Aufgabe 8.1

Es sei

$$f(x,y) := \begin{cases} cxy & \text{falls } -1 \le x \le 0 \wedge 0 \le y \le 1 \wedge y - x \le 1 \\ cxy & \text{falls } 0 \le x \le 1 \wedge -1 \le y \le 0 \wedge x - y \le 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

2.06.2012

(a) Bestimmen Sie c so, dass es sich bei $f(x,y)$ um eine Dichte handelt.

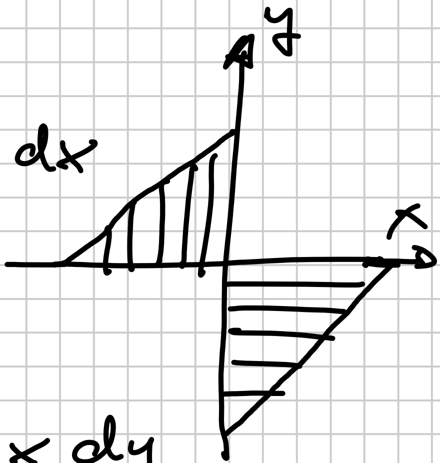
(b) Es seien X, Y ZVen mit gemeinsamer Dichte $f(x,y)$.

(i) Bestimmen Sie die Randdichten von X und Y

(ii) Sind X und Y unabhängig?

(a) Es muss $\int_{\mathbb{R}^2} f \, dx\,dy = 1$ gelten

$$\int_{\mathbb{R}^2} f \, dx\,dy = c \int_{x=-1}^{0} \int_{y=0}^{1+x} xy \, dy \, dx$$



gleich bis auf Umbenennung

$$+ c \int_{y=-1}^{0} \int_{x=0}^{1+y} xy \, dx \, dy$$

$$= 2c \int_{x=-1}^{0} x \, \tfrac{1}{2}(1+x)^2 \, dx$$

$$= c \int_{x=-1}^{0} x^3 + 2x^2 + x \, dx$$

$$= c \left[\tfrac{1}{4}x^4 + \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{1}{2}x^2 \right]_{-1}^{0}$$

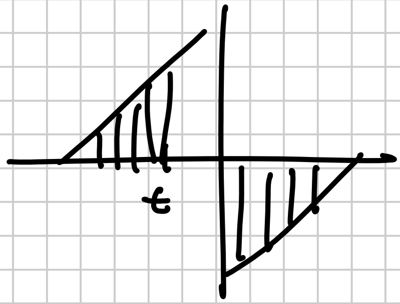
$$= c \left(-\tfrac{1}{4} + \tfrac{2}{3} - \tfrac{1}{2} \right)$$

$$= c \cdot \frac{-1}{12} \leadsto c = -12$$

Randverteilung von X:

$$F_X(t)$$

$$= \int\limits_{\substack{x\in(-\infty,t]\\ y\in(-\infty,\infty)}} f\,dx\,dy$$



Für $t \in [-1,0]$:

$$= \int_{x=-1}^{t} \int_{0}^{1+x} -12xy\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{t} -12x\,\frac{(1+x)^2}{2}\,dx = -6 \int_{-1}^{t} x^3+2x^2+x\,dx$$

$$= -6\left[\frac{1}{4}x^4+\frac{2}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2\right]_{-1}^{t}$$

$$= -6\left[\frac{t^4}{4}+\frac{2t^3}{3}+\frac{t^2}{2}-\frac{1}{4}+\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right]$$

Für $t \in [0,1]$:

$$= \frac{1}{2} - 12 \int_{x=0}^{t} x \int_{-1+x}^{0} y\,dy\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - 12 \int_{x=0}^{t} x\,\frac{(x-1)^2}{-2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2} + 6\left(\frac{t^4}{4} - \frac{2t^3}{3} + \frac{t^2}{2}\right)$$

$$\rightsquigarrow F_X(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ \frac{1}{2} - \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 - 3t^2, & -1 \leq t < 0 \\ \frac{1}{2} + \frac{3}{2}t^4 - 4t^3 + 3t^2, & 0 \leq t < 1 \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$\rightsquigarrow f_X(t) = \begin{cases} 0, & t < -1 \\ -6t^3 - 12t^2 - 6t, & -1 \leq t < 0 \\ = -6t(t+1)^2 & \\ 6t^3 - 12t^2 + 6t & \\ = 6t(t-1)^2, & 0 \leq t < 1 \\ 0, & t \geq 1 \end{cases}$$

$f_Y(t)$ aus Symmetriegründen identisch zu $f_X(t)$.

