Technische Universität München (I7) **Sommer 2013**
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund

LÖSUNG

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Endterm

Beachten Sie: Soweit nicht anders angegeben, ist stets eine Begründung bzw. der Rechenweg anzugeben!

Aufgabe 1 **3P+3P=6P**

Sie sind für die Durchführung einer Klausur zuständig, zu der sich $n = 425$ Studenten angemeldet haben. Als überzeugter Umweltschützer wollen Sie jedoch nur soviel Papier wie gerade nötig verschwenden. Auf Grund Ihrer Erfahrungen aus den Vorjahren gehen Sie davon aus, dass ein beliebiger Studenten unabhängig von allen anderen Studenten mit W'keit $p = 0.8$ tatsächlich an der Klausur teilnimmt.

Mit N sei die ZV bezeichnet, welche die Zahl der tatsächlich an der Klausur teilnehmenden Studenten angibt.

Bestimmen Sie jeweils ein möglichst kleines $k \in \mathbb{N}$, so dass mit einer W'keit von höchstens 0.01 mehr als k Studenten an der Klausur teilnehmen:

(a) Verwenden Sie zunächst die Chebyshev-Ungleichung, um ein solches k zu bestimmen.

(b) Approximieren Sie die Verteilung von N geeignet mittels des ZGWS und bestimmen dann ein solches k.

Hinweis: $\Phi^{-1}(0.01) \approx -2.33$

Lösung: $N \sim \mathrm{Bin}(425, 0.8)$, $\mathbb{E}[N] = 425 \cdot 0.8 = 340$, $\mathrm{Var}[N] = 425 \cdot 0.8 \cdot 0.2 = 68$

(a)

$$\Pr[N > k] = \Pr[N \geq k+1] \leq \Pr[|N - \mathbb{E}[N]| \geq k - \mathbb{E}[N] + 1] \leq \frac{\mathrm{Var}[N]}{(k - \mathbb{E}[N] + 1)^2} \leq 0.01$$

Damit:

$$k \geq \mathbb{E}[N] - 1 + 10\sqrt{\mathrm{Var}[N]} \approx 421.46$$

Resultat: $k = 422$.

(b)

$$\Pr[N \leq k] = \Pr\left[\frac{N - \mathbb{E}[N]}{\sqrt{\mathrm{Var}[N}} \leq \frac{k - 340}{\sqrt{68}}\right] \approx \Phi\left(\frac{k-340}{\sqrt{68}}\right) \geq 0.99$$

Damit:

$$\frac{k-340}{\sqrt{68}} \geq \Phi^{-1}(0.99) = -\Phi^{-1}(0.01) = 2.33 \rightsquigarrow k \geq 359.2$$

Resultat: $k = 360$

Aufgabe 2 **4P+5P=9P**

(a) Die ZVn A, B, C sind unabhängig. Dabei gilt: $A \sim \mathrm{Bin}(10, 0.4)$, $B \sim \mathrm{Geo}(1/4)$, $C \sim \mathrm{Poi}(3)$.

Bestimmen Sie den folgenden Erwartungswert. Begründen Sie jede Ihrer Umformungen kurz:

$$\mathbb{E}\left[\frac{C^2 \cdot B + C}{1 + A}\right]$$

Hinweis: $\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{(k+1)!(n-k)!} p^k (1-p)^{n-k} = \frac{1-(1-p)^{n+1}}{p(n+1)}$.

(b) Die ZVn A, B, C, D sind unabhängig und wie folgt verteilt: $A \sim \text{Exp}(3/4)$, $B \sim \mathcal{N}(1,4)$, $C \sim \mathcal{N}(-2,1)$, $D \sim \text{Uni}([1,4])$.

