Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 5
28. Mai 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Spieler a und b aus Tutoraufgabe 3 von Übungsblatt 3 treffen sich erneut zum Federballspiel. Wie zuvor gewinnt Spieler a einen Ballwechsel unabhängig vom bisherigen Spielverlauf mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p_1 \leq 1$. Allerdings ist der Schläger von a in schlechtem Zustand, weshalb er in jedem Ballwechsel mit Wahrscheinlichkeit $0 < p_2 \leq 1$ zerbricht. In diesem Fall ist der Ballwechsel ergebnislos und das Spiel wird beendet. Wir sind nun an der erwarteten Anzahl von Ballwechseln interessiert, die Spieler a gewinnt.

1. Sei X die Anzahl der Ballwechseln, die gespielt werden bevor der Schläger zerbricht. Ermitteln Sie die Dichte und den Erwartungswert von X.
2. Die Zufallsvariable Y bezeichnet die Anzahl der Ballwechsel, die Spieler a für sich entscheidet. Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von Y unter der Bedingung, dass m Ballwechsel stattfinden bevor der Schläger zerbricht.
3. Ermitteln Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.

Lösungsvorschlag

Die Wahrscheinlichkeit, dass genau x Ballwechsel gespielt werden bevor der Schläger zerbricht ist gegeben durch

$$f_X(x) = p_2 \cdot (1 - p_2)^x \text{ für } x \in \mathbb{N}.$$

Würden wir auch den letzten Ballwechsel zählen, also den, in dem der Schläger zerbricht, so haben wir eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Eintrittswahrscheinlichkeit p_2. Aus der Vorlesung wissen wir, dass der Erwartungswert dieser Zufallsvariable gleich $\frac{1}{p_2}$ ist und es folgt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[X + 1 - 1] = \mathbb{E}[X + 1] - 1 = \frac{1}{p_2} - 1$$

Betrachten wir nun Y. Unter der Bedingung, dass der Schläger nach dem m-ten Ballwechseln zerbricht, ist Y binomialverteilt mit den Parametern m und p_1. Die Dichte und der Erwartungswert sind somit bereits aus der Vorlesung bekannt. Sie betragen

$$f_{Y|X=m}(x) = \binom{m}{x} \cdot p_1^x \cdot (1 - p_1)^{m-x} \text{ für ganzzahlige } 0 \leq x \leq m$$

sowie

$$\mathbb{E}[Y|X = m] = m \cdot p_1.$$

Gemäß Satz 36 können wir nun $\mathbb{E}[Y]$ als Summe von bedingten Erwartungswerten ausdrücken und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \sum_{m=0}^{\infty} \mathbb{E}[Y|X=m] \cdot \Pr[X=m] \\
&= \sum_{m=0}^{\infty} (m \cdot p_1) \cdot \Pr[X=m] \\
&= p_1 \cdot \left(\sum_{m=0}^{\infty} m \cdot \Pr[X=m] \right) \\
&= p_1 \cdot \mathbb{E}[X] \\
&= \frac{p_1}{p_2} - p_1.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, die ausschließlich positive Werte annimmt. Gemäß der Markov-Ungleichung gilt für jede reelle Zahl $t > 0$, dass $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.

1. Definieren Sie X so, dass die Markov-Ungleichung für alle Werte t mit $\Pr[X = t] > 0$, optimal ist. Es soll also gelten $\Pr[X \geq t] = \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.
2. Nehmen wir nun an, dass X mindestens zwei Werten eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet. Beweisen Sie, dass ein t mit $\Pr[X = t] > 0$ existiert, so dass $\Pr[X \geq t] < \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.

Lösungsvorschlag

In der erste Teilaufgabe wählen wir eine beliebige reelle Zahl $r > 0$ und definieren X durch $\Pr[X = r] = 1$. Da r der einzige Wert ist, der eine positive Wahrscheinlichkeit annimmt, reicht es die Gleichung für r zu zeigen. Dazu beobachten wir, dass sowohl $\mathbb{E}[X] = r$ als auch $\Pr[X \geq r] = 1$ gilt, was die geforderte Bedingung erfüllt

