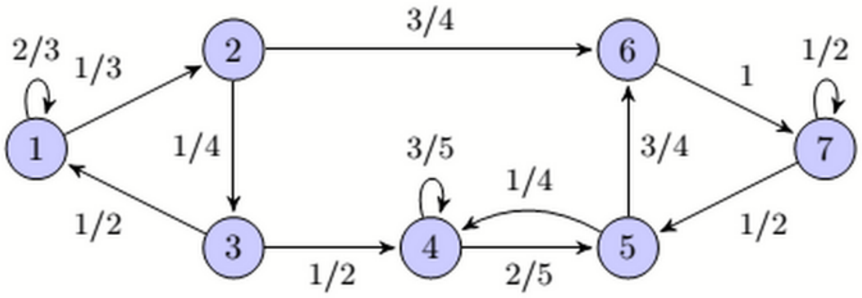
11.1



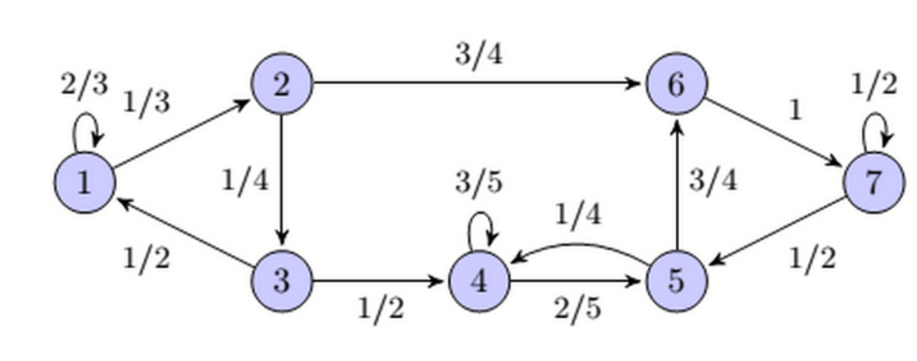
$$\tau_{i,j} = \min\{k \geq 1 \mid Z_k = j\} \mid Z_0 = i$$

ⓐ $h_4 = \mathbb{E}[\tau_{4,4}]$

$$\mathbb{E}[\tau_{4,4}] = \mathbb{E}[\tau_{4,4} \mid Z_1 = 4] \cdot \frac{3}{5} + \mathbb{E}[\tau_{4,4} \mid Z_1 = 5]\frac{2}{5}$$

$$= \frac{3}{5} + \frac{2}{5}\left(\mathbb{E}[\tau_{5,4} + 1]\right)$$

$$= 1 + \frac{2}{5}\mathbb{E}[\tau_{5,4}]$$



$$\mathbb{E}[\tau_{5,4}] = \frac{1}{4}\,\mathbb{E}[\tau_{5,4} \mid Z_1 = 4] + \frac{3}{4}\,\mathbb{E}[\tau_{5,4} \mid Z_1 = 6]$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \mathbb{E}[\tau_{6,4}] = 1 + \frac{3}{4}\,\mathbb{E}[\tau_{6,4}] = \frac{13}{4} + \frac{3}{4}\,\mathbb{E}[\tau_{5,4}]$$

$$\mathbb{E}[\tau_{6,4}] = \mathbb{E}[\tau_{6,4} \mid Z_1 = 7] \cdot 1 = 1 + \mathbb{E}[\tau_{7,4}] = 3 + \mathbb{E}[\tau_{5,4}]$$

$$\mathbb{E}[\tau_{7,4}] = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[\tau_{7,4} \mid Z_1 = 7] + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[\tau_{7,4} \mid Z_1 = 5]$$

