Aufgabe 9.1 **Abzugeben.** **2P+2P+2P**

Es sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ stetig. Weiterhin seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ unabhängige, jeweils auf $[0,1]$ gleichverteilte ZVen.
Für die Bernoulli-ZV Z_i gelte genau dann $Z_i = 1$, wenn $Y_i \leq f(X_i)$.

(a) Zeigen Sie $\Pr[Z_i = 1] = \int_0^1 f(x)dx$.

Hinweis: Fassen Sie (X_i, Y_i) als Punkt in $[0,1]^2$ auf.

(b) Wie groß muss n mindestens sein, damit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$ mit W'keit mindestens 0.95 das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ mit einer Genauigkeit von mindestens 0.01 approximiert?

Bestimmen Sie approximativ einen möglichst kleinen Wert für n mittels

(i) der Chebyshev-Ungleichung.

(ii) der Approximation mit Hilfe des zentralgen Grenzwertsatzes.

Hinweis: Schauen Sie sich nochmals Beispiel 76 an.

06.2012

(a) $$\Pr[Z_i = 1] \underset{\text{Definition}}{=} \Pr[Y_i \leq f(X_i)]$$

$$= \Pr_{X_i, Y_i}[\{(x,y) \mid y \leq f(x)\}]$$

X_i, Y_i unabh., gleichverteilt auf $[0,1]$

$$\overset{!}{=} \int_{\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid y \leq f(x)\}} dx\, dy$$

Fubini

$$\overset{!}{=} \int_{x=0}^{1} \int_{y=0}^{f(x)} dy\, dx = \underbrace{\int_{x=0}^{1} f(x)\, dx}_{\overset{!!}{=}\, p}$$

(b) $$S_n := \sum_{i=1}^{n} Z_i \sim \mathrm{Bin}(n,p)$$

$$\mathbb{E}[S_n] = np, \quad \mathrm{Var}[S_n] = np(1-p) \leq \frac{n}{4}$$

Interessiert an: $\Pr[\,|\frac{1}{n}S_n - p| \leq 0.01] \geq 0.95$

bzw. $\Pr[\,|\frac{1}{n}S_n - p| \underset{(=)}{>} 0.01] \leq 0.05$

(i) Chebyshev:

$$\Pr[\,|\tfrac{1}{n}S_n - p| \geq 0.01] \leq \frac{\mathrm{Var}[\frac{1}{n}S_n]}{10^{-4}} \leq \frac{10^4}{4n}$$

$$\rightsquigarrow \frac{10^4}{4n} \overset{!}{\leq} 0.05 \rightsquigarrow n \geq 5 \cdot 10^4$$

(ii) Approximation mittels $\mathcal{N}(0,1)$:

$$\Pr\left[\left|\frac{1}{n}S_n - p\right| \leq 0.01\right]$$

$$= \Pr\left[\frac{\left|\frac{1}{n}S_n - p\right|}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq 0.01 \cdot \sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right]$$

$$\approx \Phi\left(10^{-2}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - \Phi\left(-10^{-2}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right)$$

$$= 2\,\Phi\left(10^{-2}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) - 1 \overset{!}{\geq} 0.95$$

$$\Rightarrow \quad \Phi\left(10^{-2}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}}\right) \geq 0.975$$

$$\Rightarrow \quad 10^{-2}\sqrt{\frac{n}{p(1-p)}} \geq 1.96$$

$$\Rightarrow \quad n \geq 1.96^2 \cdot 10^4 \cdot p(1-p)$$

Hinreichend: $n \geq \left(\frac{1.96}{2}\right)^2 \cdot 10^4$

Aufgabe 9.2 **Abzugeben.** **3P**

In Xavers neu eröffneter Bar kommt es immer wieder vor, dass ein Gast ein Glas zerbricht. Da je nach Bestellung das Glas und damit der potentielle Schaden variiert, beschreibt Xaver den bei der i-ten Bestellung entstehenden Schaden mit Hilfe einer ZV S_i. Über die genau Verteilung von S_i weiß Xaver nichts, er setzt daher Erfahrungswerte für $\mu := \mathbb{E}[S_i]$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}[S_i]$ an. Er betrachtet die S_i als unabhängig und identisch verteilt mit Wertebereich $[0, \infty)$.

