Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 3
16. Mai 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.“

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

2. Eine Urne enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle. Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

   Wie viele Bälle enthielt die Urne zu Beginn?

   (Wir setzen entsprechende Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit voraus).

Lösungsvorschlag

1. Es gibt keinen anderen logischen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Ausführung eines Experiments und der jeweils nächsten Ausführung des Experiments als denjenigen, dass wiederholte Ausführungen denselben Annahmen über die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen unterliegen.

   Die Aussage ist auch deshalb nicht sinnvoll, weil Wahrscheinlichkeiten nicht festgestellt werden (auch nicht auf der Grundlage der Ausführung von Experimenten), sondern Annahmen über die Natur einer experimentellen Anordnung bzw. eines Algorithmus sind.

   Dies steht nicht im Widerspruch dazu, dass die Ergebnisse einer wiederholten Ausführung von Experimenten auch zu Änderungen von Wahrscheinlichkeitsannahmen bzw. Räumen führen können.

2. Sei n die Anzahl der schwarzen Bälle in der Urne. Dann enthält die Urne $3n$ Bälle. Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch $3n - 2$ Bälle in der Urne, von denen n Stück schwarz sind.

   Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen, ist einerseits $\frac{n}{3n-2}$ und andererseits $\frac{2}{5}$. Wir Lösen die Gleichung $\frac{n}{3n-2} = \frac{2}{5}$ nach n auf und erhalten $n = 4$.

   Antwort: Zu Beginn enthielt die Urne 12 Bälle.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 120\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ durch 3 oder 5 (oder beides) teilbar ist! Die Auswahl aus W sei dabei Laplace-verteilt.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist eine (Laplace)-zufällig aus einer Wertemenge $W = \{1, 2, \ldots, 120\}$ ausgewählte Zahl $x \in W$ nicht durch $4, 8$ und 12 teilbar?

Lösungsvorschlag

1. Sei A_i das Ereignis der Teilbarkeit durch i.

   Die Menge der Zahlen von 1 bis 120 teilt sich in 3 disjunkte, gleichgroße Teilmengen von Zahlen, die mit Rest 0, 1 bzw. 2 teilbar sind. Das Ereignis A_3, d. h. "teilbar durch 3" ist also eine Menge von 40 Ergebnissen von jeweils der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{120}$. Mithin gilt

   $$\Pr[A_3] = \frac{1}{3}, \quad \text{entsprechend} \quad \Pr[A_5] = \frac{1}{5} \quad \text{und} \quad \Pr[A_3 \cap A_5] = \Pr[A_{15}] = \frac{1}{15}.$$

   Die Siebformel liefert

   $$\begin{aligned} \Pr[A_3 \cup A_5] &= \Pr[A_3] + \Pr[A_5] - \Pr[A_3 \cap A_5] \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{15} = \frac{7}{15}. \end{aligned}$$

2. Eine Zahl, die nicht durch 4 teilbar ist, ist auch nicht durch 8 oder 12 teilbar. Es gilt also

   $$\bar{A}_4 = \bar{A}_4 \cap \bar{A}_8 \cap \bar{A}_{12}.$$

   Wegen $\Pr[A_4] = \frac{1}{4}$ folgt

   $$\Pr[\bar{A}_4 \cap \bar{A}_8 \cap \bar{A}_{12}] = 1 - \Pr[A_4] = \frac{3}{4}.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die folgende Tabelle zeige die Wahrscheinlichkeit $\Pr[k]$ an, dass eine Familie k Kinder hat (wir vernachlässigen die Wahrscheinlichkeit höherer Kinderzahlen).

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$Pr[k]$	0.3	0.2	0.2	0.13	0.09	0.04	0.025	0.01	0.004	0.001

Wenn Jungen- und Mädchengeburten gleich wahrscheinlich sind, wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit, dass ein zufällig ausgewähltes Mädchen mindestens einen Bruder hat?

