Häufig verwendet man die Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit in der Form

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] = \Pr[A|B] \cdot \Pr[B]\,. \tag{1}$$

Damit:

Satz 16 (Multiplikationssatz)

Seien die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ *gegeben. Falls* $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0$ *ist, gilt*

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = &\\ &\Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot \ldots\\ &\qquad \ldots \cdot \Pr[A_n|A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]\,.\end{aligned}$$

Beweis:

Zunächst halten wir fest, dass alle bedingten Wahrscheinlichkeiten wohldefiniert sind, da $\Pr[A_1] \geq \Pr[A_1 \cap A_2] \geq \ldots \geq \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] > 0$.

Die rechte Seite der Aussage im Satz können wir umschreiben zu

$$\frac{\Pr[A_1]}{1} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2]}{\Pr[A_1]} \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]}{\Pr[A_1 \cap A_2]} \cdot \ldots \cdot \frac{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]}{\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_{n-1}]}.$$

Offensichtlich kürzen sich alle Terme bis auf $\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n]$. $\square$

Beispiel 17 (Geburtstagsproblem)

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer m-köpfigen Gruppe zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben?

Umformulierung:
Man werfe m Bälle zufällig und gleich wahrscheinlich in n Körbe. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass nach dem Experiment jeder Ball allein in seinem Korb liegt?

Für das Geburtstagsproblem: $n = 365$

Offensichtlich muss $m \leq n$ sein, damit überhaupt jeder Ball allein in einem Korb liegen kann.
Wir nehmen an, dass die Bälle nacheinander geworfen werden. A_i bezeichne das Ereignis „Ball i landet in einem noch leeren Korb“. Das gesuchte Ereignis „Alle Bälle liegen allein in einem Korb“ bezeichnen wir mit A. Nach Satz 16 können wir $\Pr[A]$ berechnen durch

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \Pr\left[\cap_{i=1}^{m} A_i\right] \\ &= \Pr[A_1] \cdot \Pr[A_2|A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_m| \cap_{i=1}^{m-1} A_i].\end{aligned}$$

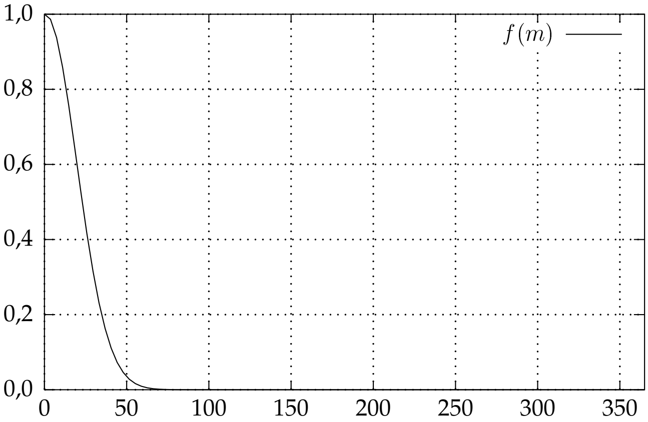
Unter der Bedingung, dass die ersten $j-1$ Bälle jeweils in einer leeren Urne gelandet sind, bedeutet A_j, dass der j-te Ball in eine der $n-(j-1)$ leeren Urnen fallen muss, die aus Symmetriegründen jeweils mit derselben Wahrscheinlichkeit gewählt werden.

Daraus folgt

$$\Pr[A_j | \cap_{i=1}^{j-1} A_i] = \frac{n-(j-1)}{n} = 1 - \frac{j-1}{n}.$$

Mit der Abschätzung $1 - x \leq e^{-x}$ und wegen $\Pr[A_1] = 1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}\Pr[A] &= \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{j-1}{n}\right) \\ &\leq \prod_{j=2}^{m} e^{-(j-1)/n} = e^{-(1/n)\cdot\sum_{j=1}^{m-1} j} \\ &= e^{-m(m-1)/(2n)} =: f(m)\ .\end{aligned}$$



Verlauf von $f(m)$ für $n = 365$

Ausgehend von der Darstellung der bedingten Wahrscheinlichkeit in Gleichung 1 zeigen wir:

Satz 18 (Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit)

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$. Dann folgt

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] \,.$$

Analog gilt für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ mit $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$, dass

$$\Pr[B] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i] \,.$$

Beweis:

Wir zeigen zunächst den endlichen Fall. Wir halten fest, dass

$$B = (B \cap A_1) \cup \ldots \cup (B \cap A_n) \; .$$

Da für beliebige i, j mit $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$, sind auch die Ereignisse $B \cap A_i$ und $B \cap A_j$ disjunkt. Wegen (1) folgt $\Pr[B \cap A_i] = \Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]$ (auch für den Fall, dass $\Pr[A_i] = 0$!). Wir wenden nun den Additionssatz (Lemma 5) an

$$\begin{aligned}\Pr[B] = \Pr[B \cap A_1] + \ldots + \Pr[B \cap A_n] = \\ \Pr[B|A_1] \cdot \Pr[A_1] + \ldots + \Pr[B|A_n] \cdot \Pr[A_n]\end{aligned}$$

und haben damit die Behauptung gezeigt. Da der Additionssatz auch für unendlich viele Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ gilt, kann dieser Beweis direkt auf den unendlichen Fall übertragen werden. $\square$

Mit Hilfe von Satz 18 erhalten wir leicht einen weiteren nützlichen Satz:

Satz 19 (Satz von Bayes)

