Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 6
17. Juni 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (2 Punkte)

Geben Sie ein Beispiel für einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, \Pr\rangle$ und zwei unabhängige diskrete Zufallsvariable X und Y über $\langle\Omega, \Pr\rangle$ an, so dass X und Y gleichverteilt sind. Begründen Sie Ihre Konstruktion.

Lösung

Natürlich ist die unabhängig zweimal geworfene Münze ein Beispiel, so wie jede andere unabhängige Wiederholung eines Experiments .

Der Wahrscheinlichkeitsraum für den Wurf einer Münze kann beispielsweise $W' = \langle\Omega', \Pr'\rangle$ sein, wobei Z mit $Z(\text{„Kopf“}) = 1$ und $Z(\text{„Zahl“}) = 0$ eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable ist.

Eine zweimalige Ausführung des Experiments wird als einmalige Ausführung des Produktexperiments formuliert mit $W = \langle\Omega \times \Omega, \Pr\rangle$ und $\Pr[(\omega_1, \omega_2)] = \Pr'[\omega_1] \cdot \Pr'[\omega_2]$.

Dann werden Zufallsvariable X und Y über W wie folgt definiert.

$$X((\omega_1, \omega_2)) = Z(\omega_1) \quad \text{und} \quad Y((\omega_1, \omega_2)) = Z(\omega_2)\,.$$

Zur Begründung siehe Zentralübung vom 9.6.2011.

Hausaufgabe 2 (8 Punkte)

Es liegen eine 5-Pfennig-, eine 10-Pfennig- und eine 50-Pfennig-Münze jeweils mit der Rückseite nach oben auf dem Tisch. Wir betrachten einen Zufallsprozess, der in jedem Schritt die Seiten einer Laplace-zufällig aus den 3 Münzen ausgewählten Münze wendet.

Es sei X diejenige diskrete Zufallsvariable, die die Anzahl der Schritte (≥ 1) zählt, bis zum ersten Mal alle Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegen.
(Offenbar gilt beispielsweise $\Pr[X=1] = 0$.)

1. Bestimmen Sie $\Pr[X=3]$ (mit Begründung)!
2. Bestimmen Sie $\Pr[X=n]$ für gerades n (mit Begründung)!
3. Nehmen Sie an, dass genau eine der 3 Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt, während also die anderen beiden Münzen mit der Rückseite nach oben liegen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p, dass nach 2 Schritten wiederum genau eine der Münzen mit der Vorderseite nach oben auf dem Tisch liegt?
4. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_X.

Lösung

Volle Punktzahl nur mit entsprechender Begründung!

1. $\Pr[X=3] = \frac{2}{9}$.
2. $\Pr[X=n] = 0$ für gerades n.
3. $p = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$.
4. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$f_X(n) = \begin{cases} \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} & : n \text{ ungerade und } n > 1 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Unfallhäufigkeit auf Autobahnen hängt u. a. von den gefahrenen Geschwindigkeiten ab. Wir betrachten für $10^4 = 10000$ Autos 2 Geschwindigkeitsklassen s und l mit $|s| = 1000$ und $|l| = 9000$ Autos. Die Unfallwahrscheinlichkeit in einem bestimmten Streckenabschnitt sei für die Autos der s-Klasse $\frac{11}{1000}$ bzw. der l-Klasse $\frac{1}{1000}$.
Ein Unfall werde für jedes der Autos der s- bzw. l-Klasse mit einer Zufallsvariablen X_i bzw. Y_j mit $i \in [1000]$ bzw. $j \in [9000]$ angezeigt. Die Anzahl der Unfälle insgesamt werde angezeigt durch die Zufallsvariable U.
Wir nehmen sämtliche Unfälle als unabhängig an.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[U]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[U]$ als Dezimalzahl ggf. auf 2 Nachkommastellen genau.

   Begründen Sie die Gültigkeit Ihrer Berechnungsschritte!
2. Geben Sie mithilfe der Chebyshevschen Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke c für die Wahrscheinlichkeit $\Pr[U \geq 25]$ an, so dass also $\Pr[U \geq 25] \leq c$ gilt.
3. Geben Sie nun mithilfe der Abschätzung nach Chernoff eine obere Schranke c für $\Pr[U \geq 25]$ an. Stellen Sie c als arithmetischen Ausdruck inklusive Exponentialfunktion, aber ohne Variablen dar.

