Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungsblatt 7
1. Juli 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (4 Punkte)

Zwei Spieler A und B werfen je 6 Mal eine faire Münze mit „Kopf“ oder „Zahl“.
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Spieler A mindestens so oft „Kopf“ wirft wie Spieler B?

Lösung

Wir bezeichnen die Spieler mit A und B. Die Zufallsvariablen X bzw. Y geben die Anzahl der Würfe mit Ergebnis „Kopf“ von Spieler A bzw. B an.

Bemerkung: Für die Modellierung des Spiels verwendet man wie üblich Indikatorvariable X_i und Y_i, die mit den Werten 1 bzw. 0 das Ergebnis „Kopf“ bzw. „Zahl“ im i-ten Wurf anzeigen. Der gemeinsame Definitionsbereich für die Variablen ist $\Omega = \{(a,b)\,;\, a,b \in \{\text{„Kopf“}, \text{„Zahl“}\}^6\}$. Es gilt $\Pr[X_i = 1] = \frac{1}{2}$, $\Pr[Y_i = 1] = \frac{1}{2}$.

$X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ und $Y = \sum_{i=1}^{6} X_i$ sind unabhängig. X und Y sind binomialverteilt mit $X, Y \sim \mathrm{Bin}(6, \frac{1}{2})$.

Es gibt die drei disjunkten Ereignisse $E_1 = (X = Y)$, $E_2 = (X > Y)$ und $E_3 = (X < Y)$.
Offenbar gilt $(X \geq Y) = E_1 \cup E_2$.
Es gelten

$$\begin{aligned} \Pr[E_1] + \Pr[E_2] + \Pr[E_3] &= 1 \qquad\qquad \text{und} \\ \Pr[E_2] &= \Pr[E_3]\,. \end{aligned}$$

Für das Ereignis $E_1 \subseteq \Omega$, dass beide Spieler gleich oft „Kopf“ werfen, gilt

$$E \;=\; \bigcup_{i=0}^{6} (X = i \cap Y = i)\,.$$

Aufgrund der Unabhängigkeit bzw. Disjunktheit der Ereignisse $(X = i)$ und $(Y = j)$ folgt

$$\begin{aligned} \Pr[E_1] &= \sum_{i=0}^{6} \Pr[X = i] \cdot \Pr[Y = i] \\ &= \sum_{i=0}^{6} \binom{6}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \binom{6}{i} \left(\frac{1}{2}\right)^6 \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^{12} \cdot 924 = \frac{231}{1024}\,. \end{aligned}$$

Damit erhalten wir

$$\Pr[X \geq Y] = \frac{1}{2}(1 + \Pr[E_1]) = \frac{1255}{2048} \approx 0,6128\,.$$

Hausaufgabe 2 (4 Punkte)

Aus einer Box B_X bzw. B_Y werden zufällig Lose mit Werten $X \in \{-1, 0, 1\}$ bzw. $Y \in \{2, 3, 4\}$ gezogen. Die Werte 0 und 3 sollen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, alle übrigen Werte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. X und Y seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen. Es sei $S = X + Y$.

Seien S_i die i-te Durchführung bzw. Wiederholung der Ziehung S und Z der Mittelwert aus n Wiederholungen von S, d. h.

$$Z = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} S_i \,.$$

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$.
2. Zeigen Sie für alle $n \geq 20$: $\quad \Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < 0,5] \geq 0,8$.