$$\Pr[X \geq r] = 1 = \frac{\mathbb{E}[X]}{r}.$$

Für die zweite Teilaufgabe überzeugen wir uns zunächst davon, dass es ein $r > 0$ mit $\Pr[X = r] > 0$ geben muss, welches echt kleiner als der Erwartungswert von X ist. Dies sieht man am einfachsten so. Angenommen es existiert kein solcher Wert. Da es laut Angabe mindestens zwei unterschiedliche Werte mit positiver Wahrscheinlichkeit gibt, muss einer dieser Werte, nennen wir ihn s, echt größer als $\mathbb{E}[X]$ sein. Somit gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \Pr[X=s] \cdot s + \sum_{x \in W_X \setminus \{s\}} \Pr[X=x] \cdot x \\
&\geq \Pr[X=s] \cdot s + \sum_{x \in W_X \setminus \{s\}} \Pr[X=x] \cdot \mathbb{E}[X] \\
&= \Pr[X=s] \cdot s + (1 - \Pr[X=s]) \cdot \mathbb{E}[X] \\
&> \Pr[X=s] \cdot \mathbb{E}[X] + (1 - \Pr[X=s]) \cdot \mathbb{E}[X] \\
&= \mathbb{E}[X],
\end{aligned}$$

was einen Widerspruch ist. Wir haben also gezeigt, dass ein entsprechendes r existieren muss. Nachdem r echt kleiner als $\mathbb{E}[X]$ ist folgt außerdem

$$\Pr[X \geq r] \leq 1 < \frac{\mathbb{E}[X]}{r}.$$

Tutoraufgabe 3

Sie untersuchen eine radioaktive Probe, die pro Sekunde $3 \cdot 10^{10}$ Teilchen emittiert. Ihr Geigerzähler registriert jedes Teilchen unabhängig mit einer Wahrscheinlichkeit von 10^{-10}.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden x Teilchen in einer Sekunde detektiert?
2. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Geigerzähler pro Sekunde mehr als drei Teilchen registriert, geeignet ab.
3. Angenommen Sie stellen eine zweite Probe neben den Geigerzähler, die unabhängig von der ersten $6 \cdot 10^{10}$ Teilchen pro Sekunde emittiert. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Teilchen, die insgesamt registriert werden.

Lösungsvorschlag

Sei X sie Anzahl der Teilchen, die in einer Sekunde vom Geigerzähler detektiert werden. Offensichtlich handelt es sich bei X um eine binomialverteilte Zufallsvariable mit den Parametern $3 \cdot 10^{10}$ und 10^{-10}. Die Wahrscheinlichkeit, dass x Teilchen registriert werden ist demnach

$$\Pr[X = x] = \binom{3 \cdot 10^{10}}{x} \cdot (10^{-10})^x \cdot (1 - 10^{-10})^{3 \cdot 10^{10} - x} \text{ für ganzzahlige } 0 \leq x \leq 3 \cdot 10^{10}.$$

Um die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X > 5]$ zu bestimmen, wie es in der zweiten Teilaufgabe gefordert wird, ist die Binomialverteilung denkbar unhandlich. Allerdings ist die Eintrittswahrscheinlichkeit niedrig, weshalb wir sinnvoll mit der Poisson-Verteilung abschätzen können. Dazu setzen wir den Parameter λ gleich $n \cdot p$, in unserem Szenario also 3, und rechnen

$$\begin{aligned}
\Pr[X > 3] &= 1 - \Pr[X \leq 3] \\
&= 1 - (\Pr[X = 0] + \Pr[X = 1] + \Pr[X = 2] + \Pr[X = 3]) \\
&= 1 - \left(\frac{3^0}{e^3 0!} + \frac{3^1}{e^3 1!} + \frac{3^2}{e^3 2!} + \frac{3^3}{e^3 3!} \right) \\
&= 1 - \frac{13}{e^3} \\
&\approx 0{,}35277.
\end{aligned}$$

Sei Y nun die Anzahl der Teilchen aus der zweiten Probe, die vom Geigerzähler gezählt werden. Auch hier handelt es sich um eine binomialverteilte Zufallsvariable, diesmal mit den Parametern $6 \cdot 10^{10}$ und 10^{-10}. Da X und Y unabhängig sind und die gleiche Eintrittswahrscheinlichkeit haben, ist letztendlich auch $X + Y$ binomialverteilt mit $9 \cdot 10^{10}$ und 10^{-10}. Aus der Vorlesung folgt somit sofort der Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X + Y] = (9 \cdot 10^{10}) \cdot 10^{-10} = 9$$

sowie die Standardabweichung

$$\sigma[X + Y] = \sqrt{\mathrm{Var}[X + Y]} = \sqrt{(9 \cdot 10^{10}) \cdot 10^{-10} \cdot (1 - 10^{-10})} = 3\sqrt{(1 - 10^{-10})} \approx 3.$$

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien X, Y nicht notwendigerweise unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$, wobei $\lambda \geq 0$ ist. Des Weiteren sei $(Y \mid X = n) \sim \mathrm{Bin}(n, p)$ für alle natürlichen Zahlen n. Zeigen Sie, dass $Y \sim \mathrm{Po}(\lambda \cdot p)$ gilt.