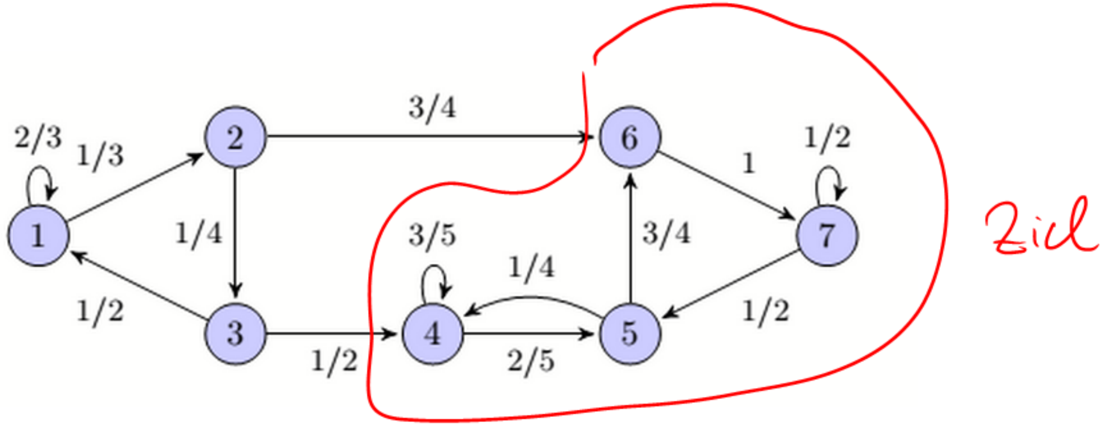
$$= 1 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[\tau_{7,4}] + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[\tau_{5,4}]$$

$$= 2 + \mathbb{E}[\tau_{5,4}]$$

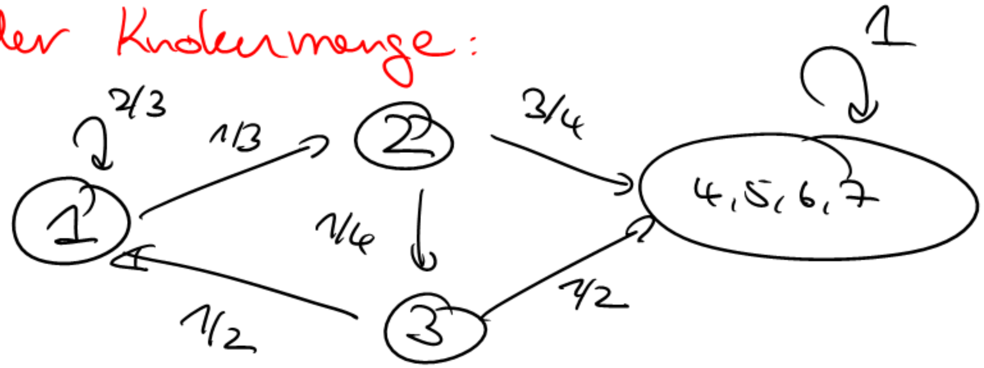
$$\leadsto \mathbb{E}[\tau_{5,4}] = 13$$

$$\leadsto \mathbb{E}[\tau_{4,4}] = \frac{31}{5} = 6{,}2$$

5



⇝ Kontraktion der Knotenmenge:



⇝ nach VL (Markov-Diagramme): (endliche) Pfade von 1 nach $\{4,5,6,7\}$ haben Gewicht 1.

$$G_N(z) = \mathbb{E}[z^N] = \mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 1] = \frac{2}{3}\mathbb{E}[z^{N+1} \mid Z_0 = 1] + \frac{1}{3}\mathbb{E}[z^{N+1} \mid Z_0 = 2]$$

$$\mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 2] = \frac{1}{4}\mathbb{E}[z^{N+1} \mid Z_0 = 3] + \frac{3}{4}\mathbb{E}[z^{N+1} \mid Z_0 = \{4,5,6,7\}]$$

$$\mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 3] = \frac{1}{2}\mathbb{E}[z^{N+1} \mid Z_0 = 1] + \frac{1}{2}\mathbb{E}[z^{N+1} \mid Z_0 = \{4,5,6,7\}]$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 1] = \frac{2}{3} z \, \mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 1] + \frac{1}{3} z \, \mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 2]$$

$$\mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 2] = \frac{3}{4} z + \frac{1}{4} z \, \mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 3]$$

$$\mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 3] = \frac{1}{2} z + \frac{1}{2} z \, \mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 1]$$

$$\rightsquigarrow \quad G_N(z) = \mathbb{E}[z^N \mid Z_0 = 1] = \frac{z^2(z+6)}{24 - 16z - z^3}$$

