unabhängig sind können wir außerdem die Liniarität und Multiplikativität des Erwartungswertes ausnutzen und erhalten

$$\frac{3}{88} \cdot \mathbb{E}[X + \min\{V, W\}] \cdot \mathbb{E}[Y + 2Z] = \frac{3}{88} \cdot (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[\min\{V, W\}]) \cdot (\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[2Z]).$$

Der Erwartungswert von X ist nunmehr gegeben durch

$$\mathbb{E}[X] = \frac{-\pi + (3-\pi)}{2} = \frac{3}{2} - \pi.$$

Nachdem V und W exponentialverteilt sind, können wir auch das erwartete Minimum zwischen diesen beiden Zufallsvariablen leicht bestimmen. Es handelt sich hierbei um

$$\mathbb{E}[\min\{V, W\}] = \frac{1}{\frac{1}{5} + \frac{3}{40}} = \frac{40}{11}.$$

Die Erwartungswerte von Y und Z sind bereits aus der Angabe bekannt. Insgesamt beträgt unser gesuchter Erwartungswert also

$$\frac{3}{88} \cdot \left(\frac{3}{2} - \pi + \frac{40}{11}\right) \cdot (-4 + 0) = \frac{3\pi}{22} - \frac{339}{484} \approx -0{,}27201.$$