SS 2013

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

17. Mai 2013

ZÜ V

Übersicht:

1. Termine
2. Thema: Verteilungen
3. Tipps zu HA Blatt 5

1. Termine

Keine Zentralübungen am 24.5.13 und am 31.5.13!

2. Thema: Verteilungen

Ziel: Den Zusammenhang unter gewissen Verteilungen herstellen.

2.1 Welche Verteilungen betrachten wir?

Diskrete Verteilungen, die eng mit Bernoulli-verteilten Zufallsvariablen zusammenhängen:

- Geometrische Verteilung Geo(p): $\quad f_{Z_1}(z) = pq^{z-1}.$
- Negativ-Binomial-Verteilung NegativBin(x, p):
$$f_{Z_2}(z) = \binom{z-1}{x-1} p^x q^{z-x}$$
- Binomialverteilung Bin(z, p): $\quad f_{X_1}(x) = \binom{z}{x} p^x q^{z-x}.$
- Poisson-Verteilung Po(λ): $\quad f_{X_2}(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}.$

Dabei gilt für die Argumente der Dichtefunktionen entsprechend $z \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ bzw. $z \in (\mathbb{N} \setminus \{0\})$ bzw. $x \in \mathbb{N}_0$ bzw. $x \in \mathbb{N}_0$. Für alle übrigen Argumente aus $\mathbb{R}$ werden die Dichten gleich 0 gesetzt.

2.2 Das Konzept der Wiederholung bei Zufallsvariablen

Viele wahrscheinlichkeitstheoretische Experimente werden durch unabhängige Wiederholung eines bestimmten Experiments definiert.

Dem entspricht die Betrachtung einer (unendlichen) Folge von unabhängigen Zufallsvariablen
$I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,n}, \ldots$, die wie folgt definiert werden:

Definition:

Sei I_p eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable über einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ wird durch die unabhängige n-te Wiederholung der Auswertung von I_p eine Zufallsvariable $I_{p,n}$ definiert.

„Aussage":

Insgesamt erhält man ein unabhängiges System von unendlich vielen Zufallsvariablen mit gleicher Verteilung wie I_p

$$I_{p,1}, I_{p,2}, \ \ldots \ , I_{p,n}, \ \ldots \quad .$$

Kritik der Definition bzw. „Aussage“ zur Unabhängigkeit:

1. Systeme von „unabhängigen“ Zufallsvariablen setzen einen gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum voraus.

   Aber!

   Auf $(\Omega, \Pr)$ sind alle $I_{p,i}$ identisch und insbesondere abhängig.

   Dies kann also nicht! der geforderte gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum sein.

2. Man kann sogar nachweisen, dass kein! diskreter gemeinsamer Wahrscheinlichkeitsraum existiert, der in sinnvoller Weise alle notwendigen Forderungen erfüllt!

Was ist zu tun?

1. Lösungsmöglichkeit:

Man betrachtet stets nur endliche Abschnitte der Folge und kann dann für diese Folge den W'keitsraum als endliches Produkt der Räume für die beteiligten Bernoulli-verteilten Variablen.
In diesem Fall kommt man mit der bisherigen Definition der W'keitsräume aus.

2. Lösungsmöglichkeit:

Wir definieren ein neues Konzept für Wahrscheinlichkeitsräume nach Kolmogorov, in dem es keine atomaren Ereignisse gibt.

Pragmatisches Vorgehen:

Wir können die Frage nach einem gemeinsamen Definitionsbereich der Variablen einer unendlichen Folge zurückstellen.

Für Interessierte diskutieren wir kurz die zweite Lösungsmöglichkeit in einem späteren Abschnitt.

2.3 Gemeinsame Herleitung der Verteilungen

Wir betrachten die unbegrenzte (∞-fache) Wiederholung eines Experiments mit den Ereignissen eines Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \Pr)$ und der Bewertung der Ereignisse durch I_p

wie folgt:

Bei unbegrenzter Wiederholung des Experiments erhalten wir eine Folge von Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ mit Bewertungen $I_p(\omega_1), I_p(\omega_2), \ldots$.

