Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Lösungen der Klausur
30. Juli 2015

Theoretische Informatik

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Bachelor ☐ Inform. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....
Hörsaal	**Reihe**	**Sitzplatz**	**Unterschrift**
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

Max P	**A1** 4	**A2** 11	**A3** 10	**A4** 9	**A5** 9	**A6** 9	**A7** 8	Σ 60	Korrektor
Erstkorr.									
Zweitkorr.									

Aufgabe 1 (4 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Das Komplement einer nichtregulären kontextfreien Sprache ist stets nicht kontextfrei.
2. Seien $A, B \subseteq \{0,1\}^*$. Falls A auf B (effektiv) reduzierbar ist und B kontextfrei ist, dann ist auch A kontextfrei.
3. Für jede μ-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ gilt, dass deren Definitionsbereich $D_f = \{n \in \mathbb{N}_0\,;\, f(n) \neq \perp\}$ semi-entscheidbar ist.
4. Sei $\Sigma = \{0,1\}$. Das Komplement $\overline{H_0} = \Sigma^* \setminus H_0$ des Halteproblems $H_0 = \{w \in \Sigma^*\,;\, M_w[\epsilon]\downarrow\}$ auf leerem Band ist semi-entscheidbar.

Lösung

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Falsch! Es gibt komplementierbare deterministische Kellerautomaten, die eine nichtreguläre Sprache akzeptieren.
2. Falsch! Seien $A = \{0^n1^n0^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}$, $B = \{\epsilon\}$ und $f(w) = \epsilon$ für $w \in A$, und $f(w) = 1 \in \Sigma^*$ sonst. f ist total und berechenbar.
3. Wahr! Jede μ-rekursive Funktion $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ ist berechenbar.

   Es folgt $\chi'_{D_f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{falls } f(x) \neq \perp \\ \perp & \text{sonst} \end{cases}$ ist berechenbar, da f berechenbar ist.
4. Falsch! Da H_0 semi-entscheidbar ist, wäre H_0 entscheidbar, wenn auch $\overline{H_0}$ semi-entscheidbar wäre. H_0 ist aber bekanntlich nicht entscheidbar. Widerspruch!

Aufgabe 2 (11 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, +, |\}$. Wir nennen das Zeichen „|“ Betragsstrich. Sei B_n mit $n \in \mathbb{N}_0$ die Menge aller Wörter w über Σ, so dass die Anzahl der in w vorkommenden Betragsstriche gleich n ist. Beispiel: $a + |a| + a \in B_2$.

Sei $L = L(G)$ die von der kontextfreien Grammatik $G = (\Sigma, \{S\}, P, S)$ mit den folgenden Produktionen erzeugte Sprache:

$$S \to a\,, \quad S \to S + S\,, \quad S \to |S|\,.$$

1. Zeigen Sie, dass das Wort $a + |a| + a$ in L enthalten ist und beweisen Sie, dass die Grammatik G mehrdeutig ist.

2. Geben Sie den Übergangsgraphen eines nichtdeterministischen endlichen Automaten A_2 an, der die Sprache $L_2 = L \cap B_2$ akzeptiert.

3. Seien $m, n \in \mathbb{N}_0$ mit $m < n$. Seien $x = |^m$ und $y = |^n$, d.h. $x, y \in \{|\}^*$ und x enthalte weniger Betragsstriche als y. Beispiel: $x = ||$ und $y = |||$.

   Zeigen Sie $xay \notin L$.