Lösung

1.
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= -1 \cdot \tfrac{1}{4} + 0 \cdot \tfrac{1}{2} + 1 \cdot \tfrac{1}{4} = 0\,, \\ \mathbb{E}[Y] &= 2 \cdot \tfrac{1}{4} + 3 \cdot \tfrac{1}{2} + 4 \cdot \tfrac{1}{4} \quad = 3\,, \\ \mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \qquad\quad\; = 3\,, \\ \mathbb{E}[Z] &= \tfrac{1}{n} \cdot n \cdot \mathbb{E}[S] \qquad\quad\;\; = 3\,. \end{aligned}$$

   Die Variation von Z berechnet sich wie folgt.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X^2] &= (-1)^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 0^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 1^2 \cdot \tfrac{1}{4} = \tfrac{1}{2}\,, \\ \mathbb{E}[Y^2] &= 2^2 \cdot \tfrac{1}{4} + 3^2 \cdot \tfrac{1}{2} + 4^2 \cdot \tfrac{1}{4} \quad = \tfrac{19}{2} \\ \mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 \qquad\quad = \tfrac{1}{2}\,, \\ \mathrm{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 \qquad\quad = \tfrac{1}{2}\,, \\ \mathrm{Var}[S] &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \qquad\; = 1\,. \end{aligned}$$

   Wir erhalten

$$\mathrm{Var}[Z] = \tfrac{1}{n^2} \cdot n \cdot \mathrm{Var}[S] = \tfrac{1}{n}\,.$$

2. Nach Chebyshev gilt für alle $t > 0$

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t] \leq \tfrac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2}$$

   bzw.

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| < t] \geq 1 - \tfrac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2}\,.$$

   Wegen $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[S]$ folgt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < \tfrac{1}{2}] \geq 1 - \tfrac{4}{n}$$

   und setzen

$$1 - \tfrac{4}{n} \geq 0,8 = \tfrac{4}{5}\,.$$

   Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$n \geq 20\,.$$

Hausaufgabe 3 (4 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ unabhängige diskrete Zufallsvariable, die gleichverteilt auf $\{1, 2, \ldots, 20\}$ sind. Wir nehmen Zufallsvariablen $Y_i \sim \text{Bin}(1; \frac{8}{20})$ an, die genau dann den Wert 1 liefern, wenn $X_i > 12$ gilt.

Bestimmen Sie mit Hilfe einer geeigneten Chernoff-Schranke aus Korollar 68 der Vorlesung eine möglichst gute obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100} \geq 50\,.$$

Lösung

Es gilt $p := \Pr[Y_i = 1] = \frac{8}{20}$.
Sei $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$. Dann gilt $\mu := \mathbb{E}[Y] = 100 \cdot \frac{8}{20} = 40$.
Nach Chernoff gilt für alle $\delta \geq 0$

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^{\mu}\,.$$

Damit erhalten wir mit $\delta = \frac{1}{4} = 0,25$ und $50 = (1 + \frac{1}{4}) \cdot 40$

$$\Pr[Y \geq 50] \leq \left(\frac{e^{0,25}}{1,25^{1,25}}\right)^{40} \approx 0,31\,.$$

Hausaufgabe 4 (4 Punkte)

Wir betrachten eine binomialverteilte Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$ und der Dichtefunktion $f_X(i) = \binom{2}{i}(\frac{1}{3})^i(\frac{2}{3})^{2-i}$ für $i \in W_X$. Außerdem sei eine Zufallsvariable Y gegeben mit $W_Y = \{1, 2\}$ und $\Pr[Y = 1] = \frac{1}{2}$.

1. Bestimmen Sie die erzeugenden Funktionen $G_X(z)$ und $G_Y(z)$ für X bzw. Y!

2. Nun betrachten wir das folgende Zufallsexperiment:
   Zunächst wird Y getestet. Der Wert von Y bestimmt, ob die Zufallsvariable X nur ein erstes Mal getestet wird mit Wert X_1, oder ob X auch ein zweites Mal getestet wird mit Wert X_2 beim zweiten Test. Je nachdem bestimmen wir dann $Z = X_1$ oder $Z = X_1 + X_2$.

   Bestimmen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen Z!