Dann können wir eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots$ definieren durch Abbildungen $I_{p,i} : \Omega^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$ mit

$$I_{p,i}((\omega_1, \omega_2, \ldots)) = I_p(\omega_i)\,.$$

Sei $Y = I_{p,1}, I_{p,2}, \ \ldots \ , I_{p,z}, \ \ldots \ .$

Sei $A_{x,z}$ die Menge aller Folgen Y aus $\Omega^{\mathbb{N}}$ mit der Eigenschaft, dass in der Folge Y
an z-ter Stelle das x-te Mal eine 1 aufgetreten ist.

In der Sprache von Wahrscheinlichkeitsräumen würden wir sagen:
$A_{x,z}$ ist das Ereignis über $\Omega^{\mathbb{N}}$, dass in der Folge Y
an z-ter Stelle das x-te Mal eine 1 aufgetreten ist.

In jedem sinnvoll zu Grunde gelegten W'keitsraum über endlichen Abschnitten der Folgen (sowie auch in später eingeführten W'keitsräumen nach Kolmogorov) gilt dann

$$Pr[A_{x,z}] = \binom{z-1}{x-1} p^x q^{z-x} \, .$$

Bemerkung: Die Mengen (Ereignisse) $A_{x,z}$ sind i.A. nicht disjunkt.

Matrix der negativ binomialverteilten Wahrscheinlichkeiten $Pr[A_{x,z}]$:

$z =$ / $x =$	1	2	3	4	$\ldots$	k
1	p	$\binom{1}{0}pq$	$\binom{2}{0}pq^2$	$\binom{3}{0}pq^3$	$\ldots$	
2	0	p^2	$\binom{2}{1}p^2q$	$\binom{3}{1}p^2q^2$	$\ldots$	
3	0	0	p^3	$\binom{3}{2}p^3q$	$\ldots$	
4	0	0	0	p^4	$\ldots$	
$\vdots$					$\vdots$	
i					$\ldots$	$\binom{k-1}{i-1}p^iq^{k-i}$

Spaltensumme:

Für alle $k \geq 1$ gilt

$$\sum_{i=1}^{\infty} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \;=\; p\,.$$

Wenn wir X_k definieren als Anzahl der Einsen im Vektor $(I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,k-1})$ unter der Bedingung, dass $I_{p,k} = 1$ gilt, dann ist $X_k - 1$ binomialverteilt.

Zeilensumme:

Für alle $i \geq 1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} \binom{k-1}{i-1} p^i q^{k-i} \;=\; 1\,.$$

Wenn wir Z_i definieren als das minimale k, so dass der Vektor $(I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,k})$ genau i Einsen enthält, dann ist Z_i negativ binomialverteilt.

Für $i = 1$ ergibt sich die geometrische Verteilung und

$$\sum_{k=1}^{\infty} pq^{k-1} \;=\; 1\,.$$

Aus der Folge $Y = I_{p,1}, I_{p,2}, \ \dots \ , I_{p,z}, \ \dots$ kann man bei festgehaltener Zeile i auch i geometrisch verteilte Zufallsvariable X_j definieren. Dabei sei X_j die Anzahl der Schritte ausgehend von der $(j-1)$ten Eins bis zum Auftreten der $j$ten Eins in der Folge Y.

Dann gilt $Z_i = \sum_{j=1}^{i} X_j$.

Beachte: Z_i ist also eine Summe von geometrisch verteilten Zufallsvariablen X_j, mit der Konsequenz, dass man den Erwartungswert von Z_i als Summe von Erwartungswerten der geometrisch verteilten Zufallsvariablen X_j berechnen kann.

2.4 Einordnung der Poisson Verteilungen

Man kann die Matrix der Binomialverteilungen für verschiedene p betrachten und dabei die Zeile festhalten.

Sei i also eine gegebene Zeilennummer.

