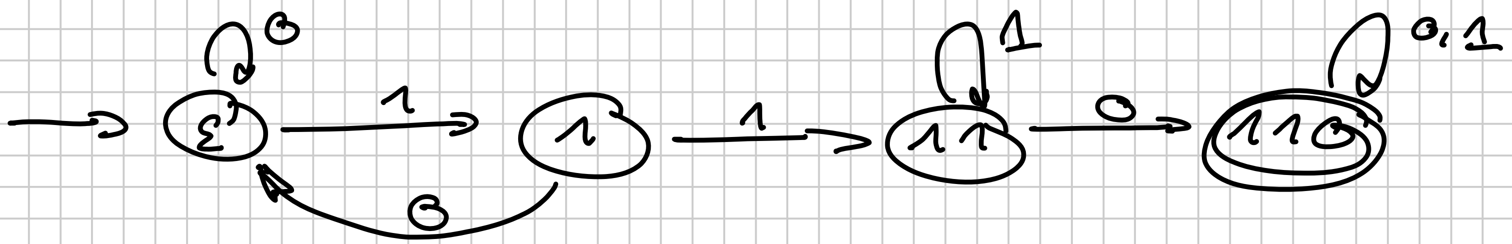
Aufgabe 7.1 **Abzugeben.** **2P**

Sei X die ZV, welche die Anzahl der Würfe in Aufgabe A4.4 (a) zählt.

Leiten Sie zunächst mit demselben Ansatz wie A4.4 ein lineares Gleichungssystem für $G_X(z) = \mathbb{E}[z^X]$ her, indem Sie nach den Ergebnissen der ersten Münzwürfe bedingen. (Z.B. $\mathbb{E}[z^X|0] = \mathbb{E}[z^{X+1}] = z\mathbb{E}[z^X]$.)

Bestimmen Sie dann $G_X(z)$ durch Lösen des Gleichungssystems.



$$G_X(s) = \mathbb{E}[s^X] = \underbrace{\mathbb{E}[s^X|0]}_{= \mathbb{E}[s^{X+1}] = s\mathbb{E}[s^X]} \tfrac{1}{2} + \mathbb{E}[s^X|1]\tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[s^X|1] = \underbrace{\mathbb{E}[s^X|10]}_{\mathbb{E}[s^{X+2}] = s^2\mathbb{E}[s^X]} \tfrac{1}{2} + \mathbb{E}[s^X|11]\tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[s^X \mid 11] = \underbrace{\mathbb{E}[s^X \mid 110]}\, \tfrac{1}{2} + \underbrace{\mathbb{E}[s^X \mid 111]}\, \tfrac{1}{2}$$

$$= s^3 \, \frac{1}{2} \quad + \quad s\, \mathbb{E}[s^X \mid 11]\, \tfrac{1}{2}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{2} s^3}{1 - \tfrac{1}{2} s} = \frac{s^3}{2-s}$$

$$\leadsto \qquad \mathbb{E}[s^X \mid 1] = \frac{1}{2} s^2\, \mathbb{E}[s^X] + \frac{1}{2} \frac{s^3}{2-s}$$

$$\mathbb{E}[s^X] = \frac{1}{2} s\, \mathbb{E}[s^X] + \frac{1}{4} s^2\, \mathbb{E}[s^X] + \frac{1}{4} \frac{s^3}{2-s}$$

$$= \frac{\tfrac{1}{4} \frac{s^3}{2-s}}{1 - \frac{1}{2} s - \frac{1}{4} s^2} = \frac{s^3}{(4 - 2s - s^2)(2-s)} = G_X(s)$$

Anmerkung: $(4-2s-s^2) = \left((\sqrt{5}-1)-s\right)\left((-\sqrt{5}-1)-s\right)$

$\rightsquigarrow$ Partialbruchzerlegung von $G_X(s)$ hat die Form

$$G_X(s) = C_0 + C_1 \underbrace{\frac{1}{1-\frac{s}{2}}}_{=\sum\limits_{i\geq 0}\left(\frac{s}{2}\right)^i} + C_2 \underbrace{\frac{1}{1-\frac{s}{\sqrt{5}-1}}}_{=\sum\limits_{i\geq 0}\left(\frac{s}{\sqrt{5}-1}\right)^i} + C_3 \underbrace{\frac{1}{1-\frac{s}{-\sqrt{5}-1}}}_{=\sum\limits_{i\geq 0}\left(\frac{s}{-\sqrt{5}-1}\right)^i}$$

$\rightsquigarrow$ Erlaubt $\Pr[X=i]$ zu bestimmen.

