Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungen der Mittelklausur
11. Juni 2010

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

| Name | Vorname | Studiengang | Matrikelnummer |
|---|---|---|---|
| ................ | ................ | ☐ Diplom ☐ Inform.<br>☐ Bachelor ☐ BioInf.<br>☐ Lehramt ☐ WirtInf. | ................ |

| Hörsaal | Reihe | Sitzplatz | Unterschrift |
|---|---|---|---|
| ................ | ................ | ................ | ................ |

Code:

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | | |

## Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | Σ | Korrektor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Erstkorrektur | | | | | | | |
| Zweitkorrektur | | | | | | | |

## Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Wir werfen 2 faire Würfel. Die erhaltenen Augenzahlen seien $a$ und $b$. Dann sind die Ereignisse $a = b$ und $|a - b| = 1$ gleichwahrscheinlich.
2. 3 disjunkte Ereignisse sind stets unabhängig.
3. Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine diskrete Zufallsvariable.
   Falls $\mathbb{E}[X^2] = 0$, dann gilt $X(\omega) = 0$ für alle $\omega \in \Omega$.
4. Es gibt keine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit dem Erwartungswert 0.
5. Sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable, die nur Werte aus $\mathbb{N}_0$ annimmt.
   Dann gilt $1 \leq \Pr[X = 0] + \mathbb{E}[X]$.
6. Es gibt keine Zufallsvariable $X$ mit wahrscheinlichkeitserzeugender Funktion $G_X(s) = \frac{1}{1-s}$ .
7. Sei $G_X(s) = \frac{1+s}{2}$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer Zufallsvariablen $X$. Dann gilt $\Pr[X = 2] = 0$.
8. Zur Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1-|x|$ für $-1 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 0$ für alle übrigen $x \in \mathbb{R}$ gibt es eine stetige Zufallsvariable $X$, so dass $f = f_X$ gilt.

---

**Lösungsvorschlag**

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Falsch!
2. Falsch! Sie sind abhängig, falls sie nicht leer sind.
3. Falsch!
4. Falsch! Für $\lambda = 0$ gilt $\sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} = 1$.
5. Wahr! Folgt aus $\Pr[X \geq 1] \leq \mathbb{E}[X]$ mit Markov-Ungleichung.
6. Wahr! Sie Summe der Koeffizienten von $s^k$ in $G_X(s) = \sum_{k=0}^{\infty} s^k$ ist nicht gleich 1.
7. Wahr! Der Koeffizient von $s^2$ ist 0.
8. Wahr! Integration über ganz $\mathbb{R}$ liefert den Wert 1.

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse $E$ bezeichnen wir $\Omega \setminus E$ mit $\overline{E}$.

1. Wir beobachten Ereignisse $A$ und $B$ und wissen, dass $A$ mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[A] = \frac{1}{10}$ eintritt. Die bedingte Wahrscheinlichkeit, dass $B$ eintritt, wenn $A$ bzw. $\overline{A}$ eingetreten ist, sei $\Pr[B|A] = \frac{5}{9}$ bzw. $\Pr[B|\overline{A}] = \frac{1}{9}$.

   Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$, d. h. die Wahrscheinlichkeit, dass $A$ oder $B$ eintritt, als Bruchzahl!

2. Seien $C$ und $X$ Ereignisse aus $W$ mit den bedingten Wahrscheinlichkeiten $\Pr[C|X] = \frac{2}{9}$, $\Pr[X|C] = \frac{1}{10}$ und $\Pr[C|\overline{X}] = \frac{2}{3}$.

   Berechnen Sie $\Pr[X]$.

---

**Lösungsvorschlag**

1. Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} \Pr[B] &= \Pr[B|A] \cdot \Pr[A] \;+\; \Pr[B|\overline{A}] \cdot \Pr[\overline{A}] && (1\text{ P.}) \\ &= \tfrac{5}{9} \cdot \tfrac{1}{10} \;+\; \tfrac{1}{9} \cdot \tfrac{9}{10} && (\tfrac{1}{2}\text{ P.}) \\ &= \tfrac{7}{45}\,. \end{aligned}$$

   Siebformel:

$$\begin{aligned} \Pr[A \cup B] &= \Pr[A] \;+\; \Pr[B] \;-\; \Pr[A \cap B] && (1\text{ P.}) \\ &= \tfrac{1}{10} \;+\; \tfrac{7}{45} \;-\; \tfrac{1}{18} && (\tfrac{1}{2}\text{ P.}) \\ &= \tfrac{1}{5}\,. \end{aligned}$$

2. Satz von Bayes:

$$\Pr[X|C] = \frac{\Pr[C|X] \cdot \Pr[X]}{\Pr[C|X] \cdot \Pr[X] \;+\; \Pr[C|\overline{X}] \cdot \Pr[\overline{X}]} \qquad (2\text{ P.})$$

   Einsetzen:

$$\frac{1}{10} = \frac{\frac{2}{9} \cdot \Pr[X]}{\frac{2}{9} \cdot \Pr[X] \;+\; \frac{2}{3} \cdot (1 - \Pr[X])} \qquad (1\text{ P.})$$

   Auflösung nach $\Pr[X]$:

$$\Pr[X] = \tfrac{1}{4}\,. \qquad (2\text{ P.})$$

## Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ mit $\Omega = [1, 60] \subseteq \mathbb{N}$, so dass alle Ergebnisse aus $\Omega$ gleichwahrscheinlich sind. Seien $X_1$ und $X_2$ Indikatorvariablen über $W$, deren Verteilung durch die folgenden Ereignisse gegeben ist:

$$A := X_1^{-1}(1) \;=\; [1, 15] \quad \text{und} \quad B := X_2^{-1}(1) \;=\; [13, 24]\,.$$

1. Zeigen Sie, dass die Variablen $X_1$ und $X_2$ unabhängig sind.
2. Geben Sie eine Indikatorvariable $X_3$ mit $\Pr[X_3 = 1] = \frac{1}{3}$ an, so dass die Variablen $X_1$, $X_2$, $X_3$ unabhängig sind.
3. Sei $X = X_1 + X_2 + X_3$ mit $X_3$ wie vorausgehend. Berechnen Sie $\Pr[X = 1]$.

Hinweis: $[1, n] = \{i \in \mathbb{N}\,;\, 1 \leq i \leq n\}$.

---

**Lösungsvorschlag**

1. $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{5}$. (1 P.)

$$\begin{aligned}
\Pr[A \cap B] &= \Pr[[13, 15]] = \tfrac{1}{20} = \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{5} = \Pr[A] \cdot \Pr[B]\,, && (\tfrac{1}{2}\text{ P.})\\
\Pr[A \cap \overline{B}] &= \Pr[[1, 12]] \;\;= \tfrac{1}{5} \;= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{4}{5} = \Pr[A] \cdot \Pr[\overline{B}]\,, && (\tfrac{1}{2}\text{ P.})\\
\Pr[\overline{A} \cap B] &= \Pr[[16, 24]] = \tfrac{3}{20} = \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{1}{5} = \Pr[\overline{A}] \cdot \Pr[B]\,, && (\tfrac{1}{2}\text{ P.})\\
\Pr[\overline{A} \cap \overline{B}] &= \Pr[[25, 60]] = \tfrac{3}{5} \;= \tfrac{3}{4} \cdot \tfrac{4}{5} = \Pr[\overline{A}] \cdot \Pr[\overline{B}]\,. && (\tfrac{1}{2}\text{ P.})
\end{aligned}$$

2. Man nehme aus allen 4 Mengen $A \cap B$, $A \cap \overline{B}$, $\overline{A} \cap B$ und $\overline{A} \cap \overline{B}$ ein Drittel der Elemente, (1 P.)

   z. B. $C = [9, 13] \cup [22, 36]$, (1 P.)

   und setze $X_3^{-1}(1) = C$. (1 P.)

3. Mit $\Pr[A] = \frac{1}{4}$, $\Pr[B] = \frac{1}{5}$, $\Pr[C] = \frac{1}{3}$ gilt wegen totaler Wahrscheinlichkeit zusammen mit Unabhängigkeit der Variablen

   (1 P.)

$$\begin{aligned}
\Pr[X = 1] &= \Pr[A \cap \overline{B} \cap \overline{C}] + \Pr[\overline{A} \cap B \cap \overline{C}] + \Pr[\overline{A} \cap \overline{B} \cap C]\\
&= \frac{1}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} \;+\; \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{3} \;+\; \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{3}\\
&= \frac{26}{60}\,.
\end{aligned}$$

(1 P.)

## Aufgabe 4 (8 Punkte)

Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$ eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p$. Sei $\quad Y(\omega) \;=\; (X(\omega) \mod 2) \quad$ für alle $\omega \in \Omega$.

1. Geben Sie $W_X$ und $W_Y$ an.
2. Beweisen Sie
$$\Pr[Y\!=\!0] \;=\; \frac{1-p}{2-p}\,.$$
3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion $f_Y$ für $p = \frac{1}{3}$.

---

**Lösungsvorschlag**

1. $W_X = \mathbb{N}$. $\hfill (\frac{1}{2}$ P.)

   $W_Y = \{x \bmod 2\,;\, x \in \mathbb{N}\} = \{0,1\}\,.$ $\hfill (\frac{1}{2}$ P.)

