LÖSUNG

Endterm Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Sommersemester 2008

Hinweis: Alle Antworten sind zu begründen. Insbesondere sollte bei nicht-trivialen Umformungen kurz angegeben werden, weshalb diese Umformungen erlaubt sind (z.B.: Unabhängigkeit von ZV/Ereignissen, Disjunktheit von Ereignissen, Approximation mittels ZGWS, etc.)

Aufgabe 1 **2P+2P+2P**

Ein Kind surft zufällig im Internet. Es startet bei Seite A.

Auf Seite A klickt es mit W'keit $\frac{1}{2}$ Seite B an, mit W'keit $\frac{1}{2}$ Seite C.

Auf Seite B klickt es mit W'keit $\frac{1}{3}$ Seite C an, mit W'keit $\frac{2}{3}$ Seite A.

Sei X die Zahl der Klicks, bis das Kind Seite C *erstmals* erreicht.

a) Bestimmen Sie zunächst $\Pr[X = 0]$, $\Pr[X = 1]$ und $\Pr[X = 2]$.

b) Geben Sie nun für $k \geq 1$ $\Pr[X = k + 2]$ in Abhängigkeit von $\Pr[X = k]$ an.

c) Bestimmen Sie $\mathbb{E}[X]$.

Hinweis: Zeichnen Sie sich am besten den „Webgraphen" auf.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt $\Pr[X = 0] = 0$, weil das Kind bei A startet.
Es gilt $\Pr[X = 1] = \frac{1}{2}$, weil das Kind dann direkt Seite C anklicken muss.
Es gilt $\Pr[X = 2] = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{6}$, denn die einzige Möglichkeit, C in zwei Klicks zu erreichen, ist, indem man zuerst zu B und dann direkt zu C surft.

b) Die einzige Möglichkeit, nach $k + 2$ Klicks C zu erreichen, ist zuerst nach B, dann zurück nach A zu gehen, und dann k Klicks zu brauchen, um C zu erreichen:

$$\Pr[X = k + 2] = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Pr[X = k] = \frac{1}{3}\Pr[X = k]$$

c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \textstyle\sum_{k\geq 0} k \cdot \Pr[X = k] \\
&= \Pr[X = 1] + 2 \cdot \Pr[X = 2] + \textstyle\sum_{k\geq 3} k\Pr[X = k] \\
&= \tfrac{1}{2} + \tfrac{2}{6} + \textstyle\sum_{k\geq 1} (k + 2)\Pr[X = k + 2] \\
&= \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{3} \textstyle\sum_{k\geq 1} (k + 2)\Pr[X = k] \\
&= \tfrac{5}{6} + \tfrac{1}{3}\mathbb{E}[X + 2] \\
&= \tfrac{9}{6} + \tfrac{1}{3}\mathbb{E}[X] \\
\mathbb{E}[X] &= \tfrac{3}{2} \cdot \tfrac{9}{6} = \tfrac{9}{4}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2 **2P+2P**

Seien $X_1, \ldots, X_{100}$ diskrete unabhängige Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf $\{1, \ldots, 20\}$ sind.

a) Die Zufallsvariable $Y_i \sim \text{Bin}(1; \frac{8}{20})$ nimmt genau dann den Wert 1 an, wenn $X_i > 12$ gilt. Auf dem beigefügten Formelblatt finden Sie die Chernoff-Schranken aus der Vorlesung. Bestimmen Sie mit diesen die *best mögliche* obere Schranke für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses

$$Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{100} \geq 50$$

b) Sei $X = X_1 + \cdots + X_{100}$. Zeigen Sie mit der Chebyshev-Ungleichung:

$$\Pr[X \geq 1300] < 0.03$$

Hinweise: Es gilt $\mathrm{Var}[X_1] = 133/4$. Vergleichen Sie $\Pr[X \geq 1300]$ und $\Pr[X \leq 800]$.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt $p := \Pr[Y_i = 1] = \frac{8}{20} = \frac{2}{5} = 0.4$.
Sei $Y = Y_1 + \cdots + Y_{100}$.
Es gilt $Y = \sum_{i=1}^{100} Y_i$ und $\mathbb{E}[Y] = 100 \cdot \mathbb{E}[Y_1] = 100 \cdot 0.4 = 40$. Also:

$$\Pr[Y \geq 50] = \Pr[Y \geq (1 + \underbrace{0.25}_{=:\delta}) \cdot \underbrace{\mathbb{E}[Y]}_{40}] = \dots$$

