# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 11

*Beachten Sie:* Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

## Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 10.07.2013 um 12:00

**Vereinfachen Sie Terme soweit wie möglich. Unnötig komplizierte Antworten werden nicht gewertet.**

*Hinweis*: Verwenden Sie für die Standardnormalverteilung die Tabelle auf wikipedia.

*Erinnerung*: Die $\Gamma(\lambda, r)$-Verteilung bestitzt die Dichte $f_{\lambda,r}(x) = \frac{\lambda^r}{\Gamma(r)} x^{r-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$ für $\lambda, r > 0$.

### Aufgabe 11.1 — 2P+3P

Prof. Evilsparza ist gezwungen worden, eine schriftliche Prüfung abzuhalten. Allerdings hat er keine Lust $n = 120$ Klausuren zu korrigieren, weswegen er die Noten zufällig vergeben will.

Da er allerdings auch keinen Ärger mit der Fakultät bekommen möchte, hat er folgende, gegenläufige Zielsetzungen:

- Einerseits ist Prof. Evilsparza fest davon überzeugt, dass früher alles besser war, weswegen die Studenten in diesem Jahr so schlecht wie nur möglich bewertet werden sollten.
- Andererseits will Prof. Evilsparza nervigen Emailaustausch mit der Fakultät vermeiden, welche nur darauf wartet, ihn wegen ungerechter Notenvergabe zu ermahnen.

Prof. Evilsparza weiß, dass die Fakultät die Notenhäufigkeiten $n_i$ in der aktuellen Klausur mit den „Notenw'keiten" $p_i$ aus den Vorjahren vergleichen wird:

$$p_5 = 0.3, \quad p_4 = 0.4, \quad p_3 = 0.2, \quad p_2 = 0.05, \quad p_1 = 0.05.$$

Die Fakultät wird dabei einen $\chi^2$-Anpassungstest zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ verwenden. ($H_0$ ist in dem $\chi^2$-Anpassungstest aus den Folien fest vorgegeben, entspricht aber gerade der Intention der Fakultät, welche eine signifikante Abweichung erwartet, jedoch Prof. Evilsparza nicht fälschlicherweise beschuldigen will.)

(a) Prof. Evilsparza setzt zunächst als Notenverteilung für diese Jahr bei $n = 120$ Klausuren die folgenden Häufigkeiten an:

$$h_5 = 41, \quad h_4 = 50, \quad h_3 = 20, \quad h_2 = 5, \quad h_1 = 4$$

Überprüfen Sie, ob die Fakultät ihn für diese Notenverteilung ermahnen wird.

(b) Prof. Evilsparza denkt, dass in (a) zu häufig die Note drei vergeben wird. Er würde daher gerne möglichst viel von $h_3$ auf $h_5$ umverteilen, d.h. er möchte ein möglichst großes $r \in \mathbb{N}$ bestimmen, so dass die folgende Notenverteilung noch von der Fakultät akzeptiert wird:

$$h'_5 = 41 + r, \quad h'_4 = 50, \quad h'_3 = 20 - r, \quad h'_2 = 5, \quad h'_1 = 4.$$

Helfen Sie dem armen Prof. Evilsparza!

*Bemerkung*: Verwenden Sie die Tabelle auf wikipedia für die $\chi^2$-Verteilung.

### Aufgabe 11.2 — 6P

Prof. Evilsparza führt zu Markforschungszwecken (siehe TÜ 5.3) eine vertrauliche Umfrage zum Konsum einer gewissen "Substanz" in einer nicht näher bezeichneten Vorlesung durch.

Jeder Befragte hält sich dabei an folgendes Protokoll:

- Falls er ein Konsument der Substanz ist, so antwortet er mit "Ja".
- Andernfalls wirft er eine (faire) Münze. Zeigt die Münze "Kopf", antwortet er mit "Ja", ansonsten mit "Nein".

Prof. Evilsparza nimmt vereinfachend an, dass ein durchschnittlicher Student (unabhängig von allen anderen) mit W'keit $p$ ein Konsument der Substanz ist.

Er möchte anhand der Umfrage feststellen, ob er $p > 0$ annehmen sollte. (Falls dies gilt, wird sich die Herstellung und der Verkauf der Substanz rechnen.)

Entwickeln Sie einen statistischen Test, um Prof. Evilsparza eine Entscheidungshilfe zu geben. Prof. Evilsparza ist dabei wichtig, dass er die W'keit festlegen kann, mit der er sich fälschlicherweise für die Produktion der Substanz entscheidet. Beschreiben Sie für Ihren Test genau:

- die Annahmen,
- die Testgröße,
- die Nullhypothese und die Alternative und
- den Ablehnungsbereich.

Führen Sie anschließend den Test an den Daten der Umfrage (s.u.) zum Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$ durch. Welche Entscheidung empfehlen Sie Prof. Evilsparza?