Lösungsvorschlag

Wir nehmen endliche Mengen Ω_K und Ω_F von Kindern bzw. Familien an. Mit Laplace-Wahrscheinlichkeit $\Pr_K[x] = \frac{1}{|\Omega_K|}$ bzw. $\Pr_F[y] = \frac{1}{|\Omega_F|}$ werden Kinder $x \in \Omega_K$ bzw. Familien $y \in \Omega_F$ ausgewählt.

Jedes Kind gehört genau einer Familie an. Die entsprechende (nicht notwendig surjektive) Abbildung sei $f : \Omega_K \to \Omega_F$. Durch f ist gleichzeitig eine Abbildung $kz : \Omega_F \to \mathbb{N}_0$ gegeben, die für jede Familie y die Kinderzahl $kz(y)$ angibt. Es gilt $kz(y) = |f^{-1}(y)|$. Das Ereignis, dass zu einer Familie genau k Kinder gehören, ist

$$K_k = \{y \in \Omega_F \,;\, kz(y) = k\} \subseteq \Omega_F$$

und wir bezeichnen es mit $[kz = k]$. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr_F[kz = k]$ berechnet sich einerseits durch $\frac{|K_k|}{|\Omega_F|}$ und ist andererseits laut Tabelle der Aufgabenstellung gegeben durch $\Pr[k]$. Wir erhalten also

$$\Pr_F[kz = k] = \Pr[k] = \frac{|K_k|}{|\Omega_F|}\,.$$

Das Ereignis, dass ein Kind einer Familie mit k Kindern angehört, ist gegeben durch

$$F_k = \{x \in \Omega_K \,;\, kz(f(x)) = k\} = \{x \in \Omega_K \,;\, f(x) \in K_k\} \subseteq \Omega_K$$

und wir bezeichnen es mit $[kzf = k]$. Es gilt $|[kzf = k]| = |K_k| \cdot k$ und es folgt

$$\Pr_K[kzf = k] = \frac{|K_k| \cdot k}{|\Omega_K|}\,.$$

Im Mittel hat eine Familie die folgende Anzahl von Kindern:

$$m = \sum_k k \cdot Pr[k] = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.2 + \cdots + 9 \cdot 0.001 = 1.811\,.$$

Daraus folgt $|\Omega_K| = |\Omega_F| \cdot m = |\Omega_F| \cdot 1.811$. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebig ausgewähltes Kind aus einer Familie mit k Kindern stammt, ist also

$$\Pr_K[kzf = k] \;=\; \frac{|K_k| \cdot k}{|\Omega_F| \cdot m} = \frac{\Pr[k] \cdot k}{1.811}\,.$$

Die Annahme, daß Mädchen- und Jungengeburten gleich wahrscheinlich sind, soll insbesondere bedeuten, daß in jeder Familie mit k Kindern Mädchen und Jungen gleich wahrscheinlich sind. Daraus folgt, daß auch die Wahrscheinlichkeit, dass ein Mädchen aus einer Familie mit k Kindern stammt, gleich der Wahrscheinlichkeit ist, dass ein Kind aus einer Familie mit k Kindern stammt:

$$\begin{aligned} Pr[\text{Mädchen aus k Kinder Familie}] &= Pr[\text{Kind aus k Kinder Familie} \mid \text{Kind ist Mädchen}] \\ &= \frac{k \cdot Pr[k]}{m}\,. \end{aligned}$$

Wenn ein Mädchen einer Familie mit $i \geq 1$ Kindern angehört, dann gilt

$$Pr[\text{Mädchen hat Bruder} \mid \text{M. aus } i \text{ Kinder Fam.}] =$$

$$1 - Pr[\text{Alle Geschwister Mädchen} \mid \text{M. aus } i \text{ Kinder Fam.}] = 1 - \frac{1}{2^{i-1}}.$$

Mit dem Satz der totalen Wahrscheinlichkeit folgt daher

$$Pr[\text{Mädchen hat Bruder}] =$$

$$\sum_i Pr[\text{Mädchen hat Bruder} \mid \text{M. aus } i \text{ Kinder Fam.}] \cdot Pr[\text{M. aus } i \text{ Kinder Fam.}] =$$

$$= 0 \cdot \frac{1 \cdot Pr[1]}{m} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot Pr[2]}{m} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3 \cdot Pr[3]}{m} + \cdots + \frac{255}{256} \cdot \frac{9 \cdot Pr[9]}{m} \approx 69\%\,.$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir wollen mit einem Test feststellen, mit welcher Wahrscheinlichkeit eine bestimmte infektiöse Krankheit vorliegt, wenn der Test positiv war. Die Krankheit trete bei Menschen mit der Häufigkeit 10^{-5} auf. Bei gesunden Menschen sei der Test mit Wahrscheinlichkeit $0,001$ positiv, bei schon erkrankten Menschen sei der Test in 95% der Fälle positiv.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei einem positiv ausgefallenen Test keine Infektion vorliegt?

Lösungsvorschlag

Es seien I bzw. T das Ereignis "Infektion" bzw. "Testergebnis positiv". Dann gilt

$$\Pr[I] = 10^{-5}, \quad \Pr[\bar{I}] = 1 - 10^{-5}, \quad \Pr[T|I] = 0,95, \quad \Pr[T|\bar{I}] = 0,001\,.$$

Mit dem Satz von Bayes folgt

$$\Pr[I|T] = \frac{\Pr[T|I] \cdot \Pr[I]}{\Pr[T|I] \cdot \Pr[I] + \Pr[T|\bar{I}] \cdot \Pr[\bar{I}]} = 0,009411\ldots\,.$$

und

$$Pr[\bar{I}|T] = 0,990589\ldots\ \ .$$

__Hinweis:__ Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Thema sind unabhängige Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert. Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.

  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. Beweis!

- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i. Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. Beweis!

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

   In welchem Zusammenhang steht diese Aufgabe mit Hausaufgabe 1 von Blatt 1?

Lösungsvorschlag

(Beachten Sie die Korrektur des $(k+1)$ten Schrittes, die in der Zentralübung am Beispiel $k = 2$ vorgeführt wurde.)

Ähnlich wie bei linear unabhängigen Vektoren bezieht sich der Begriff der Unabhängigkeit stets auf eine Menge von Elementen. Insbesondere ist eine Menge S von Ereignissen genau dann unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $X \subseteq S$ gilt

$$\Pr\left[\bigcap_{A \in X} A\right] = \prod_{A \in X} \Pr[A]\,.$$

1. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ wird mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet.

$$\begin{aligned}
\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s]\cdot\Pr[A^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1}\cdot\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

1. Schritt:
Im Fall einer einelementigen Ereignismenge $\{A_1\}$ haben wir nur für $X = \{A_1\}$ die Gleichung $\Pr[\bigcap_{A\in\{A_1\}} A] = \prod_{A\in\{A_1\}} \Pr[A]$ zu beweisen, die trivialerweise gilt.
2. Schritt:
Die Menge der Durchschnitte A^s mit $s = (s_1, \ldots, s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine 2^k-Partition von Ω. Bei der Konstruktion eines Ereignisses A_{k+1}, so dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen A^s in konstantem Verhältnis p_{k+1} zu $1-p_{k+1}$.

Wir gehen nach Lemma 23 der Vorlesung vor und zeigen für alle $s \in \{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung $\Pr[A^s] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]$.

Falls $s_{k+1} = 1$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap A_{k+1} = B^{(s_1,\ldots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= p_{k+1}\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \;=\; \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.
\end{aligned}$$

Falls $s_{k+1} = 0$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap \overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= (1-p_{k+1})\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \;=\; \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.
\end{aligned}$$

2. Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$. Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

   $\underline{\text{Sei } A = A_1 = [1, 12]\text{. Dann gilt } \Pr[A] = \tfrac{1}{2}.}$

   Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

   Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$. Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

   $\underline{\text{Wir setzen } B = A_2 \text{ und erhalten } \Pr[B] = \tfrac{1}{3}.}$

   Wir haben nun die Partition

$$\begin{aligned} A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 &&= [9, 12]\,, \\ A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 &&= [13, 16]\,, \\ A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} &&= [1, 8]\,, \\ A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} &&= [17, 24]\,. \end{aligned}$$

   Seien $B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$ und $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.
   Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

   $\underline{\text{Wir setzen } C = A_3 \text{ und erhalten } \Pr[C] = \tfrac{1}{4}.}$

   Die Menge aller Vereinigungen von Durchschnitten A^s bildet eine Boolsche Algebra.

Tutoraufgabe 1

Für alle $\omega = (\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega = \{0,1\}^n$ mit $n \geq 2$ sei $Pr[\omega] = 2^{-n}$. Wir definieren die $n+1$ Ereignisse $A_i := \{\omega \in \Omega \ ; \ \omega_i = 1\}$ und $B := \{\omega \in \Omega \ ; \ \sum_i \omega_i \text{ ist ungerade}\}$ sowie die Ereignismengen

$$F_1 = \{A_1, \ldots, A_n, B\}, \qquad F_2 = \{A_1, \ldots, A_n\}, \qquad F_3 = \{A_2, \ldots, A_n, B\}.$$

Welche dieser Mengen sind unabhängig? Beweis!

Hinweis: Nutzen Sie das in Vorbereitungsaufgabe 1 definierte Verfahren.

Lösungsvorschlag

Zunächst stellen wir $\Pr[B] = \frac{1}{2}$ fest. Außerdem gilt $\Pr[A_i] = \frac{1}{2}$ für alle $i \in [n]$, denn $|A_i| = 2^{n-1}$, d.h. $\Pr[A_i] = 2^{-n} \cdot 2^{n-1}$.

- Die Menge F_1 ist abhängig, denn wegen $A_1 \cap \cdots \cap A_n = \{(1,1,\ldots,1)\}$ gilt einerseits

$$Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n \cap B] = \begin{cases} 0 & \text{falls } n \text{ gerade} \\ 2^{-n} & \text{falls } n \text{ ungerade} \end{cases}$$

  und andererseits

$$Pr[A_1] \cdot \ldots \cdot Pr[A_n] \cdot Pr[B] = \frac{1}{2^{n+1}}\,.$$

  Eine alternative Argumentation stellt fest, dass die bedingte Wahrscheinlichkeit von B unter der Bedingung $A_1 \cap \ldots \cap A_n$ gleich 0 oder 1 ist. Die Unabhängigkeit würde aber den Wert $\frac{1}{2}$ erfordern.

- Die Menge F_2 ist nach Lemma 23 unabhängig, denn für beliebiges $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n)$ gilt

$$Pr[\bigcap_{i\in[n]} A_i^{s_i}] = 2^{-n} = \prod_{i\in[n]} Pr[A_i^{s_i}]\,.$$

- Auch die Menge F_3 ist unabhängig. Wir zeigen dies mit dem Verfahren aus Vorbereitungsaufgabe 1.

  Zunächst stellen wir fest, dass die Menge $A_2, A_3, \ldots, A_n$ unabhängig ist. Sämtliche Durchschnitte $A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)} = \bigcap_{i\in[2,n]} A_i^{s_i}$ enthalten genau 2 Elemente $(0, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n)$ und $(1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n)$.

  Nun ist klar, dass die Bedinung B aus jeder dieser Mengen $A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)}$ genau ein Element auswählt. Damit gilt $\Pr[B \mid A^{(s_2,s_3,\ldots,s_n)}] = \frac{1}{2}$ und das Verfahren aus VA 1 liefert uns die unabhängige Menge $A_2, A_3, \ldots, A_n, B$.

