Technische Universität München WS 2015/16
Lehrstuhl für Volkswirtschaftslehre
Univ.-Prof. Dr. Robert K. Frhr. von Weizsäcker

Ansprechpartner: Dr. Christoph March
Tel.: 089/289-25709, Fax: 089/289-25702

Mathematische Grundlagen

Hinweis

Die folgenden Formeln gelten z.T. nur unter gewissen Voraussetzungen und dienen in dieser Form lediglich als Erinnerungshilfe zum Lösen der heutigen Aufgaben.

Zum genaueren Studium der wirtschaftswissenschaftlich relevanten mathematischen Grundlagen sei hier auf die einschlägige Literatur verwiesen (z.B. Felderer B. und S. Homburg, *Makroökonomik und neue Makroökonomik*, Mathematischer Anhang, Seite 347 ff.).

1. Ableitungsregeln

Seien die beiden Funktionen u, v definiert als $u, v : \mathbb{D} \to \mathbb{W},\ t \mapsto u(t), v(t)$. Dann gilt:

(a) Produktregel: $(uv)' = u'v + uv'$

(b) Quotientenregel: $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

(c) Kettenregel: $(u \circ v)'(t) = u'(v(t)) \cdot v'(t)$

2. Konkavität und Konvexität

Definition 1. (Konkavität und Konvexität)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt konkav auf einem Intervall I, wenn für alle $x, \tilde{x} \in I$ mit $x \neq \tilde{x}$ und für alle $\lambda \in \,]0,1[$ gilt:

$$\lambda \cdot f(x) + (1-\lambda) \cdot f(\tilde{x}) \leq f(\lambda \cdot x + (1-\lambda) \cdot \tilde{x}). \tag{1}$$

Die Funktion f heißt auf I konvex, wenn Ungleichung (1) für alle $x, \tilde{x} \in I$ mit $x \neq \tilde{x}$ und für alle $\lambda \in \,]0,1[$ mit umgekehrtem Vorzeichen gilt.

Satz 1. (Konkavität und Konvexität)
Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar auf I, dann ist f konkav (konvex) auf I, genau dann wenn gilt $f''(x) \leq 0$ ($f''(x) \geq 0$) für alle $x \in I$.

3. Extrema

Definition 2. (Maximum und Minimum)
Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *besitzt an der Stelle* x_0 *ein lokales Maximum, wenn für alle* x *in einer hinreichend kleinen Umgebung von* x_0 *gilt:*

$$f(x) \leq f(x_0). \tag{2}$$

Die Funktion f *besitzt an der Stelle* x_0 *ein lokales Minimum, wenn Ungleichung (2) für alle* x *in einer hinreichend kleinen Umgebung von* x_0 *mit umgekehrtem Vorzeichen gilt.*

Satz 2. (Notwendige und hinreichende Bedingungen)
Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *auf* I *zweimal stetig differenzierbar, so besitzt* f *in* x_0 *ein eindeutiges lokales Maximum (Minimum), wenn*

$$f'(x_0) = 0 \qquad \textit{(notwendige Bedingung, Bedingung erster Ordnung)} \tag{3a}$$

und

$$f''(x_0) < 0 \quad (f''(x_0) > 0) \qquad \textit{(hinreichende Bedingung, Bedingung zweiter Ordnung).} \tag{3b}$$

4. Reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher

Eine mehrdimensionale Funktion f für einen Vektor $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ist gegeben durch

$$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, x = (x_1, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, \ldots, x_n) = f(x) = y.$$

Man definiert für die Funktion f die *Partiellen Ableitungen* und das *Totale Differential* als

- Partielle Ableitungen: $f_i := \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad i \in \{1, \ldots, n\}$
- Totales Differential: $df := f_1 dx_1 + \ldots + f_n dx_n$

5. Implizite Funktionen

Satz 3. (Spezialfall des Satzes über implizite Funktionen)
Es sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *stetig differenzierbar,* $x_0, t_0 \in \mathbb{R}$ *mit* $F(x_0, t_0) = 0$ *und* $\frac{\partial F}{\partial t}(x_0, t_0) \neq 0$ *(d.h. die partielle Ableitung von* $F(x,t)$ *nach* t *ist invertierbar).*
Dann existieren offene Mengen $\mathbb{D} \subset \mathbb{R}$ *und* $\mathbb{W} \subset \mathbb{R}$ *mit* $t_0 \in \mathbb{D}$ *und* $x_0 \in \mathbb{W}$ *sowie eine Funktion* $g : \mathbb{W} \to \mathbb{D}$ *mit* $t = g(x)$*, so dass* $F(x, g(x)) = 0$ *für alle* $x \in \mathbb{W}$.

Ferner ist g *an der Stelle* x_0 *differenzierbar und es gilt:*

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, t_0)}{\frac{\partial F}{\partial t}(x_0, t_0)}.$$