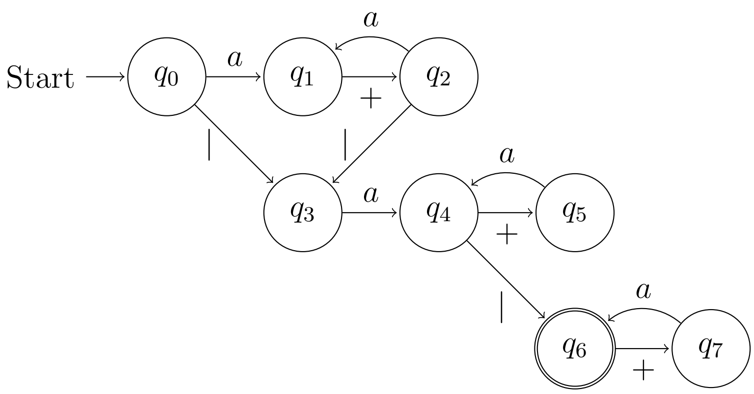
4. Zeigen Sie mit Hilfe des Pumping-Lemmas für reguläre Sprachen, dass L nicht regulär ist. Sie dürfen dabei Teilaufgabe 3 als bewiesen voraussetzen.

Lösung

Vorbehaltlich einer Änderung der Detailbepunktung.

1. Zwei Linksableitungen von $a + |a| + a$:

   $S \to a + S \to a + S + S \to a + |S| + S \to a + |a| + S \to a + |a| + a\,,$
   $S \to S + S \to a + S \to a + S + S \to a + |S| + S \to a + |a| + S \to a + |a| + a\,.$ (2P)

2. 

   (4P)

3. Wenn nur ein a auftritt, dann darf die Produktion $S \to S + S$ nicht angewandt werden. Dann können nur $w = |^n a|^n$ abgeleitet werden. Begründung mit struktureller Induktion: 1. $w = a$ ist ableitbar und es gilt $w = |^0 a|^0$. 2. Falls $w = |^n a|^n$ ableitbar ist, dann ist $w' = |w|$ ableitbar und es gilt $w' = |^{n+1} a|^{n+1}|$. (2P)

4. Angenommen N ist eine Pumping-Lemma-Zahl. Sei $z = |^N a|^N$. Es gilt $z \in L$.

   Sei $z = uvw$, so dass $|uv| \leq N$, $v \neq \epsilon$ und für alle $i \in \mathbb{N}_0$ $uv^i \in L$ gilt.

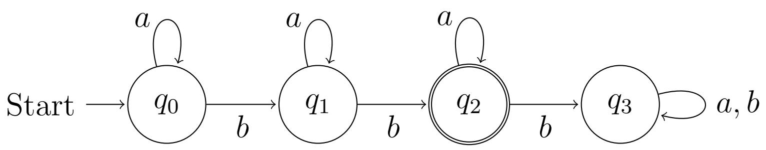
   Es folgt $v = |^k$ für ein $0 < k \leq N$. Damit folgt für $i = 0$ $z_i := uv^0w = |^{N-k}a|^N \in L$. Nach Teilaufgabe 3 gilt aber $|^{N-k}a|^N \notin L$. Widerspruch. (3P)

Aufgabe 3 (10 Punkte)

Mit $\Sigma = \{a, b\}$ definieren wir für alle $k \in \mathbb{N}$ einen deterministischen endlichen Automaten $A_k = (Q_k, \Sigma, \delta_k, q_0, \{q_k\})$ mit $k+2$ Zuständen aus $Q_k = \{q_0, q_1, \ldots, q_k, q_{k+1}\}$. δ_k sei wie folgt definiert für alle Zeichen $x \in \Sigma$ und Zustände $q_i \in Q_k$ mit $0 \leq i \leq k$:

$$\delta_k(q_i, a) = q_i, \quad \delta_k(q_i, b) = q_{i+1}, \quad \delta_k(q_{k+1}, x) = q_{k+1}\,,$$

z. B. für $k = 2$:



1. Für alle $k \geq 1$ zeige man die Minimalität des DFA A_k für die Sprache $L(A_k)$, d.h., dass verschiedene $p, q \in Q_k$ unterscheidbar sind, also $p \not\equiv_{A_k} q$ gilt.

