Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Lösungsblatt Wiederholungsklausur
5. Dezember 2007

Einführung in die Theoretische Informatik

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 180 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch). Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ □□
Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb der Aufgabe 1).

Jede nullierbare Variable ist nutzlos.	J ✔
Eine Sprache A ist genau dann mehrdeutig, wenn es eine mehrdeutige Grammatik gibt, die A erzeugt.	J ✔
Für jede kontextfreie Sprache L gibt es einen deterministischen Kellerautomaten K, der L erkennt, d. h. $L = L(K)$.	J ✔
Der Wertebereich der Ackermann-Funktion ist entscheidbar.	✔ N
Das Komplement jeder kontextsensitiven Sprache ist kontextsensitiv.	✔ N
Zu jeder $LL(k)$-Grammatik gibt es eine äquivalente $LR(k)$-Grammatik. ...	✔ N
Jede $LOOP$-berechenbare Funktion ist total.	✔ N
Jede Turing-berechenbare Funktion ist auch $GOTO$-berechenbar.	✔ N

Aufgabe 2 (14 Punkte)

Sei G die Grammatik $G = (\{S, X, Y, A\}, \{a, b, c\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{aligned} S &\rightarrow SS \mid XY\,, \\ X &\rightarrow Ab \mid b\,, \\ Y &\rightarrow cA \mid c\,, \\ A &\rightarrow aA \mid a\,. \end{aligned}$$

1. Geben Sie ein Wort $w \in L(G)$ und 2 verschiedene Ableitungsbäume von w an, um die Mehrdeutigkeit von G zu zeigen!

2. Zeigen Sie, dass $abcacb \notin L(G)$ gilt!

3. Geben Sie einen regulären Ausdruck R an, der $L(G)$ darstellt (d. h. $R = L(G)$)!

Lösungsvorschlag

1. Die Mehrdeutigkeit von G kann gezeigt werden mit
   $w = bcbcbc\,.$ (2 P.)

   Wir notieren die Ableitungsbäume durch Linksableitungen von w.

   - $S \rightarrow_G SS \rightarrow_G SSS \rightarrow_G XYSS \rightarrow_G bYSS \rightarrow_G bcSS \rightarrow_G bcXYS$
     $\rightarrow_G bcbYS \rightarrow_G bcbcS \rightarrow_G bcbcXY \rightarrow_G bcbcbY \rightarrow_G bcbcbc\,.$ (2 P.)
   - $S \rightarrow_G SS \rightarrow_G XYS \rightarrow_G bYS \rightarrow_G bcS \rightarrow_G bcSS \rightarrow_G bcXYS$
     $\rightarrow_G bcbYS \rightarrow_G bcbcS \rightarrow_G bcbcXY \rightarrow_G bcbcbY \rightarrow_G bcbcbc\,.$ (2 P.)

2. Jede Ableitung des Wortes $z = abcacb$ muß mit $S \rightarrow_G SS$ beginnen, denn andernfalls würden in jedem abgeleiteten Wort nur je 1 b und 1 c vorkommen. (1 P.)

   Andererseits darf $S \rightarrow_G SS$ kein zweites Mal angewandt werden, weil dann mindestens je 3 b und 3 c vorkommen würden. Die Beseitigung der beiden Vorkommen von S kann also nur durch 2 malige Anwendung von $S \rightarrow_G XY$ geleistet werden und wir könnten o. B. d. A. wählen $S \rightarrow_G SS \rightarrow_G^* XYXY$ (1 P.)

   Aus $XYXY$ sind nur Wörter ableitbar, die abwechselnd b und c enthalten, eventuell getrennt von ein oder mehreren a's. (2 P.)

3. Die Sprache von X ist a^*b, (1 P.)

   die von Y ist ca^*. (1 P.)

   Wir erhalten die Sprache von S als $(XY)^+$, oder $(a^*bca^*)^+$ (2 P.)

