SS 2013

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

26. April 2013

ZÜ II

Übersicht:

1. Thema: Hypergeometrische Verteilung
2. Tipps zu HA Blatt 2
3. Vorbereitung auf TA Blatt 2

1. Thema: Hypergeometrische Verteilung

1.1 Beispiel nach Vorlesung

Eine Menge C bestehe aus zwei disjunkten Sorten A bzw. B von Objekten, d.h. $C = A \cup B$ und $A \cap B = \emptyset$.

Seien $|A| = a$ und $|B| = b$.

Wir wählen n Elemente aus C,
und zwar x Elemente aus A und $n - x$ Elemente aus B.

In der Vorlesung wurde das Beispiel 19 gebracht, in dem

A eine Menge von 4 Buben eines Skatspiels war,
und B war die Menge der übrigen 28 Skatkarten.

Dann gibt es die folgende Anzahl von Auswahlmöglichkeiten $h(a, b, n, x)$ von Elementen aus A bzw. B:

$$h(a, b, n, x) = \binom{a}{x}\binom{b}{n-x}.$$

Es gilt die Gleichung

$$\binom{a+b}{n} = \sum_{x=0}^{n} \binom{a}{x}\binom{b}{n-x},$$

die bekannt ist als

Vandermonde'sche Identität

und eine der wichtigsten Gleichungen der Kombinatorik ist.
(Siehe Vorl. DS)

Anwendung:

Eine Urne enthält a Kugeln mit dem Wert $+1$ und b Kugeln mit dem Wert -1. Sie entnehmen n Mal eine Kugel, ohne sie zurückzulegen. Jede Kugel wird unter den verbliebenen Kugeln mit der gleichen Wahrscheinlichkeit entnommen.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[x]$, dass x Kugeln mit Wert $+1$ und $n - x$ Kugeln mit dem Wert -1 entnommen wurden?

(Siehe auch HA 2.3)

Lösung:

$$\Pr[x] = \frac{\binom{a}{x}\binom{b}{n-x}}{\binom{a+b}{n}}\,.$$

$\Pr[x]$ stellt die Dichte der hypergeometrischen Verteilung der Zahlen $\{0, 1, 2, \ldots, n\}$ dar, hier bezüglich der Sortenzahlen a, b.

Die Vandermonde Identität stellt sicher, dass
$\Pr$ zusammen mit $\Omega = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist.

Dieser W'keitsraum $(\Omega, \Pr)$ heißt Hypergeometrische Verteilung.

Bemerkung:

Wenn wir von „Verteilung" sprechen, dann meinen wir immer einen Wahrscheinlichkeitsraum, im diskreten Fall also $(\Omega, \Pr)$.

Für einen Wahrscheinlichkeitsraum über $\mathbb{R}$ kann man dann (u.U.)

die Verteilungsdichte und
die kumulative Verteilung (Verteilungsfunktion) angeben.

2. Tipps zu HA Blatt 2

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 2.1:

Konstruieren Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ und zwei Ergebnisse $A, B \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A] \neq \Pr[B]$, so dass gilt:

$$\Pr[A \cap B] \geq 9 \cdot \Pr[A] \cdot \Pr[B] > 0\,.$$

Die Beziehung zwischen $\Pr[A \cap B]$ und dem Produkt $\Pr[A] \cdot \Pr[B]$ hat Bedeutung z.B. in der Form $\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]}$ im Verhältnis zu $\Pr[B]$.

Dabei bedeutet $\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]}$ das „Gewicht“ oder die „Größe“ von B innerhalb von oder „unter der Bedingung von“ A.

Machen Sie sich die Gewichte der Schnittmengen von A und B an Hand eines Venn-Diagramms klar und variieren Sie Ihr Diagramm so, dass B zwar innerhalb des Universums „klein“ ist, aber innerhalb der Menge A „groß“ ist.

Benutzen Sie die Flächenmaße Ihres Diagramms zur Definition der Wahrscheinlichkeiten.

Beispiel: Wann ist $\frac{\Pr[A \cap B]}{\Pr[A]} = 1$?

Diese Aufgabe wird wieder interessant werden, wenn es um „unabhängige“ Mengen und um „bedingte Wahrscheinlichkeiten“ geht.

ad HA 2.2:

Entgegen anders lautender Gerüchte hat diese Aufgabe nichts mit den Fußballspielen der laufenden Woche zu tun,

wohl aber mit den 4 Lagemöglichkeiten eines Elementes zu zwei Mengen im allgemeinen Fall.

Nutzen Sie auch hier ein Venn-Diagramm in Verbindung mit der Tatsache der Additivität von Wahrscheinlichkeiten für disjunkte Mengen bzw. Ereignissen.

(siehe Tafel)

ad HA 2.3:

Ein Muss für alle Übungsteilnehmer!!

Offenbar gibt es zwei Sorten von Kugeln, die zufällig ausgewählt werden, ähnlich wie bei der Auswahl von 10 Karten in einem Skatspiel und der Unterscheidung nach Buben und Nicht-Buben (siehe Vorlesung Beispiel 19).

