Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 6
9. Juni 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Zwei Spieler werfen je 6 mal eine faire Münze mit „Kopf" oder „Zahl".
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beide Spieler gleich oft „Kopf" werfen?

Lösungsvorschlag

Wir bezeichnen die Spieler mit A und B. Die Zufallsvariablen X bzw. Y geben die Anzahl der Würfe mit Ergebnis „Kopf" von Spieler A bzw. B.

Bemerkung: Für die Modellierung des Spiels verwendet man wie üblich Indikatorvariable X_i und Y_i, die mit den Werten 1 bzw. 0 das Ergebnis „Kopf" bzw. „Zahl" im i-ten Wurf anzeigen. Der gemeinsame Definitionsbereich für die Variablen ist $\Omega = \{(a,b)\,;\, a,b \in \{„\text{Kopf}“, „\text{Zahl}“\}^6\}$. Es gilt $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{2}$, $\Pr[Y_i = 1] = \frac{1}{2}$.

$X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ und $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ sind unabhängig. X und Y sind binomialverteilt mit $X, Y \sim \text{Bin}(6, \frac{1}{2})$.

Das Ereignis $E \subseteq \Omega$, dass beide Spieler gleich oft „Kopf" werfen, ist gegeben durch

$$\begin{aligned} E &= (X = Y) \\ &= \bigcup_{i=0}^{6} (X = i \cap Y = i)\,. \end{aligned}$$

Damit gilt

$$\begin{aligned} \Pr[E] &= \sum_{i=0}^{6} \Pr[X = i] \cdot \Pr[Y = i] \\ &= \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{6}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 924 = \frac{231}{1024} \approx 0,2256\,. \end{aligned}$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Aus einer Urne U_X bzw. U_Y werden zufällig Lose mit Werten $X \in \{1,2,3\}$ bzw. $Y \in \{4,5,6\}$ gezogen. Die Werte 2 und 5 sollen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, alle übrigen Werte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. X und Y seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen. Es sei $S = X + Y$. Sei S_i die i-te Durchführung bzw. Wiederholung der Ziehung S und Z sei der Mittelwert aus n Wiederholungen von S, d. h.

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i\,.$$

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$.
2. Zeigen Sie für alle $n \geq 20$: $\quad \Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < 0,5] \geq 0,8$.

Lösungsvorschlag

1. $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3 \cdot \tfrac{1}{4} = 2 \\ \mathbb{E}[Y] &= 4 \cdot \tfrac{1}{4} + 5 \cdot \tfrac{1}{2} + 6 \cdot \tfrac{1}{4} = 5 \\ \mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \qquad\quad = 7 \\ \mathbb{E}[Z] &= \tfrac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[S] \qquad\quad\;\; = 7 \end{aligned}$$

   Die Variation von Z berechnet sich wie folgt.

   $$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= 1 \cdot \tfrac{1}{4} + 2^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{4} &&= \tfrac{9}{2} \\ \mathbb{E}[Y^2] &= 4^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 5^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 6^2 \cdot \tfrac{1}{4} &&= \tfrac{51}{2} \\ \mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 &&= \tfrac{1}{2} \\ \mathrm{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 &&= \tfrac{1}{2} \\ \mathrm{Var}[S] &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] &&= 1 \end{aligned}$$

   Wir erhalten

   $$\mathrm{Var}[Z] = \tfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[S] \qquad = \tfrac{1}{n}\,.$$

2. Nach Chebyshev gilt für alle $t > 0$

   $$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t] \leq \tfrac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2}$$

   bzw.

   $$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| < t] \geq 1 - \tfrac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2}\,.$$

   Wegen $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[S]$ folgt

   $$\Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < \tfrac{1}{2}] \geq 1 - \tfrac{4}{n}$$

   und setzen

   $$1 - \tfrac{4}{n} \geq 0,8 = \tfrac{4}{5}\,.$$

   Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt

   $$n \geq 20\,.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ mit $\lambda > 0$.

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^2]$.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X^{\underline{n}}]$ für die fallende Potenz $X^{\underline{n}}$.

Lösungsvorschlag

1. Es gilt $E[X] = \lambda$. Wir benützen $X^2 = X(X-1) + X$. Daraus folgt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X(X-1)] + \mathbb{E}[X] \\
&= \lambda + \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda + \sum_{i=2}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-2)!} \\
&= \lambda + \lambda^2 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \lambda + \lambda^2 \cdot e^{-\lambda} \cdot e^{\lambda} \\
&= \lambda + \lambda^2 .
\end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^{\underline{n}}] &= \sum_{i=0}^{\infty} i(i-1)\dots(i-n+1) \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i-n)!} \\
&= \lambda^n \cdot \sum_{i=n}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{(i-n)}}{(i-n)!} \\
&= \lambda^n .
\end{aligned}$$

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}(200, \frac{1}{100})$.

