Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h.c. Wilfried Brauer

SS 2005
Diskrete Strukturen 2
Endklausur
16. Juli 2005

Endklausur Diskrete Strukturen II

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ ☐☐
- Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb einer Aufgabe). Die Gesamtzahl erreichbarer Punkte beträgt 40.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.

Hörsaal verlassen	von	......	bis	......	/	von	......	bis ......
Vorzeitig abgegeben	um	......						
Besondere Bemerkungen:								

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ	Korrektor
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch).

Jede geometrisch verteilte, diskrete Zufallsvariable ist gedächtnislos.	✔ N
Die Dichtefunktion f_X einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X ordnet jeder rellen Zahl x eine Wahrscheinlichkeit $f_X(x)$ zu.	J ✔
Sei F_X die Verteilungsfunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X. F_X ist streng monoton steigend, d. h. $F_X(x) < F_X(y)$ für alle reellen Zahlen $x, y \in \mathbb{R}$, für die $x < y$ gilt.	J ✔
Wenn zwei unabhängige Zufallsvariable X und Y normalverteilt sind, dann ist auch ihre Differenz $X - Y$ normalverteilt.	✔ N
Jede erwartungstreue Schätzvariable für einen Parameter ϑ schätzt den Erwartungswert von ϑ.	J ✔
Bei echten Alternativtests ist die Summe der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1.Art und der Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art stets gleich 1.	J ✔
Die Anwendung des Maximum-Likelihood-Prinzips setzt die Verfügbarkeit einer Stichprobe voraus.	✔ N
Jeder Zustand einer (zeithomogenen) Markov-Kette ist entweder rekurrent oder transient.	✔ N

Lösungsvorschlag

Punkteverteilung: 1 Punkt pro richtiger Antwort, 1 Punktabzug pro falscher Antwort, 0 Punkte bei unbeantworteter Frage.

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als (Bruch-)Zahl oder Zahlenvektor (2 Punkte) oder mindestens als Formel (1 Punkt) an.

Welchen Wert hat die (wahrscheinlichkeits-)erzeugende Funktion der diskreten Verteilung $p_i = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^i,\ i \in \mathbb{N}_0$ an der Stelle $z = \frac{1}{2}$?	$\mathbf{\frac{4}{5}}$
Eine (zeithomogene) Markov-Kette über der Zustandsmenge $S = \{0, 1, \ldots, 9\}$ besteht aus einer unendlichen Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$. Welchen konstanten Wert haben die Übergangswahrscheinlichkeiten, wenn jede Variable X_t für $t \geq 1$ (Laplace-) gleichverteilt ist über S?	$\mathbf{\frac{1}{10}}$
Sei $f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\cos(x) & : \; -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & : \; \text{sonst} \end{cases}$ die Dichtefunktion einer kontinuierlichen Zufallsvariablen X. Geben Sie den Wert des Quantils $x_{\frac{1}{2}}$ der Verteilungsfunktion F_X an.	0
Berechnen Sie eine stationäre Verteilung der Markovkette mit Übergangsmatrix $\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.	$\mathbf{(0, 1)}$

Lösungsvorschlag

Punkteverteilung: 2 pro richtige Zahl, 1 für Formel, 0 bei unbeantworteter Frage.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

Es sei M eine Zufallsmaschine, die nach Aufforderung zufällig mit gleicher Wahrscheinlichkeit die Zahlen 1, 2 oder 3 ausgibt. Wir bezeichnen die entsprechende Zufallsvariable mit N.

Wir betrachten ein Experiment E, das in 2 Schritten ein Ergebnis erzeugt. Im ersten Schritt veranlassen wir die Maschine M eine Zahl k auszugeben. Im zweiten Schritt werfen wir k mal eine faire Münze, die entweder "Kopf" oder "Wappen" zeigt. Wir definieren eine Zufallsvariable H als diejenige Zahl, die angibt, wie oft im zweiten Schritt "Kopf" geworfen wird.

(a) Geben Sie die (wahrscheinlichkeits-)erzeugende Funktion $G_N(z)$ für N an.

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}(H)$ der Variablen H.

Ansage im Hörsaal: Die Wahrscheinlichkeitsverteilung von H ist durch das (Gesamt-) Experiment E bestimmt!

