Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 3
11. Mai 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die Eckpunkte des dreidimensionalen Standardwürfels aus denen wir zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Ecke auswählen. Außerdem definieren wir eine Zufallsvariable $X : \{0,1\}^3 \to \mathbb{R}$, welche jeden Eckpunkt des Würfels auf seine euklidische Norm abbildet. Es gilt also $X(p) = \|p\|_2$. Bestimmen sie die Dichte, die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz von X.

Lösungsvorschlag

Sei $p \in \{0,1\}^3$ eine beliebige Ecke des Würfels und k die Anzahl der Komponenten mit Wert 1. Es gilt somit

$$X(p) = \|p\|_2 = \sqrt{p_1^2 + p_2^2 + p_3^2} = \sqrt{k}.$$

Die euklidische Norm hängt also nur von k ab. Für jedes $0 \leq k \leq 3$ existieren wiederum genau $\binom{3}{k}$ Ecken, deren Anzahl an Komponenten mit Wert 1 gleich k ist. Die Dichte und Verteilung von X sind folglich

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{8} & \text{für } x = \sqrt{0} \\ \frac{3}{8} & \text{für } x = \sqrt{1} \\ \frac{3}{8} & \text{für } x = \sqrt{2} \\ \frac{1}{8} & \text{für } x = \sqrt{3} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad \text{sowie} \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x < \sqrt{0} \\ \frac{1}{8} & \text{für } \sqrt{0} \leq x < \sqrt{1} \\ \frac{1}{2} & \text{für } \sqrt{1} \leq x < \sqrt{2} \\ \frac{7}{8} & \text{für } \sqrt{2} \leq x < \sqrt{3} \\ 1 & \text{für } \sqrt{3} \leq x \end{cases}.$$

Mit Hilfe der Dichtefunktion lassen sich jetzt sowohl der Erwartungswert

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{8} \cdot \sqrt{0} + \frac{3}{8} \cdot \sqrt{1} + \frac{3}{8} \cdot \sqrt{2} + \frac{1}{8} \cdot \sqrt{3} = \frac{3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{8} \approx 1{,}12184$$

als auch die Varianz unmittelbar bestimmen

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \\ &= \left(\frac{1}{8} \cdot 0 + \frac{3}{8} \cdot 1 + \frac{3}{8} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 3\right) - \left(\frac{3 + 3\sqrt{2} + \sqrt{3}}{8}\right)^2 \\ &= \frac{33 - 9\sqrt{2} - 3\sqrt{3} - 3\sqrt{6}}{32} \\ &\approx 0{,}24148. \end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

Konstruieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ sowie eine dazu passende Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass zwar der Erwartungswert von X existiert aber keine Varianz.

Lösungsvorschlag

Da die Varianz einer Zufallsvariable über einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum stets existiert, muss unserer Konstruktion eine unendliche Ergebnismenge zugrunde liegen. Als Wahrscheinlichkeitsraum nutzen wir daher die natürlichen Zahlen mit Wahrscheinlichkeitsmaß $\Pr[n] = \frac{1}{2^n}$. Des Weiteren definieren wir die Zufallsvariable $X : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ als

$$X(n) = 2^n \cdot \frac{1}{n^2}.$$

Zunächst überzeugen wir uns davon, dass der Erwartungswert von X absolut konvergiert

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left| 2^n \cdot \frac{1}{n^2} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}.$$

Aus Analysis ist bekannt, dass jede hyperharmonische Reihe der Form $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ mit $p > 1$ konvergiert. Nachdem wir also nachgewiesen haben, dass der Erwartungswert von X existiert, untersuchen wir nun die Varianz, welche gegeben ist durch

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2.$$

Wir wissen bereits, dass $\mathbb{E}[X]^2$ endlich ist und müssen somit lediglich zeigen, dass $\mathbb{E}[X^2]$ nicht existiert. Durch Einsetzen und Umformen erhalten wir

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \left(2^n \cdot \frac{1}{n^2} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}.$$

Für $n \to \infty$ sieht man leicht, dass der Ausdruck $\frac{2^n}{n^4}$ unendlich groß wird. Gemäß dem Nullfolgenkriterium trifft dies auch für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$ zu, was wiederum bedeutet, dass für X keine Varianz existiert.

Tutoraufgabe 3

Spieler a und b spielen so lange Federball, bis einer der beiden zwei Ballwechsel mehr für sich entschieden hat als der andere. Dabei gibt die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}$ an, wie viele Ballwechsel insgesamt gespielt werden. Angenommen der Ausgang eines Ballwechsels ist unabhängig vom bisherigen Spielverlauf und Spieler a gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. Für welchen Wert von p ist die erwartete Anzahl an Ballwechseln maximal?

Hinweis: Nutzen Sie Satz 36 der Vorlesung.