Tutoraufgabe 2

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. X := Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.
2. Y := Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.
3. Z := Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis beide `O` gezogen wurden.

Lösungsvorschlag

1. Es gilt
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n\cdot Pr[X=n]\\ &= \sum_{n\geq 1} n\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{6}\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6\,.\end{aligned}$$
Wegen
$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n\geq 1} n^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$
gilt
$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n(n-1)\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\sum_{n\geq 2} n(n-1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\\ &= \frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 60,\end{aligned}$$
mithin
$$\mathbb{E}[X^2] = 66$$
und
$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2]-\mathbb{E}[X]^2 = 30.$$

2. Es gilt
$$\mathbb{E}[Y] = 1\cdot\frac{1}{6}+2\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}+\cdots+6\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{21}{6}.$$
Wegen
$$\mathbb{E}[Y^2] = 1\cdot\frac{1}{6}+4\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{5}+\cdots+36\cdot\frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2} = \frac{91}{6}$$
ist
$$\mathrm{Var}\,[Y] = \mathbb{E}[Y^2]-\mathbb{E}[Y]^2 = \frac{35}{12}.$$

3. Es gilt
$$\mathbb{E}[Z] = 2\cdot(\frac{2}{6})\cdot\frac{1}{5}+3\cdot\binom{2}{1}(\frac{2\cdot 4}{6\cdot 5})\cdot\frac{1}{4}+4\cdot\binom{3}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3}{6\cdot 5\cdot 4})\cdot\frac{1}{3}+$$
$$+5\cdot\binom{4}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3})\cdot\frac{1}{2}+6\cdot\binom{5}{1}(\frac{2\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}) = \frac{14}{3}.$$

Wegen

$$\mathbb{E}[Z^2] = 4 \cdot (\frac{2}{6}) \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \binom{2}{1}(\frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 5}) \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \binom{3}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4}) \cdot \frac{1}{3} +$$
$$+25 \cdot \binom{4}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}) \cdot \frac{1}{2} + 36 \cdot \binom{5}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}) = \frac{70}{3}$$

ist

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{14}{9}.$$

Tutoraufgabe 3

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2 \cdot \mathrm{Var}[X] + 2 \cdot \mathrm{Var}[Y]\,.$$
2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y) \cdot (X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[X-Y]\,.$$

Lösungsvorschlag

Zur Lösung von Gleichungen, die Erwartungswert und Varianz enthalten, benötigt man die folgenden Beziehungen für Zufallsvariable $X, X_1, \ldots, X_n$ über demselben Wahrscheinlichkeitsraum, und beliebige $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

Linearität des Erwartungswerts:

$$\mathbb{E}[a_1 X_1 + a_2 X_2 + \ldots + a_n X_n] = a_1 \mathbb{E}[X_1] + a_2 \mathbb{E}[X_2] + \ldots + a_n \mathbb{E}[X_n]\,.$$

Varianz als Differenz:

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Varianz affin transformierter Variablen:

$$\mathrm{Var}\,[aX+b] = a^2 \mathrm{Var}\,[X]\,.$$

1.

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}\,[X+Y] + \mathrm{Var}\,[X-Y] \\
&\quad = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 + \mathbb{E}[(X-Y)^2] - \mathbb{E}[X-Y]^2 \\
&\quad = 2\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[Y^2] - (2\mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[Y]^2) \\
&\quad = 2 \cdot \mathrm{Var}\,[X] + 2 \cdot \mathrm{Var}\,[Y]\,.
\end{aligned}$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) \;&\Rightarrow\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&\Rightarrow\; \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2
\end{aligned}$$

und damit, mit Benützung der Linearität von $\mathbb{E}$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] &= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] \\
&= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] \\
&= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 \\
&= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) \\
&= \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y]\,.
\end{aligned}$$