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ *seien paarweis disjunkt, mit* $\Pr[A_j] > 0$ *für alle* j*. Ferner sei* $B \subseteq A_1 \cup \ldots \cup A_n$ *ein Ereignis mit* $\Pr[B] > 0$*. Dann gilt für ein beliebiges* $i = 1, \ldots, n$

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Analog gilt für paarweis disjunkte Ereignisse $A_1, A_2, \ldots$ *mit* $B \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$*, dass*

$$\Pr[A_i|B] = \frac{\Pr[A_i \cap B]}{\Pr[B]} = \frac{\Pr[B|A_i] \cdot \Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{\infty} \Pr[B|A_j] \cdot \Pr[A_j]} .$$

Mit dem Satz von Bayes dreht man gewissermaßen die Reihenfolge der Bedingung um. Gegeben die Wahrscheinlichkeit von B unter den Bedingungen A_i (sowie die Wahrscheinlichkeiten der A_i selbst), berechnet man die Wahrscheinlichkeit von A_i bedingt auf das Ereignis B.

Thomas Bayes (1702–1761) war ein bekannter Theologe und Mitglied der Royal Society. Als sein bedeutendstes Werk gilt sein Beitrag zur Wahrscheinlichkeitstheorie „Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances“. Diese Arbeit wurde erst 1763 publiziert.

3. Unabhängigkeit

Bei einer bedingten Wahrscheinlichkeit $\Pr[A|B]$ kann der Fall auftreten, dass die Bedingung auf B, also das Vorwissen, dass B eintritt, keinen Einfluss auf die Wahrscheinlichkeit hat, mit der wir das Eintreten von A erwarten. Es gilt also $\Pr[A|B] = \Pr[A]$, und wir nennen dann die Ereignisse A und B unabhängig.

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln)

$$\Omega := \{(i, j) \mid 1 \le i, j \le 6\} \,.$$

Alle Elementarereignisse erhalten nach dem Prinzip von Laplace die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$.
Wir definieren die Ereignisse

$$\begin{aligned} A &:= \text{Augenzahl im ersten Wurf ist gerade},\\ B &:= \text{Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade},\\ C &:= \text{Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7}. \end{aligned}$$

Es gilt $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$ und $\Pr[C] = \frac{1}{6}$. Wie groß ist $\Pr[B|A]$?

Beispiel 20 (Forts.)

Nach unserer Intuition beeinflusst der Ausgang des ersten Wurfs den zweiten Wurf nicht. Daher gewinnen wir durch das Eintreten von A keine Information in Bezug auf das Ereignis B hinzu:

$$B \cap A = \{(2,2),(2,4),(2,6),(4,2),(4,4),(4,6),(6,2),(6,4),(6,6)\}.$$

Daraus folgt

$$\Pr[B|A] = \frac{\Pr[B \cap A]}{\Pr[A]} = \frac{\frac{9}{36}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} = \Pr[B]\,.$$

Das Eintreffen des Ereignisses B hat mit dem Ereignis A „nichts zu tun“.

Definition 21

Die Ereignisse A und B heißen unabhängig, wenn gilt

$$\Pr[A \cap B] = \Pr[A] \cdot \Pr[B] \; .$$

Falls $\Pr[B] \neq 0$, so können wir diese Definition zu

$$\Pr[A] = \frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[B]} = \Pr[A|B]$$

umschreiben.

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln, Forts.)

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} A &:= \text{Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,}\\ B &:= \text{Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,}\\ C &:= \text{Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.} \end{aligned}$$

Bei den Ereignissen A und B ist die Unabhängigkeit klar, da offensichtlich kein kausaler Zusammenhang zwischen den Ereignissen besteht. Wie steht es mit A und C?

$$A \cap C = \{(2,5),(4,3),(6,1)\}$$

und damit

$$\Pr[A \cap C] = \frac{3}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} = \Pr[A] \cdot \Pr[C] \text{ bzw. } \Pr[C|A] = \Pr[C]\,.$$

Beispiel 20 (Forts.)

Also sind auch A und C (und analog B und C) unabhängig.

Bemerkung: Im Beispiel ist $A \cap C \neq \emptyset$.
Es gilt sogar allgemein für zwei unabhängige Ereignisse A und B mit $\Pr[A], \Pr[B] > 0$, dass sie gar nicht disjunkt sein können, da ansonsten

$$0 = \Pr[\emptyset] = \Pr[A \cap B] \neq \Pr[A] \cdot \Pr[B] \,.$$

Beispiel 20 (Zweimaliges Würfeln (Forts.))

Zur Erinnerung:

$$\begin{aligned} A &:= \text{Augenzahl im ersten Wurf ist gerade,} \\ B &:= \text{Augenzahl im zweiten Wurf ist gerade,} \\ C &:= \text{Summe der Augenzahlen beider Würfe beträgt 7.} \end{aligned}$$

Wir betrachten das Ereignis $A \cap B \cap C$. Wenn $A \cap B$ eintritt, so sind beide gewürfelten Augenzahlen gerade und somit ergibt auch die Summe davon eine gerade Zahl. Daraus folgt $\Pr[A \cap B \cap C] = 0$ bzw. $\Pr[C|A \cap B] = 0 \neq \Pr[C]$. Das Ereignis $A \cap B$ liefert uns also Information über das Ereignis C.

Definition 22

Die paarweise verschiedenen Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{2}$$

Eine unendliche Familie von paarweise verschiedenen Ereignissen A_i mit $i \in \mathbb{N}$ heißt unabhängig, wenn (2) für jede endliche Teilmenge $I \subseteq \mathbb{N}$ erfüllt ist.