Um seine Unkosten durch zerbrochene Gläser abzudecken, will er pro Bestellung pauschal einen Aufpreis von $\mu + \alpha \cdot \sigma$ veranschlagen für ein zu bestimmendes $\alpha \geq 0$.

Bestimmen Sie approximativ ein minimales $\alpha > 0$, so dass bei jährlich $n = 10000$ Bestellungen mit einer W'keit von mindestens 0.99 die Kosten der zerbrochenen Gläser gedeckt werden.

Zusatzeinnahmen: $n(\mu + \sigma\alpha)$

Schaden: $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$

$$\rightsquigarrow \Pr[\, S \leq n(\mu + \sigma\alpha)\,] \overset{!}{\geq} 0.99$$

$$\|$$

$$\Pr\left[\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \leq \sqrt{n}\,\alpha\right]$$

$$\approx$$

$$\Phi(\sqrt{n}\,\alpha)$$

$$\rightsquigarrow \quad \sqrt{n}\,\alpha \geq 2{,}33$$

$$\rightsquigarrow \quad \alpha \geq 0.0233$$

Aufgabe 9.3 **Abzugeben: (a), (c), (d)** **2P+2P+1P**

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und jeweils Po(λ)-verteilt. X sei $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt.

(a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ die folgende Dichte auf $\mathbb{N}_0$ hat:

$$\Pr[S_n = k] = \frac{(n\lambda)^k}{k!} e^{-n\lambda}.$$

Sei nun $\lambda = 1$.

(b) Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[-\min(0, \frac{S_n - n}{\sqrt{n}})] = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{E}[-\min(0, X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(d) Begründen Sie nun, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = 1$.

(a) $\underline{n = 1}$: Nach Definition von Po(λ)

$\underline{n \to n+1}$

$\Pr[S_{n+1} = k]$

$= \Pr[S_n + X_{n+1} = k]$

$= \sum_{i=0}^{k} \Pr[S_n = i] \Pr[X_{n+1} = k-i]$

Wertebereiche jeweils $\mathbb{N}_0$

$\overset{\text{Induktion}}{=} \sum_{i=0}^{k} \frac{(n\lambda)^i}{i!} e^{-n\lambda} \cdot \frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!} e^{-\lambda}$

$= e^{-(n+1)\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} \underbrace{\sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} n^i 1^{k-i}}_{= (n+1)^k}$ $\square$

(b) $\mathbb{E}\left[-\min\left(0, \frac{S_n-n}{\sqrt{n}}\right)\right]$ $\quad \underline{(\lambda=1)}$

$$= \sum_{\substack{k\in\mathbb{N}_0 \\ \uparrow \\ \text{Wertebereich } S_n}} -\min\left(0, \frac{k-n}{\sqrt{n}}\right)\cdot\frac{n^k}{k!}e^{-n}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} e^{-n}$$

$$= \frac{e^{-n}}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{n^{k+1}}{k!} - \underbrace{\sum_{k=0}^{n} k\frac{n^k}{k!}}_{\substack{\shortparallel \\ \sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{(k-1)!} \\ \shortparallel\; j=k-1 \\ \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n^{j+1}}{j!}}}\right)$$

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{n^{k+1}}{k!} \ominus \sum_{j=0}^{n-1}\frac{n^{j+1}}{j!} = n\cdot\frac{n^n}{n!}$$

$$= \frac{\sqrt{n}}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

(c) $\mathbb{E}\left[-\min(0,X)\right]$ $\quad (X\sim\mathcal{N}(0,1))$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} -\min(0,x)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} -x\,\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx$$

$$\frac{d}{dx} e^{-x^2/2} = -x e^{-x^2/2}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-x^2/2} \right]_{-\infty}^{0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

d) • Nach ZGWS konvergiert die Verteilung von $\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}$ gegen $\mathcal{N}(0,1)$, d.h.:

$$\lim_{n \to \infty} \Pr\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \leq x \right] = \Phi(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

