HA 2.1

- Wegen $Pr[A] \neq Pr[B]$ muss $A \neq B$ gelten.
- Wegen $Pr[A \cap B] > 0$ muss $A \cap B \neq \emptyset$ gelten.

$\rightsquigarrow$ Ansatz: $A = \{\omega_1, \omega_2\}$ $B = \{\omega_2, \omega_3\}$

Setze: $p_i := Pr[\omega_i]$ für $i \in [3]$

$\rightsquigarrow$ Damit wird aus: $Pr[A \cap B] \geq 9\, Pr[A]\, Pr[B] > 0$

$$\Longleftrightarrow \quad p_2 \geq 9\left(p_1 p_2 + p_1 p_3 + p_2^2 + p_2 p_3\right) > 0$$

$$(p_2 \neq 0) \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{1}{9} \geq p_1 + \frac{p_1 p_3}{p_2} + p_2 + p_3$$

Ansatz: $p_1 := p_2$, $p_3 := 2p_2$ (damit $Pr[A] \neq Pr[B]$)

führt auf: $\frac{1}{9} \geq p_2 + 2p_2 + p_2 + 2p_2 = 6p_2$

$\rightsquigarrow$ Wähle $p_2 = \frac{1}{54} = p_1$, $p_3 = \frac{2}{54}$

$\rightsquigarrow$ Beachte $p_1 + p_2 + p_3 = \frac{4}{54}$

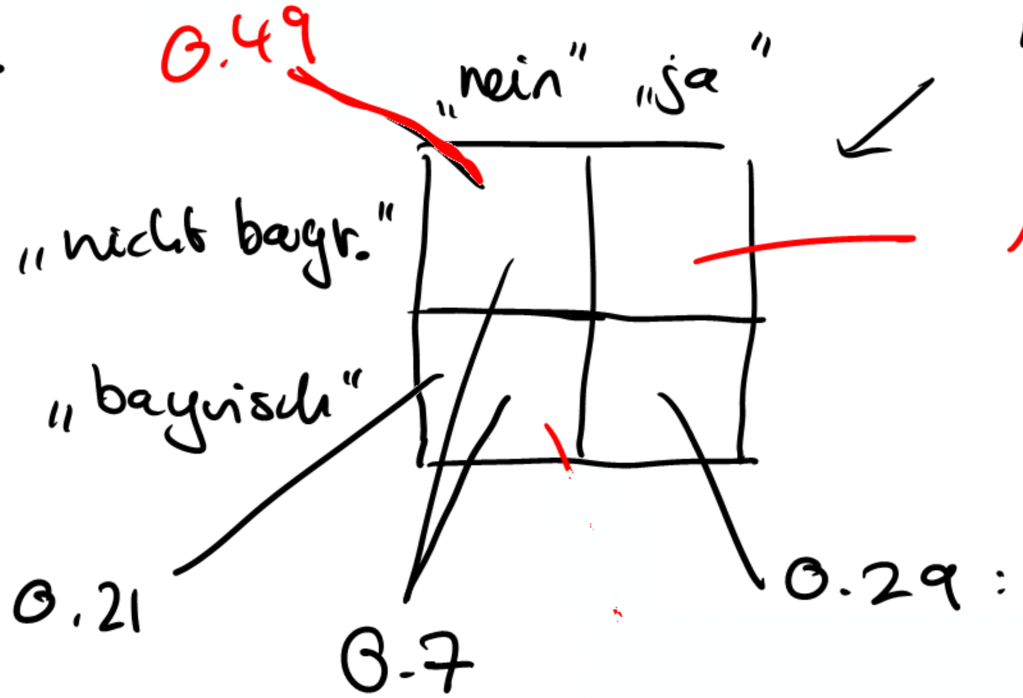
Brauchen noch ω_4 mit $Pr[\omega_4] = 1 - \frac{4}{54}$

$\rightsquigarrow$ $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$

$Pr[\omega_1] = \frac{1}{54}$, $Pr[\omega_2] = \frac{1}{54}$, $Pr[\omega_3] = \frac{2}{54}$, $Pr[\omega_4] = \frac{50}{54}$

