Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 9
29. Juni 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 29. Juni 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir werfen eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ „Zahl" zeigt. Wir betrachten für eine Folge von Würfen $W_1, W_2, \ldots$ das Ereignis $E(i,k)$, beim i-ten Wurf weniger als $(\frac{i}{2}+k)$-mal „Kopf" geworfen zu haben.
Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\forall k > 0 : \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} E(i,k)\right] = 0\,.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Die stetigen Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch die Koordinaten x bzw. y eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in B = \{(x,y)\,;\,|x| \le y^2 \le 1\}$ der x,y-Ebene.

1. Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$!
2. Berechnen Sie die Randverteilung $F_Y(y)$!
3. Beweisen Sie, dass X und Y abhängig sind!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Seien X eine Zufallsvariable und $Y = aX + b$.

   Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ besitzt Y den gleichen Erwartungswert wie X und die halbe Streuung (Standardabweichung) von X.

2. Seien X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable und $Y = aX$.

   Für welche $a > 0$ ist Y Poisson-verteilt? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \text{Bin}(2000, 0.05)$. Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen sowohl für eine Approximation von entsprechenden Verteilungen mit Poisson-Verteilung als auch mit Normalverteilung vorliegen.
Berechnen Sie approxomativ

1. $\Pr[X = 110]$,
2. $\Pr[X > 110]$.

Begründen Sie jeweils die Wahl einer der Approximationen.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen* Vorbereitungsaufgabe*,* Tutoraufgabe *und* Hausaufgabe *geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichproben einer Zufallsvariablen X und sei $\bar{X}$ das arithmetische Mittel der X_i. Wir verwenden die Zufallsvariable

$$V = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \bar{X})^2$$

als Schätzer für die Varianz von X.
Berechnen Sie den Bias von V! Welche Aussage gilt für $n \to \infty$?

Tutoraufgabe 1

Sei $X = \sum_{i=1}^{2000} X_i$ die Summe der Augenzahlen, wenn man 2000-mal mit einem idealen Würfel würfelt.

1. Berechnen Sie näherungsweise $\Pr[7000 \leq X \leq 7100]$!
2. Wie groß muss man Δ wählen, damit $\Pr[7000 - \Delta \leq X \leq 7000 + \Delta] \approx \frac{1}{2}$ gilt?

Approximieren Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Tutoraufgabe 2

Die tatsächlich benötigte CPU-Zeit einer Benutzersitzung an einer Workstation werde als eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und der Varianz $\sigma^2 = 6{,}25$ [sec^2] angenommen.
Seien X_i unabhängige Stichproben der CPU-Zeit und $\bar{X}$ das arithmetische Mittel der X_i.
Wie viele unabhängige Stichproben sollten mindestens gemessen werden, damit

$$\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0{,}1] \geq 0{,}9$$

gilt. Man verwende zur Beantwortung der Frage

1. die Ungleichung von Chebyshev,
2. den Zentralen Grenzwertsatz.

Tutoraufgabe 3

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichproben einer Zufallsvariablen X, und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Wir benutzen $Y = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i$ als Schätzer für $\mathbb{E}[X]$.

1. Zeigen Sie, dass Y erwartungstreu ist.
2. Y hängt ab von der Wahl der Parameter λ_i. Zeigen Sie, dass Y dann die höchste Effizienz besitzt innerhalb der Wahlmöglichkeiten der Parameter, wenn $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ gilt.