Dann gilt die folgende Beobachtung:

Falls man eine Folge von p_k's betrachtet mit $p_k = \frac{p}{k}$, dann findet der folgende Grenzübergang statt.

$$\lim_{k\to\infty} \binom{k}{i} p_k^i q_k^{k-i} = \frac{e^{-p} p^i}{i!} \, .$$

Entsprechend konvergieren die Zeileneinträge der Matrizes für p_k mit höher werdender Spaltennummer gegen den Wert

$$p_k \cdot \frac{e^{-p} p^{i-1}}{(i-1)!}\,.$$

Insofern steht die Poisson Verteilung in Zusammenhang mit den Matrizes der Binomialverteilung und insbesondere (bekanntlich) mit der Binomialverteilung.

2.5 Gemeinsamer W'keitsraum bei Wiederholung von Zufallsvariablen

Dieser Abschnitt kann bzw. sollte übersprungen werden!

Er ist gedacht für Interessierte, die schon jetzt einen Blick voraus werfen wollen.

1. Schritt

Wir betrachten die einfache Wiederholung (= 2-fache Ausführung) eines Experiments mit den Ereignissen des Wahrscheinlichkeitsraumes $\langle \Omega, \Pr \rangle$ und der Bewertung der Ereignisse durch I_p

wie folgt:

Bei 2-facher Ausführung des Experiments erhalten wir 2 Ergebnisse ω_1 und ω_2 mit Bewertungen $I_p(\omega_1)$ und $I_p(\omega_2)$.

Dann können wir 2 neue Zufallsvariable $I_{p,1}$ und $I_{p,2}$ definieren als Abbildungen $\Omega \times \Omega \to \{0, 1\}$ mit

$$I_{p,1}((\omega_1, \omega_2)) = I_p(\omega_1) \quad \text{bzw.} \quad I_{p,2}((\omega_1, \omega_2)) = I_p(\omega_2)\,.$$

Die Abbildungen $I_{p,1}$ und $I_{p,2}$ stellen die erste bzw. zweite Wiederholung eines Experiments aus $\langle\Omega, \Pr\rangle$ dar, sind aber nun

Zufallsvariable über dem gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsraum

$$\langle\Omega \times \Omega, \Pr_{2\times}\rangle \quad \text{mit} \quad \Pr_{2\times}[(\omega_1, \omega_2)] = \Pr[\omega_1] \cdot \Pr[\omega_2] \, .$$

$I_{p,1}$ und $I_{p,2}$ sind
unabhängig und gleichverteilt!

2. Schritt

Wir betrachten die ∞-fache Wiederholung eines Experiments mit den Ereignissen des Wahrscheinlichkeitsraumes $\langle \Omega, \Pr \rangle$ und der Bewertung der Ereignisse durch I_p

wie folgt:

Bei ∞-facher Ausführung des Experiments erhalten wir eine Folge von Ergebnissen $\omega_1, \omega_2, \ldots$ mit Bewertungen $I_p(\omega_1), I_p(\omega_2), \ldots$.

Dann können wir eine unendliche Folge von Zufallsvariablen $I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots$ definieren als Abbildungen $I_{p,i} : \Omega^{\mathbb{N}} \to \{0, 1\}$ mit

$$I_{p,i}((\omega_1, \omega_2, \ldots)) = I_p(\omega_i)\,.$$

Die Abbildungen $I_{p,i}$ stellen die i-te Wiederholung eines Experiments aus $\langle\Omega, \Pr\rangle$ dar und sind aber nun

Abbildungen über dem gemeinsamen Ergebnisraum $\Omega^{\mathbb{N}}$.

Sind $I_{p,i}$ unabhängige und gleichverteilte Zufallsvariable?

Alle Abbildungen der Folge

$$Y = I_{p,1}, I_{p,2}, \ \dots \ , \ I_{p,n}, \ \dots$$

sind definiert über demselben Raum $\Omega^{\mathbb{N}}$.

