HA 3.1

(a) (i) $\Pr[X = -1] = \frac{1}{3} + \frac{3}{8} = \frac{17}{24}$

$\Pr[X = 1] = \frac{1}{8}$

$\Pr[X = 3] = \frac{1}{6}$

$\mathbb{E}[X] = -\frac{17}{24} + \frac{1}{8} + \frac{3}{6} = -\frac{1}{12}$

$\Pr[Y = -5] = \frac{1}{8}$

$\Pr[Y = -2] = \frac{3}{8}$

$\Pr[Y = 2] = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$

$\mathbb{E}[Y] = -\frac{5}{8} - \frac{6}{8} + 2 = -\frac{3}{8}$

(ii)

$$D = \sqrt{(x-2)^2 + (y+2)^2}$$

$\vec{x_1} = (-1,2)$ | $1/3$
$\vec{x_2} = (3,2)$ | $1/6$
$\vec{x_3} = (-1,-2)$ | $3/8$
$\vec{x_4} = (1,-5)$ | $1/8$

$$D(x_1) = 5$$
$$D(x_2) = \sqrt{5}$$
$$D(x_3) = 3$$
$$D(x_4) = \sqrt{10}$$

$\rightarrow \Pr[D=5] = \frac{1}{3}$, $\Pr[D=\sqrt{5}] = \frac{1}{6}$, $\Pr[D=3] = \frac{3}{8}$
$\Pr[D=\sqrt{10}] = \frac{1}{8}$

$$\mathbb{E}[D^2] = \frac{\overset{200}{\cancel{25}}}{\underset{24}{\cancel{3}}} + \frac{\overset{20}{\cancel{5}}}{\underset{24}{\cancel{6}}} + \frac{\overset{81}{\cancel{27}}}{\underset{24}{\cancel{8}}} + \frac{\overset{30}{\cancel{10}}}{\underset{24}{\cancel{8}}} = \underline{\underline{\frac{331}{24}}}$$

(b)

- $D = \sqrt{(X - p_1)^2 + (Y - p_2)^2}$

- $\mathbb{E}[D^2] = \sum_{i=1}^{n} \left((x_i - p_1)^2 + (y_i - p_2)^2\right) \Pr[\vec{x}_i]$

- $\frac{\partial}{\partial p_1} \mathbb{E}[D^2] = -2 \sum_{i=1}^{n} (x_i - p_1) \Pr[\vec{x}_i] \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 \underbrace{\sum_{i=1}^{n} \Pr[\vec{x}_i]}_{=1} = \sum_{i=1}^{n} x_i \Pr[\vec{x}_i] = \mathbb{E}[X]$$

<u>Analog:</u> $p_2 = \mathbb{E}[Y]$ (Schwerpunkt eben)

Mit $\vec{p} = (\mathbb{E}[X], \mathbb{E}[Y])$:

$$\mathbb{E}[D^2] = \mathbb{E}\left[(X-\mathbb{E}[X])^2 + (Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]$$

Linearität von $\mathbb{E}$ war offiziell noch nicht dran, d.h. mit Hinweis explizit nachrechnen

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\left(X(\vec{x_i}) - \mathbb{E}[X]\right)^2 + \left(Y(\vec{x_i}) - \mathbb{E}[Y]\right)^2\right) \Pr[\vec{x_i}]$$

