Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

LÖSUNG

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 4. Mai bis 10:15 abzugeben und wird am 4./5. Mai besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 1.1 **5P**

Es sei Ω eine Ergebnismenge und $A, B, C \subseteq \Omega$ drei beliebige, paarweise verschiedene Ereignisse. Geben Sie mit Hilfe von mengentheoretischen Operationen (z.B. $\cap, \cup, \ldots$) die folgenden Ereignisse als Mengen an.

(a) Nur A tritt ein.

(b) A und B treten ein, aber nicht C.

(c) Mindestens eines der Ereignisse tritt ein.

(d) Genau zwei der drei Ereignisse treten ein.

(e) Höchstens zwei der Ereignisse treten ein.

Aufgabe 1.2 **5P**

In einer mit Ihnen befreundeten Familie mit vier Kindern wechseln sich diese mit dem Abspülen der Reihe nach ab. Dabei kommt es immer wieder vor, dass eines der Kinder beim Abspülen Geschirr zerbricht. Vergangenen Sonntag war es nun das 4-te Mal seit Beginn dieses Jahres, dass ein Kind Geschirr zerstört hat. Nehmen Sie an, dass jedes Kind mit derselben W'keit Geschirr zerbricht, wenn es mit Abspülen an der Reihe ist.

(a) Wie groß ist die W'keit, dass das jüngste Kind, mit Namen Benjamin, an all diesen 4 Tagen, an denen Geschirr zerbrochen wurde, mit Abspülen an der Reihe war?

(b) Wie groß ist die W'keit, dass Benjamin mindestens 3 der letzten 4 Abspülen mit Scherben zu verantworten hat?

(c) Nehmen Sie jetzt an, dass genau 3 der letzten 4 Abspülen mit Scherben auf das Konto von Benjamin gehen. Seine Geschwister beschuldigen ihn, dass er besonders ungeschickt sei. Wie kann das begründet werden?

Lösungsvorschlag: Wir nummerieren die Kinder von 1 bis 4 durch. Benjamin bekommt die 1. Die Ergebnismenge ist dann

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4\}^4 \text{ mit } \Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{4^4},$$

dabei ist Kind ω_i beim i-ten Abspülen an der Reihe.

(a)
$$\Pr[(1, 1, 1, 1)] = \frac{1}{4^4} = \frac{1}{256}$$

(b) Das Ereignis, dass Benjamin genau 3 Mal Scherben verantwortet, hat die Mächtigkeit $\binom{4}{3} \cdot \binom{3}{1} = 12$ (Wähle drei aus den vier Tagen, an denen Benjamin abgespült hat; wähle dann das Kind für den verbleibenden Tag). Folglich hat es die W'keit $\frac{12}{256}$. Das Ereignis, dass Benjamin alle 4 Mal Scherben verantwortet, hat die W'keit $\frac{1}{256}$, wie in (a) berechnet. Da diese beiden Ereignisse disjunkt sind, ist die gesuchte W'kei $\frac{12+1}{256} \approx 0.051$.

(c) Benjamin hat 3 der letzten 4 Abspülen mit Scherben verursacht. Unter der Annahme, dass alle gleich ungeschickt sind, ist das Ereignis, dass Benjamin mindestens so viel Schaden anrichtet, wie er angerichtet hat, wie in (b) berechnet, also recht klein.

Aufgabe 1.3 **5P**

Sie nehmen an einem Glückspiel teil, bei dem in jeder Runde zufällig eine Zahl aus $\{2,4,8\}$ gewählt wird. Jede Zahl wird dabei in jeder Runde mit W'keit $1/3$ gezogen. Das Spiel endet, sobald das Produkt aller gezogener Zahlen mindestens 512 beträgt. Ist das Endprodukt genau 512, so gewinnen Sie das Spiel, ansonsten verlieren Sie.

a) Beschreiben Sie das Glücksspiel (= Experiment) formal, indem Sie eine geeignete Ergebnismenge Ω wählen.

b) $E_s \subseteq \Omega$ sei das Ereignis, dass das Endprodukt genau s ist.