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{E}[N] = \frac{d}{dz} G_N \Big|_{z=1} = \frac{34}{7} \qquad \leftarrow \text{mit CAS}$$

$$\mathbb{E}[N(N-1)] = \frac{d^2}{dz^2} G_N \Big|_{z=1} = \frac{1460}{49}$$

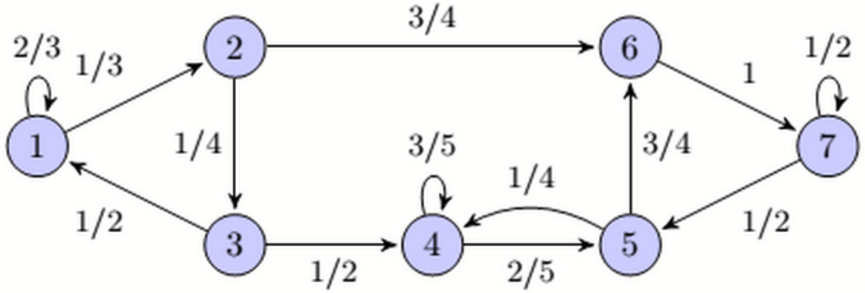
$$\rightsquigarrow \quad \mathrm{Var}[N] = \mathbb{E}[N(N-1)] + \mathbb{E}[N] - \mathbb{E}[N]^2 = \frac{542}{49}$$

<u>Alternativ:</u> $M_N(t) = G_N(e^t)$

$$\mathbb{E}[N] = \frac{d}{dt} M_N \Big|_{t=0} = \frac{34}{7} \qquad \leftarrow \text{mit CAS}$$

$$\mathbb{E}[N^2] = \frac{d^2}{dt^2} M_N \Big|_{t=0} = \frac{1698}{49}$$

c)



Siehe b): Mit W'keit 1 landet man irgendwann in der bottom SCC $\{4, 5, 6, 7\}$, welche irreduzibel und aperiodisch ist und daher eine eindeutige stationäre Verteilung besitzt.

11.2

EV: Eigenvektor

EW: Eigenwert

!

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\det(P - \lambda \,\mathrm{Id}) = \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right)\left(-\lambda\left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) - \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{2}\right)$$

$$- \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right) - 0 \cdot \tfrac{1}{2}\right)$$

$$+ 0 \cdot (\ldots)$$

$$= \left(\tfrac{1}{2} - \lambda\right)\left(\lambda^2 - \tfrac{1}{2}\lambda - \tfrac{1}{4}\right) - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$= \tfrac{1}{2}\lambda^2 - \tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{8} - \lambda^3 + \tfrac{1}{2}\lambda^2 + \tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{4}\lambda$$

$$= -\lambda^3 + \lambda^2 + \tfrac{1}{4}\lambda - \tfrac{1}{4} = -\lambda^2(\lambda - 1) + \tfrac{1}{4}(\lambda - 1)$$

$$= (\lambda - 1)\left(\tfrac{1}{4} - \lambda^2\right)$$

$\rightsquigarrow$ Nullstellen/EW: $1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}$

Eigenvektoren: (von rechts) $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = \frac{1}{2}, \lambda_3 = -\frac{1}{2}$

$$(P - \lambda_i \, Id)\underline{v}_i \overset{!}{=} \underline{0}$$

$\lambda_1 = 1$:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{v}_1 \overset{!}{=} \underline{0} \rightsquigarrow \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\lambda_2 = \frac{1}{2}$:

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} \underline{v}_2 \overset{!}{=} \underline{0} \rightsquigarrow \underline{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$\lambda_3 = -\frac{1}{2}$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \underline{v}_3 \overset{!}{=} \underline{0} \rightsquigarrow \underline{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}$$

$$\rightsquigarrow Q = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \underline{v}_1 & \underline{v}_2 & \underline{v}_3 \\ | & | & | \end{pmatrix}, \quad Q^T = Q^{-1}, \quad D = Q^T P Q = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & 1/2 & \\ 0 & & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} P^k = Q \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} Q^T = \left(v_1, 0, 0 \right) \cdot Q^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

nur EW mit Betrag ≥ 1 überleben

<u>Allgemein:</u>

- stationäre Verteilungen sind EV von links zum EW 1 mit Nebenbedingungen:
  - alle Komponenten ≥ 0
  - Komponenten summieren sich zu 1
- $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ ist stets EV von rechts zum EW 1.

