Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 8
16. Juni 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 23. Juni 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wahr oder falsch? Beweisen Sie Ihre Antworten.

1. Jede stetige Zufallsvariable X mit $W_X = \mathbb{R}$, für deren Dichtefunktion f_X die Beziehung $f_X(x) = f_X(-x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt und deren Erwartungswert existiert, besitzt den Erwartungswert 0.

2. Es gibt keine stetige Zufallsvariable X mit $W_X = \mathbb{R}$, für deren Verteilungsfunktion F_X die Beziehung $F_X(x) = F_X(-x)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

3. Die gemeinsame Dichtefunktion $f_{X,Y}$ zweier stetiger Zufallsvariablen X und Y sei konstant gleich $\frac{2}{\pi}$ auf der Menge $B = \{(x, y)\,;\, x^2 + y^2 \leq r^2\}$ und sei 0 außerhalb von B. Dann gilt $r^2 = \frac{1}{4}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine 2 cm lange Nadel auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Nadel gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Nadel eine Linie?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine beliebige kontinuierliche Zufallsvariable.
Zeigen Sie, dass die Funktion $\psi(a) = \mathbb{E}[-(X - a)^2]$ ihr Maximum bei $a = \mathbb{E}[X]$ hat.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Lebensdauer T eines Monitors habe die folgende (mit $\lambda > 0$ und a parametrisierte) Dichte:

$$f_T(t) = \begin{cases} a\lambda^2 t e^{-\lambda t} & : t \geq 0 \\ 0 & : t < 0 \end{cases}$$

1. Welchen Wert muss a besitzen, so dass für alle $\lambda > 0$ die Funktion f_T tatsächlich eine Dichte ist, d. h., dass $\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\, dt = 1$ gilt. Beweis!

2. Berechnen Sie $\Pr[T > \frac{2}{\lambda}]$.

3. Berechnen Sie $\mathbb{E}[T]$ in Abhängigkeit von λ.

Tutoraufgabe 1

1. Seien X und Y unabhängige und positivwertige kontinuierliche Zufallsvariablen. Drücken Sie die Dichtefunktion f_Z von $Z = X/Y$ durch die Dichtefunktionen f_X und f_Y von X bzw. Y aus.

2. Die Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch die Koordinaten eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in \{(s,t); s^2 + t^2 \leq 4\}$ der x, y-Ebene.

   Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$!
   Sind X und Y unabhängig?
   Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y !

Tutoraufgabe 2

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige, mit Parameter $\lambda = 1$ exponentialverteilte Zufallsvariablen. Zeigen Sie, dass für alle reellen x gilt

$$\Pr\left[\max_{1\leq i\leq n} X_i \leq \log n + x\right] = \left(1 - \frac{e^{-x}}{n}\right)^n .$$

Geben Sie den Grenzwert an für $n \to \infty$!

Tutoraufgabe 3

Wir modellieren die tägliche Preisänderung am Aktienmarkt durch eine Zufallsvariable mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Ausgehend vom „heutigen“ Preis Y_0 ergibt sich dann der Preis Y_n einer Aktie am folgenden n-ten Tag durch

$$Y_n = Y_{n-1} + X_n \quad (n \geq 1)\,,$$

wobei die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und identisch verteilt sind mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2. Wir nehmen an, dass die Verteilung der Y_n durch den zentralen Grenzwertsatz ausreichend genau beschrieben werden kann.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Aktie in 30 Tagen mehr als 112€ wert ist, wenn heute die Aktie 100€ kostet und $\sigma^2 = 1$ gilt?