3. Bestimmen Sie die Dichtefunktion f_Z von Z!

Lösung

1.
$$\begin{aligned} G_X(z) &= \left(\tfrac{2}{3}\right)^2 + 2\left(\tfrac{1}{3}\right)\left(\tfrac{2}{3}\right)z + \left(\tfrac{1}{3}\right)^2 z^2 \\ &= \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9}z + \tfrac{1}{9}z^2 \\ &= \tfrac{1}{9}(z+2)^2. \\ G_Y(z) &= \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}z^2. \end{aligned}$$

2. $$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= n \cdot p = 2 \cdot \tfrac{1}{3},\\ \mathbb{E}[Y] &= \tfrac{3}{2},\\ \mathbb{E}[Z] &= \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y] = 1.\end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned}G_Z(z) &= G_Y(G_X(z))\\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \left(\tfrac{1}{9}(z+2)^2 + \tfrac{1}{81}(z+2)^4\right)\\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{81}\left(9z^2 + 36z + 36 + z^4 + 8z^3 + 24z^2 + 32z + 16\right)\\ &= \tfrac{1}{2} \cdot \tfrac{1}{81}\left(z^4 + 8z^3 + 33z^2 + 68z + 52\right).\end{aligned}$$

   Damit ergeben sich die Dichtewerte aus den Koeffizienten des Polynoms $G_Z(z)$.

   $$\begin{aligned}f_Z(0) &= \tfrac{52}{162},\\ f_Z(1) &= \tfrac{68}{162},\\ f_Z(2) &= \tfrac{33}{162},\\ f_Z(3) &= \tfrac{8}{162},\\ f_Z(4) &= \tfrac{1}{162}.\end{aligned}$$

Hausaufgabe 5 (4 Punkte)

Sei X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable mit $X \sim \text{Po}(\lambda)$ und $\lambda > 0$.

1. Zeigen Sie, dass X^2 nicht Poisson-verteilt ist.
2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}\left[\frac{1}{(X+1)^{\overline{n}}}\right]$ in geschlossener Form.

Hinweis: Teilaufgabe 2 wurde geändert. In der ursprünglichen Aufgabenstellung waren Quotient und Potenzbildung vertauscht. Die entsprechenden Lösungsversuche erhalten volle Punktzahl. Lösungen mit Maple etc. erhalten zusätzliche Punkte.

Lösung

1. Der Wertebereich W_{X^2} von X^2 besteht aus Quadratzahlen und ist damit nicht gleich $\mathbb{N}_0$. Deshalb ist X^2 nicht Poisson-verteilt.

2. $$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\frac{1}{(X+1)^{\overline{n}}}\right] &= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{(i+1)(i+2)\cdot \ldots \cdot (i+n)} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\\ &= \frac{1}{\lambda^n} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{i+n}}{(i+n)!}\\ &= \frac{1}{\lambda^n}\left(1 - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{(i)!}\right).\end{aligned}$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Auf einem Blatt Papier sind im Abstand von 4 cm horizontale Linien aufgemalt. Wir werfen eine Münze mit einem Radius von 1 cm auf dieses Blatt Papier. Dabei treffen wir immer das Papier und werfen nicht daneben, so dass der Mittelpunkt der Münze gleichverteilt wird auf dem Papier.

Mit welcher Wahrscheinlichkeit berührt die Münze eine Linie?

Lösung

Die Gleichverteilung von Punkten auf einer Fläche bedeutet, dass gleich große Flächenstücke im Mittel gleich oft von erzeugten Punkten berührt werden, hier z. B. durch den Mittelpunkt geworfener Münzen.

Die Fläche zwischen zwei aufeinanderfolgenden horizontalen Linien teilt sich in gleich große Bereiche B_1 und B_2 von Lagepositionen der Münze, wenn B_1 die Menge von Punkten umfasst mit größerem Abstand als 1 zu einer der beiden Linien und B_2 die übrigen Punkte zwischen den Linien enthält.

Die Münze berührt genau dann eine der Linien, wenn deren Mittelpunkt in B_2 fällt.

Da die Flächen von B_1 und B_2 gleich groß sind, berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ eine der beiden Linien.

