Technische Universität München (I7) **Sommer 2012**
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund **25. Mai 2012**

Lösung

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 0

Abgabe bis zum 25.04.2012 bis 08:30 Uhr im DWT-Briefkasten im Untergeschoss..

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Notation

- Natürliche Zahlen (positive ganze Zahlen): $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- Nichtnegative ganzen Zahlen: $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- Für $n \in \mathbb{N}_0$: $[n] := \{i \in \mathbb{N} \mid i \leq n\}$ mit $[0] = \emptyset$ die leere Menge.
- Ganze Zahlen: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$.
- Rationale Zahlen $\mathbb{Q} = \{a/b \mid a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{N}\}$
- Reelle Zahlen: $\mathbb{R}$.
- Intervalle bezüglich $\mathbb{R}$: $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ etc.
- Mächtigkeit einer Menge M: $|M|$.
- Potenzmenge einer Menge M: $2^M = \{A \mid A \subseteq M\}$.
- Menge aller k-Tupel über einer Menge M mit $k \in \mathbb{N}_0$: $M^k = \{(m_1, \ldots, m_k) \mid m_1, \ldots, m_k \in M\}$ wobei $M^0 = \{\varepsilon\}$ mit $\varepsilon = ()$ das leere Wort/Tupel.

Aufgabe 1 **Abzugeben sind (e), (h), (i), (k) und (m).** **1P + 1P + 1P + 1P + 1P = 5P**

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der folgender Mengen an, wie man ihre Mächtigkeit berechnen kann (nicht nach Schwierigkeit geordnet):

(a) $A := \{\mathcal{P} \subseteq 2^{[n]} \mid \mathcal{P}$ ist eine Partition von [n]$\}$.

(b) $B := \{\mathcal{P} \in A \mid |\mathcal{P}| = k\}$.

(c) $C := \{f : [k] \to [n]\}$.

(d) $D := \{f : [k] \to [n] \mid f$ surjektiv $\}$.

(e) $E := \{f : [k] \to [n] \mid f$ injektiv $\}$.

(f) $F := \{f : [k] \to [n] \mid f$ bijektiv $\}$.

(g) $G := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_i \neq s_j$ für $1 \leq i < j \leq k\}$.

(h) $H := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < s_2 < \ldots < s_k\}$.

(i) $I := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k\}$.

(j) $J := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n\}$.

(k) $K := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}_0^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k \leq n\}$.

(l) $L := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k = n\}$.

(m) $M := \{(s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{N}^k \mid s_1 + s_2 + \ldots + s_k \leq n\}$.

Lösung:

(a) $|A|$ ergibt sich aus (b) durch Summation über $k = 0, \ldots, n$ und wird Bellsche Zahl genannt: $B_n = \sum_{k\in[n]} S_{n,k}$.

(b) $|B| = S_{n,k}$ wird als Stirlingzahl 2. Art bezeichnet.

Offensichtlich gilt $S_{n,n} = 1$, $S_{n,1} = 1$ und $S_{n,k} = 0$ falls $k \leq 0$ oder $k > n$.

Ansonsten gilt rekursiv $S_{n+1,k} = S_{n,k-1} + S_{n,k} \cdot k$, da:

- 1. Fall: Stecke das Element $n+1$ in eine eigene elementige Klasse, partitioniere rekursiv $[n]$ in $k-1$ Klassen.
- 2. Fall: Partitioniere zunächst $[n]$ in k Klassen, stecke dann das Element $n+1$ in eine der $\binom{k}{1} = k$ Klassen.

$S_{n,k}$ kann auch als die Anzahl der Möglichkeiten angesehen werden, um n unterscheidbare Bälle auf k Fächer zu verteilen, wobei die Reihenfolge der Bälle innerhalb der Fächer und die Reihenfolge der Fächer egal ist.

(c) $|C| = n^k$.

(d) Anzahl der möglichen Partitionen von $[k]$ in n (nicht-leere) Mengen $f^{-1}(1), \ldots, f^{-1}(n)$, wobei jeder Klasse ein eindeutiges Bild aus $[n]$ zugeordnet werden muss: $|D| = n! \cdot S_{k,n}$. (D.h., auch die Fächer werden jetzt unterschieden.)

(e) $|E| = 0$ falls $k > n$, sonst $|E| = n^{\underline{k}} = n \cdot (n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

(f) $|F| = n!$ falls $k = n$, sonst $|F| = 0$.

(g) $|G| = |E|$.

(h) $|H| = |G|/k! = \binom{n}{k}$. (Anzahl Möglichkeiten, aus n unterscheidbaren Bällen k zu wählen, wobei die Reihenfolge der Bälle keine Rolle spielt und jeder Ball höchstens einmal gezogen wird.)

(i) $|I| = \binom{k+(n-1)}{k}$: Wir wählen k Elemente aus $[n]$, wobei ein Element mehrmals gewählt werden darf und die Reihenfolge vernachlässigt wird.