Formulieren Sie E_s formal bzgl. Ω.

Für welche s gilt $E_s \neq \emptyset$, d.h. auf welche Werte kann das Experiment enden?

c) Mit V_s sei das Ereignis bezeichnet, dass das Produkt der Zahlen *exklusiv der letzten Zahl* des Experiments genau s ist.

Geben Sie eine formale Definition von V_s bzgl. Ω.

Bestimmen Sie auch hier die möglichen Werte s, so dass $V_s \neq \emptyset$.

d) Drücken Sie die Wahrscheinlichkeiten $\Pr[E_s]$ mittels der W'keiten $\Pr[V_s]$ aus.

Zeigen Sie hiermit, dass Sie mindestens mit W'keit $1/3$ das Spiel gewinnen.

Lösungsvorschlag:

a) Ein Elementarereignis besteht aus der Folge der gezognenen Zahlen. Da $512 = 2^9$, ist jedes Elementarereignis eine Folge von maximal 9 Zahlen. Da es sich bei allen Zahlen um 2er-Potenzen handelt, bietet sich an, mit den Exponenten statt den eigentlichen Zahlen zu rechnen.

Man erha"lt:

$$\Omega = \{(k_1, k_2, \ldots, k_l) \mid l > 1,\ k_i \in \{1,2,3\},\ \sum_{i=1}^{l-1} k_i < 9,\ \sum_{i=1}^{l} k_i \geq 9\}.$$

b) Formal ist E_s durch

$$E_s := \{(k_1, \ldots, k_l) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{l} k_i = \log_2 s\}.$$

gegeben. Nach Definition von Ω ist E_s für 512 leer, da das Experiment erst endet, wenn ein Produkt mindestens 512 beträgt.

Für $s \geq 8 \cdot 512$ folgt, dass das Produkt vor der letzten Ziehung bereits mindestens 512 gewesen sein muss, womit auch hier $E_s = \emptyset$ folgt.

Da das Produkt stets eine Zweierpotenz ist, muss nur $\log_2 s \in \{9, 10, 11\}$ betrachtet werden. Man prüft nach, dass für diese Werte E_s nicht leer ist, z.B. $(3,3,3) \in E_{512}$, $(3,3,2,2) \in E_{1024}$ und $(3,3,2,3) \in E_{2048}$.

c) Formal besteht V_s aus den folgenden Elementarereignissen:

$$V_s := \{(k_1, \ldots, k_l) \in \Omega \mid \sum_{i=1}^{l-1} k_i = \log_2 s\}.$$

Damit s das Produkt vor Ziehung der letzten Zahl sein kann, muss $s < 512$ und $s \geq 512/8 = 64$ gelten, somit $s \in \{64, 128, 256\}$.

d) Zunächst macht man sich klar, dass die Mengen V_{64}, V_{128}, V_{256} disjunkt sind und eine Partition von Ω bilden. Es gilt also

$$E_s = \bigcup_{t \in \{64,128,256\}} (E_s \cap V_t) \text{ und } \Pr[E_s] = \sum_{t \in \{64,128,256\}} \Pr[E_s \cap V_t]\,.$$

Man betrachte das Ereignis V_{64}:

Da jedes Elementarereignis aus V_{64} ein Endprodukt ≥ 512 liefern muss, muss bei jedem dieser Elementarereignisse in der letzten Ziehung die 8 gezogen worden sein. Damit folgt aber auch, dass $V_{64} \subseteq E_{512}$ gilt, also

$$\Pr[V_{64} \cap E_s] = \begin{cases} \Pr[V_{64}] & \text{falls } s = 512 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Entsprechend folgt für jedes der Elementarereignisse aus V_{128}, dass in der letzten Ziehung entweder eine 4 oder eine 8 gezogen worden sein muss. Insbesondere gilt also $(k_1, \ldots, k_{l-1}, 4) \in V_{128}$ gdw. $(k_1, \ldots, k_{l-1}, 8) \in V_{128}$, d.h. $|V_{128} \cap E_{512}| = |V_{128} \cap E_{1024}|$ und $|V_{128} \cap E_{2048}| = 0$. Da 4 und 8 mit derselben W'keit gewählt werden, folgt

