Lösung

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 3

Abgabe bis zum 16.5. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Aufgabe 3.1 Abzugeben 3P

Jeden Morgen begibt sich Prof. Evilsparza an die Universität. Wenn es nicht regnet, so macht er mit W'keit 0.7 noch einen kurzen Abstecher in die nächste Bäckerei, um sich dort einen Kaffee zu holen; mit W'keit 0.3 begibt er sich direkt an die Universiät, ohne einen Kaffee getrunken zu haben. Im Fall von Regen, nimmt er mit W'keit 0.9 den Bus und muss daher auf seinen Kaffee verzichten; nur mit W'keit 0.1 packt er seinen Regenschirm aus, um sich seinen Kaffee doch noch zu holen.

Sollte der Professor seinen morgendlichen Kaffee nicht getrunken haben, und sollte es dazu auch noch regnen, so zeigt er seine Verachtung der Studentenschaft mit W'keit 0.5, indem er den ersten Studenten, der ihm über den Weg läuft, exmatrikuliert. Im Fall von Sonnenschein, aber fehlendem Kaffee, steigt diese W'keit auf 0.7.

Hat der Professor seinen Kaffee getrunken, aber es regnet, so beträgt diese W'keit nur 0.3; während er im verbleibenden Fall, dass er sowohl seinen Kaffee hatte, als auch die Sonne scheint, mit W'keit 0.8 exmatrikuliert.

Aus Erfahrung wissen Sie, dass es an einem Morgen, an dem Prof. Evilsparza einen Studenten exmatrikuliert, es mit W'keit 0.6 regnet.

Berechnen Sie die Regenw'keit.

Lösung:

$$
\begin{aligned}
0.6 &= \Pr[R \mid E] \\
&= \frac{\Pr[R,E]}{\Pr[E]} \\
&= \frac{\Pr[E|R,K]\Pr[K|R]\Pr[R]+\Pr\left[E|R\overline{K}\right]\Pr\left[\overline{K}|R\right]\Pr[R]}{\Pr[E|R,K]\Pr[K|R]\Pr[R]+\Pr\left[E|R,\overline{K}\right]\Pr\left[\overline{K}|R\right]\Pr[R]+\Pr\left[E|\overline{R},K\right]\Pr\left[K|\overline{R}\right]\Pr\left[\overline{R}\right]+\Pr\left[E|\overline{R},\overline{K}\right]\Pr\left[\overline{K}|\overline{R}\right]\Pr\left[\overline{R}\right]} \\
&= \frac{0.3\cdot 0.1+0.5\cdot 0.9}{(0.3\cdot 0.1+0.5\cdot 0.9)\Pr[R]+(0.8\cdot 0.7+0.7\cdot 0.3)\Pr\left[\overline{R}\right]}\cdot \Pr[R] \\
&= \frac{0.48\cdot\Pr[R]}{0.48\cdot\Pr[R]+0.77\cdot\Pr\left[\overline{R}\right]} \\
&= \frac{0.48\cdot\Pr[R]}{0.77-0.29\cdot\Pr[R]}
\end{aligned}
$$

Ergibt: $\Pr[R] \approx 0.70$.

Aufgabe 3.2 Abzugeben. 3P

Es seien $\{A_1, A_2, \ldots, A_6\}$ unabhängige Ereignisse in einem diskreten W'keitsraum $(\Omega, \Pr[\cdot])$.

Sind auch $\{A_1 \cap \overline{A_3}, \overline{A_2 \cup (A_4 \cap \overline{A_5})}, A_6\}$ unabhängig? Beweisen Sie jeden Ihrer Schritte!

Lösung: Mit L26 und L27 aus der Vorlesung:

$$
\begin{aligned}
& \{A_1, \ldots, A_6\} \text{ unabh.} \\
\Leftrightarrow\ & \{A_1, \overline{A}_2, \overline{A}_3, A_4, \overline{A}_5, A_6\} \text{ unabh.} \\
\Rightarrow\ & \{A_1 \cap \overline{A}_3, \overline{A}_2, A_4, \overline{A}_5, A_6\} \text{ unabh.} \\
\Rightarrow\ & \{A_1 \cap \overline{A}_3, \overline{A}_2, A_4 \cap \overline{A}_5, A_6\} \text{ unabh.} \\
\Leftrightarrow\ & \{A_1 \cap \overline{A}_3, \overline{A}_2, \overline{A_4 \cap \overline{A}_5}, A_6\} \text{ unabh.} \\
\Rightarrow\ & \{A_1 \cap \overline{A}_3, \overline{A}_2 \cap \overline{A_4 \cap \overline{A}_5}, A_6\} \text{ unabh.}
\end{aligned}
$$

Aufgabe 3.3 **Abzugeben sind (a),(b) und (c)** **2P+3P+2P**

Es sei $\Omega = \{0,1\}^n$ mit $\Pr[\omega] = 2^{-n}$ für alle $\omega \in \Omega$.

