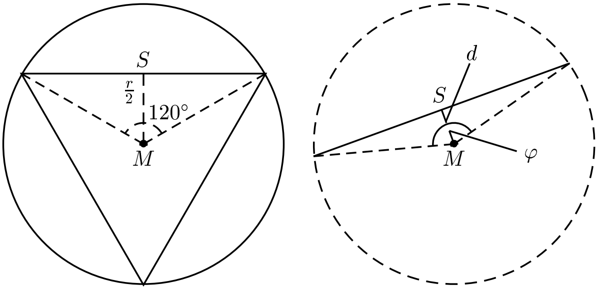
1.4.4 Laplace-Prinzip in kontinuierlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

Das folgende Beispiel zeigt, dass im kontinuierlichen Fall die Bedeutung von „gleichwahrscheinlich“ nicht immer ganz klar sein muss.

Bertrand’sches Paradoxon

Wir betrachten einen Kreis mit einem eingeschriebenen gleichseitigen Dreieck. Was ist die Wahrscheinlichkeit, mit der die Länge einer zufällig gewählten Sehne die Seitenlänge dieses Dreiecks übersteigt (Ereignis A)?


S
$\frac{r}{2}$
120°
M
d
S
M
φ

Beobachtungen:

- Die Seiten des Dreiecks haben Abstand $\frac{r}{2}$ vom Mittelpunkt M.
- Die Lage jeder Sehne ist (bis auf Rotation um M) durch einen der folgenden Parameter festgelegt:
  - Abstand d zum Kreismittelpunkt,
  - Winkel φ mit dem Kreismittelpunkt.

Wir nehmen für jeden dieser Parameter Gleichverteilung an und ermitteln $\Pr[A]$.

1. Sei $d \in [0, r]$ gleichverteilt. A tritt ein, wenn $d < \frac{r}{2}$, und es folgt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.
2. Sei $\varphi \in [0°, 180°]$ gleichverteilt. Für A muss gelten $\varphi \in]120°, 180°]$, und es folgt somit $\Pr[A] = \frac{1}{3}$.

Siehe auch diese graphischen Darstellungen!

2. Wichtige stetige Verteilungen

2.1 Gleichverteilung

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{für } x \in [a,b], \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}\,t = \begin{cases} 0 & \text{für } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{für } a \le x \le b, \\ 1 & \text{für } x > b. \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2} \text{ und } \mathrm{Var}[X] = \frac{(a-b)^2}{12}\,.$$

2.2 Normalverteilung

Die Normalverteilung nimmt unter den stetigen Verteilungen eine besonders prominente Position ein.

Definition 98

Eine Zufallsvariable X mit Wertebereich $W_X = \mathbb{R}$ heißt normalverteilt mit den Parametern $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}^+$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) =: \varphi(x; \mu, \sigma)$$

besitzt.

In Zeichen schreiben wir $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.
$\mathcal{N}(0,1)$ heißt Standardnormalverteilung. Die zugehörige Dichte $\varphi(x; 0, 1)$ kürzen wir durch $\varphi(x)$ ab.

Die Verteilungsfunktion zu $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ ist

$$F(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{x} \exp\left(-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\,t =: \Phi(x; \mu, \sigma)\,.$$

Diese Funktion heißt Gauß'sche Φ-Funktion (φ ist nicht geschlossen integrierbar).

Lemma 99

$$I := \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}\, x = \sqrt{2\pi}.$$

Beweis:

Wir berechnen zunächst I^2:

$$\begin{aligned} I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} \,\mathrm{d}\, x\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2/2} \,\mathrm{d}\, y\right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)/2} \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y\,. \end{aligned}$$

Wir gehen nun zu Polarkoordinaten über und setzen $x := r\cos\phi$ und $y := r\sin\phi$. Dann ist

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial r} \\ \frac{\partial x}{\partial \phi} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -r\sin\phi & r\cos\phi \end{vmatrix} = r(\cos^2\phi + \sin^2\phi) = r$$