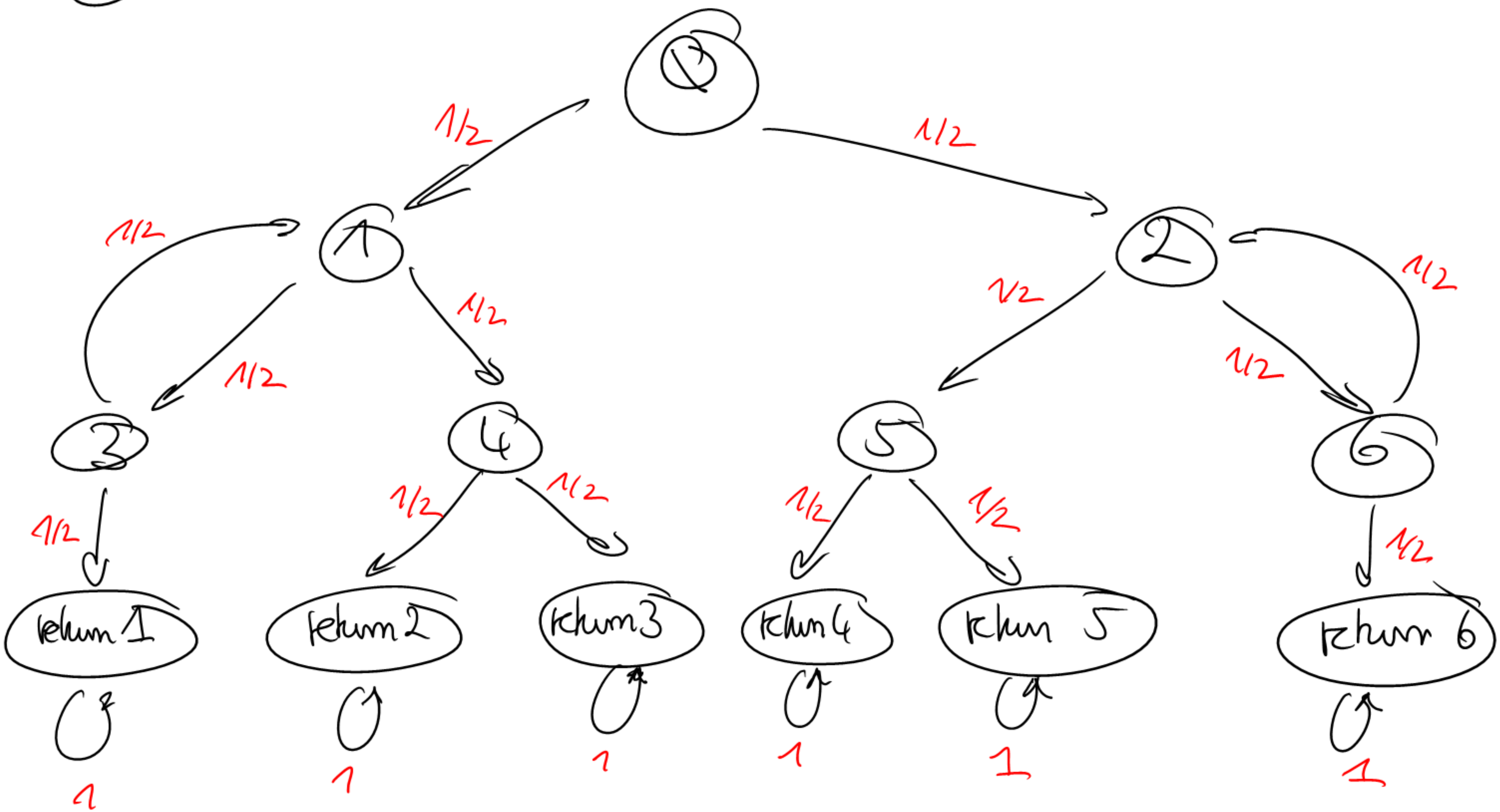
$\Rightarrow$ D.h. ist P symmetrisch, so ist $\frac{1}{n}(1, 1, \dots, 1)$ stets eine stationäre Verteilung.

- Da Graph irreduzibel & aperiodisch, ist $\frac{1}{3}(1,1,1)$ die einzige stationäre Verteilung und es gilt

$$\left(\frac{1}{h_1}, \frac{1}{h_2}, \frac{1}{h_3}\right) = \frac{1}{3}(1,1,1), \text{ also } h_i = 3.$$