HA 2.2

Gegeben:



"KV Diagramm"

$1 - 0.7 - 0.29 = 0.01$

$\rightsquigarrow \Pr[N=2] = \Pr[\text{"nein"} \cap \text{"nicht bayrisch"}] = 0.49$

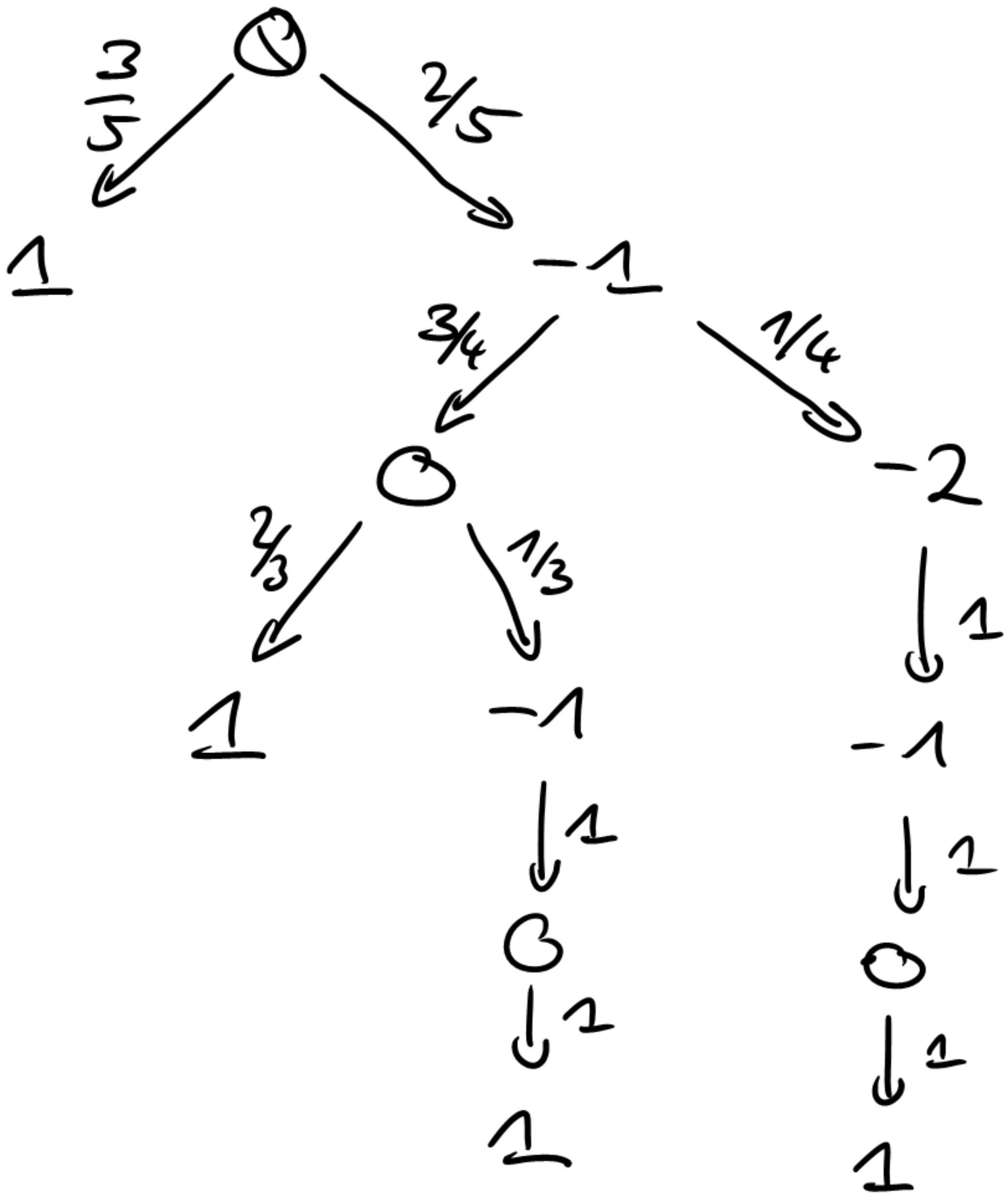
$\Pr[N=3] = \Pr[\text{"nein"} \cap \text{"bayrisch"}] = 0.21$