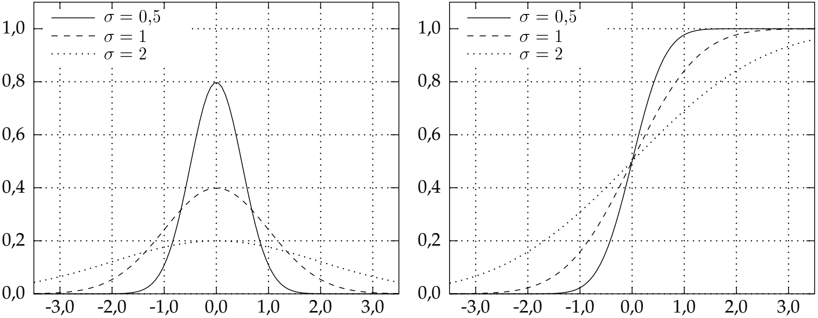
Beweis (Forts.):

und wir erhalten

$$I^2 = \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-r^2/2} r \,\mathrm{d}\, r \,\mathrm{d}\,\phi \;=\; \int_0^{2\pi} \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty} \mathrm{d}\,\phi$$

$$= \int_0^{2\pi} 1 \,\mathrm{d}\,\phi \;=\; 2\pi.$$

□



Dichte und Verteilung von $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$

Satz 100 (Lineare Transformation der Normalverteilung)

Sei X eine normalverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Dann gilt für beliebiges $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $b \in \mathbb{R}$, dass $Y = aX + b$ normalverteilt ist mit $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$.

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall „$a > 0$“:

$$\begin{aligned}\Pr[Y \le y] = \Pr[aX + b \le y] = \Pr\left[X \le \frac{y-b}{a}\right]\\ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{(y-b)/a} \exp\left(-\frac{(u-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, u.\end{aligned}$$

Nach der Substitution $u = (v - b)/a$ und $\mathrm{d}\, u = (1/a) \cdot \mathrm{d}\, v$ erhalten wir

Beweis (Forts.):

$$\Pr[Y \le y] = \frac{1}{\sqrt{2\pi} a\sigma} \cdot \int_{-\infty}^{y} \exp\left(-\frac{(v - a\mu - b)^2}{2a^2\sigma^2}\right) \mathrm{d}\, v\,.$$

Also $Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$. Für $a < 0$ verläuft der Beweis analog. $\square$

Sei also X eine beliebige $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilte Zufallsvariable X und $Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$.

Dann ist nach Satz 100 Y $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Y heißt auch normiert.

Ferner gilt

$$\begin{aligned}\Pr[a < X \leq b] &= \Pr\left[\frac{a-\mu}{\sigma} < Y \leq \frac{b-\mu}{\sigma}\right]\\ &= \Phi\left(\frac{b-\mu}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sigma}\right)\,.\end{aligned}$$

Satz 101

X sei $\mathcal{N}(0,1)$-verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = 0 \text{ *und* } \quad \mathrm{Var}[X] = 1.$$

Beweis:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}\, x.$$

Da der Integrand punktsymmetrisch zu $(0,0)$ ist, folgt $\mathbb{E}[X] = 0$.

Beweis (Forts.):

Mittels Lemma 99 und durch partielle Integration erhalten wir

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}\,x \\ &= \underbrace{x\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\Big|_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathrm{d}\,x\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass $\mathbb{E}[X^2] = 1$ ist und somit $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 1$. □

Satz 102

X sei $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$-verteilt. Dann gilt

$$\mathbb{E}[X] = \mu \textit{ und } \mathrm{Var}[X] = \sigma^2 \,.$$

Beweis:

$Y := \frac{X-\mu}{\sigma}$ ist standardnormalverteilt. Ferner gilt gemäß der Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[\sigma Y + \mu] = \sigma \cdot \mathbb{E}[Y] + \mu = \mu$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Var}[\sigma Y + \mu] = \sigma^2 \cdot \mathrm{Var}[Y] = \sigma^2.$$

$\square$

2.3 Exponentialverteilung

Die Exponentialverteilung ist in gewisser Weise das kontinuierliche Analogon zur geometrischen Verteilung. Wie die geometrische Verteilung ist sie „gedächtnislos“. Sie spielt daher vor allem bei der Modellierung von Wartezeiten eine große Rolle.

Definition 103

Eine Zufallsvariable X heißt exponentialverteilt mit dem Parameter λ, $\lambda > 0$, wenn sie die Dichte

$$f(x) = \begin{cases} \lambda \cdot e^{-\lambda x} & \text{falls } x \geq 0, \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

besitzt.

Für die entsprechende Verteilungsfunktion gilt (für $x \geq 0$)

$$F(x) = \int_0^x \lambda \cdot e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}\, t = \left[-e^{-\lambda t}\right]_0^x = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Für $x < 0$ gilt selbstverständlich $F(x) = 0$.