Lösungsvorschlag

Sei E das Ereignis, dass das Spiel in zwei Ballwechseln entschieden wird. Das bedeutet, dass entweder a oder b zweimal in Folge gewinnen. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$\Pr[E] = p^2 + (1-p)^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

und der bedingte Erwartungswert $\mathbb{E}[X \mid E]$ ist 2. Sollte das Spiel nach den ersten beiden Ballwechseln noch nicht gewonnen sein, so sind a und b gleichauf. Die Wahrscheinlichkeit hierfür ist

$$\Pr[\Omega \setminus E] = 1 - \Pr[E] = -2p^2 + 2p.$$

Außerdem ist bei einem Gleichstand zwischen a und b die Ausgangssituation wiederhergestellt. Da die Ballwechsel unabhängig voneinander entschieden werden, gilt also

$$\mathbb{E}[X \mid \Omega \setminus E] = \mathbb{E}[X] + 2$$

Nach Satz 36 der Vorlesung können wir den Erwartungswert von X nun auflösen zu

$$\begin{aligned}
& & \mathbb{E}[X] &= \mathbb{E}[X \mid E] \cdot \Pr[E] + \mathbb{E}[X \mid \Omega \setminus E] \cdot \Pr[\Omega \setminus E] \\
\iff & & \mathbb{E}[X] &= 2 \cdot (2p^2 - 2p + 1) + (\mathbb{E}[X] + 2) \cdot (-2p^2 + 2p) \\
\iff & & \mathbb{E}[X] + 2p^2\mathbb{E}[X] - 2p\mathbb{E}[X] &= 2 \cdot (2p^2 - 2p + 1) + 2 \cdot (-2p^2 + 2p) \\
\iff & & \mathbb{E}[X] \cdot (2p^2 - 2p + 1) &= 2 \\
\iff & & \mathbb{E}[X] &= \frac{2}{2p^2 - 2p + 1}.
\end{aligned}$$

Nachdem die Parabel $2p^2 - 2p + 1$ ihr Minimum für $p = \frac{1}{2}$ annimmt, ist $\mathbb{E}[X]$ maximal wenn beide Spieler die gleichen Gewinnchancen haben. In diesem Fall beträgt die Anzahl der erwarteten Ballwechsel 4. Sollte p hingegen 0 oder 1 sein, so sind lediglich 2 Ballwechsel nötig. Somit bestätigt sich Intuition, dass Spieler mit ähnlichem Können länger brauchen um eine Entscheidung zu erzielen.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Gilbertgraph $G(n,p)$ mit n Knoten wird durch zufälliges Einfügen von ungerichteten Kanten zwischen Knotenpaaren gebildet. Dabei wird jedes Knotenpaar unabhängig mit Wahrscheinlichkeit p durch eine Kante verbunden. Wir betrachten den $G(4, \frac{1}{2})$ und definieren die Zufallsvariable $X : \Omega \to [4]$ als Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Bestimmen sie den Erwartungswert und die Varianz von X.

Erinnerung: Eine Zusammenhangskomponente bezeichnet eine inklusionsmaximale Teilmenge von Knoten in der jedes Knotenpaar über einen Pfad verbunden ist.

Lösungsvorschlag

In einem Graphen aus vier Knoten kann es maximal vier Zusammenhangskomponenten geben. Dieser Fall tritt genau dann ein, wenn alle vier Knoten isoliert sind und somit ihre eigne Zusammenhangskomponente bilden. Hierfür darf der Graph allerdings keine Kanten enthalten. Da es im $G(4, \frac{1}{2})$ insgesamt 6 mögliche Kanten gibt geschieht dies mit Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[X = 4] = \binom{6}{0} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{1}{64}.$$

Besteht der Graph aus einer Kante, so gibt es insgesamt drei Zusammenhangskomponenten. Fügt man jedoch eine weitere Kante ein, so reduziert sich die Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Die Wahrscheinlichkeit für drei Zusammenhangskomponenten ist folglich

$$\Pr[X = 3] = \binom{6}{1} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{6}{64}.$$

Für zwei Kanten ergeben sich stets zwei Zusammenhangskomponenten. Zusätzlich gibt es noch vier weitere Graphen mit jeweils drei Kanten, die ebenfalls zwei Zusammenhangskomponenten haben, nämlich jene, die aus einem Dreieck und einem isolierten Konten bestehen. Zusammen ergibt sich eine Wahrscheinlichkeit von

$$\Pr[X = 2] = \left(\binom{6}{2} + 4\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{19}{64}.$$

Alle verbliebenen Graphen bestehen aus einer einzigen Zusammenhangkomponente

$$\Pr[X = 1] = \left(\binom{6}{3} - 4 + \binom{6}{4} + \binom{6}{5} + \binom{6}{6}\right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^6 = \frac{38}{64}.$$