Hinweise: Berechnen Sie $\Pr[Y = k]$ aus der gemeinsamen Dichte $\Pr[Y = k, X = n]$. Nutzen Sie beim Vereinfachen des Ausdrucks die Reihenerdanstellung der e-Funktion.

Lösungsvorschlag

Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit und Poisson-Verteilung ist

$$\Pr[Y = k \mid X = n] = \frac{\Pr[Y = k, X = n]}{\Pr[X = n]} = \frac{\Pr[Y = k, X = n]}{\frac{\lambda^n}{e^\lambda n!}}.$$

Wir kombinieren dies mit der Annahme, dass $(Y \mid X = n)$ binomialverteilt mit Parametern n und p ist, und erhalten

$$\Pr[Y = k, X = n] = \begin{cases} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{e^\lambda n!} & \text{für ganzzahlige } n \geq k \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Mithilfe dieser gemeinsamen Dichte lässt sich die Randdichte $\Pr[Y = k]$ durch Aufsummieren wie folgt bestimmen

$$\begin{aligned}
\Pr[Y = k] &= \sum_{n=0}^{\infty} \Pr[Y = k,\ X = n] \\
&= \left(\sum_{n=0}^{k-1} 0\right) + \left(\sum_{n=k}^{\infty} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{e^\lambda n!}\right) \\
&= \frac{p^k}{e^\lambda} \cdot \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!k!} (1-p)^{n-k} \frac{\lambda^n}{n!} \\
&= \frac{(p\lambda)^k}{e^\lambda k!} \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(1-p)^{n-k} \lambda^{n-k}}{(n-k)!} \\
&= \frac{(p\lambda)^k}{e^\lambda k!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1-p)^n \lambda^n}{(n)!} \\
&= \frac{(p\lambda)^k}{e^\lambda k!} \cdot e^{(1-p)\lambda} \\
&= \frac{(p\lambda)^k}{e^{p\lambda} k!} \quad .
\end{aligned}$$

Dabei haben wir im vorletzten Schritt den Hinweis der Angabe verwendet. Folglich hat Y die Dichte einer Poisson-verteilten Zufallsvariable mit Parameter $p \cdot \lambda$, was den Beweis abschließt.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Ein Tutor für Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie betreut eine Übungsgruppe mit n Studenten, die wir der Übersichtlichkeit halber mit den Zahlen von 1 bis n nummerieren. Um sicherzugehen, dass die Studenten fleißig lernen, fragt der Tutor in jeder seiner Übungsstunden so lange zufällig gewählte Teilnehmer aus, bis jeder mindestens einmal dran war. Dabei gehen wir davon aus, dass der Tutor seine Wahl unabhängig trifft und jeder Student mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird.

1. Sei X_i eine Zufallsvariable, die angibt, wie oft der i-te Student ausgefragt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i]$
2. Da sich das pädagogische Konzept des Tutors keiner großen Beliebtheit erfreut, besuchen in der nächsten Woche lediglich drei Studenten die Übungsgruppe. Zeigen sie, dass $(\frac{1}{3})^k \leq \Pr[X_i \geq k] \leq \frac{2}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Lösungsvorschlag

Bei der ersten Teilaufgabe handelt es sich um das Coupon-Collector-Problem. Sei X die Gesamtzahl der Fragen, die der Tutor stellt. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass der Erwartungswert von X gleich $n \cdot H_n$ ist, wobei H_n die n-te harmonische Zahl bezeichnet. Da der Tutor jeden Student mit der gleichen Wahrscheinlichkeit wählt, wissen wir außerdem, dass alle X_j identisch verteilt sind. Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{j=1}^{n} X_j\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbb{E}[X_j] = n \cdot \mathbb{E}[X_i],$$

was wiederum bedeutet, dass

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{n} \cdot \mathbb{E}[X] = H_n.$$

Betrachten wir nun die zweite Teilaufgabe. Nachdem nur drei Studenten die Übungsgruppe besuchen, ist der Erwartungswert von X_i in der zweiten Woche

$$\mathbb{E}[X_i] = H_3 = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}.$$

Mit Hilfe der Markov-Ungleichung können wir nun unmittelbar die geforderte obere Schranke herleiten

$$\Pr[X_i \geq k] \leq \mathbb{E}[X] \cdot \frac{1}{k} = \frac{11}{6} \cdot \frac{1}{k} < \frac{2}{k}.$$

