Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 4
18. Mai 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Ein Übungsblatt in Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie umfasst vier Hausaufgaben für die es jeweils bis zu fünf Punkte gibt. Vereinfachend gehen wir davon aus, dass die Studenten ihre Punkte zufällig erzielen. Dabei entsprechen die Zufallsvariablen X_1 bis X_4 der jeweiligen Punktezahl pro Aufgabe. Die gemeinsame Dichtefunktion $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ ist gegeben durch $\prod_{i=1}^{4} \frac{15-x_i}{75}$ für alle ganzzahligen x_i zwischen 0 und 5. In allen anderen Fällen hat die Dichte den Wert 0.

1. Bestimmen Sie die Randdichten f_{X_1} bis f_{X_4}.
2. Sind die Zufallsvariablen X_1 bis X_4 unabhänig?
3. Berechnen Sie den Erwartungswert und die Varianz der insgesamt erzielten Hausaufgabenpunkte eines Übungsblattes.

Lösungsvorschlag

Die Wahrscheinlichkeit in der i-ten Aufgabe x_i Punkte zu erhalten berechnet sich aus der Summe über alle Punkteverteilungen mit $X_i = x_i$ und beliebigen X_j für $i \neq j$. Beispielsweise ist die Randdichte der ersten Aufgabe gegeben durch

$$f_{X_1}(x_1) = \sum_{0 \leq x_2, x_3, x_4 \leq 5} \prod_{i=1}^{4} \frac{15 - x_i}{75} = \frac{15 - x_1}{75} \cdot \left(\sum_{0 \leq x_2, x_3, x_4 \leq 5} \prod_{i=2}^{4} \frac{15 - x_i}{75} \right).$$

Wenn wir die Summe über x_2, x_3 und x_4 aufspalten können wir diese vereinfachen zu

$$\begin{aligned}
\sum_{0 \leq x_2, x_3, x_4 \leq 5} \prod_{i=2}^{4} \frac{15 - x_i}{5} &= \sum_{x_2=0}^{5} \sum_{x_3=0}^{5} \sum_{x_4=0}^{5} \left(\frac{15 - x_2}{75} \cdot \frac{15 - x_3}{75} \cdot \frac{15 - x_4}{75} \right) \\
&= \sum_{x_2=0}^{5} \frac{15 - x_2}{75} \cdot \left(\sum_{x_3=0}^{5} \cdot \frac{15 - x_3}{75} \cdot \left(\sum_{x_4=0}^{5} \frac{15 - x_4}{75} \right) \right) \\
&= \sum_{x_2=0}^{5} \frac{15 - x_2}{75} \cdot \left(\sum_{x_3=0}^{5} \cdot \frac{15 - x_3}{75} \right) \\
&= \sum_{x_2=0}^{5} \frac{15 - x_2}{75} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

Die Randdichte von $f_{X_1}(x_1)$ ist somit gleich $\frac{15-x_1}{75}$. Tatsächlich lässt sich diese Rechnung für beliebige Hausaufgaben verallgemeinern und wir erhalten

$$f_{X_i}(x_i) = \frac{15 - x_i}{75}.$$

Betrachten wir nun die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen. Zuerst sei angemerkt, dass die identische Verteilung von X_1 bis X_4 im Allgemeinen keinen Einfluss auf deren Unabhängigkeit hat. Allerdings können wir mit der folgenden Rechnung zeigen, dass die Zufallsvariablen in unserem Fall in der Tat unabhängig sind

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \prod_{i=1}^{4} \frac{15 - x_i}{75} = \prod_{i=1}^{4} f_{X_i}(x_i).$$

Zum Schluss müssen wir noch den Erwartungswert und die Varianz der insgesamt erzielten Punkte bestimmen. Dazu berechnen wir zuerst den Erwartungswert einer beliebigen Hausaufgabe i

$$\mathbb{E}[X_i] = \frac{15}{75} \cdot 0 + \frac{14}{75} \cdot 1 + \frac{13}{75} \cdot 2 + \frac{12}{75} \cdot 3 + \frac{11}{75} \cdot 4 + \frac{10}{75} \cdot 5 = \frac{34}{15} \approx 2{,}26667.$$

