Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl Informatik XIV
Prof. Dr. Susanne Albers
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2014
Lösungsblatt 4
16. Mai 2014

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir greifen Tutoraufgabe 4 von Blatt 2 auf und wandeln die Einkleidung der Aufgabe wie folgt geringfügig ab. Wir haben n Schlüssel ungeordnet in der Tasche. Genau einer davon passt für die Tür, die wir öffnen wollen. Wir können die Schlüssel nur einzeln Laplace-zufällig aus der Tasche ziehen, testen, ob der Schlüssel sperrt, und auf dem Tisch ablegen, wenn er nicht sperrt. Wir ziehen so lange, bis der richtige Schlüssel gefunden wurde.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass der k-te Schlüssel passt? $(1 \leq k \leq n)$

1. Berechnen Sie diese Wahrscheinlichkeit, indem Sie jeweils die Wahrscheinlichkeit verwenden, im nächsten Zug den richtigen Schlüssel zu ziehen (siehe TA 4).

2. Stellen Sie sich nun vor, alle Schlüssel zu ziehen und der gezogenen Reihe nach auf den Tisch zu legen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt der richtige Schlüssel an der k-ten Stelle auf dem Tisch und wie kann man zu deren Berechnung das Gleichverteilungsargument ins Spiel bringen?

Lösung

Wir beschreiben die Schlüsselmenge durch eine n-elementige Multimenge S_1 von Buchstaben f und w, die genau einmal den Buchstaben w enthält. Es sei w der passende Schlüssel.
Sei $x = x_1x_2\ldots x_n$ eine Anordnung (Wort) aller Buchstaben von S_1, d.h. es gibt genau ein i mit $x_i = w$. Dann stellt x eine vollständige Ziehung der Schlüssel dar. Seien $\Omega_1 = \{x\,;\, x \text{ ist eine Anordnung von } S_1\}$ und Pr die Laplace-Gleichverteilungsdichte auf Ω_1. Für alle $x \in \Omega_1$ gilt $\Pr(x) = \frac{1}{n}$.
Sei $X_1 : \Omega_1 \to \mathbb{N}_0$ die Zufallsvariable über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_1, \Pr)$, so dass $X_1(x) = i$ genau dann, wenn $x_i = w$.

1.
$$\Pr[X_1\!=\!k] \;=\; \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-2}{n-1}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{n-k+2}\cdot\frac{1}{n-k+1} \;=\; \frac{1}{n}\,.$$
(3P)

2. Für das Ereignis $X_1 = k$ gilt $(X_1 = k) \;=\; \{x\,;\, x_k = w\}$, mithin $|X_1 = k| = 1$. Da dieses Ereignis also aus genau einem Elementarereignis besteht, folgt sofort
$$\Pr[X_1\!=\!k] = \frac{1}{n}\,.$$
(2P)

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir führen die vorausgehende Aufgabe mit n Schlüsseln fort. Leider ist die zu öffnende Tür nun eine stark gesicherte Tresortür, zu deren Öffnung man beide der einzigen zwei passenden Schlüsseln benötigt.

Wir beschreiben die Schlüsselmenge durch eine n-elementige Multimenge S von Buchstaben f und w, die genau zweimal den Buchstaben w enthält.
Sei $x = x_1 x_2 \dots x_n$ eine Anordnung (Wort) aller Buchstaben von S, d.h. es gibt genau zwei i mit $x_i = w$. Dann stellt x eine vollständige Ziehung der Schlüssel dar. Seien $\Omega = \{x\,;\, x \text{ ist eine Anordnung von } S\}$ und Pr die Laplace-Gleichverteilungsdichte auf Ω.
Sei $X : \Omega \to \mathbb{N}_0$ die Zufallsvariable über dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$, so dass $X(x) = i$ genau dann gilt, wenn $x_j = x_i = w$ für ein $j < i$ gilt.

1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat man in der k-ten Ziehung die zwei passenden Schlüssel erstmals vorliegen?

2. Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ in Abhängigkeit von n! Testen Sie Ihre Formel auf Korrektheit mit Hilfe der Ergebnisse aus VA 1 von Blatt 3.

   Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{n} k(k-1) = \frac{n(n+1)(n-1)}{3}$. (Siehe DS Vorl.)

