Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / M. Luttenberger / S. Schwoon

Sommersemester 2007
Übungsblatt 8

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt wird am besprochen.

Aufgabe 8.1

Wir betrachten drei Möglichkeiten, um zufällig Kugeln mit Radius höchstens 1 zu erzeugen: (a) wir wählen direkt den Radius gleichverteilt über $[0, 1]$, (b) wir wählen die Oberfläche gleichverteilt über $[0, 4\pi]$, (c) wir wählen das Volumen gleichverteilt über $[0, \frac{4}{3}\pi]$.

Für (a) ist die Dichte des Radius offensichtlich $\mathbb{1}_{[0,1]}(r)$. Bestimmen Sie die Dichte des Radius auch für die restlichen beiden Fälle.

Hinweis: Eine Kugel mit Radius r hat die Oberfläche $4\pi r^2$ und das Volumen $\frac{4}{3}\pi r^3$.

Lösungsvorschlag

(b) Hier ist die Dichte von O, der Oberfläche der Kugel, bekannt:

$$f_O(o) = \frac{1}{4\pi}\mathbb{1}_{[0,4\pi]}(o).$$

Die Zufallsvariable R, welche den Radius der Kugel beschreibt, hängt wie folgt von O ab:

$$R = \sqrt{\frac{O}{4\pi}}.$$

Damit folgt für die Verteilungsfunktion von R und $r \in [0, 1]$:

$$\Pr[R \le r] = \Pr\left[\sqrt{\frac{O}{4\pi}} \le r\right] = \Pr[O \le 4\pi r^2] = \frac{4\pi r^2}{4\pi} = r^2.$$

Damit hat R in diesem Fall die Dichte $2r\mathbb{1}_{[0,1]}(r)$.

(c) Das Volumen V hat nun die Dichte

$$f_V(v) = \frac{3}{4\pi}\mathbb{1}_{[0,\frac{4}{3}\pi]}(v).$$

Für R gilt

$$R = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3},$$

so dass

$$\Pr[R \le r] = \Pr\left[\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3} \le r\right] = \Pr[V \le \frac{4}{3}\pi r^3] = \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi} = r^3$$

für $r \in [0, 1]$ folgt.

Damit besitzt R die Dichte $3r^2\mathbb{1}_{[0,1]}(r)$.

Aufgabe 8.2

Wir betrachten die 2×2-Matrix

$$M := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

wobei A, B, C, D unabhängige Zufallsvariablen sind, welche jeweils gleichverteilt über $[0, 1]$ sind. Dann ist die Determinante von M ebenfalls eine Zufallsvariable $X := \det M = AD - BC$.

(a) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Determinante von M größer 0 ist? Sie müssen hierfür nichts rechnen!

(b) Nehmen Sie jetzt an, dass M symmetrisch ist, d.h. dass $C = B$ gilt. Berechnen Sie nun die Wahrscheinlichkeit, dass die Determinante von M größer 0 ist!

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion von AD. Beachten Sie weiterhin, dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen Y, Z und eine stetige Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stets

$$\Pr[u(Y) \le Z] = \int_{y=-\infty}^{\infty} \int_{z=u(y)}^{\infty} f_Z(z) \cdot dz \cdot f_Y(y) \cdot dy$$

gilt.

Lösungsvorschlag

(a) Da A, B, C, D unabhängig und identisch verteilt sind, müssen $AD - BC$ und $BC - AD$ dieselben Verteilungen besitzen. Insofern muss

$$\Pr[AD - BC \ge 0] = \Pr[BC - AD \ge 0] = 1 - \Pr[BC - AD \le 0] = 1 - \Pr[AD - BC \ge 0]$$

gelten, womit $\Pr[X \ge 0] = \Pr[AD - BC \ge 0] = 0.5$ folgt.

(b) Zunächst bestimmt man die Verteilungsfunktion von $U := AD$ (und analog von $W := BC$) $F(t)$. Da AD nur Werte in $[0, 1]$ annehmen kann, reicht es, diese für $t \in [0, 1]$ zu berechnen:

$$\begin{aligned}
F(t) &= \Pr[AD \le t] \\
&= \int_{\{(a,b)\in[0,1]^2 \mid a\cdot b\le t\}} f_A(a) f_D(d) \cdot da \cdot dd \\
&= \int_{a=0}^{1} \int_{d=0}^{\min(1,t/d)} dd \cdot da \\
&= \int_{a=0}^{t} \int_{d=0}^{1} dd \cdot da + \int_{a=t}^{1} \int_{d=0}^{t/a} dd \cdot da \\
&= t + \int_{a=t}^{1} \frac{t}{a} da \\
&= t + t[-\ln a]_{a=t}^{1} = t - t \ln t.
\end{aligned}$$

Für die Dichte folgt also $f(t) = -\ln t$.

Wir sind nun an der Wahrscheinlichkeit $\Pr[AD - B^2 \ge 0] = \Pr[B^2 \le AD]$ interessiert.