Jedes $\omega \in \Omega$ lässt sich in maximale Blöcke von 0en bzw. 1en partitionieren.

Wir definieren die folgenden ZVen auf Ω:

- $N\colon \Omega \to \mathbb{N}$ zählt die Anzahl der Blöcke.
- $X_i\colon \Omega \to \mathbb{N}_0$ gibt die Länge des i-ten Blocks an ($i \in [n]$).

Beispiel: Für $\omega = 0^1 1^2 0^3 1^{n-6}$ gilt dann $N(\omega) = 4$, $X_1(\omega) = 1$, $X_2(\omega) = 2$, $X_3(\omega) = 3$, $X_4(\omega) = n-6$ und $X_i(\omega) = 0$ für $i \in [n] \setminus \{1,2,3,4\}$.

(a) Zeigen Sie, dass X_2 die folgende Dichte hat:

$$\Pr[X_2 = j] = \begin{cases} 2^{-n+1} & \text{falls } j = 0 \\ 2^{-j} & \text{falls } 0 < j < n \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von X_2.

Hinweis: A0.3 könnte hilfreich sein.

(c) Bestimmen Sie die Dichte von N.

(d) Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von N.

- Zeigen Sie zunächst, dass $\frac{d}{dz}\left(z(1+z)^{n-1}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{k}{j}(j+1)z^j$.
- Wie hängen $\mathbb{E}[N(N+1)]$ und $z^2(1+z)^{n-1}$ zusammen?

Lösung:

(a) Die Elementarereignisse mit $[X_2 = j]$ müssen entweder von der Form (i) $a^i \overline{a}^j$ mit $i + j = n$ und $i > 0$ oder (ii) $a^i \overline{a}^j a b_{i+j+2} \dots b_n$ mit $i > 0$ und $i + j + 1 \leq n$ sein ($a, \overline{a}, b_k \in \{0,1\}$).

Damit folgt:

$$\begin{array}{rcll} [X_2 = 0] & = & \{0^n, 1^n\} & \\ [X_2 = j] & = & \{0^{n-j}1^j, 1^{n-j}0^j\} & (0 < j < n) \\ & \cup & \{0^i 1^j 0 w, 1^i 0^j 1 w \mid 1 \leq i \leq n-j-1, w \in \{0,1\}^{n-i-j-1}\} & \end{array}$$

Es folgt:

$$\begin{array}{rcll} \Pr[X_2 = 0] & = & 2^{-n+1} & \\ \Pr[X_2 = j] & = & 2^{-n+1} + \sum_{i=1}^{n-j-1} 2^{-i-j} & (0 < j < n) \\ & = & 2^{-n+1} + 2^{-j}\frac{2^{-1} - 2^{-n+j}}{1 - 2^{-1}} & \\ & = & 2^{-n+1} + 2^{-j} - 2^{-n+1} & \\ & = & 2^{-j} & \end{array}$$

Test:

$$1 \stackrel{!}{=} \sum_{j=0}^{n-1} \Pr[X_2 = j] = 2^{-n+1} + \sum_{i=1}^{n-1} 2^{-j} = 2^{-n+1} + \frac{2^{-1} - 2^{-n}}{1 - 2^{-1}}.$$

(b)

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}[X_2] & = & \sum_{j=0}^{n-1} j \Pr[X_2 = j] \\ & = & \sum_{j=1}^{n-1} j 2^{-j} \\ & = & \sum_{i=0}^{n-2} (i+1) 2^{-i-1} \\ & = & 1/2 \cdot \frac{d}{dz} z \sum_{i=0}^{n-2} z^i |_{z=1/2} \\ & = & 1/2 \frac{d}{dz} \frac{z - z^n}{1-z} |_{z=1/2} \\ & = & 1/2 \left(\frac{1 - n z^{n-1}}{1-z} + \frac{z - z^n}{(1-z)^2} \right) |_{z=1/2} \\ & = & 1/2 \frac{1 - n 2^{-n+1}}{1/2} + 1/2 \frac{1/2 - 2^{-n}}{1/4} \\ & = & 1 - n 2^{-n+1} + 1 - 2^{-n+1} \\ & = & 2 - (n+1) 2^{-n+1} \end{array}$$

(c) Elementarereignisse zu $N = k$ haben die Form $a^{i_1} \overline{a}^{i_2} a^{i_3} \dots$ mit $i_1, i_2, \dots, i_k \geq 1$ und $i_1 + i_2 + \dots + i_k = n$.