$\rightsquigarrow \quad f_X(s)\, f_Y(t) \neq f(s,t)$

$\rightsquigarrow$ X, Y nicht unabhängig

Aufgabe 8.2 Abzugeben

(a) Zeigen Sie, dass für unabhängige stetige ZVen X, Y gilt:

$$F_{X+Y}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot F_Y(t-x)dx.$$

(b) Seien X, Y, Z unabhängige stetige ZVen.

Zeigen Sie formal, dass dann auch $X+Y$ und Z unabhängig sind.

a) Praktisch nochmal der Beweis von Satz 68: (Folie 269 ff.)

$$F_{X+Y}(t) = \int_{A(t)} f_{X,Y}(x,y)\,dx\,dy =$$

$A(t) := \{x, y \in \mathbb{R}^2 : x+y \leq t\}$

X, Y unabh.

$$= \int_{A(t)} f_X(x) \cdot f_Y(y)\,dx\,dy =$$

Fubini

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot \left(\int_{-\infty}^{t-x} f_Y(y)\,dy \right) dx =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \cdot F_Y(t-x)\,dx$$

b) Seien X, Y, Z unabh.

zzg.: $F_{X+Y,Z} = F_{X+Y} \cdot F_Z$

$$F_{X+Y,Z}(s,t) = \Pr[X+Y \leq s,\ Z \leq t] =$$

$$= \int_{A(s,t) := \{(x,y,z) \mathbb{R}^3 :\ x+y \leq s,\ z \leq t\}} f_{X,Y,Z}(x,y,z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\overset{X,Y,Z}{\underset{\text{unabh.}}{=}} \int_{A(s,t)} f_X(x) \cdot f_Y(y) \cdot f_Z(z)\, dx\, dy\, dz =$$

$$\overset{\text{(Fubini)}}{=} \int_{-\infty}^{t} f_Z(z)\, dz \cdot \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 :\ x+y \leq s\}} f_X(x) \cdot f_Y(y)\, dx\, dy$$

$$\overset{\text{(VL)}}{=} F_Z(t) \cdot \int_{-\infty}^{s} f_{X+Y}(x)\, dx =$$

$$= F_Z(t) \cdot F_{X+Y}(s) \qquad \square$$

Aufgabe 8.3 **Abzugeben: aI),aII)** **2P+4P**

Diese Aufgabe greift das Bertand'sche Paradoxon nochmals auf.

(a) Sei R gleichverteilt auf $(0,1]$ der Radius eines zufälligen Kreises.

Bestimmen Sie jeweils die Dichte, den Erwartungswert und die Varianz der ZV, welche

(I) den Umfang bzw.

(II) die Fläche des Kreises beschreiben.

(Hinweis: bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion)

(b) Sei A gleichverteilt auf $[0,\pi]$ die Fläche eines zufälligen Kreises.

Bestimmen Sie jeweils die Dichte, die Verteilungsfunktion und den Erwartungswert der ZVen, welche den Radius bzw. den Umfang des Kreises beschreiben.

(a) Umfang : $U = 2\pi R$

Fläche : $A = \pi R^2$

$$F_U(t) = \Pr[2\pi R \le t] = \Pr\left[R \le \frac{t}{2\pi}\right] = F_R\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$\rightsquigarrow f_U(t) = \frac{1}{2\pi} f_R\left(\frac{t}{2\pi}\right)$$

$$F_A(t) = \Pr[\pi R^2 \le t] = \Pr\left[R \le \sqrt{\frac{t}{\pi}}\right] = F_R\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)$$

$$\rightsquigarrow f_A(t) = f_R\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right) \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\frac{t}{\pi}}} \frac{1}{\pi} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\, f_R\left(\sqrt{\frac{t}{\pi}}\right)$$

$$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[2\pi R] = 2\pi\, \mathbb{E}[R] = \pi$$

$$\mathbb{E}[A] = \mathbb{E}[\pi R^2]$$

$$= \pi \int_0^1 r^2 \, dr = \frac{\pi}{3}$$

(c) $R = \sqrt{\frac{A}{\pi}}$

$$U = 2\pi R = 2\pi\sqrt{\frac{A}{\pi}}$$

$$= 2\sqrt{\pi A}$$

$\leadsto F_R(t) = \Pr\left[\sqrt{\frac{A}{\pi}} \le t\right]$

$$= \Pr\left[A \le \pi t^2\right]$$

$$= F_A(\pi t^2)$$

$\leadsto f_R(t) = 2\pi t\, f_A(\pi t^2)$

$F_U(t) = \Pr\left[2\sqrt{\pi A} \le t\right]$

$$= \Pr\left[A \le \frac{t^2}{4\pi}\right] = F_A\left(\frac{t^2}{4\pi}\right)$$

$\leadsto f_U(t) = \frac{t}{2\pi} f_A\left(\frac{t^2}{4\pi}\right)$

$\mathbb{E}[R] = \mathbb{E}\left[\sqrt{\frac{A}{\pi}}\right]$

$$= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\pi} \sqrt{a}\, \frac{da}{\pi}$$

$$= \pi^{-3/2} \left[\frac{2}{3} a^{\frac{3}{2}}\right]_0^{\pi} = \frac{2}{3}$$

$\mathbb{E}[U] = \mathbb{E}[2\pi R] = 2\pi \frac{2}{3} = \frac{4}{3}\pi$

Aufgabe 8.4 **Abzugeben** **3P+2P+1P**

Seien X, Y, Z unabhängige stetige ZVen, alle drei gleichverteilt über $[0, 1]$.