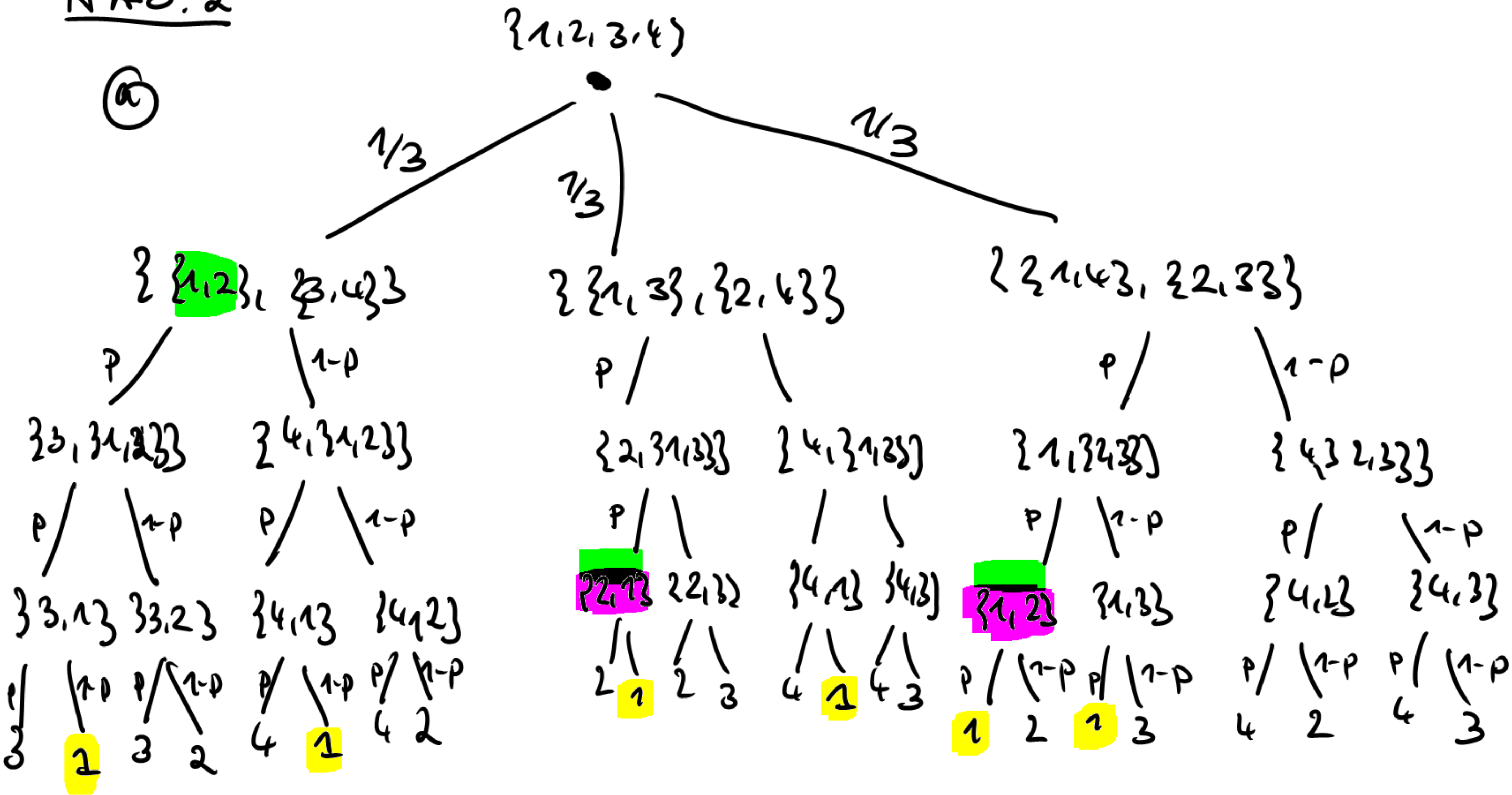
$$= \sum_{i=1}^{n} \left(X(\vec{x_i}) - \mathbb{E}[X]\right)^2 \Pr[\vec{x_i}] + \sum_{i=1}^{n} \underset{\uparrow \atop \text{für } Y}{(\dots)}$$

$$= \mathbb{E}\left[(X^2 - \mathbb{E}[X])^2\right] + \mathbb{E}\left[(Y-\mathbb{E}[Y])^2\right]$$

$$= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$$

HA3.2

(a)



- W'keit, dass Spieler 1 das Turnier gewinnt:

⇝ Durch Baumdiagramm:

In jedem Teilbaum: $p^3 + (1-p)\,p^2 = p^2$

⇝ Insgesamt: $3 \cdot \frac{1}{3} \cdot p^2 = p^2$

⇝ Er muss einfach alle seine Partien gewinnen.

- W'keit, dass Spieler 1 auf Spieler im Finale trifft:
  - Spieler 1 darf nicht in Runde 1 auf Spieler 2 treffen
    → linker Teilbaum fliegt raus
  - Dann müssen beide ihre erste Partie gewinnen (gegen jeweils schlechtere Spieler): $\frac{2}{3}\,p^2$

- W'keit, dass Sp 1 gegen Sp 2 irgendwann: $\frac{2}{3}p^2 + \frac{1}{3}$

(b) Jedem Pfad lässt sich mindestens ein Turnierbaum zuordnen:

$\{1,2,3,4\}$

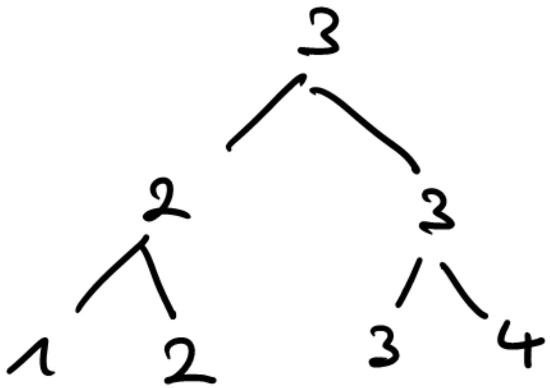
$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$

