TA 7.1

(a) $R \sim \text{uniform}((0,1])$

- $F_A(t) = \Pr[A \le t] = \Pr[\pi R^2 \le t] = \Pr\left[R^2 \le \frac{t}{\pi}\right]$

$$= \Pr\left[|R| \le \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right]$$

$$= \Pr\left[R \le \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right]$$

$$= F_R\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)$$

$$\int_{-\sqrt{\frac{t}{\pi}}}^{\sqrt{\frac{\pi}{t}}} I_{[0,1]}(t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\sqrt{t/\pi}} I_{[0,1]}(t)\,dt$$

$$\leadsto f_A(t) = \frac{d}{dt}\left(F_R\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)\right)$$

$$= f_R\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right) \cdot \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{\pi}\right)^{1/2}$$

$$= I_{[0,1]}\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{t}{\pi}\right)^{-1/2} \cdot \frac{1}{\pi}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}}\, I_{[0,\pi]}(t)$$

(b) $A \sim \text{uniform}([0, \pi])$

$R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

- $F_R(t) = Pr[R \le t] = Pr\left[\sqrt{\frac{A}{\pi}} \le t\right]$

$$= Pr[A \le \pi t^2]$$

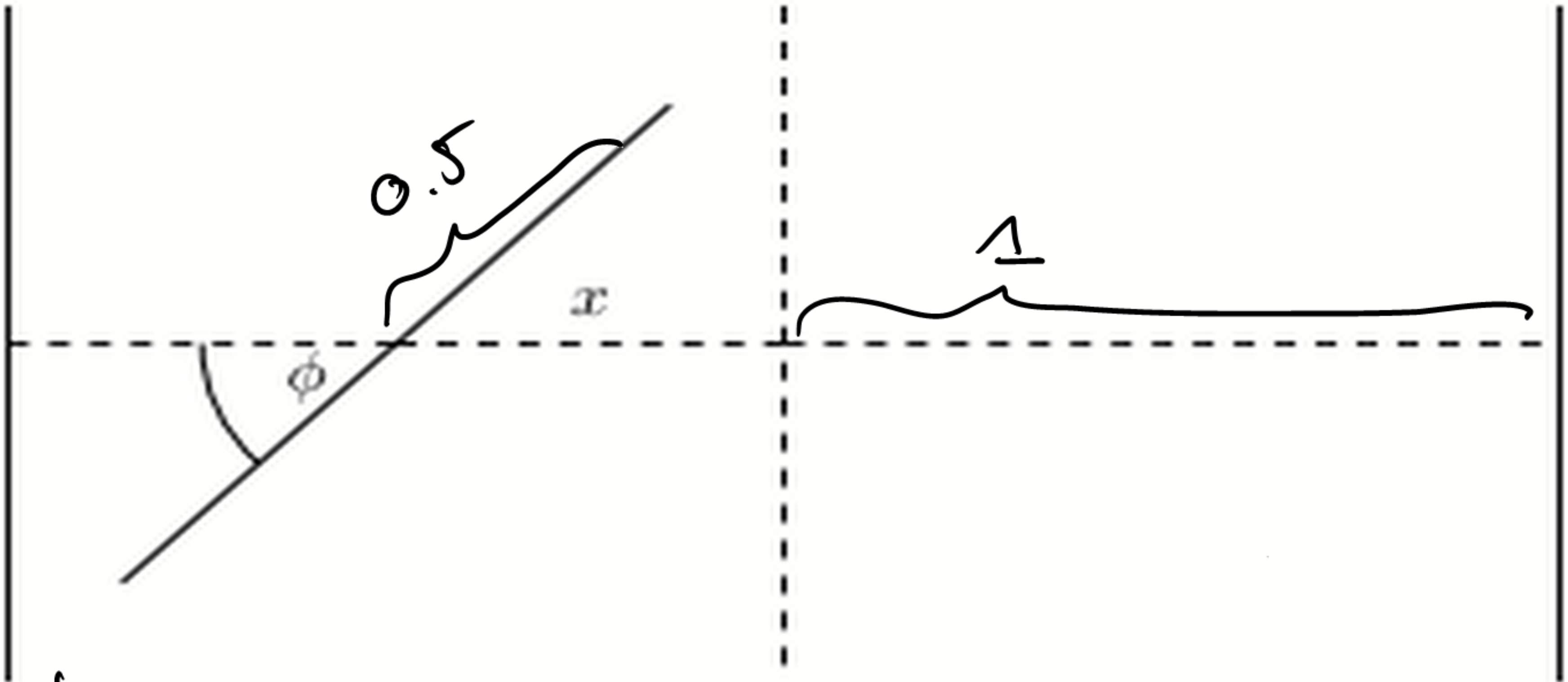
$$= F_A(\pi t^2)$$

$\leadsto f_R(t) = f_A(\pi t^2) \cdot 2\pi t$

$$= \frac{1}{\pi} \mathbb{I}_{[0,\pi]}(\pi t^2) \cdot 2\pi t$$

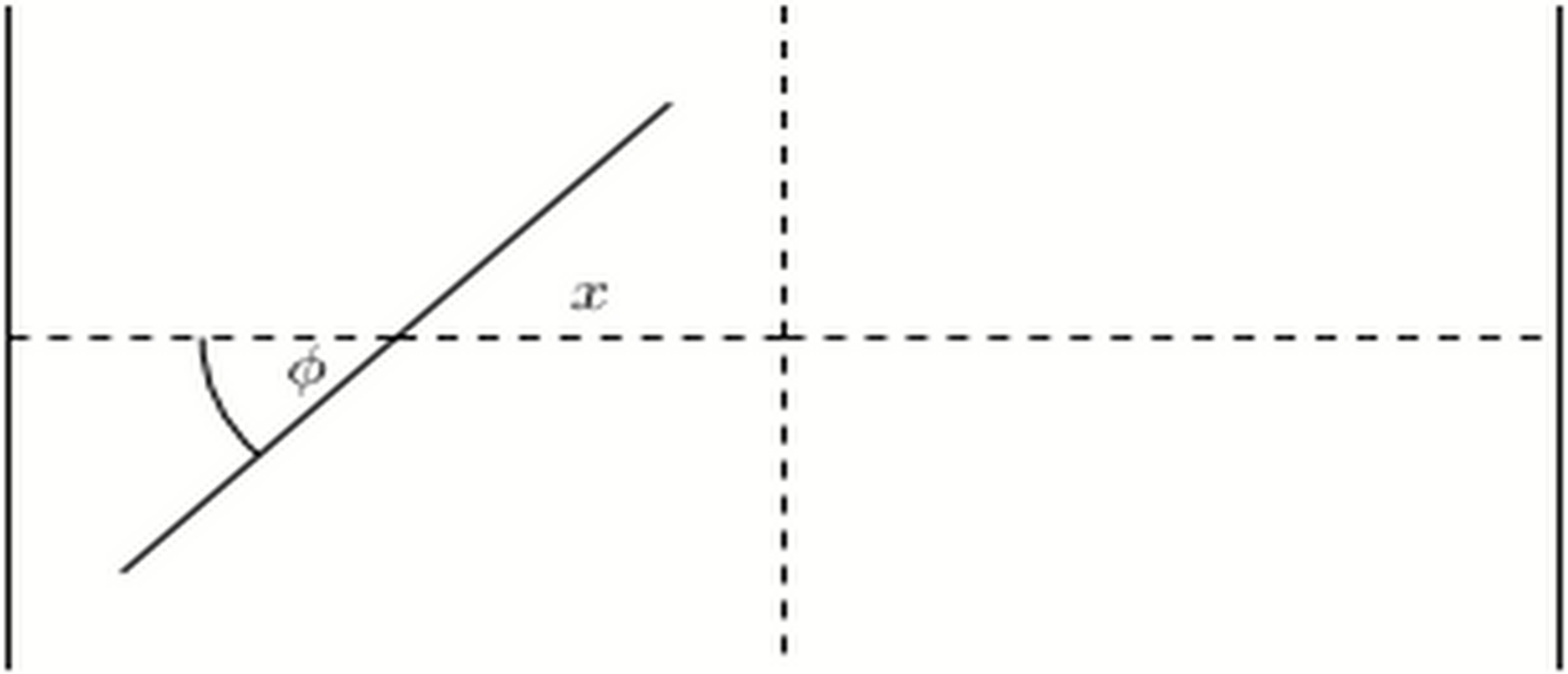
$$= 2t \, \mathbb{I}_{[0,1]}(t)$$

TA.7.2



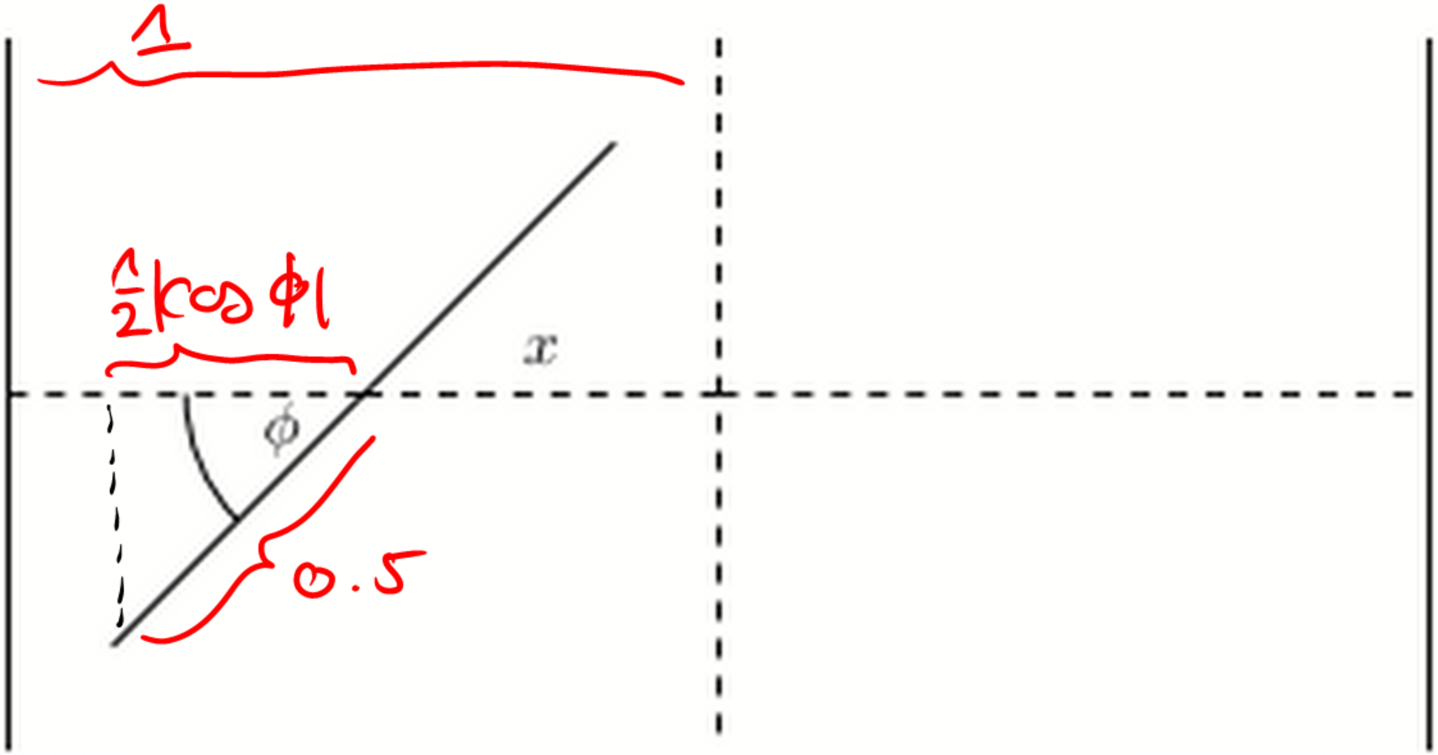
Annahmen:

- Abstand X zur Mittellinie: $X \sim \text{uniform}([-1,1])$
- Orientierung Φ : $\Phi \sim \text{uniform}([0,2\pi))$
- X, Φ unabh.



Gesuchtes Ereignis A:

A = "Nadel liegt nicht vollständig in einem Streifen"



$$A = \{ (x,\phi) \in [-1,1] \times [0,2\pi) \mid |x| + \tfrac{1}{2}|\cos\phi| \geq 1 \}$$

$$= \{ (x,\phi) \in [-1,1] \times [0,2\pi) \mid |x| \geq 1 - \tfrac{1}{2}|\cos\phi| \}$$

$$= \{ (x,\phi) \mid 1 \geq |x| \geq 1 - \tfrac{1}{2}|\cos\phi| \wedge \phi \in [0,2\pi) \}$$

$$= \{ (x,\phi) \mid \phi \in [0,2\pi) \wedge |x| \in [1-\tfrac{1}{2}|\cos\phi|, 1] \}$$

$$\Pr[A] = \int_A f_{X,\Phi}(x,\phi)\, dx\, d\phi$$

X,Φ unabh.

$$= \int_A f_X(x) \cdot f_\Phi(\phi)\, dx\, d\phi$$

$$f_X(x) = \frac{1}{2} I_{[-1,1]}(x)$$

$$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi} I_{[0,2\pi)}$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\{(x,\phi) \,|\, \phi \in [0,2\pi) \,\wedge\, |x| \in [1-\frac{1}{2}|\cos\phi|,\, 1]\}} dx\, d\varphi$$