Mithilfe dieser Wahrscheinlichkeiten können wir den Erwartungswert wie folgt berechnen:

$$\mathbb{E}[X] = \frac{38}{64} + \frac{19}{64} \cdot 2 + \frac{6}{64} \cdot 3 + \frac{1}{64} \cdot 4 = \frac{49}{32} = 1{,}53125.$$

Auch die Varianz lässt sich nun leicht bestimmen

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{38}{64} + \frac{19}{64} \cdot 4 + \frac{6}{64} \cdot 9 + \frac{1}{64} \cdot 16 - \left(\frac{49}{32}\right)^2 = \frac{543}{1024} \approx 0{,}53027.$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien E_1, E_2 und E_3 drei nicht notwendigerweise unabhängige Ereignisse eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \Pr)$. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$ zählt die eintretenden Ereignisse. Bestimmen Sie jeweils eine untere und eine obere Schranke für $\Pr[X = 3]$ unter der Voraussetzung, dass der Erwartungswert von X gleich $\frac{3}{2}$ ist. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass Ihre Schranken optimal sind.

Lösungsvorschlag

Da die Wahrscheinlichkeit von Ereignissen nicht negativ sein kann, ist 0 eine triviale untere Schranke für $\Pr[X = 3]$. Tatsächlich handelt es sich hierbei auch um die bestmögliche Schranke die wir in diesem Fall angeben können. Um dies zu zeigen, betrachten wir folgendes Beispiel. Sei $\Omega = \{a, b\}$, wobei a und b gleich wahrscheinlich sind. Die Ereignisse E_1 und E_2 definieren wir als $\{a\}$, wohingegen E_3 die Menge $\{b\}$ ist. Da die drei Ereignisse nicht gleichzeitig eintreten können ist $\Pr[X = 3] = 0$. Andererseits treten zwei bzw. ein Ereignis jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein. Der Erwartungswert von X ist somit wie gefordert

$$\mathbb{E}[X] = 0 \cdot 0 + \frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + 0 \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Für die obere Schranke wählen wir den Wert $\frac{1}{2}$. Der folgende Wiederspruchsbeweis belegt, dass die Schranke gilt. Angenommen $\Pr[X = 3]$ wäre größer als $\frac{1}{2}$, so folgt

$$\mathbb{E}[X] = \left(\sum_{i=0}^{2} f_X(i) \cdot i \right) + f_X(3) \cdot 3 \geq f_X(3) \cdot 3 > \frac{3}{2},$$

was ein Widerspruch ist, da der Erwartungswert exakt $\frac{3}{2}$ sein muss. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass unsere obere Schranke optimal ist. Dazu nutzen wir den selben Wahrscheinlichkeitsraum wie für die untere Schranke und definieren E_1, E_2 und E_3 jeweils als $\{a\}$. Folglich treten alle drei Ereignisse entweder gemeinsam oder gar nicht ein. Beides geschieht mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Insbesondere ist der Wert von $\Pr[X = 3]$ gleich $\frac{1}{2}$. Außerdem ist der Erwartungswert von X gleich

$$\mathbb{E}[X] = \frac{1}{2} \cdot 0 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + \frac{1}{2} \cdot 3 = \frac{3}{2}.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Übungsleitung in Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie plant einen Multiple-Choice-Test. Dabei gibt es pro Aufgabe zwei verschiedene Kästchen, von denen entweder keins, eins oder beide angekreuzt werden müssen. Um eine möglichst faire Benotung der Aufgaben zu garantieren, erwägt die Übungsleitung mehrere Bewertungsschemen. Dafür nehmen wir an, dass ein Student mit Wissen $\kappa \in [0, 1]$ die Kästchen unabhängig und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\kappa+1}{2}$ korrekt ausfüllt.

1. Sei $X : \Omega \to \{0, 1\}$ ein Bewertungsschema, bei dem genau dann ein Punkt vergeben wird wenn beide Kästchen richtig ausgefüllt wurden. Anderenfalls wird die Aufgabe mit null Punkten bewertet. Bestimmen Sie den Erwartungswert von X pro Aufgabe in Abhängigkeit von κ.

2. Um zu verhindern, dass Studenten durch Zufall Punkte erhalten, ändern wir das Bewertungsschema so ab, dass für jede Aufgabe mit mindestens einem falsch ausgefüllten Kästchen ein Punkt abgezogen wird. Wie verhält sich der Erwartungswert dieser neuen Zufallsvariable $Y : \Omega \to \{-1, 1\}$ in Abhängigkeit von κ.

3. Die Übungsleitung entscheidet, dass ein faires Bewertungssystem das Wissen eines Studenten im Erwartungswert widerspiegeln sollte. Geben sie dementsprechend eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ an, deren Erwartungswert genau κ ist. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Konstruktion.