Lösung

1. Seien $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ und $Y = \sum_{j=1}^{9000} Y_j$.

   X bzw. Y sind binomialverteilt mit $p_x = \frac{11}{1000}$ bzw. $p_y = \frac{1}{1000}$

   Es gilt $\mathbb{E}[X] = 1000 \cdot p_x = 11$
   bzw. $\mathbb{E}[Y] = 9000 \cdot p_y = 9$

   und $\mathrm{Var}[X] = 1000 \cdot p_x(1 - p_x) = 10,879$
   bzw. $\mathrm{Var}[Y] = 9000 \cdot p_y(1 - p_y) = 8,991$.

   Dann gilt $U = X + Y$. Wegen Linearität bzw. Unabhängigkeit der Unfälle folgt
   $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 20$,
   $\mathrm{Var}[U] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 19,88$.

2.
$$\begin{aligned}\Pr[U \geq 25] &= \Pr[U-20 \geq 5]\\ &\leq \Pr[U-20 \geq 5] + \Pr[20-U \geq 5]\\ &= \Pr[|U-20| \geq 5]\\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(U)}{5^2} = \frac{19,88}{25} = 0,7952.\end{aligned}$$

3. Seien $\delta = \frac{1}{4}$ und $\mu = \mathbb{E}[U]$. Dann gilt $(1+\delta)\mu = 25$.
$$\begin{aligned}\Pr[U \geq 25] &\leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}}\right)^{\mu}\\ &= \left(\frac{e^{\frac{1}{4}}}{(1+\frac{1}{4})^{(1+\frac{1}{4})}}\right)^{20}.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine diskrete Zufallsvariable und $(X|X \geq t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ die entsprechende bedingte Zufallsvariable mit Dichte $f_{X|X\geq t}(x) = \Pr[X = x \mid X \geq t]$. Wir nehmen stets $\Pr[X \geq t] \neq 0$ und die Existenz entsprechender Erwartungswerte an.

1. Zeigen Sie die folgende Ungleichung für bedingte Erwartungswerte:
$$t \leq \mathbb{E}[X \mid X \geq t]\,.$$

2. Wir nehmen zusätzlich $\Pr[X < t] \neq 0$ an. Zeigen Sie mit Benutzung obiger Ungleichung die folgende Verschärfung der Markov-Ungleichung:
$$t \cdot \Pr[X \geq t] \leq \mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t]\,.$$

3. Sei X Poisson-verteilt mit Dichte f_X und $f_X(0) = e^{-1}$ (e ist die Eulersche Zahl). Beweisen Sie durch Anwendung der Chebyshev-Ungleichung
$$\Pr[X \geq 11] \leq \frac{1}{100}\,.$$

Lösung

1.
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X \mid X \geq t] &= \sum_{x \in W_{X|X\geq t}} x \cdot \Pr[X = x \mid X \geq t]\\ &\geq t \cdot \underbrace{\sum_{x \in W_{X|X\geq t}} \Pr[X = x \mid X \geq t]}_{=1}\,.\end{aligned}$$

2. Satz für bedingte Erwartungswerte
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t] + \mathbb{E}[X \mid X \geq t] \cdot \Pr[X \mid X \geq t]\\ &\geq \mathbb{E}[X \mid X < t] \cdot \Pr[X < t] + t \cdot \Pr[X \mid X \geq t]\,.\end{aligned}$$

3. Es gelten $\mathbb{E}[X] = 1$ und $\mathrm{Var}[X] = 1$.

$$\begin{aligned} \Pr[X \geq 11] &\leq \Pr[|X-1| \geq 10] \\ &= \Pr[|X-\mathbb{E}[X]| \geq 10] \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}[X]}{10^2} \\ &= \frac{1}{100}\,. \end{aligned}$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* <u>*Vorbereitungsaufgabe*</u>*,* <u>*Tutoraufgabe*</u> *und* <u>*Hausaufgabe*</u> *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Lösung

Die Dichte einer negativ binomialverteilten Variablen X_n für n Wiederholungen eines Wertes i bei Erfolgswahrscheinlichkeit p ist

$$f_{X_n}(i) = \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n}\,.$$

Man beachte, dass mit $\binom{i-1}{n-1} = \frac{(i-1)^{\underline{(n-1)}}}{(n-1)!}$ sofort $\binom{i-1}{n-1} = 0$ für $i < n$ folgt.
Für die erzeugende Funktion $G_{X_n}(s)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i\,. \end{aligned}$$

