Technische Universität München (I7)
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund

Sommer 2013
4. Juli 2013

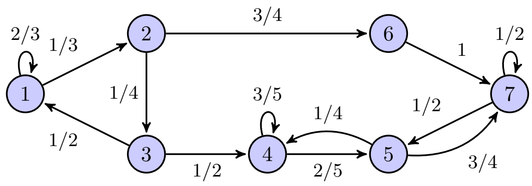
Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 12

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 17.07.2013 um 12:00

Vereinfachen Sie Terme soweit wie möglich. Unnötig komplizierte Antworten werden nicht gewertet.

Aufgabe 12.1 — 3P+3P+3P+2P



(a) Bestimmen Sie die Ankunftsw'keit in Zustand 7, wenn man in Zustand 1 startet.

(b) Bestimmen Sie die erwartete Übergangszeit nach Zustand 7, wenn man in Zustand 1 beginnt.

(c) Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit für Zustand 7.

(d) Besitzt die Markov-Kette eine eindeutige stationäre Verteilung? Falls ja, bestimmen Sie diese.

Erinnerung:

- Analog zu TA 11.1 gilt, dass man sich mit W'keit 1 schließlich in dem Teilgraphen befindet, der durch die Knoten $\{4, 5, 7\}$ induziert wird. (Nicht zu zeigen.)
- Die stationäre Verteilung ist ein Eigenvektor *von links* zum Eigenwert 1 für die Transitionsmatrix, der eine Verteilung darstellen muss: alle Komponenten sind nicht negativ, die Summe der Komponenten ist gleich 1.

Aufgabe 12.2 — 6P+3P

Wir betrachten ein System von n parallel ausgeführten Prozessen $P_1, P_2, \ldots, P_n$. Die n Prozesse konkurrieren dabei um den Zugriff auf eine geschützte Ressource (z.B. Schreiben in eine Datenbank); der Zugriff wird allerdings nur gestattet, wenn kein anderer Prozess innerhalb desselben Zeitschritts versucht, auf die Ressource zuzugreifen.

Wir betrachten folgendes randomisiertes Protokoll, dessen Ziel es ist, dass nach einer endlichen Anzahl von Zeitschritten nur noch ein Prozess in jedem Zeitschritt versucht, auf die Ressource zuzugreifen. Hierfür haben die n Prozesse Zugriff auf n globale boolesche Variablen $x_1, \ldots, x_n$, deren Werte zum Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}_0$ mit $x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, \ldots, x_n^{(t)}$ bezeichnet werden. (Die Variablenbelegung zum Zeitpunt t lässt sich somit als n-bit Wort $x_1^{(t)} x_2^{(t)} \ldots x_n^{(t)}$ aus $\{0,1\}^n$ darstellen.)

Das Verhalten der n Prozesse ist nun durch folgendes Protokoll für alle Zeitpunkte $t \in \mathbb{N}_0$ geregelt:

- Zum Zeitpunkt $t = 0$ initialisiert P_i die Variable x_i auf den Wert 1, d.h. es gilt $x_i^{(0)} := 1$.
- Bei jedem Zeitschritt $t \to t+1$ vergleicht P_i zuerst die Werte der Variablen x_i und $x_{(i \bmod n)+1}$.
  - Gilt $x_i^{(t)} = x_{(i \bmod n)+1}^{(t)}$, so versucht P_i auf die Ressource zuzugreifen und setzt x_i auf einen zufälligen Wert, d.h. $x_i^{(t+1)}$ ist gleichverteilt auf $\{0,1\}$ (unabhängig von allem anderen).
  - Ansonsten setzt P_i den Wert der Variablen x_i auf den Wert von $x_{(i \bmod n)+1}$, d.h. es gilt $x_i^{(t+1)} = x_{(i \bmod n)+1}^{(t)}$.

Alle Prozesse laufen dabei also im Gleichschritt, so dass es zu keinen Konflikten beim Lesen bzw. Setzen der Variablen kommen kann: D.h. innerhalb jedes Zeitschritts $t \to t+1$ lesen zunächst alle Prozesse die Werte der jeweilgen Variablen zum Zeitpunkt t; erst wenn alle Prozesse mit Lesen fertig sind, werden die Werte der Variablen durch die Prozesse für den nächsten Zeitpunkt $t+1$ aktualisiert.

(a) Es gelte $n = 3$:

- Stellen Sie das Verhalten der Prozesse als eine Markov-Kette dar.

  Hinweis: Verwenden Sie als Zustandsmenge $\{0,1\}^3 = \{000, 001, \ldots, 111\}$. Es reicht, den Übergangsgraphen für die Zustände $\{001, 010, \ldots, 110\}$ zu zeichnen. Beschreiben Sie für die verbleibenden zwei Zustände die Übergangswahrscheinlichkeiten in Worten.

- Zeigen Sie, dass tatsächlich mit W'keit 1 nach endlich vielen Zeitschritten, in jedem Zeitschritt genau noch ein Prozess versucht, auf die Ressource zuzugreifen.

  Bestimmen Sie auch die erwartete Anzahl an Zeitschritten, bis dies gilt.

- Begründen Sie, warum diese Markov-Kette eine eindeutige stationäre Verteilung besitzt.

  Wie lange muss daher ein Prozess im Mittel bzgl. der stationären Verteilung warten, bis er wieder Zugriff auf die Ressource bekommt?

  Hinweis: Nutzen Sie die Symmetrie des Übergangsgraphen!

Offensichtlich wächst die Anzahl der Zustände (Variablenbelegungen) $\{0,1\}^n$ exponentiell mit n, womit die direkte Analyse des Verhaltens des Protokolls für große Werte von n praktisch unmöglich wird.

(b) Es gelte nun $n = 5$. Um die Anzahl der Zustände zu verringern, partitionieren wir $\{0,1\}^5$ in vier Klassen:

$$\begin{aligned}
[5] &:= \{00000, 11111\} \\
[3a] &:= \{01111, 10111, 11011, 11101, 11110, 10000, 01000, 00100, 00010, 00001\} \\
[3b] &:= \{00111, 10011, 11001, 11100, 01110, 11000, 01100, 00110, 00011, 10001\} \\
[1] &:= \{01011, 10101, 11010, 01101, 10110, 10100, 01010, 00101, 10010, 01001\}
\end{aligned}$$

- Worin unterscheiden sich die Zustände in den Klassen $[3a]$ und $[3b]$ bzgl. der Übergangswahrscheinlichkeit?
- Beschreiben Sie das Verhalten der Prozesse für $n = 5$ als eine Markov-Kette mit den „Makro-Zuständen" $\{[1], [3a], [3b], [5]\}$.

  Es reicht wieder, den Übergangsgraphen anzugeben.

- Zeigen Sie wiederum, dass mit W'keit 1 schließlich in jedem Zeitschritt nur noch ein Prozess versucht, auf die Ressource zuzugreifen.

  Bestimmen Sie auch die erwartete Anzahl an Zeitschritten, bis dies der Fall ist.

Bemerkung: Sie können Ihre Ergebnisse mit Hilfe des PRISM model checkers (nicht von der NSA!) überprüfen.