

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 2

Abgabe bis zum 9.5. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im InFLER-Forum posten :).

### Aufgabe 2.1 Abzugeben sind (a) bis (c).

2P+2P+2P

(a) Bestimmen Sie einen W'keitsraum  $(\Omega, \Pr[\cdot])$  und paarweise verschiedene Ereignisse  $A_1, A_2, A_3$  mit

$$\Pr[A_1] = 3/4, \quad \Pr[A_2] = 2/3, \quad \Pr[A_3] = 1/2.$$

(b) Wie (a) nur sollen  $A_1, A_2, A_3$  unabhängig sein.

(c) Wie (a) nur soll weiterhin gelten:

$$\Pr[A_1 \cup A_2] = 4/5, \quad \Pr[A_2 \cup A_3] = 3/4.$$

Wie viele Elementarereignisse muss  $\Omega$  mindestens enthalten?

*Hinweis:* Schauen Sie sich das Venn-Diagramm zu der Siebformel in den Folien an. Stellen Sie dann z.B. ein geeignetes lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (z.B. [wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com) oder die in der Rechnerhalle installierten CAS.)

### Aufgabe 2.2 Abzugeben sind (a) und (b).

2P+3P

Professor Evilparza muss wieder einmal eine mündliche Prüfung abnehmen. Auf Grund gewisser interner Statistiken hat die Fakultät Professor Evilparza gebeten, nicht nur (seiner Meinung nach) „einfache“ Fragen zu stellen, sondern auch „triviale“ Fragen. Evilparza entschließt sich daher folgendes System zu benutzen, um zwischen „einfachen“ und „trivialen“ Fragen zu alternieren:

- Vor Beginn einer jeden Prüfung füllt er je  $n$  Streichhölzer in zwei Streichholzschachteln. Eine Schachtel ist mit EINFACH, die andere mit TRIVIAL gekennzeichnet. Er steckt beide Schachteln in seine Jackentasche.
- Vor jeder Frage greift er in seine Jackentasche und zieht zufällig eine der beiden Schachteln (jeweils mit W'keit  $1/2$ ).
  - Ist die gezogene Schachtel nicht leer, so entnimmt er aus ihr ein Streichholz, steckt die u.U. leere Schachtel zurück in seine Jackentasche und stellt schließlich eine der Schachtel entsprechende Frage.
  - Sollte die gezogene Schachtel jedoch leer sein, was schließlich der Fall sein wird, so entscheidet sich, ob der Student besteht oder nicht:

Professor Esparza holt dann auch die zweite Schachtel aus seiner Jackentasche: Nur wenn auch diese leer ist, lässt er den Studenten bestehen; ansonsten ist der Student durchgefallen. Die Antworten des Studenten spielen also für das Bestehen der Prüfung keine Rolle, was Professor Evilparza erlaubt, seine Nerven zu schonen, da er dem Studenten nicht aufmerksam zuhören muss.

Wir bezeichnen mit  $B_n$  das Ereignis, dass ein Student besteht, wenn Professor Evilparza zu Beginn  $n$  Streichhölzer in jeder der beiden Schachteln füllt.

(a) Beschreiben Sie obiges Experiment für  $n = 1$  und  $n = 2$  mit Hilfe von Markov-Diagrammen.

Zeigen Sie hiermit, dass  $\Pr[B_1] = 1/2$  und  $\Pr[B_2] = 3/8$ .

(b) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für  $\Pr[B_n]$  (für beliebige  $n \in \mathbb{N}$ ).

(A0.2d) könnte hilfreich sein.)

Die kleine Maxi (4 Jahre) hat bald Geburtstag. Ihr Vater Xaver möchte der Kleinen zu diesem Anlass eine CD schenken. Er weiß jedoch nicht genau, welche Musik Maxi wirklich mag. Er lädt deshalb – selbstverständlich legale – Kopien von jeweils einem Song von Justus Nagetier und Kyoto Motel herunter. Er spielt beide Songs der Kleinen ein paar Mal. Bei jedem Vorspielen der Stücke klatscht Maxi **entweder** mit **oder** sie singt mit. (Nie beides, die Motorik des Kindes ist noch im Entwicklungsstadium.) Xaver spielt beide Lieder Maxi mehrmals vor und kommt schließlich zu folgenden *bedingten W'keiten*:

- Bei dem Song von Kyoto Motel klatscht die Kleine mit W'keit 0.3 mit, während sie mit W'keit 0.7 mitsingt.
- Wenn er das Lied von Justus Nagetier abspielt, so klatscht Maxi mit W'keit 0.6 mit, mit der verbleibenden W'keit von 0.4 singt sie mit.