1. Berechnen Sie $\Pr[X > 8]$ approximativ mit der Poisson-Verteilung. (Taschenrechner benutzen!)
2. Bestimmen Sie mit der Markov-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.
3. Bestimmen Sie mit der Chernoff-Ungleichung ein möglichst kleines k, so dass $\Pr[X > k] \leq 10^{-4}$.

Lösungsvorschlag

1. Es gilt $\mathbb{E}[X] = 200 \cdot \frac{1}{100} = 2$ und $\Pr[X > 8] = 1 - \Pr[X \leq 8]$.

Wir rechnen approximativ

$$\begin{aligned}
\Pr[X \le 8] &= \sum_{i=0}^{8} \frac{e^{-2} \cdot 2^i}{i!} \\
&= e^{-2} \cdot \left(1 + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^4}{4!} + \frac{2^5}{5!} + \frac{2^6}{6!} + \frac{2^7}{7!} + \frac{2^8}{8!}\right) \\
&= e^{-2} \cdot \left(1 + 2 + 2 + \frac{4}{3} + \frac{2}{3} + \frac{4}{15} + \frac{4}{45} + \frac{8}{315} + \frac{2}{315}\right) \\
&= e^{-2} \cdot \frac{2327}{315} \\
&\approx 0.9997626\,.
\end{aligned}$$

Ergebnis:

$$\Pr[X > 8] \approx 0.0002374 = 2.374 \cdot 10^{-4}\,.$$

2. Zunächst gilt $\Pr[X > k] = \Pr[X \ge k+1]$. Mit $\mathbb{E}[X] = 2$ folgt nach Markov

$$\Pr[X > k] \le \frac{2}{1+k}\,.$$

Wir lösen $\frac{2}{1+k} \le 10^{-4}$ nach k auf und erhalten als kleinstes k den Wert

$$k = 19999\,.$$

Bemerkung: Offensichtlich ist diese Abschätzung wertlos, denn für $k \ge 200$ gilt $\Pr[X > k] = 0$.

3. Seien $k + 1 = (1+\delta) \cdot \mu = (1+\delta) \cdot 2$, d. h. $\mu = \mathbb{E}[X] = 2$ und $1 + \delta = \frac{k+1}{2}$, mithin $\delta = \frac{k-1}{2}$. Dann gilt für alle $k > 1$ nach Chernoff

$$\begin{aligned}
\Pr[X \ge k+1] &\le \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu} \\
&= \left(\frac{e^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{k+1}}\right)\,.
\end{aligned}$$

Durch Logarithmieren und Zusammenfassen folgt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{e^{k-1}}{(\frac{k+1}{2})^{k+1}}\right) &\le 10^{-4} \\
\iff \quad (k+1)[1 + \ln 2 - \ln(k+1)] &\le 2 - 4\ln 10
\end{aligned}$$

Diese Ungleichung löst man i. A. durch ein Bisektionsverfahren. Im vorliegenden Fall findet man schnell, dass die Ungleichung erstmalig für $k = 10$ gilt.

Bemerkung: Wenn man bedenkt, dass $k \ge 9$ bereits aus Teilaufgabe 1 folgt, dann sieht man, wie außerordentlich scharf die Chernoff-Schranke ist.

***Hinweis:** Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion einer negativ binomialverteilten Zufallsvariablen.

Lösungsvorschlag

Die Dichte einer negativ binomialverteilten Variablen X_n für n Wiederholungen eines Wertes i bei Erfolgswahrscheinlichkeit p ist

$$f_{X_n}(i) = \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \,.$$

Man beachte, dass mit $\binom{i-1}{n-1} = \frac{(i-1)^{\underline{n-1}}}{(n-1)!}$ sofort $\binom{i-1}{n-1} = 0$ für $i < n$ folgt.
Für die erzeugende Funktion $G_{X_n}(s)$ gilt dann

$$\begin{aligned} G_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \\ &= \sum_{i=n}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot s^i \,. \end{aligned}$$

Ein Schlüssel für eine geschlossene Darstellung der Funktion $G_{X_n}(s)$ kann u. a. die Rekursion für alle $n \geq 1$ sein mit

$$G_{X_{n+1}}(s) = \frac{p \cdot s^2}{n} \cdot G'_{X_n}(s) \,,$$

wobei laut Vorlesung für $n = 1$ gilt

$$G_{X_1}(s) = \frac{ps}{1-(1-p)s} \,.$$

Beweis der Rekursion:

$$\begin{aligned} G'_{X_n}(s) &= \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i-1}{n-1} \cdot p^n (1-p)^{i-n} \cdot i \cdot s^{i-1} \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \binom{i}{n} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-n} \cdot s^{i+1} \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \binom{i-1}{n+1-1} \cdot p^{n+1} (1-p)^{i-(n+1)} \cdot s^i \\ &= \frac{n}{p \cdot s^2} \cdot G_{X_{n+1}}(s) \,. \end{aligned}$$