$\Pr[N=4] = \Pr[\text{"ja"} \cap \text{"nicht bayrisch"}] = 0.01$

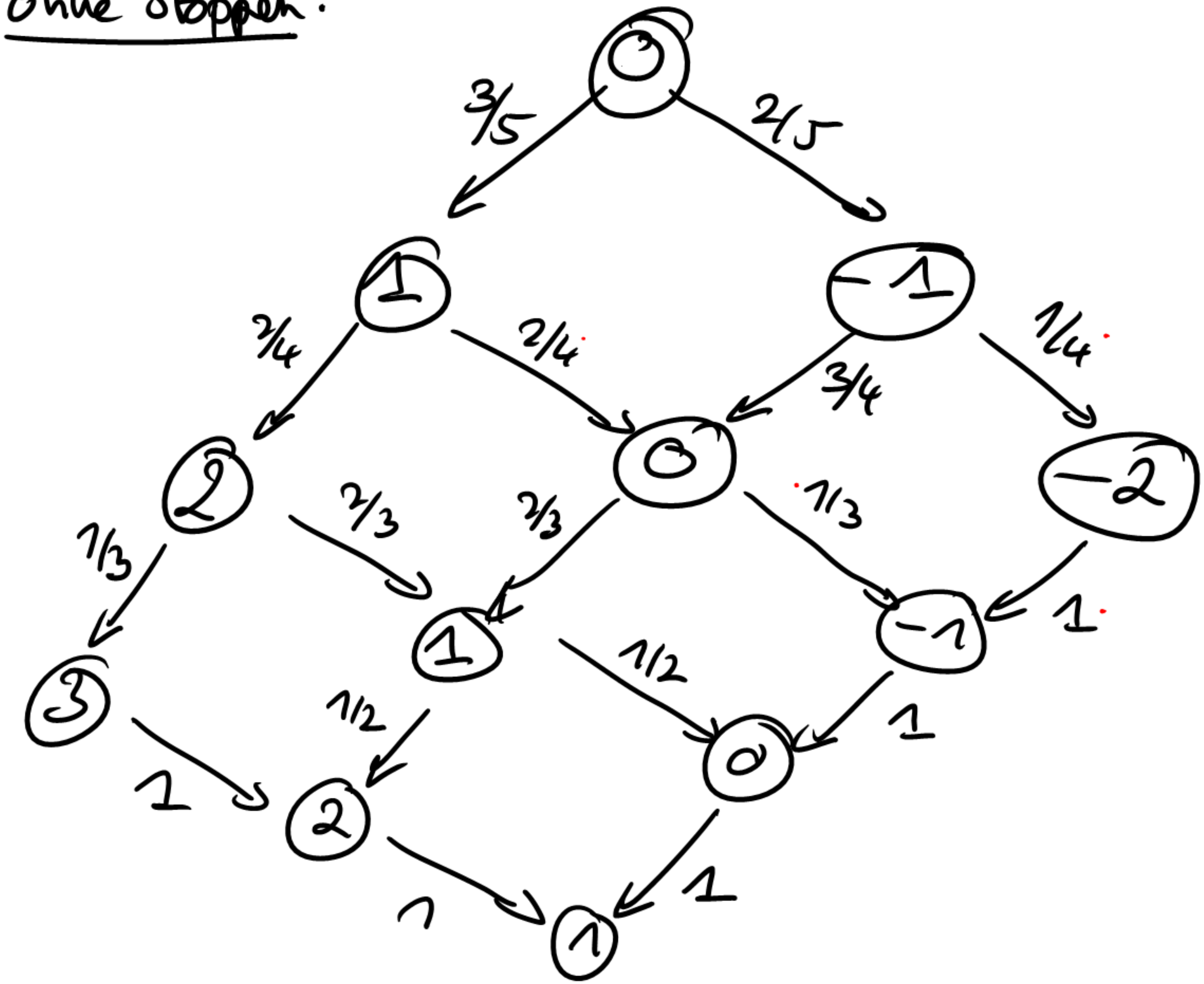
$\Pr[N=5] = \Pr[\text{"ja"} \cap \text{"bayrisch"}] = 0.29$

