Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2007
Lösungsblatt Mittelklausur
2. Juni 2007

Einführung in die Theoretische Informatik

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 105 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Korrektor
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Aufgabe 1 (10 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch). Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ □□
Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb der Aufgabe 1).

Wenn eine Sprache L kontextsensitiv ist, dann ist $L \setminus \{\epsilon\}$ ebenfalls kontextsensitiv. .... [✔J] [N]

Sei $L \subseteq \{0,1\}^*$. Dann gibt es eine Chomsky-0-Grammatik, die L erzeugt. .... [J] [✔N]

$|\emptyset^*| = 1$. .... [✔J] [N]

Jede nutzlose Variable ist nullierbar. .... [J] [✔N]

Jede reguläre Grammatik ist in Chomsky-Normalform. .... [J] [✔N]

Sei G eine Grammatik in Greibach-Normalform. Dann gibt es zu jedem Wort $w \in L(G)$ eine eindeutige Linksableitung. .... [J] [✔N]

Seien L_1 eine reguläre und L_2 eine kontextfreie Sprache mit $L_1, L_2 \subseteq \{a,b\}^*$. Dann ist $\{a,b\}^* \setminus (L_1 \setminus L_2)$ kontextfrei. .... [✔J] [N]

Zu jedem nichtdeterministischen endlichen Automaten A gibt es einen deterministischen Kellerautomaten, der $L(A)$ erkennt. .... [✔J] [N]

Der CYK-Algorithmus berechnet zu jeder kontextfreien Grammatik eine äquivalente Grammatik in Chomsky-Normalform. .... [J] [✔N]

Sei L eine unendliche, reguläre Teilmenge von $\{a\}^*$ mit 1 als einer Pumping-Lemma-Konstanten zu L. Dann gilt $L = \{a\}^*$. .... [✔J] [N]

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Sei G die Grammatik $G = (\{S, T\}, \{a, b\}, P, S)$ mit den Produktionen

$$\begin{array}{lcl} S & \rightarrow & T \mid aTbS \mid SaTb\,, \\ T & \rightarrow & aTb \mid \epsilon\,. \end{array}$$

1. Zeigen Sie, dass G mehrdeutig ist.

2. Zeigen Sie, dass $b^3a^3 \notin L(G)$ gilt.

Lösungsvorschlag

1. Wir weisen für das Wort $w = abab \in \Sigma^*$ die Existenz zweier verschiedener Linksableitungen nach.

   (1 P.)

   1. Linksableitung:
   $S \rightarrow_G aTbS \rightarrow_G abS \rightarrow_G abT \rightarrow_G abaTb \rightarrow_G abab = w\,.$ (1 P.)

   2. Linksableitung:
   $S \rightarrow_G SaTb \rightarrow_G TaTb \rightarrow_G aTbaTb \rightarrow_G abaTb \rightarrow_G abab = w\,.$ (1 P.)

   Auch für $w = ab$ gibt es verschiedene Linksableitungen.

2. Wir führen die Annahme $w = b^3a^3 \in L(G)$ zum Widerspruch.

   Angenommen $w \in L(G)$, d. h. $S \rightarrow_G^* w$, dann gilt einer der folgenden 3 Fälle.

   Fall 1, $S \rightarrow_G T \rightarrow_G aTb \rightarrow_G^* w$:
   Wegen $aTb \rightarrow_G^* w$ muß w mit a beginnen. Widerspruch! (1 P.)

   Fall 2, $S \rightarrow_G aTbS \rightarrow_G^* w$:
   Wegen $aTbS \rightarrow_G^* w$ muß w mit a beginnen. Widerspruch! (1 P.)

   Fall 3, $S \rightarrow_G SaTb \rightarrow_G^* w$:
   Wegen $SaTb \rightarrow_G^* w$ muß w mit b enden. Widerspruch! (1 P.)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Sei $\Sigma = \{b, c, d\}$. Sei L die Sprache

$$L = (\ b^*c \ | \ d\,b^*\ )^* .$$

1. Geben Sie eine Grammatik G an, die L erzeugt.
2. Geben Sie einen deterministischen endlichen Automaten A an, der L erkennt.

Lösungsvorschlag

1. Sei $G = (\{S, X, Y, B\}, \Sigma, P, S)$ mit Produktionen

$$\begin{array}{rcll} S & \to & \epsilon \mid SS\,, & (1\text{ P.}) \\ S & \to & X \mid Y\,, & (\tfrac{1}{2}\text{ P.}) \\ X & \to & B\,c\,, & (\tfrac{1}{2}\text{ P.}) \\ Y & \to & d\,B\,, & (\tfrac{1}{2}\text{ P.}) \\ B & \to & \epsilon \mid b\,B\,. & (\tfrac{1}{2}\text{ P.}) \end{array}$$

2. Sei $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, undef\}, \Sigma, \delta, q_0, \{q_0, q_2, q_3\})$ (1 P.)

   mit Übergangsfunktion

$$\begin{array}{llll} \delta(q_0, b) = q_1\,, & \delta(q_0, c) = q_0\,, & \delta(q_0, d) = q_2\,, & (1\text{ P.}) \\ \delta(q_1, b) = q_1\,, & \delta(q_1, c) = q_0\,, & \delta(q_1, d) = undef\,, & (1\text{ P.}) \\ \delta(q_2, b) = q_3\,, & \delta(q_2, c) = q_0\,, & \delta(q_2, d) = q_2\,, & (1\text{ P.}) \\ \delta(q_3, b) = q_3\,, & \delta(q_3, c) = q_0\,, & \delta(q_3, d) = q_2\,. & (1\text{ P.}) \end{array}$$

   Stets gelte natürlich $\delta(undef, x) = undef$.