Da Xaver mittlerweile keinen der beiden Songs mehr ertragen kann, lässt er die kleine Maxi alleine in ihrem Zimmer mit den beiden Liedern, lauscht aber weiterhin an der Tür zu ihrem Zimmer und achtet darauf, wann sie mitsingt (die Kleine hat leider auch einen leichten Sprachfehler, weswegen er nicht erkennen, welches Lied sie gerade versucht mitzusingen) und wann sie mitklatscht. Nehmen Sie an, dass Xaver die Pausen zwischen den Songs erkennen kann.

- (a) Nachdem Xaver längere Zeit an der Tür gelauscht hat, kommt er wiederum zum Schluss, dass Maxi mit W'keit 0.54 zu den Liedern klatscht, während sie mit W'keit 0.46 mitsingt. Er geht weiterhin davon aus, dass Maxi in seiner Abwesenheit stets mit W'keit  $p$  den Song von Kyoto Motel abspielt, während sie mit W'keit  $1 - p$  den Song vom Nagetier anhört.

Bestimmen Sie, von welchem der beiden Künstler Xaver eine CD für Maxi kaufen sollte (bestimmen Sie  $p$ ).

- (b) Xavers Modellierung aus (a) ist leider nicht ganz korrekt. Tatsächlich verhält sich Maxi in seiner Abwesenheit wie folgt: Den ersten Song, den sie abspielt, wählt sie mit W'keit  $1/2$  aus. Danach jedoch gilt, dass sie nach Justus Nagetiers Lied mit W'keit  $p$  auf Wiederholen drückt und mit W'keit  $1 - p$  den Song von Kyoto Motel wählt. Nach dem Song von Kyoto Motel drückt sie hingegen mit W'keit  $q$  die Wiederholentaste und wechselt mit W'keit  $1 - q$  zum Song von Justus.

Nehmen Sie  $0 < p, q < 1$  an.

- (i) Geben Sie die W'keiten, dass Maxi als  $i$ -tes Lied den Song von Kyoto Motel bzw. das Lied von Justus Nagetier anhört, an; definieren Sie dazu erst eine passende "Übergangsmatrix" (siehe A1.4). Gehen Sie entsprechend A1.4 vor, um geschlossene Formeln für diese W'keiten in Abhängigkeit von  $p, q$  und  $i$  herzuleiten. (Die Matrix kann diagonalisiert werden. Ein Eigenwert ist 1. Warum?)
- (ii) Leiten Sie nun geschlossene Formeln für die W'keiten her, dass Maxi beim  $i$ -ten Lied lacht bzw. mitsingt.

Gegen welche Werte konvergieren diese W'keiten?

Unter der Annahme, dass die von Xaver in (a) bestimmten W'keiten den Grenzwerten entsprechen, welche Werte ergeben sich für  $p$  und  $q$ ? Welche CD sollte Xaver nach diesem Modell kaufen ( $p < q$  oder  $q > p$ )?

- (c) Nehmen Sie nun an, dass  $p = 3/4$  und  $q = 3/5$  gilt für die Modellierung aus (b).

Xaver wartet nur für drei Stücke an der Tür. Dabei hört ("beobachtet") er, dass Maxi beim ersten und zweiten Lied jeweils mitsingt und beim dritten Lied mitklatscht. Kurz, er beobachtet die Folge  $SSK$  ( $S$  für singen,  $K$  für klatschen). Er fragt sich, in welcher Folge Maxi die Lieder angehört hat. Eine "Liedfolge" kann kurz als ein endliches Wort über dem Alphabet  $\{N, M\}$  beschrieben werden ( $N$  für Nagetier,  $M$  für Motel).