Aufgabe 7.2 **Abzugeben.**

Es seien $X \sim \mathrm{Geo}(1/4)$ und $Y \sim \mathrm{Geo}(1/2)$ unabhängige ZVen.

In dieser Aufgabe werden verschiedene Wege diskutiert, um die Dichte von $X + Y$ zu berechnen.

(a) Faltung:

$$\Pr[X+Y=k] = \sum_{i+j=k} \underbrace{\Pr[X=i]\,\Pr[Y=j]}_{=0 \text{ für } i,j<1}$$

$$= \sum_{i=1}^{k-1} p_X\, q_X^{\,i-1}\; p_Y\, q_Y^{\,(k-i)-1}$$

$$\overset{\ell=i-1}{=} \sum_{\ell=0}^{k-2} p_X\, q_X^{\,\ell}\; p_Y\, q_Y^{\,k-2-\ell}$$

Hinweis:

$$\sum_{i=0}^{n} a^i b^{n-i} = \frac{a^{n+1}-b^{n+1}}{a-b} = p_x q_y \frac{q_x^{k-1} - q_y^{k-1}}{q_x - q_y} \text{ für } k \geq 2$$

$$(a-b)\left(a^0 b^n + a^1 b^{n-1} + \dots + a^{n-1} b + a^n b^0\right)$$

$$= a^1 b^n + a^2 b^{n-1} + \dots + a^n b + a^{n+1} b^0$$

$$- a^0 b^{n+1} - a^1 b^n - a^2 b^{n-1} - \dots - a^n b = a^{n+1} - b^{n+1}$$

(b) Erzeugende Funktion:

$$G_X(s) = \sum_{k \geq 0} s^k \Pr[X=k] = \sum_{k \geq 1} s^k p_X q_X^{k-1}$$

$$= p_X s \sum_{k \geq 0} s^k q_X^k = \frac{p_X s}{1 - q_X s}$$

$$\rightsquigarrow G_{X+Y}(s) = \frac{p_X s}{1 - q_X s} \cdot \frac{p_Y s}{1 - q_Y s}$$

$$= C_0 + C_1 \frac{1}{1 - q_X s} + C_2 \frac{1}{1 - q_Y s}$$

$$= C_0 + \sum_{k=0}^{\infty} \left[C_1 q_X^k + C_2 q_Y^k \right] s^k$$

$\rightsquigarrow$ Es muss gelten: $Pr[X+Y=0] = 0 \overset{!}{=} C_0 + C_1 + C_2$

$$Pr[X+Y=1] = 0 \overset{!}{=} C_1 q_X + C_2 q_Y$$

$$Pr[X+Y=2] = p_X\, p_Y \overset{!}{=} C_1 q_X^2 + C_2 q_Y^2$$

für $q_X = 1 - p_X = \frac{3}{4}$, $\quad q_Y = 1 - p_Y = 1/2$

$$\rightsquigarrow \frac{3}{4} C_1 + \frac{1}{2} C_2 = 0 \rightsquigarrow C_2 = -\frac{3}{2} C_1$$

$$\frac{9}{16} C_1 + \frac{1}{4} C_2 = \frac{1}{8} \rightsquigarrow \frac{9}{16} C_1 - \frac{3}{8} C_2 = \frac{1}{8}$$

$$\rightsquigarrow C_1 = \frac{2}{3}, \; C_2 = -1$$

$$\rightsquigarrow C_0 = \frac{1}{3}$$

A7.3

(a) Es seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ σ-Algebren über Ω.

Zeigen Sie, dass dann auch $\mathcal{C} := \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \{A \mid A \in \mathcal{A} \wedge A \in \mathcal{B}\}$ eine σ-Algebra über Ω ist.

Definition 53

Sei Ω eine Menge. Eine Menge $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ heißt σ-Algebra über Ω, wenn folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(E1) $\Omega \in \mathcal{A}$.

(E2) Wenn $A \in \mathcal{A}$, dann folgt $\bar{A} \in \mathcal{A}$.

(E3) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n \in \mathcal{A}$. Dann gilt auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Die Elemente von $\mathcal{A}$ heißen Ereignisse.

(E1) $\Omega \in \mathcal{C}$, da $\Omega \in \mathcal{A}$ und $\Omega \in \mathcal{B}$ ✓

(E2): Sei $A \in \mathcal{C}$, dann

$A \in \mathcal{A}$ und $A \in \mathcal{B}$,

also $\bar{A} \in \mathcal{A}$ und $\bar{A} \in \mathcal{B}$,

daher $\bar{A} \in \mathcal{C}$

(E3) Seien $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{C}$, dann $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \wedge A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{B}$

dann $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{A} \wedge \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$

daher $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{C}$

(b) Es sei $\Omega = \{a,b,c,d\}$ und $A_1 = \{a,b\}$, $A_2 = \{a,c,d\}$ und $A_3 = \{b,d\}$.

Geben Sie *die kleinste* σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω an, welche A_1, A_2, A_3 enthält.

Das heißt: Für jede andere σ-Algebra $\mathcal{A}'$ über Ω, welche ebenfalls A_1, A_2, A_3 enthählt, soll $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}'$ gelten.

__Idee:__ Fügen nur die Mengen hinzu, die auf Grund von (E1) – (E3) in σ-Algebra existieren müssen.

$$\mathcal{A} = \{ A_1, A_2, A_3, \underset{\substack{\uparrow \\ (E1)}}{\Omega}, \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{A_1}}}{\{c,d\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{A_2}}}{\{b\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{A_3}}}{\{a,c\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{\Omega}}}{\emptyset}, \underset{\substack{\uparrow \\ A_1 \cup A_2 = \Omega}}{\{a,b,c,d\}},$$

$$\underset{\substack{\uparrow \\ A_2 \cup A_3 = \Omega}}{\{a,b,c,d\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ A_1 \cup A_3}}{\{a,b,d\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{A_1 \cup A_3}}}{\{c\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{A_1} \cup \overline{A_2}}}{\{b,c,d\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}}}}{\{a\}}, \underset{\substack{\uparrow \\ (\overline{A_2} \cup \overline{\overline{A_1} \cup \overline{A_2}} \\ \cup \overline{A_1 \cup A_3})^c}}{\{d\}}, \ldots \}$$

$$= 2^{\{a,b,c,d\}}$$

(c) Für jede Menge Ω und *nicht-leere* Menge $\mathcal{F} \subseteq 2^\Omega$ von Ereignissen über Ω definieren wir die σ-Algebra $\sigma(\mathcal{F})$ induktiv:

- Für alle $A \in \mathcal{F}$: $A \in \sigma(\mathcal{F})$.
- Falls $A \in \sigma(\mathcal{F})$: $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$.
- Falls $A_1, A_2, \ldots \in \sigma(\mathcal{F})$: $\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i \in \sigma(\mathcal{F})$.

Zeigen Sie, dass $\sigma(\mathcal{F})$ die kleinste σ-Algebra über Ω ist, welche $\mathcal{F}$ beinhaltet.

!

1. Schritt: $\mathcal{A}^* := \bigcap_{\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}} \mathcal{A}$ wieder σ-Algebra, Beweis genauso wie in a

2. Schritt: $\sigma(\mathcal{F})$ ist σ-Algebra mit $\mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$

$\hookrightarrow$ $\sigma(\mathcal{F}) \supseteq \mathcal{A}^*$ | Reicht (E1) zu zeigen: Da $\mathcal{F} \neq \emptyset$, existiert $A \in \mathcal{F} \subseteq \sigma(\mathcal{F})$. Also auch $\bar{A} \in \sigma(\mathcal{F}) \rightsquigarrow A \cup \bar{A} = \Omega \in \sigma(\mathcal{F})$

3. Schritt: Für alle σ-Algebren $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$: $\sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}$

$\rightsquigarrow \sigma(\mathcal{F}) \subseteq \mathcal{A}^*$ $\square$

Induktive Definition von $\sigma(\mathcal{F})$ bedeutet gerade, dass $\sigma(\mathcal{F})$ der Limes der Mengen $S_0 \subseteq S_1 \subseteq S_2 \subseteq \dots$ ist,

wobei
- $S_0 := \mathcal{F}$
- S_{i+1} enthält genau folgende Mengen:

  Falls $A \in S_i$, dann $A \in S_{i+1}$ und $\overline{A} \in S_{i+1}$

  Falls $A_1, A_2, \dots \in S_i$, dann $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in S_{i+1}$

  Sonst enthält S_i keine weiteren Mengen.

$$\sigma(\mathcal{F}) := \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i = \lim_{i \to \infty} S_i$$

Es reicht somit zu zeigen, dass $S_i \subseteq \mathcal{A}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A}$ σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$.

- <u>$i=0$:</u> $S_0 = \mathcal{F} \subseteq \mathcal{A}$ ✓
- <u>$i \to i+1$:</u> $S_i \subseteq \mathcal{A}$, dann auch $\overline{A} \in \mathcal{A}$ $\forall A \in S_i$
  und $\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \in \mathcal{A}$ $\forall A_1, A_2, \ldots \in S_i$
  also auch $S_{i+1} \subseteq \mathcal{A}$

$\rightsquigarrow \bigcup_{i=1}^{\infty} S_i \subseteq \mathcal{A}$ $\square$

(d) Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen in $\mathcal{B}$ enthalten sind:

- Die Menge der irrationalen Zahlen.
- Die Menge der reellen Zahlen in $[0,1]$, deren Binärdarstellung unendlich viele 1en enthält.

- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} = \mathbb{R} \setminus \underbrace{\bigcup_{x \in \mathbb{Q}}}_{\text{abzählbare Vereinigung}} \underbrace{\{x\}}_{[x,x]}$

- <u>Binär-Darstellung:</u> $\{0,1\}^{\mathbb{N}} \longrightarrow [0,1]$

$$(b_1, b_2, \dots) \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} b_i 2^{-i}$$

z.B. $(1,1,\dots) \longmapsto \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} = \frac{2^{-1}}{1-2^{-1}} = 1$

Wollen alle Sequenzen (b_i) mit $\forall_{k \in \mathbb{N}} \exists_{j > k} : b_j = 1$

bzw. Komplement: $\exists_{k \in \mathbb{N}} \forall_{j > k} : b_j \neq 1$

$$\equiv \exists k \in \mathbb{N} \ \forall j > k : b_j = 0$$

$$\triangleq \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \left\{ \sum_{i=1}^{k} b_i 2^{-i} + 0 \ \middle| \ b_1, \dots, b_k \in \{0,1\} \right\}$$

$$= \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \underbrace{\bigcup_{(b_1, \dots, b_k) \in \{0,1\}^k}}_{\text{endliche Vereinigung}} \left[\sum_{i=1}^{k} b_i 2^{-i} , \sum_{i=1}^{k} b_i 2^{-i} \right]$$

(e) Zeigen Sie, dass $\mathcal{B}$ auch die kleinste σ-Algebra ist, welche alle halb-offenen Intervalle $(a,b] \subseteq \mathbb{R}$ enthält.

Nach Vorlesung: $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathbb{R}) := \sigma(\{[a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\})$

Zu zeigen: $\mathcal{B} = \sigma(\{(a,b] \mid a,b \in \mathbb{R}\}) =: \mathcal{B}'$

1) $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$:

Zeige, dass $(a,b] \in \mathcal{B}$: $(a,b] = [a,b] \setminus [a,a]$

$= [a,b] \cap \mathbb{R} \setminus [a,a] \in \mathcal{B}$ ✓

2) $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$:

Zeige, dass $[a,b] \in \mathcal{B}'$: $[a,b] = \bigcap_{n=1}^{\infty} (a - \frac{1}{n}, b]$

Aufgabe 7.5

- $x \equiv y$ gdw. $x-y \in \mathbb{Q}$ für $x, y \in \Omega = [0,1]$
- R System von Repräsentanten bzgl. $\equiv$
  (Siehe Auswahlaxiom)
- $[0,1) = \bigcup_{r \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} r \oplus R$ disjunkte Vereinigung, da:

  Sei $z \in R \oplus r \cap R \oplus r'$
  dann existieren $x, y \in R$ mit
  $z = x + r = y + r'$
  Also: $x - y = r' - r \in \mathbb{Q}$, d.h. $x \equiv y$

Aber R enthält für jede Äquivalenzklasse von $\equiv$ genau einen Repräsentanten.

$$\rightsquigarrow \text{Somit: } 1 = \Pr\big[[0,1]\big] \overset{\text{Annahme I}}{=} \Pr\big[[0,1)\big] \overset{\text{disjunkte Vereinigung, Annahme III}}{=} \sum_{r \in [0,1] \cap \mathbb{Q}} \Pr[r \oplus R]$$

$$\overset{\text{Annahme II.}}{=} \underbrace{\sum_{r \in [0,1) \cap \mathbb{Q}} \Pr[R]}_{\text{kann nur divergieren oder gleich 0 sein.}}$$

<u>Folgerung:</u> Wenn I, II, III gelten sollen, müssen Mengen wie R ausgeschlossen werden.