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ eine beliebige Funktion und es sei $L = \{a^n b^{f(n)} c^n \,;\, n \in \mathbb{N}\}$.
Beweisen Sie:
Falls L kontextfrei ist, dann ist f beschränkt, d. h., dann gilt

$$(\exists k \in \mathbb{N}\ \forall n \in \mathbb{N})\,[f(n) \leq k]\,.$$

Lösungsvorschlag

Sei L kontextfrei.
Wir führen die Annahme zum Widerspruch, dass f nicht beschränkt ist. (1 P.)

Sei also f nicht beschränkt.
Sei n eine Pumping-Lemma-Konstante zu L.
Da f nicht beschränkt ist, können wir ein m annehmen mit $f(m) > n$. (1 P.)

Sei $z = a^m b^{f(m)} c^m$.
Es gilt $z \in L$ und $|z| \geq n$. (1 P.)

Nach Pumping Lemma können wir eine Zerlegung $uvwxy$ von z annehmen,
d. h. $z = uvwxy$, so dass
$|vx| \geq 1$, $|vwx| \leq n$ und $uv^iwx^iy \in L$ für alle $i \geq 0$ gilt. (1 P.)

Da $|b^{f(m)}| > n$ gilt, enthalten v und x beide kein a oder beide kein c. (1 P.)

Fall 1: v und x enthalten beide kein c:
Falls v und x nur aus b's bestehen, dann gilt $uv^2wx^2y \notin L$. Widerspruch! (1 P.)
Falls v ein a enthält, dann kann in uv^2wx^2y die Anzahl der a's nicht gleich der Anzahl von c's sein. Widerspruch! (1 P.)

Fall 2: v und x enthalten beide kein a:
Analog zu Fall 1.

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Sei $G = (\{A, B, C\}, \{a, b, c\}, P, A)$ mit den Produktionen $C \to c$ und

$$\begin{aligned} A &\to aBAC \mid a\,, \\ B &\to bABC \mid b\,. \end{aligned}$$

1. Konstruieren Sie eine Grammatik G_1 in Chomsky-Normalform, die $L(G)$ erzeugt.
2. Konstruieren Sie eine Grammatik G_2 in Greibach-Normalform, die $L(G)$ erzeugt und deren Produktionen $\alpha \to \beta$ in ihrer rechten Seite β höchstens 2 Variablen enthalten.

Hinweis: Als Bezeichnung neu eingeführter Variablen für eine Satzform $A_1A_2 \ldots A_n$ kann die Klammerung $[A_1A_2 \ldots A_n]$ dienen.

Lösungsvorschlag

1. Seien T_a, T_b neue Variable mit zusätzlichen Produktionen $T_a \to a, T_b \to b$. Mit der Bezeichnungskonvention im Hinweis seien entsprechend weitere Variablen eingeführt.

   (1 P.)

   Dann werden die Produktionen $A \to aBAC$ und $B \to bABC$ ersetzt durch

   $$\begin{aligned} A &\to T_a[BAC]\,, & B &\to T_b[ABC]\,, & &\text{(1 P.)} \\ [BAC] &\to B[AC]\,, & [ABC] &\to A[BC]\,, & &\text{(1 P.)} \\ [AC] &\to AC\,, & [BC] &\to BC\,. & &\text{(1 P.)} \end{aligned}$$

2. Im ersten Schritt werden die Produktionen $A \to aBAC$ und $B \to bABC$ ersetzt durch

   $$\begin{aligned} A &\to a[BAC]\,, & B &\to b[ABC]\,, \\ [BAC] &\to B[AC]\,, & [ABC] &\to A[BC]\,, \\ [AC] &\to AC\,, & [BC] &\to BC\,. \end{aligned}$$

   (2 P.)

   Im zweiten Schritt werden die A- bzw. B-Produktionen eingesetzt mit dem Ergebnis

   $$\begin{aligned} A &\to a[BAC] \mid a\,, & B &\to b[ABC] \mid b\,, \\ [BAC] &\to b[ABC][AC] \mid b[AC]\,, & [ABC] &\to a[BAC][BC] \mid a[BC]\,, \\ [AC] &\to a[BAC]C \mid aC\,, & [BC] &\to b[ABC]C \mid bC\,. \end{aligned}$$

   (3 P.)