Lösung

1. Es gilt

$$|\Omega| = \binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2} \quad \text{mithin} \quad \Pr(x) = \frac{2}{n(n-1)} \quad \text{für alle} \quad x \in \Omega\,.$$

   Für das Ereignis $X = k$ gilt $(X = k) = \{x\,;\, \exists j : j < k \land x_j = x_k = w\}$. Dieses Ereignis besteht offenbar aus $k-1$ Elementarereignissen. Daraus folgt sofort

$$\Pr[X{=}k] = (k-1) \Big/ \binom{n}{2} = \frac{2(k-1)}{n(n-1)}\,.$$

(2P)

2.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{k=0}^{n} k \cdot \frac{2(k-1)}{n(n-1)} \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \sum_{k=1}^{n} k(k-1) \\
&= \frac{2}{n(n-1)} \cdot \frac{n(n+1)(n-1)}{3} \\
&= \frac{2(n+1)}{3}\,.
\end{aligned}$$

   Für $n = 6$ folgt in Übereinstimmung mit VA 1

$$\mathbb{E}[X] = \frac{2(n+1)}{3} = \frac{14}{3}\,.$$

(3P)

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir betrachten drei 6-seitige Würfel A, B und C. Würfel A hat 4 rote und 2 blaue Seiten. Würfel B hat 2 rote und 4 blaue Seiten. Der Würfel C ist ein üblicher Würfel, der die Augenzahlen 1 bis 6 zeigt. Wir nehmen an, dass das Auftreten von Würfelseiten bei Würfen Laplace-verteilt ist.

Experiment: Es wird zunächst C geworfen. Falls die 6 geworfen wurde, so wird Würfel B gewählt, ansonsten wird Würfel A gewählt. Mit dem gewählten Würfel werden dann $n \geq 3$ Würfe durchgeführt. Das Ergebnis ist ein Wort $w \in \{\text{rot}, \text{blau}\}^*$ der Länge n.

1. Wir sagen, dass das Ereignis R_i eintritt, wenn das i-te Zeichen der Ausgabe w des Experiments 'rot' ist. Wir nehmen an, dass die Ereignisse R_1 und R_2 eingetreten sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass auch das Ereignis R_3 eintritt?

2. Wir nehmen an, dass das Ereignis $\bigcap_{i=1}^n R_i$ eingetreten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Experiment der Würfel B gewählt wurde?

Lösung

Der Ergebnisraum ist $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,;\, x_i \in \{\text{rot}, \text{blau}\}\}$. Die Wahrscheinlichkeitsfunktion Pr über Ω ist gegeben mittels Fallunterscheidung der totalen Wahrscheinlichkeit und des Produkts von Wahrscheinlichkeiten der Komponenten des Ergebnisses in den jeweiligen Fällen.

$$\Pr[x_i|C \neq 6] = \begin{cases} \frac{2}{3} : x_i = \text{rot} \\ \frac{1}{3} : x_i = \text{blau} \end{cases}, \quad \Pr[x_i|C = 6] = \begin{cases} \frac{1}{3} : x_i = \text{rot} \\ \frac{2}{3} : x_i = \text{blau} \end{cases},$$

und damit

$$\Pr((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = \Pr[C \neq 6] \cdot \prod_{i=1}^{n} \Pr[x_i|C \neq 6] + \Pr[C = 6] \cdot \prod_{i=1}^{n} \Pr[x_i|C = 6].$$

1. Speziell für $\Pr[R_1 \cap R_2]$ und $\Pr[R_1 \cap R_2 \cap R_3]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pr[R_1 \cap R_2] &= \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{7}{18}, \\ \Pr[R_1 \cap R_2 \cap R_3] &= \frac{5}{6} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{41}{162}. \end{aligned}$$

   Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\Pr[R_3 \mid R_1 \cap R_2] = \frac{\Pr[R_1 \cap R_2 \cap R_3]}{\Pr[R_1 \cap R_2]} = \frac{41}{63}.$$

(3P)

