

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist nicht abzugeben und wird nicht besprochen.

Eine Tabelle mit den auf diesem Blatt benötigten Quantilen finden Sie z.B. auf der Übungsseite unten verlinkt.

Aufgabe 11.1

0P

Ein Chip-Hersteller gibt an, dass seine Chips durchschnittlich mindestens 50 Monate halten. Sie kaufen 20 dieser Chips und messen ihre Lebensdauer. Die Chips haben im Schnitt 40 Monate gehalten mit einer Stichprobenstandardabweichung von $S = 30$ Monaten. (Die Stichprobenstandardabweichung ist die Wurzel der Stichprobenvarianz.)

- Zeigen Sie, dass die Angabe des Herstellers **nicht** abgelehnt werden kann (Signifikanzniveau 0.05).
- Die gleiche durchschnittliche gemessene Lebensdauer und die gleiche Stichprobenstandardabweichung vorausgesetzt, wieviele Chips hätten Sie kaufen müssen, um die Angabe des Herstellers ablehnen zu können?

Aufgabe 11.2

0P

Die folgende Tabelle gibt die Ziehungshäufigkeiten der Superzahlen wieder:

Superzahl	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Häufigkeit	140	134	138	133	160	134	133	137	131	128

(Quelle: <http://www.lottozahlen-lottogewinne.de/lottostatistik.superzahl-haeufigkeiten.php>)

Wenden Sie den χ^2 -Anpassungstest auf die Nullhypothese an, dass die Ziehungsw'keit für jede Superzahl $\frac{1}{10}$ ist (Signifikanzniveau 0.1).

Aufgabe 11.3 (ehemalige Klausuraufgabe)

0P

Während einer Prüfung wurde die Pulsfrequenz von 53 Studenten gemessen, wobei sich eine mittlere Pulsfrequenz von 86.7 Schlägen/min ergab. Auf Grund früherer Untersuchungen geht man davon aus, dass die Pulsfrequenzen von Menschen normalverteilt sind mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma = 10.3$ Schläge/min.

- Zu testen ist die Hypothese $H_0 : \mu \geq 90$ gegen $H_1 : \mu < 90$.

Berechnen Sie die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit α , mit der die Nullhypothese noch abgelehnt werden kann.

Professor Evilparza sind die Studenten viel zu aufgeregt während einer Klausur. Er führt daher folgenden Versuch durch: Vor der nächsten Klausur lässt er jeden der 165 Studenten ein Glas Bier trinken, da der enthaltene Hopfen beruhigend wirken soll, d.h. die Pulsfrequenz verringert.

Während dieser Prüfung wird eine mittlere Pulsfrequenz von 85.4 Schlägen/min gemessen.

Professor Evilparza will nun *anhand der beiden Stichproben* entscheiden, ob er in weiteren Prüfungen ebenfalls den Studenten Bier verabreichen sollte.

- Professor Evilparza kann sich nicht entscheiden, ob er nun

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{\text{Bier}} < \mu_{\text{kein Bier}}$$

oder

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \leq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{\text{Bier}} > \mu_{\text{kein Bier}}$$

testen soll. Er will allerdings die W'keit auf 1% beschränken, dass er den Studenten Bier verabreicht, das Bier jedoch keine beruhigende Wirkung hat, d.h., dass er unnötig Geld ausgibt.

Wie sollte er daher die Hypothesen wählen? (Begründung!)

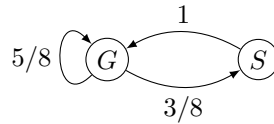
- c) Führen Sie den entsprechenden Test durch. Welche Empfehlung können Sie Professor Evilsparza geben? ($\alpha = 0.01$)

Hinweis: Runden Sie auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

Aufgabe 11.4

0P

Aus der Midtermklausur wissen Sie, dass Prof. Evilsparza zu den Gemütszuständen *Gut gelaunt*, *Schlecht gelaunt* und *Rasend* fähig ist. Der Zustand *Rasend* sagt ihm nicht zu, daher ändert er sein Prüfungsverhalten: Sobald er schlecht gelaunt ist, lässt er den Prüfling auf jeden Fall durchfallen, sodass er danach wieder gut gelaunt ist. Die Markovkette sieht nun so aus, wobei Prof. Evilsparza anfangs gut gelaunt ist:



- Stellen Sie die Übergangsmatrix P auf.
- Berechnen Sie durch Matrix-Vektor-Multiplikationen die W'keit, dass Prof. Evilsparza nach drei Prüflingen gut gelaunt ist.
- Berechnen Sie die Eigenwerte und (rechten) Eigenvektoren von P . Bestimmen Sie damit eine Diagonalisierung von P , d.h., bestimmen Sie eine Matrix B und eine Diagonalmatrix D , sodass $P = BDB^{-1}$ gilt.
- Benutzen Sie die Diagonalisierung, um die W'keit zu berechnen, dass Prof. Evilsparza nach 20 Prüflingen gut gelaunt ist.
- Nach wie vielen Prüfungen ist Prof. Evilsparza im Schnitt zum ersten Mal schlecht gelaunt? Das heißt, bestimmen Sie h_{GS} . Bestimmen Sie auch h_G .
- Ist der Zustand G absorbierend? Ist S absorbierend? Ist die Markovkette irreduzibel? Sind G und/oder S transient und/oder rekurrent? Ist die Markovkette aperiodisch? Ist die Markovkette ergodisch?
- Auf lange Sicht, in wieviel Prozent der Zeit ist Prof. Evilsparza gut gelaunt? Das heißt, berechnen Sie die stationäre Verteilung π der Markovkette.

Aufgabe 11.5

0P

- a) V ist eine stetige ZV, die gleichverteilt über $[0, 1]$ ist.

Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion, die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz der stetigen ZV $K_V := \sqrt[3]{V}$, die die Kantenlänge des Würfels mit Volumen V angibt.

- b) K ist eine stetige ZV, die gleichverteilt über $[0, 1]$ ist.

Bestimmen Sie jeweils die Verteilungsfunktion, die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz der stetigen ZV $V_K := K^3$, die das Volumen des Würfels mit Kantenlänge K angibt.

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion.