Blatt 4

Notiztitel 24.05.2012

A 4.1

3 Fragen mit Antwortmöglichkeiten:

ja / nein / keine Antwort

$\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{2}{5}$

$X_i \hat{=}$ Punkte in i-ter Frage

(a)

$$\left.\begin{array}{l} Pr[X_i = 1] = \frac{2}{5} \\ Pr[X_i = 0] = \frac{3}{5} \end{array}\right\} X_i \sim Ber(\tfrac{2}{5})$$

$$A_1 = \underbrace{X_1 + X_2 + X_3}_{\text{unabh.}} \sim Bin(3, \tfrac{2}{5})$$

$\rightarrow \mathbb{E}[A_1] = 3 \cdot \frac{2}{5}$; $Var[A_1] = 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$

(b)

$$Pr[X_i = 1] = \frac{2}{5}$$

$$Pr[X_i = -\tfrac{1}{2}] = \frac{3}{5}$$

X_i "fast" Bernoulliverteilt.

$\rightsquigarrow$ Transformation in 0-1-ZV:

$$Y_i := \frac{2}{3}\left(X_i + \frac{1}{2}\right)$$

bzw. $X_i = \frac{3}{2} Y_i - \frac{1}{2}$

Also: $A_2 = \sum_{i=1}^{3} X_i = \frac{3}{2}\left(\sum_{i=1}^{3} Y_i\right) - \frac{3}{2}$

mit $\sum_{i=1}^{3} Y_i \sim Bin(3, \frac{2}{5})$

$\rightsquigarrow \mathbb{E}[A_2] \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Linearität}}}{=} \frac{3}{2} \mathbb{E}[\sum_{i=1}^{3} Y_i] - \frac{3}{2}$

$= \frac{3}{2}\left(3 \cdot \frac{2}{5}\right) - \frac{3}{2}$

$Var[A_2] \underset{\substack{\text{siehe} \\ \text{VL}}}{=} \frac{9}{4} Var[\sum_{i=1}^{3} Y_i]$

$= \frac{9}{4} \cdot 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5}$

c) $Pr[X_i = 1] = \frac{2}{5}$

$Pr[X_i = -\frac{1}{2}] = \frac{1}{5}$

$Pr[X_i = -1] = \frac{2}{5}$

$$A_3 = \max\{0, \sum_{i=1}^{3} X_i\}$$

Dichte von A_3:

- Reicht die Fälle mit $\sum_{i=1}^{3} X_i = \frac{n}{2} > 0$ zu betrachten für $n \in \{1,2,3,4,5,6\}$ „halbe Punkte"

Sei R, F, K die Anzahl der richtigen bzw. falschen bzw. „keinen" Antworten.

wobei: $0 \leq R, F, K \leq 3$
$\wedge \; R+F+K = 3$

Resultierende Punkte:

$$A_3 = \max\{0, 1\cdot R - 1\cdot F - \frac{1}{2}\cdot K\}$$

Es gilt: $Pr[R=r, F=f, K=k]$

$$= \binom{3}{r}\binom{3-r}{f}\binom{3-r-f}{k}\left(\frac{2}{5}\right)^r\left(\frac{2}{5}\right)^f\left(\frac{1}{5}\right)^k$$

Beachte:

$$0 < \frac{n}{2} = A_3 = R - F - \frac{1}{2}K$$

$$K = 3 - R - F$$

$$= \frac{3}{2}R - \frac{1}{2}F - \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad R = 1 + \frac{n+F}{3}$$

muss in $\mathbb{N}_0$ liegen

$\rightsquigarrow$ mögliche Kombinationen:

A_3	n	F	R	$Pr[A_3 = \frac{n}{2}]$
$1/2$	1	2	2	0
1	2	1	2	$\binom{3}{2}\binom{1}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{24}{125}$
$3/2$	3	0	2	$\binom{3}{2}\binom{1}{0}\binom{1}{1}\left(\frac{2}{5}\right)^2\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{12}{125}$
		3	3	0
2	4	2	3	0
$5/2$	5	1	3	0
3	6	0	3	$\binom{3}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{8}{125}$
		3	4	0

