SS 2013

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

3. Mai 2013

ZÜ III

Übersicht:

1. Fragen zum Übungsbetrieb
2. Tipps zu HA Blatt 3
3. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen
4. Erwartungswert und Varianz: Fortsetzung von ZÜ 2

1. Fragen zum Übungsbetrieb

Fragen?

Vorschläge?

2. Tipps zu HA Blatt 3

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 3.1:

1. Bestimmen Sie zunächst die Wertemengen W_X und W_Y.

   Vergleichen Sie die im Hinweis für b) gegebene Formel für den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ mit der Definition des Erwartungswerts, die sich bekanntlich auf die Dichte f_X von X bezieht.

   Warum gilt die angegebenen Formel?

Der in HA 3.1(b) behandelte Minimierungssachverhalt ist fundamental wichtig!

2. $\mathbb{E}[D^2]$ kann als eine reellwertige Funktion von den Parametern p_1, p_2 aufgefasst werden. Insbesondere ist $\mathbb{E}[D^2]$ eine Summe von gewichteten Quadtraten.

   Eine Minimierung einer Summe von Quadtraten in Abhängigkeit eines Parameters $p_1 \in \mathbb{R}$ bzw. $p_2 \in \mathbb{R}$ kann bequem mit bekannten Techniken der Analysis angegangen werden, zumindest bei der Herleitung einer notwendigen Bedingung.

   Die Intuition sollte sein, dass p ein ,,Mittelwert" sein wird.

ad HA 3.2:

Eine Paarung definiert eine Partition der Menge der Spieler in 2-elementige Klassen. Zu Beginn einer neuen Runde wird also eine Partition der noch verbliebenen Spieler ausgewählt.

Für die Rechnung spielt es keine Rolle, in welcher Reihenfolge die einzelnen Partien innerhalb einer Runde gespielt werden.

Das Ergebnis einer Runde ist eine Teilmenge von Spielern, die nur mehr die Hälfte der Spieler zu Beginn einer Runde enthält.

1. Versuchen Sie zunächst, die Lösungen intuitiv zu bestimmen.

   Zeichnen Sie nun einen Baum, der alle Spielsituationen widergibt.

   Im Fall $n = 2$ gibt es nur zwei Runden, d.h., dass in der 2-ten Runde bereits der Sieger ermittelt wird. Die Blätter des Baumes sind dann einelementige Mengen.

2. Bestimmen Sie die W'keit des Ereignisses,
   - dass Spieler 1 in der 1-ten Runde auf Spieler 2 trifft.
   - dass Spieler 2 die erste Runde gewinnt, d.h. in die nächste Runde kommt.
   - dass Spieler 1 in der k-ten Runde auf Spieler 2 trifft.

Benutzen Sie Fallunterscheidungen für disjunkte Ereignisse bzw. Eigenschaften für Spielerzusammensetzungen in den Runden.

3. Thema: Unabhängigkeit von Ereignissen und Zufallsvariablen

3.1 Definitionen nach Vorlesung

Die paarweise verschiedenen Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ heißen unabhängig, wenn für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ gilt, dass

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]. \tag{1}$$

Die Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, \ldots, x_n) \in W_{X_1} \times \ldots \times W_{X_n}$ gilt

$$\Pr[X_1 = x_1, \ldots, X_n = x_n] = \Pr[X_1 = x_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_n = x_n]. \tag{2}$$

Achtung:

1. Falls für paarweise verschiedene Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ die folgende Gleichung gilt

$$\Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] = \Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_n]\,, \tag{3}$$

dann gilt nicht notwendigerweise auch für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ die Gleichung

$$\Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}] = \Pr[A_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[A_{i_k}]\,. \tag{4}$$

Aber:

2. Falls n Zufallsvariable $X_1, \ldots, X_n$ unabhängig sind, dann sind für alle Teilmengen $I = \{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ mit $i_1 < i_2 < \ldots < i_k$ die Variablen $X_{i_1}, \ldots X_{i_k}$ unabhängig, d. h. es gelten für alle $(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}) \in W_{X_{i_1}} \times \ldots \times W_{X_{i_k}}$ die Gleichungen

$$\Pr[X_{i_1} = x_{i_1}, \ldots, X_{i_k} = x_{i_k}] = \Pr[X_{i_1} = x_{i_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr[X_{i_k} = x_{i_k}] \,.$$

Insbesondere sind dann für beliebige $x_1, \ldots, x_n$ die Ereignisse

$$A_1 = („X_1 = x_1“), \ \ldots \ , \ A_n = („X_n = x_n“)$$

unabhängig.

Es gilt der folgende Satz, der die Unabhängikeit von Ereignissen und die Unabhängigkeit von Zufallsvariablen in Zusammenhang bringt.

Zuvor aber die

Definition der Indikatorvariablen (siehe Vorlesung):

Sei $A \subseteq \Omega$ ein Ereignis. Dann heißt die Abbildung

$$I_A := \begin{cases} 1 & \text{falls } A \text{ eintritt,} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

eine Indikatorvariable des Ereignisses A.