HA 2.3 (a)

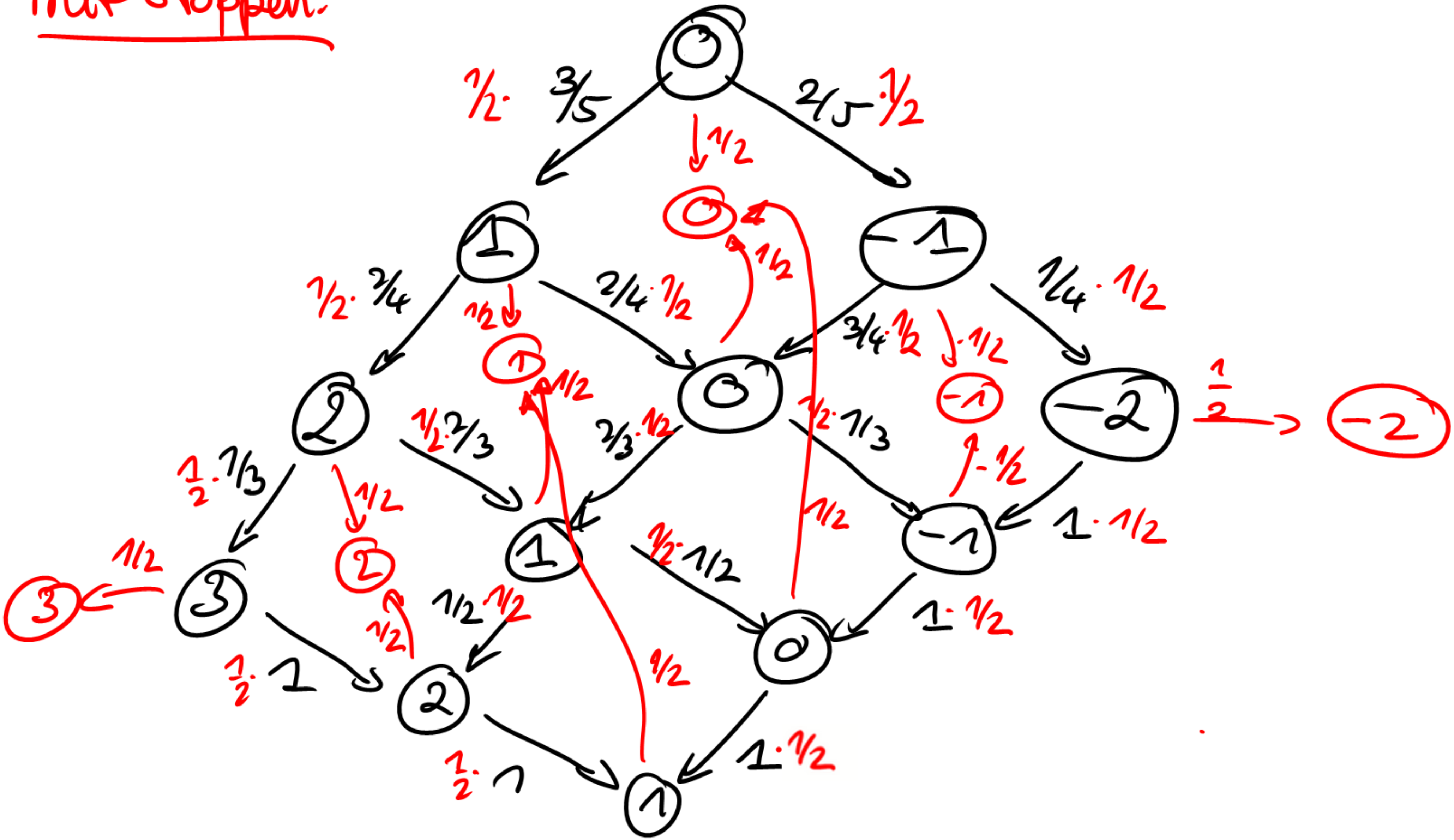
- $W_{G_A} = \{1\}$
- $Pr[G_A = 1] = 1$
- $F_{G_A}(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$
- $\mathbb{E}[G_A] = 1$
- $Var[G_A] = 0$



