Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 1
21. April 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 27. April 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Vorbemerkung: Hausaufgaben haben Wiederholungscharakter und stellen grundsätzlich eine Lernkontrolle dar für Stoff der vorausgegangenen Übungsblätter bzw. Arbeitsblätter. Auf dem vorliegenden Übungsblatt 1 beziehen sich die Hausaufgaben auf Stoff der verausgegangenen Semester.
Die Hausaufgaben werden korrigiert und bewertet. Beachten Sie bitte bei der Abgabe sowohl den Abgabetermin als auch die auf der Übungswebseite beschriebenen Regeln.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir nehmen an, dass für das Ergebnis eines Experiments 3 Aussagen A, B und C sinnvoll sind, die unabhängig voneinander zutreffen können oder auch nicht.

1. Wie viele Aussagen auf der Basis von A, B und C gibt es, wenn äquivalente Aussagen nur einmal gezählt werden?

2. Geben Sie eine Boolesche Algebra $B = \langle S, \wedge, \vee, \neg \rangle$ mit möglichst wenig Elementen an, in der alle obigen Aussagen korrekt beschreibbar sind.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten 3 Fehlerarten A, B und C, die bei der Fertigung eines Bauteils auftreten. Wir nehmen an, dass die 3 Fehlerarten gleich häufig vorkommen. Die Ausgangskontrolle protokolliert bei 1000 fehlerhaften Bauteilen folgende Fehler.

5 Bauteile haben gleichzeitig die Fehler A, B und C,
25 Bauteile haben genau die Fehler A und B,
40 Bauteile haben genau die Fehler A und C und
50 Bauteile haben genau die Fehler B und C.

Wie viele von den 1000 fehlerhaften Bauteilen haben den Fehler A?
Beschreiben Sie die Situation zunächst mit einem Venn-Diagramm.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Gegeben sei die Menge $\Omega = \{1, 2, 3\}$.

1. Listen Sie alle 2-elementigen Multiteilmengen von Ω auf.

2. Wie viele 6-elementigen Multiteilmengen von Ω gibt es?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Zeigen Sie mit Hilfe der Stirling-Formel $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))$ und Grenzwertrechenregeln die asymptotischen Abschätzungen

$$\ln(n!) \in \Theta(n \ln n)\,, \qquad \binom{2n}{n} \in \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right).$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen <u>Vorbereitungsaufgabe</u>, <u>Tutoraufgabe</u> und <u>Hausaufgabe</u> geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

Vorbereitung 2

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}\,, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}\,, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Vorbereitung 3

Modellieren Sie das Ziegenproblem der Tutoraufgabe 1 algorithmisch.

Tutoraufgabe 1

Am 9. September 1990 wurde folgendes Problem in der „Ask Marylin“ Kolumne des Parade Magazine gestellt:

> *„Suppose you're on a game show, and you're given the choice of three doors. Behind one door is a car, behind the others, goats. You pick a door, say number 1, and the host, who knows what's behind the doors, opens another door, say number 3, which has a goat. He says to you, 'Do you want to pick door number 2?' Is it to your advantage to switch your choice of doors?“*

Dieses Problem ist auch bekannt als das „Ziegenproblem“ bzw. „Monty-Hall Dilemma“.

1. Welches ist die bessere Strategie – wechseln (W) oder nicht (NW)? Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnen Sie das Auto, wenn Sie die bessere Strategie verwenden?
2. Ändert sich der Sachverhalt, wenn der Moderator unabhängig von der Kandidatenwahl eine der beiden Türen mit einer Ziege öffnet (also evtl. auch die vom Kandidaten gewählte Tür)?
3. Ein populärer Einwand gegen die korrekte Lösung von 1. ist folgender:

   > Ein UFO landet im Zuschauerraum und ein Außerirdischer springt auf die Bühne. Er sieht eine offene Ziegentür und zwei geschlossene Türen. Seine Chancen stehen also 1:1, dass er die richtige Tür wählt.

   Warum überträgt sich dies nicht auf den Kandidaten?

Tutoraufgabe 2

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ „Kopf“ zeigt und mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ „Zahl“. Wir werfen eine solche Münze n mal, dabei erhalten wir k mal „Kopf“ und $n-k$ mal „Zahl“.

1. Bestimmen Sie den zu n zugehörigen Ergebnisraum Ω_n.
2. Sei n gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für $Pr[k = n/2]$ an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel.*)
3. Wie groß ist $Pr[\,k \text{ gerade}\,]$ in Abhängigkeit von n?
4. Wie groß ist $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (n-i+1)\text{-ter Wurf}\,]$?
5. Betrachten Sie folgende Variante von Teilaufgabe 4: Eine unfaire Münze wird $2n$ mal geworfen. Dabei beträgt die Wahrscheinlichkeit, „Kopf“ zu werfen, p, mit $0 < p < 1$.

   Wie groß ist nun $Pr[\,\forall i \leq n : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (2n-i)\text{-ter Wurf}\,]$?