2. Wir suchen $\Pr[C = 6 \mid \bigcap_{i=1}^n R_i]$. Nun gilt

$$\Pr[C = 6 \mid \bigcap_{i=1}^{n} R_i] = \frac{\Pr[C = 6] \cdot \Pr[\bigcap_{i=1}^n R_i \mid C = 6]}{\Pr[\bigcap_{i=1}^n R_i]}.$$

Sämtliche Werte der rechten Seite der Gleichung sind uns bekannt und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[C=6]\cdot\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} R_i \,|\, C=6] &= \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n ,\\
\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} R_i] &= \frac{5}{6}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n ,\\
\Pr[C=6 \,|\, \bigcap_{i=1}^{n} R_i] &= \frac{1}{5\cdot 2^n+1} .
\end{aligned}$$

(2P)

Interpretation: Je öfter rot gewürfelt wird, desto wahrscheinlicher ist es, dass am Anfang nicht $C = 6$ gewürfelt wurde. Dies ist eine typische Argumentation nach dem Satz von Bayes.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine unfaire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ „Zahl“ zeigt, wobei $0 \le p \le 1$ und $p \ne \frac{1}{2}$ gilt. Wir werfen eine solche Münze n mal und erhalten dabei k mal „Kopf“ und $n-k$ mal „Zahl“.

1. Beschreiben Sie das Experiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $W = (\Omega_n, \Pr)$.
2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k-mal Kopf erscheint.

Lösung

1. Als Ergebnisraum Ω_n können wir statt Zeichenreihen auch die n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \{K, Z\}$ wählen, d. h. $\Omega_n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n)\,;\, x_i \in \{K, Z\}\}$.

   Das Wahrscheinlichkeitsmaß wird für Elementarereignisse definiert durch

   $\Pr((x_1, x_2, \ldots, x_n)) = p^k(1-p)^{n-k}$, wobei k die Anzahl der Vorkommen von K in $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei.

   Wir zeigen, dass $W = (\Omega_n, \Pr)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, wie folgt:

   - Wegen $0 \le p \le 1$ gilt $0 \le (1-p) \le 1$. Daraus folgt $0 \le p^k(1-p)^{n-k} \le 1$, d. h. $0 \le \Pr(x) \le 1$.
   - Es gibt genau $\binom{n}{k}$ viele Ereignisse x, in denen K genau k mal vorkommt. Wir rechnen mithilfe des Binomialsatzes

   $$\sum_{x\in\Omega} \Pr(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1\,.$$

   (3P)

2. Sei A das Ereignis, dass k mal Kopf erscheint. Dann gilt

   $$\Pr[A] = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\,.$$

   (2P)

Zusatzaufgabe 1 (wird nicht korrigiert)

Die erhaltenen Punkte bei 4 Aufgaben A_1, A_2, A_3 bzw. A_4 eines Übungsblattes seien bei vollständiger Korrektur a_1, a_2, a_3 bzw. a_4. Die erhaltene Punktesumme ist dann $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

Zur Reduzierung der Korrekturarbeit werden Laplace-zufällig 2 Aufgaben ausgewählt, diese beiden Aufgaben vollständig korrigiert und anschließend die Punktesumme P der beiden Aufgaben verdoppelt gutgeschrieben.

Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[P]$ der gutgeschriebenen Punktesumme!

Lösung

Es gilt $\mathbb{E}[P] = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

***Hinweis:** Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.*

Vorbereitung 1

In der statistischen Physik pflegt man die Verteilung gewisser Teilchen (Moleküle, Photonen, Elektronen, usw.) zu betrachten. Man nimmt an, dass sich jedes Teilchen durch einen Vektor von Kenngrößen charakterisieren läßt, der der Zuordnung des Teilchens in eine von N „Zellen“ eines „Phasenraumes“ entspricht. Der Zustand eines physikalischen Systems wird dann dadurch beschrieben, dass man angibt, wie viele Teilchen sich jeweils in einer Zelle befinden.