Gemäß der Linearität des Erwartungswertes ist die erwartete Anzahl der gesamten Punkte somit

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{4} X_i\right] = \sum_{i=1}^{4} \mathbb{E}[X_i] = 4 \cdot \frac{34}{15} = \frac{136}{15} \approx 9{,}06667.$$

Da es sich bei X_1 bis X_4 um unabhängige Zufallsvariablen handelt, können wir den selben Trick auch für die Bestimmung der Varianz ausnutzen. Dabei ist die Varianz einer einzelnen Hausaufgabe i gleich

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}[X_i] &= \mathbb{E}[X_i^2] - \mathbb{E}[X_i]^2 \\
&= \left(\frac{15}{75} \cdot 0 + \frac{14}{75} \cdot 1 + \frac{13}{75} \cdot 4 + \frac{12}{75} \cdot 9 + \frac{11}{75} \cdot 16 + \frac{10}{75} \cdot 25\right) - \left(\frac{34}{15}\right)^2 \\
&= \frac{644}{225} \\
&\approx 2{,}86222
\end{aligned}$$

und für alle Hausaufgaben gleich

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{4} X_i\right] = \sum_{i=1}^{4} \mathrm{Var}[X_i] = 4 \cdot \frac{644}{225} = \frac{2576}{225} \approx 11{,}44889.$$

Tutoraufgabe 2

Seien X und Y zwei unabhängige, diskrete und identisch verteilte Zufallsvariablen mit Dichtefunktion $f(x)$ und Verteilungsfunktion $F(x)$. Bestimmen Sie die Dichte und die Verteilung von $\max\{X, Y\}$ und $\min\{X, Y\}$ in Abhängigkeit von $f(x)$ und $F(x)$.

Lösungsvorschlag

Das Maximum von X und Y nimmt genau dann den Wert x an, wenn eine der beiden Zufallsvariablen gleich x und die andere höchstens x ist. Aus der Siebformel folgt

$$\Pr[\max\{X,Y\} = x] = \Pr[X = x, Y \leq x] + \Pr[X \leq x, Y = x] - \Pr[X = x, Y = x].$$

Da X und Y unabhängig sind, ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X = x, Y = x]$ gleich dem Produkt $\Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = x]$. Nach Satz 46 gilt dasselbe für $\Pr[X = x, Y \leq x]$ und $\Pr[X \leq x, Y = x]$. Insgesamt ist die Wahrscheinlichkeit $\Pr[\max\{X,Y\} = x]$ also

$$(\Pr[X = x] \cdot \Pr[Y \leq x]) + (\Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y = x]) - (\Pr[X = x] \cdot [Y = x]),$$

woraus wir wiederum unmittelbar die Dichte des Maximums ablesen können

$$f_{\max\{X,Y\}}(x) = (f(x) \cdot F(x)) + (f(x) \cdot F(x)) - (f(x) \cdot f(x)) = 2(f(x) \cdot F(x)) - f(x)^2.$$

Kommen wir nun zur Verteilung. Das Maximum von X und Y ist genau dann kleiner gleich x, wenn beide Zufallsvariablen kleiner gleich x sind. Die entsprechende Wahrscheinlichkeit beträgt

$$\Pr[\max\{X,Y\} \leq x] = \Pr[X \leq x, Y \leq x] = \Pr[X \leq x] \cdot \Pr[Y \leq x],$$

wobei wir auch hier die Unabhängigkeit von X und Y ausnutzen. Somit ist die Verteilung des Maximums gleich dem Quadrat der ursprünglichen Verteilungsfunktion

$$F_{\max\{X,Y\}}(x) = F(x)^2.$$

Den selben Ansatz können wir auch auf das Minimum anwenden. In diesem Fall lautet die gesuchte Dichte

