Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 1
27. April 2015

Theoretische Informatik

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Mit (x, y) bezeichnen wir das 2-Tupel von Objekten x, y. Es gilt $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$ genau dann, wenn $x_1 = x_2$ und $y_1 = y_2$ gelten. Überdies wird Tupelbildung stets so verstanden, dass $x \neq (x, y)$ und $y \neq (x, y)$ für alle Objekte x und y gilt. Eine Menge U nennen wir abgeschlossen gegenüber 2-Tupelbildung, falls die folgende Implikation $A2$ gilt:

$$(A2) \qquad x, y \in U \Longrightarrow (x, y) \in U\,.$$

1. Sei F eine Menge (a.a. eine Familie) von Mengen, die abgeschlossen sind gegenüber 2-Tupelbildung. Zeigen Sie, dass dann auch der Durchschnitt aller Mengen aus F abgeschlossen ist gegenüber 2-Tupelbildung, d.h.

   $$\bigcap_{U \in F} U \quad \text{ist abgeschlossen gegenüber 2-Tupelbildung.}$$

   Hinweis: Falls F endlich ist mit $F = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$, dann gilt

   $$\bigcap_{U \in F} U = U_1 \cap U_2 \cap \ldots \cap U_n\,.$$

2. Sei M eine Menge. Wir definieren

   (a) $S_0 := M \quad$ und $\quad S_{i+1} := S_i \cup (S_i \times S_i) \quad$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$,

   (b) $M^{\times 2} := \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i$.

   Zeigen Sie: $M^{\times 2}$ ist die bezüglich Mengeninklusion kleinste, gegenüber 2-Tupelbildung abgeschlossene Menge U, die M umfasst, d.h., dass $M \subseteq U$ gilt.

   Bemerkung: Man nennt $M^{\times 2}$ die gegenüber 2-Tupelbildung abgeschlossene Hülle von M. Sie besitzt zwei Darstellungen:

   $$M^{\times 2} \;=\; \bigcap_{(U \supseteq M,\ U \text{ erfüllt } A2)} U \;=\; \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i\,. \qquad (\text{Def. } S_i \text{ siehe 2a})$$

Wir setzen wie üblich voraus, dass das Universum der zugrundeliegenden Mengenlehre hinreichend groß ist.

Lösung

1. Die Abgeschlossenheit von $\bigcap_{U \in F} U$ beweist man wie folgt:

$$\begin{aligned} x, y \in \bigcap_{U \in F} U &\implies \forall U \in F: \ x, y \in U && \text{Def.} \\ &\implies \forall U \in F: \ (x, y) \in U && U \text{ abgeschlossen} \\ &\implies (x, y) \in \bigcap_{U \in F} U \,. && \text{Def.} \qquad (2P) \end{aligned}$$

2. Wir haben Folgendes zu zeigen:

   (a) $M \subseteq M^{\times 2}$.

   (b) $M^{\times 2}$ ist abgeschlossen gegenüber 2-Tupelbildung.

   (c) Für jede abgeschlossene Menge U mit $M \subseteq U$ folgt $M^{\times 2} \subseteq U$.

   Beweis:

   (a) Offensichtlich gilt $M = S_0 \subseteq \bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} S_i = M^{\times 2}$.

   (b) Offenbar gilt auch $S_i \subseteq S_j$ für alle $i \leq j$. Dann beweist man die Abgeschlossenheit von $M^{\times 2}$ wie folgt:

$$\begin{aligned} x, y \in M^{\times 2} &\implies \exists i, j \in \mathbb{N} : x \in S_i \wedge y \in S_j && \text{Def.} \\ &\implies \exists i, j \in \mathbb{N} : x, y \in S_{\max(i,j)} && \text{Wegen } S_i \cup S_j \subseteq S_{\max(i,j)} \\ &\implies \exists i, j \in \mathbb{N} : (x, y) \in S_{\max(i,j)+1} && \text{Def.} \\ &\implies (x, y) \in M^{\times 2} \,. && \text{Def.} \qquad (2P) \end{aligned}$$

   (c) Sei nun U eine beliebige abgeschlossene Menge mit $M \subseteq U$. Wir zeigen $M^{\times 2} \subseteq U$, indem wir $S_i \subseteq U$ für alle $i \in \mathbb{N}_0$ durch Induktion über i zeigen.
   Induktionsanfang: $S_0 = M \subseteq U$ gilt nach Definition und Voraussetzung.
   Induktionsschluss:
   Annahme: Sei $i \in \mathbb{N}_0$. Es gelte $S_i \subseteq U$. Wir zeigen, dass dann $S_{i+1} \subseteq U$ gilt wie folgt:
   Sei $z \in S_{i+1}$. Dann folgt nach Definition $z \in S_i$ oder $z \in S_i \times S_i$.
   Falls $z \in S_i$, dann gilt $S_i \subseteq U$ nach Induktionsvoraussetzung.
   Sei nun $z \in S_i \times S_i$. Dann gilt

$$\begin{aligned} z \in S_i \times S_i &\implies \exists x, y : x, y \in S_i \wedge z = (x, y) && \text{Def.} \\ &\implies \exists x, y : x, y \in U \wedge z = (x, y) && \text{Ind.Vor.} \\ &\implies (x, y) \in U \,. && U \text{ abgeschlossen} \end{aligned}$$

