Satz 78

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist nicht abgeschlossen unter Durchschnitt oder Komplement.

Beweis:

Es genügt zu zeigen (wegen de Morgan (1806–1871)): nicht abgeschlossen unter Durchschnitt.

$$L_1 := \{a^i b^i c^j;\ i, j \geq 0\} \text{ ist kontextfrei}$$

$$L_2 := \{a^i b^j c^j;\ i, j \geq 0\} \text{ ist kontextfrei}$$

$$L_1 \cap L_2 = \{a^i b^i c^i;\ i \geq 0\} \text{ ist nicht kontextfrei}$$

□

Satz 79

Die Klasse der kontextfreien Sprachen ist abgeschlossen gegenüber Substitution (mit kontextfreien Mengen).

Beweis:

Ersetze jedes Terminal a durch ein neues Nichtterminal S_a und füge zu den Produktionen P für jedes Terminal a die Produktionen einer kontextfreien Grammatik $G_a = (V_a, \Sigma, P_a, S_a)$ hinzu.

Forme die so erhaltene Grammatik in eine äquivalente Chomsky-2-Grammatik um. $\square$

4.6 Greibach-Normalform

Definition 80

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontextfreie Grammatik. G ist in Greibach-Normalform (benannt nach Sheila Greibach (UCLA)), falls jede Produktion $\neq S \to \epsilon$ von der Form

$$A \to a\alpha \text{ mit } a \in \Sigma,\ \alpha \in V^*$$

ist.

Lemma 81

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei, $(A \to \alpha_1 B \alpha_2) \in P$, und sei $B \to \beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_r$ die Menge der B-Produktionen (also die Menge der Produktionen mit B auf der linken Seite). Ersetzt man $A \to \alpha_1 B \alpha_2$ durch $A \to \alpha_1\beta_1\alpha_2|\alpha_1\beta_2\alpha_2|\ldots|\alpha_1\beta_r\alpha_2$, so ändert sich die von der Grammatik erzeugte Sprache nicht.

Lemma 82

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ kontextfrei, sei $A \to A\alpha_1|A\alpha_2|\ldots|A\alpha_r$ die Menge der linksrekursiven A-Produktionen (alle $\alpha_i \neq \epsilon$, die Produktion $A \to A$ kommt o.B.d.A. nicht vor), und seien $A \to \beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_s$ die restlichen A-Produktionen (ebenfalls alle $\beta_i \neq \epsilon$).

Ersetzen wir alle A-Produktionen durch

$$\begin{aligned} A &\to \beta_1|\ldots|\beta_s|\beta_1 A'|\ldots|\beta_s A' \\ A' &\to \alpha_1|\ldots|\alpha_r|\alpha_1 A'|\ldots|\alpha_r A', \end{aligned}$$

wobei A' ein neues Nichtterminal ist, so ändert sich die Sprache nicht, und die neue Grammatik enthält keine linksrekursive A-Produktion mehr.

Beweis:
Von A lassen sich vor der Transformation alle Zeichenreihen der Form

$$(\beta_1|\beta_2|\ldots|\beta_s)(\alpha_1|\alpha_2|\ldots|\alpha_r)^*$$

ableiten.

Dies ist auch nach der Transformation der Fall. Während vor der Transformation alle Zeichenreihen der obigen Form von rechts her aufgebaut werden, werden sie danach von links nach rechts erzeugt.

Die Umkehrung gilt ebenso. $\square$

Satz 83

Zu jeder kontextfreien Grammatik G gibt es eine äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform.

Beweis:

Sei o.B.d.A. $G = (V, \Sigma, P, S)$ mit $V = \{A_1, \ldots, A_m\}$ in Chomsky-Normalform und enthalte keine nutzlosen Variablen.

Bemerkung: Im folgenden Algorithmus werden ggf neue Variablen hinzugefügt, die Programmvariable m ändert sich dadurch entsprechend!

Beweis:

for $k = 1, \ldots, m$ **do**
  for $j = 1, \ldots, k-1$ **do**
    for all $(A_k \to A_j\alpha) \in P$ **do**
      ersetze die Produktion gemäß der Konstruktion
      in Lemma 81
    od
  od
  co die rechte Seite keiner A_k-Produktion beginnt nun
    noch mit einer Variablen A_j, $j < k$ **oc**

  ersetze alle linksrekursiven A_k-Produktionen gemäß der
  Konstruktion in Lemma 82
  co die rechte Seite keiner A_k-Produktion beginnt nun
    noch mit einer Variablen A_j, $j \leq k$ **oc**
od

Beweis (Forts.):

Da nun für jede Produktion der Form

$$A_k \to A_j \alpha$$

gilt:

$$j > k$$

(dies impliziert insbesondere, dass die rechte Seite jeder A_m-Produktion mit einem Terminalzeichen beginnt), können wir durch genügend oftmalige Anwendung der Konstruktion in Lemma 81 erreichen, dass jede rechte Seite mit einem Terminalzeichen beginnt. $\square$

Korollar 84

Sei G eine kontextfreie Grammatik. Es gibt einen Algorithmus, der eine zu G äquivalente Grammatik in Greibach-Normalform konstruiert, deren rechte Seiten jeweils höchstens zwei Variablen enthalten.

