Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 11
29. Juli 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten einen Spielautomaten, der in jedem Spiel mit Wahrscheinlichkeit $p \geq \frac{3}{4}$ auf Gewinn für den Betreiber entscheidet. Allerdings kommt es vor, dass der Automat aufgrund einer fehlerhaften Verhaltensänderung dauerhaft nur mit Wahrscheinlichkeit $p \leq \frac{1}{4}$ in einem Spiel auf Gewinn entscheidet. Der Betreiber testet den Automaten mit einer Stichprobe von 12 Spielen und nimmt dabei an, dass die Anzahl T des Auftretens eines Gewinns nach dem Satz von DeMoivre als normalverteilte Zufallsvariable angenähert werden darf.

1. Formulieren Sie einen Test zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : p \geq \frac{3}{4}$, die Sie ablehnen, wenn bei 12 Spielen höchstens 6 Mal Gewinn gemacht wird.

   Berechnen Sie näherungsweise den Wert des Fehlers 1. Art.

2. Bestimmen Sie zu Ihrem Test den Wert des Fehlers 2. Art unter der Annahme, dass $\frac{1}{4} < p < \frac{3}{4}$ ausgeschlossen werden kann.

Lösung

1. Der Ablehnungsbereich sei $\tilde{K} = \{0, 1, \ldots, 6\}$.

   Es sei $\tilde{T} = \dfrac{T - 12p}{\sqrt{12p(1-p)}}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \max_{p \geq \frac{3}{4}} \Pr[T \leq 6] \\
&\approx \max_{p \geq \frac{3}{4}} \Phi\left(\frac{6 - 12p}{\sqrt{12p(1-p)}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{6 - 12 \cdot \frac{3}{4}}{\sqrt{12 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4}}}\right) \\
&= \Phi(-2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228\,.
\end{aligned}$$

2. Die echte Alternative zu H_0 ist also $H_1 : p \leq \frac{1}{4}$.

$$\begin{aligned}
\alpha_2 &= \max_{p\leq\frac{1}{4}} \Pr[T \notin \tilde{K}] \\
&= \max_{p\leq\frac{1}{4}} (1 - \Pr[T \leq 6]) \\
&\approx 1 - \Phi\left(\frac{6 - 12\cdot\frac{1}{4}}{\sqrt{12\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}}}\right) \\
&= 1 - \Phi(2) \approx 1 - 0.9772 = 0.0228\,.
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Die folgende Tabelle gibt die Ziehungshäufigkeiten der Superzahlen wieder:

Superzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	140	134	138	133	160	134	133	137	131	128

Wenden Sie den χ^2-Anpassungstest auf die Nullhypothese, dass nämlich die Ziehungswahrscheinlichkeit für jede Superzahl $\frac{1}{10}$ ist, an (Signifikanzniveau 0.1).

Lösung

Es ergibt sich $n = 1368$. Außerdem gilt $p_i = 0.1$ für $i \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Es folgt $T = 5.2$. Um die Nullhypothese abzulehnen, müsste $T > \chi^2_{9,0.9} \approx 14.7$ gelten. Folglich kann die Nullhypothese nicht abgelehnt werden.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Anworten.

1. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die keinen absorbierenden Zustand besitzt.
2. Es gibt eine endliche (zeithomogene) Markov-Kette, die nur transiente Zustände besitzt.

Lösung

1. Wahr! Beispiel: irreduzible Markovketten. Wenn eine Markovkette irreduzibel ist, dann besitzt sie keine absorbierenden Zustände.
2. Falsch! Begründung: Wenn alle Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit verlassen werden könnten, ohne zurückzukehren, dann müssten alle Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit gleichzeitig verlassen werden können, ohne zurückzukehren. Das aber ist ein Widerspruch.

   Alternative Begründung: Wenn es zu jedem Zustand i einen Pfad gibt, der nicht mehr durch Verlängerung auf i zurückgeführt werden kann, dann erhält man induktiv einen Widerspruch.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Begründen Sie Ihre Antworten.

1. Ein transienter Zustand einer Markov-Kette wird mit Wahrscheinlichkeit 1 verlassen.
2. Sei $\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ die Übergangsmatrix einer Markov-Kette M mit entsprechenden Zuständen 1 und 2. M sei im Zustand 1. Dann ist die Wahrscheinlichkeit gleich 1, dass irgendwann ein Zustandsübergang in den Zustand 2 erfolgt.