(1P)

<u>Bemerkung:</u> Diese Aufgabe thematisiert das Beweisschema der Hüllenbildung. Hüllenbildung hat in der gesamten theoretischen Informatik hohe Bedeutung und wird in vielen Varianten im laufenden Semester angewandt werden.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und Σ^* die Menge aller Wörter über Σ. Man zeige:

1. Die Menge Σ^* ist abzählbar.
2. Die Menge $F(\Sigma^*)$ aller $\{0,1\}$-wertigen Funktionen $c : \Sigma^* \to \{0,1\}$ ist nicht abzählbar.

Lösung

1. Eine Menge M heißt abzählbar, wenn sie entweder endlich ist oder wenn beide M und $\mathbb{N}$ bijektiv aufeinander abgebildet werden können. Dies ist gleichbedeutend damit, dass eine bijektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$ (Nummerierung) existiert oder eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ (Abzählung, Auflistung).

   Falls M nicht endlich ist, dann gilt:

   Es existiert eine bijektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ genau dann, wenn
   es existiert eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to M$ genau dann, wenn
   es existiert eine injektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$. genau dann, wenn
   es existiert eine bijektive Funktion $f : M \to \mathbb{N}$. .

   Man kann eine Nummerierung $f : M \to \mathbb{N}$ aus der folgenden Überlegung heraus entwickeln.

   Es gelten für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Gleichungen $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n = 2^n$. Aufsummierung ergibt mit Hilfe der geometrischen Formel

   $$\sum_{i=0}^{n} |\Sigma^i| = 1 + 2^1 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1\,.$$

   Daraus folgt unmittelbar eine Nummerierung $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ von Σ^* wie folgt. Seien $z(a) = 0$, $z(b) = 1$ und $w = x_1 x_2 \ldots x_n \in \Sigma^*$:

   $$f(w) := 2^{|w|} + \sum_{i=0}^{n=|w|-1} z(x_i) 2^{n-i}\,.$$

   (2P)

   Eine entsprechende Auflistung ist $\Sigma^* = \{\epsilon, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \ldots\}$. Sie entspricht der Inversen von f.

2. Die Überabzählbarkeit der Menge $F(\Sigma^*)$ sieht man mit Hilfe eines Diagonalbeweises wie folgt ein.

   Da Σ^* abzählbar ist, kann man eine bijektive Abbildung $f : \mathbb{N} \to \Sigma^*$ annehmen. Jeder Funktion $c : \Sigma^* \to \{0,1\}$ kann dann die Funktion $d = c \circ f$ mit $d : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ zugeordnet werden. Damit wird der Menge $F(\Sigma^*)$ bijektiv die Menge F aller $0,1$-Folgen $(c_1, c_2, c_3, \ldots)$ mit $c_i \in \{0,1\}$ zugeordnet und wir können den Beweis führen, indem wir durch Widerspruch beweisen, dass F nicht abzählbar ist.

   Wir nehmen an, dass eine Auflistung $F = \{f_1, f_2, f_3, \ldots, f_i, \ldots\}$ aller $0,1$-Folgen $f_i \in F$ gegeben ist.

Wir bzeichnen das j-te Folgenelement von f_i mit $c_{i,j}$, d.h. $f_i(j) = c_{ij}$. Dann gibt es die folgende Auflistung der f_i untereinander

$$\begin{array}{rcll} f_1 & = & c_{11}c_{12}c_{13}c_{14}c_{15}c_{16}c_{17}\ldots & = 0110001\ldots \\ f_2 & = & c_{21}c_{22}c_{23}c_{24}c_{25}c_{26}c_{27}\ldots & = 1110100\ldots \\ f_3 & = & c_{31}c_{32}c_{33}c_{34}c_{35}c_{36}c_{37}\ldots & = 0111110\ldots \\ f_4 & = & \ldots & \\ \vdots & & & \end{array}$$

Nun definieren wir eine Folge x die nach Konstruktion zwar Element von F ist, aber in obiger Auflistung nicht vorkommen kann. Wir verwenden dazu die negierten Diagonalelemente dieses Schemas:

$$x = (\overline{c_{11}}, \overline{c_{22}}, \overline{c_{33}}, \ldots)\,,$$

also

$$x_j = \begin{cases} 1 & \text{wenn} \;\; c_{jj} = 0\,, \\ 0 & \text{wenn} \;\; c_{jj} = 1\,. \end{cases}$$

Die Folge x kann in der Auflistung (f_i) nicht vorkommen. Käme sie vor, hätte sie einen Index i_x also $x = f_{i_x}$, folglich $x_{i_x} = f_{i_x i_x}$. Nach Definition gilt aber $x_{i_x} = \overline{f_{i_x i_x}}$. Widerspruch!