$$\begin{aligned}
f_{\min\{X,Y\}}(x) &= \Pr[\min\{X,Y\} = x] \\
&= \Pr[X = x, Y > x] + \Pr[X > x, Y = x] + \Pr[X = x, Y = x] \\
&= \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y > x] + \Pr[X > x] \cdot \Pr[Y = x] + \Pr[X = x] \cdot \Pr[Y = x] \\
&= 2 \cdot f(x) \cdot (1 - F(x)) + f(x)^2
\end{aligned}$$

und die dazugehörige Verteilungsfunktion ist

$$\begin{aligned}
F_{\min\{X,Y\}}(x) &= \Pr[\min\{X,Y\} \leq x] \\
&= 1 - \Pr[X > x, Y > x] \\
&= 1 - (\Pr[X > x] \cdot \Pr[Y > x]) \\
&= 2F(x) - F(x)^2.
\end{aligned}$$

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten eine Familie von n unabhängigen und diskreten Zufallsvariablen X_i die jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{2}$ die Werte -1 oder 1 annehmen. Sei $f_n(x)$ die Dichte der Summe $\sum_{i=1}^{n} X_i$. Zeigen Sie anhand des Faltungssatzes aus der Vorlesung, dass für alle x zwischen $-n$ und n mit geradem $x + n$ gilt, $f_n(x) = 2^{-n} \cdot \binom{n}{\frac{x+n}{2}}$ und für alle anderen x die Dichtefunktion 0 ist.

Hinweis: Sie dürfen ohne Beweis davon ausgehen, dass für zwei disjunkte Indexmengen $I, J \subseteq [n]$ die Zufallsvariablen $\sum_{i \in I} X_i$ und $\sum_{j \in J} X_j$ ebenfalls unabhängig sind.

Lösungsvorschlag

Wir beweisen die Aussage durch vollständige Induktion über n. Im Induktionsanfang mit $n = 1$ erhalten wir die Dichtefunktion

$$f_1(x) = \begin{cases} 2^{-1} \cdot \binom{1}{0} = \frac{1}{2} & \text{für } x = -1 \\ 2^{-1} \cdot \binom{1}{1} = \frac{1}{2} & \text{für } x = 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases},$$

welche exakt der Dichte von X_1 und somit auch von $\sum_{i=1}^{1} X_i$ entspricht. Für den Induktionsschritt gehen wir davon aus, dass wir die Korrektheit für $f_n(x)$ bereits bewiesen haben und betrachten den Fall $n + 1$. Da die Zufallsvariablen $\sum_{i=1}^{n} X_i$ und X_{n+1} laut Hinweis unabhängig sind, lässt sich die Dichte von $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ per Faltung umformen zu

$$f_{n+1}(x) = (f_{X_{n+1}}(-1) \cdot f_n(x+1)) + (f_{X_{n+1}}(1) \cdot f_n(x-1)) = \frac{1}{2} \cdot (f_n(x+1) + f_n(x-1)).$$

Sei x zunächst zwischen $-n$ und n, so dass $(x + 1) + n$ bzw. $(x - 1) + n$ gerade ist. Aus der Induktionshypothese folgt eine Dichte von

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \frac{1}{2} \cdot \left(2^{-n} \cdot \binom{n}{\frac{(x+1)+n}{2}} + 2^{-n} \cdot \binom{n}{\frac{(x-1)+n}{2}} \right) \\ &= 2^{-(n+1)} \cdot \left(\binom{n}{\frac{x+(n+1)}{2}} + \binom{n}{\frac{x+(n+1)}{2} - 1} \right) \\ &= 2^{-(n+1)} \binom{n+1}{\frac{x+(n+1)}{2}}. \end{aligned}$$

Im Sonderfall $x = -(n+1)$ nimmt die Funktion $f_n(x-1)$ den Wert 0 an, während $f_n(x+1)$ gleich $2^{-n} \cdot \binom{n}{0}$ ist. Die entsprechende Dichte ist demnach

$$f_{n+1}(-(n+1)) = \frac{1}{2} \cdot \left(2^{-n} \cdot \binom{n}{0} + 2^{-n} \cdot 0 \right) = 2^{-(n+1)} \binom{n+1}{0}.$$