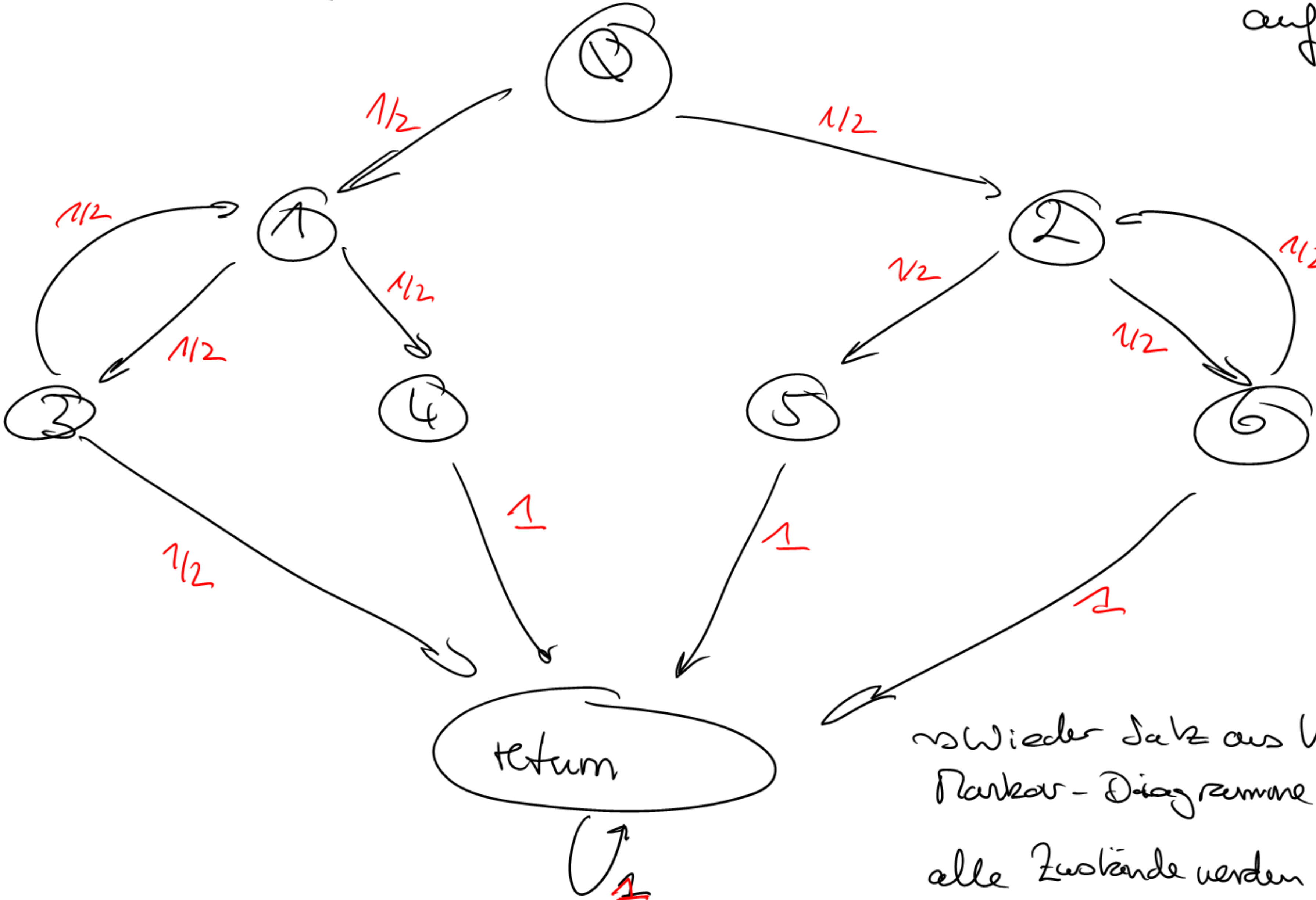
11.3

a



0
1/2
1/2
1
2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
3
4
5
6
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
1/2
return 1
return 2
return 3
return 4
return 5
return 6
1
1
1
1
1
1