Lösung

(Siehe auch die Folien der Zentralübung vom 22.7.11)

1. Wahr! Begründung:

   Für einen Zustand i gibt es die disjunkten Ereignisse
   „Zustand i wird nie verlassen" und
   „Zustand i wird irgendwann verlassen".

   Eines der beiden Ereignisse muss eintreten. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten beider Ereignisse ist also 1.

   Die Wahrscheinlichkeit, dass der Zustand i nie verlassen wird, ist 0, falls $p_{i,i} \neq 1$.

   Da i transient ist, gilt $p_{i,i} \neq 1$. Daraus folgt, dass i mit Wahrscheinlichkeit 0 nie verlassen wird, mithin wird i mit Wahrscheinlichkeit 1 irgendwann verlassen.

2. Wahr! Die Behauptung besagt $f_{1,2} = 1$, d. h., dass die Ankunftswahrscheinlichkeit in Zustand 2 bei Start im Zustand 1 gleich 1 ist. Die Gleichung $f_{1,2} = 1$ folgt bereits aus der Strzuktur des Übergangsdiagramms (vgl. Zentralübung).

   Wir berechnen $f_{1,2}$ aus einem Gleichungssystem wie folgt. Wir nehmen als Zustandsmenge $S = \{1, 2\}$ an. Sei $j = 2$. Dann gilt für alle $i \in S$

   $$f_{i,2} = p_{i,2} + \sum_{k \neq 2} p_{i,k} \cdot f_{k,2} \,.$$

   Für $i = 1$ ergibt sich $f_{1,2} = p_{1,2} + p_{1,1} \cdot f_{1,2}$ und daraus $f_{1,2} = 0.5 + 0.5 \cdot f_{1,2}$. Es folgt $f_{1,2} = 1$.

__Hinweis:__ Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette über den Zuständen $Q = \{0, 1, 2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Die Dichtefunktion von X_0, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1, s_2)$.

1. Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1.

2. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.

3. Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen X_0 und X_1.

   Dabei sind X_0 und X_1 als Zufallsvariable über dem zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, \Pr\rangle$ zu betrachten mit

$$\Omega = \{(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in Q\}, \quad \Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot \Pr[X_1 = x_1 | X_0 = x_0],$$

$$X_0((x_0, x_1)) = x_0 \qquad \text{und} \qquad X_1((x_0, x_1)) = x_1.$$

Lösung

1.
$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 \cdot P \\ &= (\sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}5) \\ &= (0{,}25\ ,\ 0{,}25\ ,\ 0{,}5) \end{aligned}$$

2. Für stationäre Lösungen (s_0, s_1, s_2) muss gelten
$$(s_0, s_1, s_2) = (s_0, s_1, s_2) \cdot P$$
mit Nebenbedingung
$$\sum_{i=0}^{2} s_i = 1.$$
Wegen
$$(s_0, s_1, s_2) \cdot P = (0{,}25\ ,\ 0{,}25\ ,\ 0{,}5)$$
folgt
$$(s_0, s_1, s_2) = (0{,}25\ ,\ 0{,}25\ ,\ 0{,}5).$$

3. Es seien q_0 und q_1 die diskreten Verteilungen von X_0 und X_1. Für die Unabhängigkeit von X_0 und X_1 genügt der Nachweis der Gleichung

$$\Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1}$$

für alle $x_0, x_1 \in \{0, 1, 2\}$.

Wir rechnen

$$\begin{aligned}(q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1} &= (q_0)_{x_0} \cdot (q_0 P)_{x_1} \\ &= (q_0)_{x_0} \cdot \left(\sum_{i=0}^{2} (q_0)_i \, p_{i,x_1}\right) \\ &= (q_0)_{x_0} \cdot (p_{x_0,x_1}) \\ &= \Pr[(x_0, x_1)].\end{aligned}$$

Vorbereitung 2

1. Wir betrachten Markov-Ketten M mit 6 Zuständen. Wie viele transiente Zustände kann M höchstens besitzen? Begründung!

2. Wie viele stationäre Verteilungen besitzt die Markovkette mit Übergangsmatrix

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} ?$$

Begründung!

3. Gegeben sei eine Markov-Kette M mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, \dots\}$, $p_{n,(n+1)} = 2/3$ und $p_{n,0} = 1/3$ für alle $n \in \mathcal{S}$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, sich nach langer Zeit im Zustand i zu befinden?

