Technische Universität München
Institut für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik und
Grundlagen der Künstlichen Intelligenz
Prof. Dr. Dr. h.c. Wilfried Brauer

SS 2005
Diskrete Strukturen 2
Mittelklausur
28. Mai 2005

# Mittelklausur Diskrete Strukturen II

| Name | Vorname | Studiengang | Matrikelnummer |
|---|---|---|---|
| ................ | ................ | ☐ Diplom ☐ Inform.<br>☐ Bachelor ☐ BioInf.<br>☐ Lehramt ☐ WirtInf. | ................ |

| Hörsaal | Reihe | Sitzplatz | Unterschrift |
|---|---|---|---|
| ................ | ................ | ................ | ................ |

## Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ ☐☐
- Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb einer Aufgabe). Die Gesamtzahl erreichbarer Punkte beträgt 40.
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

| | A1 | A2 | A3 | A4 | A5 | A6 | Σ | Korrektor |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Erstkorrektur | | | | | | | | |
| Zweitkorrektur | | | | | | | | |

## Aufgabe 1 (8 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch).

Wenn bei 100 Münzwürfen 90 mal Kopf und 10 mal Zahl erscheinen, dann ist die Wahrscheinlichkeit Kopf zu werfen höher als die Wahrscheinlichkeit Zahl zu werfen. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . J ✔

Im Folgenden sei $(\Omega, Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit Ergebnismenge $\Omega$ und Wahrscheinlichkeit $Pr$:

Für verschiedene Elementarereignisse $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ gilt stets $Pr(\{\omega_1, \omega_2\}) = Pr(\omega_1) + Pr(\omega_2)$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ✔ N

Falls $Pr(A) = 1$ für ein Ereignis $A \subseteq \Omega$ gilt, dann gilt stets $A = \Omega$. . . . . . . . . . . . . . J ✔

Zwei verschiedene Elementarereignisse $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ sind stets unabhängig. . . . . . . . . J ✔

Jede Zufallsvariable $X : \Omega \to \{0, 1\} = W_X$ über Laplace–verteilten (gleichverteilten) Elementarereignissen aus $\Omega$ ist Bernoulli–verteilt. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ✔ N

Aus $\mathrm{Var}[X] = 0$ folgt $\mathbb{E}(X) = 0$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . J ✔

Falls die Dichtefunktionen $f_{X_1}, f_{X_2}$ der Zufallsvariablen $X_1, X_2$ gleich sind (d. h. $f_{X_1} = f_{X_2}$) , dann gilt auch $X_1 = X_2$. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . J ✔

Über endlichen Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega, Pr)$ gibt es keine Poisson–verteilten Zufallsvariablen. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . ✔ N

**Lösungsvorschlag**

Punkteverteilung: 1 Punkt pro richtiger Antwort, 1 Punktabzug pro falscher Antwort, 0 Punkte bei unbeantworteter Frage.

## Aufgabe 2 (8 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als (Bruch-)Zahl (je 2 Punkte) oder mindestens als Formel (je 1 Punkt) an.

Der Erwartungswert $\mathbb{E}(X)$ einer Indikatorvariablen $X$ sei $\frac{2}{3}$. Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X]$! . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boldsymbol{\frac{2}{9}}$

Aus einer Urne, die ebenso viele schwarze wie weisse, gleichartige Bälle enthalte, sollen 2 Bälle (ohne Zurücklegen) zufällig gezogen werden. Die Wahrscheinlichkeit, 2 weisse Bälle zu ziehen, sei $\frac{1}{5}$. Wieviele Bälle enthält die Urne? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 6

Seien $X$ und $Y$ unabhängige Zufallsvariablen über $\Omega$ mit $\mathrm{Var}[X + Y] = 3$ und $\mathrm{Var}[2X - Y] = 5$. Berechnen Sie $\mathrm{Var}[X]$! . $\boldsymbol{\frac{2}{3}}$

Bei einer Verlosung sei die Wahrscheinlichkeit gleich $\frac{1}{3}$, einen Gewinn mit einem einzigen Los zu ziehen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 3 (unabhängigen) Ziehungen von Losen mindestens einmal einen Gewinn zu ziehen? . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $\boldsymbol{\frac{19}{27}}$

**Lösungsvorschlag**

Punkteverteilung: 2 pro richtige Zahl, 1 für Formel, 0 bei unbeantworteter Frage.