2. 
$$\begin{aligned}
\Pr[Y=0] &= \sum_{i\in\{2k;k\in\mathbb{N}\}}^{\infty} p(1-p)^{i-1} && \text{(1 P.)}\\
&= p(1-p)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)^{2k} && \text{(1 P.)}\\
&= p(1-p)\cdot\sum_{k=0}^{\infty}[(1-p)^2]^k && \text{(1 P.)}\\
&= p(1-p)\cdot\frac{1}{1-(1-p)^2} && \text{(1 P.)}\\
&= \frac{1-p}{2-p}\,.
\end{aligned}$$

3. Es gilt $\Pr[Y=0]+\Pr[Y=1]=1$ (1 P.)

   und damit $\Pr[Y=0]=\frac{2}{5}$, $\Pr[Y=1]=\frac{3}{5}$.

   Wir erhalten
$$f_Y(i) = \begin{cases} \frac{2}{5} : i=0\\ \frac{3}{5} : i=1\\ 0 : \text{sonst}\end{cases}$$

(2 P.)

## Aufgabe 5 (8 Punkte)

Die Unfallhäufigkeit auf Autobahnen hängt u. a. von den gefahrenen Geschwindigkeiten ab. Wir betrachten für $10^4 = 10000$ Autos 2 Geschwindigkeitsklassen $s$ und $l$ mit $|s| = 1000$ und $|l| = 9000$ Autos. Die Unfallwahrscheinlichkeit in einem bestimmten Streckenabschnitt sei für die Autos der $s$-Klasse $\frac{11}{1000}$ bzw. der $l$-Klasse $\frac{1}{1000}$.
Ein Unfall werde für jedes der Autos der $s$- bzw. $l$-Klasse mit einer Zufallsvariablen $X_i$ bzw. $Y_j$ mit $i \in [1000]$ bzw. $j \in [9000]$ angezeigt. Die Anzahl der Unfälle insgesamt werde angezeigt durch die Zufallsvariable $U$.
Wir nehmen sämtliche Unfälle als unabhängig an.

1. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[U]$ und die Varianz $\mathrm{Var}[U]$ als Dezimalzahl ggf. auf 2 Nachkommastellen genau.

   Begründen Sie die Gültigkeit Ihrer Berechnungsschritte!

2. Geben Sie mithilfe der Chebyshevschen Ungleichung eine möglichst kleine obere Schranke $k$ für die Wahrscheinlichkeit $\Pr[U \geq 25]$ an, so dass also $\Pr[U \geq 25] \leq k$ gilt.

3. Geben Sie nun mithilfe der Abschätzung nach Chernoff eine obere Schranke $k$ für $\Pr[U \geq 25]$ an. Stellen Sie $k$ als arithmetischen Ausdruck inklusive Exponentialfunktion, aber ohne Variablen dar.

---

**Lösungsvorschlag**

1. Seien $X = \sum_{i=1}^{1000} X_i$ und $Y = \sum_{j=1}^{9000} Y_j$. ($\frac{1}{2}$ P.)

   $X$ bzw. $Y$ sind binomialverteilt mit $p_x = \frac{11}{1000}$ bzw. $p_y = \frac{1}{1000}$ ($\frac{1}{2}$ P.)

   Es gilt $\mathbb{E}[X] = 1000 \cdot p_x = 11$
   bzw. $\mathbb{E}[Y] = 9000 \cdot p_y = 9$ (1 P.)

   und $\mathrm{Var}[X] = 1000 \cdot p_x(1 - p_x) = 10,879$
   bzw. $\mathrm{Var}[Y] = 9000 \cdot p_y(1 - p_y) = 8,991.$ (1 P.)

   Dann gilt $U = X + Y$. Wegen Linearität bzw. Unabhängigkeit der Unfälle folgt
   $\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] = 20,$
   $\mathrm{Var}[U] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] = 19,88.$ (1 P.)

2. $$\begin{aligned} \Pr[U \geq 25] &= \Pr[U - 20 \geq 5] \\ &\leq \Pr[U - 20 \geq 5] + \Pr[20 - U \geq 5] \\ &= \Pr[|U - 20| \geq 5] \\ &\leq \frac{\mathrm{Var}(U)}{5^2} = \frac{19,88}{25} = 0,7952. \end{aligned}$$ (2 P.)

3. Seien $\delta = \frac{1}{4}$ und $\mu = \mathbb{E}[U]$. Dann gilt $(1 + \delta)\mu = 25$. (1 P.)

   $$\begin{aligned} \Pr[U \geq 25] &\leq \left( \frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{(1+\delta)}} \right)^{\mu} \\ &= \left( \frac{e^{\frac{1}{4}}}{(1+\frac{1}{4})^{(1+\frac{1}{4})}} \right)^{20}. \end{aligned}$$ (1 P.)