$\{2,\{3,4\}\}$

$\{2,3\}$

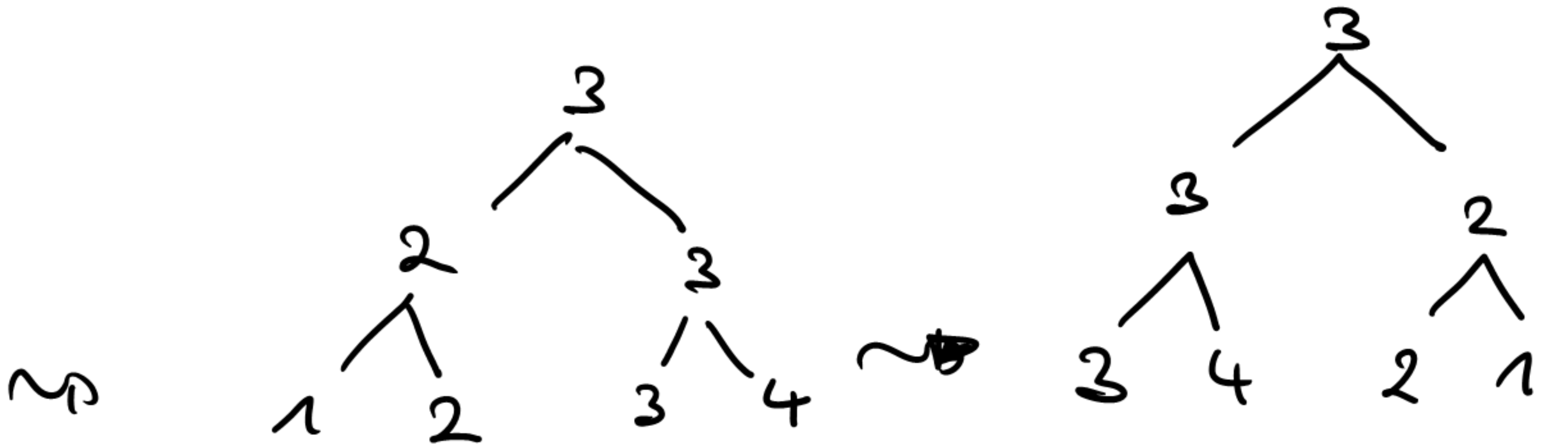
3

$\rightsquigarrow$



Da die Reihenfolge der Partien in jeder Runde fest vorgegeben ist, kann man die Blätter so sortieren, dass stets links der Gewinner der Partie steht:

$$\{1,2,3,4\}$$
$$|$$
$$\{\{1,2\},\{3,4\}\}$$
$$|$$
$$\{2,\{3,4\}\}$$
$$|$$
$$\{2,3\}$$
$$|$$
$$3$$



$\rightsquigarrow$ Der Turnierbaum ist damit eindeutig durch die Beschriftung der 2^n Blätter bestimmt.

$\rightsquigarrow$ $2^n!$ viele Pfade / Beschriftungen.

- Spieler 1 gewinnt das Turnier:

→ Spieler 1 gewinnt alle n Spiele

→ W'keit: p^n

- Spieler 1 trifft im Finale auf Spieler 2.

  - W'keit, dass Spieler 1 auf Spieler 2 in Runde 1 trifft:

$$\frac{1}{2^n-1}$$

Intuitiv klar, formale Rechnung

\# Paarungen insgesamt: $$\frac{\binom{2^n}{2}\cdot\binom{2^n-2}{2}\cdot\binom{2^n-4}{2}\cdots\binom{2}{2}}{2^{n-1}!}$$ ← Ordnung egal

\# Paarungen mit $\{1,2\}$: $$\frac{\binom{2^n-2}{2}\binom{2^n-4}{2}\cdots\binom{2}{2}}{(2^{n-1}-1)!}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\#\text{ Paarungen mit }\{1,2\}}{\#\text{ Paarungen}} = \frac{2^{n-1}}{\binom{2^n}{2}} = \frac{1}{2^n-1}$$

W'keit, dass Spieler 1 auf Spieler 2 in Runde 2 trifft:

$$\underbrace{\frac{2^n-2}{2^n-1}}_{\text{treffen nicht in Runde 1 auf einander}} \cdot \underbrace{p^2}_{\text{beide gewonnen}} \cdot \frac{1}{2^{n-1}-1} = \frac{2p^2}{2^n-2}$$

Induktion:

$\leadsto$ W'keit, dass Spieler 1 auf Spieler 2 in Runde $k+1$ trifft:

$$\frac{2^n-2}{2^n-1} \cdot \frac{2^{n-1}-2}{2^{n-1}-1} \cdot \ldots \cdot \frac{2^{n-k+1}-2}{2^{n-k+1}-1} \cdot p^{2k} \frac{1}{2^{n-k}-1}$$

$$= \frac{2^k}{2^n-1} \cdot p^{2k} = \frac{(2p^2)^k}{2^n-1} \quad \overset{k=n-1}{\leadsto} \quad \frac{2^{n-1}}{2^n-1} \cdot p^{2(n-1)}$$

• W'keit, dass die Spieler irgendwann aufeinander treffen:

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{(2p^2)^k}{2n-1} = \underline{\underline{\frac{1}{2n-1} \cdot \frac{1-(2p^2)^n}{1-2p^2}}}$$