Können wir einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum
$W = \langle \Omega^{\mathbb{N}}, \Pr_{\mathbb{N}} \rangle$ definieren, so dass
Y eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen ist **?**

Nein.

Aber!

Es gibt einen Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraum

$$W = \langle \Omega^{\mathbb{N}}, \mathcal{A}, \mathrm{Pr}_{\mathbb{N}} \rangle \,,$$

so dass Y eine Folge von unabhängigen Zufallsvariablen ist.

Dabei ist

$\mathcal{A}$ diejenige Menge von Ereignissen über $\Omega^{\mathbb{N}}$, denen eine Wahrscheinlichkeit zugeordnet werden kann.

$\mathcal{A}$ bildet eine sogenannte σ-Algebra von Ereignissen.

Bemerkung:
Die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie handelt von Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsräumen.

Definition eines passenden Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraumes.

Man definiert für alle $e \in \Omega$ das Ereignis

$$A_{i,e} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}\,;\, \omega_i = e\} \subseteq \Omega^{\mathbb{N}}$$

mit der Bedeutung, dass die i-te Wiederholung des Experiments in $\langle \Omega, \Pr \rangle$ genau $e \in \Omega$ ergibt.

Die Wahrscheinlichkeit von $A_{i,e}$ wird wie folgt definiert.

$$\Pr[A_{i,e}] = \Pr[e]\,.$$

Definition der Ereignisalgebra $\mathcal{A}$:

$\mathcal{A}$ ist die Menge aller Mengen, die durch beliebige abzählbar viele Durchschnitte und Vereinigungen von Mengen $A_{i,e}$ gebildet werden können.

Definition des Wahrscheinlichkeitsmaßes $\Pr$:

Die Wahrscheinlichkeiten werden durch die Summe der Wahrscheinlichkeit von abzählbar vielen disjunkten Ereignissen gebildet.

Achtung!

- Es gilt nicht mehr die Diskretheitsbedingung,
  dass jede Wahrscheinlichkeit
  als Summe von Wahrscheinlichkeiten von
  Elementarereignissen ausgedrückt werden kann.
- Es gilt nun die Unabhängigkeit des Systems der
  Zufallsvariablen $I_{p,1}, I_{p,2}, \ldots, I_{p,n}, \ldots$,
  d.h., alle Wiederholungen werden unabhängig voneinander
  ausgeführt.

3. Tipps für HA von Blatt 5

Die folgenden Hinweise und Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 5.1:

(a) Beachten Sie: Es gilt $c < \min\{a, b\}$ genau dann, wenn $c < a \land c < b$ gilt.

(b) Welche Wahrscheinlichkeit hat ein Ereignis $c < X$, wenn X geometrisch verteilt ist mit Erfolgswahrscheinlichkeit p?

Wie kann man die Unabhängigkeit von Ereignissen zur Berechnung der W'keit von Durchschnitten von Ereignissen vorteilhaft verwenden?

ad HA 5.2:

Beachten Sie, dass W den Wertebereich $\{0, 1\}$ besitzt.

Wie vereinfacht sich die Berechnung der Erwartungswerte, wenn man auf die beiden Werte $W = 0$ und $W = 1$ bedingt und die entsprechende Formel aus der Vorlesung benutzt?

Sei T eine von W unabhängige Zufallsvariable. Überlegen Sie, ob $\mathbb{E}[T \mid W = 0] = \mathbb{E}[T]$ gilt?

Welcher Zusammenhang besteht zwischen der negativen Binomialverteilung und der geometrischen Verteilung, insbesondere im Hinblick auf die Erwartungswerte?

ad HA 5.3:

Beschreiben Sie das Experiment mit einem Markov-Diagramm! Ansonsten greift der Hinweis und die Zentralübung 4.

ad HA 5.4:

Zur Konstruktion von Beispielen unabhängiger bzw. abhängiger Mengen von Ereignissen siehe auch Zentralübung 3.

Auf Wiedersehen nach den Pfingstferien!