Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Lösungsblatt 6
30. Mai 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Aus einer Box B_X bzw. B_Y werden zufällig Lose mit Werten $X \in \{-1, 0, 1\}$ bzw. $Y \in \{2, 3, 4\}$ gezogen. Die Werte 1 und 2 sollen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, alle übrigen Werte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. X und Y seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen. Es sei $S = X + Y$.

Seien S_i die i-te Durchführung bzw. Wiederholung der Ziehung S und Z der Mittelwert aus n Wiederholungen von S, d. h.

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i \,.$$

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$.
2. Zeigen Sie für alle $n > 27$: $\Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < 0,5] \geq 0,8$.

Lösung

1.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= -1 \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot \tfrac{1}{4} + 1 \cdot \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{1}{4}\,,\\
\mathbb{E}[Y] &= 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 \cdot \tfrac{1}{4} + 4 \cdot \tfrac{1}{4} &&= \tfrac{11}{4}\,,\\
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] &&= 3\,,\\
\mathbb{E}[Z] &= \tfrac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[S] &&= 3\,.
\end{aligned}$$

   Die Variation von Z berechnet sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= (-1)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 0^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{2} &&= \tfrac{3}{4}\,,\\
\mathbb{E}[Y^2] &= 2^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{4} &&= \tfrac{33}{4}\\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 &&= \tfrac{11}{16}\,,\\
\mathrm{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 &&= \tfrac{11}{16}\,,\\
\mathrm{Var}[S] &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] &&= \tfrac{11}{8}\,.
\end{aligned}$$

   Wir erhalten

$$\mathrm{Var}[Z] = \tfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[S] = \tfrac{11}{8n}\,.$$

(3P)

2. Nach Chebyshev gilt für alle $t > 0$

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t] \leq \tfrac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2}$$

bzw.

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| < t] \geq 1 - \frac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2}\,.$$

Wegen $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[S]$ folgt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < \tfrac{1}{2}] \geq 1 - \tfrac{4}{n} \cdot \tfrac{11}{8}$$

und wir setzen

$$1 - \tfrac{11}{2n} \geq 0{,}8 = \tfrac{4}{5}\,.$$

Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$n \geq 27\,. \qquad \text{(2P)}$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Die Unfallhäufigkeit auf Autobahnen hängt u. a. von den gefahrenen Geschwindigkeiten ab. Wir betrachten für $10^4 = 10000$ Autos 2 Geschwindigkeitsklassen s und l mit $|s| = 1000$ und $|l| = 9000$ Autos. Die Unfallwahrscheinlichkeit in einem bestimmten Streckenabschnitt sei für die Autos der s-Klasse $\frac{11}{1000}$ bzw. der l-Klasse $\frac{1}{1000}$.
Ein Unfall werde für jedes der Autos der s- bzw. l-Klasse mit einer Zufallsvariablen X_i bzw. Y_j mit $i \in [1000]$ bzw. $j \in [9000]$ angezeigt. Die Anzahl der Unfälle insgesamt werde angezeigt durch die Zufallsvariable U.
Wir nehmen sämtliche Unfälle als unabhängig an.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[U]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[U]$ als Dezimalzahl ggf. auf 2 Nachkommastellen genau.

   Begründen Sie die Gültigkeit Ihrer Berechnungsschritte!

2. Geben Sie mithilfe der Chebyshevschen Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke c für die Wahrscheinlichkeit $\Pr[U \geq 25]$ an, so dass also $\Pr[U \geq 25] \leq c$ gilt.

3. Geben Sie nun mithilfe der Abschätzung nach Chernoff eine obere Schranke c für $\Pr[U \geq 25]$ an. Stellen Sie c als arithmetischen Ausdruck inklusive Exponentialfunktion, aber ohne Variablen dar.

Lösung

1. Seien $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ und $Y = \sum_{j=1}^{9000} Y_j$.

   X bzw. Y sind binomialverteilt mit $p_x = \frac{11}{1000}$ bzw. $p_y = \frac{1}{1000}$

   Es gilt $\mathbb{E}[X] = 1000 \cdot p_x = 11$
   bzw. $\mathbb{E}[Y] = 9000 \cdot p_y = 9$

   und $\mathrm{Var}[X] = 1000 \cdot p_x(1 - p_x) = 10{,}879$
   bzw. $\mathrm{Var}[Y] = 9000 \cdot p_y(1 - p_y) = 8{,}991.$

