LÖSUNG

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 29. Juni bis 10:15 abzugeben und wird am 29./30. Juni besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 7.1

2P+2P+2P

Seien X und Y unabhängige stetige Zufallsvariablen, die beide gleichverteilt auf dem Intervall $[0,1]$ sind. Sei $Z := \min\{X, Y\}$.

(a) Zeigen Sie, dass für die Verteilungsfunktion F_Z von Z gilt:

$$F_Z(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t \leq 0 \\ 2t - t^2 & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{für } 1 \leq t \end{cases}$$

Hinweis: Betrachten Sie zunächst $\Pr[Z \geq t]$.

(b) Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von Z.

(c) Bestimmen Sie eine Funktion $u : [0,1] \to [0,1]$, sodass $u(X)$ die gleiche Verteilung wie Z hat.

Lösungsvorschlag:

(a) Die Zufallsvariablen X und Y haben dieselbe Verteilungsfunktion F_X mit $F_X(t) = t$ für $0 \leq t \leq 1$ und $F_X(t) = 1$ für $t \geq 1$ und $F_X(t) = 0$ für $t \leq 0$.
Für $t \in [0,1]$ gilt: $\Pr[Z \geq t] = \Pr[\min\{X,Y\} \geq t] = \Pr[X \geq t, Y \geq t] = \Pr[X \geq t] \cdot \Pr[Y \geq t] = (1 - F_X(t)) \cdot (1 - F_X(t)) = (1-t)^2$. Es folgt $F_Z(t) = \Pr[Z \leq t] = 1 - (1-t)^2 = 2t - t^2$.
Außerdem $F_Z(t) = 0$ für $t < 0$ und $F_Z(t) = 1$ für $t > 1$, weil der Wertebereich von Z auf $[0,1]$ beschränkt ist.

(b)

$$f_Z(t) = F'_Z(t) = \begin{cases} 2 - 2t & \text{für } 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[Z] = \int_0^1 t f_Z(t)\, dt = \int_0^1 (2t - 2t^2)\, dt = \left[t^2 - \frac{2}{3}t^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

(c) Laut Folien kann für u die Umkehrfunktion von F_Z gewählt werden. Wähle also u mit $u(x) = 1 - \sqrt{1-x}$, denn dann gilt für $0 \leq x \leq 1$:

$$\begin{aligned} F_{u(X)}(x) &= \Pr[u(X) \leq x] \\ &= \Pr\left[1 - \sqrt{1-X} \leq x\right] \\ &= \Pr\left[1 - x \leq \sqrt{1-X}\right] \\ &= \Pr\left[(1-x)^2 \leq 1 - X\right] \\ &= \Pr\left[X \leq 2x - x^2\right] \\ &= F_X(2x - x^2) \\ &= 2x - x^2 \\ &= F_Z(x) \end{aligned}$$

Aufgabe 7.2 **2P+2P+1P+1P**

Benjamin bekommt manchmal ein Duplo von der Nachbarin geschenkt. Seine Mutter bricht dann zufällig und gleichverteilt ein Stück ab und gibt es seiner großen Schwester. Die verpetzt das dem großen Bruder, der von Benjamins Rest-Duplo ebenfalls zufällig und gleichverteilt ein Stück für sich abbricht.

Seien X_1 und X_2 die Anteile, die Benjamin von seinem Duplo bzw. Rest-Duplo bleiben, nachdem er es mit der Schwester bzw. dem Bruder geteilt hat. Die Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind unabhängig und gleichverteilt auf $[0, 1]$. Der Anteil des Duplos, der Benjamin bleibt, ist $Z = X_1 \cdot X_2$.

(a) Berechnen Sie $\mathbb{E}Z$.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ von Z.

(c) Berechnen Sie die W'keit, dass Benjamin am Ende noch mindestens ein halbes Duplo hat.

(d) Berechnen Sie die Dichte $f_Z(z)$ von Z.
Hinweis: Um Ihr Ergebnis zu überprüfen, können Sie $\mathbb{E}Z$ mit der Dichte berechnen und mit (a) vergleichen.

Lösungsvorschlag:

(a) Da X_1 und X_2 unabhängig sind, gilt $\mathbb{E}Z = \mathbb{E}[X_1 \cdot X_2] \overset{\text{unabh.}}{=} \mathbb{E}X_1 \cdot \mathbb{E}X_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$.
Hinweis für die Korrektur: Fehlt der Hinweis auf die Unabhängigkeit, ist etwas abzuziehen.