Siehe nun A0.1: $\Pr[N = k] = \binom{n-1}{k-1} 2^{-n+1}$ für $k \in [n]$.

(d) $N-1$ ist damit $\text{Bin}(n-1,1/2)$-verteilt, womit direkt $\mathbb{E}[N]=1+\mathbb{E}[N-1]=1+\frac{n-1}{2}$ und $\text{Var}[N]=\text{Var}[N-1]=\frac{n-1}{4}$ folgt.

(Man kann sich das so vorstellen: n Bälle in einer Reihe, also $n-1$ Lücken; in jede Lücke kommt mit W'keit ein Strich, um den Anfang eines neuen Blocks zu signalisieren, wobei es zwischen 0 und $n-1$ Striche gibt.)

Da die Verteilung aber zu diesem Zeitpunkt noch nicht offiziell in der Vorlesung dran war, wird der "Umweg" über $z^k(1+z)^{n-1}=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}z^{j+1}$ gemacht:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[N]\\
=\ &\textstyle\sum_{k=1}^{n} k\binom{n-1}{k-1}2^{-n+1}\\
=\ &\textstyle\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j}(j+1)2^{-n+1}\\
=\ &2^{-n+1}\cdot\frac{d}{dz}z(1+z)^{n-1}|_{z=2^{-1}}\\
=\ &2^{-n+1}((1+z)^{n-1}+z(n-1)(1+z)^{n-2})|_{z=1}\\
=\ &2^{-n+1}(2^{n-1}+(n-1)2^{n-2})\\
=\ &1+\tfrac{n-1}{2}.
\end{aligned}$$

Nach der Vorlesung: $\text{Var}[N]=\mathbb{E}[N^2]-\mathbb{E}[N]^2=\mathbb{E}[N(N+1)]-\mathbb{E}[N]-\mathbb{E}[N]^2$:

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}[N(N+1)]\\
=\ &\textstyle\sum_{k=1}^{n}k(k+1)\binom{n-1}{k-1}2^{-n+1}\\
=\ &2^{-n+1}\textstyle\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)(j+2)\binom{n-1}{j}\\
=\ &2^{-n+1}\frac{d^2}{dz^2}(z^2(1+z)^{n-1})|_{z=1}\\
=\ &2^{-n+1}2^{n-3}(n^2+5n+2)\\
=\ &2^{-2}(n^2+5n+2)
\end{aligned}$$

Also:

$$\text{Var}[N]=\frac{n^2+5n+2}{4}-\frac{2n+2}{4}-\frac{n^2+2n+1}{4}=\frac{n-1}{4}.$$

Aufgabe 3.4 Abzugeben ist (a) 3P

Sie werfen eine faire Münze solange, bis sich zum ersten Mal das Ergebnis ändert, z.B. KKZ oder $ZZZZK$. Sie notieren sich die Anzahl der Würfe, in denen Sie stets dasselbe Ergebnis erhalten haben. Insgesamt wiederholen Sie dieses Experiment l-mal. Die ZV X_i bezeichne die im i-ten Experiment notierte Anzahl an Würfen.

Sei nun $Y := \max\{X_1,\dots,X_l\}$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von Y und zeigen Sie, dass $\Pr[Y>\log_2 l]\approx 1-e^{-1}$ für große l.

(b) Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y.

Lösung:

(a) Das Maximum Y ist genau dann kleiner gleich k, wenn jedes Teilergebnis X_i kleiner gleich k ist (siehe auch Beispiel 11):

$$[Y\le k]=\bigcap_{i=1}^{l}[X_i\le k]\,.$$

Daher:

$$\Pr[Y\le k]=\Pr[X_1\le k,\dots,X_l\le k]$$

Nach Definition des Experiments sind die Ereignisse $[X_1\le k],\dots,[X_l=k]$ unabhängig. Man stelle sich einfach vor, das Experiment wird parallel in l unabhängigen Instanzen durchgeführt.

