Lösung

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 9

Abgabe bis zum 27.6. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Aufgabe 9.1 **Abzugeben.** **2P+2P+2P**

Es sei $f\colon [0,1] \to [0,1]$ stetig. Weiterhin seien $X_1, Y_1, X_2, Y_2, \ldots$ unabhängige, jeweils auf $[0,1]$ gleichverteilte ZVen.

Für die Bernoulli-ZV Z_i gelte genau dann $Z_i = 1$, wenn $Y_i \le f(X_i)$.

(a) Zeigen Sie $\Pr[Z_i = 1] = \int_0^1 f(x)dx$.

Hinweis: Fassen Sie (X_i, Y_i) als Punkt in $[0,1]^2$ auf.

(b) Wie groß muss n mindestens sein, damit $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Z_i$ mit W'keit mindestens 0.95 das Integral $\int_0^1 f(x)dx$ mit einer Genauigkeit von mindestens 0.01 approximiert?

Bestimmen Sie approximativ einen möglichst kleinen Wert für n mittels

(i) der Chebyshev-Ungleichung.

(ii) der Approximation mit Hilfe des zentralgen Grenzwertsatzes.

Hinweis: Schauen Sie sich nochmals Beispiel 76 an.

Lösung:

(a)

$$
\begin{aligned}
& \Pr[Z_i = 1] \\
= & \Pr[Y_i \le f(X_i)] \\
= & \int_{\{(x,y)\in[0,1]^2 \mid y \le f(x)\}} dxdy \\
= & \int_{x=0}^1 \int_{y=0}^{f(x)} dydx \\
= & \int_{x=0}^1 f(x)dx
\end{aligned}
$$

(b) Setze $p := \int_{x=0}^1 f(x)dx$.

Damit $\mathbb{E}[Z_i] = p$, $\text{Var}[Z_i] = p(1-p) \le 1/4$, $\mathbb{E}[S_n/n] = p$, $\text{Var}[S_n/n] = \frac{p(1-p)}{n} \le \frac{1}{4n}$.

(i)

$$
\begin{aligned}
& \Pr\left[\left|\tfrac{1}{n}S_n - p\right| \ge 0.01\right] \\
\le & \frac{\text{Var}[S_n/n]}{10^{-4}} \\
= & \frac{p(1-p)}{n}10^4 \\
\le & \frac{1/4}{n}10^4 \\
\overset{!}{\le} & 0.05 \\
\rightsquigarrow & n \ge 5 \cdot 10^4.
\end{aligned}
$$

(ii)

$$\begin{aligned} & \Pr\left[\left|\tfrac{1}{n}S_n - p\right| \le 0.01\right] \\ = \; & \Pr\left[\frac{\left|\frac{1}{n}S_n - \mathbb{E}[S_n/n]\right|}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n/n]}} \le \frac{0.01}{\sqrt{\mathrm{Var}[S_n/n]}}\right] \\ \approx \; & 2\Phi(0.01\sqrt{4n}) - 1 \\ \overset{!}{\ge} \; & 0.95 \\ \rightsquigarrow \; & 0.01\sqrt{4n} \ge 2 \\ \rightsquigarrow \; & n \ge 10^4 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.2 **Abzugeben.** **3P**

In Xavers neu eröffneter Bar kommt es immer wieder vor, dass ein Gast ein Glas zerbricht. Da je nach Bestellung das Glas und damit der potentielle Schaden variiert, beschreibt Xaver den bei der i-ten Bestellung entstehenden Schaden mit Hilfe einer ZV S_i. Über die genau Verteilung von S_i weiß Xaver nichts, er setzt daher Erfahrungswerte für $\mu := \mathbb{E}[S_i]$ und $\sigma^2 := \mathrm{Var}[S_i]$ an. Er betrachtet die S_i als unabhängig und identisch verteilt mit Wertebereich $[0, \infty)$.

Um seine Unkosten durch zerbrochene Gläser abzudecken, will er pro Bestellung pauschal einen Aufpreis von $\mu + \alpha \cdot \sigma$ veranschlagen für ein zu bestimmendes $\alpha \ge 0$.

Bestimmen Sie approximativ ein minimales $\alpha > 0$, so dass bei jährlich $n = 10000$ Bestellungen mit einer W'keit von mindestens 0.99 die Kosten der zerbrochenen Gläser gedeckt werden.

Lösung:

$$\begin{aligned} & \Pr[\textstyle\sum_{i=1}^n S_i \le n(\mu + \sigma\alpha)] \ge 0.99 \\ \Leftrightarrow \; & \Pr\left[\frac{\sum_{i\in[n]} S_i - n\mu}{\sqrt{n}\alpha} \le \sqrt{n}\alpha\right] \ge 0.99 \\ \rightsquigarrow \; & \Phi(\sqrt{n}\alpha) \ge 0.99 \\ \rightsquigarrow \; & \sqrt{n}\alpha \ge 2.33 \\ \rightsquigarrow \; & \alpha \ge 0.0233 \end{aligned}$$

Aufgabe 9.3 **Abzugeben: (a), (c), (d)** **2P+2P+1P**

Es seien $X_1, X_2, \ldots$ unabhängig und jeweils $\mathrm{Po}(\lambda)$-verteilt. X sei $\mathcal{N}(0,1)$ verteilt.