Lösungsvorschlag

Die Zufallsvariable X ist genau dann 1, wenn beide Kästchen richtig ausgefüllt wurden. Dies geschieht mit Wahrscheinlichkeit $(\frac{\kappa+1}{2})^2$. Da für alle anderen Elementarereignisse die Zufallsvariable X Wert 0 annimmt und diese demnach nicht zum Erwartungswert beitragen, erhalten wir

$$\mathbb{E}[X] = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2.$$

Man beachte, dass ein Student, der kein Wissen über den Vorlesungsstoff hat, bei diesem Bewertungsschema im Mittel ein Viertel der Punkte erhält. Um dies zu vermeiden hat Zufallsvariable Y bei einem oder zwei falsch ausgefüllten Kästchen Wert -1. Wir erhalten also als Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Y] = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2 - \left(1 - \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2\right) = \frac{(\kappa+1)^2}{2} - 1.$$

Ein Nachteil dieses Bewertungsschemas ist, dass der Erwartungswert für Studenten mit Wissen $\kappa < \sqrt{2} - 1$ negativ ist. Die Frage ist also, ob wir es schaffen ein System zu entwickeln dessen Erwartungswert genau κ ist. Sei Z hierfür wie folgt definiert. Sind beide Kästchen richtig ausgefüllt, so gibt es einen Punkt. Sollten hingegen beide falsch ausgefüllt worden sein, was mit einer Wahrscheinlichkeit von $(1 - \frac{\kappa+1}{2})^2$ geschieht, so wird ein Punkt abgezogen. In allen anderen Fällen werden 0 Punkte vergeben. Dieses Bewertungsschema ergibt Erwartungswert

$$\mathbb{E}[Z] = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2 - \left(1 - \frac{\kappa+1}{2}\right)^2 = \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{\kappa+1}{2}\right)^2 + 2 \cdot \frac{\kappa+1}{2} - 1 = \kappa,$$

was die geforderte Bedingung erfüllt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten eine beliebige Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$. Des Weiteren sei $E \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Die bedingte Varianz $\mathrm{Var}[X \mid E]$ ist definiert als $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid E])^2 \mid E]$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Var}[X \mid E] = \mathbb{E}[X^2 \mid E] - \mathbb{E}[X \mid E]^2$ gilt.

Lösungsvorschlag

Bei dieser Aufgabe handelt es sich um eine Verallgemeinerung von Satz 39 der Vorlesung. Unser Beweis orientiert sich daher am Vorlesungsskript. Gemäß der Definition von bedingter Varianz und Erwartungswert können wir $\mathrm{Var}[X \mid E]$ auflösen zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X \mid E] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid E])^2 \mid E] \\
&= \sum_{x \in W_X} (x - \mathbb{E}[X \mid E])^2 \cdot f_{X|E}(x) \\
&= \sum_{x \in W_X} (x^2 - 2x\mathbb{E}[X \mid E] + \mathbb{E}[X \mid E]^2) \cdot f_{X|E}(x) \\
&= \sum_{x \in W_X} x^2 f_{X|E}(x) - 2x\mathbb{E}[X \mid E] f_{X|E}(x) + \mathbb{E}[X \mid E]^2 f_{X|E}(x).
\end{aligned}$$

Durch geschicktes Umformen lässt sich die Summe nun in die folgenden drei Terme aufspalten

$$\left(\sum_{x \in W_X} f_{X|E}(x) \cdot x^2 \right) - 2\mathbb{E}[X \mid E] \cdot \left(\sum_{x \in W_X} f_{X|E}(x) \cdot x \right) + \mathbb{E}[X \mid E]^2 \cdot \left(\sum_{x \in W_X} f_{X|E}(x) \right).$$

Man beachte, dass die ersten beiden Summen jeweils genau der Definition des bedingten Erwartungswertes von X^2 bzw. X entsprechen, während die dritte Summe 1 ist. Letztendlich erhalten wir also

$$\mathbb{E}[X^2 \mid E] - 2\mathbb{E}[X \mid E] \cdot \mathbb{E}[X \mid E] + \mathbb{E}[X \mid E]^2 \cdot 1 = \mathbb{E}[X^2 \mid E] - \mathbb{E}[X \mid E]^2,$$

was unseren Beweis vervollständigt. An dieser Stelle sei angemerkt, dass wir lediglich einen endlichen Wahrscheinlichkeitsraum betrachten und unsere Summen folglich beliebig Umordnen dürfen. Für allgemeine diskrete Wahrscheinlichkeitsräume setzt dies zunächst die Existenz von $\mathbb{E}[X^2|E]$ sowie $\mathbb{E}[X|E]$ voraus und erfordert mehr Sorgfalt.