Damit aber auch

$$\Pr\left[-\min\left(0, \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right) \leq x \right]$$

$$= \Pr\left[\max\left(0, -\frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right) \leq x \right]$$

$$= \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - \Pr\left[\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} < x \right] & , x \leq \frac{n}{\sqrt{n}} \\ 1 & , x > \frac{n}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

$$\xrightarrow{n \to \infty} \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ 1 - \Phi(x) & , x \geq 0 \end{cases}$$

$$= \Pr\left[-\min(0, X) \leq x \right]$$

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}\left[-\min\left(0, \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}\right)\right] \to \mathbb{E}\left[-\min(0, X)\right]$$

$$\overset{?}{\rightsquigarrow} \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{n}}{n!} \left(\frac{n}{e}\right)^n = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n \to \infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n}{n!} = 1$$

$$n! \sim \sqrt{2\pi n} \left(\frac{n}{e}\right)^n \text{ (Stirling)}$$

Aufgabe 9.4 **Abzugeben: (a)** **3P**

In jeder Teilaufgaben sollen Sie die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz des Abstands $D := \sqrt{X^2 + Y^2}$ eines zufällig gewählten Punktes (X, Y) bestimmen.

(a) Der Punkt (X, Y) sei gleichverteilt auf der Kreisscheibe $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

(b) Der Punkt (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Dreick mit Eckpunkten $p_1 = (0, 1), p_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), p_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

a) $$\Pr[D \leq t] = \Pr[X^2 + Y^2 \leq t^2]$$

$$= \int_{\{(x,y) \in K_r \mid x^2+y^2 \leq t^2\}} dx\,dy$$

$$= \frac{\pi t^2}{\pi r^2} = \frac{t^2}{r^2} \text{ für } t \in [0, r]$$

$$\leadsto f_D(t) = \frac{2t}{r^2} I_{[0,r]}(t)$$

$$\leadsto \mathbb{E}[D] = \int_0^r t \cdot \frac{2t}{r^2}\, dt$$

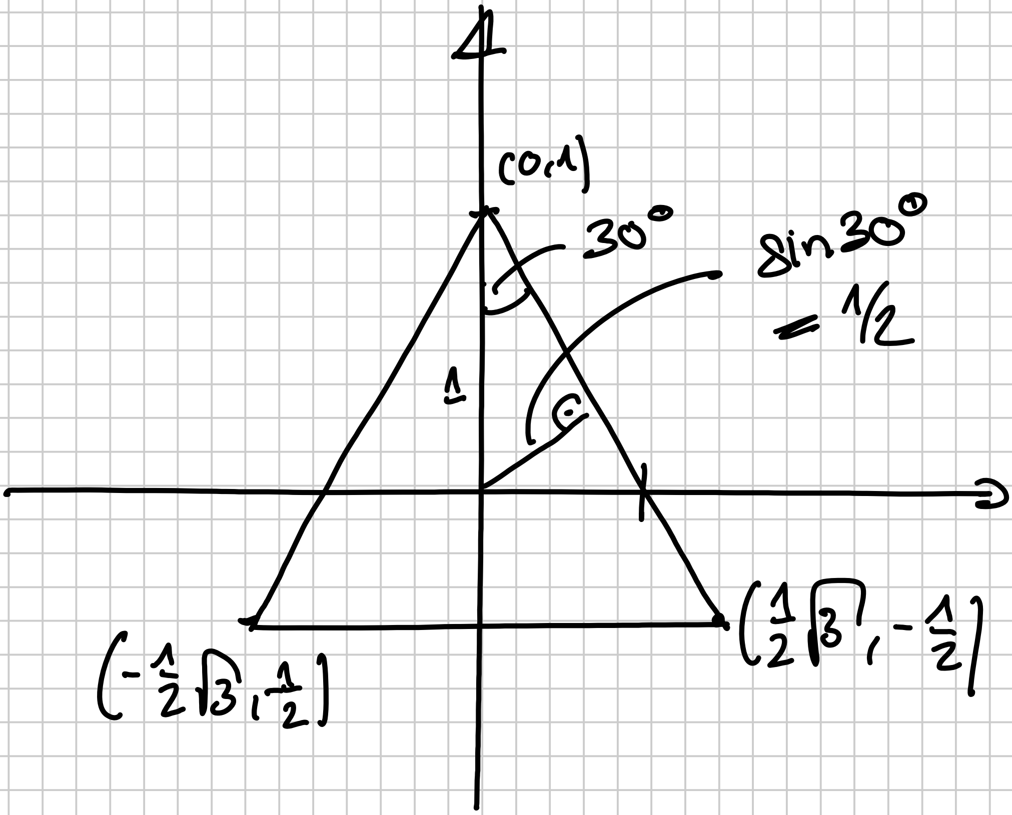
$$= \frac{2}{3} \frac{t^3}{r^2} \Big|_0^r = \frac{2}{3} r$$

$$\mathbb{E}[D^2] = \int_0^r t^2 \frac{2t}{r^2}\, dt$$

$$= \frac{1}{2} \frac{t^4}{r^2} \Big|_0^r = \frac{1}{2} r^2$$

$$\leadsto \text{Var}[D] = \frac{1}{2} r^2 - \frac{4}{9} r^2 = \frac{1}{18} r^2$$