(a) Zeigen Sie, dass $M := \min(\max(X, Y), Z)$ die folgende Verteilungsfunktion besitzt:

$$F_M(t) = \begin{cases} 0 & \text{falls } t < 0 \\ 1 & \text{falls } t > 1 \\ t + t^2 - t^3 & \text{falls } 0 \le t \le 1 \end{cases}$$

Hinweis: Bestimmen Sie zunächst die Verteilungsfunktion von $\max(X, Y)$.

(b) Bestimmen Sie die Dichte und den Erwartungswert von M.

(c) Wie kann man $\max(X, Y)$ mit Hilfe einer auf $[0, 1]$ gleichverteilten ZV U simulieren?

(a)

$$S := \max(X, Y)$$

$$F_S(t) = \Pr[\max(X, Y) \le t]$$

$$= \Pr[X \le t, Y \le t]$$

X, Y unabh.

$$= F_X(t)\, F_Y(t)$$

X, Y i.d.

$$= F_X(t)^2 = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t^2, & t \in [0, 1] \\ 1, & t > 1 \end{cases}$$

(i.d. $\hat{=}$ identically distributed)

$$M := \min(S, Z)$$

<u>Beachte</u>: S, Z sind auch unabh.

$$F_M(t) = \Pr[\min(S, Z) \le t]$$

$$= 1 - \Pr[\min(S, Z) > t]$$

$$= 1 - \Pr[S > t, Z > t]$$

$$= 1 - \Pr[S > t]\, \Pr[Z > t]$$

$$= 1 - (1 - F_S(t))(1 - F_Z(t))$$

$$= \begin{cases} 0 \,, & t < 0 \\ 1-(1-t^2)(1-t) \\ \quad = t + t^2 - t^3 \,, & 0 \le t \le 1 \\ 1 \,, & t > 1 \end{cases}$$

(b) $f_M(t) = (1+2t-3t^2) I_{[0,1]}(t)$

$$\mathbb{E}[M] = \int_0^1 t(1+2t-3t^2)\, dt$$

$$= \left[\tfrac{1}{2}t^2 + \tfrac{2}{3}t^3 - \tfrac{3}{4}t^4\right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{3}{4} = \frac{6+8-9}{12}$$

$$= \frac{5}{12}$$

(c) Sei U gleichverteilt auf $[0,1]$

Gesucht: Trafo Φ so dass für

$$F_S(t) \overset{!}{=} F_{\Phi(U)}(t) \quad (t \in [0,1])$$

$$\begin{aligned} &\parallel \\ &Pr[\Phi(U) \le t] \\ &\parallel \\ &Pr[U \le \Phi^{-1}(t)] \end{aligned}$$

Für $t \in (0,1)$ gilt $F_S(t) \in (0,1)$.
Somit muss auch $\Phi^{-1}(t) \in (0,1)$
gelten, auf Grund der Gleichvert. von
U auf $[0,1]$ und daher auch:

$$\underset{\overset{\shortparallel}{t^2}}{F_S}(t) = \Phi^{-1}(t)$$

$$\leadsto \quad \Phi(t) = \sqrt{t}$$

Aufgabe 8.5 **Tutorübung**

Prof. Evilsparza hat vor Kurzem eine Klausur in Stochastik schreiben lassen müssen. Da er natürlich keine Lust hat, die Klausuren zu korrigieren, und er auch weiß, dass die Fakultät einzig auf die Durchschnittsnote achtet, legt er die Noten wie folgt fest:

Er erzeugt sich mit Hilfe eines Zufallsgenerators vier unabhängige ZVen X_5, X_4, X_3, X_2, alle gleichverteilt über $[0,1]$.

Er nimmt dann X_5 Prozent der Klausuren und bewertet jede davon mit einer Fünf.

Dann nimmt er von den verleibenden Klausuren X_4 Prozent (also $(1-X_5)X_4$ Prozent der ursprünglichen Klausuren) und bewertet jede dieser Klausuren mit einer Vier.