Wegen $\geq$ kommen nur die Schranken 1) und 4) von dem gegebenen Formelblatt in Frage. Entweder wertet man nun beide aus, oder man erinnert sich aus der Vorlesung, dass sich 1) durch Überapproximation von 4) ergibt, so dass 4) stets genauer ist:

$$\dots \leq \left(\frac{e^{0.25}}{1.25^{1.25}}\right)^{40} \approx 0.31$$

b) Aus Symmetriegründen gilt $\Pr[X \geq 1300] = \Pr[X \leq 800]$. Außerdem $\mathbb{E}[X] = 100 \cdot \mathbb{E}[X_1] = 100 \cdot 10.5 = 1050$ und $\mathrm{Var}[X] \overset{\text{unabh.}}{=} 100 \cdot \frac{133}{4} = 3325$. Folglich gilt:

$$\Pr[X \geq 1300] = \frac{1}{2}\left(\Pr[X \geq 1300] + \Pr[X \leq 800]\right) = \frac{1}{2}\Pr[|X - 1050| \geq 250] \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{\mathrm{Var}[X]}{250^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3325}{250^2} = 0.0266$$

Aufgabe 3 **2P+2P**

Eine stetige Zufallsvariable X besitze die folgende Dichte:

$$f_X(x) = \begin{cases} \gamma \cdot x^{-1-\gamma} & \text{wenn } x > 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $\gamma > 1$ gilt.

a) Zeigen Sie, dass f_X eine Dichte ist.
Geben Sie dann die Verteilungsfunktion F_X in geschlossener Form an.

b) Sei $Y = \dfrac{1}{X}$. Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion $F_Y(y)$ von Y für $y \geq 0$.
Hinweis: Unterscheiden Sie zwei Fälle.

Lösungsvorschlag:

a) Es muss gelten:

$$1 \overset{!}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = \int_1^{\infty} cx^{-1-\gamma}\, dx = c\left[-\frac{1}{\gamma}x^{-\gamma}\right]_1^{\infty} = c\left(0 + \frac{1}{\gamma}\right) = \frac{c}{\gamma}$$

also $c = \gamma$. Für die Verteilungsfunktion gilt:

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\, dt = \begin{cases} 0 & \text{wenn } x \leq 1 \\ \int_1^x \gamma t^{-1-\gamma}\, dt = [-t^{-\gamma}]_1^x = 1 - x^{-\gamma} & \text{wenn } x \geq 1 \end{cases}$$

b)

$$F_Y(y) = \Pr[Y \leq y] = \Pr\left[\frac{1}{X} \leq y\right] = \Pr\left[X \geq \frac{1}{y}\right] = 1 - \Pr\left[X \leq \frac{1}{y}\right] = 1 - F_X\left(\frac{1}{y}\right)$$

$$= 1 - \begin{cases} 0 & \text{wenn } \frac{1}{y} \leq 1 \\ 1 - \left(\frac{1}{y}\right)^{-\gamma} & \text{wenn } \frac{1}{y} \geq 1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & \text{wenn } y \geq 1 \\ \left(\frac{1}{y}\right)^{-\gamma} = y^{\gamma} & \text{wenn } y \leq 1 \end{cases}$$

Aufgabe 4 **2P+2P**

Sie sind mit einem Freund in einem Restaurant verabredet. Die Zufallsvariable X gebe Ihre Ankunftszeit an, die Zufallsvariable Y gebe die Ankunftszeit Ihres Freundes an. Die Zufallsvariablen X und Y seien unabhängig und beide *stetig* gleichverteilt auf $[0, 1]$.

a) Die Zufallsvariable Z gebe den Zeitpunkt an, ab dem Sie zu zweit im Restaurant sind. Bestimmen Sie die Verteilung von Z, die Dichte und den Erwartungswert.

b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Ihr Freund früher kommt als Sie und er auf Sie länger als t warten muss. Nehmen Sie $t \in [0, 1]$ an.