Somit:

$$\Pr[Y\le k]=\prod_{i=1}^{l}\Pr[X_i\le k]\,.$$

Für jede einzelne Münze hat man $[X_i\le k]=\{0^j1,1^j0\mid 1\le j\le k\}$ $(k>0)$, also:

$$\Pr[X_i\le k]=\sum_{j=1}^{k}2^{-k}=\frac{2^{-1}-2^{-k-1}}{1-2^{-1}}=1-2^{-k}.$$

(X_i ist also geometrisch mit Parameter $1/2$ verteilt.)

Daher:

$$\Pr[Y \leq k] = (1-2^{-k})^l \text{ und } \Pr[Y > k] = 1-(1-2^{-k})^l.$$

Es folgt:

$$\Pr[Y > \log_2 l] \approx 1-(1-2^{-\log_2 l})^l = 1-\left(1-\frac{1}{l}\right)^l \xrightarrow{l\to\infty} 1-e^{-1} \approx 0.6320.$$

(b) Man überlegt sich zunächst, dass $\mathbb{E}[Y]$ existiert: Da $Y = \max\{X_1,\ldots,X_l\} \leq X_1+\ldots+X_l\}$ folgt aus der Monotonie des Erwartungswerts, dass $\mathbb{E}[Y] \leq \mathbb{E}[X_1+\ldots+X_l] = l\cdot\mathbb{E}[X_1] = 2l < \infty$.

Da $\mathbb{E}[Y]$ existiert, gilt nach Satz 10:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \textstyle\sum_{k=1}^{\infty} \Pr[Y \geq k] \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Y \geq k+1] \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[Y > k] \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} (1-(1-2^{-k})^l) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \left(1-\sum_{j=0}^{l}\binom{l}{j}(-1)^j 2^{-kj}\right) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(-1)^{j+1}2^{-kj} \\
&= \textstyle\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(-1)^{j+1}2^{-kj} \\
&= \textstyle\lim_{N\to\infty}\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(-1)^{j+1}\sum_{k=0}^{N}2^{-kj} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(-1)^{j+1}\lim_{N\to\infty}\sum_{k=0}^{N}2^{-kj} \\
&= \textstyle\sum_{j=1}^{l}\binom{l}{j}(-1)^{j+1}(1-2^{-j})^{-1} < \infty.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3.5 **Abzugeben.** **2P+2P**

(a) Definieren Sie diskrete ZVen X_n $(n \in \mathbb{N})$ mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$, sodass $\mathbb{E}[X_n] \to \infty$ und $\lim_{n\to\infty}\Pr[X_n \geq 1] = 0$.

(b) Es sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von diskreten ZVen mit Wertebereich $\mathbb{N}_0$ und $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}[X_n] = 0$.

Beweisen Sie ausgehend von der Definition von $\mathbb{E}[X_n]$, dass dann auch $\lim_{n\to\infty}\Pr[X_n \geq 1] = 0$ gilt.

Lösung:

(a) Anschaulich ist X_n eine ZV die sich in diskreten Zeitschritten (n) verändert. Da $\Pr[X_n \geq 1] \longrightarrow 0$ gefordert ist muss $\Pr[X_n = 0] \longrightarrow 1$ gelten. Es muss also immer mehr Masse auf die 0 kommen, aber der Erwartungswert soll immer größer werden. Dies ist einfach zu erreichen, indem die verbleibende Masse schneller "nach rechts" wandert als sie an Masse verliert.

Konkret: Setze $\Pr\left[X_n = n^2\right] = \frac{1}{n}$ und $\Pr[X_n = 0] = 1-\frac{1}{n}$. Dann gilt $\Pr[X_n \geq 1] = 1/n \longrightarrow 0$ und $\mathbb{E}[X_n] = n^2\cdot 1/n = n \longrightarrow \infty$.

(b) $\mathbb{E}[X_n] = \sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\Pr[X_n = k] \geq \sum_{k=1}^{\infty} 1\cdot\Pr[X_n = k] = \Pr[X_n \geq 1] \geq 0$ Falls nun $\mathbb{E}[X_n] \xrightarrow{n\to\infty} 0$ so muss $\Pr[X_n \geq 1] \xrightarrow{n\to\infty} 0$ (Sandwich-Theorem für Grenzwerte).