Eine mögliche Illustration ist: Anstatt die gewählten Elemente aufsteigend aufzulisten, zählen wir, wie häufig ein Element gewählt wurde. D.h. wir bilden einen Vektor $(s_1, \ldots, s_k) \in I$ bijektiv auf einen Vektor $(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}_0^k$ mit $\sum_{i\in[n]} r_i = k$ ab, wobei r_i gerade angibt, wie oft i in $(s_1, \ldots, s_k)$ auftritt. Siehe dann (j).

(j) $|J| = \binom{n+(k-1)}{n}$:

Wir kodieren die natürlichen Zahlen unär: $0 = \varepsilon, 1 = |, 2 = ||, 3 = |||, \ldots$. Dann entspricht ein Vektor $(s_1, s_2, \ldots, s_k) \in J$ einem Wort über dem Alphabet bestehend aus ',' und '|', wobei genau n-mal '|' und genau $k-1$-mal ',' vorkommt. Da die Kommata und Striche nicht unterschieden werden, müssen wir nur die n Positionen der Striche aus den $n+k-1$ möglichen Positionen innerhalb des zu konstruierenden Wortes wählen.

(k) $|K| = \binom{n+k}{n}$.

Wie in (j), nur dass wir künstlich ein s_{k+1} hinzufügen (ein k.tes Komma), welches die übrigen "Striche" abtrennt.

Andererseits gilt auch $|J| = \sum_{i=0}^{n} \binom{i+(k-1)}{i}$ nach (j).

Als Nebenresultat folgt somit $\sum_{i=0}^{n} \binom{i+(k-1)}{i} = \binom{n+k}{n} = \binom{n+k}{k}$.

(l) $|L| = \binom{(n-k)+(k-1)}{(n-k)} = \binom{n-1}{n-k}$; wie (i), nur dass wir je einen Strich auf jede Klasse zu Beginn verteilen.

(m) $|M| = \binom{(n-k)+k}{(n-k)} = \binom{n}{n-k} = \binom{n}{k}$; wie (k).

Aufgabe 2 **Abzugeben sind (ai), (aii) und (aiii).** **1P + 1P + 1P = 3P)**

Es seien $j, k, l, m, n \in \mathbb{N}_0$.

(a) Zeigen Sie folgende Identitäten der Binomialkoeffizienten:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(ii) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

(iii) $\sum_{0\leq k\leq n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$.

(iv) $\sum_{0\leq k\leq n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

(v) $\sum_{k\geq 0} \binom{m}{k}\binom{n}{l-k} = \binom{m+n}{l}$.

(b) Verwenden Sie ii) und iii) um folgenden Ausdruck soweit wie möglich zu vereinfachen:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} \text{ für } n \geq m \geq 0.$$

(c) Berechnen Sie den Koeffizienten des Monoms $a^3b^5c^7$ in $(a+b+c)^{15}$.

(d) Gegeben sei ein rechteckiges $n \times m$–Gitter, d.h. formal ein Graph mit Knotenmenge $V = [n] \cup \{0\} \times [m] \cup \{0\}$ und Kantenmenge $E = \{\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\} : |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2| = 1\}$. Wie viele *kürzeste* Pfade führen vom Punkt $(0,0)$ zum Punkt (n, m).
(Hinweis: Überlegen Sie sich zunächst aus welchen "Bewegungen" ein kürzester *Pfad besteht!)*

Lösung:

(a) (i) Um k Elemente aus $[n]$ zu wählen, wähle entweder k Elemente aus $[n-1]$ und vergesse das n.te Element, oder wähle das n.te Element und wähle noch $k-1$ Elemente aus $[n-1]$.

Alternativ:

$$\binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1} = \frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!} + \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \frac{(n-1)!}{k!(n-k)!}(n-k+k) = \binom{n}{k}.$$

(ii) Direkt oder als Verallgemeinerung von (c):

Schreibweise: $[x^iy^jz^k](x+y+z)^n$ sei der Koeffizient von $x^iy^jz^k$ in dem Polynom $(x+y+z)^n$.

Es gelte $n = i+j+k$.

Dann gilt $[z^k]((x+y)+z)^n = \binom{n}{k}(x+y)^{n-k}$ und $[y^j](x+y)^{n-k} = \binom{n-k}{j} = \binom{n-k}{(j+k)-k}$

Anderseits: $[x^i](x+(y+z))^n = \binom{n}{i}(y+z)^{n-i} = \binom{n}{j+k}(y+z)^{j+k}$ und $[z^k](y+z)^{j+k} = \binom{j+k}{k}$.

Es folgt: $[x^iy^jz^k](x+y+z)^n = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{(j+k)-k} = \binom{n}{j+k} \cdot \binom{j+k}{k}$.

Setze dann $m = j+k$.

(iii) Nach Aufgabe (1k) $\binom{m+n+1}{m+1} = \binom{n+(m+1)}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+m}{k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{k+m}{m}$.

(iv) $\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{j+m}{m} = \sum_{j=0}^{n-m} \binom{j+m}{j} = \binom{m+n-m+1}{n-m} = \binom{n+1}{m+1}$ mit (iii).

