Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 5
18. Mai 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: Donnerstag, 28. Mai 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Spieler a und b aus Tutoraufgabe 3 von Übungsblatt 3 treffen sich erneut zum Federballspiel. Wie zuvor gewinnt Spieler a einen Ballwechsel unabhängig vom bisherigen Spielverlauf mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p_1 \leq 1$. Allerdings ist der Schläger von a in schlechtem Zustand, weshalb er in jedem Ballwechsel mit Wahrscheinlichkeit $0 < p_2 \leq 1$ zerbricht. In diesem Fall ist der Ballwechsel ergebnislos und das Spiel wird beendet. Wir sind nun an der erwarteten Anzahl von Ballwechseln interessiert, die Spieler a gewinnt.

1. Sei X die Anzahl der Ballwechseln, die gespielt werden bevor der Schläger zerbricht. Ermitteln Sie die Dichte und den Erwartungswert von X.

2. Die Zufallsvariable Y bezeichnet die Anzahl der Ballwechsel, die Spieler a für sich entscheidet. Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von Y unter der Bedingung, dass m Ballwechsel stattfinden bevor der Schläger zerbricht.

3. Ermitteln Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$.

Tutoraufgabe 2

Sei X eine diskrete Zufallsvariable, die ausschließlich positive Werte annimmt. Gemäß der Markov-Ungleichung gilt für jede reelle Zahl $t > 0$, dass $\Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.

1. Definieren Sie X so, dass die Markov-Ungleichung für alle Werte t mit $\Pr[X = t] > 0$, optimal ist. Es soll also gelten $\Pr[X \geq t] = \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.

2. Nehmen wir nun an, dass X mindestens zwei Werten eine positive Wahrscheinlichkeit zuordnet. Beweisen Sie, dass ein t mit $\Pr[X = t] > 0$ existiert, so dass $\Pr[X \geq t] < \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$.

Tutoraufgabe 3

Sie untersuchen eine radioaktive Probe, die pro Sekunde $3 \cdot 10^{10}$ Teilchen emittiert. Ihr Geigerzähler registriert jedes Teilchen unabhängig mit einer Wahrscheinlichkeit von 10^{-10}.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit werden x Teilchen in einer Sekunde detektiert?

2. Schätzen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Geigerzähler pro Sekunde mehr als drei Teilchen registriert, geeignet ab.

3. Angenommen Sie stellen eine zweite Probe neben den Geigerzähler, die unabhängig von der ersten $6 \cdot 10^{10}$ Teilchen pro Sekunde emittiert. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Standardabweichung der Teilchen, die insgesamt registriert werden.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Es seien X, Y nicht notwendigerweise unabhängige Zufallsvariablen mit $X \sim \text{Po}(\lambda)$, wobei $\lambda \geq 0$ ist. Des Weiteren sei $(Y \mid X = n) \sim \text{Bin}(n, p)$ für alle natürlichen Zahlen n. Zeigen Sie, dass $Y \sim \text{Po}(\lambda \cdot p)$ gilt.

Hinweise: Berechnen Sie $\Pr[Y = k]$ aus der gemeinsamen Dichte $\Pr[Y = k, X = n]$. Nutzen Sie beim Vereinfachen des Ausdrucks die Reihenerdanstellung der e-Funktion.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Ein Tutor für Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie betreut eine Übungsgruppe mit n Studenten, die wir der Übersichtlichkeit halber mit den Zahlen von 1 bis n nummerieren. Um sicherzugehen, dass die Studenten fleißig lernen, fragt der Tutor in jeder seiner Übungsstunden so lange zufällig gewählte Teilnehmer aus, bis jeder mindestens einmal dran war. Dabei gehen wir davon aus, dass der Tutor seine Wahl unabhängig trifft und jeder Student mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewählt wird.

1. Sei X_i eine Zufallsvariable, die angibt, wie oft der i-te Student ausgefragt wird. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i]$

2. Da sich das pädagogische Konzept des Tutors keiner großen Beliebtheit erfreut, besuchen in der nächsten Woche lediglich drei Studenten die Übungsgruppe. Zeigen sie, dass $(\frac{1}{3})^k \leq \Pr[X_i \geq k] \leq \frac{2}{k}$ für alle $k \in \mathbb{N}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Kekshändler kauft n Kekse zu einem Stückpreis ζ_1 und möchte diese zum Preis ζ_2 weiterverkaufen, wobei $0 < \zeta_1 < \zeta_2$. Sei X eine Zufallsvariable die angibt, wie viele Kekse der Händler verkaufen könnte. Den Nettogewinn bezeichnen wir mit $g(X, n) = \zeta_2 \cdot \min\{X, n\} - \zeta_1 n$. Bestimmen Sie die Anzahl Kekse, die der Händler einkaufen sollte, um seinen erwarteten Nettogewinn zu maximieren. Gehen Sie dabei wie folgt vor.

1. Angenommen der Händler kauft anstatt n Keksen einen Keks mehr. Bestimmen sie die erwartete Veränderung seines Gewinns $\mathbb{E}[g(X, n+1) - g(X, n)]$.

2. Sei $F_X^{-1}(x)$ die Umkehrfunktion der Verteilungsfunktion von X. Grenzen Sie die Wahl eines optimales n in Abhängigkeit von $F_X^{-1}(x)$ möglichst exakt ein.

3. Wie viele Kekse sollte der Händler kaufen, falls $X \sim \text{Po}(1000)$ und $\zeta_1 = \frac{1}{2}\zeta_2$.

Hinweise: Für die letzte Teilaufgabe könnte ein geeignetes Rechenprogramm, wie es bspw. vom Internetdienst Wolfram Alpha zur Verfügung gestellt wird, hilfreich sein.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable die nur Werte aus den natürliche Zahlen annimmt. Wir schreiben kurz p_i für $\Pr[X = i]$ und gehen davon aus, dass $0 < p_1 < 1$ gilt. Des weiteren sei X gedächtnislos, das heißt es gelte $\Pr[X > x + y \mid X > x] = \Pr[X > y]$ für alle $x, y \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass X geometrisch mit Parameter p_1 verteilt ist.