Technische Universität München (I7)
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund

Sommer 2013
17. April 2013

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 1

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 24.04.2013 um 12:00

Aufgabe 1.1 — 2P

Eine Datei der Größe 15 MB soll über vier Kanäle A, B, C, D übertragen werden. Der Sender teilt die Datei hierfür in 15 aufeinanderfolgende 1 MB Pakete $P_1, P_2, \ldots, P_{15}$ auf. Die Pakete werden sequenziell vom Sender verschickt (erst P_1, dann P_2, usw.). Er übergibt jedes Paket an genau einen (unbekannten) Kanal. Die Kanäle übertragen die Pakete dabei in der Reihenfolge, in welcher der Sender sie übergeben hat.

Sie sitzen am anderen Ende der Kanäle und empfangen über Kanal A vier Pakete, über Kanal B drei Pakete, über Kanal C fünf Pakete und die verbleibenden drei Pakete über Kanal D. Dummerweise wissen Sie für keines der empfangenen Pakete seine absolute Position innerhalb der Orginaldatei.

Wie viele Möglichkeiten gibt es, die Pakete zu einer Datei wieder zusammenzufügen? Jedes Packet soll natürlich nur einmal verwendet werden. Weiterhin verwenden Sie natürlich, dass die Reihenfolge der Pakete, die vom selben Kanal übertragen wurde, korrekt ist.

Aufgabe 1.2 — 2P

Zeigen Sie für $n \geq 2$: $\sum_{k=0}^{n} k^2 \cdot \binom{n}{k} \cdot z^k = n(n-1)z^2(1+z)^{n-2} + nz(1+z)^{n-1}$.

Hinweis: Verwenden Sie, dass $(1+z)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k$, und bestimmen Sie zunächst $\frac{d}{dz}(1+z)^n$ und $\frac{d^2}{dz^2}(1+z)^n$.

Aufgabe 1.3 — 3P

Sie werfen zwei Würfel und bilden aus den beiden oben liegenden Ziffern die größtmögliche Dezimalzahl. Zeigen z.B. die Würfel die Ziffern 3 und 4, so erhalten Sie 43.

Unter der Annahme, dass jedes Ziffernpaar mit derselben W'keit eintritt, bestimmen Sie die W'keiten folgender Ereignisse:

(a) Die erhaltene Zahl besteht aus zwei gleichen Ziffern.

(b) Die Einerziffer ist genau die Hälfte der Zehnerziffer.

(c) Die Zahl ist größer als 31.

Aufgabe 1.4 — 3P

Sie haben insgesamt 3 schwarze und 5 weiße Kugeln. Ihre Aufgabe ist es, diese so auf zwei Urnen aufzuteilen, dass Ihre Gewinnw'keit in folgendem mehrstufigen Experiment maximal ist:

- Sie werfen eine faire Münze.
- Zeigt diese Zahl, so wählen Sie die erste Urnen, ansonsten die zweite Urne.
- Aus der gewählten Urne ziehen Sie eine zufällige Kugel: jede Kugel wird dabei mit derselben W'keit gezogen.
- Sie gewinnen, falls die gezogene Kugel schwarz ist.

Stellen Sie das Experiment als einen Baum dar. Bestimmen Sie nun die Gewinnw'keit in Abhängigkeit der Anzahl von schwarzen und weißen Kugeln in der ersten Urne. Bestimmen Sie die optimale Anzahl an weißen und schwarzen Kugeln in der ersten Urne. (Warum reicht es die Fälle von null bzw. einer schwarzen Kugel in der ersten Urne zu betrachten?)

Tutoraufgaben: Besprechung in der Woche vom 22.04.2013

Aufgabe 1.1

Wir betrachten das Ziegenproblem aus der Vorlesung. Die Annahmen sind dieselben wie in den Folien mit einer Ausnahme: Da der Spielleiter sich beim Sport am Sprunggelenk verletzt hat, öffnet er immer das ihm am nächsten gelegene "Ziegentor", das nicht vom Spieler gewählt wurde. Wir nehmen an, dass der Spielleiter immer links von allen drei Toren steht.

Wie verhalten Sie sich unter dieser zusätzlichen Annahme nun am besten?