Aufgabe 3 (12 Punkte)

Sei $\Sigma = \{x, y, z\}$. Sei L die Sprache

$$L \;=\; (\, x^* yz\, x^*\,)^* \subseteq \Sigma^* \,.$$

1. Geben Sie einen endlichen (deterministischen oder nichtdeterministischen) Automaten A an, der L erkennt bzw. akzeptiert.

2. Geben Sie eine reguläre **und** eindeutige Grammatik G an, die L erzeugt.

Lösungsvorschlag

1. Sei $A = (\{s_0, s_1, s_2, s_3\}, \Sigma, \delta, \{s_0\}, \{s_0, s_3\})$.
   s_0 sei Startzustand, s_0, s_3 seien Endzustände. (2 P.)

   Übergangsrelation:

s_i	$\delta(s_i, x)$	$\delta(s_i, y)$	$\delta(s_i, z)$
s_0	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$	$\emptyset$
s_1	$\{s_1\}$	$\{s_2\}$	$\emptyset$
s_2	$\emptyset$	$\emptyset$	$\{s_3\}$
s_3	$\{s_3\}$	$\{s_2\}$	$\emptyset$

   (4 P.)

2. Wir konstruieren eine Grammatik zu einem deterministischen Automaten (z. B. gewonnen aus Teilaufg. 1)
   Sei $G = (\{S, T, Y\}, \Sigma, P, S)$ mit

$$\begin{array}{rcl} S & \to & \epsilon \mid xX \mid yY\,, \\ X & \to & xX \mid yY\,, \\ Y & \to & zZ \mid z\,, \\ Z & \to & xZ \mid yY \mid x\,. \end{array}$$

Regularität:	(2 P.)
Eindeutigkeit:	(2 P.)
Ausführung:	(2 P.)

Aufgabe 4 (12 Punkte)

Sei $G = (\{Z, A, B, X, Y\}, \{a, b\}, P, Z)$ mit den Produktionen

$$\begin{array}{rclcrcl} Z & \to & A \mid ZB\,, & & & & \\ A & \to & aX \mid a\,, & & X & \to & BY\,, \\ B & \to & bB \mid b\,, & & Y & \to & AZ\,. \end{array}$$

1. Konstruieren Sie eine Grammatik G_1 in Greibach-Normalform, die $L(G)$ erzeugt.
2. Konstruieren Sie einen Kellerautomaten (NPDA) K_1, der $L(G)$ akzeptiert.

   Hinweis: Gehen Sie bei der Konstruktion des Kellerautomaten am besten von der Grammatik G_1 in Greibach-Normalform aus.

Lösungsvorschlag

1. G ist im Wesentlichen in Chomsky-Normalform. Wir konstruieren deshalb aus G die Produktionen in Greibach-Normalform wie folgt.

   Anordnung der Variablen: Z, X, Y, A, B.

   Ersetzung der linksrekursiven Produktion $Z \to ZB$:
   Sei Z' eine neue Variable. Die neuen Z-Produktionen sind dann

   $$Z \to A \mid AZ'\,, \qquad Z' \to B \mid BZ'\,. \qquad \text{(3 P.)}$$

   Ersetzung gemäß Anordnung:
   Die A- und B-Produktionen bleiben unverändert.
   Ersetzung der übrigen Produktionen:

   $$\begin{array}{rcl} Y & \to & aZ \mid aXZ\,, \\ X & \to & bY \mid bBY\,, \\ Z' & \to & bB \mid b \mid bBZ' \mid bZ'\,, \\ Z & \to & a \mid aX \mid aZ' \mid aXZ'\,, \end{array}$$

   (3 P.)

   In G_1 ist A nutzlos und kann samt A-Produktionen gestrichen werden.