(b)

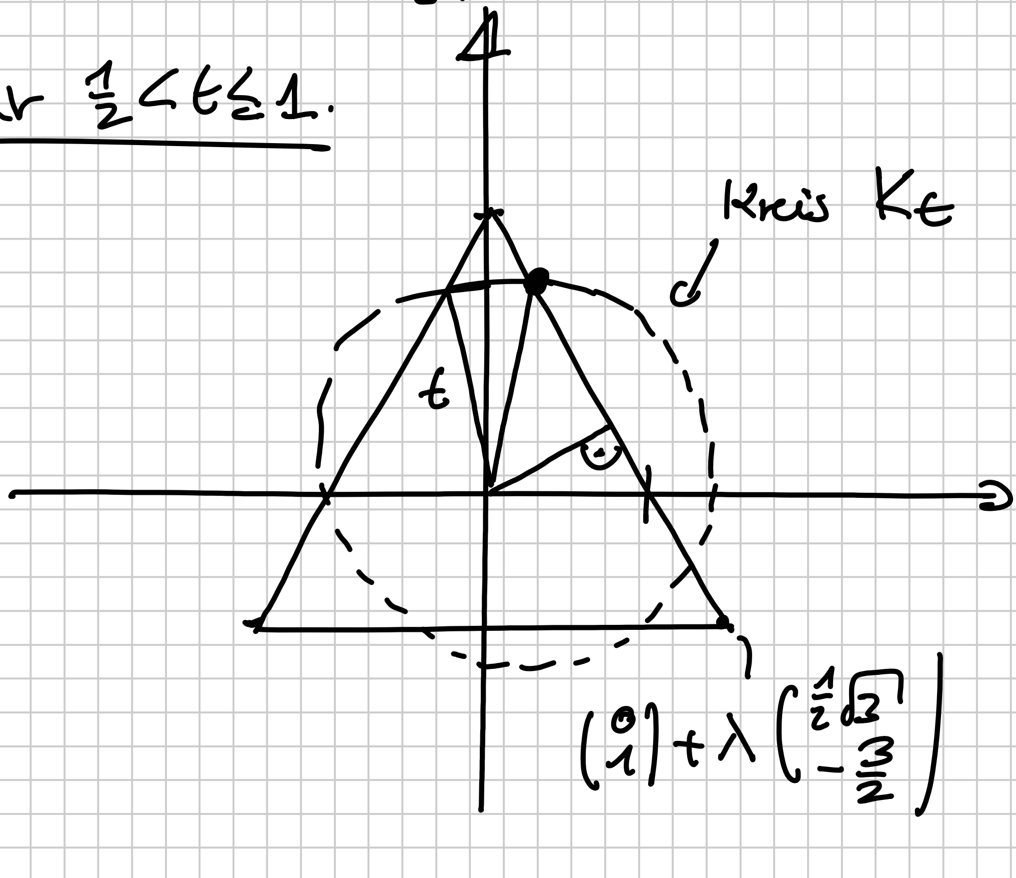


$\Pr[D \leq t] = ?$

- <u>Für $t \leq 1/2$</u> passt Kreis K_t vollständig in Dreieck:

$$\Pr[D \leq t] = \frac{\pi t^2}{\frac{1}{2}\sqrt{3} \cdot \frac{3}{2}} I_{[0, \frac{1}{2}]}(t)$$

- <u>Für $\frac{1}{2} < t \leq 1$.</u>



$$\left\| \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ -3/2 \end{pmatrix} \right\|_2 \overset{!}{=} t$$