Unter Verwendung des Hinweises folgt:

$$\begin{aligned}
\Pr[B^2 \leq AD] &= \int_{b=0}^{1} \int_{u=b^2}^{1} f_U(u) f_B(b) \cdot du \cdot db \\
&= \int_{b=0}^{1} F(u)|_{u=b^2}^{1} \cdot db \\
&= \int_{b=0}^{1} (1 - b^2(1 - 2\ln b)) \cdot db \\
&= 1 - \int_{b=0}^{1} b^2(1 - 2\ln b) \cdot db \\
&= 1 - \int_{b=0}^{1} b^2 \cdot db + 2 \cdot \int_{b=0}^{1} b^2 \ln b \cdot db \\
&= 1 - \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(\frac{1}{3} b^3 \ln b|_{b=0}^{1} - \frac{1}{3} \int_{b=0}^{1} b^3 b^{-1} \cdot db \right) \\
&= 1 - \frac{1}{3} + 2 \cdot \left(0 - \frac{1}{9}\right) = 1 - \frac{5}{9} = \frac{4}{9}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 8.3

In Aufgabe 7.3 wurde eine Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten $X_i \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ durchgeführt. Gesucht war das kleinste n, so dass für $p = 0.1$, $\theta = 0.01$ und $\varepsilon = 0.01$

$$\Pr\left[\frac{\left|p - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|}{p} \geq \theta\right] \leq \varepsilon \text{ bzw. } \Pr\left[\frac{\left|p - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|}{p} < \theta\right] \geq 1 - \varepsilon$$

gilt.

In Aufgabe 7.3 haben Sie das Gesetz der großen Zahlen benutzt, um n abzuschätzen. Verwenden Sie nun den Satz von de'Moivre hierfür.

Berechnen Sie auch, wie groß n sein muss, wenn man nur den absoluten Fehler $\left|p - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|$ durch θ beschränken will.

Hinweis: Auf `de.wikipedia.org/wiki/Tabelle_Standardnormalverteilung` finden Sie eine Tabelle zur Standardnormalverteilung. Die Spalten entsprechen dabei der zweiten Nachkommastelle des Arguments.

Lösungsvorschlag Es wird eine Folge von unabhängigen Bernoulli-Experimenten $X_i \sim \mathrm{Bin}(1,p)$ durchgeführt. Gesucht ist das kleinste n, so dass

$$(*) \quad \Pr\left[\frac{\left|p - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right|}{p} < \theta\right] \geq 1 - \varepsilon$$

gilt für $p = 0.1, \theta = 0.01, \varepsilon = 0.01$.

Nach dem Satz von de'Moivre gilt

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\frac{(\sum_{i=1}^{n} X_i) - np}{\sqrt{np(1-p)}} \leq t\right] = \Phi(t).$$

Man formt $(*)$ entsprechend um:

$$\begin{aligned}
& \Pr\left[\frac{1}{p}\cdot\left|p-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<\theta\right] \\
= \quad & \Pr\left[-p\theta<\frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n}X_i-np\right)<p\theta\right] \\
= \quad & \Pr\left[-p\theta<\tfrac{1}{n}\left(\textstyle\sum_{i=1}^{n}X_i-np\right)<p\theta\right] \\
= \quad & \Pr\left[-\frac{np\theta}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}<\frac{np\theta}{\sqrt{np(1-p)}}\right] \\
\approx \quad & \Phi\left(\frac{p\theta}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)-\Phi\left(-\frac{p\theta}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right) \\
= \quad & \Phi\left(\frac{p\theta}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)-\Phi(0)+\Phi(0)-\Phi\left(-\frac{p\theta}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right) \\
= \quad & 2\cdot\left(\Phi\left(\tfrac{p\theta}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)-0.5\right) \\
= \quad & 2\cdot\left(\Phi\left(\frac{1}{300}\sqrt{n}\right)-0.5\right)
\end{aligned}$$

Nun soll $2\cdot\left(\Phi\left(\frac{1}{300}\sqrt{n}\right)-0.5\right)\geq 0.99$ gelten, oder äquivalent

$$\Phi\left(\frac{1}{300}\sqrt{n}\right)\geq 0.995.$$

Durch Nachschlagen in einer Tabelle sieht man, dass $\Phi(2.58)\approx 0.99506$ gilt.

Man erhält also

$$n\approx 599076.$$

Zur Erinnerung: mittels des Gesetzes der großen Zahlen erhielt man

$$n\geq\frac{1-p}{p}\frac{1}{\theta^2\cdot\varepsilon}=9\cdot 10^6.$$

Ist man nur an dem absoluten Fehler interessiert, also an

$$\Pr\left[\left|p-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i\right|<\theta\right]\geq 1-\varepsilon,$$

so muss man in obiger Rechnung nur $p\theta$ durch θ ersetzen, man erhält also

$$\Phi\left(\frac{\theta}{\sqrt{p(1-p)}}\sqrt{n}\right)=\Phi\left(\frac{1}{30}\sqrt{n}\right)\geq 0.995.$$

Es muss also wieder $\frac{1}{30}\sqrt{n}\geq 2.58$ gelten, womit man $n\geq 5990.76$ erhält.

Anmerkung:

Man kann zeigen, dass

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\Pr\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}X_i-np}{\sqrt{np(1-p)}}\leq x\right]-\Phi(x)\right|\leq\frac{0.8\cdot\mathbb{E}[|X_1-p|^3]}{n^2\cdot(p(1-p))^{3/2}}=\frac{0.8\cdot(p^3(1-p)+(1-p)^3p)}{n^2\cdot(p(1-p))^{3/2}}\leq\frac{2.19}{n^2}\leq 6.11\cdot 10^{-12}$$

gilt für $p=0.1$ und $n=599076$.