Lösung

1. Hätte M 6 transiente Zustände, dann würden alle 6 Zustände mit positiver Wahrscheinlichkeit verlassen werden können bei $n > 6$ Übergängen. Dies ist nicht möglich, weil sich mindestens 1 Zustand nach 6 Übergängen wiederholen muss.

   Andererseits gibt es ein Beispiel einer Markovkette, mit einem einzigen absorbierenden Zustand, der von allen anderen 5 Zuständen aus erreichbar ist.

   Im Ergebnis ist die maximale Zahl transienter Zustände gleich 5.

2. Eine stationäre Verteilung $\pi = (c_1, c_2)$ erfüllt zum einen die Gleichung

$$c_1 + c_2 = 1$$

und ist auch ein Linkseigenvektor von P zum Eigenwert 1, erfüllt also auch die Gleichung

$$\pi = \pi \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

Die Lösung ergibt sich eindeutig mit

$$c_1 = \frac{2}{5} \quad \text{und} \quad c_2 = \frac{3}{5}\,.$$

Man kann auch ohne Rechnung sehen, dass es höchstens eine einzige Lösung geben kann. Gäbe es noch eine zweite stationäre Lösung, dann müssten alle Verteilungen stationär sein, denn der Raum der Eigenvektoren zum Eigenwert 1 wäre dann 2-dimensional. Offensichtlich aber ist z. B. $q = (1, 0)$ nicht stationär.

3. Sei $M = (X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ und $(q_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der entsprechenden Verteilungen der X_t. Für eine beliebige Anfangsverteilung q_0 gilt bereits $q_t(0) = \Pr[X_t = 0] = \frac{1}{3}$ für alle $t > 0$. Dies zeigt die folgende Rechnung.

$$\begin{aligned} q_t(0) &= \sum_{n=0}^{\infty} q_{t-1}(n) \cdot p_{n,0} \\ &= \underbrace{(q_{t-1}(0) + q_{t-1}(1) + q_{t-1}(2) + \dots)}_{=1} \cdot \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit $q_t(n)$, dass X_t im Zustand n ist, ist für alle $n \geq 1$ gegeben durch

$$q_t(n) = q_{t-1}(n-1) \cdot p_{n-1,n} = q_{t-1}(n-1) \cdot \frac{2}{3}\,.$$

Wir erhalten

$$(\forall t \geq n) \ \left[p_t(n) = \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n \right]\,.$$

Wenn man also den Zeitpunkt t genügend groß wählt, dann wird der Zustand n mit der berechneten Wahrscheinlichkeit angenommen.

Tutoraufgabe 1

Zwei Zustände A und B einer Markov-Kette gehören zu einer Kommunikationsklasse genau dann, wenn A von B aus erreichbar ist und umgekehrt. Gegeben sei eine Markovkette mit Zustandsmenge $\mathcal{S} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$ und Übergangsmatrix

$$M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,3 & 0,7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,1 & 0 & 0,9 & 0 \\ 0,25 & 0,25 & 0 & 0 & 0,25 & 0,25 \\ 0 & 0 & 0,7 & 0 & 0,3 & 0 \\ 0 & 0,2 & 0 & 0,2 & 0,2 & 0,4 \end{pmatrix}.$$

1. Welche Zustände bilden eine Kommunikationsklasse? Welche davon sind rekurrent, welche transient?

2. Wir starten im Zustand 0. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, nach einer längeren Zeit im Zustand 0 zu sein?

Lösung

1. Die Klassen $\{0, 1\}$ und $\{2, 4\}$ sind rekurrent. Die Klasse $\{3, 5\}$ ist transient.

2. Da die Klasse $\{0, 1\}$ rekurrent ist und wir in ihr anfangen, ist die Wahrscheinlichkeit, nach längerer Zeit im Zustand 0 zu sein, durch die stationäre Verteilung von

   $$\begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix}$$

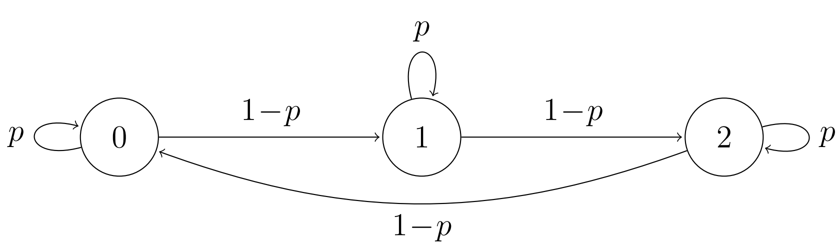
   gegeben:

   $$\begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,3 & 0,7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pi_1 & \pi_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 0,5\pi_1 + 0,3\pi_2 = \pi_1 \\ 0,5\pi_1 + 0,7\pi_2 = \pi_2 \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} \pi_1 = 3/8 \\ \pi_2 = 5/8 \end{matrix}.$$