Die Annahme, dass jede Lage eines n Gasmoleküls in N Zellen gleichwahrscheinlich ist, ist Basis der *Maxwell-Boltzmannsche Statistik*. Dabei wird die Unterscheidbarkeit der Gasmoleküle vorausgesetzt.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $p(k,n)$, dass sich genau k Gasmoleküle in einer beliebigen Zelle Z der N Zellen befinden, einer Binomialverteilung genügen und zeigen Sie dazu

$$p(k,n) = b(k; n, \tfrac{1}{N}) := \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-k} .$$

Lösung

Jede örtliche Zuordnung der n Gasmoleküle $G_1, \ldots, G_n$, so dass sich jedes Molekül in einer der N Zellen $Z_1, \ldots, Z_N$ befindet, stellt ein Elementarereignis dar. Wir codieren die Gasmoleküle durch natürliche Zahlen $1, 2, \ldots, n$ und die Zellen durch natürliche Zahlen $1, 2, \ldots, N$. Die Elementarereignisse $e \in \Omega$ codieren wir durch n-Tupel $e = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ mit $e_i \in [N]$ und der Bedeutung, dass der Wert der i-ten Komponente von e die Zelle liefert, in der sich das Molekül G_i befindet. Es gilt mit Anwendung des Laplace Prinzips

$$e \in \Omega = \{(e_1, e_2, \ldots, e_n)\,;\, e_i \in [N]\}\,,\ \Pr[e] = N^{-n}\,.$$

Wir betrachten nun eine bestimmte Zelle Z.
Für jedes der n Moleküle definieren wir eine Bernoulli Variable X_i, die angibt, ob sich bei Ereignis e das Molekül G_i in der Zelle Z befindet oder nicht. Die Zufallsvariablen X_i sind Bernoulli-verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{N}$.

Die Zufallsvariablen $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sind unabhängig.
Nun betrachten wir die Zufallsvariable

$$X_Z = \sum_{i=1}^{n} X_i\,.$$

X_Z ist binomialverteilt, i. Z. $X \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{1}{N})$, mit Dichtefunktion

$$f_{X_Z}(k) = b(k; n, \tfrac{1}{N}) := \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{N}\right)^k \cdot \left(\frac{N-1}{N}\right)^{n-k}\,.$$

$f_{X_Z}(k)$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Vorbereitung 2

Wiederholen Sie die Tutoraufgabe 4 von Blatt 3.

Vorbereitung 3

1. Wir wählen nacheinander (gleichverteilt) zufällig und unabhängig Buchstaben aus der Multimenge der Buchstaben des Wortes `CHOOSE` aus. Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

   $Z :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis zum dritten Mal `O` gezogen wurde.

2. Inwiefern kann man behaupten, dass die negative Binomialverteilung sowohl die geometrische Verteilung als auch die Binomialverteilung als Spezialfälle enthält?

Lösung

1. Bestimmung der Verteilung für Z:

   Die Aufgabe ist ein Spezialfall der Bestimmung der Wahrscheinlichkeit, dass bei der Wiederholung z der Auswertung einer Bernoulli mit Erfolgswahrscheinlichkeit p verteilten Zufallsvariablen I mit Erfolgswahrscheinlichkeit p zum x-ten Mal das Ereignis $I = 1$ eintritt.

   Die Wahrscheinlichkeitsdichte von Z ist

   $$f_Z(z) = \binom{z-1}{x-1} p^x q^{z-x}\,.$$

   Für $p = \frac{1}{3}$ und $k = 3$ folgt also

   $$f_Z(z) = \binom{z-1}{2} \left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{2}{3}\right)^{z-3}\,.$$

   Berechnung $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$:

   Wir berechnen nicht direkt, sondern nutzen die folgende Darstellung:

   Es gilt

   $$Z = Z_1 + Z_2 + Z_3\,,$$

wobei Z_1, Z_2, Z_3 unabhängige und geometrisch verteilte Zufallsvariable sind mit $p = \frac{1}{3}$.

Dann gilt $\mathbb{E}[Z_i] = 3$ und $\mathrm{Var}[Z_i] = \frac{q}{p^2} = \frac{2}{3} \cdot 9 = 6$.

Ergebnis:

$$\mathbb{E}[Z] = 3 \cdot 3 = 9 \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}[Z] = 3 \cdot 9 = 27\,.$$

2. Wir werden auf den Folien zur Zentralübung am 8. Mai alle damit zusammenhängenden Verteilungen darstellen.

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die statistische Verteilung von Photonen bzw. Elektronen.

