9.1

a) $$\mathbb{E}[e^{tX}] = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x}\, dx$$

$\Gamma(\lambda, r)$ nur auf $[0, \infty)$ von 0 verschieden

$$= \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} \int_0^\infty x^{r-1} e^{-(\lambda - t)x}\, dx$$

$t \neq \lambda$

$$= \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r} \underbrace{\int_0^\infty \underbrace{\frac{(\lambda - t)^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-(\lambda - t)}}_{\Gamma(\lambda - t,\, r)\text{-verteilt}}\, dx}_{=1}$$

$$= \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r} \quad \text{für } t \in (-\lambda, \lambda)$$

$$\mathbb{E}[X] = \frac{d}{dt} M_X \Big|_{t=0} = -r \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^{r+1}} \cdot (-1) \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{r}{\lambda}$$

$$\mathbb{E}[X^2] = \frac{d^2}{dt^2} M_X \Big|_{t=0} = r(r+1) \frac{\lambda^r}{(\lambda - r)^{r+2}} \Big|_{t=0}$$

$$= \frac{r(r+1)}{\lambda^2}$$

$$\rightsquigarrow \mathrm{Var}[X] = \frac{r^2 + r}{\lambda^2} - \frac{r^2}{\lambda^2} = \frac{r}{\lambda^2}$$

(b) $M_{X+Y}(t) = \mathbb{E}[e^{t(X+Y)}]$

$$= \mathbb{E}[e^{tX} \cdot e^{tY}]$$

X, Y unabh.
$\Downarrow$
e^{tX}, e^{tY}
unabh.

$$\overset{\Downarrow}{=} \mathbb{E}[e^{tX}]\, \mathbb{E}[e^{tY}] = M_X(t)\, M_Y(t)$$

$\rightsquigarrow$ für $X \sim \Gamma(\lambda, r)$, $Y \sim \Gamma(\lambda, s)$ unabh.:

$$M_{X+Y}(t) = \frac{\lambda^r}{(\lambda - t)^r} \cdot \frac{\lambda^s}{(\lambda - t)^s}$$

$$= \frac{\lambda^{r+s}}{(\lambda - t)^{r+s}}$$

Eindeutigkeit von M_{X+Y} $\quad X + Y \sim \Gamma(\lambda, r+s)$

c) Nach b):

Für $X_i \sim \exp(\lambda)$; $X_1, \dots, X_n$ unabh.

$\rightsquigarrow$ $X_1 + \dots + X_n \sim \Gamma(\lambda, n)$

da $\exp(\lambda) = \Gamma(\lambda, 1)$

<u>9.2</u> X mit Dichte $\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ auf $\mathbb{R}$

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}[|X|] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi} \frac{|x|}{1+x^2}\, dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\, dx$$

Symmetrie

Erinnerung: $\frac{d}{dx} \log(f(x)) = \frac{f'(x)}{f(x)}$

$\rightsquigarrow$ hier: $f(x) = 1+x^2$

$$= \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\pi} \log(1+x^2) = \infty.$$

• $$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi}\, x\, \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$\leadsto$ mögliche Grenzwertbildungen: Sei $k \in (0,\infty)$ beliebig:

$$\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{\sqrt{k}\,a} \frac{1}{2\pi}\, x\, \frac{2}{1+x^2}\, dx$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi}\left(\log(1+ka^2) - \log(1+a^2)\right)$$

$$= \lim_{a\to\infty} \frac{1}{2\pi} \log\left(\frac{k + 1/a^2}{1 + 1/a^2} \right) = \frac{\log k}{2\pi}$$

$\leadsto$ Prinzipiell jeder Wert für Integral möglich $\leadsto$ $\lightning$.

• <u>Annahme:</u>

$$\exists \varepsilon > 0 \ \forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon) : M_X(t) < \infty$$

Wähle $t_0 \in (0, \varepsilon)$ beliebig $\Rightarrow e^{t_0} > 1$

$\leadsto$ es existiert ein $x_0 > 0$ mit

$$\forall x \in [x_0, \infty) : \quad e^{t_0 x} \geq x$$

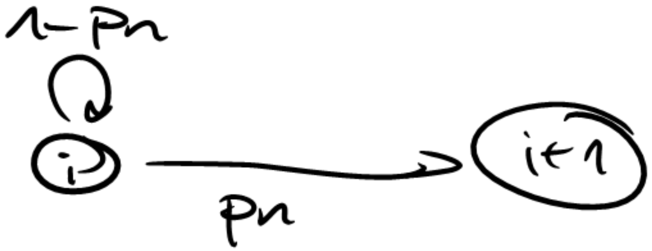
$$\leadsto \infty > M_X(t_0) \geq \int_{x_0}^{\infty} e^{t_0 x} f(x)\,dx \geq \int_{x_0}^{\infty} x \ f(x)\,dx$$

$$= \lim_{a \to \infty} \left[\frac{1}{\pi} \log(1+x^2) \right]_{x_0}^{a}$$

$$= \infty \quad \text{↯}$$

9.3

(a) Zeitschritt entspricht $1/n$ Sekunden.



Anzahl von Zeitschritten um von i nach $i+1$ zu wechseln: $X_i \sim \mathrm{Geo}(p_n)$

$\leadsto$ Es soll gelten: $\mathbb{E}[X_i] \overset{!}{=} n$

n n-tel Sekunden

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{p_n} \leadsto p_n = \frac{1}{n}$$

$T_i \hat{=}$ Zeit für Wechsel von i nach $i+1$

$\leadsto T_i = X_i \cdot \frac{1}{n}$ (Sekunden)

$$\leadsto \Pr[T_i \le t] = \Pr\left[\frac{X_i}{n} \le t\right]$$
$$= \Pr[X_i \le \lfloor nt \rfloor]$$
$$= 1 - \Pr[X_i > \lfloor nt \rfloor]$$
$$= 1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\lfloor nt \rfloor}$$
$$\xrightarrow{n \to \infty} 1 - e^{-t} \quad \text{(siehe VL)}$$

$\leadsto T_i$ approx $\exp(1)$-verteilt für n groß.

5

$$N_t = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid T_1 + \dots + T_k \le t\}$$

$$T_i = \frac{X_i}{n} \qquad = \max\{k \in \mathbb{N}_0 \mid X_1 + \dots + X_k \le n \cdot t\}$$

$\hat{=}$ siehe TA 5.2: $[N_t = k] \hat{=} [Z_{\lfloor nt \rfloor} = k]$

$$= \binom{\lfloor nt \rfloor}{k} \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-k}$$

$$= \mathrm{Bin}\left(\lfloor nt \rfloor, \frac{1}{n}; k\right)$$

$$\lfloor nt \rfloor \cdot \frac{1}{n} \longrightarrow t$$

Poisson

$$\xrightarrow[n \to \infty]{} \mathrm{Poi}(t; k)$$

$$= \frac{t^k}{k!} e^{-t}$$