Allerdings hängt die Auswahl von unterschiedlichen Abbruchbedingungen ab, die letztendlich den Gewinn realisieren.

Betrachten Sie die erreichte „Spielsituation“ als Inhalt der Urnen vor der nächsten Ziehung.

Bemerkung:

Der momentane Gewinn eignet sich nicht als Spielsituation, weil man möglicherweise in die gleiche Situation zurückkehren kann. Dafür benötigen wir später Markov-Diagramme.

Sei X eine Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf $(\Omega, \Pr)$.

Wiederholung der Definitionen für:

Wertebereich W_X

Dichte f_X

Verteilungsfunktion F_X

Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$

Varianz $\mathrm{Var}[X]$

von X.

1. A priori ist das Gewinn-Ergebnis bei Strategie A klar!

   Stellen Sie trotzdem den Baum der möglichen Übergänge in die Spielsituationen dar.

   Definieren Sie den Ergebnisraum (Blätter des Übergangsbaumes), den G_A abbildet, als Menge von Sequenzen von Spielsituationen!

2. Die Menge der relevanten Spielsituationen lässt sich in einem 3×4 Gitter darstellen.

   Die Abbruchbedingung mit dem Münzwurf halbiert in jedem Schritt die Wahrscheinlichkeit der Auswahl einer Spielsituation.

3. Unter der Bedingung, dass zunächst zwei positive Kugeln gezogen wurden, kann gestoppt werden.
Mit welcher Begründung?

   Solange der momentane Gewinn nicht größer als 1 ist, braucht nicht gestoppt zu werden.
   Mit welcher Begründung?

   (Vermutung: $\mathbb{E}[G_C] = 1,5$)

3. Vorbereitung auf TA Blatt 2

3.1 VA 1

Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

1. $X :=$
   Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.

Lösung:

Es gilt

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n \cdot Pr[X=n] \\
&= \sum_{n\geq 1} n \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6}\frac{1}{(1-\frac{5}{6})^2} = 6\,.
\end{aligned}
$$

Wegen

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{n\geq 1} n^2 \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X] &= \sum_{n\geq 1} n(n-1) \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \sum_{n\geq 2} n(n-1) \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \\
&= \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{(1-\frac{5}{6})^3} = 60,
\end{aligned}$$

mithin

$$\mathbb{E}[X^2] = 66$$

und

$$\mathsf{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 30.$$

2. $Y :=$
Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis `C` gezogen wurde.

Lösung:

Es gilt

$$\mathbb{E}[Y] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 2 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 6 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{21}{6}.$$

Wegen

$$\mathbb{E}[Y^2] = 1 \cdot \frac{1}{6} + 4 \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{5} + \cdots + 36 \cdot \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2} = \frac{91}{6}$$

ist

$$\text{Var}\,[Y] = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 = \frac{35}{12}.$$

3. $Z :=$
   Anzahl der Züge (ohne Zurücklegen) bis beide 0 gezogen wurden.

Lösung:

Zunächst wird die Wahrscheinlichkeit, dass in k Schritten genau ein O ausgewählt wird, bestimmt mit

$$\frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{4}{k-1}}{\binom{6}{k}}\,.$$

Erinnerung: hypergeometrische Verteilung!

Dann folgt

$$\mathbb{E}[Z] = 2 \cdot (\frac{2}{6}) \cdot \frac{1}{5} + 3 \cdot \binom{2}{1}(\frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 5}) \cdot \frac{1}{4} + 4 \cdot \binom{3}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4}) \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+5 \cdot \binom{4}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}) \cdot \frac{1}{2} + 6 \cdot \binom{5}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}) = \frac{14}{3}.$$

Wegen

$$\mathbb{E}[Z^2] = 4 \cdot (\frac{2}{6}) \cdot \frac{1}{5} + 9 \cdot \binom{2}{1}(\frac{2 \cdot 4}{6 \cdot 5}) \cdot \frac{1}{4} + 16 \cdot \binom{3}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3}{6 \cdot 5 \cdot 4}) \cdot \frac{1}{3} +$$

$$+25 \cdot \binom{4}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3}) \cdot \frac{1}{2} + 36 \cdot \binom{5}{1}(\frac{2 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}) = \frac{70}{3}$$

ist

$$\mathrm{Var}(Z) = \mathbb{E}[Z^2] - \mathbb{E}[Z]^2 = \frac{14}{9}.$$

3.2 VA 2

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ (mindestens) einmal vorgekommen ist.

Sei X eine Zufallsvariable, deren Wert durch die entsprechende Anzahl der Würfe bestimmt.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$!

Lösung:

Das Experiment kann in 6 aufeinanderfolgende Phasen eingeteilt werden. In jeder Phase $i \in [6]$ werden Augenzahlen geworfen, die in vorausgegangenen Phasen schon einmal gewürfelt worden sind und zwar so lange, bis eine neue Augenzahl geworfen wird, die bisher noch nicht geworfen wurde. Dann genau ist die Phase i abgeschlossen.