Da wir davon ausgehen, dass jeder der Zwischenräume zwischen benachbarten Linien mit gleicher Wahrscheinlichkeit getroffen werden, berührt die Münze mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ irgendeine Linie.

Vorbereitung 2

Seien A, B und C jeweils (unabhängig) gleichverteilt über $[0, 1]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Lösungen der Gleichung $Ax^2 + Bx + C = 0$ reellwertig sind?

Hinweis: Berechnen Sie zunächst die Dichtefunktion von $A \cdot C$ und verwenden Sie für die sich anschließende Rechnung $\int x^2 \ln x \, \mathrm{d}x = \frac{x^3 \ln x}{3} - \frac{x^3}{9}$.

Lösung

A, B und C sind kontinuierliche Zufallsvariable $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Alle Lösungen sind genau dann reell, wenn $B^2 \geq 4AC$ gilt. Es gibt höchstens 2 Lösungen.

Wir definieren den 3-dimensionalen Körper $V := \{(A, B, C)\,;\, B^2 \geq 4AC \wedge 0 \leq A, B, C \leq 1\}$.

Aus Gründen der Unabhängigkeit und Gleichverteilung der A, B, C ist $\Pr[B^2 \geq 4AC]$ durch das Verhältnis des Volumens von V zum Volumen des Einheitswürfels $[0, 1]^3$ bestimmt. Das Volumen des Einheitswürfels ist 1.

Wir definieren noch $F(B) := \{(A,C)\,;\, B^2 \geq 4AC \wedge 0 \leq A, C \leq 1\}$ und erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[B^2 \geq 4AC] &= \int_V \mathrm{d}A\,\mathrm{d}B\,\mathrm{d}C \\
&= \int_0^1 \left(\int_{F(B)} \mathrm{d}A\,\mathrm{d}C \right) \mathrm{d}B \\
&= \int_0^1 \left(\int_0^{B^2/4} \mathrm{d}A + \int_{B^2/4}^1 \frac{B^2/4}{A}\,\mathrm{d}A \right) \mathrm{d}B \\
&= \int_0^1 \frac{B^2}{4} - \frac{B^2}{4} \ln \frac{B^2}{4}\,\mathrm{d}B \\
&= \frac{\ln 2}{6} + \frac{5}{36} \approx 25.4\%\,.
\end{aligned}$$

Vorbereitung 3

Es sei Ω eine Ergebnismenge. Wir nehmen an, dass wir für eine Menge $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ von Ereignissen Wahrscheinlichkeiten definieren wollen. Wir suchen dazu eine kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{E}$ enthält.
Sei

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap \{\mathcal{A}\,;\, \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist und dass für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ die Relation $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$ gilt.

2. Die Borelschen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ über $\mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma_{\mathbb{R}^2}(\mathcal{E}) \quad \text{mit} \quad \mathcal{E} = \{[a,b] \times [c,d]\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{R}\}\,.$$

   Zeigen Sie, dass die Menge $K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\,;\, x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

Lösung

1. Wir lernen ein wichtiges Beweisprinizip kennen:
   Konstruktion mittels Bildung des Durchschnitts (z. B. von Algebren).

   Wir zeigen zunächst, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra ist.

   Dazu sind die folgenden Abgeschlossenheitseigenschaften des Systems $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ nachzuweisen:

   (E1) $\Omega \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

   (E2) $A \in \sigma_\Omega(\mathcal{E}) \;\Rightarrow\; \overline{A} \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

   (E3) $A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ für alle $n \in \mathbb{N} \;\Rightarrow\; \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

   Beweis: Elementar.

   Nun zeigen wir:

Für jede σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

Beweis:

$\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ ist Durchschnitt aller σ-Algebren mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$.