Bestimmen Sie wieder folgenden Erwartungswert. Begründen Sie jede Ihrer Umformungen kurz:

$$\mathbb{E}\left[A^{I_{[D\leq 3]}} \cdot \left(4 \cdot I_{[D>3]} \cdot B - C\right)^2\right]$$

Hinweis: Verwenden Sie eine geeignete Fallunterscheidung nach D. Rechnen Sie den Erwartungswert dann zunächst für die einzelnen Fälle getrennt aus.

Erinnerung: $I_{[X\geq t]}$ ist die Indikatorvariable zu dem Ereignis $[X \geq t]$ (für X eine reellwertige ZV).

Lösung:

(a) $\mathbb{E}[A] = 4$, $\mathbb{E}[B] = 4$, $\mathbb{E}[C] = \text{Var}[C] = 3$.

Da A, B, C unabhängig, sind auch $C^2B + C$ und $(1+A)^{-1}$ unabhängig, so dass gilt:

$$\mathbb{E}\left[\frac{C^2 \cdot B + C}{1+A}\right] = \mathbb{E}[C^2B + C] \cdot \mathbb{E}[(1+A)^{-1}].$$

Wegen der Linearität:

$$\mathbb{E}[C^2B + C] = \mathbb{E}[C^2B] + \mathbb{E}[C].$$

Da B, C unabhängig, sind auch C^2, B unabhängig:

$$\mathbb{E}[C^2B] = \mathbb{E}[C^2]\mathbb{E}[B].$$

Mit $\mathbb{E}[C^2] = \text{Var}[C] + \mathbb{E}[C]^2$ folgt:

$$\mathbb{E}[C^2B + C] = (\text{Var}[C] + \mathbb{E}[C]^2)\mathbb{E}[B] + \mathbb{E}[C] = (3 + 3^2) \cdot 4 + 3 = 51.$$

Es bleibt:

$$\mathbb{E}[(1+A)^{-1}] = \sum_{k=0}^{10} (1+k)^{-1} \binom{10}{k} (2/5)^k \cdot (3/5)^{10-k} = \sum_{k=0}^{10} \frac{10!}{(1+k)!(10-k)!} (2/5)^k \cdot (3/5)^{10-k} = \frac{1-(3/5)^{11}}{11 \cdot 2/5} \approx 0.226$$

Insgesamt:

$$\mathbb{E}\left[\frac{C^2 \cdot B + C}{1+A}\right] \approx 11.55$$

(b) $\mathbb{E}[A] = 4/3$, $\mathbb{E}[B] = 1$, $\text{Var}[B] = 4$, $\mathbb{E}[C] = -2$, $\text{Var}[C] = 1$.

Mit dem Satz der totalen W'keit:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[A^{I_{[D\leq 3]}} \cdot \left(4 \cdot I_{[D>3]} \cdot B - C\right)^2\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[A^{I_{[D\leq 3]}} \cdot \left(4 \cdot I_{[D>3]} \cdot B - C\right)^2 \mid D \leq 3\right] \cdot \Pr[D \leq 3] \\
+ \; & \mathbb{E}\left[A^{I_{[D\leq 3]}} \cdot \left(4 \cdot I_{[D>3]} \cdot B - C\right)^2 \mid D > 3\right] \cdot \Pr[D > 3]
\end{aligned}$$

Da $D \sim \text{Uni}([1,4])$:

$$\Pr[D \leq 3] = 2/3 \quad \Pr[D > 3] = 1/3$$

Für $D \leq 3$:

$$\mathbb{E}\left[A^{I_{[D\leq 3]}} \cdot \left(4 \cdot I_{[D>3]} \cdot B - C\right)^2 \mid D \leq 3\right] = \mathbb{E}\left[A \cdot (-C)^2 \mid D \leq 3\right]$$

Da A, C unabhängig von D:

$$\mathbb{E}[A \cdot (-C)^2 \mid D \leq 3] = \mathbb{E}[AC^2]$$

Da A, C unabhängig:

$$\mathbb{E}[AC^2] = \mathbb{E}[A]\mathbb{E}[C^2] = \mathbb{E}[A](\text{Var}[C] + \mathbb{E}[C]^2) = (4/3)(1 + (-2)^2) = \frac{20}{3}$$