(c) Berechnen Sie die (wahrscheinlichkeits-)erzeugende Funktion $G_H(z)$ für H.

Lösungsvorschlag

(a)

$$G_N(z) = \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3} z^k$$

(2 Pkte.)

(b) Die Anzahl k, bei einem einzigen Wurf Kopf zu ziehen, sei die Zufallsvariable X mit Werten 0 oder 1. Die erzeugende Funktion für X ist

$$G_X(z) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} z.$$

Mit $\mathbb{E}(X) = G'_X(1) = \frac{1}{2}$ ($\frac{1}{2}$ Pkt.)

und $\mathbb{E}(N) = G'_N(1) = \frac{1}{3}(1+2+3) = 2$ ($\frac{1}{2}$ Pkt.)

erhalten wir

$$\mathbb{E}(H) = \mathbb{E}(N) \cdot \mathbb{E}(X) = 2 \cdot \tfrac{1}{2} = 1.$$ (1 Pkt.)

(c)

$$\begin{aligned} G_H(z) &= G_N(G_X(z)) \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1+z}{2} + \left(\frac{1+z}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+z}{2}\right)^3\right) && \text{(1 Pkt.)} \\ &= \frac{1}{24}(7 + 11z + 5z^2 + z^3). && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Sei X die kontinuierliche Zufallsvariable mit der Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} c & : \text{falls} \quad 0 \leq x \leq a \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}$$

mit Konstanten $c > 0$ und $a > 1$.

(a) Berechnen Sie c in Abhängigkeit von a.

(b) Berechnen Sie die Verteilungsfunktion der Variablen $T = |1 - X|$.

Lösungsvorschlag

(a)

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f_X(x)\, dx = \int_0^a c\, dx = c \cdot a.$$

Es folgt $c = \frac{1}{a}$. (1 Pkt.)

(b) Für $t < 0$ gilt $F_T(t) = 0$. Wir betrachten nun Werte $t \geq 0$.

$$\begin{aligned} F_T(t) &= \Pr[|1 - X| \leq t] \\ &= \Pr[1 - X \leq t \text{ und } X < 1] + \Pr[X - 1 \leq t \text{ und } X \geq 1] && \text{(1 Pkt.)} \\ &= \int_{1-t}^{1} f_X\, dx + \int_{1}^{1+t} f_X\, dx && \text{(1 Pkt.)} \\ &= \begin{cases} \frac{t}{a} : \text{falls} \quad 0 \leq t \leq 1 \\ \frac{1}{a} : \text{falls} \quad t > 1 \end{cases} + \begin{cases} \frac{t}{a} : \text{falls} \quad 0 \leq t \leq a-1 \\ \frac{a-1}{a} : \text{falls} \quad t > a-1 \end{cases} && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$

Ein Sonderpunkt wird gegeben für die Zusammenfassung:

$$F_T(t) = \begin{cases} 0 & : \quad t < 0 \\ \frac{2t}{a} & : \quad 0 \leq t \leq \min\{1, a-1\} \\ \frac{\min\{1,a-1\}}{a} + \frac{t}{a} & : \quad \min\{1, a-1\} < t \leq \max\{1, a-1\} \\ 1 & : \quad \max\{1, a-1\} < t \end{cases}$$

(1 Sonderpunkt)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Sei X eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Mit einer Stichprobe von nur 2 Elementen soll die Hypothese $H_0 : p \geq \frac{2}{3}$ getestet werden. Die Testvariable sei $T = X_1+X_2$, wobei X_1 und X_2 unabhängige Kopien von X sein sollen, d. h., X_1, X_2 sind ebenfalls Bernoulli-verteilt mit gleichem Parameter p. Der Ablehnungsbereich des Tests sei $K = \{0\}$.

(a) Geben Sie die Verteilungsfunktion von T an. (Es ist nicht nach der Dichtefunktion von T gefragt!)

(b) Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit 1. Art (Signifikanzniveau) α_1 .

(c) Wir nehmen an, dass die echte Alternative $H_1 : p \leq \frac{1}{3}$ bekannt sei. Dies bedeutet, dass H_1 gelte, wenn H_0 nicht gilt.

Berechnen Sie damit die Fehlerwahrscheinlichkeit 2. Art α_2 .

