

## Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 20. Juli bis 10:15 abzugeben und wird am 20./21. Juli besprochen.

*Beachten Sie:* Alle Ergebnisse sind zu begründen!

### Aufgabe 10.1

1P+1P+2P

Ziel dieser Aufgabe ist es, den ML-Schätzer für die Erfolgsw'keit  $p \in (0, 1)$  einer negativ binomial-verteilten ZV zu bestimmen.

Hierfür seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige ZV, wobei jede ZV  $X_i$  negativ binomial-verteilt mit Erfolgsw'keit  $p$  bei  $m$  zu erzielenden Erfolgen sei, d.h., jeder der ZV hat die Dichte

$$f(k) = \binom{k-1}{m-1} p^m (1-p)^{k-m} \text{ (mit } k \geq m \text{)}.$$

Der Parameter  $m$  sei bekannt, zu schätzen ist nur  $p$ .

- (a) Es sei  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$  ein Stichprobenvektor (mit  $k_i \geq m$ ). Stellen Sie die Likelihood-Funktion  $L(\vec{k}; p)$  auf.
- (b) Maximimieren Sie  $L(\vec{k}; p)$  und bestimmen Sie hiermit den ML-Schätzer für  $p$ .
- (c) Zeigen Sie, dass der ML-Schätzer aus (b) i.A. nicht erwartungstreu ist.

*Hinweis:* Betrachten Sie den Fall  $n = m = 1$  und verwenden Sie:

$$\ln(1+x) = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \frac{x^i}{i} \text{ für } x \in (-1, 1].$$

### Aufgabe 10.2

2P+1P+1P+2P

Es seien  $X_1, X_2, \dots, X_n$  unabhängige und identisch verteilte ZV mit der gemeinsamen Dichte ( $\gamma > 0$ ):

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{2\gamma^3} x^2 e^{-x/\gamma} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

- (a) Überprüfen Sie, dass es sich bei  $f(x)$  tatsächlich um eine Dichte handelt. Bestimmen Sie auch  $\mathbb{E}[X_i]$ .
- (b) Es sei  $\vec{k} = (k_1, \dots, k_n)$  ein Stichprobenvektor. Stellen Sie die Likelihood-Funktion  $L(\vec{k}; \gamma)$  für den Parameter  $\gamma > 0$  auf.
- (c) Bestimmen Sie den ML-Schätzer für  $\gamma$  durch Maximieren von  $L(\vec{k}; \gamma)$ .
- (d) Ist der ML-Schätzer aus (c) erwartungstreu und konsistent im quadratischen Mittel?

*Hinweis:* Sie dürfen verwenden, dass  $\text{Var}[X_i] < \infty$  gilt.

**Aufgabe 10.3****1P+1P+1P+1P+1P**

Sie wissen von Blatt 1, dass Benjamins drei Geschwister ihn beschuldigen, dass er ungeschickter beim Abspülen sei als sie. Die Eltern wollen nun die Anschuldigung Benjamins durch die Geschwister statistisch testen. Dazu warten sie die nächsten 4 Abspültage, an denen Geschirr zerbrochen wird, ab. Sie stellen fest, dass Benjamin an 3 von diesen 4 Tagen die Scherben verursacht hat.

Sei für  $i \in \{1, 2, 3, 4\}$

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{wenn Benjamin am } i\text{-ten Abspültag mit Scherben schuld ist} \\ 0 & \text{wenn ein anderes Kind schuld ist.} \end{cases}$$

Es gelte  $X_i \sim \text{Bin}(1; p)$ . Es wird ein Test für den Parameter  $p$  entworfen.

- (a) Der Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art soll auf 0.05 begrenzt werden, und Benjamin soll nicht zu Unrecht des Ungeschicks bezichtigt werden. Wie muss die Nullhypothese gewählt werden? Begründung! Geben Sie  $H_0$  als Teilmenge von  $[0, 1]$  an.
- (b) Wählen Sie eine geeignete Testgröße  $T$ .  
*Hinweis:*  $T$  soll von  $X_1, X_2, X_3, X_4$  abhängen.
- (c) Wählen Sie den Ablehnungsbereich so, dass  $H_0$  abgelehnt wird und die Fehlerw'keit 1. Art minimiert wird.
- (d) Berechnen Sie für den in (c) gewählten Ablehnungsbereich die Fehlerw'keit 1. Art.
- (e) Was folgt daraus für die Frage, wie geschickt/ungeschickt Benjamin ist?

**Aufgabe 10.4****2.5P+2.5P**

$X_1, \dots, X_n$  seien unabhängige und identisch verteilt mit  $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$ . Wir betrachten das Hypothesenpaar

$$H_0 : \mu \geq \mu_0 \text{ vs. } H_1 : \mu < \mu_1,$$

wobei  $\mu_0 \geq \mu_1$  gelte.

Testgröße  $T$  sei das Stichprobenmittel, d.h.,

$$T = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Da  $\mathbb{E}[T] = \mu$  gilt, wählen wir als Ablehnungsbereich für  $H_0$  das Intervall  $K = (-\infty, a)$  mit  $a \in \mathbb{R}$ .

- (a) Bestimmen Sie  $a$  so, dass die Fehlerw'keit 1. Art gerade  $\alpha$  beträgt, d.h., wählen Sie  $a$  so, dass

$$\sup_{\mu \geq \mu_0} \Pr[T \in K] = \alpha.$$

Welchen Wert nimmt in diesem Fall die Fehlerw'keit 2. Art an? Betrachten Sie insbesondere den Fall  $\mu_0 = \mu_1$ .

- (b) Bestimmen Sie  $a$  so, dass die Fehlerw'keit 2. Art gerade  $\alpha$  beträgt, d.h., wählen Sie  $a$  so, dass

$$\sup_{\mu \leq \mu_1} \Pr[T \notin K].$$

Welchen Wert nimmt in diesem Fall die Fehlerw'keit 1. Art an? Betrachten Sie insbesondere den Fall  $\mu_0 = \mu_1$ .