Kapitel: Diskrete Wahrscheinlichkeit

- Boolsche Ungleichung:

$$Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] \leq \sum_{i=1}^{n} Pr(A_i)$$

- Bedingte Wahrscheinlichkeit
  - $$Pr[A|B] := \frac{Pr[A \cap B]}{Pr[B]}$$
  - $$Pr[A \cap B] = Pr[A|B] \cdot Pr[A] = Pr[A|B] \cdot Pr[B]$$
  - Seien die Ereignisse $A_1, ..., A_n$ gegeben. Falls $Pr[A_1 \cap ... \cap A_n]$ ist, gilt

$$Pr[A_1 \cap ... \cap A_n] = \quad (1)$$
$$Pr[A_1] \cdot Pr[A_2|A_1] \cdot Pr[A_3|A_1 \cap A_2] \cdot ... \quad (2)$$
$$... \cdot Pr[A_n|A_1 \cap ... \cap A_{n-1}] \quad (3)$$

- Satz der totalen Wahrscheinlichkeit:
  Die Ereignisse $A_1, ..., A_n$ seien paarweise disjunkt und es gelte: $B \subseteq A_1 \cup ... \cup A_n$
  $\Rightarrow$

$$Pr[B] = \sum_{i=1}^{n} Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

- Die Ereignisse A und B heissen unabhängig, wenn gilt:
  $PR[A \cap B] = Pr[A] \cdot Pr[B]$

- Satz von Bayes:
  Die Ereignisse $A_1, ..., A_n$ seien paarweise disjunkt, mit $Pr[A_j] > 0$ für alle j. Ferner sei $B \subseteq A_1 \cup \cdots \cup A_n$ ein Ereignis mit $Pr[B] > 0$. Dann gilt für ein beliebiges $i = 1, ..., n$

$$Pr[A_i|B] = \frac{Pr[A_i \cap B}{Pr[B]} = \frac{Pr[B|A_i] \cdot Pr[A_i]}{\sum_{j=1}^{n} Pr[B|A_j] \cdot Pr[A_j]}$$

  Gilt auch für Summen bis ∞

- $X : \Omega \to \mathbb{R}$ heißt Zufallsvariable

- (diskrete) Dichte(funktion) der Zufallsvariablen X:
  $f_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto Pr[X = x] \in [0, 1]$

- Verteilungsfunktion der Zufallsvariable X:
  $F_X : \mathbb{R} \ni x \mapsto Pr[X \leq x] = \sum_{x \in W_x : x' \leq x} Pr[X = x'] \in [0, 1]$

- **Erwartungswert** $\mathbb{E}[X]$

$$\mathbb{E}[X] := \sum_{x \in W_X} x \cdot Pr[X = x] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_X(x)$$

  sofern $\sum_{X \in W_X} |x| \cdot Pr[X = x]$ konvergiert

- Berechnung des Erwarungswerts??
  $\mathbb{E}[X] = \sum_{x \in W_X} x \cdot Pr[X = x] =$
  $\sum_{x \in W_X} x \sum_{\omega \in \Omega; X(\omega)=x} Pr[\omega] = = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \cdot Pr[\omega]$
  Achtung: Konvergenz bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen

- Monotonie des Erwartungswerts
  Seien X und Y Zufallsvariablen über dem Wahrscheinlichkeitsraum Ω mit $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Dann gilt $\mathbb{E}[X] \leq \mathbb{E}[y]$
  D.h. auch: Wenn $a \leq X(\omega) \leq b$ für alle $\omega \in \Omega$ erfüllt ist, dann gilt:
  $a \leq \mathbb{E}[X] \leq b$

- Wenn X eine Zufallsvariable ist, dann ist auch $f(X)$ eine Zufallsvariable

- **Linearität des Erwarungswertes**
  Für eine Beliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mathbb{E}[a \cdot x + b] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$$

- Sei X eine Zufallsvariable und A ein Ereignis mit $Pr[A] > 0$. Die bedingte Zufallsvariable $X|A$ besitzt die Dichte:
  $f_{X|A}(x) := Pr[X = x|A] = \frac{Pr["X=x" \cap A]}{Pr[A]}$
  Erwartungswert berechnet sich durch: $\mathbb{E}[X|A] = \sum_{x \in W_X} x \cdot f_{X|A}(x)$

- X = Zufallsvariable: Für paarweise disjunkte Ereignisse $A_1, ..., A_n$ mit $A_1 \cup ... \cup A_n = \Omega$ und $Pr[A_1], ..., Pr[A_n] > 0$ gilt :