Für $D < 3$:

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}\left[A^{I_{[D\leq 3]}} \cdot \left(4 \cdot I_{[D>3]} \cdot B - C\right)^2 \mid D > 3\right] \\
= \; & \mathbb{E}\left[(4 \cdot B - C)^2 \mid D > 3\right]
\end{aligned}$$

Da B, C unabhängig von D:

$$\mathbb{E}\left[(4 \cdot B - C)^2 \mid D > 3\right] = \mathbb{E}\left[(4 \cdot B - C)^2\right]$$

Da B, C unabhängig (zweiter Schritt):

$$\mathbb{E}\left[(4 \cdot B - C)^2\right] = \text{Var}[4B - C] + \mathbb{E}[4B - C]^2 = 16\text{Var}[B] + \text{Var}[C] + (4\mathbb{E}[B] - \mathbb{E}[C])^2 = 64 + 1 + (4+2)^2 = 101$$

Insgesamt:

$$\mathbb{E}\left[A^{2 \cdot I_{[D\leq 3]}} \cdot \left(4 \cdot I_{[D>3]} \cdot B - C\right)^2\right] = \frac{20}{3} \cdot \frac{2}{3} + 101 \cdot \frac{1}{3} = \frac{343}{9} = 38.\overline{1}$$

Aufgabe 3 **2P+2P+2P=6P**

In einer Urne befinden sich zwei rote Kugeln und eine schwarze Kugel. In jeder Runde wird eine zufällige Kugel aus der Urne entnommen – jede Wahl ist dabei gleich wahrscheinlich – und durch eine Kugel mit genau der anderen Farbe ersetzt: eine rote Kugel wird somit zu einer schwarzen Kugel, eine schwarze Kugel zu einer roten Kugel.

(a) In der zweiten Runde wird eine rote Kugel gezogen. Mit welcher W'keit war die Kugel aus Runde eins rot unter dieser Bedingung?

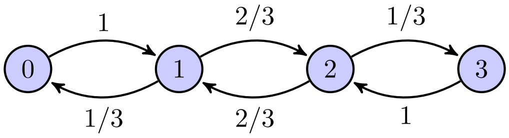
(b) Wie groß ist die W'keit, schließlich in die Situation zu kommen, dass alle drei Kugeln schwarz sind?

(c) Wie viele Runden werden im Erwartungswert benötigt, bis alle drei Kugeln das erste Mal schwarz sind?

Lösung:

(a) $\Pr[\{rr\} \mid \{rr, sr\}] = \frac{2/3 \cdot 1/3}{2/3 \cdot 1/3 + 1/3 \cdot 1} = \frac{2/3}{2/3+1} = 2/5$.

Das Experiment lässt sich als Markov-Kette mit folgendem Übergangsgraphen auffassen, wobei die Zustände die Zahl der schwarzen Kugeln angeben, so dass die Startverteilung gerade durch den Vektor $(0, 1, 0, 0)$ beschrieben wird:



(b) Hier ist die Ankunftsw'keit $f_{1,3}$ gesucht. Da alle Pfade von 1 nach 3 alle Zustände überdecken, folgt mit dem Satz zu den Markov-Diagrammen $f_{1,3} = 1$.

