SS 2013

Zentralübung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (zur Vorlesung Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

10. Mai 2013

ZÜ IV

Übersicht:

1. Thema: Markov-Ketten:

    Übergangszeit
    Erwartete Übergangszeit
    Erwartete Rückkehrzeit
    Ankunftswahrscheinlichkeit
    Rückkehrwahrscheinlichkeit

2. Vorbereitung auf HA Blatt 4:

1. Thema: Markov-Ketten

Vorbemerkungen:

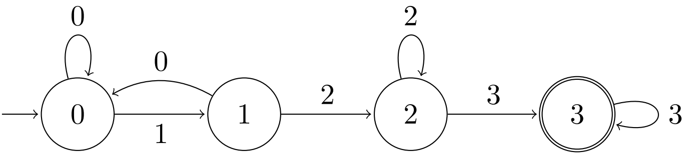
Markov-Ketten sind Thema in den TA 3.1 und TA 4.2,
und insbesondere in der HA 4.1.

Man beachte, dass diskrete zeithomogene Markov-Ketten in der Regel durch Markov-Diagramme definiert werden.

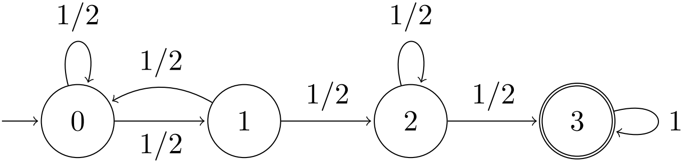
In den Diagrammen werden nur
positive Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen.

Alle übrigen Übergänge haben die Wahrscheinlichkeit 0.

Beispiel 1: Markov-Diagramme als endliche Automaten



Mit $Q = \Sigma$ entsprechen die akzeptierten Wörter in diesem Automat genau den Pfaden im folgenden Markov-Diagramm vom Zustand 0 in den Zustand 3.



Zentrale Begriffe:

Folge von Zufallsvariablen $(X_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ heißt eine Markov-Kette mit diskreter Zeit,

wenn die „Markov-Bedingung“ erfüllt ist.

Im zeithomogenen Fall bedeutet dies in etwa, dass die Markov-Kette mit einem Markov-Diagramm definiert werden kann, so dass also die Übergangswahrscheinlichkeiten lediglich von den momentanen Zuständen abhängen.

Der Zustandsraum sei S.

Beispiel 2:

Zufallsvariable $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}_0}$ der TA 3.1.

Die Verteilungsdichte f_{Z_i} einer Zufallsvariablen Z_i wird aus Z_0 errechnet durch Matrixmultiplikation

$$f_{Z_i} = f_{Z_0} \cdot P^i \,.$$

wobei P die Übergangsmatrix des definierenden Markov-Diagramms sei.

f_{Z_i} wird hier als Zeilenvektor von Wahrscheinlichkeiten für die Annahme der einzelnen Zustände aufgefasst.

Zusätzlich muss die Anfangsverteilung für Z_0 gegeben sein.

Für Beispiel 1:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Man beachte, dass die Ergebnisse, die von Markov-Ketten angenommen werden, unendliche Zustandsfolgen $(s_0, s_1, \ldots, s_n, \ldots\ ) \in S^{\mathbb{N}_0} = \Omega$ sind.

Eine endliche Folge von Zuständen beschreibt jeweils ein Ereignis als Menge von Zustandsfolgen, die diese von X_0 aus durchlaufen.

Präfixfreie Mengen von Zustandsfolgen beschreiben disjunkte Ereignismengen.

Hinweis für zukünftige Wahrscheinlichkeitsbegriffe bzw. W'keitsräume:
Man hat hier keine Elementarereignisse.

Die diskreten Zufallsvariablen $T_{i,j}$ bzw. T_i für $i, j \in \mathbb{N}_0$ mit

$$T_{i,j} = \min\{n \geq 1\,;\, X_n = j,\ \text{wenn } X_0 = i\}\,,$$

$$T_i = \min\{n \geq 1\,;\, X_n = i,\ \text{wenn } X_0 = i\}\,,$$

heißen Übergangszeit bzw. Rückkehrzeit .

Es gilt:

$$\Pr[T_{i,j} = n] = \Pr[[i \rightsquigarrow j]_n^{j=1}] \quad \text{(Def. siehe Vorlesung)}\,.$$

Beispiel:

Zufallsvariable W der TA 3.1(c), die die Anzahl der Würfe zählt, bis man vom Zustand a aus im Zustand d angelangt ist.

Man beachte:

$T_{i,j}$ und T_i sind bedingte Zufallsvariable, die für Markovketten mit $X_0 \neq i$ undefiniert bleiben können, weil die Gesamtheit dieser Markov-Ketten mit $X_0 \neq i$ in dem durch $X_0 = i$ bedingten Wahrscheinlichkeitsraum ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0 darstellt.