(b) Seien f bzw. F die Dichte bzw. Verteilungsfunktion von X_i, d.h.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \qquad F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & 1 \leq x \end{cases}$$

Der Wertebereich von Z ist $[0, 1]$. Folglich gilt $F(z) = 0$ für $z \leq 0$ und $F(z) = 1$ für $z \geq 1$. Für $0 \leq z \leq 1$ gilt:

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \Pr[Z \leq z] = \Pr[X_1 \cdot X_2 \leq z] \\
&= \int_{x_1 \cdot x_2 \leq z} f(x_1) \cdot f(x_2)\ dx_2\ dx_1 && \text{(da } X_1, X_2 \text{ unabhängig)} \\
&= \int_{x_1=0}^{1} f(x_1) \int_{x_2=0}^{z/x_1} f(x_2)\ dx_2\ dx_1 \\
&= \int_{x_1=0}^{1} 1 \cdot F(z/x_1)\ dx_1 \\
&= \int_{x_1=0}^{z} \underbrace{F(z/x_1)}_{1}\ dx_1 + \int_{x_1=z}^{1} \underbrace{F(z/x_1)}_{z/x_1}\ dx_1 \\
&= [x_1]_0^z + [z \cdot \ln x_1]_z^1 \\
&= z - z \cdot \ln z
\end{aligned}$$

(c)

$$\Pr[Z \geq 1/2] = 1 - \Pr[Z \leq 1/2] = 1 - F_Z(1/2) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \ln \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \ln 2 \approx 0.153$$

(d) Mit $f_Z(z) = F_Z'(z)$ folgt:

$$f_Z(z) = \begin{cases} 1 - \ln z - 1 = -\ln z & \text{für } 0 \leq z \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Um das Ergebnis zu überprüfen, rechnet man:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}Z &= \int_{-\infty}^{\infty} z \cdot f_Z(z)\ dz \\
&= \int_0^1 -z \ln z\ dz \\
&= -\left[\frac{1}{2} z^2 \ln z\right]_0^1 + \int_0^1 \frac{1}{2} z\ dz \\
&= 0 + \left[\frac{1}{4} z^2\right]_0^1 && \text{(hier braucht man die Regel von Hopital)} \\
&= \frac{1}{4}
\end{aligned}$$

Das kommt auch in (a) raus.

Aufgabe 7.3 **1P+3P**

(a) Sie werfen eine kreisförmige Münze mit Radius 0.5 auf ein Quadrat mit Seitenlänge 4, wobei der Mittelpunkt der Münze stets innerhalb des Quadrats zu liegen kommt.

Wie hoch ist die W'keit, dass die Münze über den Rand des Quadrats hinausragt?

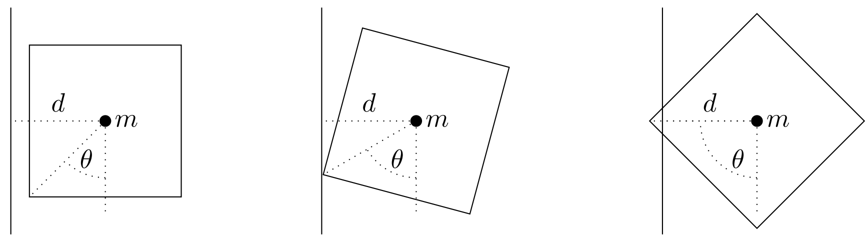
Hinweis: Modellieren Sie das Quadrat als $Q := [-2, 2]^2$. Nehmen Sie weiterhin an, dass der Mittelpunkt gleichverteilt auf Q ist. Für jede (Borelsche) Menge $A \subseteq Q$ ist dann die W'keit $\Pr[A]$ wie folgt definiert:

$$\Pr[A] = \frac{\mathrm{vol}(A)}{\mathrm{vol}(Q)}.$$

Hierbei bezeichnet $\mathrm{vol}(\cdot)$ das (zweidimensionale) Volumen, also das Lebesgue-Integral über die entsprechende Menge. Insbesondere gilt $\mathrm{vol}(Q) = 16$.

(b) Wir betrachten eine Vereinfachung des Problems aus (a), wenn man statt einer kreisförmigen, eine quadratische Münze wirft:

Wir nehmen an, dass eine quadratische Münze mit Seitenlänge 0.5 stets so an eine Gerade geworfen wird, dass der Mittelpunkt der Münze rechts von der Geraden in einem Abstand d von maximal $\frac{1}{2}\sqrt{2}$ zu liegen kommt:



$\theta = \frac{\pi}{4} \widehat{=} 45°$ $\theta = \frac{\pi}{3} \widehat{=} 60°$ $\theta = \frac{\pi}{2} \widehat{=} 90°$

Wir wollen wieder wissen, mit welcher W'keit die Münze die Gerade zumindest berührt oder darüber hinausragt. Die Lage der Münze ist jetzt allerdings nicht allein durch den Abstand d beschrieben, sondern man benötigt noch den Winkel θ, der die Rotation der Münze angibt. Auf Grund der Symmetrie reicht es $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ zu betrachten (siehe obige Abbildung).

Da jede mögliche Lage der Münze gleichwahrscheinlich ist, modellieren wir das Experiment mit Hilfe der Gleichverteilung über $[0, 1/\sqrt{2}] \times [\pi/4, \pi/2]$.

i) Es sei A das Ereignis, dass die Münze mit dem Rand mindestens einen Punkt gemeinsam hat. Bestimmen Sie eine geeignete Funktion $D(\theta)$, so dass

$$A = \{(d, \theta) \in [0, 1/\sqrt{2}] \times [\pi/4, \pi/2] \mid d \leq D(\theta)\} \text{ gilt.}$$

ii) Bestimmen Sie nun die gesuchte W'keit.

Lösungsvorschlag:

(a) Damit die Münze vollständig innerhalb des Quadrats liegt, muss sie von jedem Rand des Quadrats mindestens Abstand 0.5 haben. D.h., der Mittelpunkt muss innerhalb von $[-1.5, 1.5]^2$ zu liegen kommen, was mit W'keit $\frac{9}{16}$ eintritt auf Grund der Gleichverteilung.

Mit W'keit $\frac{7}{16}$ ragt sie also über das Quadrat hinaus.

(b) Die Länge der Projektion der halben Diagonalen auf die Horizontale ist $D(\theta) = \frac{\sqrt{2}}{4} \cdot \sin\theta$. Da $\theta \in [\pi/4, \pi/2]$ gilt, folgt $D(\theta) \in [1/4, \sqrt{2}/4]$. Nur für $d \leq D(\theta)$ berührt die Münze den Rand.

$$\int_A \mathrm{d}d\mathrm{d}\theta = \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \int_{d=0}^{D(\theta)} \mathrm{d}d\mathrm{d}\theta = \sqrt{2}/4 \int_{\theta=\pi/4}^{\pi/2} \sin\theta \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}/4[-\cos\theta]_{\pi/4}^{\pi/2} = 1/4.$$

Für die W'keit folgt somit $\frac{1/4}{\pi/(4\sqrt{2})} = \sqrt{2}/\pi$.

Aufgabe 7.4 — 2P+2P

Sei $X \sim \mathrm{Bin}(10^6, \frac{1}{2})$.

(a) Berechnen Sie mit der Chebyshev-Ungleichung eine untere Schranke für $\Pr[500000 - k \leq X \leq 500000 + k]$, wobei $k \in \{500, 1000, 1500\}$.

(b) Approximieren Sie $\Pr[500000 - k \leq X \leq 500000 + k]$ mit der Normalverteilung (Satz von de Moivre).

Lösungsvorschlag:

(a)

$$\begin{aligned}
\Pr[500000 - k \leq X \leq 500000 + k] &= \Pr[|X - \mathbb{E}X| \leq k] \\
&= 1 - \Pr[|X - \mathbb{E}X| \geq k + 1] \\
&\geq 1 - \frac{\mathrm{Var}X}{(k+1)^2} \\
&= 1 - \frac{10^6 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}{(k+1)^2} = 1 - \frac{250000}{(k+1)^2}
\end{aligned}$$

Für $k = 500, 1000, 1500$ ergeben sich untere Schranken von 0.0040, 0.75 bzw. 0.89.
Hinweis für die Korrektur: Wird hier mit k statt $k+1$ gerechnet, ist nichts abzuziehen, sondern ein Warnhinweis hinzuschreiben. Der Unterschied zwischen k und $k+1$ ist in diesem Fall sehr klein.

(b)

$$\begin{aligned}
\Pr[500000 - k \leq X \leq 500000 + k] &= \Pr\left[-\frac{k}{\sqrt{10^6 \cdot 1/2 \cdot 1/2}} \leq \frac{X - 500000}{\sqrt{10^6 \cdot 1/2 \cdot 1/2}} \leq \frac{k}{\sqrt{10^6 \cdot 1/2 \cdot 1/2}}\right] \\
&= \Pr\left[-0.002k \leq \frac{X - 10^6 \cdot 1/2}{\sqrt{10^6 \cdot 1/2 \cdot 1/2}} \leq 0.002k\right]
\end{aligned}$$

Nach dem Satz von de Moivre ist $\frac{X - 10^6 \cdot 1/2}{\sqrt{10^6 \cdot 1/2 \cdot 1/2}}$ ungefähr standardnormalverteilt. Daher:

$$\begin{aligned}
&\approx \Phi(0.002k) - \Phi(-0.002k) \\
&= 2\Phi(0.002k) - 1
\end{aligned}$$

Für $k = 500, 1000, 1500$ ergeben sich 0.6826, 0.9544 bzw. 0.9974.