Ein Schlüssel für eine geschlossene Darstellung der Funktion $G_{X_n}(s)$ kann u. a. die Rekursion für alle $n \geq 1$ sein mit

$$G_{X_{n+1}}(s) = \frac{p \cdot s^2}{n} \cdot G'_{X_n}(s)\,,$$

wobei laut Vorlesung für $n = 1$ gilt

$$G_{X_1}(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s}\,.$$

Beweis der Rekursion:

$$
\begin{aligned}
G'_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot i \cdot s^{i-1} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-n} \cdot s^{i+1} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i-1}{n+1-1} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-(n+1)} \cdot s^{i} \\
&= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot G_{X_{n+1}}(s)\,.
\end{aligned}
$$

Ein alternativer Ansatz $X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$ mit unabhängig geometrisch verteilten Z_i ist nach Vorlesung

$$
G_{X_n}(s) = G_{Z_1}(s) \cdot G_{Z_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{Z_n}(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s} \right)^n .
$$

Vorbereitung 2

1. Sei $(H_n)_{n\geq 1}$ eine rekurrente Ereignisfolge. Die Zufallsvariable Z mit $W_Z = \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ messe für $k \in \mathbb{N}$ die Wartezeit $Z = k$ bis zum Eintreten des ersten Ereignisses H_k der Ereignisfolge.

   Zeigen Sie die Ungleichung
   $$\sum_{k\in\mathbb{N}} \Pr[Z = k] \leq 1\,.$$

2. Sei $(X_n)_{n\geq 1}$ eine Folge unabhängiger Indikatorvariablen mit gleicher Bernoulli-Verteilung.

   Zeigen Sie, dass die Folge $(H_n)_{n\geq 1}$ der Ereignisse $H_n = (X_n = 1)$ rekurrent ist.

Lösung

1. *Bemerkung*: Bei oberflächlicher Betrachtung erscheint die Gültigkeit der Ungleichung als eine triviale Folge der Eigenschaft von Z, eine „Zufallsvariable“ zu sein. Die Tatsache, dass $\Pr[Z = k]$ für alle $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ definiert wurde, heißt aber noch nicht, dass Z bezüglich dieser Definition eine Zufallsvariable ist. Insbesondere haben wir bisher nur numerische Zufallsvariable mit $Z : \Omega \to \mathbb{R}$ betrachtet. Die Aufgabe liefert also erstmals den Nachweis, dass wir über Z von einer Zufallsvariablen sinnvollerweise sprechen dürfen.

   Zum Beweis genügt es im Prinzip die paarweise Disjunktheit aller Ereignisse $Z = k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ zu beweisen. Wir beweisen etwas ausführlicher ausgehend von der Gleichung
   $$\Pr[H_1] + \Pr[\bar{H}_1] = 1\,.$$

Wegen $\Pr[Z=1] = \Pr[H_1]$ folgt $\sum_{i=1}^{1} \Pr[Z=i] + \Pr[\bar{H}_1] = 1$. Dies ist der Induktionsanfang zum Beweis der folgenden Gleichung für alle $n \geq 1$.

$$\sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n\right] = 1\,.$$

Den Induktionsschritt von n auf $n+1$ beweist man wie folgt.

$$\begin{aligned}
1 &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n \cap H_{n+1}\right] \\
&\qquad\qquad + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_n \cap \bar{H}_{n+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Pr[Z=i] + \Pr[Z=n+1] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_{n+1}\right] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \Pr[Z=i] + \Pr\left[\bar{H}_1 \cap \bar{H}_2 \cap \ldots \cap \bar{H}_{n+1}\right]\,.
\end{aligned}$$

Daraus folgt unmittelbar die Behauptung.

2. Wir zeigen für alle $i, j \in \mathbb{N}$ mit $i > j$

$$\Pr\left[H_i \,|\, \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right] = \Pr[H_{i-j}]\,.$$

Sei p die Erfolgswahrscheinlichkeit für die Variablen X_n. Für alle $i \in \mathbb{N}$ gilt $\Pr[H_i] = p$. Da die X_i unabhängig sind, folgt

$$\begin{aligned}
\Pr\left[H_i \,|\, \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right] &= \frac{\Pr\left[H_i \cap \bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right]}{\Pr\left[\bar{H}_1 \cap \ldots \cap \bar{H}_{j-1} \cap H_j\right]} \\
&= \Pr[H_i] \\
&= p \\
&= \Pr[H_{i-j}]\,.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 1

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^2]$.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^{\underline{n}}]$ für die fallende Potenz $X^{\underline{n}}$.