Daraus folgt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

2. Sei $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Dann ist die Menge $\mathcal{E}' \subseteq \mathcal{E}$ mit

$$\mathcal{E}' = \{[a,b] \times [c,d]\,;\, a,b,c,d \in \mathbb{Q}\}$$

abzählbar.

Das Komplement von K läßt sich durch Elemente von $\mathcal{E}'$ ausschöpfen, d. h.

$$\overline{K} = \bigcup \{I \in \mathcal{E}'\,;\, I \subseteq \overline{K}\}\,.$$

Damit gilt $K \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Vorbereitung 4

Sei $\langle \Omega, \Pr \rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Wir betrachten die Menge $\Omega^{\mathbb{N}}$ aller Folgen $x_1, x_2, \ldots$ von Elementen der Menge Ω und definieren für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ die Mengen $A_{i,e} = \{\omega \in \Omega^{\mathbb{N}}\,;\, \omega_i = e\} \subseteq \Omega^{\mathbb{N}}$. Dabei bedeutet ω_i das i-te Folgenelement der Folge ω. Sei $\mathcal{E} = \{A_{i,e}\,;\, i \in \mathbb{N}, e \in \Omega\}$.

Man zeige:

Es gibt einen Kolmogorov'schen Wahrscheinlichkeitsraum $\langle \Omega^{\mathbb{N}}, \sigma_{\Omega^{\mathbb{N}}}(\mathcal{E}), \Pr_{\mathbb{N}} \rangle$, so dass für alle $i \in \mathbb{N}$ und $e \in \Omega$ gilt

$$\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}] = \Pr[e]\,.$$

Lösung

Wir definieren $\Pr_{\mathbb{N}}$ wie folgt. Wir konstruieren

1. die Wahrscheinlichkeit des Komplements

   $\Pr_{\mathbb{N}}[\overline{A_{i,e}}] = 1 - \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i,e}]$.

2. die $A_{i,e}$ als unabhängige Ereignisse:

   $\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1} \cap \ldots \cap A_{i_k,e_k}] = \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1}] \cdot \ldots \cdot \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_k,e_k}]$.

3. die Wahrscheinlichkeit für beliebige endliche Vereinigungen mit der Siebformel:

   $\Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1} \cup \ldots \cup A_{i_k,e_k}] = \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_1,e_1}] + \ldots + \Pr_{\mathbb{N}}[A_{i_k,e_k}] - \ldots$

4. die Wahrscheinlichkeit für beliebige abzählbare Vereinigungen als Limes:

   $\Pr_{\mathbb{N}}[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n] = \lim\limits_{n\to\infty} \Pr_{\mathbb{N}}[A_1 \cup \ldots \cup A_n]$.

Die Ausarbeitung der Beweise ist Gegenstand der Maßtheorie.

Tutoraufgabe 1

1. Gegeben sei ein Kreis mit Radius 1. Wir wählen zufällig (gleichverteilt) einen Punkt innerhalb des Kreises. Berechnen Sie die Dichte der Verteilung des Abstands zwischen dem Punkt und dem Kreismittelpunkt?

2. Ein Krankenhaus steht in einer Straße der Länge $\ell < 1$ am Punkt $a \in [0, \ell]$.

   Wenn alle Notfälle gleichverteilt an einem Punkt in $[0, \ell]$ vorkommen, wo soll das Krankenhaus stehen, damit die erwartete Fahrzeit des Rettungsdienstes minimal ist?

Lösung

1. Sei D der Abstand des Punktes zum Mittelpunkt. Für $0 \leq x \leq 1$ ist
$$\Pr[D \leq x] = \frac{x^2 \cdot \pi}{1^2 \cdot \pi} = x^2 .$$
   Da für eine Verteilungsfunktion $F(x)$ zu einer Dichte $f(x)$
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t) \text{ dt}$$
   gilt, folgt für die Dichte der Verteilung von D für alle x mit $0 < x < 1$
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}} x^2 = 2x .$$
   Außerhalb von $[0, 1]$ gilt $f(x) = 0$.