Alternativ löst man das LGS

$$f_{1,3} = 1/3 f_{0,3} + 2/3 f_{2,3} \quad f_{2,3} = 2/3 f_{1,3} + 1/3 \quad f_{0,3} = f_{1,3}$$

(c) Hier ist nach der Übergangszeit $h_{1,3}$ gefragt:

$$h_{1,3} = 1 + 1/3 h_{0,3} + 2/3 h_{2,3} \quad h_{0,3} = 1 + h_{1,3} \quad h_{2,3} = 1 + 2/3 h_{1,3}$$

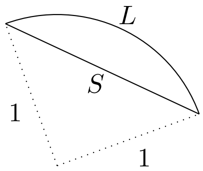
oder kurz

$$h_{1,3} = 1 + 1/3 + 1/3 h_{1,3} + 2/3 + 4/9 h_{1,3} = (1 - 1/3 - 4/9)^{-1}(1 + 1/3 + 2/3) = 9$$

Aufgabe 4 **4P**

Sei L gleichverteilt auf $[0, \pi)$ die Länge eines Segments auf dem Einheitskreis (maximal ist L der halbe Einheitskreis). Die Endpunkte des Kreissegments definieren eine Sehne der Länge S.

Bestimmen Sie die Dichte von S.



Hinweis: $\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Lösung: Es gilt: $S = 2\sin(L/2)$ (Mittelsenkrechte=Winkelhalbierende einzeichnen).

Für $t < 0$ gilt $\Pr[S \le t] = 0$.

Für $t > 2$ gilt $\Pr[S \le t] = 1$.

Für $t \in [0, 2]$ (arcsin ist streng monoton wachsend):

$$\Pr[S \le t] = \Pr[L \le 2\arcsin(t/2)] = \frac{2\arcsin(t/2)}{\pi}.$$

Damit ist die Dichte:

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-(t/2)^2}} \cdot \frac{1}{2} \cdot I_{[0,2]}(t).$$

Aufgabe 5 **2P+2P+2P=6P**

Für jede der folgenden drei Markov-Ketten (gegeben durch die unten stehenden Übergangsmatrizen) sind die folgenden Fragen zu beantworten:

- Geben Sie **eine** stationäre Verteilung an, soweit diese existiert.
- Falls eine stationäre Verteilung existiert, geben Sie an, ob diese eindeutig ist.
- Geben Sie im Fall einer eindeutigen stationären Verteilung an, ob jede Startverteilung gegen diese stationäre Verteilung konvergiert.

Bei allen Fragen sind **keine** Begründungen oder Rechnungen verlangt. Es reicht z.B. einfach eine stationäre Verteilung anzugeben.

$$(a)\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad (b)\ \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{2} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad (c)\ \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{9} & \frac{8}{9} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{2}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

Hinweis: Zur Bestimmung der stationären Verteilungen ist das Lösen eines LGS in keinem der drei Fälle nötig.

Lösung:

(a) Stationäre Verteilung: $(0, 1/2, 0, 1/2)$; **eindeutig**; **nicht** jede Startverteilung konvergiert dagegen.

(b) Stationäre Verteilung: $(1/4, 1/4, 1/4, 1/4)$, **eindeutig**; **jede** Startverteilung konvergiert dagegen.

(c) Stationäre Verteilung: $(0, 0, 1, 0)$, **nicht** eindeutig (alle Konvexkombination von $(0, 0, 1, 0)$ und $(0, 3/8, 0, 5/8)$).

Aufgabe 6 **1P+1P+2P+3P+2P = 9P**

Wir erzeugen ein zufälliges Wort $a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_l}$ beliebiger Länge, indem wir so lange gleichverteilt und unabhängig Positionen $i_1, i_2, \ldots$ ($i_j \in [5]$) in dem Wort

$a_1 a_2 a_3 a_4 a_5 =$`dude#`

wählen und die an den jeweiligen Positionen stehenden Buchstaben a_{i_j} aneinanderreihen, bis das erste Mal die Position 5 gewählt wird; das heißt, in jedem so erzeugten Wort kommt das Zeichen `#` genau einmal, nämlich genau als letztes Zeichen vor.

(a) Sei L die ZV, welche die Länge des erzeugten Worts angibt.

Geben Sie die Dichte und den Erwartungswert von L an.