Ähnlich verhält es sich auch für $x = n + 1$

$$f_{n+1}(n+1) = \frac{1}{2} \cdot \left(2^{-n} \cdot 0 + 2^{-n} \cdot \binom{n}{n} \right) = 2^{-(n+1)} \binom{n+1}{n+1}.$$

Als letztes müssen wir noch die Möglichkeit in Betracht ziehen, dass x keine Zahl zwischen $-(n+1)$ und $n+1$ mit geradem $x+(n+1)$ ist. Sollte dies der Fall sein, dann sind sowohl $f_n(x-1)$ als auch $f_n(x+1)$ gleich 0 was wiederum bedeutet, dass auch $f_{n+1}(x)$ gleich 0 ist. Zusammengefasst ist die Dichte von $\sum_{i=1}^{n+1} X_i$ also

$$f_{n+1}(x) = \begin{cases} 2^{-(n+1)} \binom{n+1}{\frac{x+(n+1)}{2}} & \text{falls } -(n+1) \leq x \leq n+1 \text{ mit geradem } x + (n+1) \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

was unseren Beweis vervollständigt.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Seien X und Y zwei diskrete Zufallsvariablen, so dass die Erwartungswerte $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ existieren. Die Kovarianz ist definiert als $\mathrm{Cov}[X, Y] = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])]$.

1. Zeigen Sie, dass die Kovarianz von X und Y gleich 0 ist, falls es sich um unabhängige Zufallsvariablen handelt.

2. Neben der Unabhängigkeit von X und Y nehmen wir im Folgenden zusätzlich an, dass X und Y identisch verteilt sind. Berechnen Sie den Wert von $\mathrm{Cov}[X+Y, X-Y]$.

3. Definieren Sie nun einen passenden diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ mit unabhängigen und identisch verteilten X und Y, so dass $X+Y$ und $X-Y$ abhängig sind.

Lösungsvorschlag

Durch Einsetzen der Definition können wir die Kovarianz umformen zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X, Y] &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] \\
&= \mathbb{E}[X \cdot Y - \mathbb{E}[X] \cdot Y - \mathbb{E}[Y] \cdot X + \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[Y])] \\
&= \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] - \mathbb{E}[Y] \cdot \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] \\
&= \mathbb{E}[X \cdot Y] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].
\end{aligned}$$

Da X und Y unabhängig sind, entspricht $\mathbb{E}[X \cdot Y]$ gemäß der Multiplikativität des Erwartungswertes dem Produkt von $\mathbb{E}[X]$ und $\mathbb{E}[Y]$. Folglich muss die Kovarianz 0 sein. Für die zweite Teilaufgabe rechnen wir wieder nach Definition und erhalten

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}[X+Y, X-Y] &= \mathbb{E}[(X+Y) \cdot (X-Y)] - (\mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[X-Y]) \\
&= \mathbb{E}[X^2 - Y^2] - (\mathbb{E}[X+Y] \cdot \mathbb{E}[X-Y]) \\
&= (\mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2]) - (\mathbb{E}[X+Y] \cdot (\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[Y])).
\end{aligned}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass X und Y identisch verteilt sind, gilt sowohl $\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[Y]$ als auch $\mathbb{E}[X^2] = \mathbb{E}[Y^2]$. Insgesamt ist die Kovarianz von $X+Y$ und $X-Y$ demnach

$$\mathrm{Cov}[X+Y, X-Y] = 0 - (\mathbb{E}[X+Y] \cdot 0) = 0.$$

Für die letzte Teilaufgabe definieren wir einen Wahrscheinlichkeitsraum mit der Ergebnismenge $\Omega = \{a, b, c, d\}$, wobei jedes Elementarereignis gleich wahrscheinlich ist. Außerdem definieren wir die Zufallsvariablen X und Y als

$$X(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = a, b \\ 1 & \text{für } \omega = c, d \end{cases} \quad \text{und} \quad Y(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{für } \omega = a, c \\ 1 & \text{für } \omega = b, d \end{cases}.$$