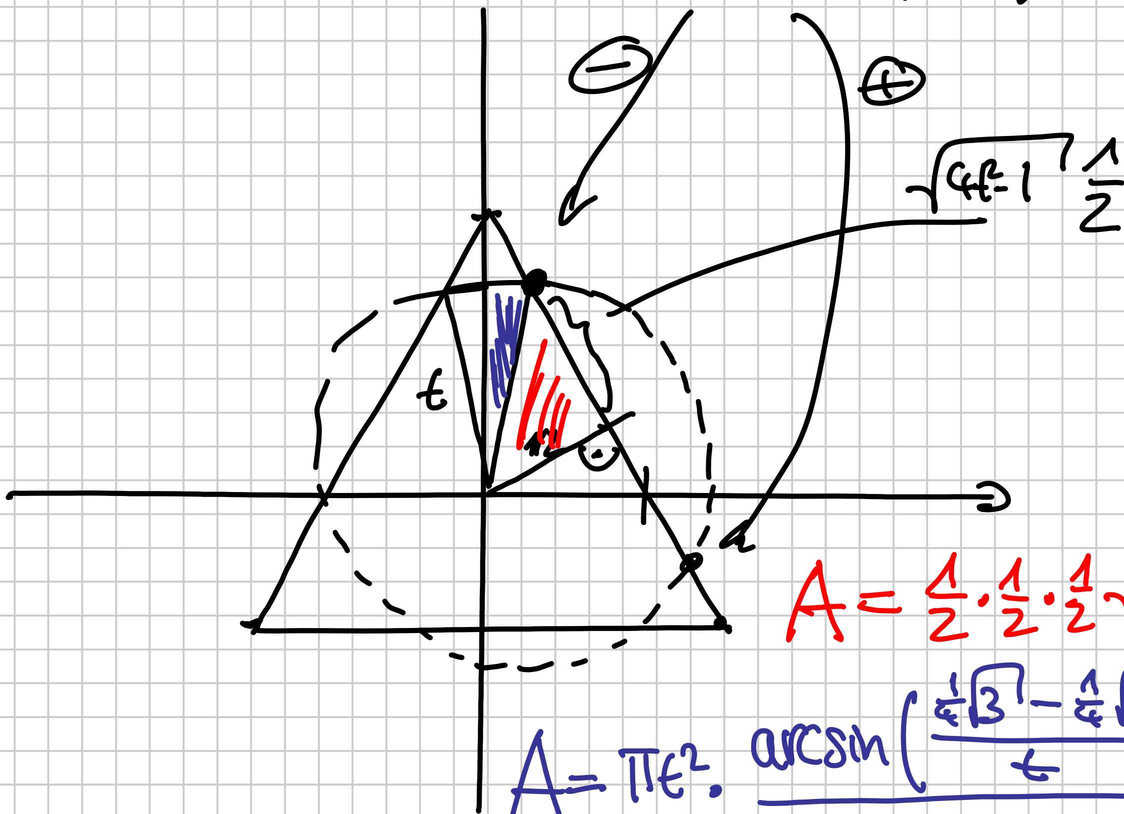
$$\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4}\lambda^2 + \left(-\frac{3}{2}\lambda + 1\right)^2 = t^2$$

$$\Longleftrightarrow \quad \frac{3}{4}\lambda^2 + \frac{9}{4}\lambda^2 - 3\lambda + 1 - t^2 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \lambda = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 12(1-t^2)}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{12t^2 - 3}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{3}\sqrt{4t^2 - 1}}{6}$$

Schnittpunkte $K_t \cap \triangle$:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{4}\sqrt{3} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \pm \sqrt{4t^2 - 1} \begin{pmatrix} 1/4 \\ -\sqrt{3}/4 \end{pmatrix}$$



$$A = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \sqrt{4t^2 - 1}$$

$$A = \pi t^2 \cdot \frac{\arcsin\left(\frac{\frac{1}{4}\sqrt{3} - \frac{1}{4}\sqrt{4t^2-1}}{t}\right)}{2\pi}$$