Photonen und Elektronen werden nicht als unterscheidbare Teilchen betrachtet. Demgemäß gilt die Maxwell-Boltzmannsche Statistik (siehe VA 1) nicht.

Die auf der Annahme der Nichtunterscheidbarkeit von Teilchen beruhende Statistik nennt man *Bose-Einsteinsche Statistik*. Sie wird für Photonen angewendet.

Für Elektronen hat man noch die zusätzliche Einschränkung (*Paulisches Prinzip*), dass sich in einer Zelle stets höchstens ein Teilchen befinden kann. Diesen Umstand berücksichtigt die *Fermi-Diracsche Statistik*.

Man nimmt wie in VA 1 an, dass sich jedes Teilchen durch einen Vektor von Kenngrößen charakterisieren läßt, der der Zuordnung des Teilchens in eine von N „Zellen“ eines „Phasenraumes“ entspricht, Der Zustand des Phasenraumes wird beschrieben, indem man angibt, wie viele Teilchen sich jeweils in einer Zelle befinden.

1. Bestimmen Sie nach Bose-Einstein die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer bestimmten Zelle von N Zellen k von n Photonen befinden.

2. Bestimmen Sie nach Fermi-Dirac die Wahrscheinlichkeit, dass sich in einer bestimmten Zelle von N Zellen eines von n Elektronen befindet.

Lösung

1. Das Elementarereignis, n Photonen auf N Zellen verteilt zu haben, ist genau dann definiert, falls für jede Zelle die Anzahl der enthaltenen Photonen feststeht. Ein Elementarereignis entspricht also genau einer n-elementigen Multiteilmenge der Menge der Zellen. Die Anzahl $anz_{MTM}(n, N)$ von n-elementigen Multiteilmengen einer N-elementigen Menge ist bekanntlich

$$anz_{MTM}(n, N) = \frac{N^{\overline{n}}}{n!} = \binom{N+n-1}{n}.$$

Die Relation „Multiteilmenge“ bezeichnen wir mit $\subseteq_\mu$. Wir definieren

$$m \in \Omega = \{m\,;\, m \subseteq_\mu [N], |m| = n\}\,,\ \Pr(m) = \binom{N+n-1}{n}^{-1}.$$

Wir betrachten nun eine bestimmt Zelle Z.

Wenn Z genau k Photonen enthält, dann sind $n-k$ Photonen auf die restlichen $N-1$ Zellen verteilt und dafür gibt es genau

$$anz_{MTM}(n-k, N-1) = \frac{(N-1)^{\overline{n-k}}}{(n-k)!} = \binom{N+n-k-2}{n-k}$$

Möglichkeiten.

Sei X_Z die Zufallsvariable, die für die Zelle Z die Anzahl der enthaltenen Photonen angibt. Dann gilt für die Dichtefunktion von X_Z

$$f_{X_Z}(k) = \binom{N+n-k-2}{n-k} \cdot \binom{N+n-1}{n}^{-1} = \frac{(N-1) \cdot n^{\underline{k}}}{(N+n-1)^{\underline{k+1}}} \quad .$$

$f_{X_Z}(k)$ ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

2. Das Elementarereignis, n Elektronen auf N Zellen verteilt zu haben, ist genau dann definiert, falls für jede Zelle feststeht, ob sie ein Elektron enthält oder nicht. Ein Elementarereignis entspricht also genau einer n-elementigen Teilmenge der Menge der Zellen. Die Anzahl $anz_{TM}(n, N)$ der n-elementigen Teilmengen einer N-elementigen Menge ist bekanntlich

   $$anz_{TM}(n, N) = \binom{N}{n} .$$

   Wir definieren mit Anwendung des Prinzips von Laplace

   $$m \in \Omega = \{m\,;\, m \subseteq [N]\}\,,\ \Pr(m) = \binom{N}{n}^{-1} .$$

   Wir betrachten nun wieder eine bestimmt Zelle Z.