2. Wir geben den Standardkellerautomaten K zu einer Grammatik in Greibach-Normalform an. Sei P die in Teilaufgabe 1 konstruierte Produktionenmenge in Greibach-Normalform. Wir definieren $K = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z, \delta)$ wie folgt:

   $$\begin{array}{rcl} Q & := & \{q_0\}\,, \\ \Sigma & := & \{a, b\}\,, \\ \Delta & := & \{Z, Z', X, Y, B\}\,. \end{array}$$

   (2 P.)

   Die Übergangsfunktion δ wird definiert mittels der Produktionen aus P für alle $e \in \Sigma$ und $d \in \Delta$ wie folgt

   $$\delta(q_0, e, d) = \{(q_0, \alpha)\,;\, (d \to e\alpha) \in P\}$$

   (4 P.)

Aufgabe 5 (11 Punkte)

Sei $L \subseteq \{a\}^*$, wobei a ein Buchstabe eines Alphabets sei.

1. Es gelte $L = \{a\}^*$.
   Zeigen Sie, dass dann $n = 1$ eine Pumping-Lemma-Konstante von L ist.

2. Sei L kontextfrei, und sei $n = 1$ eine Pumping-Lemma-Konstante von L.
   Zeigen Sie: Falls L nicht endlich ist, dann gilt $L = \{a\}^*$.

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass $a \in L$ gilt.

Lösungsvorschlag

1. L ist regulär. Dann ist $n = 1$ eine Pumping-Lemma-Konstante, falls

   $\forall z \in L, |z| \geq 1 \quad \exists u, v, w \in \{a\}^* :$ (1 P.)
   1. $z = uvw$,
   2. $|uv| \leq 1$,
   3. $|v| \geq 1$,
   4. $(\forall i \geq 0)[uv^iw \in \{a\}^*$. (1 P.)

   Zum Nachweis sei $z = a^m$ mit $m \geq 1$. (1 P.)
   Dann setzen wir $u = a^0, v = a, w = a^{m-1}$. (1 P.)
   Damit gilt offensichtlich 1. bis 3. ,
   und für alle $i \geq 0$ gilt $uv^iw = a^0a^ia^0 = a^i \in L$. (1 P.)

2. Sei k minimal, so dass $k \geq 1$ und $z := a^k \in L$. (1 P.)

   Wäre $k > 1$, dann gäbe es nach dem Pumping-Lemma mit Konstante 1
   eine Zerlegung $z = uvwxy$ mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq 1$,
   so dass $uv^0wx^0y \in L$. (1 P.)

   Nun gilt aber $vx = a$.
   Daraus folgt $a^{k-1} = uv^0wx^0y \in L$, (1 P.)
   was der Minimalität von k widerspricht.

   Es folgt $k = 1$, d. h. $a \in L$.

   Nun weisen wir nach, dass für alle $i \geq 0$ gilt $a^i \in L$.

   Für $z = a$ gilt $z \in L$ und $|z| \geq n = 1$. (1 P.)

   Nach Pumping-Lemma gilt $z = a = uvwxy$,
   mit $|vx| \geq 1$ und $|vwx| \leq 1$, so dass $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$. (1 P.)

   Wegen $uv^iwx^iy = a^i$ folgt die Behauptung. (1 P.)

Aufgabe 6 (14 Punkte)

Sei $\Sigma = \{a, b\}$. Mit $\#_x(w)$ bezeichnen wir die Anzahl der Vorkommen des Buchstaben $x \in \Sigma$ in einem Wort $w \in \Sigma^*$. Wir betrachten die Sprache

$$L = \{w \in \Sigma^* \,;\, \#_a(w) = \#_b(w)\} \setminus \{\epsilon\}.$$

(Beispiel: $aababb \in L$.)

Definieren Sie eine linear beschränkte Turingmaschine $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, \Box, F)$, die L akzeptiert (ungeachtet der Tatsache, dass es auch einen Kellerautomaten gibt, der L akzeptiert)!