Entsprechend vergibt er die Noten Drei und Zwei. Die übrigen $(1-X_5)\cdot\ldots\cdot(1-X_2)$ Prozent erhalten dann (leider) eine Eins.

(a) Die Durchschnittsnote ist bei dieser Notenvergabe gerade

$$D := 5\cdot X_5 + 4\cdot(1-X_5)X_4 + 3\cdot(1-X_5)(1-X_4)X_3 + 2\cdot(1-X_5)(1-X_4)(1-X_3)X_2 + 1\cdot(1-X_5)(1-X_4)(1-X_3)(1-X_2).$$

Bestimmen Sie die erwartete Durchschnittsnote $\mathbb{E}[D]$.

Hinweis: Die Sätze zum Erwartungswert von diskreten ZVen gelten analog für stetige ZVen.

(b) Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der ZV $V := (1-X_5)X_4$, welche angibt, wie viel Prozent der Klausuren gerade mit einer Vier bewertet werden. Tun Sie dies auf zwei verschiedene Arten:

- Direkt durch Berechnung des entsprechenden Integrals.
- Durch Transformation von V auf eine Summe von zwei unabhängigen ZVen.

a) Mit $X_{2,\ldots,}X_5$ unabhängig sind auch $1-X_1, X_2,\ldots,X_5$ unabh. usw.

Für unabh. ZV gilt: $\mathbb{E}[XY]=\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

Auf Grund der Linearität folgt somit:

$$\mathbb{E}[D] = 5\cdot\mathbb{E}[X_5]$$
$$+4\,\mathbb{E}[X_4](1-\mathbb{E}[X_5])$$
$$+3\cdot\mathbb{E}[X_3](1-\mathbb{E}[X_4])(1-\mathbb{E}[X_5])$$
$$+2\cdot\mathbb{E}[X_2](1-\mathbb{E}[X_3])\cdot\ldots\cdot(1-\mathbb{E}[X_5])$$
$$\mathbb{E}[X_i]=\tfrac{1}{2} \quad +1\cdot(1-\mathbb{E}[X_2])\cdot\ldots\cdot(1-\mathbb{E}[X_5])$$
$$= 5\cdot\frac{1}{2} + 4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4$$
$$= \frac{40+16+6+2+1}{16}$$
$$= \frac{65}{16} = \underline{\underline{4{,}0625}}$$

(b) $V = (1-X_5)X_4$

$$F_V(t) = \Pr[(1-X_5)X_4 \le t] \quad (t \in [0,1])$$

$$= \int_{\{(x_4,x_5)\in[0,1]^2 \mid (1-x_5)x_4 \le t\}} dx_4\, dx_5$$

$$= \int_{x_5=0}^{1} \int_0^{\min\{1, \frac{t}{1-x_5}\}} dx_4\, dx_5 \qquad \Bigg\| \quad \frac{t}{1-x_5} > 1 \iff x_5 > 1-t$$

$$= \int_{1-t}^{1} \int_0^{1} dx_4\, dx_5$$

$$+ \int_0^{1-t} \int_0^{\frac{t}{1-x_5}} dx_4\, dx_5$$

$$= t + \int_0^{1-t} \frac{t}{1-x_5}\, dx_5 \qquad \Bigg\| \quad \frac{d}{dx}\ln(1-x) = \frac{-1}{1-x}$$

$$= t + t\left[-\ln(1-x_5)\right]_0^{1-t}$$

$$= t(1-\ln(t))$$

Alternativ: Beachte für $X \sim uniform(0,1)$ ist $X \sim 1-X$!

Vert. von $\ln X$:

$$F_{\ln X}(t) = Pr[\ln X \leq t] = Pr[X \leq e^t] = \begin{cases} e^t & \text{für } t \in (-\infty, 0) \\ 1 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$Pr[V \leq t] = Pr[\ln(X \cdot Y) \leq \ln t] = Pr[\ln X + \ln Y \leq \ln t] =$$

$\ln X, \ln Y$ unabh.!

siehe 8.2a)

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_{\ln X}(x)}_{=0 \text{ für } x \geq 0} \cdot \underbrace{F_{\ln Y}(\ln t - x)}_{= \begin{cases} 1 & \text{für } x \leq \ln t \\ e^{\ln t - x} & \text{für } x \geq \ln t \end{cases}} dx$$

$$= \int_{-\infty}^{0} f_{\ln X}(x) \cdot F_{\ln Y}(\ln t - x)\, dx$$

$\boxed{\text{Beachte: } \ln t < 0 \quad (t \in (0,1))}$

$$= \int_{-\infty}^{\ln t} e^x \cdot 1\, dx + \int_{\ln t}^{0} e^x \cdot e^{\ln t - x}\, dx$$

$$= t + t \cdot [x]_{\ln t}^{0} = t - t\ln(t)$$