(b) Für $\alpha \in \{d, u, e, \#\}$ ein Buchstaben aus `dude#` sei N_α die ZV, welche angibt, wie oft der Buchstaben α in dem erzeugten Wort vorkommt.

(i) Zeigen Sie, dass L und N_e nicht stochastisch unabhängig sind.

(ii) Sind N_u und $N_\#$ stochastisch unabhängig?

(c) Sei P die Position des ersten ds in dem erzeugten Wort. Kommt kein d in dem erzeugten Wort vor, so gelte $P = \infty$.

Bestimmen Sie unter der Bedingung, dass mindestens ein d in dem erzeugten Wort enthalten ist,

(i) die erwartete Position $\mathbb{E}[P \mid P < \infty]$ des ersten ds in dem erzeugten Wort.

(ii) die erwartete Länge $\mathbb{E}[L \mid P < \infty]$ des erzeugten Worts.

Lösung:

(a) L zählt die Versuche bis zum ersten Erfolg (Position 5 bzw. das Zeichen $\#$ wird gewählt). Damit $L \sim \text{Geo}(1/5)$, $\Pr[L = k] = (4/5)^{k-1} 1/5$ für $k > 0$ (sonst $= 0$), $\mathbb{E}[L] = 5$.

(b) (i) $\Pr[L = 1] = 1/5$, $\Pr[N_e > 0] > 0$ (da das Wort $e\#$ mit pos. W'keit erzeugt wird), $\Pr[N_e > 0, L = 1] = 0$ (da $L = 1$ bedeutet, dass das Wort $\#$ erzeugt wird).

Somit: $\Pr[N_e > 0, L = 1] \neq \Pr[N_e > 0] \cdot \Pr[L = 1]$.

(ii) Nach VL reicht es $\Pr[N_\# = x, N_u = y] = \Pr[N_\# = x] \cdot \Pr[N_u = y]$ für alle $x \in W_{N_\#}$ und $y \in W_{N_u}$ zu zeigen.

Nicht verlangt: Die Wertebereiche hängen natürlich von Ω ab. Eine natürliche Wahl ist z.B. $\Omega = \{1,2,3,4\}^*\{5\}$, wobei ein Elementarereignis gerade die gewählten Positionen angibt, oder $\Omega = \{d,u,e\}^*\{\#\}$, wobei dann bereits das erzeugte Wort das Elementarereignis ist. In beiden Fällen gilt $W_{N_\#} = \{1\}$ und $W_{N_u} = \mathbb{N}_0$.

Somit reicht es $\Pr[N_\# = 1, N_u = y] = \Pr[N_\# = 1] \cdot \Pr[N_u = y]$ zu zeigen.

Wegen $[N_\# = 1] = \Omega$ gilt $[N_\# = 1, N_u = y] = [N_u = y]$.

Somit $\Pr[N_\# = 1, N_u = y] = \Pr[N_u = y] = 1 \cdot \Pr[N_u = y] = \Pr[N_\# = 1] \cdot \Pr[N_u = y]$.

(c) (i) Zunächst berechnet man die Dichte von P:

Je nachdem, wie man Ω wählt, gilt z.B. $[P = i] = \{2,4\}^{i-1}\{1,3\}\{1,2,3,4\}^*\{5\}$ bzw. $[P = i] = \{u,e\}^{i-1}\{d\}\{d,u,e\}^*\{\#\}$.

Somit folgt für $i \in \mathbb{N} - \{0\}$: $\Pr[P = i] = (2/5)^{i-1} 2/5 \cdot \sum_{l=1}^{\infty} (4/5)^{l-1} 1/5 = (2/5)^{i-1} 2/5$.

(Sobald das erste d an Position i aufgetreten ist, wartet man noch auf das erste #, um das Wort/Experiment zu beenden. Nach (a) ist das so erzeugte Wort mit W'keit $1 = \sum_{l=1}^{\infty} (4/5)^{l-1} 1/5$ endlich.)