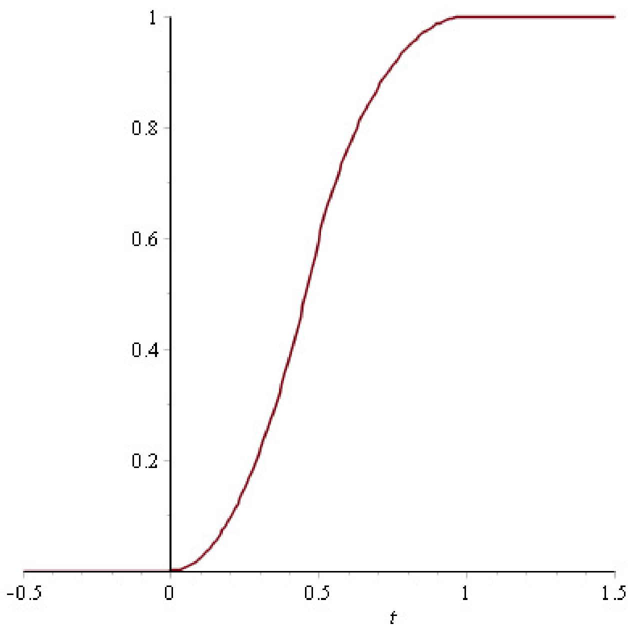
Untitled (1)* - [Server 1] - Maple 16

File Edit View Insert Format Table Drawing Plot Spreadsheet Tools Window Help

$$F := \frac{\mathit{piecewise}\left(t<0, 0, t<\frac{1}{2}, \frac{\mathrm{Pi}\cdot t^2}{1}, t<1, \frac{3}{4}\cdot\mathrm{sqrt}(4\cdot t^2-1)+3\cdot t^2\cdot\arcsin\left(\frac{(\mathrm{sqrt}(3)-\mathrm{sqrt}(4\cdot t^2-1))}{4\cdot t}\right), t\geq 1, \frac{3}{4}\cdot\mathrm{sqrt}(3)\right)}{\frac{3}{4}\cdot\mathrm{sqrt}(3)};$$

$$\Pr[D\leq t] = \frac{4}{9}\,\frac{\begin{cases} 0 & t<0 \\ \pi t^2 & t<\frac{1}{2} \\ \frac{3}{4}\sqrt{4t^2-1}+3t^2\arcsin\left(\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4t^2-1}}{t}\right) & t<1 \\ \frac{3}{4}\sqrt{3} & 1\leq t \end{cases}}{\sqrt{3}} \qquad (1)$$

$$\mathit{plot}\left(F, t=-\frac{1}{2}..\frac{3}{2}\right);$$



$$f := \mathit{diff}(F, [t\$1]);$$

$$\frac{4}{9}\,\frac{\begin{cases} 0 & t\leq 0 \\ 2\pi t & t\leq\frac{1}{2} \\ \frac{3t}{\sqrt{4t^2-1}}+6t\arcsin\left(\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4t^2-1}}{t}\right)+\frac{12t^2\left(-\frac{1}{\sqrt{4t^2-1}}-\frac{1}{4}\,\frac{\sqrt{3}-\sqrt{4t^2-1}}{t^2}\right)}{\sqrt{16-\frac{\left(\sqrt{3}-\sqrt{4t^2-1}\right)^2}{t^2}}} & t<1 \\ 0 & 1\leq t \end{cases}}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

$$m_1 := \mathit{evalf}(\mathit{int}(t\cdot f, t=0..1));$$

$$0.4600576662 \qquad (3)$$

$$m_2 := \mathit{evalf}(\mathit{int}(t^2\cdot f, t=0..1));$$

$$0.2500000000 \qquad (4)$$

$$v := m_2 - m_1^2$$

$$0.0383469438 \qquad (5)$$

Ready C:\Program Files\Maple 16 Memory: 65.87M Time: 11.18s Math Mode

EN 11:31

Aufgabe 9.5 **Abzugeben.** **3P**

Ein quadratisches Plättchen der Kantenlänge 1 wird auf den Streifen $[-2,2] \times \mathbb{R}$ geworfen. Wir interessieren uns für die Frage, mit welcher W'keit das Plättchen vollständig innerhalb des Streifens zu liegen kommt.