Lösungsvorschlag:

a) Es gilt $Z = \max\{X, Y\}$.
Für $t \in [0, 1]$ gilt: $F_Z(t) = \Pr[Z \le t] = \Pr[\max\{X, Y\} \le t] = \Pr[X \le t, Y \le t] = \Pr[X \le t] \cdot \Pr[Y \le t] = t^2$.
Außerdem $F_Z(t) = 0$ für $t < 0$ und $F_Z(t) = 1$ für $t > 1$.
$f_Z(t) = F_Z'(t) = 2t \cdot I_{[0,1]}(t)$.
$\mathbb{E}[Z] = \int_0^1 t f_Z(t)\; dt = \int_0^1 2t^2\; dt = \frac{2}{3}[t^3]_0^1 = \frac{2}{3}$.

b) Gesucht ist $\Pr[X - Y \ge t]$. Es gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[X - Y > t] &= \Pr[X - Y \ge t] \\
&= \Pr[Y \le X - t] \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{x-t} f_X(x) f_Y(y)\; dx\; dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{x-t} f_Y(y)\; dy \right)\; dx \\
&= \int_0^1 f_X(x) \left(\int_{-\infty}^{x-t} f_Y(y)\; dy \right)\; dx \\
&= \int_0^1 f_X(x) F_Y(x - t)\; dx \\
&= \int_t^1 1 \cdot (x - t)\; dx \\
&= \left[\frac{1}{2} x^2 - tx \right]_t^1 \\
&= \frac{1}{2} - t - \frac{1}{2}t^2 + t^2 = \frac{1}{2}t^2 - t + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(1 - t)^2
\end{aligned}$$

Aufgabe 5 **2P+2P**

Der Aktienkurs des Suchmaschinenbetreibers Hupf am n-ten Tag des Jahres sei gegeben durch

$$Y_n = 100 + \sum_{i=1}^{n-1} X_i.$$

Die Zufallsvariablen X_i seien unabhängige, identisch verteilte Zufallsvariablen mit Erwartungswert 0 und Standardabweichung $\frac{1}{4}$.

a) Schätzen Sie mit dem zentralen Grenzwertsatz die W'keit, dass $Y_{365} \ge 110$.

b) Bestimmen Sie mit Hilfe des zentralen Grenzwertsatzes den Parameter t so klein wie möglich, damit $Y_{365} \in [100 - t, 100 + t]$ noch mit W'keit ≥ 0.95 gilt.

Lösungsvorschlag: Sei $S = X_1 + \cdots X_{364}$. Dann gilt $\mathbb{E}[S] = 0$ und $\mathrm{Var}[S] \overset{X_i \text{ ua.}}{=} 364 \cdot \frac{1}{4^2} = \frac{91}{4}$.

a)

$$\Pr[Y_{365} \geq 100 + t] = \Pr[Y_{365} - 100 \geq t] = \Pr[S \geq t] = \Pr\left[\frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \geq \frac{t-0}{\sqrt{91/4}}\right] \approx 1 - \Phi(2t/\sqrt{91})$$

Mit $t = 10$ ergibt sich $1 - \Phi(20/\sqrt{91}) \approx 1 - \Phi(2.10) \approx 1 - 0.9821 = 0.0179$.

b)

$$\begin{array}{rcl} 0.95 & \overset{!}{\leq} & \Pr[Y_{365} \in [100 - t, 100 + t]] \\ & = & \Pr[-t \leq S \leq t] \\ & = & \Pr\left[\frac{-2t}{\sqrt{91}} \leq \frac{S - \mathbb{E}[S]}{\sqrt{\mathrm{Var}[S]}} \leq \frac{2t}{\sqrt{91}}\right] \\ & \approx & \Phi\left(\frac{2t}{\sqrt{91}}\right) - \Phi\left(\frac{-2t}{\sqrt{91}}\right) \\ & = & 2\Phi\left(\frac{2t}{\sqrt{91}}\right) - 1. \\ \rightsquigarrow & & \Phi\left(\frac{2t}{\sqrt{91}}\right) \overset{!}{\geq} 0.975 \\ \rightsquigarrow & & \frac{2t}{\sqrt{91}} \overset{!}{\geq} 1.96 \\ \rightsquigarrow & & t \geq 9.35 \\ \rightsquigarrow & & t = 9.35. \end{array}$$

Aufgabe 6 — 2P+2P+2P

Während einer Prüfung wurde die Pulsfrequenz von 53 Studenten gemessen, wobei sich eine mittlere Pulsfrequenz von 86.7 Schlägen/min ergab. Auf Grund früherer Untersuchungen geht man davon aus, dass die Pulsfrequenzen von Menschen normalverteilt sind mit Mittelwert μ und Standardabweichung $\sigma = 10.3$ Schläge/min.

a) Zu testen ist die Hypothese $H_0 : \mu \geq 90$ gegen $H_1 : \mu < 90$.