(a) $\int_1^5 (3x+2)^{1/2} dx.$

Trafo: $u = 3x+2 \;,\; x = \frac{u-2}{3} \;,\; dx = \frac{1}{3} du$

$$\rightsquigarrow \int_1^5 \sqrt{3x+2}\, dx = \frac{1}{3}\int_5^{17} \sqrt{u}\, du = \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3} u^{3/2}\Big|_5^{17}$$

(b) $\int_{-1/4}^{3/4} x \arcsin(x^2)(1-x^4)^{-1/2} dx.$

Trafo: $x = \sqrt{\sin\varphi} \quad (\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}])$

$$dx = \frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{\sin\varphi}}\cos\varphi$$

$$\int_0^{3/4} \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx = \int_0^{\arcsin(\frac{9}{16})} \frac{\sqrt{\sin\varphi}\cdot\varphi}{\cos\varphi}\cdot\frac{1}{2}\frac{\cos\varphi}{\sqrt{\sin\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^{\arcsin(\frac{9}{16})} \varphi = \frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{9}{16}\right)^2$$

$$\int_{-\frac{1}{4}}^{0} \frac{x \arcsin(x^2)}{\sqrt{1-x^4}}\, dx \underset{\substack{y=-x \\ dx=-dy}}{\overset{\uparrow}{=}} \int_{\frac{1}{4}}^{0} \frac{-y\arcsin(y^2)}{\sqrt{1-y^4}} (-dy) = -\int_0^{1/4} \frac{y\arcsin(y^2)}{\sqrt{1-y^4}}\, dy$$

$$= -\frac{1}{4} \arcsin\left(\frac{1}{16}\right)^2$$

$$\rightsquigarrow \int_{-1/4}^{3/4} \dots\, dx = \frac{1}{4}\left(\arcsin\left(\frac{9}{16}\right) - \arcsin\left(\frac{1}{16}\right)^2\right)$$

(c) $\int_2^{5/4}(1+(1+x)^{1/2})^{-1}dx.$ $= - \int_{5/4}^{2} \frac{1}{1+\sqrt{1+x}}\, dx$

Trafo: $u = 1+\sqrt{1+x}$, $x = (u-1)^2 - 1$

$dx = 2(u-1)$

$$\int_{5/4}^{2} \frac{dx}{1+\sqrt{1+x}} = \int_{\frac{5}{2}}^{1+\sqrt{3}} \frac{2(u-1)}{u}\, du = 2\int_{5/2}^{1+\sqrt{3}} 1-\frac{1}{u}\, du$$

$$= 2\,\Big[u - \ln u\Big]_{5/2}^{1+\sqrt{3}}$$

(d) $\int_{0\le x,y\le 1}(x^2+y^2)dxdy$.

$$= \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} x^2\,dx + \int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1} y^2\,dy = 2\int_{x=0}^{1} x^2\,dx = \frac{2}{3}$$

(e) $\int_{x^2+y^2\le 1}(x^2+y^2)dxdy$.

Trafo: $\Phi: (r,\varphi) \longmapsto (r\cos\varphi,\ r\sin\varphi)$

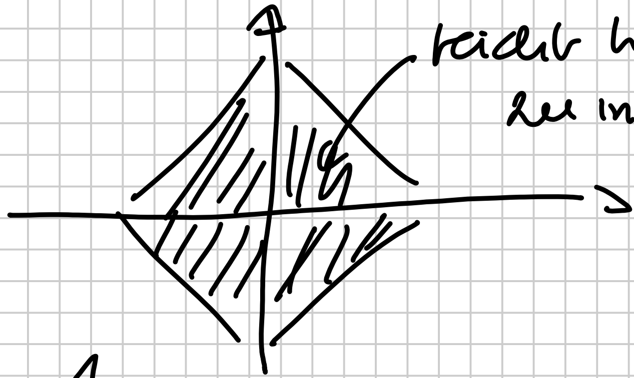
$$dx\,dy = d\Phi(r,\varphi) = \underbrace{\det\begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \\ \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \end{pmatrix}}_{\det\begin{pmatrix} \cos\varphi, & \sin\varphi \\ -r\sin\varphi, & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r} d\varphi\, dr$$

$$\int\limits_{x^2+y^2\le 1} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} r^2\cdot r \; d\varphi\, dr = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi \cdot \int\limits_{r=0}^{1} r^3 dr$$

$$= 2\pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{\pi}{2}$$

(f) $\int_{|x|+|y|\le 1}(x^2+y^2)dxdy.$

Integrationsgebiet :



reicht hier zu integrieren.

$$\int\limits_{\substack{0\le x,y\le 1\\ x+y\le 1}} (x^2+y^2)\,dx\,dy$$

$$= \int\limits_{x=0}^{1}\int\limits_{y=0}^{1-x} (x^2+y^2)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{1} x^2(1-x)+\frac{1}{3}(1-x)^3\,dx$$

$$= \int_0^1 x^2 - x^3 + \frac{1}{3} - x + x^2 - \frac{1}{3}x^3 \, dx$$

$$= \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x^3 - \frac{1}{3}x^4 \Big|_0^1$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

$$\rightsquigarrow \cdot 4 = \frac{2}{3}$$