$\rightarrow$ Also $Pr[A_3 = 0] = 1 - \frac{24+12+8}{125}$

$$= \frac{81}{125}$$

$$\mathbb{E}[A_3] = 1 \cdot \frac{24}{125} + \frac{3}{2} \cdot \frac{12}{125} + 3 \cdot \frac{8}{125}$$

$$= \frac{24 + 18 + 24}{125} = \frac{66}{125}$$

$$\mathbb{E}[A_3^2] = \frac{1^2 \cdot 24 + 9/4 \cdot 12 + 9 \cdot 8}{125} = \frac{123}{125}$$

$\rightsquigarrow \mathrm{Var}[A_3] = \mathbb{E}[A_3^2] - \mathbb{E}[A_3]^2$

Vgl mit

halbe Punkte

$$\Big(\underbrace{\tfrac{2}{5} z^{2}}_{\Pr[X_1 = \frac{2}{2}]} + \underbrace{\tfrac{1}{5} z^{-1}}_{\Pr[X_i = \frac{-1}{2}]} + \underbrace{\tfrac{2}{5} z^{2}}_{\Pr[X_i = \frac{-2}{2}]}\Big)^3 = \sum_{j=-6}^{6} \underbrace{c_j}_{\Pr[\sum_{i=1}^{3} X_i = \frac{j}{2}]} z^{j}$$

A 4.2

X, Y, Z, W unabh. ZVen mit

$W \sim Bin(5, \frac{1}{3})$, $X \sim Geo(\frac{1}{2})$

$Y \sim Bin(20, \frac{3}{4})$, $Z \sim Geo(\frac{2}{5})$

Nach Vorlesung:

- $X_1, \dots, X_n$ unabh

Dann: ① $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ unabh.

② $$\mathbb{E}[X_1 \cdot \ldots \cdot X_n] = \prod_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_i]$$

$$\frac{1}{W+1} = f(W) \text{ für } f(x) = \frac{1}{1+x}$$

$\leadsto X, Y, Z, f(W)$ unabh.

Damit:

$$\mathbb{E}[(X+Z)(Y+Z) f(W)]$$

$$= \mathbb{E}[XY f(W) + XZ f(W) + ZY f(W) + Z^2 f(W)]$$

Linearität, dann ① & ②

$$= \Big(\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Z] + \mathbb{E}[Z]\mathbb{E}[Y] + \underbrace{\mathbb{E}[Z^2]}_{Var[Z] + \mathbb{E}[Z]^2}\Big)\mathbb{E}[f(W)]$$

$\rightsquigarrow$ Formeln für $\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y], \mathbb{E}[Z]$, $\mathrm{Var}[Z]$ in Folien

$\rightsquigarrow$ $\mathbb{E}[f(W)]$

$$= \sum_{k=0}^{5} f(k) \underbrace{\Pr[W=k]}_{\binom{5}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-3}}$$

$$\overset{\text{zu Fuß}}{=} \frac{665}{1458}$$

Afg. 3

Da $\{X_1, \dots, X_m\}$ unabh, auch

$\{h(X_1), \dots, h(X_m)\}$ unabh.

Nach Aufgabenstellung:

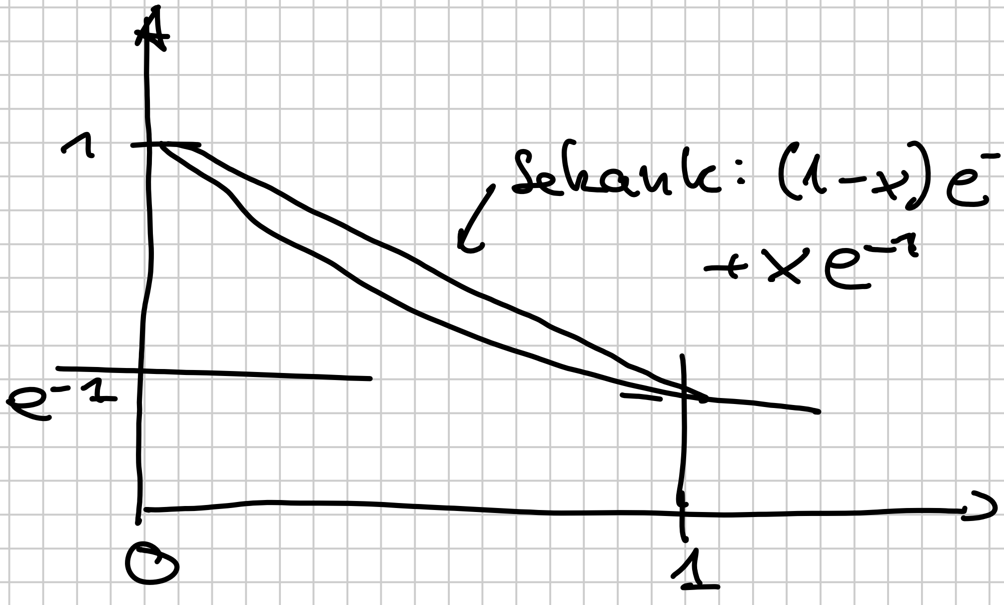
$h(X_i)$ gleich verteilt auf $\{0,1\}^L$