Berechnen Sie die kleinste Fehlerwahrscheinlichkeit α, mit der die Nullhypothese noch abgelehnt werden kann.

Professor Evilsparza sind die Studenten viel zu aufgeregt während einer Klausur. Er führt daher folgenden Versuch durch: Vor der nächsten Klausur lässt er jeden der 165 Studenten ein Glas Bier trinken, da der enthaltene Hopfen beruhigend wirken soll, d.h. die Pulsfrequenz verringert.

Während dieser Prüfung wird eine mittlere Pulsfrequenz von 85.4 Schlägen/min gemessen.

Professor Evilsparza will nun *anhand der beiden Stichproben* entscheiden, ob er in weiteren Prüfungen ebenfalls den Studenten Bier verabreichen sollte.

b) Professor Evilsparza kann sich nicht entscheiden, ob er nun

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{\text{Bier}} < \mu_{\text{kein Bier}}$$

oder

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \leq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs. } H_1 : \mu_{\text{Bier}} > \mu_{\text{kein Bier}}$$

testen soll. Er will allerdings die W'keit auf 1% beschränken, dass er den Studenten Bier verabreicht, das Bier jedoch keine beruhigende Wirkung hat, d.h., dass er unnötig Geld ausgibt.

Wie sollte er daher die Hypothesen wählen? (Begründung!)

c) Führen Sie den entsprechenden Test durch. Welche Empfehlung können Sie Professor Evilsparza geben? ($\alpha = 0.01$)

Hinweis: Runden Sie auf zwei Stellen hinter dem Komma genau.

Lösungsvorschlag:

a) Gaußtest ($\sigma = 10.3$ bekannt) mit Testgröße:

$$\frac{86.7 - 90}{10.3}\sqrt{53} \approx -2,33.$$

H_0 wird abgelehnt, falls $-2.33 < z_\alpha = -z_{1-\alpha}$. Also

$$-2.33 = z_\alpha = -z_{1-\alpha}.$$

Mit $z_{0.99} = 2.33$ folgt $\alpha = 0.01$.

b) Bei einem statistischen Test kann i.A. nur die Fehlerw'keit 1. Art mittels dem Signifikanzniveau α kontrolliert werden.

Nach Definition gilt nämlich, dass durch α die W'keit beschränkt ist, dass H_0 gilt, der Test aber H_0 ablehnt, und man daher auf Grund des Tests fäschlicherweise von der Gültigkeit von H_1 ausgeht.

Nach Aufgabenstellung soll die W'keit, dass man wegen dem Test von einem positiven Effekt des Biers ($\mu_{\text{Bier}} < \mu_{\text{kein Bier}}$) ausgeht, obwohl dies nicht gilt ($\mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}}$), durch 0.01 beschränkt werden.

Damit muss H_0 gerade $\mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}}$ sein mit $\alpha = 0.01$.

c) Zwei-Stichproben-Gauß-Test ($\sigma = 10.3$ bekannt) zu

$$H_0 : \mu_{\text{Bier}} \geq \mu_{\text{kein Bier}} \text{ vs } H_1 : \mu_{\text{Bier}} < \mu_{\text{kein Bier}}$$

und $\alpha = 0.01$.

Testgröße:

$$\sqrt{\frac{n \cdot m}{m+n}} \cdot \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{\sigma} \rightsquigarrow \sqrt{\frac{165 \cdot 53}{165 + 53}} \cdot \frac{85.4 - 86.7}{10.3} \approx -0.8.$$

H_0 kann also abgelehnt werden, falls $-0.8 < z_{0.01} = -2.33$ (bzw. $-0.8 > z_{0.99} = 2.33$, falls falsches Hypothesenpaar).