(a) Zeigen Sie mittels Induktion, dass $S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n$ die folgende Dichte auf $\mathbb{N}_0$ hat:

$$\Pr[S_n = k] = \frac{(n\lambda)^k}{k!}e^{-n\lambda}.$$

Sei nun $\lambda = 1$.

(b) Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}[-\min(0, \frac{S_n - n}{\sqrt{n}})] = \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{n}.$$

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{E}[-\min(0, X)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

(d) Begründen Sie nun, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n!}\sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n = 1$.

Lösung:

(a) Fall $n = 1$ ist offensichtlich wahr.

Fall $n \to n+1$:

$$\begin{aligned} & \Pr[S_{n+1} = k] = \Pr[S_n + X_{n+1} = k] = \textstyle\sum_{i=0}^k \Pr[S_n = i]\Pr[X_{n+1} = k - i] \\ = \; & \textstyle\sum_{i=0}^k \frac{\lambda^i n^i}{i!}e^{-n\lambda}\frac{\lambda^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-(n+1)\lambda}\sum_{i=0}^k \binom{k}{i} n^i 1^{k-i} = \frac{\lambda^k(n+1)^k}{k!}e^{-(n+1)\lambda} \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[-\min(0, \tfrac{S_n - n}{\sqrt{n}})] \\
= & \textstyle\sum_{k\geq 0} -\min(0, \tfrac{S_n-n}{\sqrt{n}})\Pr[S_n = k] \\
= & \textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n-k}{\sqrt{n}} \frac{n^k}{k!} e^{-n} \\
= & \tfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-n} \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=0}^{n} k \frac{n^k}{k!} \right) \\
= & \tfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-n} \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{k=1}^{n} \frac{n^k}{(k-1)!} \right) \\
= & \tfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-n} \left(\textstyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n^{k+1}}{k!} - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{n^{i+1}}{i!} \right) \\
= & \tfrac{1}{\sqrt{n}} e^{-n} \frac{n^{n+1}}{n!}
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
& \mathbb{E}[-\min(0, X)] \\
= & \textstyle\int_{-\infty}^{\infty} -\min(0, x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\
= & \textstyle\int_{-\infty}^{0} -x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx \\
= & \textstyle\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{d}{dx} e^{-x^2/2} \right) dx \\
= & \tfrac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-x^2/2}]_{-\infty}^{0}.
\end{aligned}$$

(d) Nach ZGWS konvergiert die Verteilung von $\frac{S_n-n}{\sqrt{n}}$ gegen die Standardnormalverteilung, d.h., das zugehörige W'keitmaß konvergiert gegen das Maß der Standardnormalverteilung, womit auch $\mathbb{E}[-\min(0, \frac{S_n-n}{\sqrt{n}})]$ gegen $\mathbb{E}[-\min(0, X)]$.

Aufgabe 9.4 Abzugeben: (a) 3P

In jeder Teilaufgaben sollen Sie die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz des Abstands $D := \sqrt{X^2 + Y^2}$ eines zufällig gewählten Punktes (X, Y) bestimmen.

(a) Der Punkt (X, Y) sei gleichverteilt auf der Kreisscheibe $K_r := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq r^2\}$.

(b) Der Punkt (X, Y) sei gleichverteilt auf dem Dreick mit Eckpunkten $p_1 = (0, 1), p_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2}), p_3 = (-\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})$.

Aufgabe 9.5 Abzugeben. 3P

Ein quadratisches Plättchen der Kantenlänge 1 wird auf den Streifen $[-2, 2] \times \mathbb{R}$ geworfen. Wir interessieren uns für die Frage, mit welcher W'keit das Plättchen vollständig innerhalb des Streifens zu liegen kommt.

Die zufällige Lage des Plättchen ist durch zwei ZVen x und ϕ festgelegt:

- $x \in [-2, 2]$ gibt die x-Koordinate des Mittelpunkts an.
- $\phi \in [0, 2\pi]$ gibt die Rotation an.

Wir nehmen an, dass x und ϕ unabhängig und jeweils gleichverteilt auf ihren jeweiligen Wertebereichen sind.

Bestimmen Sie unter diesen Annahmen die gesuchte W'keit.

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass sich das Problem auf das Ereignis $\{(x, \phi) \in [0, 2] \times [0, \frac{\pi}{4}] \mid x + \frac{1}{\sqrt{2}} \cos(\phi) \leq 2\}$ reduzieren lässt.