$\leadsto$ Setze $n = |\{0,1\}^L| = 2^L$ in

Formel aus Bsp. 20:

$$\Pr[\overline{K}_h] \leq e^{-\binom{m}{2} 2^{-L}}$$

Konvexität von e^{-x}



$\leadsto$ $e^{-x} \leq (1-x) + e^{-1}x$ über $[0,1]$

$$= 1 - \underbrace{(1-e^{-1})}_{\geq \frac{1}{2}} x \leq 1 - \frac{1}{2}x$$

$$\rightsquigarrow \Pr[\overline{K_h}] \le 1 - \frac{1}{2}\binom{m}{2} 2^{-L}$$

$$\rightsquigarrow \Pr[K_h] \ge \frac{1}{2}\binom{m}{2} 2^{-L}$$

(b) $$\Pr[K_h] = \Pr\Big[\bigcup_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [m]}} h(x_i) = h(x_j)\Big]$$

oder

$$\le \sum_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [m]}} \Pr[h(x_i) = h(x_j)]$$

$$= \sum_{i \neq j} \sum_{w \in \{0,1\}^L} \Pr[h(x_i) = w, h(x_j) = w]$$

$$\overset{\substack{x_i, x_j \\ \text{unabh.} \\ \text{für } i \neq j}}{=} \underbrace{\sum_{i \neq j}}_{\binom{m}{2}} \underbrace{\sum_{w \in \{0,1\}^L}}_{2^L \text{ mal}} 2^{-L} \cdot 2^{-L}$$

$$= \binom{m}{2} 2^{-L}$$

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\binom{m}{2} 2^{-L} \le \Pr[K_h] \le \binom{m}{2} 2^{-L}$$

analog:

$$\frac{1}{2}\binom{m}{2} 2^{-2L} \le \Pr[K_u] \le \binom{m}{2} 2^{-2L}$$

(c)

$$\Pr[K_n] = \Pr[K_n \wedge K_u] + \Pr[K_n \wedge \overline{K_u}]$$

$$= \underbrace{\Pr[K_n \mid K_u]}_{=1\,!} \Pr[K_u]$$

$$+ \Pr[\overline{K_u} \mid K_n] \Pr[K_n]$$

$$\rightsquigarrow \Pr[\overline{K_u} \mid K_n] = \frac{\Pr[K_n] - \Pr[K_u]}{\Pr[K_n]}$$