Ein alternativer Ansatz $X_n = Z_1 + Z_2 + \ldots Z_n$ mit unabhängig geometrisch verteilten Z_i ist nach Vorlesung

$$G_{X_n}(s) = G_{Z_1}(s) \cdot G_{Z_2}(s) \cdot \ldots \cdot G_{Z_n}(s) = \left(\frac{ps}{1-(1-p)s} \right)^n \,.$$

Vorbereitung 2

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1 cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Münze gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

Lösungsvorschlag

Die Gleichverteilung von Punkten auf einer Fläche bedeutet, dass gleich große Flächenstücke im Mittel gleich oft von erzeugten Punkten berührt werden, hier z. B. durch den Mittelpunkt geworfener Münzen. Die Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden horizontalen Linien teilt sich in gleich große Bereiche B_1 und B_2 von Lagepositionen der Münze, wenn B_1 die Menge von Punkten umfasst mit größerem Abstand als 1 zu einer der beiden Linien und B_2 die übrigen Punkte zwischen den Linien enthält. Die Münze berührt genau dann eine der Linien, wenn deren Mittelpunkt in B_2 fällt. Da die Flächen von B_1 und B_2 gleich groß sind, berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine der beiden Linien. Da wir davon ausgehen, dass jeder der Zwischenräume zwischen benachbarten Linien mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden, berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ irgendeine Linie.

Tutoraufgabe 1

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$. Für die Dichtefunktion f_X von X gelte $f_X(1) = \frac{1}{4}$ und $f_X(2) = \frac{1}{5}$. X_i sei die i-te Wiederholung von X. Wir bilden $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ in Abhängigkeit des Wertes einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen N, die den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit e^{-2} annehme.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ der Zufallsvariablen X an.

2. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.

3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Z den Wert 0 annimmt.

   Hinweis: Man beachte, dass Z auch dann den Wert 0 annimmt, wenn $N = 0$ gilt.

Lösungsvorschlag

1. Es gilt

   $$f_X(0) = 1 - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}) = \tfrac{11}{20}\,,$$

   und damit

   $$\begin{aligned} G_X(s) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k \\ &= \tfrac{11}{20} + \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{5}s^2\,. \end{aligned}$$

2. Aus $G_Z(s) = G_N(G_X(s))$ folgt $G'_Z(1) = G'_N(G_X(1)) \cdot G'_X(1)$, mithin, wegen $G_X(1) = 1$,

   $$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]\,.$$

   Für die Dichte von N gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$

$$f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\,,$$

also

$$f_X(0) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \;=\; e^{-\lambda} \;=\; e^{-2}\,,$$

woraus folgt

$$\mathbb{E}[N] = \lambda \;=\; 2\,.$$

Weiter gilt

$$\mathbb{E}[X] = \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{5} \;=\; \tfrac{13}{20}\,.$$
$$\mathbb{E}[Z] = \tfrac{13}{10}\,.$$

3. Seien G_Z, G_N und G_X die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen von Z bzw. N bzw. X. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[Z = 0] &= G_Z(0) \\
&= G_N(G_X(0)) \\
&= G_N(\tfrac{11}{20}) \\
&= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} \cdot (\frac{11}{20})^k \\
&= e^{-2} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (\frac{11}{10})^k \;=\; e^{-2+\frac{11}{10}} \\
&= e^{-\frac{9}{10}}\,.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 2

1. Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

2. Ein Krankenhaus steht in einer Straße der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

   Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?

Lösungsvorschlag

1. Sei D der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt. Für $0 \le x \le 1$ ist

   $$\Pr[D \le x] = \frac{x^2 \cdot \pi}{1^2 \cdot \pi} = x^2\,.$$

   Da für eine Verteilungsfunktion $F(x)$ zu einer Dichte $f(x)$

   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\ \mathrm{dt}$$

   gilt, folgt für die Dichte der Verteilung von D für alle x mit $0 < x < 1$

   $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x^2 = 2x\,.$$

   Außerhalb von $[0, 1]$ gilt $f(x) = 0$.

2. Ein auf $[0, \ell]$ gleichverteiltes X besitzt auf $[0, \ell]$ die Dichte $\frac{1}{\ell}$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[|X-a|] &= \mathbb{E}\left[|X-a| \,|\, 0 \leq X \leq a\right] \cdot \frac{a}{\ell} + \mathbb{E}\left[|X-a| \,|\, a \leq X \leq \ell\right] \cdot \frac{\ell-a}{\ell} \\
&= \frac{a}{\ell} \int_0^a (a-x) \cdot \frac{1}{a} \, \mathrm{d}x + \frac{\ell-a}{\ell} \int_a^\ell (x-a) \cdot \frac{1}{\ell-a} \, \mathrm{d}x \\
&= \frac{a^2}{2\ell} + \frac{(\ell-a)^2}{2\ell} .
\end{aligned}$$

Man kann nach a differenzieren, um das Minimum $a = \frac{\ell}{2}$ zu finden.