2. Ein auf $[0, \ell]$ gleichverteiltes X besitzt auf $[0, \ell]$ die Dichte $\frac{1}{\ell}$. Es gilt
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[|X - a|] &= \mathbb{E}\left[|X - a| \mid 0 \leq X \leq a\right] \cdot \frac{a}{\ell} + \mathbb{E}\left[|X - a| \mid a \leq X \leq \ell\right] \cdot \frac{\ell - a}{\ell} \\ &= \frac{a}{\ell} \int_0^a (a - x) \cdot \frac{1}{a} \, \mathrm{d}x + \frac{\ell - a}{\ell} \int_a^\ell (x - a) \cdot \frac{1}{\ell - a} \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{a^2}{2\ell} + \frac{(\ell - a)^2}{2\ell} . \end{aligned}$$
   Man kann nach a differenzieren, um das Minimum $a = \frac{\ell}{2}$ zu finden.

Tutoraufgabe 2

1. Seien X und Y unabhängige und positivwertige kontinuierliche Zufallsvariablen. Drücken Sie die Dichtefunktion f_Z von $Z = X/Y$ durch die Dichtefunktionen f_X und f_Y von X bzw. Y aus.

2. Die Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch die Koordinaten eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in \{(s, t); s^2 + t^2 \leq 4\}$ der x, y-Ebene.

   Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x, y)$!

   Sind X und Y unabhängig? Begründung!

   Berechnen Sie die Randdichten f_X und f_Y !

Lösung

1. Wir berechnen die Dichte f_Z als Ableitung der Verteilung F_Z. Da X und Y positivwertig sind, gilt zunächst $f_X(x) = 0$ und $f_Y(y) = 0$ für alle $x \leq 0$ und $y \leq 0$. Daraus folgt ohne Rechnung $f_Z(z) = 0$ für alle $z \leq 0$, mithin $F_Z(z) = 0$ für alle $z \leq 0$.

   Für die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$ gilt

$$\begin{aligned}
F_Z(z) &= \Pr[Z \leq z] \\
&= \Pr[X/Y \leq z] \\
&= \Pr[(X,Y) \in \{(x,y)\,;\, x \leq zy\}] \\
&= \int_{\{(x,y)\,;\, x \leq zy\}} f_{X,Y}(x,y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{\{(x,y)\,;\, 0<x, 0<y, x \leq zy\}} f_X(x) \cdot f_Y(y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty f_Y(y) \cdot \left(\int_0^{z \cdot y} f_X(x)\, \mathrm{d}x \right)\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty f_Y(y) \cdot F_X(zy)\, \mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

   Damit errechnet sich die Dichte zu

$$\begin{aligned}
f_Z(z) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z} \int_0^\infty f_Y(y) \cdot F_X(zy)\, \mathrm{d}y \\
&= \int_0^\infty f_Y(y) \cdot f_X(zy) \cdot y\, \mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

2. (a) Die gegebene Punktmenge $K = \{(s,t); s^2 + t^2 \leq 4\}$ ist eine Kreisscheibe mit Radius 2 und Mittelpunkt $(0,0)$. Gleichverteilung auf der Kreisscheibe bedeutet für die Dichte die Gleichung

$$f_{X,Y}(x,y) = c$$

   für alle $(x,y) \in K$ mit einer konstanten Zahl c. Außerhalb von K ist die Dichte gleich 0. Das Integral über $\mathbb{R}^2$ muss 1 ergeben. Da für die Kreisfläche $F_K = 4\pi$ gilt, folgt

$$c = \frac{1}{4\pi}\,.$$

   (b) Wären X und Y unabhängig, dann müsste für die Verteilungsfunktionen $F_{X,Y}$, F_X und F_Y für alle $x, y \in \mathbb{R}$ gelten