   Die Anzeige der Anzahl der in Z enthaltenen Elektronen reduziert sich nun auf eine Bernoulli-verteilte Indikatorvariable X_Z. Wenn Z ein Elektron enthält, dann befinden sich in den restlichen $N-1$ Zellen die restlichen $n-1$ Elektronen. Dafür gibt es genau

   $$anz_{TM}(n-1, N-1) = \binom{N-1}{n-1}$$

   Möglichkeiten. Die Erfolgswahrscheinlichkeit p von X_Z ist also

   $$p = \binom{N-1}{n-1} \cdot \binom{N}{n}^{-1} = \frac{n}{N} .$$

   p ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Tutoraufgabe 2

1. Zeigen Sie für alle $j \in \mathbb{N}$:

$$|\{(s_1, \ldots, s_j) \in \{1, \ldots, n\}^j\,;\, s_1 + \ldots + s_j \le n\}| = \binom{n}{j}\,.$$

2. Sie führen das folgende mehrstufige Experiment durch:

   In jedem Schritt wählen Sie zufällig und gleichverteilt eine Zahl zwischen 1 und n aus, d. h., in jedem Schritt und für alle i mit $1 \le i \le n$ ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie die Zahl i ziehen, gleich $\frac{1}{n}$. Das Experiment endet, nachdem die Summe der gezogenen Zahlen das erste Mal größer als n ist. Die Zufallsvariable X gibt an, nach wie vielen Schritten das Experiment endet.

   Zeigen Sie:

$$\Pr[X \ge j+1] = \frac{\binom{n}{j}}{n^j} \quad \text{für alle } j = 0, 1, \ldots\ .$$

3. Folgern Sie

$$\mathbb{E}[X] = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\,.$$

Lösung

Wir benützen die folgende Bezeichnung.

$$S_{j,n} = \{(s_1, \ldots, s_j) \in \{1, \ldots, n\}^j\,;\, s_1 + \ldots + s_j \le n\}\,.$$

1. Man stellt n als Summe von Einsen dar und markiert davon j Einsen. Zu einer gegebenen Markierung werden für alle i mit $1 \le i \le j$ die Zahlen s_i definiert als die Summe aller Einsen, die rechts von der Eins mit Nummer $i-1$ stehen bis einschließlich der Eins mit Nummer i. Auf diese Weise kann man alle möglichen Summen $s_1 + \ldots + s_j \le n$ darstellen. Die Markierungen lassen sich eineindeutig den j-Tupeln $(s_1, \ldots, s_j)$ zuordnen. Damit gilt für die Anzahl $anz_M(j,n)$ der Markierungen von j Einsen unter den n Einsen die Gleichung

$$anz_M(j,n) = |S_{j,n}|\,.$$

   Nun ist aber die Anzahl $anz_M(j,n)$ der Markierungen von j Einsen unter den n Einsen genau gleich der Anzahl von i-elementigen Teilmengen von $[n]$. D. h., es gilt

$$anz_M(j,n) = \binom{n}{j}\,.$$

2. Für $j = 0$ ist die Gleichung offenbar richtig, denn die Werte sind auf beiden Seiten gleich 1.

   Wir betrachten die Elementarereignisse des Ziehens von n Zahlen, d. h. wir setzen $\Omega = \{(s_1, s_2, \ldots, s_n)\,;\, s_i \in [n]\}$ mit $\Pr[x] = \frac{1}{n^n}$ mit $x \in \Omega$.

Für $j > 0$ tritt das Ereignis $E :=$ „$X \geq j+1$“, d. h. $(s_1, s_2, \ldots, s_j, s_{j+1}, \ldots, s_n) \in E$, genau dann ein, wenn $(s_1, s_2, \ldots, s_j) \in S_{j,n}$ gilt. Da alle s_k mit $j+1 \leq k \leq n$ beliebige Werte annehmen können, erhalten wir

$$|E| = |S_{j,n}| \cdot n^{n-j}\,.$$

Es folgt

$$\Pr[X \geq j+1] = \frac{|S_{j,n}| \cdot n^{n-j}}{n^n} = \frac{\binom{n}{j}}{n^j}\,.$$

3. Zur Berechnung des Erwartungswertes von X wenden wir Satz 34 der Vorlesung an.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X \geq i] \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\binom{n}{i-1}}{n^{i-1}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\binom{n}{i}}{n^i} \\
&= \sum_{i=0}^{n} \frac{\binom{n}{i}}{n^i} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{1}{n}\right)^i \cdot 1^{n-i} \\
&= \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 3