Durch Nachrechnen kann man sich leicht davon überzeugen, dass X und Y sowohl identisch verteilt als auch unabhängig sind. Des Weiteren lässt sich beobachten, dass $X+Y$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$ den Wert 2 annimmt. Andererseits nimmt $X-Y$ mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ den Wert 0 an. Da die Wahrscheinlichkeit, dass beide Ereignisse gleichzeitig eintreten gleich $\frac{1}{4}$ ist, können $X+Y$ und $X-Y$ nicht unabhängig sein, was man an der folgenden Gleichung sieht

$$\Pr[X+Y=2, X-Y=0] = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = \Pr[X+Y=2] \cdot \Pr[X-Y=0].$$

Dieses Resultat ist insofern interessant, als dass es zeigt, dass die Kovarianz auch für zwei abhängige Zufallsvariablen 0 sein kann.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten ein Deck aus 52 Karten mit den Farben $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\spadesuit$ und $\clubsuit$ sowie den Werten von 1 bis 10, B, D und K. Angenommen Sie ziehen eine Hand aus vier verschiedenen Karten und gruppieren diese nach ihrer Farbe bzw. ihrem Wert. Die Zufallsvariablen X und Y entsprechen jeweils der Anzahl an Karten in der größten gleichfarbigen bzw. gleichwertigen Gruppe. Ziehen Sie bspw. die Hand $\{\diamondsuit 4, \heartsuit 4, \heartsuit B, \clubsuit 4\}$ so gilt $X = 2$ und $Y = 3$. Bestimmen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$ sowie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$ unter der Annahme, dass jede Hand gleich wahrscheinlich ist.

Lösungsvorschlag

Wir bestimmen zunächst die Randdichte von X. Nachdem jede der $\binom{52}{4}$ möglichen Hände gleich wahrscheinlich ist, müssen wir lediglich die relative Häufigkeit der gesuchten Ereignisse ausrechnen. Für den Fall, dass jede Karte eine unterschiedliche Farbe hat, gibt es bspw. 13^4 Möglichkeiten und wir folgern, dass

$$f_X(1) = \frac{13^4}{\binom{52}{4}} = \frac{2197}{20825} \approx 0{,}10550.$$

Des Weiteren gibt es $4 \cdot \binom{13}{4}$ Möglichkeiten, dass alle Karten dieselbe Farbe haben, wobei der erste Faktor der Farbe und der zweite den Werten entspricht. Somit gilt

$$f_X(4) = \frac{4 \cdot \binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} = \frac{44}{4165} \approx 0{,}01056\ .$$

Nun analysieren wir den Fall, dass drei gleichfarbigen Karten gezogen werden. Es existieren 4 Möglichkeiten, die Farbe der Dreiergruppe zu wählen und 3 Möglichkeiten für die Farbe der Einsergruppe. Außerdem können die Werte der Dreiergruppe auf $\binom{13}{3}$ Arten kombiniert werden, wohingegen die Einsergruppe nur 13 Kombinationen zulässt. Diese Überlegung ergibt eine Wahrscheinlichkeit von

$$f_X(3) = \frac{(4 \cdot \binom{13}{3}) \cdot (3 \cdot 13)}{\binom{52}{4}} = \frac{3432}{20825} \approx 0{,}16480.$$

Gibt es zwei gleichfarbige Karten, so kann es entweder eine weitere Zweiergruppe oder zwei Einsergruppen geben. Mit ähnlicher Argumentation wie oben folgt

$$f_X(2) = \frac{(4 \cdot \binom{13}{2}) \cdot (\binom{3}{2} \cdot 13^2) + (\binom{4}{2} \cdot \binom{13}{2}^2)}{\binom{52}{4}} = \frac{14976}{20825} \approx 0{,}71914.$$