Bezüglich des gegebenen Wahrscheinlichkeitsraumes ist jede Indikatorvariable eine Zufallsvariable.

Satz:

Die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ sind genau dann unabhängig, wenn die Indikatorvariablen $I_{A_1}, \ldots, I_{A_n}$ unabhängig sind.

3.2 Konstruktion unabhängiger Ereignisse

Thema ist die allgemeine Konstruktion unabhängiger Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert.

Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.
  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. *Beweis*!
- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i.

  Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$
  eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. *Beweis*!

VA 1

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

Konstruktion des Beispiels:

Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$.

Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.

Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$.

Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

Wir haben nun die Partition

$$\begin{aligned} A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 = [9, 12]\,, \\ A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 = [13, 16]\,, \\ A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} = [1, 8]\,, \\ A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} = [17, 24]\,. \end{aligned}$$

Seien
$B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$, $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.

Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

Wir setzen $C = A_3$ und erhalten $\Pr[C] = \frac{1}{4}$.

Beweis der Korrektheit der Konstruktion:

Zunächst berechnen wir die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$
\begin{aligned}
\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s] \cdot \Pr[A^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1} \cdot \Pr[A^s] \\
&= p_{k+1} \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[A^s] \\
&= p_{k+1} \,.
\end{aligned}
$$

Unabhängigkeit im 1. Schritt:

Im Fall einer einelementigen Menge von Ereignissen $\{A_1\}$ haben wir nur die Gleichung

$$\Pr\left[\bigcap_{A \in \{A_1\}} A\right] = \prod_{A \in \{A_1\}} \Pr[A]$$

zu beweisen.

Sie gilt trivialerweise.

Unabhängigkeit im $(k+1)$-ten Schritt:

Die Menge der Durchschnitte A^s mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine 2^k-Partition von Ω.

Bei der Konstruktion eines Ereignisses A_{k+1}, so dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen A^s in konstantem Verhältnis p_{k+1} zu $1-p_{k+1}$.

Wir gehen nach Vorlesung vor und zeigen für alle $s \in \{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung

$$\Pr[A^s] = \prod_{i \in [k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.$$

Falls $s_{k+1} = 1$,

dann gilt $\quad A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap A_{k+1} = B^{(s_1,\ldots,s_k)}$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr\left[B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= p_{k+1} \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= \Pr\left[A_{k+1}^{s_{k+1}}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr\left[A_i^{s_i}\right].
\end{aligned}$$

Falls $s_{k+1} = 0$,

dann gilt $\quad A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap \overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)}$

und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr\left[A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)}\right] \\
&= \Pr\left[A^{(s_1,\dots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\dots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= (1 - p_{k+1}) \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] \\
&= \Pr\left[A_{k+1}^{s_{k+1}}\right] \cdot \Pr\left[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}\right] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr\left[A_i^{s_i}\right].
\end{aligned}$$

4. Erwartungswert und Varianz: Fortsetzung von ZÜ 2

Zur Lösung von Gleichungen, die Erwartungswert und Varianz enthalten, benötigt man die folgenden Beziehungen für Zufallsvariable $X, X_1, \ldots, X_n$ über demselben Wahrscheinlichkeitsraum, und beliebige $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

Linearität des Erwartungswerts:

$$\mathbb{E}[a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n] = a_1\mathbb{E}[X_1]+a_2\mathbb{E}[X_2]+\ldots+a_n\mathbb{E}[X_n]\,.$$

Varianz als Differenz:

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Varianz affin transformierter Variablen:

$$\mathrm{Var}\,[aX+b] = a^2\mathrm{Var}\,[X]\,.$$

Setzt man die Unabhängigkeit der Variablen X_i voraus, dann gelten zusätzlich:

Multiplikativität des Erwartungswerts:

$$\mathbb{E}[X_1 \cdot X_2 \cdot \ldots \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot \mathbb{E}[X_2] \cdot \ldots \cdot \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Additivität der Varianz:

$$\mathrm{Var}[X_1 + X_2 + \ldots + X_n] = a_1 \mathrm{Var}[X_1] + \mathrm{Var}[X_2] + \ldots + \mathrm{Var}[X_n]\,.$$

4.1 VA 3 (ZÜ II)

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2\cdot\mathrm{Var}[X] + 2\cdot\mathrm{Var}[Y]\,.$$

2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y)\cdot(X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y]\cdot\mathbb{E}[X-Y]\,.$$

Lösung:

1.

$$
\begin{aligned}
&\text{Var}\,[X+Y] + \text{Var}\,[X-Y] \\
&\quad = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 + \mathbb{E}[(X-Y)^2] - \mathbb{E}[X-Y]^2 \\
&\quad = 2\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[Y^2] - (2\mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[Y]^2) \\
&\quad = 2 \cdot \text{Var}\,[X] + 2 \cdot \text{Var}\,[Y]\,.
\end{aligned}
$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) &\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &\Rightarrow \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2\end{aligned}$$

und damit, mit Benützung der Linearität von $\mathbb{E}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] &= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] \\ &= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) \\ &= \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y]\,.\end{aligned}$$