   Hinweis: Zustände p, q sind unterscheidbar, falls es ein $w \in \Sigma^*$ gibt, so dass $\hat{\delta}(p, w)$ ein akzeptierender Zustand und gleichzeitig $\hat{\delta}(q, w)$ kein akzeptierender Zustand ist.

2. Sei $k = 1$. Wir ändern die Übergangsfunktion δ_1 von A_1 für q_0 nichtdeterministisch zu δ ab und erhalten einen nichtdeterministischen Automaten $B = (\{q_0, q_1, q_2\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_1\})$, so dass für alle $p \in \{q_1, q_2\}$ und $x \in \Sigma$ gilt

   $$\delta(q_0, a) = \{q_0\}, \quad \delta(q_0, b) = \{q_0, q_1\}, \quad \delta(p, x) = \{\delta_1(p, x)\}\,.$$

   Bestimmen Sie mit dem Potenzmengenverfahren einen deterministischen Automaten C, der die Sprache $L(B)$ akzeptiert. Stellen Sie den Automaten C durch einen Übergangsgraphen dar.

3. Geben Sie einen regulären Ausdruck β für die Sprache $L(B)$ an!

   Wie viele Zustände besitzt ein minimaler Automat, der $L(B)$ akzeptiert?

Lösung

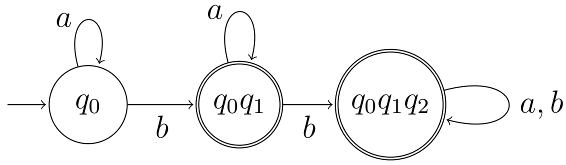
Vorbehaltlich einer Änderung der Detailbepunktung.

1. Für alle i, j mit $0 \leq i < j \leq k+1$ sei $w = b^{k-i}$. Dann gelten $\hat{\delta}_k(q_i, w) = \hat{\delta}_k(q_i, b^{k-i}) = q_k$ und $\hat{\delta}_k(q_j, w) = \hat{\delta}_k(q_j, b^{k-i}) = q_{k+1}$.

   Da q_k akzeptierend und q_{k+1} nicht akzeptierend sind, sind q_i und q_j unterscheidbar. (3P)

2. Anwendung des Potenzmengenverfahrens mit Kurznotation Menge als Folge:

$q \subseteq Q$	$\delta(q, a)$	$\delta(q, b)$
q_0	q_0	q_0q_1
q_0q_1	q_0q_1	$q_0q_1q_2$
$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2$	$q_0q_1q_2$



(5P)

3. $\beta = a^*b(a|b)^*$.

   Minimal 2 Zustände, weil q_0q_1 und $q_0q_1q_2$ von Teilaufg. 2 äquivalent sind. (2P)

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Wir betrachten die Grammatik $G = (V, \{a, b\}, P, S)$ mit $V = \{S, S_0, S_1, S_2, A, B\}$ und den Produktionen

$$\begin{array}{llll} S \to AS_0\,, & S_0 \to BB\,, & A \to a\,, & B \to b\,, \\ S \to AS_1\,, & S_1 \to S_2B\,, & S_2 \to SB\,. & \end{array}$$

1. Beweisen Sie durch Anwendung des CYK-Verfahrens, dass a^2b^3 nicht in der von G erzeugten Sprache enthalten ist, d. h. $a^2b^3 \notin L(G)$.

2. Leiten Sie systematisch einen zu G äquivalenten Kellerautomaten K her.

3. Geben Sie einen zu G äquivalenten deterministischen Kellerautomaten K' in Normalform an.

Lösung

Vorbehaltlich einer Änderung der Detailbepunktung.

1.

