Technische Universität München (I7)
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund

Sommer 2012
22. Mai 2012

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 5

Freiwillige Abgabe wegen der Pfingstferien bis zum 30.5. bis 8:30—wird korrigiert aber nicht gewertet!

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Aufgabe 5.1

Nachdem sein Sohn Michel vor Kurzem die Kontonummer der Familie auf 4chan gepostet hat, ist der alleinerziehende Vater Xaver in Geldnöte geraten.

Er beschließt daher sein Leben komplett umzukrempeln, kündigt seinen schlecht bezahlten Job bei der örtlichen Ganztagesbetreung für verhaltensauffällige Jugendliche und widmet seine ganze Energie seiner wahren Bestimmung: Barkeeper!

Xaver plant nun eine Gutscheineaktion, um für seine neue Bar zu werben.

Jeder eingelöste Gutschein kostet ihn selbst dabei 0.5 Euro. Insgesamt möchte er jedoch – zumindest mit hoher W'keit – nicht mehr als 500 Euro verschenken:

Xaver geht davon aus, dass ein Gutschein mit W'keit $p = 0.85$ eingelöst werden wird.

Wie viele Gutscheine n sollte Xaver höchstens verteilen, damit die W'keit, dass ihn die Gutscheinaktion mehr als 500 Euro kostet, höchstens $\frac{1}{100}$ ist?

(a) Bestimmen Sie mithilfe der Markov-Ungleichung ein möglichst großes n.

(b) Bestimmen Sie mithilfe der Chebyshev-Ungleichung ein möglichst großes n.

(c) Leiten Sie (für allgemeine Konstanten) möglichst große untere Schranken für n mithilfe der Chebyshev- und Chernoff-Ungleichungen her. Unter welchen Umständen ist die Chernoff-Schranke besser als die Schranke aus der Chebyshev-Ungleichung?

Aufgabe 5.2

Sei X eine diskrete Zufallsvariable mit Wertemenge $W_X = \{1, 2, \ldots\}$. Wir schreiben kurz p_i für $\Pr[X = i]$ und nehmen an, dass $0 < p_1 < 1$ gilt.

Weiterhin sei X gedächtnislos, d.h., es gelte

$$\Pr[X > k + l \mid X > k] = \Pr[X > l]$$

für all $k, l \in \mathbb{N}_0$.

Zeigen Sie, dass X geometrisch mit Parameter p_1 verteilt ist.

Aufgabe 5.3

Wir betrachten folgendes Spiel: Zu Beginn befinden sich r_0 rote Kugeln und b_0 blaue Kugeln in einer Urne. In jedem Zug wird zufällig eine Kugel gezogen *und wieder zurückgelegt*. Ist sie rot, so werfen wir eine *neue* rote Kugel in die Urne, ist sie blau so werfen wir eine *neue* blaue Kugel hinzu. Das Spiel läuft n Züge lang.

Wir modellieren die Ergebnisse des Spieles als Wörter der Länge n über dem Alphabet $\{r, b\}$, also sei $\Omega = \{r, b\}^n$.

Seien im Folgenden $n = 4$, $r_0 = 3$, $b_0 = 2$.

(a) Sei $X_i : \Omega \to \{0, 1\}$ die ZV, welche angibt, ob im i-ten Zug eine rote Kugel gezogen wurde. Berechnen Sie $\Pr[X_2 = 1]$.

(b) Sei R_i die ZV welche die Anzahl der roten Bälle in der Urne nach i Zügen zählt (also $R_0(\omega) = r_0$).

Bestimmen Sie die Dichte der ZV R_2.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}[R_3]$ (*Hinweis:* $R_3 = R_2 + X_3$).

(d) Bestimmen Sie für allgemeine Parameter n, r_0, b_0 die Dichte von R_k.

Aufgabe 5.4

Es sei S_n die Menge aller Permutationen der Menge $[n]$. Ein $x \in [n]$ heißt Fixpunkt einer Permutation $\pi \in S_n$, falls $\pi(x) = x$. Sei $\Omega = S_n$ mit $\Pr[\pi] = \frac{1}{|S_n|} = \frac{1}{n!}$ $(\forall \pi \in \Omega)$. Sei X die ZV, welche die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation $\pi \in \Omega$ zählt.

Beispiel: Für $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist $X(\pi) = 2$, da 1 und 3 Fixpunkte von π sind: $\pi(1) = 1$ und $\pi(3) = 3$.

(a) Sei n fest. Für $S \subseteq [n]$ sei A_S das Ereignis, dass zumindest alle $x \in S$ Fixpunkte sind, d.h.

$$A_S = \{\pi \in \Omega \mid \forall x \in S\colon \pi(x) = x\}.$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Siebformel, dass $\Pr[X_n = 0] = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{k+1} \frac{1}{k!}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Pr[X_n = k] = \frac{1}{k!} \cdot \Pr[X_{n-k} = 0]$ für $0 \le k \le n$.

(c) Gegen welche Werte konvergieren der Erwartungswert und die Varianz von X_n für $n \to \infty$?