(b) <u>ohne Stoppen:</u>



mit Stoppen:



0
$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{5}$
$\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{2}$
1/2
1
0
-1
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{4}$
$\frac{2}{4}\cdot\frac{1}{2}$
$\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}$
2
1
0
-1
-2
-2
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}$
$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}$
$1\cdot\frac{1}{2}$
3
3
2
1
-1
$\frac{1}{2}\cdot 1$
$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$
$1\cdot\frac{1}{2}$
2
0
$\frac{1}{2}\cdot 1$
$1\cdot\frac{1}{2}$
1

$$\Pr[G_B = -2] = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \ldots$$

$$\Pr[G_B = -1] = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \ldots$$

$$\Pr[G_B = 0] = \frac{1}{2} + \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$+ \left(\frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right.$$

$$\left. + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\right) 2^{-4}$$

$\binom{4}{2}$ Pfade der Länge 5

$$= \ldots$$

$$\Pr[G_B = 2] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3$$

$$+ \left(\frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right.$$

$$\left. + \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \ldots$$

$$\Pr[G_B = 3] = \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \ldots$$

$$\Pr[G_B = 1] = 1 - \Pr[G_B \neq 1] = \ldots$$

$$\mathbb{E}[G_B] = \sum_{k=-2}^{3} k \Pr[G_B = k] = \ldots$$

Anmerkung:

$$\Pr[G_B = k]$$

$$= \sum_{\substack{i-j=k \\ 0 < i+j < 5 \\ 0 \le i \le 3 \ (\text{"}+1\text{"}) \\ 0 \le j \le 2 \ (\text{"}-1\text{"})}} \binom{i+j}{i} \underbrace{\frac{\frac{3!}{(3-i)!} \cdot \frac{2!}{(2-j)!}}{\frac{5!}{(5-i-j)!}}}_{= \frac{\binom{3}{i}\binom{2}{j}}{\binom{5}{i+j}}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{i+j+1}$$

$(i+j)$ mal „weiter"

einmal „stopp"