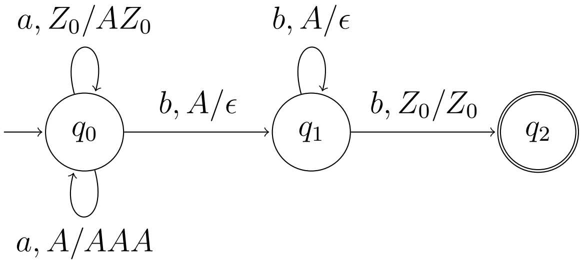
15 $\emptyset$				
14 $\emptyset$	25 S_2			
13 $\emptyset$	24 S	35 $\emptyset$		
12 $\emptyset$	23 $\emptyset$	34 S_0	45 S_0	
11 A	22 A	33 B	44 B	55 B
a	a	b	b	b

$V_{1,5}$ ist leer, deshalb kann a^2b^3 nicht abgeleitet werden. (4P)

2. K wird als nichtdeterministischer KA $K = (\{q_0\}, \Sigma, V, q_0, S, \delta, \emptyset)$ mit $L_\epsilon(K) = L(G)$ nach Übungsblatt 8 konstruiert.

   Wir listen die einzelnen Übergänge wie folgt auf.
   $\delta(q_0, \epsilon, S) \ni (q_0, AS_0)\,,\quad \delta(q_0, \epsilon, S_0) \ni (q_0, BB)\,,$
   $\delta(q_0, a, A) \ni (q_0, \epsilon)\,,\quad \delta(q_0, b, B) \ni (q_0, \epsilon)\,,$
   $\delta(q_0, \epsilon, S) \ni (q_0, AS_1)\,,\quad \delta(q_0, \epsilon, S_1) \ni (q_0, S_2B)\,,\quad \delta(q_0, \epsilon, S_2) \ni (q_0, SB)\,.$ (3P)

3. Es gilt $L(G) = \{a^n b^{2n}\,;\, n \in \mathbb{N}\}$. $L(G) = L(K')$ mit K' wie folgt, ohne die Übergänge auf einen Fangzustand und ohne Auflösung der doppelten Speicherung AA:



(2P)

Einzelschritte für Speicherung AA: $\delta'(q_0, a, A) = (q_0', AA)$, $\delta'(q_0', \epsilon, A) = (q_0, AA)$.
Es genügt, die fehlenden Übergänge auf den Fangzustand zu erwähnen.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Die Funktionen $eq(x,y) = \begin{cases} 1 : \text{falls } x = y \\ 0 : \text{sonst} \end{cases}$ und $\mathit{ifthen}(n,a,b) = \begin{cases} a : \text{falls } n \neq 0 \\ b : n = 0 \end{cases}$ sind bekanntlich primitiv-rekursiv. Dies darf im Folgenden vorausgesetzt werden.

1. Zeigen Sie, dass die folgende Funktion $g : {\mathbb{N}_0}^3 \to \mathbb{N}_0$ primitiv-rekursiv ist:

$$g(x,y,z) = \begin{cases} y : \text{falls } x = y \\ z : \text{sonst} \end{cases} .$$

2. Sei f eine μ-rekursive Funktion mit Werten aus $\mathbb{N}_0$, die auf einer <u>echten</u> Teilmenge D von $\mathbb{N}_0$ definiert ist.

   Zeigen Sie: Es gibt eine μ-rekursive Funktion f' und eine Zahl $x' \notin D$, so dass gilt

$$f'(x) = f(x) \text{ für alle } x \in D \quad \text{und} \quad f'(x') \neq \perp .$$

3. Sei f eine μ-rekursive Funktion mit Werten aus $\mathbb{N}_0$, die auf einer Teilmenge D von $\mathbb{N}_0$ definiert ist.

   Man zeige: Falls D entscheidbar ist, dann gibt es eine totale μ-rekursive Funktion $f' : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$, so dass für alle $x \in D$ gilt $f'(x) = f(x)$.

Lösung

Vorbehaltlich einer Änderung der Detailbepunktung.

1. $g(x,y,z) = ifthen(eq(x,y),y,z)$.

   g ist eine Komposition primitiv-rekursiver Funktionen. (2P)

2. $f'(x) := g'(x,x',f(x))$, wobei g' durch eine Turingmaschine realisiert wird, die im Fall $x = x'$ mit dem Wert x' stoppt, und andernfalls $g(x,x',f(x))$ berechnet.

