Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 1
13. Mai 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Vorbemerkung: Hausaufgaben haben Wiederholungscharakter und stellen grundsätzlich eine Lernkontrolle dar für Stoff der vorausgegangenen Übungsblätter bzw. Arbeitsblätter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt 1 beziehen sich die Hausaufgaben auf Stoff der verausgegangenen Semester.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe sowohl den Abgabetermin als auch die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien $a_i \in \mathbb{N}_0$ mit $a_i < 10$.

1. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i) \bmod 9 = (\sum_{i=0}^{n} a_i) \bmod 9$.
2. Zeigen Sie für alle $n \in \mathbb{N}_0$: $(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i) \bmod 11 = (\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (-1)^i) \bmod 11$.

Lösung

1. Wir setzen die Kenntnis der Rechenregeln für die mod -Operation voraus und erhalten wegen $10 \bmod 9 = 1$

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i\right) \bmod 9 &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (10 \bmod 9)^i\right) \bmod 9 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i\right) \bmod 9\,. \end{aligned}$$

2. Wegen $(-1) \bmod 11 = 10 \bmod 11 = 10$ gilt

$$\begin{aligned} \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (-1)^i\right) \bmod 11 &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot ((-1) \bmod 11)^i\right) \bmod 11 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot (10 \bmod 11)^i\right) \bmod 11 \\ &= \left(\sum_{i=0}^{n} a_i \cdot 10^i\right) \bmod 11\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Geben Sie auf der Grundlage der Gleichungen in HA 1 ein effizientes Verfahren an, die Korrektheit der Ergebnisse von arithmetischen Rechnungen mit Addition, Subtraktion und Multiplikation natürlicher Zahlen in Dezimalzahldarstellung mit „ca. 99 prozentiger Sicherheit“ festzustellen. (Elferprobe+Neunerprobe)

Begründen Sie die „Verläßlichkeit“ Ihres Verfahrens.

Lösung

Sei e das Ergebnis der Ausführung eines auf arithmetischen Operationen basierenden Algorithmus A.
Das Prüfverfahren besteht darin, unter der Annahme, dass alle modulo Operationen fehlerfrei ausgeführt werden,
1. In einem ersten Lauf alle in A auszuführenden arithmetischen Operationen modulo 9 auszuführen. Das Ergebnis sei e_9.
2. In einem zweiten Lauf alle in A auszuführenden arithmetischen Operationen modulo 11 auszuführen. Das Ergebnis sei e_{11}.
3. Falls $e_9 \neq e \bmod 9$ oder $e_{11} \neq e \bmod 11$, dann liegt mit Sicherheit ein Fehler vor.
4. Falls $e_9 = e \bmod 9$ und $e_{11} = e \bmod 11$, dann liegt mit „ca. 99 prozentiger Sicherheit“ kein Fehler vor.

Die Operationen modulo 9 können bei vorausgesetzter Dezimalzahldarstellung durch Bildung der sogenannten „Quersumme“ modulo 9 (HA 1.1) effizient erhalten werden.
Die Operationen modulo 11 können bei vorausgesetzter Dezimalzahldarstellung durch Bildung der sogenannten „alternierenden Quersumme“ modulo 11 (HA 1.2) effizient erhalten werden.

Begründung der „Verläßlichkeit“:
Nur unter ganz starken Annahmen kann man über die Wahrscheinlichkeit, einen Fehler zu finden, etwas sagen.
Der Fehler wird nicht entdeckt genau dann, wenn sich ein Ergebnis e vom korrekten Ergebnis um ein Vielfaches von 99 unterscheidet.
Wenn man annimmt, dass die Berechnung zu einer „Gleichverteilung“ der Ergebnisse um das korrekte Ergebnis herum führen, dann wird der Fehler mit Häufigkeit $\frac{98}{99}$ entdeckt.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Eine Box enthalte 1 weißen, 2 schwarze und 4 rote, gleichartige Bälle. Wenn wir mit zwei Ziehungen (ohne Zurücklegen) genau einen weißen und einen schwarzen Ball ziehen, machen Sie den Hauptgewinn.