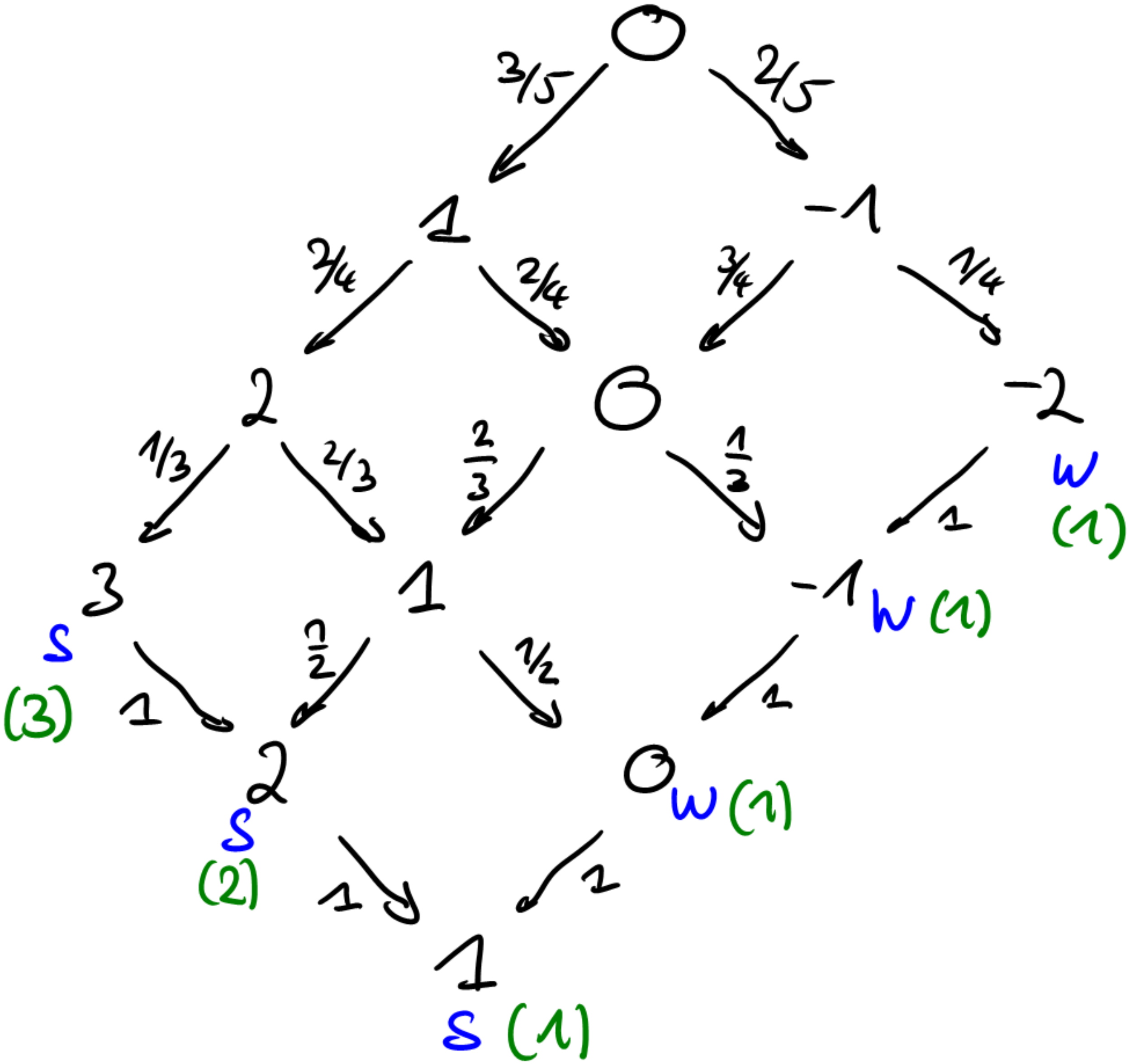
Anzahl Pfade der Länge $(i+j+1)$ mit genau i-mal "+1", j-mal "−1" und schließlich "stopp".

$$+ \delta_1(k) \cdot \frac{\binom{3}{3}\binom{2}{2}}{\binom{5}{5}} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5$$

nach 5-mal „weiter" ist Experiment zu ende

deswegen Sonderfall

(c)



"Bottom-up"

Berechnung der optimalen Strategie:

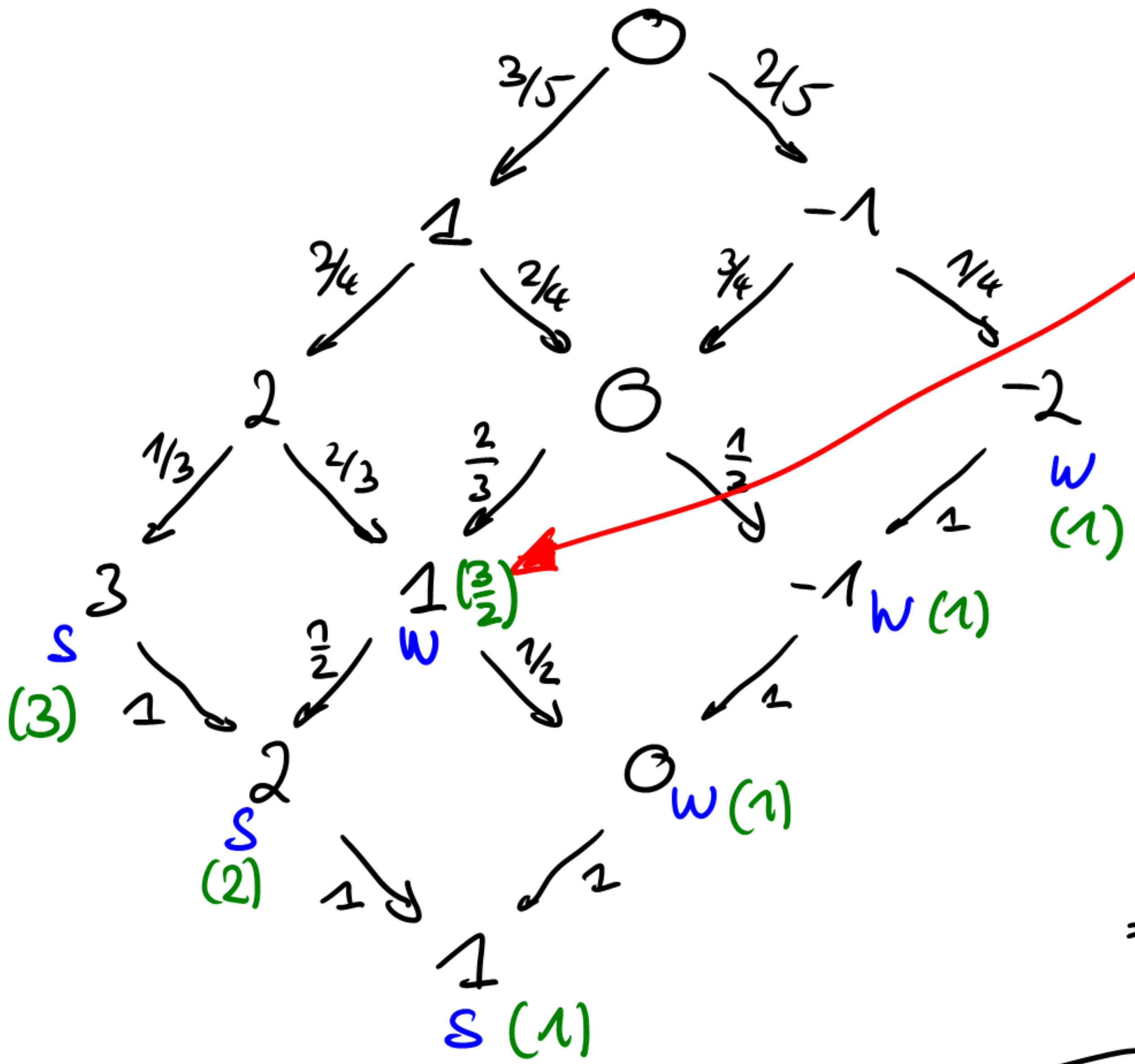
da Graph azyklisch, werden nur die optimalen Entscheidungen in den nachfolgenden Knoten benötigt.

(dynamische Programmierung)

W = weiter

S = stopp

erwarteter Gewinn



- p: W'keit zu stoppen

Damit:

- Erwarteter Gewinn $= 1$ mit W'keit p
- Erwarteter Gewinn $= 2$ mit W'keit $(1-p)\cdot\frac{1}{2}$
- Erwarteter Gewinn $= 1$ mit W'keit $(1-p)\cdot 1/2$

$\Rightarrow$ erwarteter Gewinn:

