Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 12
3. August 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Aufgabe 1

Seien $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ die Zufallsvariablen einer zeithomogenen Markov-Kette M über den Zuständen $Q = \{1, 2, 3\}$ mit Übergangsmatrix

$$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0,25 & 0,75 \\ 0 & 0,75 & 0,25 \end{pmatrix}.$$

1. Bestimmen Sie die Menge aller stationären Verteilungen von M.
2. Geben Sie die Menge aller transienten Zustände von M an.
3. Geben Sie die Übergangsmatrix einer zeithomogenen Markov-Kette B mit drei Zuständen s_1, s_2, s_3 an, so dass s_1 transient ist, s_2 absorbierend ist und s_3 rekurrent ist.

Lösung

1. Gesucht ist die Menge aller Vektoren $\pi = (c_1, c_2, c_3)$ mit $c_i \geq 0$, so dass gilt

   $$c_1 + c_2 + c_3 = 1 \qquad \text{und} \qquad \pi = \pi \cdot P\,.$$

   Daraus erhalten wir, dass π stationär ist genau dann, wenn gilt

   $$0 \leq c_1 \leq 1 \qquad \text{und} \qquad c_2 = \frac{1-c_1}{2} \qquad \text{und} \qquad c_3 = \frac{1-c_1}{2}\,.$$

   In Vektordarstellung:

   $$\pi = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1\,.$$

   Bemerkung: P ist reduzibel und deshalb nicht ergodisch. Entsprechend gibt es keine Eindeutigkeit der stationären Verteilungen.

2. Aus dem Übergangsgraphen der Markov-Kette liest man ab, dass alle Zustände rekurrent sind, die Menge der transienten Zustände also leer ist.

3. Da absorbierende Zustände auch rekurrent sind, genügt es 2 absorbierende und 1 transienten Zustand zu konstruieren. Eines der möglichen Beispiele ist

   $$P = (p_{i,j}) = \begin{pmatrix} 0,75 & 0,25 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2

Die Zufallsvariablen X_0, X_1, $X_2, \ldots$ seien unabhängig und geometrisch verteilt mit Parameter $0 < p < 1$.

1. Zeigen Sie, dass es sich bei $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ mit $Y_t := \min\{X_1, \ldots, X_t\}$ um eine Markov-Kette handelt. Wie lauten die Übergangswahrscheinlichkeiten?

2. Stellt $Z_t := \max\{X_1, \ldots, X_t\}$ ebenfalls eine Markov-Kette dar? Begründung!

Lösung

1. (siehe auch Schickinger/Steger Aufgabe 4.1)

   Wir zeigen, dass $(Y_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ eine unendliche Markov-Kette mit Zustandsraum $S = \mathbb{N}$ darstellt, wie folgt.

   Der Wert von Y_t hängt nur von Y_{t-1} und X_t ab, nicht aber von $Y_{t'}$ für $t' \leq t - 2$. Damit ist die Markov-Bedingung erfüllt.

   Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten:
   Es gilt $p_{ij} = 0$ für alle $j > i$, weil das Minimum nicht steigen kann. Weiter gilt $p_{ii} = \Pr[X_t \geq i]$, weil das schon erreichte Minimum nicht unterboten wird, wenn das Ereignis $X_t \geq i$ eintritt. Für $j < i$ gilt $p_{ij} = \Pr[X_t = j]$.

   Bemerkung: Offenbar haben wir keinen wesentlichen Gebrauch von den Eigenschaften einer geometrischen Verteilung gemacht.

2. Auch $(Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$ ist eine Markov-Kette.

   Bestimmung der Übergangswahrscheinlichkeiten:
   Es gelten $p_{ii} = \Pr[X_t \leq i]$, $p_{ij} = 0$ für $j < i$ und $p_{ij} = \Pr[X_t = j]$ für $j > i$.

   Bemerkung: Da die geometrische Verteilung unbeschränkt ist, steigt das Maximum in jedem Schritt mit positiver Wahrscheinlichkeit und es folgt, dass alle Zustände transient sind.

Aufgabe 3

Auf einem Zentralrechner treffen Jobs zur Bearbeitung ein. Hierbei unterscheiden wir rechenintensive und einfache Jobs. In jedem Schritt handelt es sich unabhängig von allen anderen Jobs mit Wahrscheinlichkeit p um einen rechenintensiven Job. Da der Server nicht ausreichend dimensioniert ist, stürzt das System ab, wenn zwei rechenintensive Jobs aufeinander folgen.
Wie viele Schritte vergehen bis zu diesem Moment im Mittel?
Lösen Sie die Aufgabe mit Hilfe einer geeigneten Markov-Kette.

Lösung

(siehe auch Schickinger/Steger Aufgabe 4.5)
Wir modellieren den Prozess durch eine Markov-Kette mit den Zuständen 0 („der letzte Prozess war nicht rechenintensiv“), 1 („der letzte Prozess war rechenintensiv“), 2 („die beiden letzten Prozesse waren rechenintensiv“).

Berechnung der erwarteten Übergangszeit h_{02}:

$$\begin{aligned} h_{02} &= 1 + (1-p) \cdot h_{02} + p \cdot h_{12}, \\ h_{12} &= 1 + (1-p) \cdot h_{02} . \end{aligned}$$

Es folgt $h_{02} = \frac{(1+p)}{p^2}$.

Aufgabe 4

Anton (A) und Bodo (B) spielen das folgende Spiel mit einem fairen Würfel.
Wenn A an der Reihe ist, würfelt er so lange mit einem der Würfel, bis er entweder eine ungerade Zahl würfelt (dann ist B an der Reihe) oder drei Mal hintereinander eine gerade Zahl geworfen hat (dann ist das Spiel zu Ende und A hat gewonnen).
Ist B an der Reihe, so würfelt er einmal. Zeigt der Würfel eine Sechs, so ist das Spiel zu Ende und B hat gewonnen. Ansonsten ist A wieder an der Reihe. A beginnt.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der A gewinnt. Wie lange dauert das Spiel im Mittel?

Lösung

(siehe auch Schickinger/Steger Aufgabe 4.9)
Das Spiel läßt sich mit einer Markov-Kette mit Zuständen A_g bzw. B_g, wenn A bzw. B gewinnt, und Zuständen A_w bzw. B_w, wenn A bzw. B würfelt. Für die Ankunftswahrscheinlichkeiten stellt man folgende Gleichungen auf:

$$f_{A_w,A_g} = \tfrac{1}{8} + \tfrac{7}{8} \cdot f_{B_w,A_g} \quad \text{und} \quad f_{B_w,A_g} = \tfrac{5}{6} \cdot f_{A_w,A_g} .$$

Lösung: $f_{A_w,A_g} = \frac{6}{13}$.

A gewinnt also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{6}{13}$.

Bezeichnen wir mit h_A bzw. h_B die erwartete Spieldauer, wenn A bzw. B an der Reihe ist, so folgt

$$h_A = 1 + \frac{7}{8} h_B \quad \text{und} \quad h_B = 1 + \frac{5}{6} h_A .$$

Lösung: $h_A = \frac{90}{13}$.

Die erwartete Spieldauer ist also $\frac{90}{13}$.