(3P)

Diese Art von Beweis nennt man Diagonalbeweis (oder manchmal auch zweites Cantorsches Diagonalargument).

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. $|\Sigma^n| = |\Sigma|^n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ und endlichen Mengen Σ.
2. Für alle formalen Sprachen A, B, C gilt $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$.
3. Für alle formalen Sprachen A, B, C gilt $A(B \cap C) = (AB) \cap (AC)$.
4. Seien Σ ein Alphabet und $A \subseteq \Sigma^*$ mit $|A| = n \in \mathbb{N}$. Wir nehmen $\epsilon \in A$ an. Es gilt

$$|A \times A^2| \leq n(n^2 - n + 1)\,.$$

Lösung

1. Wahr! Die Gleichung ist aus der Kombinatorik (DS) für nichtleere Mengen Σ und $n \neq 0$ bekannt. Σ^0 enthält das leere Tupel bzw. das leere Wort als einziges Element, d.h. es gilt $|\Sigma^0| = 1$ auch für leeres Σ. Andererseits gilt $x^0 = 1$ auch für $x = 0$.

(1P)

2. Wahr!

$$\begin{aligned}(x,y) \in A \times (B \cap C) &\iff x \in A \wedge y \in B \wedge y \in C \\ &\iff (x,y) \in A \times B \wedge (x,y) \in A \times C \\ &\iff (x,y) \in (A \times B) \cap (A \times C)\,.\end{aligned}$$

(1P)

3. Falsch! Seien $A = \{\epsilon, a\}$, $B = \{a\}$, $C = \{\epsilon\}$. Dann gelten $A(B \cap C) = \emptyset$ und $(AB) \cap (AC) = \{a\}$. (1P)

4. Wegen $\epsilon \in A$ gilt $A^2 = (A \setminus \{\epsilon\} \cup \{\epsilon\})^2 = A \cup (A \setminus \{\epsilon\})^2$, mithin

$$\begin{aligned}|A^2| &= |A \cup (A \setminus \{\epsilon\})^2| \\ &\leq n + (n-1)^2 \;=\; n^2 - n + 1\,.\end{aligned}$$

Daraus folgt $|A \times A^2| \leq n(n^2 - n + 1)$. (2P)

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Seien $\Sigma = \{a, b\}$ und $A = \{aa, b\}$. Geben Sie jeweils, wenn möglich, mindestens 3 Wörter an, die innerhalb bzw. außerhalb der folgenden Sprachen liegen. Man beachte $0 \notin \mathbb{N}$.

1. $L_1 = \{w \in \Sigma^*\,;\, \exists u \in A^2 : \; w = u^3\}\,.$
2. $L_2 = \{(a^2 b^n)^n\,;\, n \in \mathbb{N}\}\,.$
3. $L_3 = \{w \in \Sigma^*\,;\, w^2 = w^4\}\,.$
4. $L_4 = \{w \in A^*\,;\, |w| \leq 2\}\,.$
5. $L_5 = \{(ab)^m (bb)^n\,;\, m, n \in \mathbb{N} \text{ und } n < m\}\,.$

Lösung

1. $A^2 = \{aaaa, aab, baa, bb\}$.
   Damit ist $L_1 = \{a^{12}, aabaabaab, baabaabaa, b^6\}$.
   Beispiele für Wörter in $\Sigma^* \setminus L_1$ sind $\epsilon, a, aaabbb$. (1P)
2. $\{aab, aabbaabb, aabbbaabbbaabbb\} \subseteq L_2$.
   $\{\epsilon, a, ab, ba\} \subseteq \Sigma^* \setminus L_2$. (1P)
3. Aufgrund des Längenvergleichs ergibt sich $L_3 = \{\epsilon\}$.
   D. h., alle Wörter aus Σ^+ sind nicht in L_3. (1P)
4. $L_4 = \{\epsilon, b, aa, bb\}$.
   $\{ab, a, aaaa\} \subseteq \Sigma^* \setminus L_4$. (1P)
5. $\{ababbb, abababbb, abababbbbb\} \subseteq L_5$.
   $\{\epsilon, a, b\} \subseteq \Sigma^* \setminus L_5$. (1P)

Zusatzaufgabe 1 (Wird nicht korrigiert.)