Annahmen:
$X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_0^2)$ und $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_0^2)$, wobei σ_0^2 unbekannt.
Testgröße:

$$T := \sqrt{\frac{n+m-2}{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}} \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{(m-1)S_X^2+(n-1)S_Y^2}}.$$

Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} i) & H_0: \mu_X = \mu_Y & H_1: \mu_X \neq \mu_Y \\ ii) & H_0: \mu_X \geq \mu_Y & H_1: \mu_X < \mu_Y \\ iii) & H_0: \mu_X \leq \mu_Y & H_1: \mu_X > \mu_Y \end{array}$$

Ablehnung von H_0 zum Niveau α, falls

$$\begin{array}{ll} i) & |T| > t_{m+n-2;1-\frac{\alpha}{2}}. \\ ii) & T < t_{m+n-2;\alpha}. \\ iii) & T > t_{m+n-2;1-\alpha}. \end{array}$$

Annahmen:
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_0^2)$, wobei σ_0^2 unbekannt. *Alternativ:* X_i identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, unbekanntem $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma_0^2$ und n groß genug.
Testgröße:

$$T := \frac{\overline{X}-\mu_0}{S}\sqrt{n}.$$

Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} i) & H_0: \mu = \mu_0 & H_1: \mu \neq \mu_0 \\ ii) & H_0: \mu \geq \mu_0 & H_1: \mu < \mu_0 \\ iii) & H_0: \mu \leq \mu_0 & H_1: \mu > \mu_0 \end{array}$$

Ablehnung von H_0 zum Niveau α, falls

$$\begin{array}{ll} i) & |T| > t_{n-1;1-\frac{\alpha}{2}}. \\ ii) & T < t_{n-1;\alpha}. \\ iii) & T > t_{n-1;1-\alpha}. \end{array}$$

Annahmen:
$X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_0^2)$, wobei σ_0^2 bekannt. *Alternativ:* X_i identisch verteilt mit $\mathbb{E}[X_i] = \mu$, bekanntem $\mathrm{Var}[X_i] = \sigma_0^2$ und n groß genug.
Testgröße:

$$T := \frac{\overline{X}-\mu_0}{\sigma_0}\sqrt{n}.$$

Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} i) & H_0: \mu = \mu_0 & H_1: \mu \neq \mu_0 \\ ii) & H_0: \mu \geq \mu_0 & H_1: \mu < \mu_0 \\ iii) & H_0: \mu \leq \mu_0 & H_1: \mu > \mu_0 \end{array}$$

Ablehnung von H_0 zum Niveau α, falls

$$\begin{array}{ll} i) & |T| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}. \\ ii) & T < z_{\alpha}. \\ iii) & T > z_{1-\alpha}. \end{array}$$

Annahmen:
$X_1, \ldots, X_m, Y_1, \ldots, Y_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_X, \sigma_0^2)$ und $Y_j \sim \mathcal{N}(\mu_Y, \sigma_0^2)$, wobei σ_0^2 bekannt.
Testgröße:

$$T := \sqrt{\frac{n \cdot m}{m+n}} \frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sigma_0}.$$

Hypothesen:

$$\begin{array}{lll} i) & H_0: \mu_X = \mu_Y & H_1: \mu_X \neq \mu_Y \\ ii) & H_0: \mu_X \geq \mu_Y & H_1: \mu_X < \mu_Y \\ iii) & H_0: \mu_X \leq \mu_Y & H_1: \mu_X > \mu_Y \end{array}$$

Ablehnung von H_0 zum Niveau α, falls

$$\begin{array}{ll} i) & |T| > z_{1-\frac{\alpha}{2}}. \\ ii) & T < z_{\alpha}. \\ iii) & T > z_{1-\alpha}. \end{array}$$

Tabelle zur Standardnormalverteilung:

Beispiel: $\Phi(0,83) = 0,7967$ (entsprechende Einträge **fett** hervorgehoben).

	0,00	0,01	0,02	**0,03**	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	**0,7967**	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916

Approximation der t-Verteilung:

Für $n > 30$ gilt $t_{n;\alpha} \approx z_\alpha$, d.h. das α-Quantil der t_n-Verteilung ist ungefähr das α-Quantil der Standardnormalverteilung.

Chernoff-Schranken: Es seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(1; p_i)$. Dann gilt für $X := \sum_{i=1}^n X_i$ und $\mu = \mathbb{E}[X]$:

1) $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/3}$ für $0 < \delta < 1.81$
2) $\Pr[X \leq (1-\delta)\mu] \leq e^{-\mu\delta^2/2}$ für $0 < \delta \leq 1$
3) $\Pr[|X-\mu| \geq \delta\mu] \leq 2e^{-\mu\delta^2/3}$ für le $0 < \delta \leq 1$
4) $\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu$ für $\delta \geq 0$
5) $\Pr[X \geq t] \leq 2^{-t}$ für $t \geq 2e\mu$.