- (i) Bestimmen Sie zunächst die bedingten W'keiten, dass unter der Beobachtungsfolge  $SS$  die Liedfolge gerade  $l_1 l_2$  war für alle  $l_1 l_2 \in \{N, M\}^2$ .
- (ii) Bestimmen Sie nun die Liedfolgen  $l_1 l_2 l_3$ , welche mit der höchsten Wahrscheinlichkeit zu der Beobachtungsfolge  $SSK$  geführt habe.
- (iii) Geben Sie einen Algorithmus an, der bei gegebener Beobachtungsfolge die wahrscheinlichsten Liedfolgen bestimmt.

## **Aufgabe 2.4** Tutorübung

J. Leonidas von Sparza war ein bekannter Gelehrter im antiken Griechenland. Von überall aus Griechenland kamen Studenten nach Sparza, um von ihm in der Kunst der Stochastik unterrichtet zu werden. Zu einem Zeitpunkt ergab es sich, dass J. Leonidas von Sparza vier junge Studenten bei sich aufgenommen hatte: Charilaos, Leandros, Omiros und Thalís.

Vor jeder Vorlesung ließ er seine vier Studenten vor der „Müllbeseitigungsgrube“ von Sparza antreten, um ihren Fortschritt zu überprüfen. Zu Beginn mussten sich die Studenten in der alphabetischen Reihenfolge ihrer Vornamen in einer Reihe am Rande der Grube aufstellen. J. Leonidas stellt dann dem ersten in der Reihe eine Frage. Konnte dieser die Frage richtig beantworten, so durfte er den Kreis verlassen. Doch wehe wenn nicht! Dann beförderte J. Leonidas ihn mit einem kräftigen Tritt direkt in die Grube. Welch Schmach! Der so gedemütigte Student musste sich darauf wieder aus der Grube kämpfen und sich an das Ende der Reihe entlang der Grube zurückstellen.

Jedem der vier Studenten war dabei gemein, dass er mit einer von der eigentlichen Frage unabhängigen W'keit in die Grube befördert wurde:

- Der ruhige Charilaos bekam bei jeder Frage mit W'keit  $1/5$  einen Tritt ab: Charilaos war sehr gebildet, nur leider etwas zögerlich, was sich nicht so gut mit der Ungeduld J. Leonidas vertrug.
  - Der schlaue Leandros fand sich nie in der Grube wieder, jede Frage beantwortete er sofort korrekt.
  - Der übereifrige Omiros fand sich mit W'keit  $3/4$  nach einer jeden Frage in der Grube wieder: Zumeist antwortete bevor J. Leonidas von Sparza überhaupt mit dem Stellen der Frage fertig war, was jener mit einem gekonnten Tritt zu bestrafen wusste.
  - Thalys wurde mit W'keit  $1/3$  in die Grube geworfen: Thalys war großgewachsen, etwas ungeschickt und fühlte sich in der Nähe von Gruben im Allgemeinen unwohl, weswegen er auch ohne Zutun von J. Leonidas desöfteren in die Grube fiel.
- (a) Ein „Zustand“ der morgendlichen Befragung ist gerade durch die aktuelle Reihe der Studenten gegeben. Jeder Zustand kann durch eine endliche Sequenz (Tupel, Wort) der Länge maximal vier über der Grundmenge (Alphabet)  $\{C, L, O, T\}$  kodiert werden.
- Wie viele mögliche Zustände gibt es daher prinzipiell, wenn wir obige W'keiten zunächst vernachlässigen?
- (b) Zeichnen Sie ein Markov-Diagramm, das die morgendliche Befragung beschreibt. Beschränken Sie sich auf die „relevanten“ Zustände! (Seien Sie dankbar, dass Leandros so schlau ist.)
- (c) Bestimmen Sie die W'keit, dass sich Charilaos nach den ersten fünf Fragen noch in der Reihe befindet.
- (d) Geben Sie allgemein an, wie man die W'keit berechnet, dass nach genau  $k$  Fragen die Reihe (von vorne nach hinten) aus Omiros, Thalys und, zu hinterst, Charilaos besteht.
- (e) Bestimmen Sie die W'keit, dass Thalys vor Omiros die Reihe verlässt.