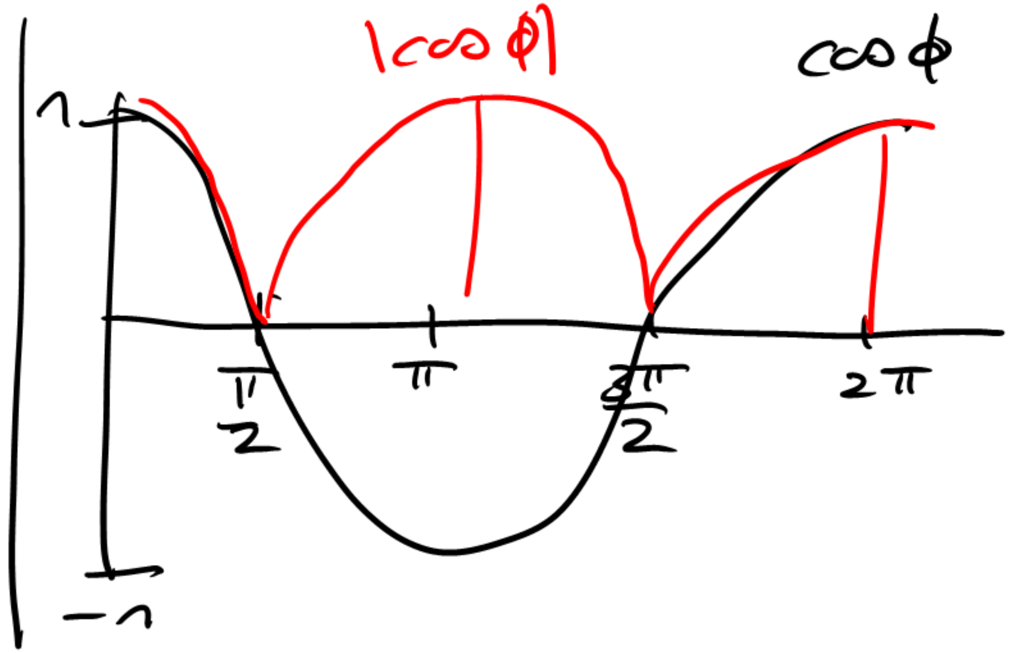
Fubini

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \left(\int_{x=1-\frac{1}{2}|\cos\phi|}^{1} dx\, d\phi + \int_{x=-1}^{-1+\frac{1}{2}|\cos\phi|} dx\, d\phi \right)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1}{2}|\cos\phi| + \frac{1}{2}|\cos\phi| \, d\phi$$

$$= \frac{1}{4\pi} \cdot 4 \cdot \int_{\phi=0}^{\frac{\pi}{2}} \cos\phi \quad d\phi$$

$$= \frac{1}{\pi}$$

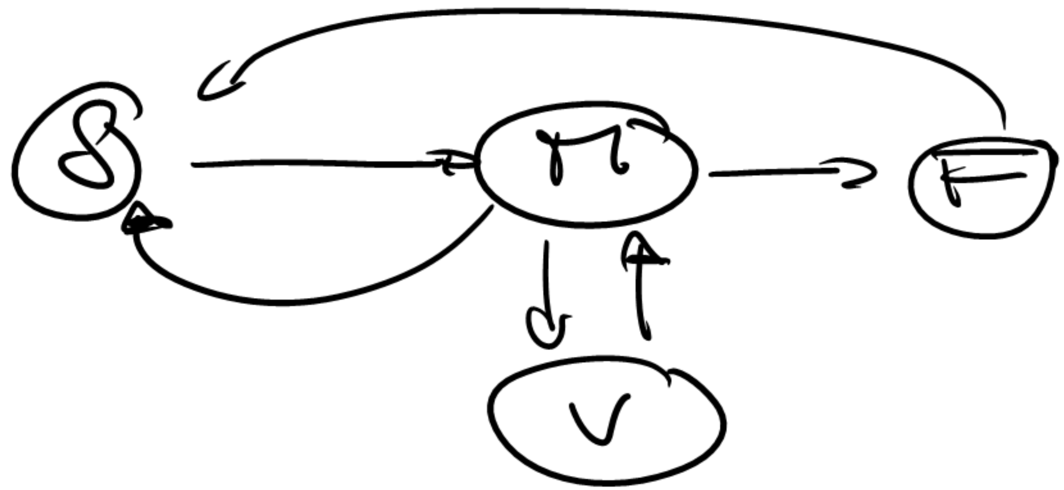


TA 7.3

Erinnerung:

