

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 11

Abgabe bis zum 11.7. bis 8:30.

*Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im Infler-Forum posten :).*

### Aufgabe 11.1      Abzugeben

2P

Wir schätzen den Mittelwert einer  $\mathcal{N}(\mu, 3)$ -verteilten ZV indem wir  $n$  identisch verteilte Stichproben  $X_1, \dots, X_n \sim \mathcal{N}(\mu, 3)$  betrachten und ihren Mittelwert bilden  $\bar{X} := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Sei  $n = 3000$ . Bestimmen Sie ein möglichst kleines (symmetrisches) Konfidenzintervall für den Parameter  $\mu$  zum Konfidenzniveau 0.99.

### Aufgabe 11.2      Abzugeben

3P

Sei  $X$  eine ZV mit folgender Dichte für unbekannten Parameter  $\lambda > 0$ :

$$f(t) = 2\lambda t \cdot e^{-\lambda t^2} I_{[0, \infty)}(t).$$

Sei  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$  eine Stichprobe von  $X$ .

Bestimmen Sie den Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter  $\lambda$ .

*Hinweis: Maximieren Sie den Logarithmus der Likelihood-Funktion  $\ln(L(\vec{x}; \lambda))$ .*

### Aufgabe 11.3      Abzugeben

3P+1P+1P+1P

Michel und seine kleine Schwester Maxi streiten sich fast täglich. In letzter Zeit hatte Michel öfters blaue Flecken am Arm. Maxi behauptet, dass diese daher kommen, dass ihr Bruder sehr tollpatschig sei und öfter gegen Einrichtungsgegenstände laufe.

Xaver, der Vater der beiden, entschließt sich dazu Michels Tollpatschigkeit zu testen. Dazu lässt er den Kleinen über mehrere Wochen hinweg insgesamt 8 mal durch (verschiedene) Parcours im Spielplatz turnen und zählt, wie oft er dabei blaue Flecken bekommt.

Sei  $X_i$  eine binäre Zufallsvariable, die signalisiert, ob sich Michel beim  $i$ -ten Parcours blaue Flecken geholt hat. Wir nehmen an, dass  $X_i \sim \text{Bin}(1, p)$  für unbekanntes  $p$  (ein Maß für die Ungeschicklichkeit Michels) und alle  $X_i$  unabhängig sind.

Aus seinem Bekanntenkreis weiß Xaver, dass sich ein normales Kind etwa jedes dritte Mal auf dem Spielplatz blaue Flecken holt. Er möchte entscheiden, ob Michel ungeschickter ist, als ein normales Kind.

Bei seinem Test will er die Wkeit, dass er Michel zu Unrecht als ungeschickt bezeichnet auf höchstens 0.05 begrenzen.

- (a) Formulieren Sie eine geeignete Nullhypothese und einen Test für diese Hypothese (d.h. definieren sie Testgröße und Ablehnungsbereich). Was ist das Signifikanzniveau Ihres Tests?

*Hinweis: Der zentrale Grenzwertsatz ist hier nicht anwendbar (warum?)—rechnen Sie daher nicht approximativ!*

- (b) Berechnen Sie die Wkeit für einen Fehler 2. Art.

- (c) Xaver bemerkt, dass sich Michel 3 mal auf dem Spielplatz gestoßen und blaue Flecken bekommen hat. Kann er, aufgrund dieser Beobachtung, die Nullhypothese zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  ablehnen?

- (d) Deuten die Ergebnisse darauf hin, dass Maxi wahrscheinlich ihren großen Bruder beim Streiten verprügelt? Warum?/Warum nicht?

Wir wollen mit einem statistischen Test die Höhe zweier Berge vergleichen. Dazu vermessen wir beide wiederholt mit demselben Messgerät.

Wir nehmen an, dass die Messwerte jeweils normalverteilt sind mit bekannter Standardabweichung (Genauigkeit des Messgeräts)  $\sigma = 15$ .

Seien  $X_1, \dots, X_m$  die ZVen, welche die Messungen der Höhe des ersten Berges beschreiben und  $Y_1, \dots, Y_n$  die Messungen des zweiten Berges. Laut Annahme sind  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma^2)$  und  $Y_i \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma^2)$  mit unbekannten Erwartungswerten  $\mu_X$  und  $\mu_Y$  (aber bekannter Varianz  $\sigma^2 = 225$ ).

Uns interessiert, ob beide Berge gleich hoch sind, also testen wir  $H_0 : \mu_X = \mu_Y$  gegen die triviale Alternative  $H_1 : \mu_X \neq \mu_Y$ .

- (a) Definieren Sie eine geeignete Testgröße und ein Ablehnungskriterium für die Nullhypothese zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$ .

*Hinweis: Die Testgröße sollte (unter der Nullhypothese) standardnormalverteilt sein.*

- (b) Gegeben seien die beiden Messreihen der Berghöhen

$x_i$	1202	1178	1191	1174	1211	1226	1199	1157	1208	1203
$y_i$	1224	1179	1182	1217	1247	1189	1221	1219	—	—

Können Sie, aufgrund dieser Daten, die Nullhypothese zum Signifikanzniveau  $\alpha = 0.05$  ablehnen?

**Aufgabe 11.5**      **Abzugeben: ai), aiii), bi),bii)**

**1P+2P+1P+1P**

Die Dichte der  $\chi^2$ -Verteilung mit  $n$  Freiheitsgraden ( $n \in \mathbb{N}$ ) ist

$$\frac{2^{-n/2}}{\Gamma(n/2)} x^{n/2-1} e^{-1/2x} I_{[0,\infty)}(x),$$

wobei  $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ ,  $\Gamma(1) = 1$  und  $\Gamma(r+1) = r\Gamma(r)$  gilt.

- (a) Es seien  $X_1, X_2$  unabhängige, normalverteilte ZV mit (unbekanntem) Erwartungswert  $\mu$  und (unbekannter) Varianz  $\sigma^2$ .

Es gelte  $U := X_1 - X_2$  und  $V := X_1 + X_2$ .

- (i) Bestimmen Sie die Verteilungen von  $U$  und  $V$ .

- (ii) Zeigen Sie, dass  $U$  und  $V$  unabhängig sind.

- (iii) Zeigen Sie nun, dass  $\frac{1}{\sigma^2} S_X^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2}{\sigma^2}$  gerade  $\chi^2$ -verteilt ist mit einem Freiheitsgrad.

- (b) Seien  $Y_1, Y_2$  nun normalverteilt mit bekanntem Erwartungswert 0 und unbekannter Varianz  $\sigma^2$ .

Da der Erwartungswert bekannt ist, können wir versuchem die Varianz direkt mittels  $T := Y_1^2 + Y_2^2$  zu schätzen.

- (i) Bestimmen Sie  $c \in \mathbb{R}$  so, dass  $c \cdot T$  ein erwartungstreuer Schätzer für  $\sigma^2$  ist.

- (ii) Zeigen Sie, dass  $\frac{T}{\sigma^2}$  gerade  $\chi^2$ -verteilt ist mit zwei Freiheitsgraden.

*Hinweis:* Verwenden Sie, dass für unabhängige ZVen  $Z_1, Z_2$  mit  $Z_i$   $\chi^2$ -verteilt mit  $n_i$  Freiheitsgraden gilt:  $Z_1 + Z_2$  ist  $\chi^2$ -verteilt mit  $n_1 + n_2$  Freiheitsgraden.