Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 2
6. April 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Eine Urne enthalte 1 weißen, 2 schwarze und 3 rote, gleichartige Bälle. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit zwei Ziehungen (ohne Zurücklegen) genau einen weißen und einen schwarzen Ball zu ziehen? Begründen Sie Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag

Die Wahrscheinlichkeit, in der ersten Ziehung schwarz und in der zweiten Ziehung weiß zu ziehen, ist $\Pr[sw] = \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{15}$.
Die Wahrscheinlichkeit, in der ersten Ziehung weiß und in der zweiten Ziehung schwarz zu ziehen, ist $\Pr[ws] = \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{15}$.
Genau einen weißen und einen schwarzen Ball zieht man also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{15}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

1. Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

2. Sei $\langle\Omega, \Pr\rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse A und B gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

   Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Lösungsvorschlag

1. Seien $\Omega = \{1, 2\}$ und $\Pr[1] = 1, \Pr[2] = 0$.
   Dann ist $W = \langle\Omega, \Pr\rangle$ ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

   Denn offenbar gilt $0 \leq Pr[e] \leq 1$ für alle $e \in \Omega$ und es gilt $\sum_{e\in\Omega} \Pr[e] = 1$.

2. Aus $1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$ folgt $\Pr[A \cup B] = 1$.

   Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ gilt
   $1 = \Pr[A \cup B] = \Pr[(A \setminus B) \cup B] = \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] = \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}$.

   Es folgt $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Spieler A würfelt mit zwei üblichen 6-seitigen fairen Würfeln. Er zeigt Spieler B das Ergebnis nicht, sagt aber korrekterweise, dass beide Würfel verschiedene Augenzahlen zeigen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 1 zeigt?

Lösungsvorschlag

Es gibt 36 geordnete Paare von Augenzahlen zwischen 1 und 6. Dabei sind bei 6 Paaren die gezeigten Augenzahlen gleich. Spieler A weiß also, dass das geworfene Augenpaar eines von 30 ist.
Von den 30 möglichen Paaren enthalten genau 10 eine 1.
Die Wahrscheinlichkeit, dass einer der Würfel eine 1 zeigt, ist also $\frac{1}{3}$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Eine unfaire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p „Kopf" und mit Wahrscheinlichkeit $1-p$ „Zahl" zeigt, wobei $0 \leq p \leq 1$ und $p \neq \frac{1}{2}$ gilt. Wir werfen eine solche Münze n mal und erhalten dabei k mal „Kopf" und $n-k$ mal „Zahl".

1. Beschreiben Sie das Experiment durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$.

2. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit an, dass genau k-mal Kopf erscheint.

Lösungsvorschlag

1. Als Ergebnisraum Ω wählen wir die n-Tupel $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ mit $x_i \in \{K, Z\}$, d. h. $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{K, Z\}\}$.

   Die Wahrscheinlichkeitsfunktion wird definiert durch

   $\Pr[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = p^k(1-p)^{n-k}$, wobei k die Anzahl der Vorkommen von K in $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ sei.

   Wir zeigen, dass $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, wie folgt:

   - Wegen $0 \leq p \leq 1$ gilt $0 \leq (1-p) \leq 1$. Daraus folgt $0 \leq p^k(1-p)^{n-k} \leq 1$, d. h. $0 \leq \Pr[x] \leq 1$.
   - Es gibt genau $\binom{n}{k}$ viele Ereignisse x, in denen K genau k mal vorkommt. Wir rechnen mithilfe des Binomialsatzes

   $$\sum_{x \in \Omega} \Pr[x] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = (p + (1-p))^n = 1\,.$$

2. Sei A das Ereignis, dass k mal Kopf erscheint. Dann gilt

   $$\Pr[A] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\,.$$

Tutoraufgabe 1

Wir betrachten zwei 6-seitige Würfel A und B. Würfel A hat 4 rote und 2 blaue Seiten. Würfel B hat 2 rote und 4 blaue Seiten. Wir nehmen an, dass die Ergebnisse von Würfen von Münze bzw. Würfel Laplace-verteilt sind bezüglich des Auftretens von Kopf oder Zahl bzw. der Seiten der Würfel.

Experiment: Es wird zunächst eine Münze geworfen. Zeigt diese Kopf ($K \in \{K, Z\}$), so wird Würfel A gewählt, ansonsten ($Z \in \{K, Z\}$) wird Würfel B gewählt. Mit dem gewählten Würfel werden dann n Würfe durchgeführt. Das Ergebnis ist ein Wort $w \in \{\text{rot}, \text{blau}\}^*$ der Länge n.

1. Wir schalten dem Experiment noch eine Auswahlfunktion i nach (mit $i \le n$), die das i-te Objekt des Ergebnisses w des Experiments als neues Ergebnis auswählt.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt dann das (Gesamt-)Ergebnis 'rot' auf?

2. Wir sagen, dass das Ereignis R_i eintritt, wenn das i-te Objekt der Ausgabe des Experiments 'rot' ist. Wir nehmen an, dass die Ereignisse R_1 und R_2 eingetreten sind. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass gleichzeitig auch das Ereignis R_3 eingetreten ist?