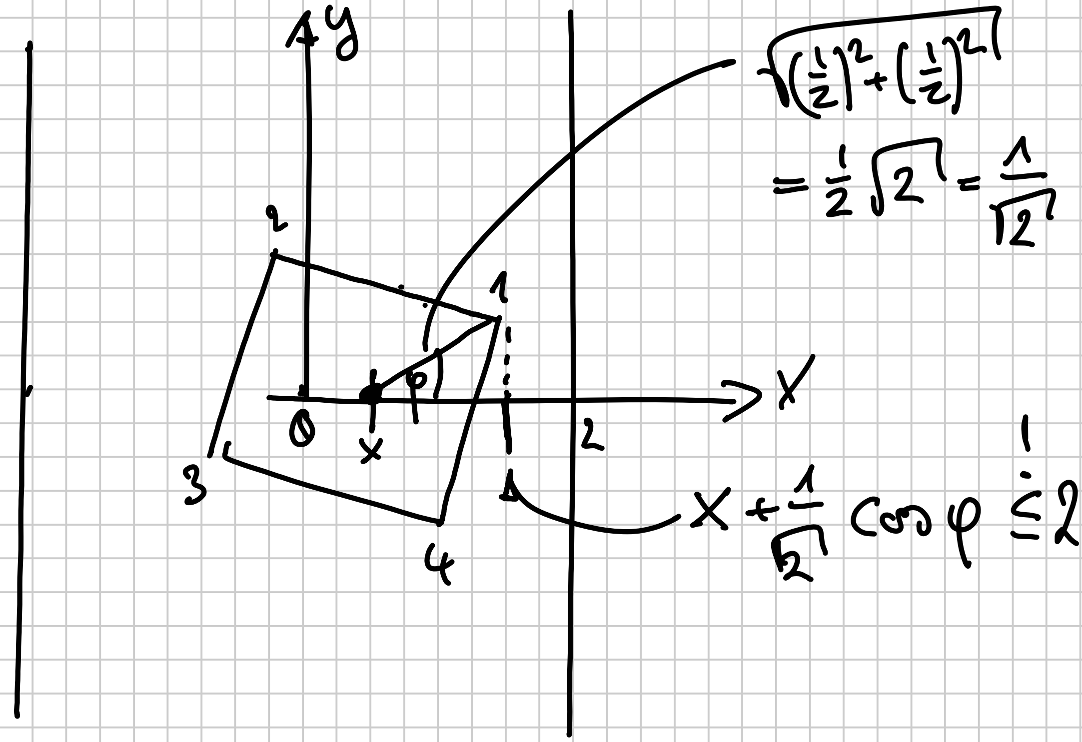
Die zufällige Lage des Plättchen ist durch zwei ZVen x und ϕ festgelegt:

- $x \in [-2,2]$ gibt die x-Koordinate des Mittelpunkts an.
- $\phi \in [0, 2\pi]$ gibt die Rotation an.

Wir nehmen an, dass x und ϕ unabhängig und jeweils gleichverteilt auf ihren jeweiligen Wertebereichen sind.

Bestimmen Sie unter diesen Annahmen die gesuchte W'keit.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass sich das Problem auf das Ereignis $\{(x,\phi) \in [0,2] \times [0, \frac{\pi}{4}] \mid x + \frac{1}{\sqrt{2}}\cos(\phi) \leq 2\}$ reduzieren lässt.



Reicht den Fall $x \in [0,2]$ zu betrachten, d.h., dass das Plättchen näher am rechten Rand liegt.

- Da $P_r[x \in [0,2]] = P_r[x \in [-2,0]] = \frac{1}{2}$, kann auch einfach x als gleichverteilt auf $[0,2]$ angesehen werden.

- Es gibt maximal 2 Ecken, die am nächsten am rechten Rand liegen.

  $\rightsquigarrow$ Reicht eine zu betrachten.

  $\rightsquigarrow$ Wegen Symmetrie ist die

W'keit, dass eine bestimmte Ecke die "nächste" ist, gerade $\frac{1}{4}$.

⇝ OE können wir den Fall betrachten, dass Ecke 1 am nächsten am Rand liegt ⇝ $\varphi \in [0, \frac{\pi}{2}]$.

- Können uns weiter auf den Fall beschränken, dass Ecke 1 über x-Achse liegt

  ⇝ $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

- Alle anderen Fälle sind gleichwahrscheinlich

⇝ maximale x-Koordinate des Plättchens:

$$X + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos\varphi \overset{!}{\leq} 2$$

⇝ für $x \in [0, 2]$, $\varphi \in [0, \frac{\pi}{4}]$

$$⇝ \int_{\varphi=0}^{\pi/4} \int_{x=0}^{2-\frac{1}{\sqrt{2}}\cos\varphi} dx\, d\varphi \, \frac{1}{2 \cdot \frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{2}{\pi} \left[2\varphi - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\varphi \right]_0^{\pi/4} = \underline{\underline{1 - \frac{1}{\pi}}}$$

$$\left(\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$