Sei S eine beliebige nichtleere Menge. Man zeige:

1. Es gibt eine mengentheoretisch kleinste Äquivalenzrelation π über $S^{\times 2}$, so dass für alle $x, y, z \in S^{\times 2}$ gilt
$$(x, (y, z)) \equiv_\pi ((x, y), z)\,.$$

2. Wir definieren $S^{\otimes} = \{[x]_\pi\,;\, x \in S^{\times 2}\}$ und die Operation $\otimes$ über $S^{\otimes}$ mit
$$[x]_\pi \otimes [y]_\pi = [(x, y)]_\pi \quad \text{für alle} \quad x, y \in S^{\times 2}\,.$$
Die Algebra $(S^{\otimes}, \otimes)$ ist eine Halbgruppe und heißt Tensorprodukt über S.

   Es darf vorausgesetzt werden, dass die Operation $\otimes$ wohldefiniert ist.

3. Das Tensorprodukt $(\Sigma^{\otimes}, \otimes)$ über einem nichtleeren Alphabet Σ ist isomorph zur Halbgruppe $(\Sigma^+, \circ)$ aller nichtleeren Wörter über Σ mit der Konkatenation $\circ$.

   Hinweis: Definieren Sie eine $(\otimes, \circ)$-isomorphe Abbildung von $\Sigma^{\otimes}$ auf Σ^+ und begründen Sie Ihre Konstruktion!

Lösung

(wird nachgetragen)

Hinweis: *Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

1. Seien $A = \{\epsilon, a, ab\}$ und $B = \{a, ba\}$. Bestimmen Sie $|A^2|$, $|AB|$ und $|BA|$.
2. Seien $A, B, C, D \subseteq \Sigma^*$ mit $A \subseteq C$ und $B \subseteq D$. Zeigen Sie
$$AB \subseteq CD\,.$$
Erinnerung: Eine Teilmengenbeziehung $M \subseteq N$ zeigt man, indem man ein $w \in M$ annimmt und dann zeigt, dass $w \in N$ folgt.

Lösung

1. $|A^2| = |\{\epsilon, a, ab\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{\epsilon, a, ab, a^2, a^2b, aba, abab\}| = 7\,.$
$|AB| = |\{\epsilon, a, ab\}\{a, ba\}| = |\{a, ba, a^2, aba, ab^2a\}| = 5\,.$
$|BA| = |\{a, ba\}\{\epsilon, a, ab\}| = |\{a, a^2, a^2b, ba, ba^2, ba^2b\}| = 6\,.$
2. Sei $w \in AB$. Dann muss w aus zwei Teilwörtern u, v bestehen, also $w = uv$ mit $u \in A$ und $v \in B$. Nach Voraussetzung ist dann auch $u \in C$ und $v \in D$. Somit ist $w = uv \in CD$.

Vorbereitung 2

Seien Σ ein Alphabet und $A, B, C \subseteq \Sigma^*$ formale Sprachen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

1. (i) $A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC\,.$ (ii) $B \subseteq C \Longrightarrow AB \subseteq AC\,.$
Hinweis: Es handelt sich hier um zwei äquivalente Monotonieeigenschaften.
2. $A \subseteq B \Longrightarrow A^n \subseteq B^n \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}_0\,.$
3. $A \subseteq B \Longrightarrow A^* \subseteq B^*\,.$

Lösung

Die Mengenprodukte AB sind Kurzschreibweisen für $A \circ B = \{a \circ b\,;\, a \in A, b \in B\}$ mit der Konkatenation $\circ$ von Wörtern über Σ.

1. (i) Aus $w \in A(B \cap C)$ folgt $w = uv$ für gewisse u, v mit $u \in A$ und $v \in (B \cap C)$. Damit folgt $uv \in AB$ und $uv \in AC$, d.h. $w \in AB \cap AC$.
(ii) Zum Beweis benutzen wir (i) wie folgt.
Sei $B \subseteq C$. Dann folgt
$AB = A(B \cap C) \subseteq AB \cap AC \subseteq AC$.
Bemerkung: Umgekehrt kann man zunächst (ii) beweisen und daraus (i) ableiten. D.h., dass (i) und (ii) die gleiche Aussagekraft besitzen und in diesem Sinne äquivalent sind. Beides sind „Monotonieeigenschaften“.

2. Wir nehmen die Prämisse $A \subseteq B$ an und beweisen die Aussage $A^n \subseteq B^n$ durch Induktion über $n \in \mathbb{N}_0$.

   $\underline{n = 0}$: Es gilt $A^0 = \{\epsilon\} \subseteq \{\epsilon\} = B^0$.