Lösungsvorschlag

(a) T ist binomialverteilt auf den Werten aus $W_T = \{0, 1, 2\}$ mit Dichtefunktion

$$f_T(t) = \binom{2}{t} p^t (1-p)^{2-t} \qquad (\tfrac{1}{2} \text{ Pkt.})$$

Für die Verteilungsfunktion F_T ergibt sich

$$\begin{aligned} F_T(0) &= (1-p)^2 && (\tfrac{1}{2} \text{ Pkt.}) \\ F_T(1) &= (1-p)^2 + \binom{2}{1} p^1 (1-p)^1 \\ &= 1 - p^2 && (\tfrac{1}{2} \text{ Pkt.}) \\ F_T(2) &= 1 && (\tfrac{1}{2} \text{ Pkt.}) \end{aligned}$$

Im übrigen gilt $F_T(t) = 1$ für $t \geq 2$.

(b)

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \max_{p \geq \frac{2}{3}} \Pr[T \in K] \\ &= \max_{p \geq \frac{2}{3}} F_T(0) && (1 \text{ Pkt.}) \\ &= \max_{p \geq \frac{2}{3}} (1-p)^2 = \frac{1}{9} && (1 \text{ Pkt.}) \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \max_{p \leq \frac{1}{3}} \Pr[T \notin K] \\ &= \max_{p \leq \frac{1}{3}} (1 - F_T(0)) && (1 \text{ Pkt.}) \\ &= \max_{p \leq \frac{1}{3}} (1 - (1-p)^2) = \frac{5}{9} && (1 \text{ Pkt.}) \end{aligned}$$

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette über den Zuständen $Q = \{0, 1, 2\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \\ 0,25 & 0,25 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Die (diskrete Verteilungs-)Dichtefunktion von X_0, d. h., die Startverteilung der Markov-Kette sei $q_0 = (s_0, s_1, s_2)$.

(a) Berechnen Sie die Dichtefunktion q_1 von X_1.

(b) Bestimmen Sie die Menge aller stationären Startverteilungen.

(c) Beweisen Sie die Unabhängigkeit der beiden Variablen X_0 und X_1.

Dabei sind X_0 und X_1 als Zufallsvariable über dem zugeordneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ zu betrachten mit

$$\Omega = \{(x_0, x_1) : x_0, x_1 \in Q\}, \quad \Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot \Pr[X_1 = x_1 | X_0 = x_0],$$
$$X_0((x_0, x_1)) = x_0 \qquad \text{und} \qquad X_1((x_0, x_1)) = x_1.$$

Lösungsvorschlag

(a)
$$\begin{aligned} q_1 &= q_0 \cdot P \\ &= \Big(\sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}25,\ \sum_{i=0}^{2} s_i \cdot 0{,}5\Big) && \text{(1 Pkt.)} \\ &= (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5) && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$

(b) Für stationäre Lösungen (s_0, s_1, s_2) muss gelten

$$(s_0, s_1, s_2) = (s_0, s_1, s_2) \cdot P$$

mit Nebenbedingung

$$\textstyle\sum_{i=0}^{2} s_i = 1. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

Wegen

$$(s_0, s_1, s_2) \cdot P = (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5)$$

folgt

$$(s_0, s_1, s_2) = (0{,}25\,,\ 0{,}25\,,\ 0{,}5). \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

(c) Es seien q_0 und q_1 die diskreten Verteilungen von X_0 und X_1. Für die Unabhängigkeit von X_0 und X_1 genügt der Nachweis der Gleichung

$$\Pr[(x_0, x_1)] = (q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1}$$

für alle $x_0, x_1 \in \{0, 1, 2\}$. (1 Pkt.)

Wir rechnen

$$\begin{aligned} (q_0)_{x_0} \cdot (q_1)_{x_1} &= (q_0)_{x_0} \cdot (q_0 P)_{x_1} \\ &= (q_0)_{x_0} \cdot \left(\sum_{i=0}^{2} (q_0)_i\, p_{i,x_1}\right) && \text{(1 Pkt.)} \\ &= (q_0)_{x_0} \cdot (p_{x_0,x_1}) && \text{(1 Pkt.)} \\ &= \Pr[(x_0, x_1)]. && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$