Aufgabe 1.2

Beim deutschen Lotto mit Zusatzzahl (aber ohne Superzahl) wählt ein Spieler zunächst 6 verschiedene Zahlen aus $[49] := \{1, 2, \ldots, 49\}$ („ohne Zurücklegen"). Bei der Lotto-Ziehung werden ebenfalls zunächst 6 verschiedene Zahlen aus [49] gewählt, anschießend wird noch eine Zusatzzahl aus den verbleibenden 43 Zahlen gewählt (wieder ohne Zurücklegen). Der Gewinn eines Spielers richtet sich dann danach, wie viele seiner getippten Zahlen sich unter den gezogenen Zahlen befinden und ob er ggf. auch die Zusatzzahl getippt hat („k Richtige und/ohne Zusatzzahl.").

Bei der Lotto-Ziehung am 03.04.2013 kam es allerdings zu einer Panne, bei der nur 47 der 49 Zahlen in das Ziehungsgerät gerieten.

(a) Modellieren Sie mit einem diskreten W'keitsraum $(\Omega, \Pr[])$ das folgende mehrstufige Experiment:

- Der Spieler wählt 6 Zahlen aus [49].
- 47 Zahlen aus [49] kommen in das Ziehungsgerät.
- 6 Zahlen werden aus dem Ziehungsgerät entnommen (ohne Zurücklegen).
- 1 Zusatzzahl wird aus dem Ziehunsgerät entnommen.

In jedem Schritt sei jede mögliche Wahl gleich wahrscheinlich.

(b) Beschreiben Sie formal, d.h. als Teilmengen von Ω, die folgenden Ereignisse:

- „Genau fünf der sechs Zahlen, die der Spieler getippt hat, kommen in das Ziehungsgerät."
- „Vier Richtige und Zusatzzahl", d.h. der Spieler tippt die Zusatzzahl und genau vier der sechs gezogenen Zahlen.

(c) Bestimmen Sie die W'keiten der Ereignisse „k Richtige ohne Zusatzzahl" und „k Richtige und Zusatzzahl" für $k = 3, 4, 5, 6$.

Wie verhalten sich die Gewinnw'keiten im Vergleich zu den Gewinnw'keiten im normalen Lotto?

(d) Wir betrachten nun speziell den Mechaniker, der für die Instandhaltung des Ziehungsgeräts zuständig ist. Er spielt natürlich auch Lotto. Nehmen Sie rein hypothetisch an, er wüsste bereits vor der Ziehung, dass die beiden Zahlen, die nicht ins Ziehungsgerät gelangen, aus der Menge $[49] \setminus [42]$ stammen.

Der hypothetische Mechaniker kann sich zwischen den folgenden zwei Strategien nicht entscheiden:

- S1: Er wählt eine sechselementige Teilmenge aus [42].
- S2: Er wählt nur eine fünfelementige Teilmenge aus [42], die sechste Zahl wählt er aus $[49] \setminus [42]$.

Unter beiden Strategien sei jede Wahl wieder gleich wahrscheinlich. Er vermutet natürlich, dass mit S1 seine Gewinnchancen besser sind, aber mit S2 macht er sich weniger verdächtig.

Passen Sie die W'keitsräume aus (a) an diese Experimente an und bestimmen Sie für beide Strategien die W'keit, dass der rein hypothetische Mechaniker sechs Richtige tippt.

Aufgabe 1.3

In einem fernen Land wird eine Umfrage durchgeführt, bei der 9^n Personen zu 2^n verschiednen Themen befragt werden. Bei jeder Frage gibt es nur die zwei Antwortmöglichkeiten „Ich stimme zu" bzw. „Ich stimme nicht zu". Kennzeichnend für dieses Land ist, dass bei jeder Frage stets eine Minderheit von höchstens 4^n der Befragten die eine Antwortmöglichkeit wählt, während der verbleibende Antwortmöglichkeit von der Mehrheit vertreten wird.

Zeigen Sie mit Hilfe der Boole'schen Ungleichung, dass es unter allen Befragten mindestens eine Person gibt, die in jeder Frage die Meinung der Mehrheit wiedergibt. (Veranschaulichen Sie sich das Problem zunächst für den Fall $n = 1$.)