Wie groß schätzen Sie Ihre Gewinnchance ein? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösung

Die Wahrscheinlichkeit, in der ersten Ziehung schwarz und in der zweiten Ziehung weiß zu ziehen, ist $\Pr[sw] = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$.
Die Wahrscheinlichkeit, in der ersten Ziehung weiß und in der zweiten Ziehung schwarz zu ziehen, ist $\Pr[ws] = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{21}$.
Genau einen weißen und einen schwarzen Ball zieht man also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{21}$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

1. Listen Sie alle 3-elementigen Multiteilmengen von Ω auf.
2. Wie viele 5-elementigen Multiteilmengen von Ω gibt es?

Lösung

Wir notieren Multimengen in der Form $\langle a, b, \ldots \rangle$ im Unterschied zur Mengennotierung $\{a, b, \ldots\}$.

1. $\langle 1, 2, 3 \rangle$,
   $\langle 1, 1, 2 \rangle$, $\langle 1, 1, 3 \rangle$,
   $\langle 2, 2, 1 \rangle$, $\langle 2, 2, 3 \rangle$,
   $\langle 3, 3, 1 \rangle$, $\langle 3, 3, 2 \rangle$,
   $\langle 1, 1, 1 \rangle$, $\langle 2, 2, 2 \rangle$, $\langle 3, 3, 1 \rangle$.
2. Die Anzahl der m-elementigen Multiteilmengen einer n-elementigen Menge beträgt $\binom{n+m-1}{m}$.

   Für Ω ist die gesuchte Anzahl also $\binom{3+5-1}{5} = \binom{7}{5} = 21$.

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

1. Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von „Ereignis“, „Elementarereignis“ oder „Ergebnismenge“ sprechen.
2. Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

Lösung

1. Das Ergebnis x eines Vorgangs wird beobachtet oder gemessen. Dabei wird eine Eigenschaft $E(x)$ des Ergebnisses festgestellt

   formal in der Form $x \in E$, wobei E eine Menge ist.

   Das Ereignis wird nun als Menge E beschrieben, wobei E eine Menge von möglichen Ergebnissen ist.

   Die Zusammenfassung aller möglichen (Einzel-)Ergebnisse ist die Ergebnismenge.

   Jedem Ergebnis x entspricht eine kleinste Menge $E = \{x\}$, so dass $x \in E$ gilt. Diese Menge ist ein Elementarereignis und wird (leider) in der Literatur häufig von x nicht unterschieden.

2. Sei M eine endliche Multimenge. Dann gibt es eine Menge E und eine Funktion $h : E \to \mathbb{N}_0$, so dass jedes Element x' von M ein Vorkommen eines Elementes x ist von E und x genau $h(x)$ mal in M vorkommt, und jedes $x \in E$ in M genau $h(x)$ Vorkommen besitzt.

   Damit ist $\langle E, \Pr\rangle$ mit $\Pr[x] = \frac{h(x)}{|M|}$ ein diskreter endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Vorbereitung 2

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.“

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

2. Eine Box enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle. Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

   Wie viele Bälle enthielt die Box zu Beginn?

   (Wir setzen entsprechende Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit voraus).

Lösung

1. Es gibt keinen anderen logischen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Ausführung eines Experiments und der jeweils nächsten Ausführung des Experiments als denjenigen, dass wiederholte Ausführungen denselben Annahmen über die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen unterliegen.

   Die Aussage ist auch deshalb nicht sinnvoll, weil Wahrscheinlichkeiten nicht festgestellt werden (auch nicht auf der Grundlage der Ausführung von Experimenten), sondern Annahmen über die Natur einer experimentellen Anordnung bzw. eines Algorithmus sind.

   Dies steht nicht im Widerspruch dazu, dass die Ergebnisse einer wiederholten Ausführung von Experimenten auch zu Änderungen von Wahrscheinlichkeitsannahmen bzw. Räumen führen können.

2. Sei n die Anzahl der schwarzen Bälle in der Urne. Dann enthält die Urne $3n$ Bälle. Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch $3n - 2$ Bälle in der Urne, von denen n Stück schwarz sind.

   Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen, ist einerseits $\frac{n}{3n-2}$ und andererseits $\frac{2}{5}$. Wir Lösen die Gleichung $\frac{n}{3n-2} = \frac{2}{5}$ nach n auf und erhalten $n = 4$.

   Antwort: Zu Beginn enthielt die Urne 12 Bälle.

Vorbereitung 3

1. Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

2. Sei $\langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse A und B gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

   Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Lösung

1. Seien $\Omega = \{1, 2\}$ und $\Pr[1]=1, \Pr[2]=0$.
   Dann ist $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

   Denn offenbar gilt $0 \leq Pr[e] \leq 1$ für alle $e \in \Omega$ und es gilt $\sum_{e \in \Omega} \Pr[e] = 1$.