Mit einem fairen Würfel mit Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird wie folgt gespielt. Beim Start wird der Würfel 1 Mal geworfen. Die geworfene Augenzahl sei x. Dem Wurf geben wir die Nummer 0. Nun wird so lange gewürfelt, bis wieder x erscheint. Die dabei (nach dem Wurf Nummer 0) geworfenen Augenzahlen y mit $y \neq x$ werden addiert. Das Ergebnis sei die Zufallsvariable Z.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X_i die Augenzahl im i-ten Wurf mit $1 \leq i \leq n-1$. Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung, dass beim Start die Augenzahl x geworfen wurde und das Spiel im n-ten Schritt endet.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel im n-ten Schritt?

3. Geben Sie für Z den Erwartungswert an.

4. Beschreiben Sie mit Hilfe der Faltung von Dichtefunktionen $f_{X_i}, i = 1, 2, \ldots$ ein Verfahren zur Berechnung der Dichtefunktion f_Z.

Lösung

Wir schreiben kurz $SpE = n$ für „Spielende im n-ten Schritt“.
Der Startwurf mit Nummer 0 sei X_0.

1. Sei $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $n \in \mathbb{N}$.
   Wir berechnen zunächst den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i | X_0 = x \wedge SpE = n]$ mit $1 \leq i \leq n-1$.

Jeder Wert $y \neq x$ tritt bei X_i auf mit Wahrscheinlichkeit

$$Pr[X_i{=}y|X_i{\neq}x] = \frac{\Pr[X_i = y \wedge X_i \neq x]}{\Pr[X_i \neq x]} = \frac{\Pr[X_i = y]}{\Pr[X_i \neq x]} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}\,.$$

Wir erhalten

$$\mathbb{E}[X_i|X_0 = x \wedge SpE = n] \;=\; \sum_{(1\leq y\leq 6)\wedge(y\neq x)} \frac{1}{5}\cdot y = \frac{21-x}{5}\,,$$

und damit

$$\mathbb{E}[Z_n|X_0 = x \wedge SpE = n] \;=\; (n-1)\frac{21-x}{5}\,.$$

2. Es gilt für alle Startwerte x und alle $n \geq 1$

$$\Pr[SpE = n] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\,.$$

3. Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung $SpE = n$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n|SpE = n] \;&=\; \sum_{x\in[1..6]} \mathbb{E}[Z_n|SpE = n \wedge X_0 = x]\cdot \Pr[X_0 = x]\\ &=\; \sum_{x\in[1..6]} (n-1)\frac{21-x}{5}\cdot\frac{1}{6} = (n-1)\cdot 21\cdot\frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

Durch Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z] \;&=\; \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n|SpE = n]\cdot\Pr[SpE = n]\\ &=\; \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\cdot 21\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\\ &=\; \textstyle\frac{35}{72}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\\ &=\; \textstyle\frac{35}{72}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right)^2 \;=\; \frac{35}{2}\,.\end{aligned}$$

4. Die Berechnung der Dichte f_Z erfolgt in zwei Schritten. Wir betrachten den folgenden 2. Schritt zuerst. Sei f_{Z_n} die Dichte von Z_n. Dann gilt nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für alle $i \in \mathbb{N}$

$$f_Z(i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{Z_n}(i)\cdot\Pr[SpE = n]\,.$$

Der erste Schritt ist nun die Angabe der Dichte f_{Z_n} auf der Grundlage der bedingten Dichten $f_{X_i|X_0=x}$. Es gilt

$$f_{Z_n}(i) = \sum_{x=1}^{6}\frac{1}{6} f_{Z_n|X_0=x}(i)\,.$$

Wir bemerken, dass Z_n unter der Bedingung $X_0 = x$ eine Summe der unabhängigen Variablen X_i für $1 \leq i \leq n-1$ ist. Damit folgt mit Konvolution $\otimes$ der bedingten Dichten $f_{X_i|X_0=x}$ nach Satz der Vorlesung

$$f_{Z_n|X_0=x} = f_{X_1|X_0=x}\otimes f_{X_2|X_0=x}\otimes\ldots f_{X_{n-1}|X_0=x}\,.$$

Prinzipiell kann nun $f_Z(i)$ per Programm approximativ bestimmt werden.