   $\underline{n \to n+1}$: Wir nehmen $A^n \subseteq B^n$ als bewiesen an.
   Dann gilt $A^{n+1} = \underbrace{AA^n \subseteq BB^n}_{\text{da } A \subseteq B \text{ und } A^n \subseteq B^n} = B^{n+1}$.

   Hier haben wir eine Monotoniebeziehung aus Teilaufgabe 1 oder VA 1 verwendet.

3. Sei $A \subseteq B$. Nach Definition gilt $A^* = \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} A^n$. Wir zeigen $x \in A^* \Longrightarrow x \in B^*$.

   Für ein $x \in A^*$ gibt es ein $n \in \mathbb{N}_0$, so dass $x \in A^n$. Mit Teilaufgabe 2 folgt $x \in B^n \subseteq B^*$.

Vorbereitung 3

In Lemma 1.7 der Vorlesung wurde gezeigt, dass Σ^* abzählbar ist. Ist dann jede Teilmenge von Σ^* ebenfalls abzählbar? Beweis!

Lösung

Tatsächlich gilt, dass jede Teilmenge L von Σ^* abzählbar ist.
Sei $f : \Sigma^* \to \mathbb{N}$ eine Bijektion von Σ^* auf $\mathbb{N}$. Sei $id : L \to \Sigma^*$ die identische Abbildung $id(x) = x$. Dann ist die Komposition $g = f \circ id$ eine injektive Abbildung von L in $\mathbb{N}$.

Wir definieren eine bijektive Auflistung $h : \mathbb{N} \to L$, wie folgt.
Seien $M_1 := g(L)$ und M_1 sei nicht endlich.
Für alle $i \in \mathbb{N}$ gelte $h(i) = \min M_i$ und $M_{i+1} := M_i \setminus \{h(i)\}$.
Da $\bigcap_{i \in \mathbb{N}} M_i = \emptyset$, folgt h surjektiv. h ist injektiv, weil Minima nicht mehrmals auftreten können.

Vorbereitung 4

Betrachten Sie die Phrasenstrukturgrammatik $G = (\{S\}, \{a, b, c\}, \{S \to ab, S \to aSb\}, S)$.

1. Geben Sie $L(G)$ an.
2. Geben Sie eine Grammatik $G' = (V', \Sigma', P', S')$ mit $L(G') = L(G)$ an, deren Regeln die Form $A \to x$ oder $A \to xB$ oder $A \to By$ haben, wobei $A, B \in V'$ und $x, y \in \Sigma'$ seien.
3. Beweisen Sie $L(G') = L(G)$.

Lösung

Thema dieser Aufgabe ist u. a. die Tatsache, dass man bereits durch Mischung von rechtslinearen und linkslinearen Produktionen nicht-reguläre Sprachen erzeugen kann. Thema sind aber auch Techniken zum Beweis der Gleichheit von erzeugten Sprachen.

1. Durch $n \geq 0$-malige Anwendung der rekursiven Regel $S \to aSb$ und abschließender Anwendung von $S \to ab$ erhalten wir $S \underset{G}{\to} aSb \underset{G}{\to} aaSbb \underset{G}{\to} \ldots \underset{G}{\to} a^nSb^n \underset{G}{\to} a^{n+1}b^{n+1}$.

   Da alle Ableitungen diese Form haben müssen, gilt $L(G) = \{a^nb^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.

2. In einer Grammatik $G' = (\{S, A\}, \Sigma, P', S)$ simulieren bzw. ersetzen wir $S \to aSb$ durch $S \to aA$ und $A \to Sb$. Die Regel $S \to ab$ wird ersetzt durch $S \to aB$ zusammen mit $B \to b$.

3. Offensichtlich gilt $S \underset{G'}{\rightarrow} aA \underset{G'}{\rightarrow} aSb$, also $S \underset{G'}{\rightarrow}^* aSb$. Entsprechendes gilt für $S \underset{G'}{\rightarrow}^* ab$.

   Damit sind wieder alle Produktionen aus P durch Ableitungen mit Produktionen aus P' darstellbar. Daraus folgt $L(G) \subseteq L(G')$.