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X|A_i] \cdot Pr[A_i]$$

  analog für unendliche Reige, solang sie konvergiert

- **Varianz**:
  Var[X] $:= \mathbb{E}[(X - \mu)^2] = \sum_{x \in W_X} (x - \mu)^2 \cdot Pr[X = x]$
  $\sigma := \sqrt{Var[X]}$ heißt **Standardabweichung** von X

- Für eine beliebige Zufallsvariable X gilt:
  $Var[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2$

- Für eine bliebige Zufallsvariable X und $a, b \in \mathbb{R}$ gilt:
  $Var[a \cdot X + b] = a^2 \cdot Var[X]$
  Wichtig!!: $Var[X + b] = Var[X]$

- Für Zufallsvariable X nennen wir $\mathbb{E}[X^k]$ das k-te Moment und $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])^k]$ das k-te zentrale Moment. Erwatungswer = erstes Moment, Variant = zweites zentrales Moment

- $$f_{X,Y}(x, y) := Pr[X = x, Y = y]$$
  heißt gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X und Y
  $$f_X(x) = \sum_{y \in W_Y} f_{X,Y}(x, y) \text{ bzw } f_Y(y) = \sum_{x \in W_X} f_{X,Y}(x, y)$$
  sind Randdichten

- $F_{X,Y}(x, y) = Pr[X \leq x, Y \leq Y] = Pr[\{\omega; X(\omega) \leq x, Y(\omega) \leq y\}] = \sum\limits_{x' \leq x} \sum\limits_{y' \leq y} f_{X,Y}(x', y')$ heißt gemeisame Verteilung

- Randverteilung + Randdichte?

- Die Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ heißen unabhängig, wenn für alle $(x_1, ..., x_n) \in W_{X_1} \times ... \times W_{X_n}$ gilt:
  $Pr[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] = Pr[X_1 = x_1] \cdot .... \cdot Pr[X_n = x_n]$

- Wenn Zufallsvariablen unabhängig sind, dann gilt das auch noch, wenn man auf alle irgendwelche Funlktionen anwendet

- [] Für zwei *unabhängige* Zufallsvariablen X und Y sei $Z := X + Y$
  Es gilt:
  $$f_Z(z) = \sum_{x \in W_X} f_X(X) \cdot f_Y(z - x)$$

- [] Linearität des Erwartungswetes:
  Für Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ und $X := a_1X_1 + \cdot + a_nX_n$ mit $a_1, ..., a_n \in \mathbb{R}$ gilt
  $$\mathbb{E}[X] = a_1\mathbb{E}[X_1] + \cdots + a_n\mathbb{E}[X_n]$$

- Multiplikativität des Erwatungwertes:
  Für **unabhängige** Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ gilt
  $\mathbb{E}[X_1 \cdot ... \cdot X_n] = \mathbb{E}[X_1] \cdot ... \cdot \mathbb{E}[X_n]$

- Additivität der Varianz: Für **unabhängige** Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$ und $X := X_1 + ... + X_n$ gilt:
  $$Var[X] = Var[X_1] + ... + Var[X_n]$$

- Indikatoravariable = 1, wenn Ereigniss eintrott, 0, wenn nicht.
- Verteilungen:
  - Bernoulliverteilung:
    Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1\}$
    $f_X(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 1 \\ 1-p & \text{für } x = 0 \end{cases}$
    $q = 1 - p$
    $\mathbb{E}[X] = p$ und $Var[X] = pq$
  - Binomialverteilung:
    $X := X_1 + ... + X_n$, Summe von n Bernoulliverteilten Indikatorvariablen.
    $\Rightarrow X \sim Bin(n, p)$
    $f_X(x) := b(x; n, p) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}$
    $\mathbb{E}[X] = n \cdot p$ $Var[X] = n \cdot p \cdot q$
  - Warten auf den n-ten Erfolg (einschließlich) (negative Binomialverteilung mit Ordnung n):
    n unabhängige Zufallsvariablen $X_1, ..., X_n$:

    $$f_Z(z) = \binom{z-1}{n-1} \cdot p^n \cdot (1-p)^{z-n}$$

  - Wenn $X \sim Bin(n_x, p)$ und $Y \sim Bin(n_y, p)$ unabhängig, dann gilt für $Z := X + Y$, dass $Z \sim Bin(n_x + n_y, p)$
  - geometrische Verteilung:
    $f_X(i) = p \cdot q^{i-1}$ für $i \in \mathbb{N}$
    $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ und $Var[X] = \frac{q}{p^2}$
  - Poisson-Verteilung:
    Parameter λ = Erwartungswert und auch Varianz
    Dichte: $f_X(i) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^i}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$ $X \sim Po(\lambda)$ Poisson für hinreichend große n als approximation der Binomialverteilung verwendbar
    (Gesetz seltener Ereignisse, da Wkeit von einzelnem Treffer recht klein sein muss, dass poisson geht)
    Voraussetzungen für Poisson:
    * Ereignisse treten nie zur Gleichen Zeit auf
    * Wkeit, dass Ereignis in Zeitintervall auftritt ist proportional zur länge des Intervalls
    * Anzahl der Ereignisse in festem Zeitintervall hängt nur von dessem Länge ab, aber nicht von der Länge aufder Zeitachse
    * Wenn man zwei Disjunkte Zeitintervalle Betrachtet, so sind die Anzahlen der Ereignisse in den Zeiträumen voneinander unabhängig.

    Summe von Poissonverteilten Zufallsvariablen:
    X und Y unabhängig, $X \sim Po(\lambda)$ und $Y \sim Po(\mu)$, dann gilt:

    $$Z := X + Y \sim Po(\lambda + \mu)$$

- Herausfinden ob Dichte zulässig: Summe nach Unendlich bilden und schauen ob 1 rauskommt

- **Markov Ungleichung**
  X ist Zufallsvariable, die **nur nichtnegative** Werte annimmt. $\Rightarrow \forall t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$:
  $$Pr[X \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}[X]}{t}$$
  bzw. Äquivalent
  $$Pr[X \geq t \cdot \mathbb{E}[X]] \leq \frac{1}{t}$$

- Chebyshev-Ungleichung
  Sei X eine Zufallsvariable und $t \in \mathbb{R}$ mit $t > 0$, dann gilt:
  $$Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t] \leq \frac{Var[X]}{t^2}$$
  bzw. Äquivalent
  $$Pr[|X - \mathbb{E}[X]| \geq t\sqrt{Var[X]}] \leq \frac{1}{t^2}$$

- Gesetz der großen Zahlen:
  Geg: Zufallsvariablen X, $\epsilon, \delta > 0$ beliebig aber fest.
  Dann gilt für alle $n \geq \frac{Var[X]}{\epsilon\delta^2}$:
  Sind $X_1, ..., X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit der selben Verteilung wie X und setzt man
  $$Z := \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$$
  dann gilt: $Pr[|Z - \mathbb{E}[X]| \geq \delta] \leq \epsilon$
  Wichtig: Gesetz der großen Zahlen schätzt die relative Abweichung
  $$|\frac{1}{n}\sum_i X_i - p$$
  und nicht die absolute Abweichung
  $$|\sum_i X_i - np$$
  ab.

- Chernoff-Schranken
  $X_1, ..., X_n$ unabhängig, Bernoulliverteilt mit $Pr[X_i = 1] = p_i$ und $Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ sowie jedes $\delta > 0$, dass
  $$Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$$

Beispiel: $\frac{n}{2} \cdot (1 + 10\%)$
$\Rightarrow$ Abweichung $= 0,1$, Erwartungswert $= n$

$$\left(\frac{e^{0,1}}{(1+0,1)^{1+0,1}} \right)^n$$

- Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $Pr[X_i = 1] = p_i$ und $Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$ so wie jedes $0 < \delta < 1$ (hier ist der Unterschied zu Chernoff), dass

$$Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{-\delta}}{(1-\delta)^{1-\delta}} \right)^\mu$$

- Für $o \leq \delta < 1$ gilt:

$$(1-\delta)^{1-\delta} \geq e^{-\delta+\delta^2/2} \text{ und } (1+\delta)^{1+\delta} \geq e^{\delta+\delta^2/3}$$

- Seien $X_1, ..., X_n$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariablen mit $Pr[X_i = 1] = p_1$ und $Pr[X_i = 0] = 1 - p_i$. Dann gelten folgende Ungleichungen für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu := \mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n p_i$:
  - $Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{\mu\delta^2/3}$ für alle $0 < \delta \leq 1,81$
  - $Pr[X \geq (1-\delta)\mu] \leq e^{\mu\delta^2/2}$ für alle $0 < \delta \leq 1$
  - $Pr[|X - \mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$ für alle $0 < \delta \leq 1$
  - $Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e}{1+\delta} \right)^{(1+\delta)\mu}$
  - $Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mu$