Man beachte dabei, dass $\Box \in \Gamma \setminus \Sigma$ für das Leerzeichen steht, das auf fast allen Feldern des beidseitig unendlichen Bandes von M zu finden ist mit Ausnahme der Felder, auf denen die Eingabe $w \in \Sigma$ steht. Bei Beginn einer Berechnung steht der Kopf der Turingmaschine links vor dem ersten Buchstaben von w. Das Leerzeichen darf nicht überschrieben werden. Ein Eingabewort wird akzeptiert genau dann, wenn M einen Endzustand erreicht.

Lösungsvorschlag

Wir definieren einen deterministischen LBA mit entsprechend vereinfachter Schreibweise der Übergangsfunktion. Seien

$Q = \{q_0, q_A, q_B, q_r, q_l, q_f\}$, $\Gamma = \{a, b, X, \Box\}$, $F = \{q_f\}$. (2 P.)

Übergangsfunktion δ:

$$\begin{aligned} \delta(q_0, \Box) &= (q_r, \Box, R)\,, & \delta(q_r, \Box) &= (q_f, \Box, N)\,,\\ \delta(q_r, a) &= (q_A, X, R)\,, & \delta(q_r, b) &= (q_B, X, R)\,,\\ \delta(q_r, X) &= (q_r, X, R)\,. \end{aligned}$$

(4 P.)

$$\begin{aligned} \delta(q_A, X) &= (q_A, X, R)\,, & &\\ \delta(q_A, a) &= (q_A, a, R)\,, & \delta(q_A, b) &= (q_l, X, L)\,,\\ \delta(q_B, X) &= (q_B, X, R)\,, & &\\ \delta(q_B, b) &= (q_B, X, R)\,, & \delta(q_B, a) &= (q_l, X, L)\,. \end{aligned}$$

(5 P.)

$$\begin{aligned} \delta(q_l, X) &= (q_l, X, L)\,, & &\\ \delta(q_l, a) &= (q_l, a, L)\,, & \delta(q_l, b) &= (q_l, b, L)\,,\\ \delta(q_l, \Box) &= (q_0, \Box, N)\,. & & \end{aligned}$$

(3 P.)

Aufgabe 7 (9 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{N}_0$ diejenige Funktion, die für alle $n \in \mathbb{N}$ durch die Rekursion

$$f(n+1) = f(n) \cdot f(n-1)$$

mit den Startwerten $f(0) = 1$ und $f(1) = 2$ definiert ist.

1. Zeigen Sie, dass f primitiv-rekursiv ist.
2. Zeigen Sie, dass f streng monoton wachsend ist, d. h., es gilt $f(n) < f(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ (Ansage im Hörsaal: $n \neq 1$).
3. Ist der Wertebereich von f entscheidbar?

Lösungsvorschlag

1. Die Multiplikation natürlicher Zahlen ist primitiv-rekursiv. (1 P.)

   Dass f primitiv-rekursiv ist, folgt aus dem folgenden *LOOP*-Programm, das den Funktionswert von f für $n \geq 2$ in der Variablen x_1 berechnet.

   $x_0 := 1;\ x_1 := 1;\ x_2 := n - 1;$
   LOOP x_2 *DO*
   $x_3 := x_0 \cdot x_1;\ x_0 := x_1;\ x_1 := x_3;$
   END;

   (4 P.)

2. Wir zeigen zunächst $f(n) > 1$ für alle $n \geq 1$ mittels geeigneter Induktion.

   $n = 1, n = 2$: Klar wegen $f(1) = 2 > 1$ und $f(2) = 2 > 1$.

   $(n-1, n) \Rightarrow (n+1)$ für $n \geq 2$: $f(n+1) = f(n) \cdot f(n-1) > 1 \cdot 1 = 1$.

   Nun folgt sofort für alle $n \geq 2$:

   $$f(n+1) = f(n) \cdot f(n-1) > f(n)\,.$$

   (3 P.)

3. Antwort: Ja! (1 P.)