Für die untere Schranke beobachten wir, dass wenn die ersten k Fragen ausschließlich an i gerichtet sind, dem Student auch insgesamt mindestens k Fragen gestellt werden. Es handelt sich also um einen Sonderfall des gesuchten Ereignisses $X_i \geq k$. Praktischerweise können wir die Wahrscheinlichkeit dieser Teilmenge leicht bestimmen, nämlich $(\frac{1}{3})^k$, was die untere Schranke bestätigt

$$\Pr[X_i \geq k] \geq \left(\frac{1}{3}\right)^k.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Kekshändler kauft n Kekse zu einem Stückpreis ζ_1 und möchte diese zum Preis ζ_2 weiterverkaufen, wobei $0 < \zeta_1 < \zeta_2$. Sei X eine Zufallsvariable die angibt, wie viele Kekse der Händler verkaufen könnte. Den Nettogewinn bezeichnen wir mit $g(X,n) = \zeta_2 \cdot \min\{X,n\} - \zeta_1 n$. Bestimmen Sie die Anzahl Kekse, die der Händler einkaufen sollte, um seinen erwarteten Nettogewinn zu maximieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

1. Angenommen der Händler kauft anstatt n Keksen einen Keks mehr. Bestimmen sie die erwartete Veränderung seines Gewinns $\mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n)]$.
2. Sei $F_X^{-1}(x)$ die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion von X. Grenzen Sie die Wahl eines optimales n in Abhängigkeit von $F_X^{-1}(x)$ möglichst exakt ein.
3. Wie viele Kekse sollte der Händler kaufen, falls $X \sim \mathrm{Po}(1000)$ und $\zeta_1 = \frac{1}{2}\zeta_2$.

Hinweise: Für die letzte Teilaufgabe könnte ein geeignetes Rechenprogramm, wie es bspw. vom Internetdienst Wolfram Alpha zur Verfügung gestellt wird, hilfreich sein.

Lösungsvorschlag

Um die Differenz zwischen dem erwarteten Nettogewinn für n und $n+1$ zu bestimmen, betrachten wir zunächst die Funktion $g(X,n)$. Sollten der Händler höchstens n Kekse verkaufen können, so erzielt er einen Nettogewinn von $\zeta_2 X - \zeta_1 n$. Hätte er hingegen die Möglichkeit mehr als n Kekse zu verkaufen, so ist sein Gewinn $\zeta_2 n - \zeta_1 n$. Im ersten Fall ist die Differenz

$$\mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n) \mid X \leq n] = \mathbb{E}[(\zeta_2 X - \zeta_1(n+1)) - (\zeta_2 X - \zeta_1 n)] = -\zeta_1$$

und im zweiten Fall

$$\mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n) \mid X > n] = \mathbb{E}[(\zeta_2(n+1) - \zeta_1(n+1)) - (\zeta_2 n - \zeta_1 n)] = \zeta_2 - \zeta_1.$$

Nach Satz 36 ist der gesuchte Erwartungswert demnach

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n)] &= \mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n) \mid X \leq n] \cdot \Pr[X \leq n] \\
&\quad + \mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n) \mid X > n] \cdot \Pr[X > n] \\
&= -\zeta_1 F_X(n) + (\zeta_2 - \zeta_1) \cdot (1 - F_X(n)) \\
&= (1 - F_X(n)) \cdot \zeta_2 - \zeta_1.
\end{aligned}$$

Man beachte, dass $F_X(n)$ eine monoton steigende Funktion ist. Für fixe ζ_1 und ζ_2 ist $(1 - F_X(n)) \cdot \zeta_2 - \zeta_1$ somit monoton fallend. Folglich kann der Kekshändler durch Hinzukaufen weiterer Keksen seinen erwarteten Nettogewinn so lange steigern, wie der erwartete Zusatzgewinn $\mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n)]$ positiv ist. Sobald $\mathbb{E}[g(X,n+1) - g(X,n)]$ negativ wird, sinkt auch sein Nettogewinn. Um die optimale Anzahl Keksen zu finden müssen wir also das größte n finden, so dass

$$\begin{aligned}
& (1 - F_X(n)) \cdot \zeta_2 - \zeta_1 \geq 0 \\
\iff \quad & F_X(n) \leq 1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \\
\iff \quad & n \leq F_X^{-1}\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right),
\end{aligned}$$

bzw. das kleinste n, so dass

$$
\begin{aligned}
& (1 - F_X(n)) \cdot \zeta_2 - \zeta_1 \leq 0 \\
\iff \quad & F_X(n) \geq 1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2} \\
\iff \quad & n \geq F_X^{-1}\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right).
\end{aligned}
$$