2. Aus $1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$ folgt $\Pr[A \cup B] = 1$.

   Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ gilt
   $1 = \Pr[A \cup B] = \Pr[(A \setminus B) \cup B] = \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] = \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}$.

   Es folgt $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Vorbereitung 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}\,, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}\,, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Lösung

Natürlich werden wir die Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse modellieren. Dies impliziert zunächst, dass A und B nicht gleichzeitig als Elementarereignisse ω mit $\omega \in \Omega$ modelliert werden können. Dann nämlich müsste das Ereignis $A \wedge B$ die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen, denn Elementarereignisse sind unvereinbar.
Wir definieren die Bezeichnungen

$$o_1 = A \wedge B\,, \quad o_2 = A \wedge \neg B\,, \quad o_3 = \neg A \wedge B\,, \quad o_4 = \neg A \wedge \neg B$$

Da die o_i paarweise widersprüchlich sind und $o_1 \vee o_2 \vee o_3 \vee o_4$ allgemeingültig (tautologisch) ist, setzen wir

$$\Omega = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}\,.$$

Die Modellierung der Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zusammen mit der Gleichung $\sum_{1 \le i \le 4} \Pr(o_i) = 1$ liefert

$$\Pr(o_1) = \frac{1}{6}\,, \qquad \Pr(o_2) = \frac{1}{3}\,, \qquad \Pr(o_3) = \frac{1}{3}\,, \qquad \Pr(o_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Wir bemerken, dass gilt

$$\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}\,.$$

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten 3 Fehlerarten A, B und C, die bei der Fertigung eines Bauteils auftreten. Wir nehmen an, dass die 3 Fehlerarten gleich häufig vorkommen. Die Ausgangskontrolle protokolliert bei 1000 fehlerhaften Bauteilen folgende Fehler.

5 Bauteile haben gleichzeitig die Fehler A, B und C,
25 Bauteile haben genau die Fehler A und B,
40 Bauteile haben genau die Fehler A und C und
50 Bauteile haben genau die Fehler B und C.

1. Wie viele von den 1000 fehlerhaften Bauteilen haben den Fehler B?

   Beschreiben Sie die Situation zunächst mit einem Venn-Diagramm.

2. Wir nehmen an, dass im Protokoll der Ausgangskontrolle die Zählung wie oben steht, allerdings wegen eines einzigen Tippfehlers die letzte Zeile wie folgt lautet:

   500 Bauteile haben genau die Fehler B und C.

   Wie kann man allein aus den genannten Zahlen heraus nachweisen, dass ein Tippfehler vorliegen muss?

Lösung

Aufgabenstellungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie sind häufig in Anwendungsform eingekleidet. Der erste Schritt besteht dann stets in einer geeigneten Abstraktion. Dieser Schritt erfordert Übung und ist i.A. keineswegs trivial.

Wir abstrahieren hier in der Form, dass wir von einer Grundmenge Ω der Mächtigkeit 1000 von „fehlerhaften Bauteilen" ausgehen und Fehlerarten als Teilmengen A bzw. B bzw. C von Ω darstellen. Die Häufigkeit einer Fehlerart in der vorgelegten Auswahl ist dann gegeben durch $|A|$ bzw. $|B|$ bzw. $|C|$.

Man beachte, dass wir von konkreten, festgestellten Häufigkeiten und nicht von Annahmen über Wahrscheinlichkeiten sprechen.

1. Seien A, B und C Teilmengen von Ω, so dass gleiche Häufigkeit $|A| = |B| = |C|$ gilt (*allgemeines Venn-Diagramm, z.B. mit Kreisen gleicher Radien*).

   Nach Voraussetzung gilt
   $|A \cap B \cap C| = 5$, $|A \cap B \cap \overline{C}| = 25$, $|A \cap \overline{B} \cap C| = 40$, $|\overline{A} \cap B \cap C| = 50$.
   Es folgt
   $|A \cap B| = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \overline{C}| = 5 + 25 = 30$,
   $|A \cap C| = |A \cap B \cap C| + |A \cap \overline{B} \cap C| = 5 + 40 = 45$,
   $|B \cap C| = |A \cap B \cap C| + |\overline{A} \cap B \cap C| = 5 + 50 = 55$.