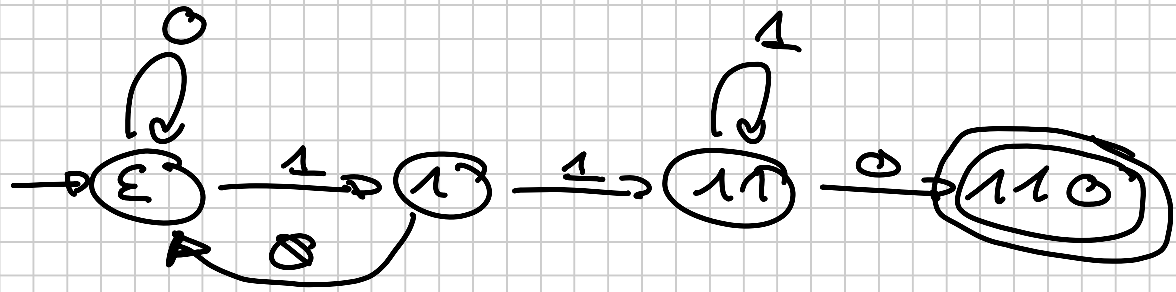
$$= 1 - \frac{\Pr[K_u]}{\Pr[K_n]}$$

$$\geq 1 - \frac{\binom{m}{2} 2^{-2L}}{\frac{1}{2}\binom{m}{2} 2^{-L}}$$

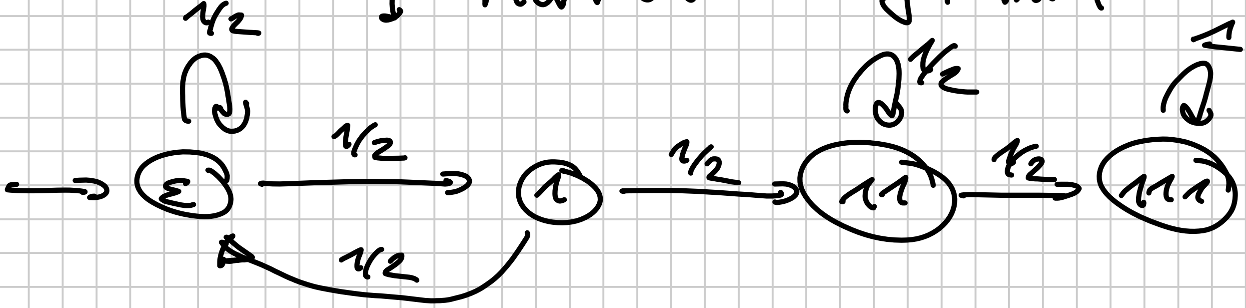
$$= \underline{1 - 2^{-L+1}}$$

A 4.4

DFA, der die (Sprache der) möglichen Experimentabläufe erkennt:



Markov-Diagramm



$W \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl Würfe bis Experimentende

Ereignisse:

"10" $\mathrel{\hat{=}}$ Alle Ergebnisse, die mit 10 beginnen

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}[W] = \mathbb{E}[W \mid \text{"1"}]\tfrac{1}{2} + \mathbb{E}[W \mid \text{"0"}]\tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"0"}] = \mathbb{E}[W+1] = \mathbb{E}[W] + 1$$

Alle Experimente, die mit 0 beginnen, haben 1 Schritt gemacht und starten dann neu

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"1"}] \underset{\uparrow}{=} \mathbb{E}[W \mid \text{"10"}] \underbrace{\Pr[\text{"10"} \mid \text{"1"}]}_{=\frac{1}{2}} + \mathbb{E}[W \mid \text{"11"}] \cdot \underbrace{\Pr[\text{"11"} \mid \text{"1"}]}_{=\frac{1}{2}}$$

Alle Experimente, die mit 1 beginnen, müssen nach Wert des zweiten Wurfs aufgespalten werden

Analog:

Neustart nach 2 Schritten (zurück in ⓔ)

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"10"}] = \mathbb{E}[W+2]$$

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"11"}] = \mathbb{E}[W \mid \text{"110"}] \frac{1}{2} + \mathbb{E}[W \mid \text{"111"}] \underbrace{\frac{1}{2}}_{\Pr[\text{"111"} \mid \text{"11"}]}$$

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"110"}] = 3$$

Ende nach drei Schritten

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"111"}] = \mathbb{E}[W+1 \mid \text{"11"}]$$

Zurück in "11" in einem Schritt

$$= \mathbb{E}[W \mid \text{"11"}] + 1$$

Somit.

Warten auf eine Null (Geo)

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"11"}] = 3 \cdot \frac{1}{2} + (\mathbb{E}[W \mid \text{"11"}] + 1) \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"11"}] = \frac{3 \cdot 1/2 + 1/2}{1 - 1/2} = 4$$

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"1"}] = (\mathbb{E}[W]+2)\tfrac{1}{2} + 4 \cdot \tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[W] = \tfrac{1}{2}(\mathbb{E}[W]+1) + \tfrac{1}{2}\left((\mathbb{E}[W]+2)\tfrac{1}{2} + 2\right)$$

"Warten auf 11"

$$= \tfrac{3}{4}\,\mathbb{E}[W] + \tfrac{1}{2} + \tfrac{3}{2}$$

$$\mathbb{E}[W] = \frac{2}{1-3/4} = 8$$

$$\text{Var}[W] = \mathbb{E}[W^2] - \mathbb{E}[W]^2$$

Verfahre mit $\mathbb{E}[W^2]$ analog:

$$\mathbb{E}[W^2] = \mathbb{E}[W^2 \mid \text{"0"}]\tfrac{1}{2} + \mathbb{E}[W \mid \text{"1"}]\tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[W^2 \mid \text{"0"}] = \mathbb{E}[(W+1)^2]$$