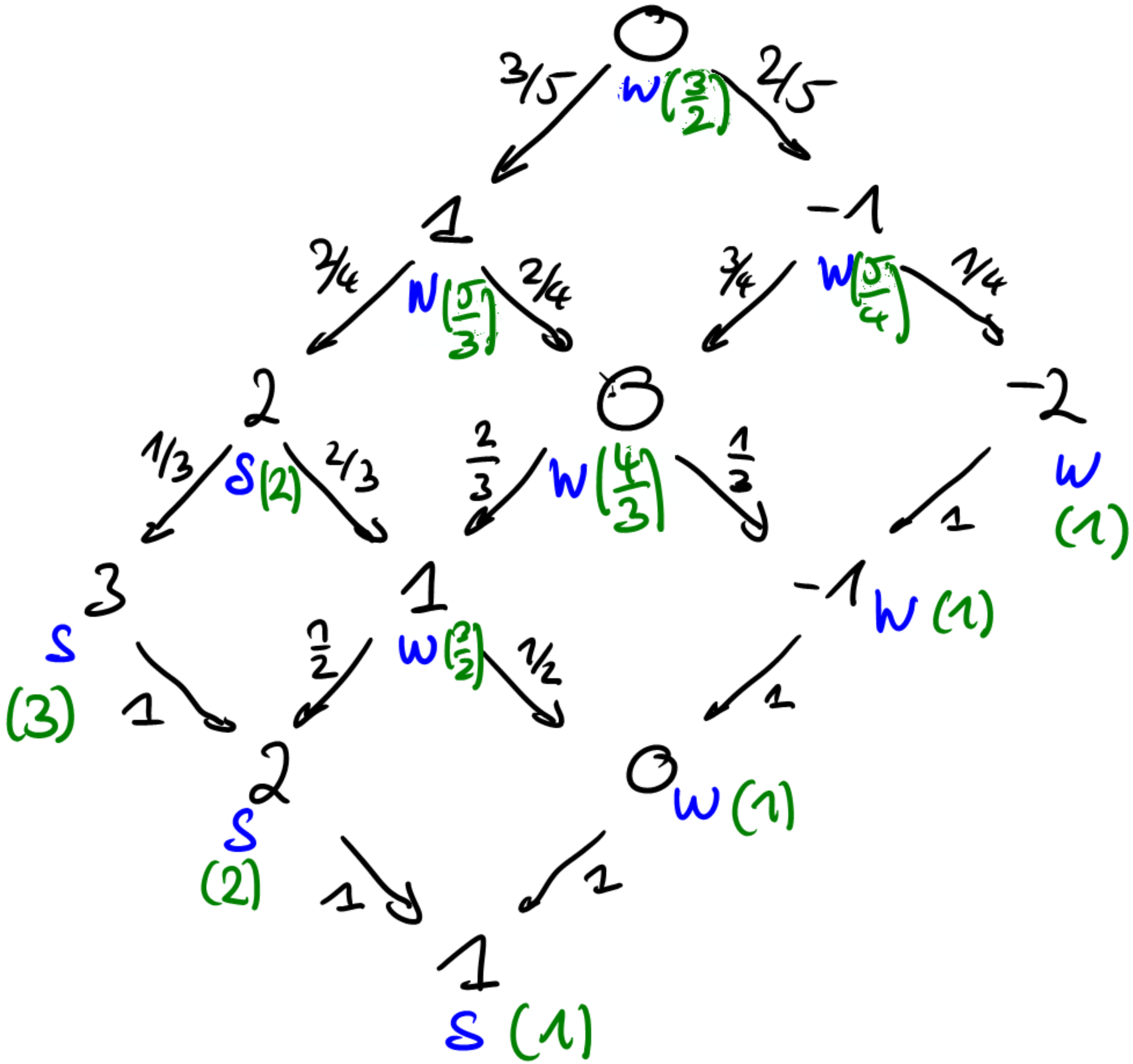
$\rightarrow p\cdot 1 + (1-p)\left(\frac{1}{2}\,2 + \frac{1}{2}\cdot 1\right)$

$= p\cdot 1 + (1-p)\,\frac{3}{2}$

$\rightarrow$ optimal: $p = 0$ (weiter)

$\rightarrow$ erw. Gew.: $\frac{3}{2} = \max\left(1, \frac{1}{2}2 + \frac{1}{2}\cdot 1\right)$

Stets lineare Funktion; maximal am Rand; also immer entweder S oder W.



Analog zu letzter Folie:

weiter, falls erwarteter Gewinn über Nachfolger größer als sicherer Gewinn in aktueller Situation, sonst stopp.

Erwarteter Gewinn dann das Maximum aus beiden Möglichkeiten