Da eine Hand nur aus 4 Karten besteht, ist die Randdichte von X somit vollständig beschrieben. Die Randdichte von Y kann mit der gleichen Herangehensweise berechnet werden

$$\begin{aligned}
f_Y(1) &= \frac{\binom{13}{4} \cdot 4^4}{\binom{52}{4}} = \frac{2816}{4165} \approx 0{,}67611,\\
f_Y(2) &= \frac{(13 \cdot \binom{4}{2}) \cdot (\binom{12}{2} \cdot 4^2) + (\binom{13}{2} \cdot \binom{4}{2}^2)}{\binom{52}{4}} = \frac{936}{2975} \approx 0{,}31462,\\
f_Y(3) &= \frac{(13 \cdot \binom{4}{3}) \cdot (12 \cdot 4)}{\binom{52}{4}} = \frac{192}{20825} \approx 0{,}00922,\\
f_Y(4) &= \frac{13}{\binom{52}{4}} = \frac{1}{20825} \approx 0{,}00005.
\end{aligned}$$

Kommen wir nun zur gemeinsamen Dichte von X und Y. Zunächst stellen wir fest, dass wenn x Karten die gleiche Farbe haben, es höchstens $4 - x + 1$ Karten mit gleichem Wert geben kann. Folglich ist $f_{X,Y}(x, y) = 0$ sobald $y > 4 - x + 1$. Um die restlichen Werte der Dichtefunktion zu bestimmen, müssen wir allerdings ein paar weitere Hände berechnen. So ist die Wahrscheinlichkeit, dass jede Karte eine unterschiedliche Farbe und einen unterschiedlichen Wert hat gegeben durch

$$f_{X,Y}(1, 1) = \frac{13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10}{270725} = \frac{264}{4165} \approx 0{,}06339.$$

Des Weiteren ist die Wahrscheinlichkeit für durchwegs verschiedene Farben aber drei Karten gleichen Wertes

$$f_{X,Y}(1, 3) = \frac{(\binom{4}{3} \cdot 13) \cdot 12}{270725} = \frac{48}{20825} \approx 0{,}00230$$

und die Wahrscheinlichkeit für verschiedene Werte aber drei Karten gleicher Farbe

$$f_{X,Y}(3, 1) = \frac{(4 \cdot \binom{13}{3}) \cdot (3 \cdot 10)}{270725} = \frac{528}{4165} \approx 0{,}12677.$$

Da sich die gemeinsame Dichte für einen festen Parameter jeweils zur entsprechenden Randdichte aufaddiert, können wir die verbleibenden Werte ähnlich wie bei Sudoku aus den bisherigen Ergebnissen herleiten. Zur besseren Übersicht sind in der folgenden Tabelle die auf kombinatorischen Weg bestimmen Dichten abgehakt.

$f_{X,Y}(x, y)$	1	2	3	4
1	$\frac{264}{4165} \approx 0{,}06339$✓	$\frac{828}{20825} \approx 0{,}03976$	$\frac{48}{20825} \approx 0{,}00230$✓	$\frac{1}{20825} \approx 0{,}00005$
2	$\frac{396}{833} \approx 0{,}47539$	$\frac{4932}{20825} \approx 0{,}23683$	$\frac{144}{20825} \approx 0{,}00691$	0✓
3	$\frac{528}{4165} \approx 0{,}12677$✓	$\frac{792}{20825} \approx 0{,}03803$	0✓	0✓
4	$\frac{44}{4165} \approx 0{,}01056$	0✓	0✓	0✓

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage. Zwei diskrete Zufallsvariablen X und Y sind genau dann unabhängig, wenn X^2 und Y^2 unabhängig sind.

Lösungsvorschlag

Sei X_i eine Familie von n unabhängigen und diskreten Zufallsvariablen. Satz 47 der Vorlesung besagt, dass für beliebige Funktionen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Familie $f_i(X_i)$ ebenfalls unabhängig ist. Somit impliziert die Unabhängigkeit von X und Y auch die Unabhängigkeit von X^2 und Y^2. Da die Quadratfunktion keine Umkehrfunktion auf $\mathbb{R}$ besitzt, können wir den Satz allerdings nicht in die Gegenrichtung anwenden. Tatsächlich lässt sich ein Beispiel finden, bei dem X^2 und Y^2 unabhängig sind obwohl X und Y es nicht sind. Seien hierfür X und Y Zufallsvariablen mit dem Wertebereich $\{-1, 0, 1\}$ und der folgenden gemeinsamen Dichtefunktion $f_{X,Y}(x, y)$.