   Da nun f' Turing-berechenbar ist, folgt ihre μ-Rekursivität. (3P)

3. Eine entscheidbare Menge D besitzt eine charakteristische Funktion χ_D von D, die berechenbar ist, insbesondere also total und μ-rekursiv. Man realisiert $ifthen'$ wie vorhin g' durch eine Turing-Maschine, die zunächst im Fall $\chi_D(x) = 1$ $f(x)$ berechnet und andernfalls x ausgibt:

$$f'(x) = ifthen'(\chi_D(x), f(x), x) . \qquad (4P)$$

   <u>Bemerkung:</u> Falls D leer ist, gilt die Aussage trivialerweise. Falls $D \neq \emptyset$, z.B. $x_0 \in D$, dann kann man f' ohne Bezug auf Turingmaschinen wie folgt darstellen:

$$f'(x) = ifthen(\chi_D(x), f(\,(1-\chi_D)\cdot x_0 + \chi_D(x)\cdot x\,), x) .$$

Aufgabe 6 (9 Punkte)

Wir betrachten deterministische 1-Band-Turingmaschinen der Form $(Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit $\Sigma = \{a\}$. Eine (Berechnungs-)Konfiguration (α, q_0, β) nennen wir eine freie Startkonfiguration, falls $\alpha\beta = lwr$ mit $w \in \Sigma^+$ und $l, r \in \{\Box\}^*$. Man beachte, dass bei dieser Konfiguration der Kopf der Turingmaschine nicht notwendigerweise über dem Wortanfang von w stehen muss, insbesondere auch über einem leeren Feld (Inhalt $\Box$) stehen kann, und dass w nicht leer ist.

1. Definieren Sie durch Angabe der Übergangsfunktion δ eine deterministische 1-Band-Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$ mit $\Sigma = \{a\}$, die mit einer freien Startkonfiguration (α, q_0, β) startet, dann den Kopf der Maschine auf ein nichtleeres Feld setzt und stoppt. Im Laufe der Berechnung dürfen nur leere Felder hilfsweise beschrieben werden. Die geänderten Feldinhalte müssen zum Ende wieder gelöscht, d.h. mit $\Box$ überschrieben werden.

2. Beschreiben Sie kurz die Konstruktionsidee für M.

Lösung

Vorbehaltlich einer Änderung der Detailbepunktung.

1. Seien $Q = \{q_0, q_f, q_{xr}, q_{xl}, q_r, q_l, q_{Lr}, q_{Ll}\}$, $\Gamma = \{X, \Box\}$.

$$\begin{array}{lll}
\delta(q_0, a) = (q_f, a, N)\,, & \delta(q_0, \Box) = (q_{xr}, X, R)\,, & \\[4pt]
\delta(q_{xr}, \Box) = (q_{xl}, X, L)\,, & \delta(q_{xr}, a) = (q_l, a, L)\,, & \delta(q_{xr}, X) = (q_{xr}, X, R)\,, \\
\delta(q_{xl}, \Box) = (q_{xr}, X, R)\,, & \delta(q_{xl}, a) = (q_r, a, R)\,, & \delta(q_{xl}, X) = (q_{xl}, X, L)\,, \\[4pt]
\delta(q_r, X) = (q_r, X, R)\,, & \delta(q_r, \Box) = (q_{Ll}, \Box, L)\,, & \\
\delta(q_l, X) = (q_l, X, L)\,, & \delta(q_l, \Box) = (q_{Lr}, \Box, R)\,, & \\[4pt]
\delta(q_{Lr}, X) = (q_{Lr}, \Box, R)\,, & \delta(q_{Lr}, a) = (q_f, a, N)\,, & \\
\delta(q_{Ll}, X) = (q_{Ll}, \Box, L)\,, & \delta(q_{Ll}, a) = (q_f, a, N)\,. &
\end{array}$$