3. Wir nehmen an, dass das Ereignis $\bigcap_{i=1}^{n} R_i$ eingetreten ist. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass im Experiment der Würfel A gewählt wurde?

Lösungsvorschlag

Zur Beschreibung der Struktur eines Experiments ist es grundsätzlich erforderlich, auch die Zwischenergebnisse durch entsprechende Ergebnis- bzw. Ereignismengen und Wahrscheinlichkeiten zu beschreiben. Dies geschieht bei Experimenten bzw. Algorithmen grundsätzlich durch Folgen von Werten von Variablen, allerdings werden diese Ergebnisräume in der Regel nicht explizit sondern nur indirekt durch Fallunterscheidungen beschrieben.

1. Die Ausführung des Experiments generiert in diesem Fall letztendlich genau einen der beiden Werte aus $\{\text{rot}, \text{blau}\}$. Wir können also für diesen Fall den Ergebnisraum $\Omega = \{\text{rot}, \text{blau}\}$ annehmen und bestimmen nun die Wahrscheinlichkeitsfunktion Pr über Ω.

   Falls die Münze Kopf zeigt, dann wird bei jedem Wurf der beiden Würfel die Farbe rot mit Wahrscheinlichkeit $\frac{4}{6}$ erhalten.

   Falls die Münze Zahl zeigt, dann wird bei jedem Wurf der beiden Würfel die Farbe rot mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{6}$ erhalten.

   Da wir hier eine disjunkte Fallunterscheidung haben, addieren sich die Wahrscheinlichkeiten für die Farbe rot zu $\frac{1}{2}$.

   Dies gilt insbesondere für den i-ten Wurf.

   Formal rechnen wir mit bedingten Wahrscheinlichkeiten wie folgt und notieren die entsprechenden Ereignisse in Kurzform. Die Rechnung entspricht der Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit.

$$\begin{aligned}\Pr[\text{rot}] &= \Pr[\text{rot}|\text{Kopf}] \cdot \Pr[\text{Kopf}] \;+\; \Pr[\text{rot}|\text{Zahl}] \cdot \Pr[\text{Zahl}] \\ &= \left(\frac{4}{6} + \frac{2}{6}\right)\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\,.\end{aligned}$$

2. Wir dürfen hier nicht den Fehler machen, das in der ersten Teilaufgabe definierte Experiment lediglich für $i = 1, i = 2, i = 3$ auszuführen. Jetzt nämlich definieren wir durch die Auswahlfunktionen 1, 2 und 3 die Ereignisse R_1, R_2, R_3 über dem Ergebnisraum der n-Tupel $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_i \in \{\text{rot}, \text{blau}\}\}$.

   Die Wahrscheinlichkeitsfunktion Pr über Ω ist gegeben durch Fallunterscheidung mithilfe der totalen Wahrscheinlichkeit und des Produkts von Wahrscheinlichkeiten der Komponenten des Ergebnisses in den jeweiligen Fällen.

   Wie in Teilaufgabe 1 erhalten wir zunächst

$$\Pr[x_i|\text{Kopf}] = \begin{cases} \frac{2}{3} : x_i = \text{rot} \\ \frac{1}{3} : x_i = \text{blau} \end{cases}, \quad \Pr[x_i|\text{Zahl}] = \begin{cases} \frac{1}{3} : x_i = \text{rot} \\ \frac{2}{3} : x_i = \text{blau} \end{cases},$$

   und damit

$$\Pr[(x_1, x_2, \ldots, x_n)] = \Pr[\text{Kopf}] \cdot \prod_{i=1}^{n} \Pr[x_i|\text{Kopf}] + \Pr[\text{Zahl}] \cdot \prod_{i=1}^{n} \Pr[x_i|\text{Zahl}].$$

   Speziell für $\Pr[R_1 \cap R_2]$ und $\Pr[R_1 \cap R_2 \cap R_3]$ ergibt sich

$$\begin{aligned} \Pr[R_1 \cap R_2] &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{5}{18}, \\ \Pr[R_1 \cap R_2 \cap R_3] &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

   Nach Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\Pr[R_3 \mid R_1 \cap R_2] = \frac{\Pr[R_1 \cap R_2 \cap R_3]}{R_1 \cap R_2} = \frac{3}{5}.$$

   Bemerkung: Wir können nachrechnen, dass die Ereignisse R_3 und $R_1 \cap R_2$ nicht unabhängig sind, denn $\Pr[R_3] = \frac{1}{2}$.