Lösung

1. Es gilt $E[X] = \lambda$. Wir benützen $X^2 = X(X-1) + X$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] \\
&= \lambda + \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-2)!} \\
&= \lambda + \lambda^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda + \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \\
&= \lambda + \lambda^2 .
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^{\underline{n}}] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\ldots(i-n+1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-n)!} \\
&= \lambda^n \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(i-n)}}{(i-n)!} \\
&= \lambda^n .
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}(200, \frac{1}{100})$.

1. Berechnen Sie $\Pr[X > 8]$ approximativ mit der Poisson-Verteilung. (Taschenrechner benutzen!)
2. Bestimmen Sie mit der Markov-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.
3. Bestimmen Sie mit der Chernoff-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.

Lösung

1. Es gilt $\mathbb{E}[X] = 200 \cdot \frac{1}{100} = 2$ und $\Pr[X > 8] = 1 - \Pr[X \leq 8]$.

   Wir rechnen approximativ

$$\begin{aligned}\Pr[X \leq 8] &= \sum_{i=0}^{8} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} \\ &= e^{-2} \cdot \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!}\right) \\ &= e^{-2} \cdot \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \frac{8}{315} + \frac{2}{315}\right) \\ &= e^{-2} \cdot \frac{2327}{315} \\ &\approx 0.9997626\,.\end{aligned}$$

   Ergebnis:

$$\Pr[X > 8] \approx 0.0002374 = 2.374 \cdot 10^{-4}\,.$$

2. Zunächst gilt $\Pr[X > k] = \Pr[X \geq k+1]$. Mit $\mathbb{E}[X] = 2$ folgt nach Markov

$$\Pr[X > k] \leq \frac{2}{1+k}\,.$$

   Wir lösen $\frac{2}{1+k} \leq 10^{-4}$ nach k auf und erhalten als kleinstes k den Wert

$$k = 19999\,.$$

   Bemerkung: Offensichtlich ist diese Abschätzung wertlos, denn für $k \geq 200$ gilt $\Pr[X > k] = 0$.

3. Seien $k + 1 = (1+\delta) \cdot \mu = (1+\delta) \cdot 2$, d. h. $\mu = \mathbb{E}[X] = 2$ und $1 + \delta = \frac{k+1}{2}$, mithin $\delta = \frac{k-1}{2}$. Dann gilt für alle $k > 1$ nach Chernoff

$$\begin{aligned}\Pr[X \geq k+1] &\leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \\ &= \left(\frac{e^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{k+1}}\right)\,.\end{aligned}$$

   Durch Logarithmieren und Zusammenfassen folgt

$$\begin{aligned} & \left(\frac{e^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{k+1}}\right) &\leq\ & 10^{-4} \\ \iff\quad & (k+1)[1 + \ln 2 - \ln(k+1)] &\leq\ & 2 - 4\ln 10\end{aligned}$$

   Diese Ungleichung löst man i. A. durch ein Bisektionsverfahren. Im vorliegenden Fall findet man schnell, dass die Ungleichung erstmalig für $k = 10$ gilt.

   Bemerkung: Wenn man bedenkt, dass $k \geq 9$ bereits aus Teilaufgabe 1 folgt, dann sieht man, wie außerordentlich scharf die Chernoff-Schranke ist.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$. Für die Dichtefunktion f_X von X gelte $f_X(1) = \frac{1}{4}$ und $f_X(2) = \frac{1}{5}$. X_i sei die i-te Wiederholung von X. Wir bilden $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ in Abhängigkeit des Wertes einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen N, die den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit e^{-2} annehme.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ der Zufallsvariablen X an.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Z den Wert 0 annimmt.

   Hinweis: Man beachte, dass Z auch dann den Wert 0 annimmt, wenn $N = 0$ gilt.