$$\Pr[V_{128} \cap E_s] = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \Pr[V_{256}] & \text{falls } s = 1024 \\ \frac{1}{2} \cdot \Pr[V_{256}] & \text{falls } s = 2048 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Entsprechend sieht man, dass sich das Ereignis V_{256} zu gleichen Teilen auf alle drei Ereignisse $E_{512}, E_{1024}, E_{2048}$ verteilt. Man erhält also:

$$\begin{array}{lcl} \Pr[E_{512}] & = & \frac{1}{3}\Pr[V_{256}] + \frac{1}{2}\Pr[V_{128}] + \Pr[V_{64}] \\ \Pr[E_{1024}] & = & \frac{1}{3}\Pr[V_{256}] + \frac{1}{2}\Pr[V_{128}] \\ \Pr[E_{2048}] & = & \frac{1}{3}\Pr[V_{256}] \end{array}$$

Damit folgt $\Pr[E_{512}] \geq \Pr[E_{1024}] \geq \Pr[E_{2048}]$. Da weiterhin $\Pr[E_{512}] + \Pr[E_{1024}] + \Pr[E_{2048}] = 1$ gilt, folgt $\Pr[E_{512}] \geq 1/3$.

Aufgabe 1.4 **5P**

Drei Spieler A, B und C wollen feststellen, wer von ihnen der beste im Schach ist. Die Spieler organisieren daher folgendermaßen ein Turnier unter sich:

- Die erste Partie wird von den Spielern A und B bestritten.
- Die $i+1$-te Partie wird von dem Gewinner der i-ten Partie und dem Spieler, der nicht an der i-ten Partie teilgenommen hat, gespielt.
- Das Turnier endet, sobald ein Spieler zwei Partien hintereinander gewonnen hat.

Beispiel: Wenn die erste Partie von Spieler A gewonnen wird, so spielen in der zweiten Partie A und C gegeneinander. Gewinnt A auch die zweite Partie, so hat er bereits das Turnier gewonnen. Gewinnt hingegen Spieler C die zweite Partie, so spielen C und B in der dritten Runde gegeneinander, usw.

(a) Repräsentieren Sie das Experiment als Markov-Diagramm.

(b) Beschreiben Sie die möglichen Turnierverläufe (=Elementarereignisse) mittels Zeichenketten über dem Alphabet $\Sigma = \{A, B, C\}$.

Geben Sie hierfür einen geeigneten regulären Ausdrück über Σ an, der alle endlichen Turnierverläufe beschreibt.

Beschreiben Sie explizit die nicht endenden Turnierverläufe.

(c) Wir nehmen an, dass die Spieler alle gleich stark sind, d.h. jeder Spieler gewinnt mit W'keit $1/2$ eine Partie (kein Unentschieden).

i) Bestimmen Sie hiermit die W'keiten der Turnierverläufe (= Elementarw'keiten) und die W'keit, dass das Turnier nach höchstens bzw. genau l Partien endet.

Zeigen Sie mit Hilfe der Ergebnisse über Markov-Diagramme aus der Vorlesung, dass das Turnier mit W'keit 1 endet.

ii) Zeigen Sie, dass Spieler A mit W'keit $5/14$ das Turnier gewinnt. Mit welcher W'keit gewinnt Spieler B bzw. C das Turnier?

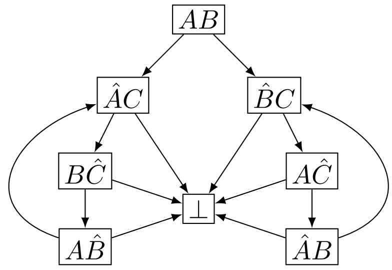
Lösungsvorschlag:

(a) Die Zustände des Diagramms merken sich, wer die letzte Partie gewonnen hat, und welche Spieler die aktuelle Partie austragen; $\perp$ steht hingegen für das Turnierende.