   Dann gilt $U = X + Y$. Wegen Linearität bzw. Unabhängigkeit der Unfälle folgt
   $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 20,$
   $\mathrm{Var}[U] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 19{,}88.$ (1P)

2.
$$\begin{aligned}\Pr[U \geq 25] &= \Pr[U - 20 \geq 5]\\ &\leq \Pr[U-20 \geq 5] + \Pr[20 - U \geq 5]\\ &= \Pr[|U-20| \geq 5]\\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(U)}{5^2} = \frac{19,88}{25} = 0,7952.\end{aligned}$$

(2P)

3. Seien $\delta = \frac{1}{4}$ und $\mu = \mathbb{E}[U]$. Dann gilt $(1+\delta)\mu = 25$.
$$\begin{aligned}\Pr[U \geq 25] &\leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu}\\ &= \left(\frac{e^{\frac{1}{4}}}{(1+\frac{1}{4})^{(1+\frac{1}{4})}}\right)^{20} \quad =: c\,.\end{aligned}$$

(2P)

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Zwei Spieler A und B werfen je 6 Mal eine faire Münze mit „Kopf“ oder „Zahl“.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A mindestens so oft „Kopf“ wirft wie Spieler B?

Lösung

Wir bezeichnen die Spieler mit A und B. Die Zufallsvariablen X bzw. Y geben die Anzahl der Würfe mit Ergebnis „Kopf“ von Spieler A bzw. B an.

Bemerkung: Für die Modellierung des Spiels verwendet man wie üblich Indikatorvariable X_i und Y_i, die mit den Werten 1 bzw. 0 das Ergebnis „Kopf“ bzw. „Zahl“ im i-ten Wurf anzeigen. Der gemeinsame Definitionsbereich für die Variablen ist $\Omega = \{(a,b)\,;\, a,b \in \{\text{„Kopf“}, \text{„Zahl“}\}^6\}$. Es gilt $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{2}$, $\Pr[Y_i = 1] = \frac{1}{2}$.

$X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ und $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ sind unabhängig. X und Y sind binomialverteilt mit $X, Y \sim \mathrm{Bin}(6, \frac{1}{2})$.

Es gibt die drei disjunkten Ereignisse $E_1 = (X = Y)$, $E_2 = (X > Y)$ und $E_3 = (X < Y)$.
Offenbar gilt $(X \geq Y) = E_1 \cup E_2$.
Es gelten
$$\begin{aligned}\Pr[E_1] + \Pr[E_2] + \Pr[E_3] &= 1 \qquad\qquad \text{und}\\ \Pr[E_2] &= \Pr[E_3]\,.\end{aligned}$$

Für das Ereignis $E_1 \subseteq \Omega$, dass beide Spieler gleich oft „Kopf“ werfen, gilt
$$E = \bigcup_{i=0}^{6} (X = i \cap Y = i)\,.$$

Aufgrund der Unabhängigkeit bzw. Disjunktheit der Ereignisse $(X = i)$ und $(Y = j)$ folgt

$$\begin{aligned}
\Pr[E_1] &= \sum_{i=0}^{6} \Pr[X = i] \cdot \Pr[Y = i] \\
&= \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{6}{i}\left(\frac{1}{2}\right)^6 \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 924 = \frac{231}{1024}\,.
\end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{2}(1 + \Pr[E_1]) = \frac{1255}{2048} \approx 0,6128\,.$$

(5P)

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien X, Y unabhängige, Poisson-verteilte Zufallsvariable $X, Y \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

1. Zeigen Sie, dass $(X + X) \sim \mathrm{Po}(\lambda + \lambda)$ nicht gilt, wohl aber $(X + Y) \sim \mathrm{Po}(\lambda + \lambda)$. Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $Z = X + X$.
2. Berechnen Sie $\mathbb{E}[2X + 5]$.
3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[\,(X-n+1)^{\overline{n}}\,]$ für die steigende Potenz $(X-n+1)^{\overline{n}}$.

Lösung

1. $W_{(X+X)}$ enthält nur geradzahlige Zahlen, während die Poisson-Verteilung auch ungeraden Zahlen eine Wahrscheinlichkeit $\neq 0$ definiert. Die Verteilungen können also nicht gleich sein.