Dabei ist die jeweils letzte Umformung gültig, da $F_X^{-1}(n)$ monoton steigt und es sich bei $1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}$ laut Angabe um einen Wert zwischen 0 und 1 handelt. Der Kekshändler maximiert seinen Nettogewinn indem er n so zwischen

$$\left\lfloor F_X^{-1}\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)\right\rfloor \quad \text{und} \quad \left\lceil F_X^{-1}\left(1 - \frac{\zeta_1}{\zeta_2}\right)\right\rceil$$

wählt, dass $\mathbb{E}[g(X, n)]$ maximal ist. Kommen wir nun zum letzten Teil der Aufgabe. Angenommen der Einkaufspreis ist die Hälfte des Verkaufspreises und X ist Poisson-verteilt mit $\lambda = 1000$. Wir suchen zunächst das größte n, für dass gilt

$$F_X(n) = \sum_{i=0}^{n} \frac{1000^i}{e^{1000} \cdot i!} \leq \frac{1}{2}.$$

Ausgehend von der Beobachtung, dass sich die Poisson-Verteilung gleichmäßig um den Erwartungswert λ verteilt, können wir davon ausgehen, dass $F_X(n)$ ungefähr $\frac{1}{2}$ ist wenn wir $n = \lambda$ wählen. Durch Einsetzen und Ausrechnen erhalten wir $F_X(1000) \approx 0{,}50841$. Wir haben n also zu hoch gewählt und probieren es erneut mit $n = \lambda - 1$. Diesmal ist die Verteilungsfunktion tatsächlich kleiner gleich $\frac{1}{2}$, nämlich $F_X(999) \approx 0{,}49579$. Wir haben somit das optimale n auf 999 und 1000 eingegrenzt. Für 999 erhalten wir den Erwartungswert

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[g(X, 999)] &= \mathbb{E}[\zeta_2 \cdot \min\{X, 999\}] - \zeta_1 999 \\
&= \left(\sum_{i=0}^{\infty} f_X(i) \cdot (\zeta_2 \cdot \min\{i, 999\})\right) - \zeta_1 999 \\
&= \zeta_2 \left(\left(\sum_{i=0}^{999} f_X(i) \cdot i\right) + \left(\sum_{i=1000}^{\infty} f_X(i) \cdot 999\right)\right) - \zeta_1 999 \\
&= \zeta_2 \left(\left(\sum_{i=0}^{999} f_X(i) \cdot i\right) + 999 \cdot (1 - F_X(999))\right) - \zeta_1 999 \\
&\approx \zeta_2 (483{,}18014 + 503{,}70104) - \zeta_1 999 \\
&= \zeta_1 (2 \cdot 986{,}88118) - \zeta_1 999 \\
&= \zeta_1 974{,}76236.
\end{aligned}
$$

und mit ähnlicher Rechnung für 1000 den Erwartungswert

$$\mathbb{E}[g(X, 1000)] \approx \zeta_2 (495{,}79476 + 491{,}59063) - \zeta_1 1000 = \zeta_1 974{,}77078.$$

Folglich maximiert der Kekshändler seinen erwarteten Nettogewinn mit einem Einkauf von 1000 Keksen.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable die nur Werte aus den natürliche Zahlen annimmt. Wir schreiben kurz p_i für $\Pr[X = i]$ und gehen davon aus, dass $0 < p_1 < 1$ gilt. Des weiteren sei X gedächtnislos, das heißt es gelte $\Pr[X > x + y \mid X > x] = \Pr[X > y]$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass X geometrisch mit Parameter p_1 verteilt ist.

Lösungsvorschlag

Nach Definition von bedingter Wahrscheinlichkeit und Gedächtnislosigkeit gilt

$$\begin{aligned}\Pr[X > x + 1] &= \Pr[X > x + 1 \mid X > x] \cdot \Pr[X > x] \\ &= \Pr[X > 1] \cdot \Pr[X > x] \\ &= (1 - p_1) \cdot \Pr[X > x].\end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{N}$. Außerdem ist $\Pr[X > 0]$ gleich 1, da X nur Werte aus den natürlichen Zahlen annimmt. Induktiv folgt also

$$\Pr[X > x] = (1 - p_1)^x,$$

und wir schließen

$$\begin{aligned}\Pr[X = x] &= \Pr[X > x - 1] - \Pr[X > x] \\ &= (1 - p_1)^{x-1} - (1 - p_1)^x \\ &= (1 - p_1)^{x-1} \cdot (1 - 1 + p_1) \\ &= p_1 \cdot (1 - p_1)^{x-1}.\end{aligned}$$

Somit ist gezeigt, dass X geometrisch verteilt ist mit Parameter p_1.