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)\,.$$

   Dies führt man zum Widerspruch, in dem man für $(x,y) = (-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$ zeigt

$$F_{X,Y}(-\sqrt{2}, -\sqrt{2}) \neq F_X(-\sqrt{2}) \cdot F_Y(-\sqrt{2})\,.$$

Auf der Menge $B = \{(x,y)\,;\,(x \le -\sqrt{2}) \wedge (y \le -\sqrt{2})\}$ hat die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}$ den Wert 0. Damit gilt

$$\begin{aligned}
F_{X,Y}(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) &= \Pr[X \le -\sqrt{2}\ ,\ Y \le -\sqrt{2}] \\
&= \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_B f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 0
\end{aligned}$$

Die Randverteilungen $F_X(-\sqrt{2})$ und $F_Y(-\sqrt{2})$ dagegen sind beide nicht gleich Null.

$$\begin{aligned}
F_X(-\sqrt{2}) &= \Pr[X \le -\sqrt{2}] \\
&= \int_{-\infty}^{-\sqrt{2}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\ \mathrm{d}v\right]\ \mathrm{d}u \\
&= \int_{-1}^{-\sqrt{2}} \frac{\sqrt{4-u^2}}{2\pi}\ \mathrm{d}u \\
&\ne 0
\end{aligned}$$

Analog zeigt man $F_Y(-\sqrt{2}) \ne 0$.

(c) Die Randdichten berechnen sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\ \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \frac{1}{4\pi}\ \mathrm{d}y \\
&= \frac{\sqrt{4-x^2}}{2\pi}\,,
\end{aligned}$$

und analog folgt

$$f_Y(y) = \frac{\sqrt{4-y^2}}{2\pi}\,.$$

Tutoraufgabe 3

Wir betrachten unabhängige stetige Zufallsvariablen X und Y, die beide auf dem Intervall $[0,1] \subseteq \mathbb{R}$ gleichverteilt sind. Sei $Z = \max\{X,Y\}$.

1. Berechnen Sie die Verteilungsfunktion F_Z.
2. Bestimmen Sie eine Funktion $u : [0,1] \to [0,1]$, so dass $u(X)$ die gleiche Verteilung wie Z besitzt.

Lösung

1. Die gemeinsame Dichte der Zufallsvariablen X, Y sei $f_{X,Y}(x, y)$. Aufgrund der Unabhängigkeit von X, Y gilt für $(x, y) \notin [0, 1] \times [0, 1]$ die gemeinsame Dichte 0 und für $(x, y) \in [0, 1] \times [0, 1]$

   $$f_{X,Y}(x, y) = f_X(x) \cdot f_Y(y) = 1 \cdot 1 = 1\,.$$

   Wir berechnen die Verteilungsfunktion $F_Z(z)$. Offenbar gilt zunächst $F_Z(z) = 0$ bzw. $F_Z(z) = 1$ für $z \leq 0$ bzw. $1 \leq z$. Für $z \in [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ gilt

   $$\begin{aligned} F_Z(z) &= \Pr[\max\{X, Y\} \leq z] \\ &= \Pr[X \leq z, Y \leq z] \\ &= \int_{[0,z]\times[0,z]} f_{X,Y}(x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_{[0,z]\times[0,z]} 1\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= z^2\,. \end{aligned}$$

2. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass wir eine Simulation von F_Z aus der Inversen von F_Z erhalten können.

   Wir rechnen direkt und setzen die Invertierbarkeit von u voraus. Sei $Y = u(X)$. Dann gilt

   $$\begin{aligned} F_Y(y) &= \Pr[Y \leq y] \;=\; \Pr[u(X) \leq y] \\ &= \Pr[X \leq u^{-1}(y)] \\ &= F_X(u^{-1}(y)) \\ &= u^{-1}(y)\,. \end{aligned}$$

   Aus der Gleichung $F_Z(y) = F_X(u^{-1}(y))$ folgt nun $y^2 = u^{-1}(y)$, mithin

   $$u(x) = \sqrt{x}\,.$$