Falls $i < 6$, dann fährt man man mit Phase $i + 1$ fort.

Wenn wir der Phase i eine Menge $g \subseteq [6]$ mit $|g| = i - 1$ zuordnen, dann läßt sich für Phase i die Ergebnismenge $\Omega = \{x_1 x_2 \ldots x_n \in [6]^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$ zusammen mit der Teilmenge

$$\Omega_g = \{x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z \in [6]^* \;;\; n \in \mathbb{N},\, x_k \in g,\, z \in ([6] \setminus g)\}$$

betrachten.

Wir definieren für $n \in \mathbb{N}$ das Ereignis

$$E_n = \{x_1 x_2 \dots x_{n-1} z \in [6]^* \,;\, x_k \in g,\ z \in ([6] \setminus g)\}$$

und ordnen ihm die folgende Wahrscheinlichkeit zu:

$$\Pr_g[E_n] \;=\; \left(\frac{|g|}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{6-|g|}{6} \;=\; \left(\frac{i-1}{6}\right)^{n-1} \cdot \left(1 - \frac{(i-1)}{6}\right).$$

Das Ereignis E_n bedeutet, dass wir $n-1$ mal eine in den früheren Phasen schon gewürfelte Augenzahl würfeln und beim n-ten Wurf eine bisher nicht gewürfelte Augenzahl erhalten.

Damit können wir für die Phase i eine Zufallsvariable $X_i : \Omega_g \to \mathbb{R}$ definieren, die jeweils die Anzahl n der Würfe in der Phase i ausgibt.

X_i ist eine geometrisch verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 1 - \frac{(i-1)}{6}$. Für Erwartungswert und Varianz folgt nach Vorlesung

$$\mathbb{E}[X_i] = p^{-1} = \frac{6}{6 - i + 1}$$

und

$$\mathrm{Var}[X_i] = \frac{1 - p_i}{p_i^2} = \left(\frac{6}{6 - i + 1}\right)^2 \cdot \frac{(i-1)}{6}\,.$$

Es gilt $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$.
Es folgt

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{6} p_i^{-1} = 6/6 + 6/5 + 6/4 + \cdots + 6/1 = 14.7$$

Da die Menge der X_i unabhängig ist, gilt

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i=1}^{6} \frac{1-p_i}{p_i^2} = 0 + \frac{5/6}{1/36} + \frac{4/6}{4/36} + \cdots + \frac{1/6}{25/36} = 38.99\,.$$

3.3 VA 3

Gegeben seien zwei Zufallsvariable X und Y. Zeigen Sie:

1. Es gilt
$$\mathrm{Var}[X+Y] + \mathrm{Var}[X-Y] = 2\cdot\mathrm{Var}[X] + 2\cdot\mathrm{Var}[Y]\,.$$

2. Wenn X und Y die gleiche Varianz haben, so gilt
$$\mathbb{E}[(X+Y)\cdot(X-Y)] = \mathbb{E}[X+Y]\cdot\mathbb{E}[X-Y]\,.$$

Lösung:

Zur Lösung von Gleichungen, die Erwartungswert und Varianz enthalten, benötigt man die folgenden Beziehungen für Zufallsvariable $X, X_1, \ldots, X_n$ über demselben Wahrscheinlichkeitsraum, und beliebige $a, b, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$:

Linearität des Erwartungswerts:

$$\mathbb{E}[a_1X_1+a_2X_2+\ldots+a_nX_n] = a_1\mathbb{E}[X_1]+a_2\mathbb{E}[X_2]+\ldots+a_n\mathbb{E}[X_n]\,.$$

Varianz als Differenz:

$$\mathrm{Var}\,[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2\,.$$

Varianz affin transformierter Variablen:

$$\mathrm{Var}\,[aX+b] = a^2\mathrm{Var}\,[X]\,.$$

1

$$
\begin{aligned}
&\mathsf{Var}[X+Y] + \mathsf{Var}[X-Y] \\
&\quad = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2 + \mathbb{E}[(X-Y)^2] - \mathbb{E}[X-Y]^2 \\
&\quad = 2\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[Y^2] - (2\mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[Y]^2) \\
&\quad = 2 \cdot \mathsf{Var}[X] + 2 \cdot \mathsf{Var}[Y].
\end{aligned}
$$

2. Es gilt

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X) = \mathrm{Var}(Y) \quad &\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \\ &\Rightarrow \quad \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] = \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2\end{aligned}$$

und damit, mit Benützung der Linearität von $\mathbb{E}$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[(X+Y)(X-Y)] &= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] \\ &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] \\ &= \mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2 \quad \text{(siehe oben)} \\ &= (\mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y])(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y]) \\ &= \mathbb{E}[X+Y]\mathbb{E}[X-Y]\,.\end{aligned}$$