   Die 2x2-Matrix ist aperiodisch, weil alle Diagonalelemente positiv sind, und sie ist irreduzibel. Also ist die Matrix ergodisch.
   Folglich ist $\Pr[\text{Zustand 0 nach längerer Zeit}] = \pi_1 = 3/8$.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten eine Markov-Kette M mit der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2\}$ und der Folge $X_0, X_1, X_2, X_3, \ldots$ von Zufallsvariablen, die durch das folgende Übergangsdiagramm in Abhängigkeit eines Parameters p mit $0 < p < 1$ gegeben ist:



1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix P von M.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[T_{0,2} = 3]$ an. Dabei sei $T_{0,2}$ die Zufallsvariable der Übergangszeit von Zustand 0 in den Zustand 2.

3. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit $h_{0,2}$. Der Rechenweg muss aus Ihrem Protokoll hervorgehen.

4. Berechnen Sie die stationäre Verteilung q^T von M.

Lösung

1.
$$P = \begin{pmatrix} p & 1-p & 0 \\ 0 & p & 1-p \\ 1-p & 0 & p \end{pmatrix} .$$

2. $\Pr[T_{0,2} = 3] = p(1-p)(1-p) + (1-p)p(1-p) = 2p(1-p)^2$.

3.
$$\begin{array}{rrcl} & h_{0,2} & = & 1 + p \cdot h_{0,2} + (1-p) \cdot h_{1,2}\,, \\ & h_{1,2} & = & 1 + 0 \cdot h_{0,2} + p \cdot h_{1,2}\,. \\ \Longrightarrow & h_{1,2} & = & \dfrac{1}{1-p}\,. \\ \Longrightarrow & h_{0,2} & = & 1 + p \cdot h_{0,2} + (1-p) \cdot \dfrac{1}{1-p} \\ & & = & \dfrac{2}{1-p} \end{array}$$

4. Aus $q^T P = q^T$ folgt
$$\begin{array}{rrcl} & p \cdot q_0 + (1-p) \cdot q_2 & = & q_0\,, \\ & (1-p) \cdot q_0 + p \cdot q_1 & = & q_1\,, \\ & (1-p) \cdot q_1 + p \cdot q_2 & = & q_2\,, \\ \Longrightarrow & q_0 & = & q_1\,, \\ & q_0 & = & q_2\,. \end{array}$$
Wegen $q_0 + q_1 + q_2 = 1$ folgt $q^T = (\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

Tutoraufgabe 3

Gegeben sei die Übergangsmatrix P einer Markov-Kette M mit Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$ wie folgt:
$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} .$$

1. Bestimmen Sie die Menge der transienten Zustände. Begründung!

2. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit $f_{0,2}$. Dabei muss jeweils der Rechenweg aus dem Protokoll hervorgehen.

Lösung

1. Menge trans. Zustände $= \{0, 1, 2\}$.

   Begründung: Es gibt jeweils einen in 0 bzw. 1 bzw. 2 beginnenden Pfad zum Zustand 3, der keine Verlängerung zurück nach 0 bzw. 1 bzw. 2 besitzt.

2. Es gilt

$$
\begin{aligned}
& & f_{0,2} &= p_{0,2} + p_{0,0} \cdot f_{0,2} + p_{0,1} \cdot f_{1,2} + p_{0,3} \cdot f_{3,2} \\
& & &= 0 + 0{,}4 \cdot f_{0,2} + 0{,}6 \cdot f_{1,2} + 0 \\
&\Longrightarrow & f_{0,2} &= f_{1,2}\,. \\
& & f_{1,2} &= p_{1,2} + p_{1,0} \cdot f_{0,2} + p_{1,1} \cdot f_{1,2} + p_{1,3} \cdot f_{3,2} \\
& & &= 0{,}8 + 0 + 0 + 0{,}2 \cdot \underbrace{f_{3,2}}_{=0} \\
& & &= 0{,}8 \\
&\Longrightarrow & f_{0,2} &= 0{,}8\,.
\end{aligned}
$$