Damit berechnet man $\Pr[P < \infty]$:

$$\Pr[P < \infty] = \sum_{i=1}^{\infty} (2/5)^i = -1 + \sum_{i=0}^{\infty} (2/5)^i = -1 + \frac{1}{1 - 2/5} = 2/3.$$

(Alternativ: Man wählt solange Positionen, bis man das erste Mal entweder ein d (d.h. $P < \infty$) oder ein # (d.h. $P = \infty$) wählt; dabei ist die W'keit, das d zu wählen doppelt so hoch, somit $\Pr[P < \infty] = 2/3$ und $\Pr[P = \infty] = 1/3$.)

Es folgt:

$$\mathbb{E}[P \mid P < \infty] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \Pr[P = i \mid P < \infty] = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot \frac{\Pr[P = i]}{\Pr[P < \infty]} = \sum_{i=1}^{\infty} i \cdot (2/5)^{i-1} 3/5 = 5/3.$$

Die letzte Summe ist gerade der Erwartungswert einer Geo(3/5)-verteilten ZV.

Alternativ kann man für den letzten Schritt auch den Satz der totalen W'keit verwenden:

Es gilt $\Pr[P = 1 \mid P < \infty] = \frac{2/5}{2/3} = 3/5$ und $\Pr[P > 1 \mid P < \infty] = 1 - \Pr[P = 1 \mid P < \infty] = 2/5$, womit folgt:

$$\mathbb{E}[P \mid P < \infty] = \mathbb{E}[P \mid P < \infty, P = 1] \cdot \Pr[P = 1 \mid P < \infty] + \mathbb{E}[P \mid P < \infty, P > 1] \cdot \Pr[P > 1 \mid P < \infty]$$

Weiterhin gilt $\mathbb{E}[P \mid P = 1, P < \infty] = 1$ und $\mathbb{E}[P \mid 1 < P < \infty] = \mathbb{E}[P + 1 \mid P < \infty] = 1 + \mathbb{E}[P \mid P < \infty]$ – falls das erste Zeichen kein d ist, befindet man sich weiterhin in dem Experiment, in dem man ein Wort mit einem d erzeugen will, wobei nun ein Zeitschritt vergangen ist.

Somit:

$$\mathbb{E}[P \mid P < \infty] = 3/5 \cdot 1 + 2/5 \cdot (1 + \mathbb{E}[P \mid P < \infty]) = 5/3.$$

(ii) Unter der Bedingung, dass mindestens ein d vorkommt, wartet man zunächst $\mathbb{E}[P \mid P < \infty]$ Zeichen auf das d, danach ist die Bedingung $P < \infty$ trivial erfüllt, und man betrachtet das ursprüngliche Experiment aus (a), d.h. man wartet dann noch $\mathbb{E}[L]$ Zeichen auf das #.

Insgesamt somit $\mathbb{E}[L \mid P < \infty] = 5/3 + 5 = 20/3$.

Alternativ:

$[P < \infty] = \{u,e\}^*\{d\}\{d,u,e\}^*\{\#\}$ und $[P = i] = \{u,e\}^{i-1}\{d\}\{d,u,e\}^*\{\#\}$.

Damit:

$$\mathbb{E}[L \mid P < \infty] = \frac{1}{\Pr[P < \infty]} \sum_{i,j>0} (i+j)(2/5)^{i-1}(2/5) \cdot (4/5)^{j-1} 1/5 = \sum_{i \geq 0} (i+j)(2/5)^{i-1}(3/5) \cdot (4/5)^{j-1}(1/5)$$

Das ist gerade der Erwartungswert $\mathbb{E}[X + Y]$ für X, Y unabhängig mit $X \sim \text{Geo}(3/5)$ und $Y \sim \text{Geo}(1/5)$, somit $\mathbb{E}[X + Y] = 5/3 + 5 = 20/3$.