   Da X, Y unabhängig sind, gilt die Gleichung $(X + Y) \sim \mathrm{Po}(\lambda + \lambda)$ nach Satz 59 der Vorlesung. (2P)

2. Es gilt $E[X] = \lambda$. Wir benützen die Linearität des Erwartungswerts. Dann folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[2X + 5] &= 2\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[5] \\
&= 2\lambda + 5\,.
\end{aligned}$$

(1P)

3.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\,(X-n+1)^{\overline{n}}\,] &= \mathbb{E}[X^{\underline{n}}] \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\ldots(i-n+1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-n)!} \\
&= \lambda^n \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(i-n)}}{(i-n)!} \\
&= \lambda^n\,.
\end{aligned}$$

(2P)

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Lösung

Die Dichte einer negativ binomialverteilten Variablen X_n eines Wertes i bei Erfolgswahrscheinlichkeit p für n Wiederholungen ist

$$f_{X_n}(i) = \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} .$$

Man beachte, dass mit $\binom{i-1}{n-1} = \frac{(i-1)^{\underline{n-1}}}{(n-1)!}$ sofort $\binom{i-1}{n-1} = 0$ und $i < n$ folgt.
Für die erzeugende Funktion $G_{X_n}(s)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i . \end{aligned}$$

Ein Schlüssel für eine geschlossene Darstellung der Funktion $G_{X_n}(s)$ kann u. a. die Rekursion für alle $n \geq 1$ sein mit

$$G_{X_{n+1}}(s) = \frac{p \cdot s^2}{n} \cdot G'_{X_n}(s) ,$$

wobei laut Vorlesung für $n = 1$ gilt

$$G_{X_1}(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s} .$$

Beweis der Rekursion:

$$\begin{aligned} G'_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot i \cdot s^{i-1} \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-n} \cdot s^{i+1} \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i-1}{n+1-1} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-(n+1)} \cdot s^i \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot G_{X_{n+1}}(s) . \end{aligned}$$

Ein alternativer Ansatz $X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$ mit unabhängig geometrisch verteilten Z_i ist nach Vorlesung

$$G_{X_n}(s) = G_{Z_1}(s) \cdot G_{Z_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{Z_n}(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s} \right)^n .$$

Vorbereitung 2

Wir betrachten eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit $W_X = \{0,1,2\}$ und der Dichtefunktion $f_X(i) = \binom{2}{i}(\frac{1}{3})^i(\frac{2}{3})^{2-i}$ für $i \in W_X$. Außerdem sei eine Zufallsvariable Y gegeben mit $W_Y = \{1,2\}$ und $\Pr[Y = 1] = \frac{1}{2}$.

1. Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen $G_X(z)$ und $G_Y(z)$ für X bzw. Y!

2. Nun betrachten wir das folgende Zufallsexperiment:
   Zunächst wird Y getestet. Der Wert von Y bestimmt, ob die Zufallsvariable X nur ein erstes Mal getestet wird mit Wert X_1, oder ob X auch ein zweites Mal getestet wird mit Wert X_2 beim zweiten Test. Je nachdem bestimmen wir dann $Z = X_1$ oder $Z = X_1 + X_2$.

   Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen Z!

3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_Z von Z!

Lösung

1.
$$\begin{aligned}
G_X(z) &= \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)z + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 z^2 \\
&= \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9}z + \tfrac{1}{9}z^2 \\
&= \tfrac{1}{9}(z+2)^2. \\
G_Y(z) &= \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}z^2.
\end{aligned}$$

2.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= n \cdot p = 2 \cdot \tfrac{1}{3}, \\
\mathbb{E}[Y] &= \tfrac{3}{2}, \\
\mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 1.
\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}
G_Z(z) &= G_Y(G_X(z)) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{9}(z+2)^2 + \tfrac{1}{81}(z+2)^4\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{81}\left(9z^2 + 36z + 36 + z^4 + 8z^3 + 24z^2 + 32z + 16\right) \\
&= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{81}\left(z^4 + 8z^3 + 33z^2 + 68z + 52\right).
\end{aligned}$$

Damit ergeben sich die Dichtewerte aus den Koeffizienten des Polynoms $G_Z(z)$.

$$\begin{aligned}
f_Z(0) &= \tfrac{52}{162}, \\
f_Z(1) &= \tfrac{68}{162}, \\
f_Z(2) &= \tfrac{33}{162}, \\
f_Z(3) &= \tfrac{8}{162}, \\
f_Z(4) &= \tfrac{1}{162}.
\end{aligned}$$

Vorbereitung 3

Es sei Ω eine Ergebnismenge. Wir nehmen an, dass wir für eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten definieren wollen. Wir suchen dazu eine kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{E}$ enthält.
Sei

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A}\,;\, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist und dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ die Relation $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

2. Die Borelschen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ über $\mathbb{R}^2$ sind definiert durch

   $$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = \{[a,b] \times [c,d]\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

Lösung

1. Wir lernen ein wichtiges Beweisprinizip kennen:
   Konstruktion mittels Bildung des Durchschnitts (z. B. von Algebren).