$f_{X,Y}(x, y)$	-1	0	1
-1	$\frac{1}{4}$	0	0
0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	0	$\frac{1}{4}$	0

Wir zeigen anhand der Werte $x = -1$ und $y = 0$, dass X und Y nicht unabhängig sind

$$f_{X,Y}(-1, 0) = 0 \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} = f_X(-1) \cdot f_Y(0).$$

Betrachten wir hingegen das Quadrat der Zufallsvariablen, so zeichnet sich ein anderes Bild. Die folgende Tabelle zeigt die zugehörige Dichtefunktion $f_{X^2,Y^2}(x, y)$.

$f_{X^2,Y^2}(x, y)$	0	1
0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$
1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Wir können uns leicht davon überzeugen, dass $f_{X^2,Y^2}(x, y)$ genau dem Produkt von $f_{X^2}(x)$ und $f_{Y^2}(y)$ entspricht. Bei X^2 und Y^2 handelt es sich demnach um unabhängige Zufallsvariablen, was unser Gegenbeispiel vervollständigt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Übungsleitung in Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie wertet eine Klausur als erfolgreich, wenn der Notenschnitt besser als im vorherigen und darauffolgenden Jahr ist. Um die Häufigkeit solcher Klausuren zu ermitteln, betrachten wir $n + 2$ aufeinanderfolgenden Klausuren. Dabei wird jeder Klausur ein eindeutiger Rang zwischen 1 und $n + 2$ entsprechend des Notenschnitts zugewiesen. Der Einfachheit halber gehen wir im Folgenden davon aus, dass jede Rangfolge gleich wahrscheinlich ist und keine identischen Notenschnitte vorkommen.

1. Sei X_i eine Indikatorvariable, die für alle $1 < i < n + 2$ genau dann 1 ist, wenn die i-te Klausur erfolgreich ist. Bestimmen Sie $\mathbb{E}[\sum_{i=2}^{n+1} X_i]$.

2. Berechnen Sie außerdem den Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i \cdot X_j]$ in Abhängigkeit von $|i - j|$ für beliebige $1 < i, j < n + 2$.

3. Nutzen Sie Ihre Ergebnisse aus der vorherigen Teilaufgabe um den Wert von $\mathrm{Var}[\sum_{i=2}^{n+1} X_i]$ für $n \geq 3$ zu ermitteln.

Hinweis: Sie dürfen die Identität $\mathrm{Var}(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{1 \geq i,j \geq n} \mathrm{Cov}[X_i, X_j]$ ohne Beweis benutzen.

Lösungsvorschlag

Für die erste Teilaufgabe bestimmen wir zunächst den Erwartungswert einer einzelnen Klausur i. Sei ρ_i der Rang von i. Damit die Klausur als erfolgreich gilt muss sowohl ρ_{i-1} als auch ρ_{i+1} kleiner als ρ_i sein. Da jede Rangfolge mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt, gilt dies auch für jede strenge Totalordnung über ρ_{i-1}, ρ_i und ρ_{i+1}. Insgesamt gibt es genau 3! solcher Ordnungen, wobei lediglich $\rho_{i-1} < \rho_{i+1} < \rho_i$ und $\rho_{i+1} < \rho_{i-1} < \rho_i$ die geforderte Bedingung erfüllen. Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i]$ ist also $\frac{1}{3}$. Aus der Linearität des Erwartungswertes folgt

$$\mathbb{E}\left[\sum_{i=2}^{n+1} X_i\right] = \sum_{i=2}^{n+1} \mathbb{E}[X_i] = \sum_{i=2}^{n+1} \frac{1}{3} = \frac{n}{3}.$$

In der zweiten Aufgabe ist nach dem Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i \cdot X_j]$ gefragt. Man beachte, dass der Ausdruck $X_i \cdot X_j$ einer neuen Indikatorvariable entspricht die angibt, ob sowohl i als auch j erfolgreiche Klausuren sind. Sollten i und j identisch sein, so handelt es sich um die gleiche Klausur und es gilt

$$\mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = \mathbb{E}[X_i] = \frac{1}{3} \text{ für } |i - j| = 0.$$