Ergebnisse der Umfrage:

- Teilnehmer: 237
- Ja: 124
- Nein: 113

**Aufgabe 11.3** **4P+5P**

(a) Bestimmen Sie den ML-Schätzer $\widehat{\lambda}$ für den Parameter $\lambda > 0$ einer $\Gamma(\lambda, 3)$-Verteilung.

Wie hängt $\widehat{\lambda}$ mit dem Stichprobenmittel $\overline{X}$ zusammen?

(b) Sei $n > 3$.

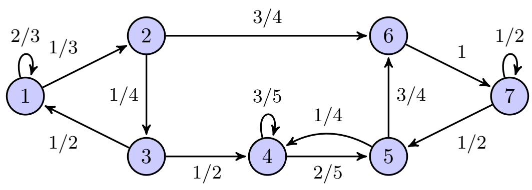
Ist $\widehat{\lambda}$ erwartungstreu bzgl. $\lambda$?

Ist $\widehat{\lambda}$ konsistent im quadratischen Mittel bzgl. $\lambda$?

*Hinweis*: Sei $f_{\lambda,r}(x)$ die Dichte der $\Gamma(\lambda, r)$-Verteilung. Die Dichte des ML-Schätzers sollte die Form $f_{\lambda,r}(g(x))g'(x)$ besitzen mit $g(x) = \frac{c}{x}$ für geeignete Konstanten $\lambda$, $r$ und $c$. (Die Konstanten können von $n$ abhängen.)

# Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 08.07.2013

**Aufgabe 11.1**




(a) Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit $h_4 = \mathbb{E}[T_4]$.

(b) Die bedingte ZV $N = \min\{n \geq 1\colon X_n \in \{4,5,6,7\}\} \mid [X_0 = 1]$ zählt die Zeitschritte, bis man startend in Zustand 1 einen der Zustände aus $\{4,5,6,7\}$ erreicht.

  (i) Zeigen Sie, dass $\Pr[N < \infty] = 1$.

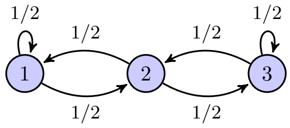
  (ii) Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von $N$, dann $\mathbb{E}[N]$ und $\text{Var}[N]$.

*Hinweis*: Wie kann man den Graphen/die Markov-Kette so tranformieren, dass sich $N$ als Übergangszeit in der transformierten Markov-Kette auffassen lässt?

(c) Besitzt diese Markov-Kette eine eindeutige stationäre Verteilung?

## Aufgabe 11.2

Wir betrachten den folgenden Übergangsgraphen einer Markov-Kette:




(a) Stellen Sie die Übergangsmatrix $P$ auf.

(b) Diagonalisieren Sie $P$ und bestimmen Sie das Verhalten der Markov-Kette für $n \to \infty$ in Abhängigkeit von der Startverteilung.

(c) Bestimmen Sie eine stationäre Verteilung der Markov-Kette. Ist diese eindeutig?

(d) Bestimmen Sie die erwartete Rückkehrzeit für jeden der Zustände.

## Aufgabe 11.3

Betrachten Sie folgendes Programm zur Simulation eines Würfels:

```
int state  = 0;

while( true ) {
  if(state == 0) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 1; } else { state = 2; }
  }
  if(state == 1) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 3; } else { state = 4; }
  }
  if(state == 2) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 5; } else { state = 6; }
  }
  if(state == 3) {
    if (randomCoin() == 0) { state = 1; } else { return 1;}
  }
  if(state == 4) {
    if (randomCoin() == 0) { return 2; } else { return 3;}
  }
  if(state == 5) {
    if (randomCoin() == 0) { return 4; } else { return 5;}
  }
  if(state == 6) {
    if (randomCoin() == 0) { return 6; } else { state = 2;}
  }
}
```

Nehmen Sie an, dass randomCoin() eine faire Münze implementiert, d.h., die Werte 0 und 1 immer mit jeweils W'keit 1/2 zurückgibt.

(a) Beschreiben Sie das Programm als eine Markov-Kette. Repräsentieren Sie die verschiedenen Rückgabewerte durch entsprechende absorbierende Zustände.

Es reicht, den Übergangsgraphen zu zeichnen.

(b) Terminiert das Programm mit W'keit 1?

(c) Entscheiden Sie, ob obiges Programm tatsächlich einen fairen sechsseitigen Würfel implementiert.

(d) Was ist die erwartete Anzahl an Schritten bis ein Aufruf des obigen Programms terminiert?

(e) Alice benutzt obiges Programm, um eine geheime, zufällige Zahl $x$ zu erzeugen.

Eve sieht die Ausgabe $x$ des Programms nicht, sie kann aber die (Zeit-)Schritte messen, die der Programmaufruf benötigt hat.

Kann Eve aus der Anzahl der Schritte Rückschlüsse auf $x$ ziehen? Sind manche Werte für $x$ bei bekannter Schrittzahl wahrscheinlicher als andere?