   Wir zeigen zunächst, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

   Dazu sind die folgenden Abgeschlossenheitseigenschaften des Systems $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ nachzuweisen:

   (E1) $\quad \Omega \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

   (E2) $\quad A \in \sigma_\Omega(\mathcal{E}) \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

   (E3) $\quad A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ für alle $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

   Beweis: Elementar.

   Nun zeigen wir:
   Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.
   Beweis:
   $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist Durchschnitt aller σ-Algebren mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$.
   Daraus folgt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

2. Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Dann ist die Menge $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ mit

   $$\mathcal{E}' = \{[a,b] \times [c,d]\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$$

   abzählbar.
   Das Komplement von K läßt sich durch Elemente von $\mathcal{E}'$ ausschöpfen, d. h.

   $$\overline{K} = \bigcup \{I \in \mathcal{E}'\,;\, I \subseteq \overline{K}\}\,.$$

   Damit gilt $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Tutoraufgabe 1

Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim \text{Bin}(200, \frac{1}{100})$.

1. Berechnen Sie $\Pr[X > 8]$ approximativ mit der Poisson-Verteilung. (Taschenrechner benutzen!)
2. Bestimmen Sie mit der Markov-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.
3. Bestimmen Sie mit der Chernoff-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.

Lösung

1. Es gilt $\mathbb{E}[X] = 200 \cdot \frac{1}{100} = 2$ und $\Pr[X>8] = 1 - \Pr[X \leq 8]$.

   Wir rechnen approximativ

$$\begin{aligned}
\Pr[X \leq 8] &= \sum_{i=0}^{8} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} \\
&= e^{-2} \cdot \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!}\right) \\
&= e^{-2} \cdot \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \frac{8}{315} + \frac{2}{315}\right) \\
&= e^{-2} \cdot \frac{2327}{315} \\
&\approx 0.9997626\,.
\end{aligned}$$

   Ergebnis:

$$\Pr[X > 8] \approx 0.0002374 = 2.374 \cdot 10^{-4}\,.$$

2. Zunächst gilt $\Pr[X > k] = \Pr[X \geq k+1]$. Mit $\mathbb{E}[X] = 2$ folgt nach Markov

$$\Pr[X > k] \leq \frac{2}{1+k}\,.$$

   Wir lösen $\frac{2}{1+k} \leq 10^{-4}$ nach k auf und erhalten als kleinstes k den Wert

$$k = 19999\,.$$

   Bemerkung: Offensichtlich ist diese Abschätzung wertlos, denn für $k \geq 200$ gilt $\Pr[X > k] = 0$.

3. Seien $k + 1 = (1 + \delta) \cdot \mu = (1 + \delta) \cdot 2$, d. h. $\mu = \mathbb{E}[X] = 2$ und $1 + \delta = \frac{k+1}{2}$, mithin $\delta = \frac{k-1}{2}$. Dann gilt für alle $k > 1$ nach Chernoff

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq k+1] &\leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \\
&= \left(\frac{e^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{k+1}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Durch Logarithmieren und Zusammenfassen folgt

$$\begin{array}{rrcl} & \left(\frac{e^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{k+1}}\right) & \leq & 10^{-4} \\ \Longleftrightarrow & (k+1)[1+\ln 2-\ln(k+1)] & \leq & 2-4\ln 10 \end{array}$$

Diese Ungleichung löst man i. A. durch ein Bisektionsverfahren. Im vorliegenden Fall findet man schnell, dass die Ungleichung erstmalig für $k = 10$ gilt.

Bemerkung: Wenn man bedenkt, dass $k \geq 9$ bereits aus Teilaufgabe 1 folgt, dann sieht man, wie außerordentlich scharf die Chernoff-Schranke ist.

Tutoraufgabe 2

Wir nehmen eine zufällige Auswahl P' eines Parameters $n \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[n] = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{n-1}$ an. Dann definieren wir einen Prozess P'' dadurch, dass zunächst P' aufgerufen wird und der ausgegebene Wert als Eingabeparameter n für den Aufruf von P_n verwendet wird. Dabei wählt P_n n-mal einen Buchstaben aus der Menge $\{a, b, c\}$ aus, und zwar ein a bzw. b bzw. c mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess P'' ein Wort w ausgibt, das genau ein a enthält. Geben Sie insbesondere den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum an.