Wir entfernen aus Ω alle Ergebnisfolgen mit $X_0 \neq i$ und definieren den bedingten Ergebnisraum $\Omega_{(X_0=i)} = \Omega \setminus \{(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}\,;\, X_0 \neq i\}$.

Dann gelten
$T_{i,j} : \Omega_{(X_0=i)} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$ und $T_i : \Omega_{(X_0=i)} \rightarrow \mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}\,.$

Die Dichtefunktionen $f_{T_{i,j}}$ und f_{T_i} haben also den Definitionsbereich $\mathbb{N}_0 \cup \{+\infty\}$.

Im Allgemeinen gilt $f_{T_{i,j}}(+\infty) \neq 0$ und $f_{T_i}(+\infty) \neq 0$.

1.1 Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeit

Auf die Zufallsvariablen $T_{i,j}$ und T_i stützen sich die Begriffe

Ankunftswahrscheinlichkeit bzw. Rückkehrwahrscheinlichkeit

$$f_{i,j} \quad \text{bzw.} \quad f_i \,.$$

Es gelten $f_{i,j} = \Pr[T_{i,j} < +\infty]$ und $f_i = \Pr[T_i < +\infty]$.

Die folgenden Eigenschaften einer Markov-Kette hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab. (Siehe auch Satz 32 der Vorlesung!)

Man beachte, dass in das Übergangsdiagramm nur Pfeile mit positiven Übergangswahrscheinlichkeiten eingetragen werden dürfen.

Eigenschaften:

$$\begin{array}{lll} f_i = 0, & 0 < f_i < 1, & f_i = 1, \\ f_{i,j} = 0, & 0 < f_{i,j} < 1, & f_{i,j} = 1\,. \end{array}$$

$\underline{f_{i,j} = 0 \text{ bzw. } f_i = 0}$:

Es gibt keinen Pfad vom Knoten i nach Knoten j
bzw. von i zurück auf sich selbst.

$\underline{f_{i,j} = 1 \text{ bzw. } f_i = 1}$:

Jeder bei i beginnende Pfad kann
zu einem Pfad bis zu j bzw. zu i zurück
verlängert werden.

$\underline{0 < f_{i,j} < 1 \text{ bzw. } 0 < f_i < 1}$:

Die vorausgegangenen Eigenschaften treffen nicht zu.

Abgeleitete Eigenschaften für Zustände $i \in S$:

i ist transient, falls $f_i < 1$.

i ist rekurrent, falls $f_i = 1$.

i ist absorbierend, falls $f_{i,j} = 0$ für alle $j \neq i$ gilt.

Bemerkung: Auch die Eigenschaften „irreduzibel“, „periodisch“ und „aperiodisch“ hängen ausschließlich von der Struktur des Übergangsdiagramms ab.
Folglich gilt Gleiches auch für die Eigenschaft „ergodisch“.

Berechnung der Ankunfts- und Rückkehrwahrscheinlichkeiten:

Bei gegebener zeithomogener diskreter Markov-Kette (Übergangsmatrix) können alle $f_{i,j}$ und f_i durch folgendes Verfahren gefunden werden:

1. Man bestimme, für welche i, j die Gleichungen $f_{i,j} = 0$, $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 0$, $f_i = 1$ gelten.

2. Man löse für die verbleibenden Wahrscheinlichkeiten die Gleichungen

$$\begin{aligned} f_{i,j} &= p_{i,j} + \sum_{k \neq j} p_{i,k} f_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,, \\ f_i &= p_{i,i} + \sum_{k \neq i} p_{i,k} f_{k,i}\,. \end{aligned}$$

Bemerkung: Wir können die Gleichungen „zeilenweise“ lösen.

1.2 Erwartungswerte von $T_{i,j}$ und T_i

Erwartete Übergangszeit: $h_{i,j} := \mathbb{E}[T_{i,j}]$.

Erwartete Rückkehrzeit: $h_i := \mathbb{E}[T_i]$.

Beispiel: HA 3.1(c), TA 4.2

Es gilt:

Falls $|S| < \infty$, dann existieren die Erwartungswerte $h_{i,j}$ bzw. h_i genau dann, wenn $f_{i,j} = 1$ bzw. $f_i = 1$ gilt.
Die Berechnung erfolgt mit Gleichungssystem

$$
\begin{aligned}
h_{i,j} &= 1 + \sum_{k \neq j} p_{i,k} h_{k,j} \quad \text{falls } i \neq j\,,\\
h_i &= 1 + \sum_{k \neq i} p_{i,k} h_{k,i}\,.
\end{aligned}
$$

2. Vorbereitung auf HA von Blatt 4

Markov-Diagramm HA 4.1 (siehe Beispiel 1)

Tipps zu HA 4.1(b)

Tipps zu HA 4.1(c), Berechnung mit Gleichungssystem

2.1 Tipps zu HA 4.1(b)

Für das Markov-Diagramm in Beispiel 1 berechnen wir mit Zuständen $q_0 = 0, q_1 = 1, q_2 = 2, q_3 = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ die Mengen bzw. Mengengrößen

$$\begin{aligned} A_0(n) &= |[q_0 \rightsquigarrow q_0]_n|, \\ A_1(n) &= |[q_0 \rightsquigarrow q_1]_n|, \\ A_2(n) &= |[q_0 \rightsquigarrow q_2]_n| \qquad \text{und} \\ A_3(n) &= |[q_0 \rightsquigarrow q_3]_n^{q_3=1}| \end{aligned}$$

wie folgt.