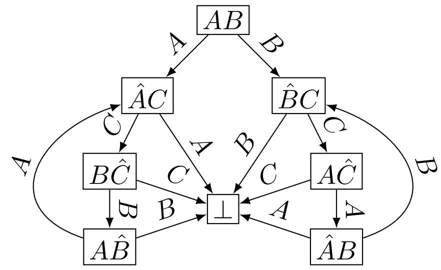
Mit ˆ ist dabei der Gewinner der letzten Partie gekennzeichnet.

Bsp.: AB steht für die erste Partie zwischen A und B; $\hat{A}B$ bedeutet, dass A die letzte Partie gewonnen hat und nun gegen B spielt.

Alle Transitionen sind dabei mit W'keit $1/2$ gwichtet. Man erhält damit:



(b) Die Elementarereignisse kann man aus dem Diagramm aus der ersten Teilaufgabe ablesen. Hierzu beschriftet man die ausgehenden Kanten eines Zustands mit dem Gewinner:



Die allgemeine Form der Elementarereignisse ist damit $A(CBA)^*A$, $AC(BAC)^*C$, $ACB(ACB)^*B$, $B(CAB)^*B$, $BC(ABC)^*C$, $BCA(BCA)^*A$, $(ACB)^\omega$ und $(BCA)^\omega$.

(c) i) Für einen endlichen Turnierverlauf bestehend aus k Partien ergibt sich eine W'keit von 2^{-k}.

Die W'keit, dass das Turnier nach genau 2 Partien endet, ist damit

$$\Pr[AA] + \Pr[BB] = 1/4 + 1/4 = 1/2.$$

Wenn das Turnier mit W'keit p_l nach genau l Partien endet, dann wird mit W'keit $1 - \sum_{i=0}^{l} p_i$ eine $l+1$-te Partie gespielt. Damit das Turnier nach der $l+1$-ten Partie endet, muss der Gewinner der l-ten Partie nochmals gewinnen, was mit W'keit 1/2 passiert. Es folgt

$$p_{l+1} = 1/2 \cdot (1 - \sum_{i=0}^{l} p_i) \text{ mit } p_2 = 1/2, p_1 = 0, p_0 = 0.$$

Mittels Induktion erhält man $p_l = 2^{-l+1}$ für $l \geq 2$. Die W'keit, dass das Turnier nach höchstens l Runden endet, ist damit

$$\begin{array}{rcl} \sum_{i=2}^{l} p_l & = & \sum_{i=1}^{l-1} 2^{-i} \\ & = & \frac{2^{-1} - 2^{-((l-1)+1)}}{1-1/2} \\ & = & 1 - 2^{-l+1}. \end{array}$$

Für $l \to \infty$ erhält man, dass mit W'keit 1 nur endlich viele Partien gespielt werden.

Dasselbe Resultat erhälten man durch Anwenden von Satz 8 aus den Folien.

ii) Die möglichen Turnierverläufe, in denen A gewinnt, haben die Form $(ACB)^k AA$ $(k \geq 0)$ oder $(BCA)^k A$ $(k > 0)$. Es folgt für die Gewinnw'keit von A:

$$\begin{array}{rl} & \Pr\left[\bigcup_{k\geq 0}\{(ACB)^k AA\}\right] + \Pr\left[\bigcup_{k\geq 1}\{(BCA)^k A\}\right] \\ = & 1/4 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} 8^{-k} + 1/2 \cdot \sum_{k=1}^{\infty} 8^{-k} \\ = & 1/4 \cdot \frac{1}{1-1/8} + 1/2 \cdot (\frac{1}{1-1/8} - 1) \\ = & 1/4 \cdot 8/7 + 1/2 \cdot 1/7 \\ = & 4/14 + 1/14 = 5/14. \end{array}$$

Da das Turnier für A und B absolut symmetrisch ist, gewinnt auch B mit W'keit 5/14.

Weiterhin endet das Turnier mit W'keit 1, d.h. mit W'keit $1 - 2 \cdot 5/14 = 2/7$ gewinnt Spieler C.