   Nach dem Inklusions/Exklusionsatz für Mengen (siehe auch Siebformel) rechnen wir

   $$\begin{aligned} 1000 &= |A \cup B \cup C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|\,, \end{aligned}$$

   und gewinnen für $|B|$ die Gleichung

   $$1000 = 3|B| - 30 - 45 - 55 + 5 = 3|B| - 125\,.$$

   Es folgt $|B| = 375\,.$

2. Die gleiche Rechnung mit geänderten Zahlen liefert
   $|A \cap B \cap C| = 5$, $|A \cap B \cap \overline{C}| = 25$, $|A \cap \overline{B} \cap C| = 40$, $|\overline{A} \cap B \cap C| = 500$.

   Es folgt
   $|A \cap B| = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \overline{C}| = 5 + 25 = 30$,
   $|A \cap C| = |A \cap B \cap C| + |A \cap \overline{B} \cap C| = 5 + 40 = 45$,
   $|B \cap C| = |A \cap B \cap C| + |\overline{A} \cap B \cap C| = 5 + 500 = 505$

   und gewinnen für $|B|$ die Gleichung

   $$1000 = 3|B| - 30 - 45 - 505 + 5 = 3|B| - 575\,.$$

   Es folgt $|B| = 525$.

   Nun muss aber auch die folgende Ungleichung gelten:

   $$|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \overline{C}| + |\overline{A} \cap B \cap C| \leq |B|\,.$$

   Diese Ungleichung gilt aber nicht, denn

   $$|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \overline{C}| + |\overline{A} \cap B \cap C| = 5 + 25 + 500 = 530 > 525 = |B|\,.$$

Benerkung: Man beachte, dass die Mächtigkeiten von Mengen stets nichtnegativ sind. Es kann also nicht zu jedem Zahlenbeispiel nach Art der TA 1 ein passendes Mengensystem gefunden werden.

Tutoraufgabe 2

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Kopf“ zeigt und mit Wahrscheinlichkeit 1/2 „Zahl“. Wir werfen eine solche Münze n mal, dabei erhalten wir k mal „Kopf“ und $n - k$ mal „Zahl“.

1. Bestimmen Sie den zu n zugehörigen Ergebnisraum Ω_n.

2. Sei n gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel*.)

3. Wie groß ist $Pr[\,k \text{ gerade}\,]$ in Abhängigkeit von n?

4. Wie groß ist $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (n-i+1)\text{-ter Wurf}]$?

Lösung

1. Wir können jedes Elementarereignis eines n-maligen Münzwurfs als Zeichenreihe $x_1 \ldots x_n$ der Länge n darstellen, wobei $x_i = K$ gilt, wenn beim i-ten Wurf „Kopf“ gefallen ist, und $x_i = Z$ sonst. Daher ist also

   $$\Omega_n = \{x_1 \ldots x_n \;;\; x_i \in \{K, Z\}\}\,,$$

   i.e. die Menge aller Zeichenreihen der Länge n über dem Alphabet $\{K, Z\}$. Damit ist auch klar, dass $|\Omega_n| = 2^n$ gilt.

2. Nach Voraussetzung gilt für die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse jedes einzelnen Münzwurfs: $\mathcal{P}[\text{„Kopf"}] = \frac{1}{2}$ und $\mathcal{P}[\text{„Zahl"}] = \frac{1}{2}$.

   Da wir für die Wiederholung eines Experiments keine Abhängigkeiten annehmen, gilt dann für die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ergebnisses $x = x_1 \dots x_n \in \{K, Z\}^*$ die Gleichung

$$\mathcal{P}[x] = \mathcal{P}[x_1] \cdot \ldots \cdot \mathcal{P}[x_n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n .$$

   Seien $k, n \in \mathbb{N}_0$ und n gerade. Dann gibt es bekanntlich nach dem Binomialsatz $\binom{n}{k}$ Zeichenreihen aus $\{K, Z\}^n$, in denen K genau k-mal vorkommt.

   Sei $A_{n/2}$ das Ereignis „$k = n/2$ bei n-maligem Werfen einer Münze". Dies bedeutet, dass $A_{n/2} \subseteq \Omega_n$ die Menge aller Elementarereignisse ist, so dass genau $n/2$ mal „Kopf" geworfen wird.

   Dann gilt $|A_{n/2}| = \binom{n}{n/2}$.