(7P)

2. Symmetrische Suche abwechselnd nach links und rechts erweitern und mit X markieren, usw.

   Bei gefundenem a Löschung der X links oder rechts von a, je nachdem wo man hergekommen ist.

   q_{xr}: Suche nach rechtem Ende der Hilfszeichenkette mit Zeichen X.
   q_{xl}: Suche nach linkem Ende der Hilfszeichenkette mit Zeichen X.
   q_r: a gefunden, Vorbereitung Löschung X rechts.
   q_l: a gefunden, Vorbereitung Löschung X links.
   q_{Lr}: Löschung der X links von der Eingabe mit Rechtslauf.
   q_{Ll}: Löschung der X rechts von der Eingabe mit Linkslauf. (2P)

Aufgabe 7 (8 Punkte)

1. Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Bestimmen Sie alle Lösungen des Post'schen Korrespondenzproblems

$$P = (\ (ab, bba), (abb, a), (ba, a), (a, bab)\ ) .$$

2. Zeigen Sie die Entscheidbarkeit des folgenden Problems:

   Gegeben: Eine deterministische Turingmaschine M, ein Eingabewort $w \neq \epsilon$.

   Problem: M werde mit Eingabe w und Kopf über dem ersten Zeichen von w gestartet. Steht M während einer Berechnung jemals über einem leeren Feld, d.h mit $\Box$-Symbol als Inhalt?

3. Die Nachfolgerfunktion $s(n) = n + 1$ für natürliche Zahlen $n \in \mathbb{N}_0$ ist bekanntlich berechenbar mithilfe einer Turingmaschine M_s.

   Ist es entscheidbar, ob eine gegebene Turingmaschine M diese Nachfolgerfunktion s berechnet? Beweisen Sie, dass Ihre Antwort korrekt ist!

Lösung

Vorbehaltlich einer Änderung der Detailbepunktung.

1. Jede Lösung $i_1 i_2 \ldots$ muss mit dem zweiten Paar (abb, a) beginnen, also ist $i_1 = 2$ und die Berechnung beginnt mit $(x, y) = (abb \ldots, a \ldots)$.
   Die Fortsetzung mit dem ersten Paar ist zwingend, also gilt $i_2 = 1$ mit $(x, y) = (abbab \ldots, abba \ldots)$.
   Die Fortsetzung mit dem ersten Paar scheitert, und ist mit dem vierten Paar, $i_3 = 4$ mit $(x, y) = (abbaba \ldots, abbabab \ldots)$.
   Nun wird mit $i_4 = 3$ zwingend abgeschlossen: $(x, y) = (abbababa, abbababa)$.

   Die Menge aller Lösungen ist $\{(i_1 i_2 i_3 i_4)^n\,;\, n \in \mathbb{N}, i_1 = 2, i_2 = 1, i_3 = 4, i_4 = 3\}$.

   (3P)

2. Die Länge n der Eingabe w kann bestimmt werden. Mit M sind $|\Gamma|$ und $|Q|$ bekannt, wobei Γ das Bandalphabet und Q die Zustandsmenge von M seien. Der Kopf von M kann auf w $n = |w|$ Positionen einnehmen.

   Entsprechend muss sich nach $s = n \cdot |\Gamma|^n \cdot |Q|$ Berechnungsschritten entweder eine Konfiguration wiederholt haben, oder es muss ein Leerzeichen $\Box$ erreicht worden sein. (3P)

3. Nein! Satz von Rice: Wir definieren die einelementige Menge von Funktionen $F = \{s(n)\}$. F ist nicht trivial, d.h. weder nichtleer noch gleich der Menge aller Funktionen von $\mathbb{N}_0$ in $\mathbb{N}_0$, . Damit ist $G(F) = \{w\,;$ die von M_w berechnete Funktion ist in $F\}$ nicht entscheidbar. (2P)