Im Fall von aufeinanderfolgenden Klausuren kann per Definition höchstens eine der beiden Klausuren erfolgreich sein, was wiederum bedeutet, dass

$$\mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = 0 \text{ für } |i - j| = 1.$$

Kommen wir nun zum Fall, dass sich genau eine weitere Klausur, die wir im Folgenden mit k bezeichnen werden, zwischen i und j befindet. Wie in der ersten Teilaufgabe betrachten wir alle strengen Totalordnungen über den Rängen ρ_{i-1}, ρ_i, ρ_k, ρ_j und ρ_{j+1}. Von den insgesamt 5! möglichen Ordnungen gibt es lediglich 16 bei denen i und j erfolgreiche Klausuren sind. Dies sieht man am einfachsten so. Einerseits kann es sein, dass i und j die beiden höchsten Ränge haben. Da die Zuweisung der restlichen drei Ränge beliebig erfolgen darf, gibt es hierfür $2 \cdot 3!$ Ordnungen. Andererseits kann es sein, dass i und j der höchste und dritthöchste Rang zugewiesen wird. In diesem Fall ist die Klausur mit dem zweithöchsten Rang eindeutig bestimmt, nämlich die neben der Klausur mit dem höchsten Rang, aber nicht k. Die verbleibenden zwei Ränge lassen sich wieder beliebig verteilen und wir erhalten $2 \cdot 2!$ mögliche Ordnungen. Nachdem entweder i oder j den höchsten Rang haben muss und keine der beiden Klausuren einen kleineren Rang als den dritthöchsten haben darf, deckt unsere Fallunterscheidung alle möglichen Ordnungen ab. Wir berechnen mithilfe dieser Überlegungen $\mathbb{E}[X_i \cdot X_j]$ wie folgt

$$\mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = \frac{2 \cdot 3! + 2 \cdot 2!}{5!} = \frac{2}{15} \text{ für } |i - j| = 2.$$

Sollte der Abstand zwischen i und j größer als 2 sein, könne sich deren Nachbarschaften nicht mehr überschneiden. Folglich sind X_i und X_j unabhängig und es gilt

$$\mathbb{E}[X_i \cdot X_j] = \mathbb{E}[X_i] \cdot \mathbb{E}[X_j] = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9} \text{ für } |i - j| > 2.$$

Mit diesem Ergebnis lässt sich nun auch die letzte Aufgabe einfach lösen. Laut Hinweis ist die gesuchte Varianz identisch zu

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{i=2}^{n+1} X_i\right] = \sum_{1<i,j<n+2} \operatorname{Cov}[X_i, X_j].$$

Des Weiteren ist die Kovarianz von X_i und X_j definiert als

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}[X_i, X_j] &= \mathbb{E}[(X_i - \mathbb{E}[X_i]) \cdot (X_j - \mathbb{E}[X_j])] \\
&= \mathbb{E}\left[(X_i - \frac{1}{3}) \cdot (X_j - \frac{1}{3})\right] \\
&= \mathbb{E}[X_i \cdot X_j] - \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}[X_i] - \frac{1}{3} \cdot \mathbb{E}[X_j] + \frac{1}{9} \\
&= \mathbb{E}[X_i \cdot X_j] - \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Für $n \geq 3$ gibt es n Kombinationen von i und j mit Abstand 0, $2(n-1)$ Kombinationen mit Abstand 1 und $2(n-2)$ Kombinationen mit Abstand 2. Da die Kovarianz in allen anderen Fällen 0 ist, erhalten wir letztendlich

$$\operatorname{Var}\left[\sum_{i=2}^{n+1} X_i\right] = n \cdot \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{9}\right) + 2(n-1) \cdot \left(0 - \frac{1}{9}\right) + 2(n-2) \cdot \left(\frac{2}{15} - \frac{1}{9}\right) = \frac{2n+6}{45}.$$