Technische Universität München (I7)
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund

Sommer 2013
14. Mai 2013

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 5

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 22.05.2013 um 12:00

Vereinfachen Sie Terme soweit wie möglich. Unnötig komplizierte Antworten werden nicht gewertet.

Aufgabe 5.1 — 2P+2P

(a) Führen Sie $\mathbb{E}[\max(X,Y)]$ auf $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[\min(X,Y)]$ zurück.

Hinweis: X, Y sind nicht als unabhängig vorausgesetzt.

(b) Seien X, Y unabhängig mit $X \sim \text{Geo}(4/5)$ und $Y \sim \text{Geo}(1/5)$.

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\max(X,Y)]$ unter Verwendung von (a).

Aufgabe 5.2 — 5P

Es seien U, V, W, X, Y, Z unabhängige ZV mit $U \sim \text{Geo}(1/5)$, $V \sim \text{Bin}(10, 4/5)$, $W \sim \text{Ber}(4/5)$, $X \sim \text{NegativBin}(5, 4/25)$, $Y \sim \text{Bin}(15, 4/5)$ und $Z \sim \text{Geo}(4/5)$.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[(\max(U,Z) + Y)^{W^3} \cdot (2 \cdot W \cdot V + X^{2-2W})]$.

Hinweis: Geben Sie in jedem Rechenschritt an, welches Resultat aus der Vorlesung Sie verwendet haben.

Aufgabe 5.3 — 2P+3P

Sei N die Anzahl der Würfe, die Sie brauchen, bis Sie mit einem fairen Würfel das erste Mal vier Sechsen hintereinander erhalten. (Vgl. VL)

Bestimmen Sie $\mathbb{E}[N]$ und $\text{Var}[N]$.

Hinweis: Leiten Sie jeweils ein LGS entsprechend TA 4.2 her. Vereinfachen Sie dieses soweit wie möglich. Geben Sie dann nur die Lösung an.

Aufgabe 5.4 — 3P+3P

Seien A, B, C Ereignisse in einem diskreten W-Raum mit $C \neq \emptyset$.

A, B heißen bedingt unabhängig bzgl. C, falls $\Pr[A \cap B \mid C] = \Pr[A \mid C] \cdot \Pr[B \mid C]$.

(a) Geben Sie einen diskreten W-Raum und konkrete Ereignisse A, B, C an, so dass A, B bzgl. C bedingt unabhängig, jedoch A, B nicht unabhängig sind.

(b) Zeigen oder widerlegen Sie: Sind A, B unabhängig, dann sind Sie bzgl. jedem beliebigen $C \neq \emptyset$ bedingt unabhängig.

Tutoraufgaben: Besprechung am 22/23/28.05.2013.

Am 29.05. entfallen alle Übungen.

Aufgabe 5.1

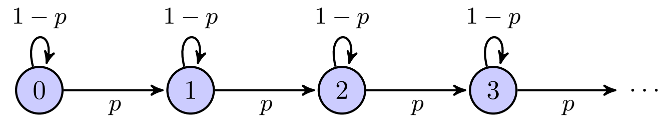
Es sei X eine ZV mit Wertebereich $\mathbb{N} - \{0\}$ und $\Pr[X = 1] \in (0, 1)$.

Weiterhin sei X gedächtnislos, d.h. für alle $k, l \in \mathbb{N}$ gilt: $\Pr[X > k + l \mid X > k] = \Pr[X > l]$.

Bestimmen Sie die Dichte von X.

Aufgabe 5.2

Betrachten Sie das folgende „unendliche" Markov-Diagramm (Q, T, δ) mit $Q = \mathbb{N}$, $T = \{(i, i), (i, i + 1) \mid i \in \mathbb{N}\}$, $\delta(i, i) = 1 - p$ und $\delta(i, i + 1) = p$ für ein $p \in (0, 1)$:



Sei Z_k wieder die ZV, welchen den Zustand angibt, in dem man sich nach k Schritten befindet, wenn man in Zustand 0 beginnt.

(a) Bestimmen Sie $\Pr[Z_k = n]$.

(b) Bestimmen Sie $\Pr[Z_k = n \wedge Z_{k-1} < n]$.

(c) Seien $T_1, T_2, \ldots$ unabhängige ZVn mit $T_i \sim \mathrm{Geo}(p)$, $t \in (0, \infty)$ und $N_t := \max\{n \in \mathbb{N} \mid T_1 + T_2 + \ldots + T_n \leq t\}$.

Bestimmen Sie die Dichte von N_t.

Aufgabe 5.3

Prof. Evilsparza hat bei einer Umfrage in seiner Vorlesung festgestellt, dass er sein mickriges Professorengehalt durch das Verkaufen einer gewissen „Substanz" während der Vorlesung aufbessern kann. Um seinen Gewinn zu maximieren, will er die „Substanz" selbst herstellen.

Nachdem die Produktion angelaufen ist, stellt er fest, dass er in einem Zeitraum von $t \in \mathbb{R}$ Stunden im Mittel $0.1 \cdot t$ Mol der „Substanz" gewinnt.

Er interessiert sich nun für die ZV, welche die produzierte Menge in Mol nach t Stunden angibt. Er unterteilt den Zeitraum $(0, t]$ in n gleich große Zeitintervalle $(t \cdot \frac{j-1}{n}, t \cdot \frac{j}{n}]$ und lässt die ZV $X_{n,j}$ zählen, wie viele Moleküle der „Substanz" im Zeitraum $(t \cdot \frac{j-1}{n}, t \cdot \frac{j}{n}]$ produziert wurden. Er geht davon aus, dass die $X_{n,j}$ unabhängig und identisch verteilt sind.

(a) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X_{n,j}]$ unter diesen Annahmen.

Er nimmt weiter an, dass in jedem Zeitintervall mit derselben W'keit $p_n := \Pr[X_{n,j} \geq 1]$ *mindestens* ein Molekül erzeugt wird.

(b) Sei S_n die ZV, welche die Zeitintervalle zählt, in welchen *mindestens* ein Molekül erzeugt wird.

Bestimmen Sie die Dichte von S_n.

Zeigen Sie: $p_n \leq \lambda/n$.

Schließlich verwendet er noch die Annahme, dass für großes n es höchst unwahrscheinlich ist, dass mehrere Moleküle im selben Zeitintervall entstehen. Er setzt daher $\Pr[X_{n,j} \geq k] = p_n^k$ für $k \in \mathbb{N}$ an.

(c) Bestimmen Sie p_n.

(d) Zeigen Sie zunächst $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$.

Bestimmen Sie dann $\lim_{n\to\infty} \Pr[S_n = k]$.

Hinweis: Das Resultat aus der Vorlesung gilt auch für $\lim_{n\to\infty} n \cdot p_n = \lambda$

(e) Zeigen Sie nun $\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\bigcup_{j=1}^{n} X_{n,j} \geq 2\right] = 0$.

Bestimmen Sie damit $\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\sum_{j=1}^{n} X_{n,j} = k\right]$.