3. Wir können das Ereignis Kopf auch A nennen, entsprechend wäre das Ereignis Zahl dann mit B zu bezeichnen. Wir suchen $\Pr[A \mid \bigcap_{i=1}^{n} R_i]$. Nun gilt

$$\Pr[A \mid \bigcap_{i=1}^{n} R_i] = \frac{\Pr[A] \cdot \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} R_i \mid A]}{\Pr[\bigcap_{i=1}^{n} R_i]}.$$

   Sämtliche Werte der rechten Seite der Gleichung sind uns bekannt und wir erhalten

$$\begin{aligned} \Pr[A] \cdot \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} R_i \mid A] &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n, \\ \Pr[\bigcap_{i=1}^{n} R_i] &= \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n, \\ \Pr[A \mid \bigcap_{i=1}^{n} R_i] &= \frac{2^n}{2^n + 1}. \end{aligned}$$

Bemerkung: Diese Tutoraufgabe hat die beiden Teile des Bayes'schen Satzes zum Inhalt.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten das folgende Experiment:

- 1. Schritt: Eine faire Münze wird solange geworfen, bis das erste Mal Kopf erscheint. Es sei k die Anzahl der dazu ausgeführten Münzwürfe.
- 2. Schritt: Es wird ein fairer 6-seitiger Würfel k-mal geworfen mit Ergebnissen aus der Menge $[6]$.

1. Stellen Sie die Ergebnisse des Experiments entsprechend als diskreten Wahrscheinlichkeitsraum dar und beweisen Sie, dass Ihre Darstellung korrekt ist, d.h., dass die Definitionsbedingungen eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes erfüllt sind.
2. Es sei M_k das Ereignis, dass die Münze im ersten Schritt genau k-mal geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[M_k]$.
3. Es sei A das Ereignis, dass in den k Würfen des Würfels genau einmal eine 6 geworfen wird. Bestimmen Sie $\Pr[A|M_k]$ und $\Pr[A]$.
4. Bestimmen Sie $\Pr[M_k|A]$.

Lösungsvorschlag

1. Seien $\Omega = \{(x_1, x_2, \ldots, x_k) \mid k \in \mathbb{N}, x_i \in [6]\}$ und $\Pr[(x_1, x_2, \ldots, x_k)] = 2^{-k}6^{-k}$.

   Offenbar gilt $0 \leq \Pr[e] \leq 1$ für alle $e \in \Omega$. Wir zeigen noch $\Pr[\Omega] = 1$ wie folgt.

   $$\Pr[\Omega] = \sum_{x \in \Omega} \Pr[x] = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{6^k} 2^{-k}6^{-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{-k} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1\,.$$

2. $\Pr[M_k] = 2^{-k}$.

3. Man kann die Idee einer Fallunterscheidung in k Fälle haben, so dass genau an der Stelle $i \in [k]$ eine 6 steht. Die Wahrscheinlichkeit dafür ist je $\frac{1}{6}$. Die Wahrscheinlichkeit, dass an allen anderen Stellen eine der restlichen 5 Zahlen steht, ist dann $(\frac{5}{6})^{k-1}$. Nun summiert man über alle k Fälle.

   $$\Pr[A|M_k] = k \cdot \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k}\,.$$

   Wir rechnen mit totaler Wahrscheinlichkeit.

   $$\begin{aligned} \Pr[A] &= \sum_{k=1}^{\infty} \Pr[A|M_k] \cdot \Pr[M_k] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \frac{5^{k-1}}{6^k} \cdot 2^{-k} = \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k \\ &= \frac{1}{5} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^{k+1} = \frac{1}{12} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k\,. \end{aligned}$$

Mit $\sum_{n=0}^{\infty} nx^n = \frac{x}{(1-x)^2}$ folgt

$$\Pr[A] = \frac{1}{12} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{5}{12}}\right)^2 = \frac{12}{49}.$$

4.

$$\begin{aligned}\Pr[M_k|A] &= \frac{Pr[A|M_k] \cdot \Pr[M_k]}{\Pr[A]} \\ &= \frac{k}{5} \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^k \cdot 2^{-k} \cdot \frac{49}{12} = \frac{k}{5} \cdot \frac{49}{12} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^k .\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 3

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist keine Theorie über Experimente mit Münzen, Würfel oder Ziegen. Diskutieren Sie die mathematische Abstraktion der Aufgabenstellungen der Tutoraufgaben 1 und 2!

Lösungsvorschlag

Bemerkung: Diese Aufgabe soll eine Diskussion anregen, die sich über das gesamte Semester ausdehnen kann.

Ein Würfel dient hier als Generator für die algorithmische Erzeugung von Werten. Münzen dienen demselben Zweck. Die Wahrscheinlichkeitstheorie handelt von Eigenschaften von Algorithmen und Prozessen, insofern sie eine Eingabeverteilung von Werten in eine Ausgabeverteilung von Werten transformieren. Allerdings spielen nichtdeterministische Algorithmen eine entscheidende Rolle, insbesondere Algorithmen, die ohne Parameter aufgerufen werden und dann Werte ausgeben.
Der Münzwurf veranschaulicht eine Zufallsvariable mit 2 Werten. Der Wurf eines Würfels stellt eine Zufallsvariable mit 6 Werten dar. So gesehen stellen Zufallsvariable das Ausgabeverhalten von (ev. parameterlosen) Algorithmen dar.