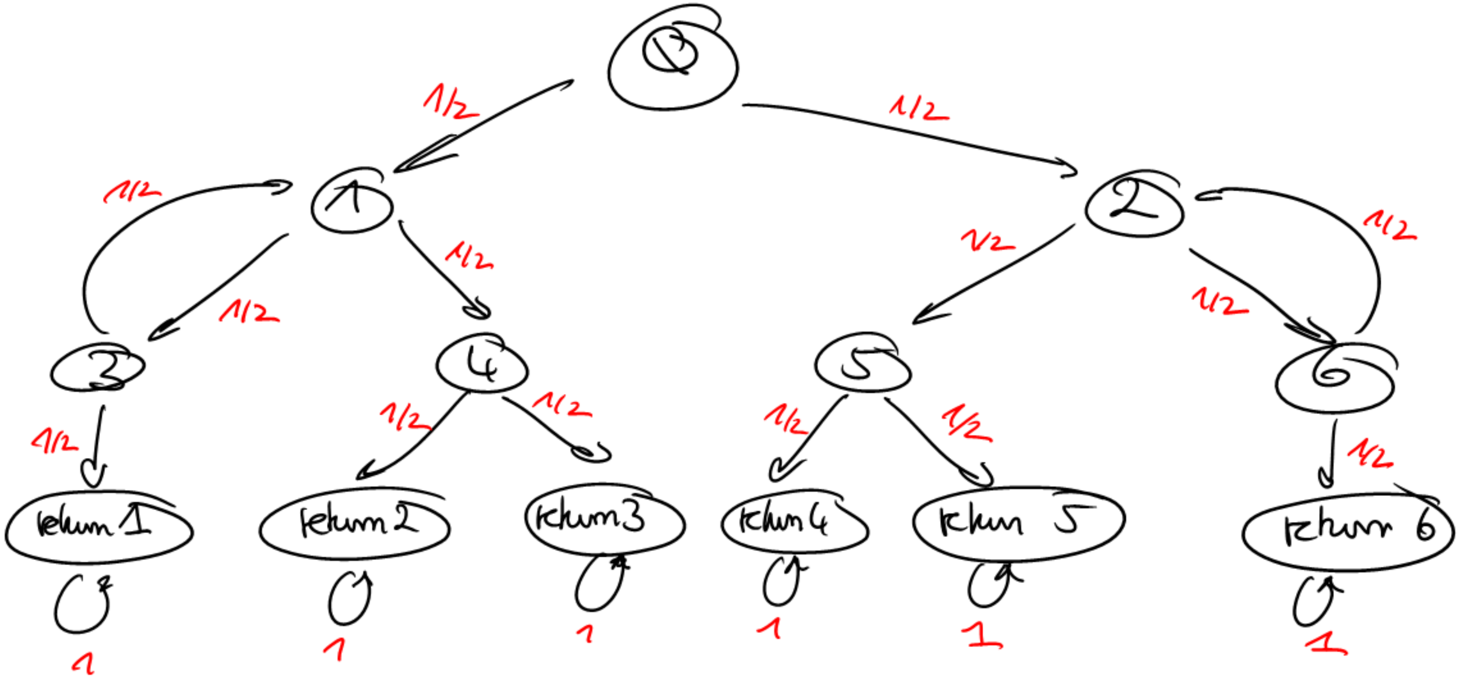
(b) Wie in TA 11.1 Fasse {return 1, ..., return 6} als einen Zustand auf



⇝ Wieder Satz aus VL über Markov-Diagramme anwendbar:

alle Zustände werden durch die Pfade [0 ⇝ return] besucht.

c



Wegen Symmetrie reicht es die W'keiten für die Übergänge

$$0 \xrightarrow{f_{0,\text{return }1}} \text{return } 1 \quad \text{und} \quad 0 \xrightarrow{f_{0,\text{return }2}} \text{return } 2$$

zu bestimmen.

- $f_{0,ret\,1} = \frac{1}{2} f_{1,ret\,1} = \frac{1}{6}$

  $f_{1,ret\,1} = \frac{1}{2} f_{3,ret\,1} = \frac{1}{3}$

  $f_{3,ret\,1} = \frac{1}{2} f_{1,ret\,1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} f_{3,ret\,1} + \frac{1}{2} = \frac{2}{3}$