(v) Um l Elemente aus $[m+n]$ zu wählen, wähle k aus $[m]$ und $l-k$ aus $[m+n] \setminus [m]$ für $k = 0, \ldots, l$.

(b) (aii) lässt sich auch schreiben als $\frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$. Einsetzen liefert:

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}} = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k}.$$

Setze dann $j = m-k$ mit $j = 0, \ldots, m$ und wende (aiii) an:

$$\binom{n}{m}^{-1} \sum_{k=0}^{m} \binom{n-k}{m-k} = \binom{n}{m}^{-1} \sum_{j=0}^{m} \binom{n-m+j}{j} = \frac{\binom{n-m+m+1}{m}}{\binom{n}{m}} = \frac{(n+1)!m!(n-m)!}{n!m!(n+1-m)!} = \frac{n+1}{n+1-m}.$$

(c) Schreibweise: $[z^k]f(z)$ ist der Koeffizient von z^k in der Reihe $f(z)$.

$[a^3](a+(b+c))^{15} = \binom{15}{3}(b+c)^{12}$ und $[b^5](b+c)^{12} = \binom{12}{5}c^7$, also $[a^3b^5c^7](a+b+c)^{15} = \binom{15}{3} \cdot \binom{12}{5}$.

(d) Ein kürzester Pfad besteht nur aus Bewegungen nach rechts $(+(1,0))$ und nach oben $(+(0,1))$. Insgesamt müssen n Bewegungen nach rechts und m Bewegungen nach oben gemacht werden: wähle zunächst die Zeitpunkte, an denen nach rechts gegangen wird, zu den verbleibenden Zeitpunkten muss dann nach oben gegangen werden. Also ist die Anzahl kürzester Pfade von $(0,0)$ nach (n,m) gleich $\binom{n+m}{n}$.

Aufgabe 3 **Abzugeben sind (a) und (e).** **1P + 1P = 2P**

Berechnen Sie

(a) $\sum_{i=N}^{M} x^i \quad (N \leq M)$

(b) $\sum_{i=0}^{\infty} 5^{-i}$

(c) $\sum_{i=0}^{\infty} ix^{i-1} \quad (|x| < 1)$

(d) $\sum_{i=0}^{\infty} ix^{i+3} \quad (|x| < 1)$

(e) $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{2}{7}^i \frac{1}{6}^{(n-i)}$

Lösung:

(a) Setze $g_{n,m}(x) = x^n + x^{n+1} + \ldots + x^m$ $(n \leq m)$.

Dann gilt: $g_{n+1,m+1}(x) = xg_{n,m}(x)$ und $g_{n,m}(x) - g_{n+1,m+1}(x) = x^n - x^{m+1}$.

Für $x \neq 1$ folgt somit $g_{n,m}(x) = \frac{x^n - x^{m+1}}{1-x}$, ansonsten $g_{n,m}(1) = m - n + 1$.

(b) Wie bekannt bzw. aus (a) folgenden für $|x| < 1$ und $n = 0$:

$$g(x) := \lim_{m\to\infty} g_{0,m}(x) = \lim_{m\to\infty} \sum_{k=0}^{m} x^k = \lim_{m\to\infty} \frac{1 - x^{m+1}}{1 - x} \overset{|x|<1}{=} \frac{1}{1 - x}.$$

Somit: $g(1/5) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} 5^{-k} = 5/4$.

(c) 1. Weg: $g(x)$ ist analytisch auf $(-1, 1)$, da dort absolut konvergent. Somit existiert ebenfalls $g'(x)$ auf $(-1, 1)$ mit

$$g'(x) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} ix^{i-1} \text{ und } g(x) = (1 - x)^{-2}.$$

2. Weg: Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^{m} ix^{i-1} &= \sum_{i=1}^{m} ix^{i-1} \\
&\overset{i=j+1}{=} \sum_{j=0}^{m-1} (j + 1)x^j \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} g_{j,m-1}(x) \\
&= \sum_{j=0}^{m-1} \frac{x^j - x^m}{1-x} \\
&= \frac{g_{0,m-1}(x) - mx^m}{1-x} \\
&= \frac{1-x^m}{(1-x)^2} - \frac{mx^m}{1-x}.
\end{aligned}$$

Mit $|x| < 1$ folgt $\lim_{m\to\infty} x^m = 0$ und somit auch:

$$\sum_{i\in\mathbb{N}_0} ix^{i-1} = (1 - x)^{-2}.$$

(d) Mit (c) $\sum_{i\in\mathbb{N}_0} ix^{i+3} = x^4(1 - x)^{-2}$.

(e) Mit $(x + y)^n = \sum_{i\in\mathbb{N}_0} \binom{n}{i} x^i y^{n-j}$ und $x = 2/7, y = 1/6$, folgt:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \frac{2}{7}^i \frac{1}{6}^{(n-i)} = \lim_{n\to\infty} (2/7 + 1/6)^n = 0.$$