Lösung

1. Es gilt
$$f_X(0) = 1 - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}) = \tfrac{11}{20}\,,$$
und damit
$$\begin{aligned} G_X(s) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k \\ &= \tfrac{11}{20} + \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{5}s^2\,. \end{aligned}$$

2. Aus $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ folgt $G'_Z(1) = G'_N(G_X(1)) \cdot G'_X(1)$, mithin, wegen $G_X(1) = 1$,
$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]\,.$$
Für die Dichte von N gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$
$$f_X(i) = \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\,,$$
also
$$f_X(0) = \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \;=\; e^{-\lambda} \;=\; e^{-2}\,,$$
woraus folgt
$$\mathbb{E}[N] = \lambda \;=\; 2\,.$$
Weiter gilt
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{5} \;=\; \tfrac{13}{20}\,. \\ \mathbb{E}[Z] &= \tfrac{13}{10}\,. \end{aligned}$$

3. Seien G_Z, G_N und G_X die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen von Z bzw. N bzw. X. Dann gilt
$$\begin{aligned} \Pr[Z = 0] &= G_Z(0) \\ &= G_N(G_X(0)) \\ &= G_N(\tfrac{11}{20}) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} \cdot (\frac{11}{20})^k \\ &= e^{-2} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{11}{10})^k \;=\; e^{-2+\frac{11}{10}} \\ &= e^{-\frac{9}{10}}\,. \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 4

Peter und Paul spielen ein Spiel, bei dem jeder von ihnen mit Wahrscheinlichkeit 1/2 gewinnt. In jeder Runde setzt jeder von ihnen € 10 ein (der Gewinner erhält dann € 20).

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Peter € 100 Gewinn gemacht hat, bevor er € 50 Verlust macht?
2. Wenn Peter erst mal seinen Gewinn hat, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass er insgesamt auf € 50 Verlust kommt?

Lösung

Diese Aufgabe betrachtet bis auf Skalierung (Faktor 10) das Beispiel des eindimensionalen Random Walk und gehört zum Thema rekurrente Ereignisse.

Die wichtigste Beobachtung ist zunächst, dass bei diesem Spiel sowohl Peter als auch Paul irgendwann jeden Gewinnbetrag und jeden Verlustbetrag mindestens einmal überschreiten werden. A.a., die Wahrscheinlichkeit $\Pr[(\text{nie Gewinn von } X) \text{ und } (\text{nie Verlust von } Y)]$ ist stets gleich Null,

$$\Pr[(\text{nie Gewinn von } X) \text{ und } (\text{nie Verlust von } Y)] = 0\,.$$

Man beweist dies ähnlich, wie man beweisen kann, dass man mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann beim Random Walk zum Nullpunkt zurückkehrt. Gewinn– bzw. Verlustüberschreitungen werden stets irgenwann das erste Mal stattfinden, und das gilt sogar nach jeder Spielsituation beliebig oft.

1. Wir definieren die abkürzende Schreibweise $\Pr[X|-Y]$ bzw. $\Pr[-X|Y]$ für die Wahrscheinlichkeit, einen

   - erstmaligen Gewinn von X zu machen, ohne vorher einen Verlust von Y gemacht zu haben, bzw. einen
   - erstmaligen Verlust von X zu machen, ohne vorher einen Gewinn von Y gemacht zu haben.

   Nun gilt

   $$\Pr[100|-50] + \Pr[-50|100] + \Pr[\text{nie Gewinn von 100 und nie Verlust von 50}] = 1$$

   und damit

   $$\Pr[100|-50] + \Pr[-50|100] = 1\,.$$

   Aus Symmetriegründen bezüglich den Spielern Peter und Paul gilt

   $$\Pr[-50|100] = \Pr[50|-100]\,.$$

   Wenn wir abkürzen

   $$p_1 := \Pr[100|-50] \quad \text{und} \quad p_2 := \Pr[50|-100]$$

   erhalten wir

   $$p_1 + p_2 = 1\,.$$

Jedem Gewinn von 100 ohne Verlust von 50 geht ein Gewinn von 50 ohne Verlust von 50 voraus. Der zusätzliche Gewinn von 50 hin zum Gewinn von 100 geschieht ohne vorherigem Verlust von 100. Mit der Abkürzung

$$p := \Pr[50|-50]$$

gilt

$$p_1 = p \cdot p_2\,.$$

Es gilt aber auch $p = \frac{1}{2}$, weil

$$\Pr[50|-50) + \Pr[-50|50] = 1 \quad \text{und} \quad \Pr[50|-50] = \Pr[-50|50]\,.$$

Damit haben wir

$$p_2 = 2 \cdot p_1, \quad \text{und} \quad p_1 + p_2 = 1\,,$$

mithin

$$\Pr[100|-50] = p_1 = \frac{1}{3}\,.$$

2. Die Wahrscheinlichkeit ist gleich 1, den Gewinn von 100 (ohne vorausgehenden Verlust von 50) wieder zu verspielen bis hin zu einem Gesamtverlust (bezüglich Spielanfang) von 50.