- $f_{0,ret\,2} = \frac{1}{2} f_{1,ret\,2} = \frac{1}{6}$

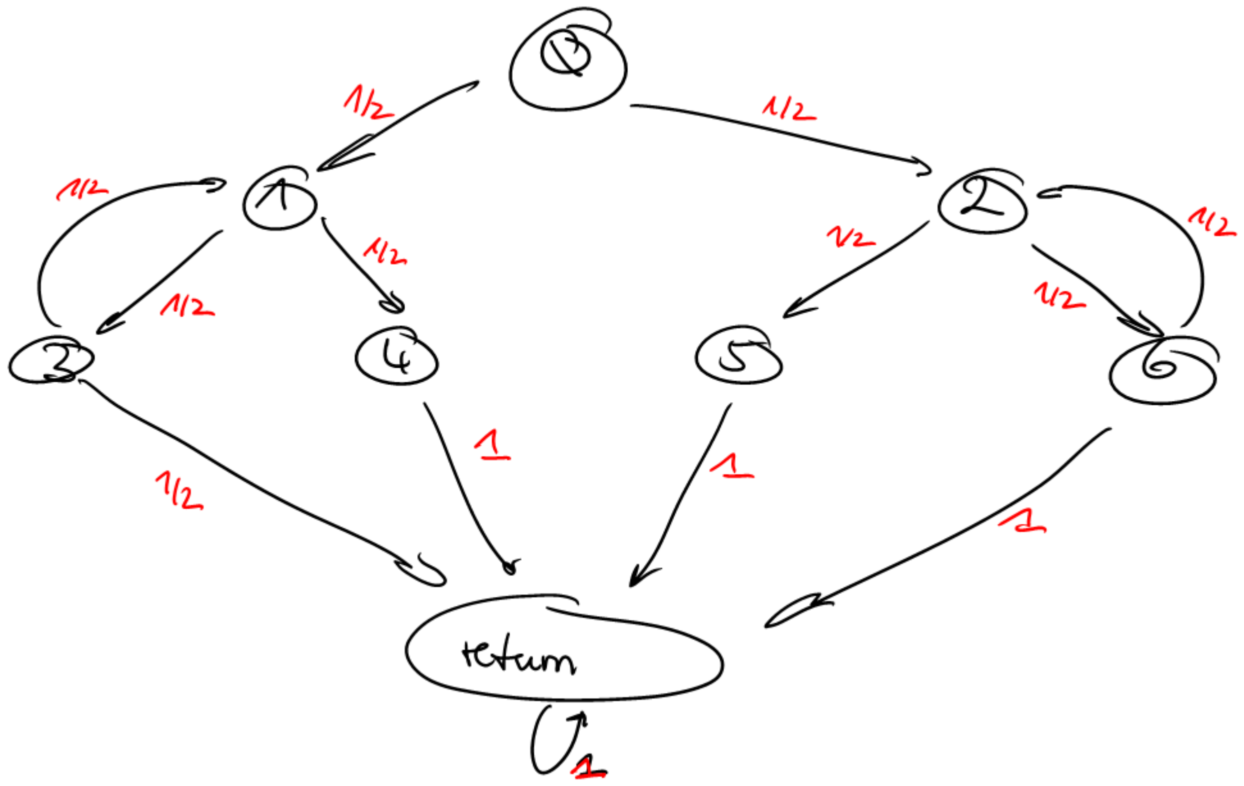
  $f_{1,ret\,2} = \frac{1}{2} f_{3,ret\,2} + \frac{1}{2} f_{4,ret\,2} = \frac{1}{4} f_{2,ret\,2} + \frac{1}{4} = \frac{1}{3}$

  $f_{3,ret\,2} = \frac{1}{2} f_{1,ret\,2}$

  $f_{4,ret\,2} = \frac{1}{2}$

$\leadsto$ entsprechend für restlichen 4 Rückgabewerte jeweils Ankunftsw'keit $= 1/6$.

d



Mit Ansatz aus (6): Wegen Symmetrie muss

$$h_{0,\text{return}} = 1 + h_{1,\text{return}} = 1 + h_{2,\text{return}}$$

gelten

$$h_{1,\text{return}} = 1 + \frac{1}{2} h_{3,\text{return}} + \frac{1}{2} h_{4,\text{return}} = 2 + \frac{1}{4} h_{1,\text{return}} = \frac{8}{3}$$