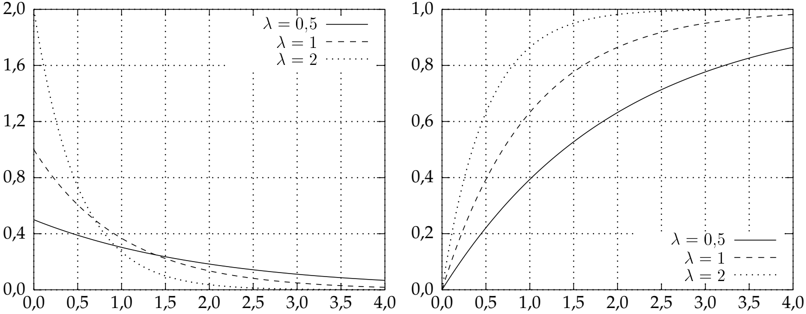
$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_0^\infty t \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}\, t \\
&= \left[t \cdot (-e^{-\lambda t}) \right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-\lambda t} \,\mathrm{d}\, t \\
&= 0 + \left[-\frac{1}{\lambda} \cdot e^{-\lambda t} \right]_0^\infty = \frac{1}{\lambda}\,.
\end{aligned}
$$

Analog erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \int_0^\infty t^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= \left[t^2 \cdot (-e^{-\lambda t})\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2t \cdot e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}\,t\\ &= 0 + \frac{2}{\lambda} \cdot \mathbb{E}[X] = \frac{2}{\lambda^2}\end{aligned}$$

und somit

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{1}{\lambda^2}\,.$$



Dichte und Verteilung der Exponentialverteilung

2.3.1 Eigenschaften der Exponentialverteilung

Satz 104 (Skalierung exponentialverteilter Variablen)

Sei X eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit dem Parameter λ. Für $a > 0$ ist die Zufallsvariable $Y := aX$ wieder exponentialverteilt mit dem Parameter λ/a.

Beweis:

$$\begin{aligned} F_Y(x) &= \Pr[Y \le x] = \Pr[aX \le x] \\ &= \Pr\left[X \le \frac{x}{a}\right] = F_X\left(\frac{x}{a}\right) \\ &= 1 - e^{-\frac{\lambda x}{a}}\,. \end{aligned}$$

$\square$

Gedächtnislosigkeit

Satz 105 (Gedächtnislosigkeit)

Eine (positive) kontinuierliche Zufallsvariable X mit Wertebereich $\mathbb{R}^+$ ist genau dann exponentialverteilt, wenn für alle $x, y > 0$ gilt, dass

$$\Pr[X > x + y \mid X > y] = \Pr[X > x]\,. \qquad (*)$$

Beweis:

Sei X exponentialverteilt mit Parameter λ. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[X > x + y \mid X > y] &= \frac{\Pr[X > x + y, X > y]}{\Pr[X > y]} \\
&= \frac{\Pr[X > x + y]}{\Pr[X > y]} \\
&= \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = \Pr[X > x]\,.
\end{aligned}$$

Beweis (Forts.):

Sei umgekehrt X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die die Gleichung $(*)$ erfüllt. Wir definieren $g(x) := \Pr[X > x]$. Für $x, y > 0$ gilt

$$\begin{aligned} g(x+y) &= \Pr[X > x+y] \\ &= \Pr[X > x+y \mid X > y] \cdot \Pr[X > y] \\ &= \Pr[X > x] \cdot \Pr[X > y] = g(x)g(y)\,. \end{aligned}$$

Daraus folgt durch wiederholte Anwendung

$$g(1) = g\Big(\underbrace{\frac{1}{n} + \cdots + \frac{1}{n}}_{n\text{-mal}}\Big) = \left(g\Big(\frac{1}{n}\Big)\right)^n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

und somit insbesondere auch $g(1/n) = (g(1))^{1/n}$.

Beweis (Forts.):

Da X nur positive Werte annimmt, muss es ein $n \in \mathbb{N}$ geben mit $g(1/n) > 0$. Wegen $0 < g(1) \leq 1$ muss es daher auch ein $\lambda \geq 0$ geben mit $g(1) = e^{-\lambda}$.

Nun gilt für beliebige $p, q \in \mathbb{N}$

$$g(p/q) = g(1/q)^p = g(1)^{p/q},$$

und somit $g(r) = e^{-\lambda r}$ für alle $r \in \mathbb{Q}^+$.