   Zum Beweis der umgekehrten Mengeninklusion betrachten wir Ableitungen von $w \in L(G')$
   $$S \underset{G'}{\rightarrow} \alpha_1 \underset{G'}{\rightarrow} \alpha_2 \underset{G'}{\rightarrow} \ldots \underset{G'}{\rightarrow} \alpha_n = w\,.$$
   Wir beobachten zunächst, dass jede aus S mit G' ableitbare Satzform α_i stets höchstens 1 Variable enthält, und zwar entweder A, B oder S. Die Variable A kann aber nur unmittelbar nach ihrer Einführung durch die Ersetzung $A \underset{G'}{\rightarrow} Sb$ wieder beseitigt worden sein, wenn ein Terminalwort w abgeleitet wird. Wenn also ein A durch Anwendung einer Produktion auf α_{i-1} in α_i entstanden ist, dann folgt für geeignete Satzformen u, v stets
   $$\alpha_{i-1} = uSv \underset{G'}{\rightarrow} uaAv \underset{G'}{\rightarrow} uaSbv = \alpha_{i+1}.$$
   Offensichtlich also ist A eliminierbar durch eine Ableitung in G wie folgt.
   $$\alpha_{i-1} = uSv \underset{G}{\rightarrow} uaSbv = \alpha_{i+1}\,.$$
   Die abschließende Beseitigung des B mit $S \underset{G}{\rightarrow}^* ab$ ist klar. Daraus folgt $L(G') \subseteq L(G)$.

Tutoraufgabe 1 (Rechenregeln)

Sei Σ ein nichtleeres Alphabet. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

1. Für alle $A \subseteq \Sigma^*$ gilt $|A \times A| = |AA|\,$.

2. Für alle $A \subseteq \Sigma^*$ gilt $A^*A^* = A^*\,$.

Lösung

1. Die Gleichung gilt nicht für alle A. Sei z.B. $\Sigma = \{a\}$ und $A = \{\varepsilon, a\} \subseteq \Sigma^*$.

   Dann gilt $|A \times A| = |\{(\varepsilon, \varepsilon), (\varepsilon, a), (a, \varepsilon), (a, a)\}| = 4\,$.
   Andererseits gilt $|AA| = |\{\varepsilon\varepsilon, \varepsilon a, a\varepsilon, aa\}| = |\{\varepsilon, a, aa\}| = 3\,$.

   Hier ist der bedeutende Unterschied, dass die Sprachen-Konkatenation assoziativ ist, das kartesische Produkt $\times$ jedoch nicht.

   Falls A nicht leer ist, gilt sogar $A \times (A \times A) \neq (A \times A) \times A$.

2. Die Aussage ist wahr.

   Da stets $\epsilon \in A^*$, folgt offenbar $A^* \subseteq A^*A^*$. Für die Gegenrichtung $A^*A^* \subseteq A^*$, sei $w \in A^*A^*$ Dann gibt es $u, v \in \Sigma^*$ und $m, n \in \mathbb{N}_0$ so dass $w = uv$ und $u \in A^m$ und $v \in A^n$. Dann ist $w \in A^{n+m}$ und somit $w \in A^*$.

Tutoraufgabe 2 (Abzählbar viele Typ-0-Sprachen)

Wir schränken die Darstellung von Grammatiken vom Typ 0 ein, indem man, ähnlich wie bei der Definition der formalen Sprache der Prädikatenlogik, ein abzählbares Alphabet Σ_∞ vorgibt, aus dem alle Zeichen zur Definition einer konkreten Grammatik entnommen werden. Offenbar kann man alle formalen Sprachen vom Typ 0 durch einfache Umbenennung der Elemente des Zeichenvorrats aus eingeschränkten Typ-0-Grammatiken gewinnen.

In der Vorlesung wurde nahegelegt, dass es formale Sprachen gibt, die nicht eine Sprache vom Typ 0 sind. Begründen Sie, dass die folgenden Aussagen gelten:

1. Jede formale Sprache ist abzählbar.
2. Es gibt eine formale Sprache, die nicht vom Typ 0 ist.

Lösung

Es gibt keinen Widerspruch.

1. Da eine formale Sprache stets Teilmenge einer abzählbaren Menge Σ^* ist, kann Vorbereitungsaufgabe 3 angewendet werden.
2. Aufgrund der formulierten Einschränkung der Darstellung von Grammatiken ist jede Grammatik G letztendlich ein Wort über einem endlichen Zeichenvorrat $\Sigma \subseteq \Sigma_\infty$.

   Zunächst gibt es nur abzählbar viele endliche Teilmengen von Σ_∞, d.h. wir können alle zulässigen Zeichenvorräte auflisten durch eine Folge $(\Sigma_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   Zu jedem Zeichenvorrat Σ_n gibt es dann abzählbar viele Grammatiken $G_{n,i}$, d.h. eine Folge $(G_{n,i})_{i\in\mathbb{N}}$.

   Nun ist $(G_{i,j})_{i,j\in\mathbb{N}}$ eine zweidimensional unendliche Folge von Grammatiken, die mit Diagonalverfahren erster Art abgezählt werden kann. Damit ist bewiesen, dass die Menge der von Grammatiken vom allgemeinen Typ 0 erzeugten formalen Sprachen abzählbar ist.

   Da die Menge aller Teilmengen von Σ^* überabzählbar ist, gibt es eine formale Sprache, die nicht vom Typ 0 ist.