   Wir schreiben $f \sim g$ für eine asymptotische Abschätzung $f \in \Theta(g)$ und gewinnen mit der Stirling-Formel

$$|A_{n/2}| \;=\; \binom{n}{n/2} = \frac{n!}{((n/2)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n}{\pi n \cdot (n/2e)^n} = 2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

   und somit

$$Pr[A_{n/2}] = \frac{|A_{n/2}|}{|\Omega_n|} \sim \frac{2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}}{2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$

   Bemerkung: Wir erinnern an die Stirling-Formel $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))$ und die asymptotische Abschätzung $\binom{2n}{n} \in \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)$ (siehe DS). Die Abschätzung wird z.B. über den Grenzwert entsprechender Quotienten wie folgt bewiesen:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} \;=\; \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot (1 + o(1))}{2\pi n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot (1 + o(1))^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} \;=\; \frac{1}{\sqrt{\pi}} .$$

3. Sei B_n das Ereignis „k ist gerade bei n-maligem Werfen einer Münze". Dann können wir durch Induktion zeigen, dass

$$|B_n| \;=\; |\overline{B_n}| = \frac{1}{2}|\Omega_n|.$$

   Für B_1 ist dies klar.
   Sei $|B_i| = |\overline{B_i}| = \frac{1}{2}|\Omega_i|$ für ein $i \geq 1$. Dann ist

$$B_{i+1} = \{x_1 \dots x_i K \;;\; k \text{ ungerade für } x_1 \dots x_i\} \cup \{x_1 \dots x_i Z \;;\; k \text{ gerade für } x_1 \dots x_i\} .$$

   Es folgt $|B_{i+1}| = |B_i| + |\overline{B_i}| = |\Omega_i| = \frac{1}{2}|\Omega_{i+1}|$. Mithin gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$Pr[B_n] = \frac{\frac{1}{2}|\Omega_n|}{|\Omega_n|} = \frac{1}{2}.$$

4. Sei A_n das Ereignis „$\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$: Ergebnis i-ter Wurf = Ergebnis $n-i+1$-ter Wurf bei n-maligem Werfen einer Münze“. Für gerade n ist

$$|A_n| = |\{x_1 \dots x_{n/2} x_{n/2} \dots x_1 \ ; \ x_i \in \{K, Z\}\}| = 2^{n/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

während für ungerades n gilt

$$|A_n| = |\{x_1 \dots x_{(n-1)/2} x_{\lceil n/2 \rceil} x_{(n-1)/2} \dots x_1 \ ; \ x_i \in \{K, Z\}\}| = 2 \cdot 2^{(n-1)/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil} \,.$$

Daher ist

$$Pr[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega_n|} = \frac{2^{\lceil n/2 \rceil}}{2^n} = \frac{1}{2^{\lfloor n/2 \rfloor}} \,.$$

Tutoraufgabe 3

Eine unfaire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ „Zahl“ zeigt, wobei $0 \leq p \leq 1$ und $p \neq \frac{1}{2}$ gilt. Wir werfen eine solche Münze n mal und erhalten dabei k mal „Kopf“ und $n-k$ mal „Zahl“.

1. Beschreiben Sie das Experiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k-mal Kopf erscheint.

Lösung

1. Als Ergebnisraum Ω_n können wir statt Zeichenreihen auch die n-Tupel $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ mit $x_i \in \{K, Z\}$ wählen, d. h. $\Omega_n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n)\,;\, x_i \in \{K, Z\}\}$.

   Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird für Elementarereignisse definiert durch

   $\Pr[(x_1, x_2, \dots, x_n)] = p^k(1-p)^{n-k}$, wobei k die Anzahl der Vorkommen von K in $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ sei.

   Wir zeigen, dass $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, wie folgt:

   - Wegen $0 \leq p \leq 1$ gilt $0 \leq (1-p) \leq 1$. Daraus folgt $0 \leq p^k(1-p)^{n-k} \leq 1$, d. h. $0 \leq \Pr[x] \leq 1$.
   - Es gibt genau $\binom{n}{k}$ viele Ereignisse x, in denen K genau k mal vorkommt. Wir rechnen mithilfe des Binomialsatzes

   $$\sum_{x \in \Omega} \Pr[x] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1 \,.$$

2. Sei A das Ereignis, dass k mal Kopf erscheint. Dann gilt

   $$\Pr[A] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \,.$$