Beweis:

Klar! $\square$

4.7 Kellerautomaten

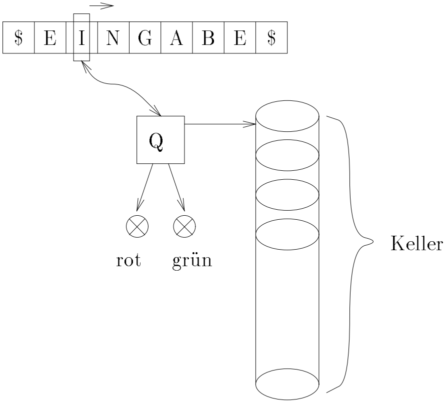
In der Literatur findet man häufig auch die Bezeichnungen Stack-Automat oder Pushdown-Automat. Kellerautomaten sind, wenn nichts anderes gesagt wird, nichtdeterministisch.

Definition 85

Ein NPDA $=$ PDA ($=$ Nichtdeterministischer Pushdown-Automat) besteht aus:

Q	endliche Zustandsmenge
Σ	endliches Eingabealphabet
Δ	endliches Stackalphabet
$q_0 \in Q$	Anfangszustand
$Z_0 \in \Delta$	Initialisierung des Stack
δ	Übergangsrelation
	Fkt. $Q \times (\Sigma \cup \{\epsilon\}) \times \Delta \to 2^{Q \times \Delta^*}$
	wobei $\lvert\delta(q, a, Z)\rvert + \lvert\delta(q, \epsilon, Z)\rvert < \infty \quad \forall q, a, Z$
$F \subseteq Q$	akzeptierende Zustände

Der Kellerautomat



Konfiguration:

Tupel (q, w, α) mit

$$\begin{array}{ll} q & \in Q \\ w & \in \Sigma^* \\ \alpha & \in \Delta^* \end{array}$$

Schritt:

$(q, w_0 w', Z\alpha') \to (q', w', Z_1 \ldots Z_r \alpha')$
wenn $(q', Z_1 \ldots Z_r) \in \delta(q, w_0, Z)$
bzw.:
$(q, w, Z\alpha') \to (q', w, Z_1 \ldots Z_r \alpha')$
wenn $(q', Z_1 \ldots Z_r) \in \delta(q, \epsilon, Z)$

Definition 86

1. Ein NPDA A akzeptiert $w \in \Sigma^*$ durch leeren Stack, falls

$$(q_0, w, Z_0) \to^* (q, \epsilon, \epsilon) \text{ für ein } q \in Q\ .$$

2. Ein NPDA A akzeptiert $w \in \Sigma^*$ durch akzeptierenden Zustand, falls

$$(q_0, w, Z_0) \to^* (q, \epsilon, \alpha) \text{ für ein } q \in F,\ \alpha \in \Delta^*\ .$$

3. Ein NPDA heißt deterministisch (DPDA), falls

$$|\delta(q, a, Z)| + |\delta(q, \epsilon, Z)| \le 1 \qquad \forall (q, a, Z) \in Q \times \Sigma \times \Delta\ .$$

Beispiel 87

Der PDA mit

$$
\begin{array}{lcll}
\delta(q_0, a, *) & = & \{(q_0, a\,*)\} & \text{für } a \in \{0,1\}, * \in \{0,1,Z_0\} \\
\delta(q_0, \#, *) & = & \{(q_1, \,*\,)\} & \text{für } * \in \{0,1,Z_0\} \\
\delta(q_1, 0, 0) & = & \{(q_1, \,\epsilon\,)\} & \\
\delta(q_1, 1, 1) & = & \{(q_1, \,\epsilon\,)\} & \\
\delta(q_1, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_1, \,\epsilon\,)\} & \text{akzeptiert mit leerem Stack}
\end{array}
$$

die Sprache

$$L = \{w\#w^R;\ w \in \{0,1\}^*\}\,.$$

Beispiel 87

Der PDA mit

$$
\begin{array}{lcll}
\delta(q_0, a, *) & = & \{(q_0, a\,*)\} & \text{für } a \in \{0,1\}, * \in \{0,1,Z_0\} \\
\delta(q_0, \#, *) & = & \{(q_1, \,*\,)\} & \text{für } * \in \{0,1,Z_0\} \\
\delta(q_1, 0, 0) & = & \{(q_1, \,\epsilon\,)\} & \\
\delta(q_1, 1, 1) & = & \{(q_1, \,\epsilon\,)\} & \\
\delta(q_1, \epsilon, Z_0) & = & \{(q_a, \,\epsilon\,)\} & \text{akzeptiert mit akzeptierendem} \\
 & & & \text{Zustand } (F = \{q_a\}) \\
 & & & \text{(und leerem Stack)}
\end{array}
$$

die Sprache

$$L = \{w\#w^R;\ w \in \{0,1\}^*\}\,.$$