Tutoraufgabe 3 (Herstellung der Monotoniebedingung)

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Phrasenstrukturgrammatik, so dass für alle Regeln $\alpha \to \beta \in P$ gilt $\alpha \in V$ und $\beta \in \Sigma^* \cup \Sigma^* V$. Beweisen Sie, dass $L(G)$ regulär ist.

Hinweis: Die Forderung $\beta \in \Sigma^* \cup \Sigma^* V$ lässt nullierbare Variablen $\neq S$ zu. Man kann die Grammatik G deshalb *nullierbar regulär* nennen.

Lösung

Vorbemerkung: Eine Produktion $\alpha \to \epsilon$ nennt man ϵ-Produktion. Die Typen von Sprachen unterscheiden sich wesentlich darin, ob zu deren grammatikalischer Beschreibung im Allgemeinen ϵ-Produktionen zugelassen werden können oder nicht. Bei kontextfreien Sprachen können ϵ-Produktionen zugelassen werden, nicht aber bei nicht kontextfreien Sprachen. Kontextsensitive Produktionen zusammen mit ϵ-Produktionen gestatten bereits die Beschreibung aller Chomsky-0-Sprachen. Durch ϵ-Produktionen wird die Monotonie von Ableitungen i.A. wesentlich gestört.

Spezielles Thema dieser Aufgabe ist die Reparatur einer durch $\beta = \epsilon$ verletzten Monotoniebedingung in einer Grammatik im regulären Fall. Die zu beweisende Aussage ist Inhalt von Lemma 15 der Vorlesung, dessen Beweis jetzt zu liefern ist.

Beweisidee:
Ausgehend von der Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ konstruieren wir eine reguläre Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$ mit der Eigenschaft $L(G') = L(G)$, womit dann die Regularität von $L(G)$ gezeigt ist.
Zur Konstruktion der Grammatik G' benutzen wir das in Lemma 12 vorgestellte Verfahren. Dieses Verfahren gilt für alle Grammatiken mit kontextfreien Produktionen der Form $\alpha \to \beta$, wobei $\alpha \in V$ gilt und β eine beliebige, eventuell leere Satzform ist. Das Verfahren ist also offensichtlich in unserem Fall anwendbar. Nach Lemma 14 der Vorlesung gilt dann $L(G') = L(G)$. Anschließend zeigen wir, dass die Grammatik G' regulär ist.

Beweis:
Sei N die Menge aller nullierbaren Variablen von G, d. h. $N = \{A \in V\,;\, A \underset{G}{\to}^* \epsilon\}$. Die Grammatik G' sei nach Lemma 12 konstruiert wie folgt:
1. Für jede Regel $(A \to x_1x_2 \ldots x_n) \in P$ mit $n \geq 1$ und $x_i \in V \cup \Sigma$ füge zu P' alle Regeln hinzu, die dadurch entstehen, dass $y_i := x_i$ für nicht-nullierbare x_i gesetzt wird und für nullierbare x_i die beiden Möglichkeiten $y_i := x_i$ und $y_i := \epsilon$ eingesetzt werden (alle möglichen Kombinationen von Einsetzungen), ohne dass die ganze rechte Seite $= \epsilon$ wird.
2. Falls S nullierbar ist, sei T ein neues Nichtterminal; füge zu P' die Regeln $S \to \epsilon$ und $S \to T$ hinzu, ersetze S in allen rechten Seiten durch T und füge für jede Regel $(S \to x) \in P$, $|x| > 0$, die Regel $T \to x$ zu P' hinzu.

Wir beweisen nun, dass G' (längen-)monoton ist und die Eigenschaft besitzt, dass für alle $\alpha \to \beta \in P'$ mit $\beta \neq \epsilon$ gilt $\alpha \in V$ und $\beta \in \Sigma^+ \cup \Sigma^* V$.

Wir betrachten zunächst den Aufbau von P' nach dem 1. Schritt. Nach Voraussetzung gilt für jede Regel $(A \to x_1x_2 \ldots x_n) \in P$, dass für alle $i < n$ x_i ein Terminalzeichen und damit nicht nullierbar ist. Folglich gilt $y_i = x_i$ für alle $i < n$, d.h. $x_1x_2 \ldots x_n \in \Sigma^* \cup \Sigma^* V$, ohne dass die rechte Seite $= \epsilon$ ist. Es gilt also $x_1x_2 \ldots x_n \in \Sigma^+ \cup \Sigma^* V$, d. h., dass G' regulär ist, solange nur Regeln nach 1. eingeführt werden.
Im 2. Schritt wird nun der Sprache $L(G')$ das leere Wort hinzugefügt, falls S in G nullierbar ist:
Sei S nullierbar. Falls $(S \to x) \in P$ mit $x \neq \epsilon$, dann gilt $(S \to x) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^* V$, also auch $(T \to x) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^* V$. Es gilt aber auch $(S \to T) \in \Sigma^+ \cup \Sigma^* V$. Außerdem verletzt die Hinzunahme von $(S \to \epsilon)$ zu P' die Monotonieregel nicht, weil S nicht mehr auf einer rechten Seite einer Regel steht.