Zurück in ⓪ / Neustart nach einem Schritt

$$= \mathbb{E}[W^2] + \underbrace{2\mathbb{E}[W]}_{=16} + 1$$

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"1"}] = \mathbb{E}[W^2 \mid \text{"10"}]\tfrac{1}{2} + \mathbb{E}[W^2 \mid \text{"11"}]\tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[W \mid \text{"10"}] = \mathbb{E}[(W+2)^2] = \mathbb{E}[W^2] + \underbrace{4\mathbb{E}[W]}_{=32} + 4$$

$$\mathbb{E}[W^2 \mid \text{"11"}] = \mathbb{E}[W^2 \mid \text{"110"}]\tfrac{1}{2} + \mathbb{E}[W^2 \mid \text{"111"}]\tfrac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[W^2 \mid \text{"110"}] = \mathbb{E}[3^2] = 9$$

$$\mathbb{E}[W^2 \mid \text{"111"}] = \mathbb{E}[(W+1)^2 \mid \text{"11"}]$$

$$= \mathbb{E}[W^2 \mid 11]$$

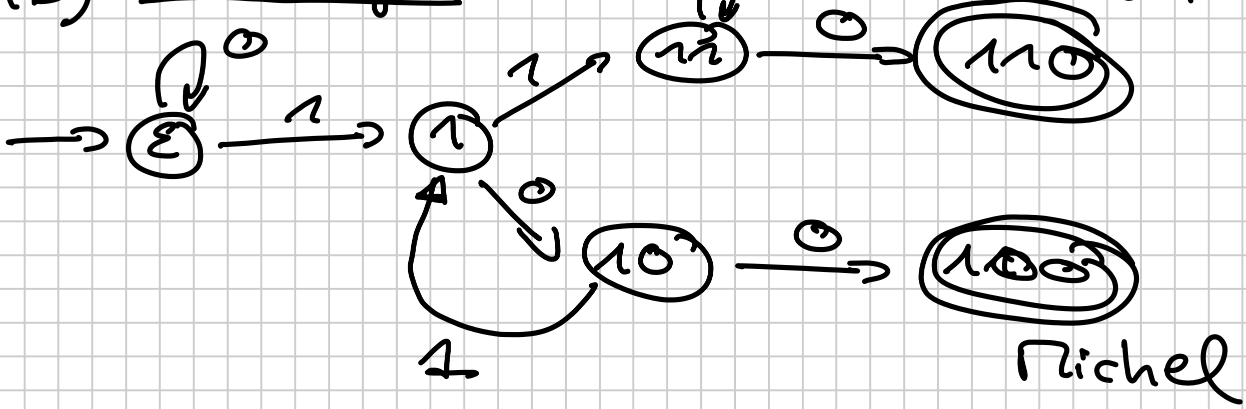
$$+ 2\,\mathbb{E}[W \mid 11] \quad \Big| = 8$$

$$+ 1$$

$\longrightarrow$ Auflösen nach $\mathbb{E}[W^2] = 88$

$\rightsquigarrow \mathrm{Var}[W] = 88 - 64 = \underline{\underline{24}}$

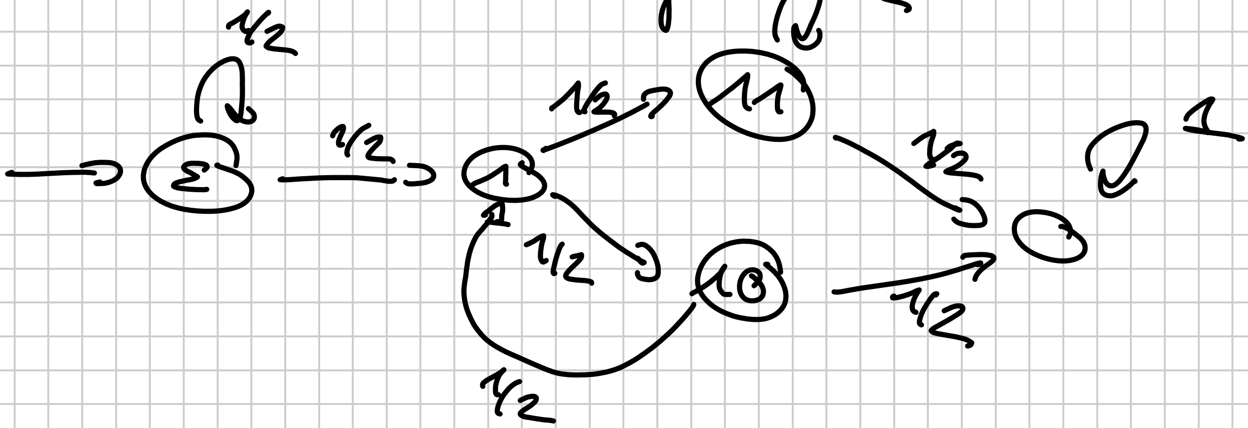
(b) Abläufe:



$\Big\downarrow$

Markov-Diagramm für

Anzahl Würfe:



Wie in (a): Kurzfassung

$$\mathbb{E}[W] = \frac{1}{2}\,\overset{\mathbb{E}[W|0]}{\overset{\shortparallel}{\mathbb{E}[W+1]}} + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[W|1]$$

$$\mathbb{E}[W|1] = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[W|11] + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[W|10]$$

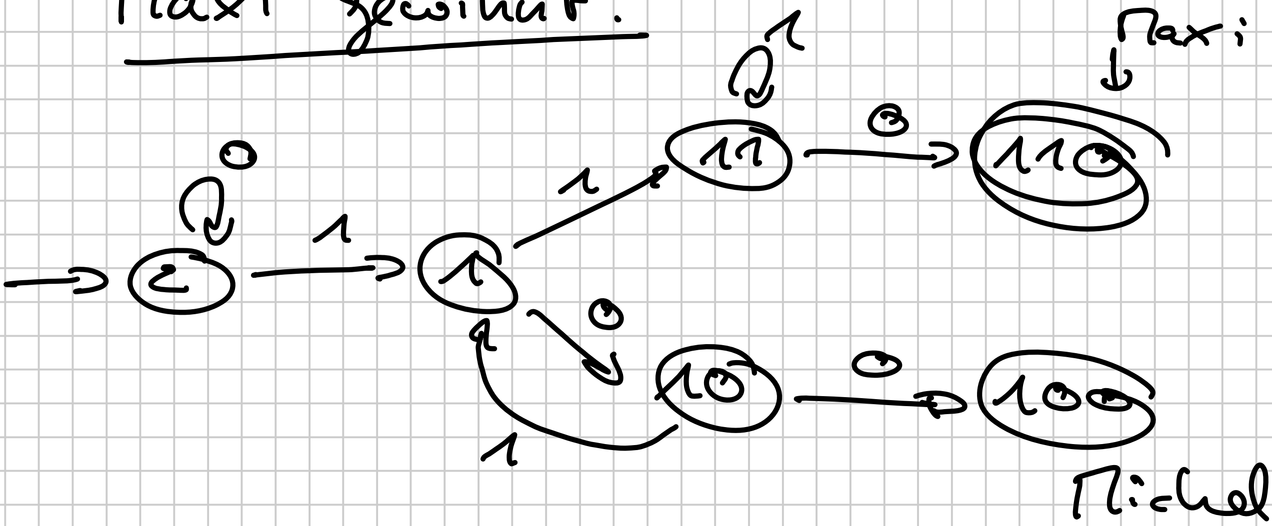
$$\mathbb{E}[W|10] = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[W+1|1] + \overbrace{\mathbb{E}[W|100]}^{3}\,\frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[W|11] = \frac{1}{2}\,\mathbb{E}[W+1|11] + \underbrace{\mathbb{E}[W|111]}_{=3}\,\frac{1}{2}$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}[W] = \frac{16}{3}$$

(ii)

Maxi gewinnt.



$\Pr[\text{Maxi}]$

$$= \frac{1}{2}\Pr[\text{Maxi} \mid 0] + \frac{1}{2}\Pr[\text{Maxi} \mid 1]$$

$$\Pr[\text{Maxi} \mid 0] = \Pr[\text{Maxi}]$$

$$\Pr[\text{Maxi} \mid 1] = \Pr[\text{Maxi} \mid 10]\,\frac{1}{2} + \Pr[\text{Maxi} \mid 11]\,\frac{1}{2}$$

$$\Pr[\text{Maxi} \mid 10] = \Pr[\text{Maxi} \mid 1]\,\frac{1}{2} + \underbrace{\Pr[\text{Maxi} \mid 100]}_{=0}\,\frac{1}{2}$$

$$\Pr[\text{Maxi} \mid 11] = 1$$

muss nur noch auf 0 warten

$\leadsto \Pr[\text{Maxi}] = 2/3$