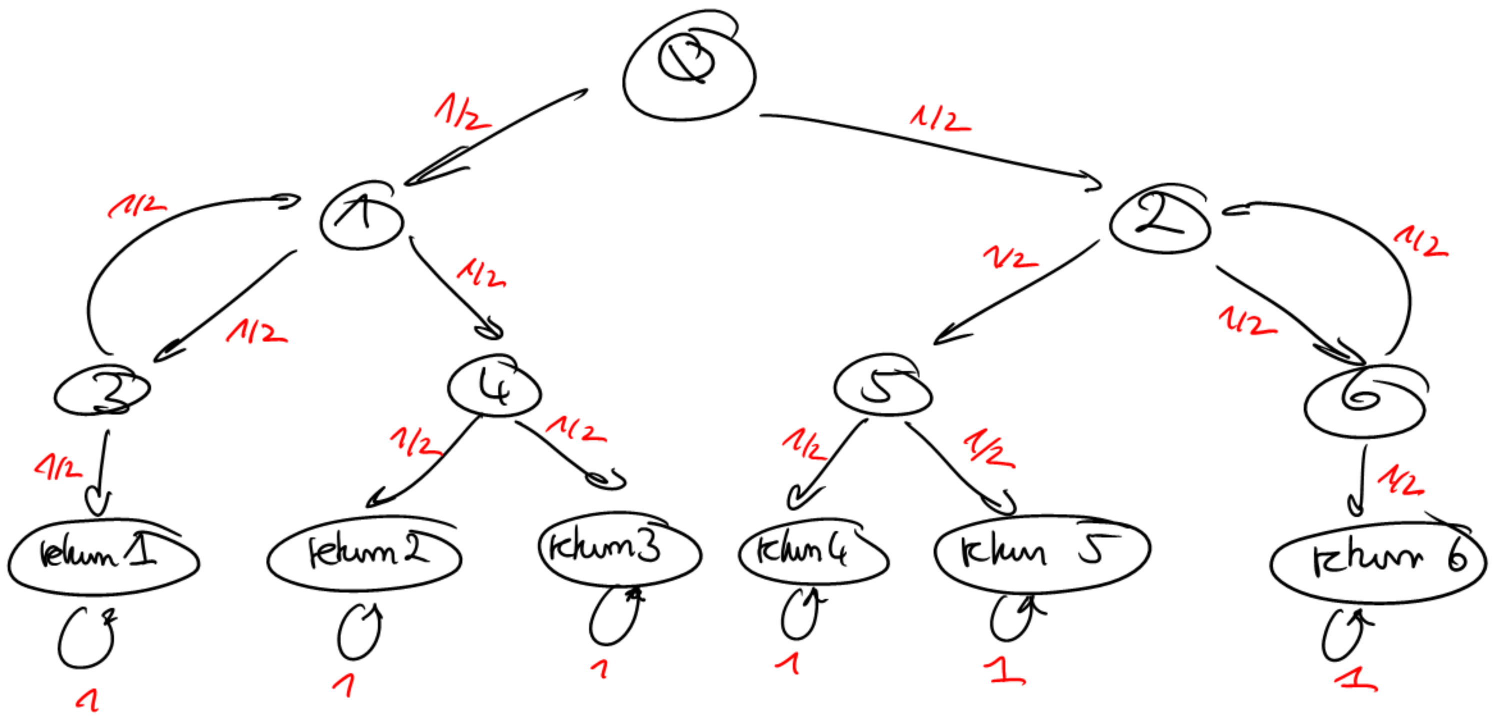
$$h_{3,\text{return}} = 1 + \frac{1}{2} h_{1,\text{return}}$$

$$h_{4,\text{return}} = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\underline{h_{0,\text{return}} = \frac{11}{3}}$$

e



- Man muss zeigen, dass man sich für jede vorgegebene Schrittzahl mit derselben W'keit in den Zuständen return 1, ..., return 6 befindet.

→ Alle Pfade von 0 nach "return 1" haben die Form:

$$0 \; 1 \; 3 \, (13)^* \text{ return } 1$$

Zu jeder gegebenen Schrittzahl ($\hat{=}$ Pfadlänge) gibt es höchstens einen Pfad der Form $0\,1\,3(1\,3)^*$ return 1:

Die W'keit, sich nach i Schritten in return 1 zu befinden ist somit:

$$\Pr[Z_i = \text{return } 1 \mid Z_0 = 0] = \begin{cases} 2^{-i}, & \text{falls } \exists k \in \mathbb{N}_0 : i = 3+2k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Entsprechend haben die Pfade von 0 nach return 2 die Form $0\,1\,(3\,1)^*\,4$ return 2, d.h. ebenfalls

$$\Pr[Z_i = \text{return } 2 \mid Z_0 = 0] = \begin{cases} 2^{-i}, & \text{falls } \exists k \in \mathbb{N}_0 : i = 3+2k \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

- Entsprechend folgt für die verbleibenden 4 return-Zustände, jeweils dieselbe W'keit.

⇝ Hat das Programm somit nach i Schritten terminiert, so muss $i = 3+2k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ gelten, und es folgt

$$\Pr[Z_{3+2k} = \text{return } r] = 2^{-(3+2k)} = 2^{-i}$$

unabhängig vom Rückgabewert r.