Lösung

Die Menge der Ergebnisse von P'' ist $\Omega = \{a, b, c\}^*$. Als Wahrscheinlichkeit für $w \in \Omega\setminus\{\epsilon\}$ setzen wir

$$\Pr[w] = \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{|w|-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{|w|_a} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|w|_b} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{|w|_c} .$$

Dabei bezeichnet $|w_x|$ die Anzahl der Buchstaben x im Wort w und $|w|$ die Länge von w. Natürlich wird $\Pr[\varepsilon] = 0$ gesetzt.

Mit Hilfe des Multinomialsatzes rechnet man leicht

$$1 = \sum_{w\in\Omega,|w|=n} \left(\frac{1}{2}\right)^{|w|_a} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|w|_b} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{|w|_c} .$$

Wegen $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^i = 1$ folgt, dass $W = \langle\Omega, \Pr\rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Sei $E_{n,a} \subseteq \Omega$ das Ereignis, dass P'' ein Wort der Länge n mit genau einem enthaltenen a ausgibt, also

$$E_{n,a} = \{w \in \Omega\,;\ |w| = n, |w|_a = 1\} .$$

Dann gilt wegen $|w|_a = 1$

$$\begin{aligned}
\Pr[E_{n,a}] &= \sum_{w \in E_{n,a}} \Pr[w] \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \sum_{1+|w|_b+|w|_c=n} \frac{n!}{1!|w|_b!|w|_c!} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|w|_b} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{|w|_c} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot n \cdot \sum_{|w|_b+|w|_c=n-1} \frac{(n-1)!}{|w|_b!|w|_c!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{|w|_b} \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{|w|_c} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot n \cdot \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1-i} \\
&= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right) \cdot n \cdot \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}.
\end{aligned}$$

Sei nun $(X_a = 1) \subseteq \Omega$ das Ereignis, dass P'' ein Wort mit genau einem enthaltenen a ausgibt, also

$$(X_a = 1) = \{w \in \Omega\,;\, w \in E_{n,a}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[X_a = 1] &= \sum_{n=1}^{\infty} \Pr[E_{n,a}] \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3} \cdot n \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{(1-\frac{1}{6})^2} \\
&= \frac{12}{25}.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$. Für die Dichtefunktion f_X von X gelte $f_X(1) = \frac{1}{4}$ und $f_X(2) = \frac{1}{5}$. X_i sei die i-te Wiederholung von X. Wir bilden $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ in Abhängigkeit des Wertes einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen N, die den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit e^{-2} annehme.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ der Zufallsvariablen X an.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Z den Wert 0 annimmt.

   Hinweis: Man beachte, dass Z auch dann den Wert 0 annimmt, wenn $N = 0$ gilt.

Lösung

1. Es gilt
$$f_X(0) = 1 - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}) = \tfrac{11}{20}\,,$$
und damit
$$\begin{aligned} G_X(s) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k \\ &= \tfrac{11}{20} + \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{5}s^2\,. \end{aligned}$$

2. Aus $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ folgt $G'_Z(1) = G'_N(G_X(1)) \cdot G'_X(1)$, mithin, wegen $G_X(1) = 1$,
$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]\,.$$
Für die Dichte von N gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$
$$f_X(i) = \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\,,$$
also
$$f_X(0) = \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \;=\; e^{-\lambda} \;=\; e^{-2}\,,$$
woraus folgt
$$\mathbb{E}[N] = \lambda \;=\; 2\,.$$
Weiter gilt
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{5} \;=\; \tfrac{13}{20}\,. \\ \mathbb{E}[Z] &= \tfrac{13}{10}\,. \end{aligned}$$

3. Seien G_Z, G_N und G_X die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen von Z bzw. N bzw. X. Dann gilt
$$\begin{aligned} \Pr[Z = 0] &= G_Z(0) \\ &= G_N(G_X(0)) \\ &= G_N(\tfrac{11}{20}) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} \cdot (\tfrac{11}{20})^k \\ &= e^{-2} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \tfrac{1}{k!}(\tfrac{11}{10})^k \;=\; e^{-2+\frac{11}{10}} \\ &= e^{-\frac{9}{10}}\,. \end{aligned}$$