Aufgrund der Stetigkeit folgt daraus

$$g(x) = e^{-\lambda x}\,.$$

$\square$

Beispiel 106

Über das Cäsium-Isotop $^{134}_{55}\text{Cs}$ ist bekannt, dass es eine mittlere Lebensdauer von ungefähr 3,03 Jahren oder $1{,}55 \cdot 10^6$ Minuten besitzt. Die Zufallsvariable X messe die Lebenszeit eines bestimmten $^{134}_{55}\text{Cs}$-Atoms. X ist exponentialverteilt mit dem Parameter

$$\lambda = \frac{1}{\mathbb{E}[X]} = \frac{1}{1{,}55 \cdot 10^6} \approx 0{,}645 \cdot 10^{-6} \quad \left[\frac{1}{\text{min}}\right]$$

Da λ den Kehrwert einer Zeit als Einheit besitzt, spricht man von der Zerfallsrate. Auch bei anderen Anwendungen ist es üblich, λ als Rate einzuführen.

2.3.2 Exponentialverteilung als Grenzwert der geometrischen Verteilung

Erinnerung: Die Poisson-Verteilung lässt sich als Grenzwert der Binomialverteilung darstellen.

Wir betrachten eine Folge geometrisch verteilter Zufallsvariablen X_n mit Parameter $p_n = \lambda/n$. Für ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass $X_n \leq k \cdot n$, gleich

$$\begin{aligned}\Pr[X_n \leq kn] &= \sum_{i=1}^{kn}(1-p_n)^{i-1} \cdot p_n \;=\; p_n \cdot \sum_{i=0}^{kn-1}(1-p_n)^i \\ &= p_n \cdot \frac{1-(1-p_n)^{kn}}{p_n} \;=\; 1 - \left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^{kn} .\end{aligned}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}(1-\frac{\lambda}{n})^n = e^{-\lambda}$ gilt daher für die Zufallsvariablen $Y_n := \frac{1}{n}X_n$, dass

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \Pr[Y_n \le t] &= \lim_{n\to\infty} \Pr[X_n \le t \cdot n] \\ &= \lim_{n\to\infty} \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{tn}\right] \\ &= 1 - e^{-\lambda t}.\end{aligned}$$

Die Folge Y_n der (skalierten) geometrisch verteilten Zufallsvariablen geht also für $n \to \infty$ in eine exponentialverteilte Zufallsvariable mit Parameter λ über.

3. Mehrere kontinuierliche Zufallsvariablen

3.1 Mehrdimensionale Dichten

Definition 107

Zu zwei kontinuierlichen Zufallsvariablen X, Y wird der zugrunde liegende gemeinsame Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}^2$ durch eine integrierbare (gemeinsame) Dichtefunktion $f_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y = 1$$

beschrieben. Für ein Ereignis $A \subseteq \mathbb{R}^2$ (das aus abzählbar vielen geschlossenen oder offenen Bereichen gebildet sein muss) gilt

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,Y}(x,y) \,\mathrm{d}\, x \,\mathrm{d}\, y.$$

Unter einem Bereich B verstehen wir dabei Mengen der Art

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\} \quad \text{mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}.$$

Dabei können die einzelnen Intervallgrenzen auch „offen" bzw. $\pm\infty$ sein.

Analog zum eindimensionalen Fall ordnen wir der Dichte $f_{X,Y}$ eine (gemeinsame) Verteilung $F_{X,Y} : \mathbb{R}^2 \to [0,1]$ zu:

$$F_{X,Y}(x,y) = \Pr[X \leq x, Y \leq y] = \int_{-\infty}^{y} \int_{-\infty}^{x} f_{X,Y}(u,v) \,\mathrm{d}\,u \,\mathrm{d}\,v.$$

3.2 Randverteilungen und Unabhängigkeit

Definition 108

Sei $f_{X,Y}$ die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y. Die Randverteilung der Variablen X ist gegeben durch

$$F_X(x) = \Pr[X \leq x] = \int_{-\infty}^{x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v) \,\mathrm{d}\, v \right] \mathrm{d}\, u.$$

Analog nennen wir

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,v) \,\mathrm{d}\, v$$

die Randdichte von X. Entsprechende Definitionen gelten symmetrisch für Y.

Definition 109

Zwei kontinuierliche Zufallsvariablen X und Y heißen unabhängig, wenn

$$\Pr[X \leq x, Y \leq y] = \Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y \leq y]$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt.

Dies ist gleichbedeutend mit

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)\,.$$

Differentiation ergibt

$$f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)\,.$$

Für mehrere Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ gilt analog: $X_1, \ldots, X_n$ sind genau dann unabhängig, wenn

$$F_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = F_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot F_{X_n}(x_n)$$

bzw.

$$f_{X_1,\ldots,X_n}(x_1, \ldots, x_n) = f_{X_1}(x_1) \cdot \ldots \cdot f_{X_n}(x_n)$$

für alle $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$.