- $\{0,1\}^\omega$ ist mindestens so mächtig wie $[0,1]$, da
  $f: \{0,1\}^\omega \longrightarrow [0,1]: (z_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} z_i \left(\frac{1}{2}\right)^{i+1}$
  surjektiv ist: für jedes $x \in [0,1]$ findet sich mindestens eine Binärdarstellung in $\{0,1\}^\omega$.
- Offensichtlich gilt $|\{0,1\}^\omega| = |\{1,2\}^\omega|$
- $g: \{1,2\}^\omega \longrightarrow [0,1]: (z_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \longmapsto \sum_{i=0}^{\infty} z_i \left(\frac{1}{3}\right)^{i+1}$
  ist injektiv.

a) Graph:



Man benötigt nur eine injektive Abbildung von $\{0,1\}^\omega$ nach $\mathbb{P}$:

- Bei $\{0,1\}^\omega$ darf man beliebig Zeichen kombinieren.
- Um das in $\mathbb{P}$ nachzubilden, verwendet man die Kreise mit Start & Ende in S, z.B.

$$0 \mathrel{\hat{=}} S \to M \to S \quad \text{und} \quad 1 \mathrel{\hat{=}} S \to M \to F \to S$$

Damit erhält man die Abbildung

$h : \{0,1\}^\omega \to \mathbb{P} : (z_i)_{i\in\mathbb{N}_0} \mapsto S\ \hat{h}(z_0)\hat{h}(z_1)\ldots$

mit $\hat{h}(0) = \Pi S$ und $\hat{h}(1) = \Pi FS$.

Offensichtlich ist h injektiv.

(b) (i) $[z_k = z] = Q^k z Q^\omega = \bigcup_{u \in Q^k} u z Q^\omega$

(ii) Damit eine Sequenz $(z_i)_{i \in \mathbb{N}_0} \in Q^\omega$ einen Pfad im Graphen darstellt, muss gelten:

(1) $z_0 = s$

(2) $\forall i \in \mathbb{N}_0 : \exists (s,t) \in T : z_i = s \wedge z_{i+1} = t$

1. $\leadsto \mathbb{P} = [z_0 = s] \cap \bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{(s,t) \in T} [z_i = s] \cap [z_{i+1} = t]$

2.

abzählbar/endlich

c) i) $\forall i \in \mathbb{N}_0 : \exists j \geq i : \quad Z_j = S$

Für jede Zeitschranke findet sich ein späterer

Zeitpunkt, an dem man wieder in S ist.

$$\equiv \Big(\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{j \geq i} \underbrace{[Z_j = S]}_{\in \mathcal{F}(Q)} \Big) \cap \mathbb{P} \in \mathcal{F}(Q)$$

ii) $\exists i \in \mathbb{N}_0 \; \forall j \geq i : \quad Z_j \neq V$

Ab einem gewissen Zeitpunkt befindet man sich nie wieder in V.

$$\equiv \Big(\bigcup_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcap_{j \geq i} \bigcup_{z \in \{S, R, F\}} [Z_j = z] \Big) \cap \mathbb{P}$$

(iii) Betrachtet man den Graphen, so besagt die Bedingung gerade, dass ein Ablauf <u>nie</u> die Teilsequenz

$$V \Pi S$$

enthalten soll.

$$\rightsquigarrow \mathbb{P} \cap Q^\omega \setminus Q^* (V \Pi S) Q^\omega$$

$$= \mathbb{P} \cap \overline{\bigcup_{u \in Q^*} \underbrace{u V \Pi F Q^\omega}_{\text{Zylindermenge}}} \in \mathcal{Z}(Q)$$

abzählbar

(iv) Ähnlich zu (iii):

- Dass unendlich viele Nachrichten gesendet werden, wurde schon in (i) beschrieben.

$$A := \left(\bigcap_{i \in \mathbb{N}_0} \bigcup_{j \geq i} [z_j = S] \right) \cap \Pi$$

- Die Vorkommen von Sender unterteilen jeden Ablauf aus A in endliche Teilsequenzen der Form:

$$\underset{\substack{\uparrow \\ \text{Start}}}{S} \quad M \; (VM)^* (\varepsilon + F) \; \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Ende}}}{S}$$

einer Übertragung

- Die Forderung ist nun, dass es keine zwei aufeinanderfolgenden Übertragungen der Form

$$(S\,\Pi\,(V\Pi)^*F)^2 S$$

$$\rightsquigarrow\ A \setminus Q^*(S\,\Pi\,(V\Pi)^*F)^2 S Q^\omega$$

$$= A \cap \overline{\bigcup_{\substack{\alpha \in Q^* \\ \beta \in (S\Pi(V\Pi)^*F)^2 S}} \alpha\beta Q^\omega}$$

beide abzählbar