Damit ist G' regulär.

Tutoraufgabe 4 (Monotonie und Kontextsensitivität)

Zeigen Sie, dass für jede (längen-)monotone Phrasenstrukturgrammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ die erzeugte Sprache $L(G)$ kontextsensitiv ist.

Lösung

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine monotone Chomsky-Grammatik. Wir konstruieren eine kontextsensitive Grammatik $G' = (V', \Sigma, P', S)$ mit $L(G') = L(G)$.

1. Im ersten Schritt der Konstruktion stellen wir sicher, dass die linken Seiten von Produktionen aus P' ausschließlich aus Variablen bestehen.

Dies erreichen wir am besten dadurch, dass wir die Terminalzeichen $x \in \Sigma$ entsprechend in allen Produktionen aus P durch neue Variable x' ersetzen, die nicht in V oder Σ schon vorkommen, und entsprechende Produktionen $x' \to x$ in P' aufnehmen wie folgt.

Sei V_0 die Menge der Variablen x', die den Terminalzeichen $x \in \Sigma$ entsprechen und $V_1 = V_0 \cup V$. Sei P_0 die Menge der Produktionen $x' \to x$ mit $x' \in V_0$ und $x \in \Sigma$.
Nun ersetzen wir alle Vorkommen von $x \in \Sigma$ in Produktionen aus P durch die entsprechenden Variablen x' und fügen die so erhaltenen Produktionen der Menge P_0 hinzu. Die entstehende Menge bezeichnen wir mit P_1.

Für $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S)$ gilt nun $L(G_1) = L(G)$. Man beachte auch, dass die Produktionen aus P_1 keine Terminalzeichen mehr enthalten, mit Ausnahme gewisser abschließenden Produktionen $A \to x$.

2. Im zweiten Schritt der Konstruktion gehen wir von $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S)$ aus und ersetzen jede Produktion $(\alpha \to \beta) \in P_1$ mit $\alpha \neq S$ durch eine Folge von kontextsensitiven neuen Produktionen, so dass der Sprachschatz $L(G_1)$ unverändert bleibt.
Um sicherzustellen, dass durch hinzugefügte Produktionen der Sprachschatz nicht verändert wird, beschreiben wir die Menge der Produktionen P_1 als Folge von k paarweise verschiedenen Produktionen $\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_k$ und ordnen jeder Produktion π_i eine geeignet-große Menge von paarweise disjunkten Mengen V_i von neuen Variablen zu.

Sei $\pi = (A_1 A_2 \ldots A_m \to B_1 B_2 \ldots B_m B_{m+1} \ldots B_n) \in P_1$ mit $1 \leq m \leq n$. π sei also insbesondere keine abschließende Produktion $A \to \epsilon$ oder $A \to x$ mit $x \in \Sigma$. Wir führen Variable $X_1, X_2, \ldots, X_m$ ein, die spezifisch sind für π, d. h. in keiner anderen Produktion vorkommen.
Nun ersetzen wir π durch die folgenden kontextsensitiven Produktionen.

$$
\begin{array}{lcl}
A_1 A_2 A_3 \ldots A_{m-1} A_m & \to & X_1 A_2 A_3 \ldots A_{m-1} A_m \\
X_1 A_2 A_3 \ldots A_{m-1} A_m & \to & X_1 X_2 A_3 \ldots A_{m-1} A_m \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
X_1 X_2 X_3 \ldots X_{m-1} A_m & \to & X_1 X_2 X_3 \ldots X_{m-1} X_m \\
X_1 X_2 X_3 \ldots X_{m-1} X_m & \to & B_1 X_2 X_3 \ldots X_{m-1} X_m \\
B_1 X_2 X_3 \ldots X_{m-1} X_m & \to & B_1 B_2 X_3 \ldots X_{m-1} X_m \\
\vdots & \vdots & \vdots \\
B_1 B_2 B_3 \ldots B_{m-1} X_m & \to & B_1 B_2 B_3 \ldots B_{m-1} B_m B_{m+1} \ldots B_n
\end{array}
$$

Die durch die Ersetzung der Produktionen von P_1 erhaltene Produktionenmenge bezeichnen wir mit P'. P' enthalte auch die abschließenden Produktionen. Die Zusammenfassung aller benötigten Variablen sei V'. Dann ist $G' = (V', \Sigma, P', S)$ kontextsensitiv und es gilt $L(G') = L(G)$.