Einige Anfangswerte:

$$\begin{array}{rclll} A_0(0) &=& 1, & A_0(1) = 1, & A_0(2) = 2, \\ A_1(0) &=& 0, & A_1(1) = 1, & A_1(2) = 2, \\ A_2(0) &=& 0, & A_2(1) = 0, & A_2(2) = 1, \\ A_3(0) &=& 0, & A_3(1) = 0, & A_3(2) = 0. \end{array}$$

Rekursionsgleichungen:

$$\begin{array}{rcl} A_0(n) &=& A_0(n-1) + A_1(n-1)\,, \\ A_1(n) &=& A_0(n-1)\,, \\ A_2(n) &=& A_1(n-1) + A_2(n-1)\,, \\ A_3(n) &=& A_2(n-1)\,. \end{array}$$

Eliminationsschritt nach:

$$\begin{aligned} A_0(n) &= A_0(n-1) + A_0(n-2)\,, \\ A_2(n) &= A_2(n-1) + A_0(n-2)\,. \end{aligned}$$

Mit Elimination des inhomonogenen Anteils A_0 für die Rekursion von A_2 nach Vorlesung DS folgt:

$$\begin{aligned} A_2(n) &= A_2(n-1) + A_0(n-2)\,, \\ A_2(n+1) &= A_2(n) + A_0(n-1)\,, \\ A_2(n+1) + A_2(n) &= A_2(n) + A_2(n-1) + A_0(n)\,, \\ A_2(n+1) &= A_2(n-1) + A_0(n)\,, \\ A_2(n+2) &= A_2(n+1) + A_0(n)\,, \\ A_2(n+2) - A_2(n+1) &= A_2(n+1) - A_2(n-1)\,, \\ A_2(n+3) &= 2A_2(n+2) - A_2(n)\,. \end{aligned}$$

Zusammenfassung:

$A_0(n)$ ist offenbar die Folge der Fibonacci-Zahlen.

$A_2(n)$ genügt der Rekursion

$$A_2(n+3) - 2A_2(n+2) + A_2(n) = 0\,.$$

Diese homogene Rekursion 3. Ordnung löst man üblicherweise mit den Methoden aus DS wie folgt:

Charakteristisches Polynom:

$$z^3 - 2z^2 + 1 = 0$$

mit den Nullstellen 1 und $\alpha_{1/2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$

$$z^3 - 2z^2 + 1 = (z-1)(z^2 - z - 1) = (z-1)(z-\alpha_1)(z-\alpha_1)\,.$$

Es gibt nun die entsprechende geschlossene Darstellung aller Lösungen.

Zu beachten ist, dass die Wahrscheinlichkeit für jeden Pfad der Länge $n+1$ im obigen Fall des Markov-Diagramms gleich dem Wert $\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ ist.

2.2 Tipps zu HA 4.1(c), Berechnung mit Gleichungssystem

Zur Kontrolle berechnen wir $h_{0,3} = \mathbb{E}[W]$ wie in Abschnitt 1.2.

$$\begin{aligned} h_{0,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{0,k} h_{k,3} \\ &= 1 + p_{0,0} h_{0,3} + p_{0,1} h_{1,3} + p_{0,2} h_{2,3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{1,3} + 0 \cdot h_{2,3}\,, \end{aligned}$$

d.h.

$$h_{0,3} = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{1,3}\,.$$

Gleichung für $h_{1,3}$:

$$\begin{aligned} h_{1,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{1,k} h_{k,3} \\ &= 1 + p_{1,0} h_{0,3} + p_{1,1} h_{1,3} + p_{1,2} h_{2,3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + 0 \cdot h_{1,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3} \,, \end{aligned}$$

d.h.

$$h_{1,3} = 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{0,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3} \,.$$

Gleichung für $h_{2,3}$:

$$\begin{aligned} h_{2,3} &= 1 + \sum_{k \neq 3} p_{2,k} h_{k,3} \\ &= 1 + p_{2,0} h_{0,3} + p_{2,1} h_{1,3} + p_{2,2} h_{2,3} \\ &= 1 + 0 \cdot h_{0,3} + 0 \cdot h_{1,3} + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3} \\ &= 1 + \frac{1}{2} \cdot h_{2,3}\,. \end{aligned}$$

Es folgt $h_{2,3} = 2$.

Durch Elimination folgt $h_{0,3} = 8$.