## Aufgabe 3 (8 Punkte)

Gegeben sei die Multimenge $M$ aller Buchstabenvorkommen des Wortes `GOOGLE`. Ein Experiment bestehe darin, aus dieser Multimenge so oft zufällig einen Buchstaben zu ziehen, ihn zu notieren und zurückzulegen bis der Buchstabe `G` das erste Mal gezogen wurde, Die aufeinanderfolgend notierten Buchstaben ergeben ein Wort, das mit dem Buchstaben `G` endet. Wir beschreiben die Ergebnismenge des Experiments als Menge $\Omega$ aller Wörter $\omega$, die mit dem Buchstaben `G` enden und vorher kein `G` enthalten.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $Pr(\omega)$ wird ein Wort $\omega \in \Omega$ der Länge $n$ gezogen. (Jede Ziehung eines Einzelbuchstabens aus $M$ sei gleichwahrscheinlich.)

(b) Berechnen Sie den Erwartungswert der Wortlänge von $\omega \in \Omega$.

(c) Berechnen Sie den Erwartungswert der Wortlänge von $\omega \in \Omega$ unter der Annahme, dass die bei Ausführung des Experiments gezogenen Buchstaben nicht in $M$ zurückgelegt werden. (Hörsaalansage: Die Wortlängen sind dann maximal gleich 5.)

---

**Lösungsvorschlag**

(a) Mit $p = \frac{1}{3}$ (1 Pkt.)

gilt

$$Pr(|\omega| = n) = (1-p)^{n-1} \cdot p = \frac{2^{n-1}}{3^n}. \quad \text{(1 Pkt.)}$$

(b) Die Verteilung $Pr(|\omega| = n)$ ist geometrisch. (1 Pkt.)

Für den Erwartungswert gilt also

$$\mathbb{E}(|\omega|) = \frac{1}{p} = 3. \quad \text{(1 Pkt.)}$$

(c) Es gilt

$$\begin{aligned}
Pr(|\omega| = 1) &= \tfrac{1}{3} \\
Pr(|\omega| = 2) &= \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{2}{5} = \tfrac{4}{15} \\
Pr(|\omega| = 3) &= \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{2}{4} = \tfrac{3}{15} && \text{(1 Pkt.)} \\
Pr(|\omega| = 4) &= \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{2}{3} = \tfrac{2}{15} \\
Pr(|\omega| = 5) &= \tfrac{4}{6} \cdot \tfrac{3}{5} \cdot \tfrac{2}{4} \cdot \tfrac{1}{3} \cdot \tfrac{2}{2} = \tfrac{1}{15} && \text{(1 Pkt.)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(|\omega|) &= 1 \cdot \tfrac{1}{3} + 2 \cdot \tfrac{4}{15} + 3 \cdot \tfrac{3}{15} + 4 \cdot \tfrac{2}{15} + 5 \cdot \tfrac{1}{15} && \text{(1 Pkt.)} \\
&= \tfrac{7}{3} && \text{(1 Pkt.)}
\end{aligned}$$

## Aufgabe 4 (8 Punkte)

Wir betrachten 100 von 1 bis 100 numerierte Urnen $U_i$ und 100 Bälle $B_i$, die ebenfalls von 1 bis 100 numeriert sind. Die einmalige Ausführung eines Zufallsexperiments $E$ soll darin bestehen, gleichzeitig alle Bälle auf die Urnen passend zu verteilen, d. h. jeden der Bälle zufällig im Sinne der Laplaceschen Gleichverteilung auf die Urnen zu verteilen und dann diejenigen Bälle aus den Urnen zu entfernen, die nicht die gleiche Nummer tragen wie die Urne, in der sich der Ball befindet. (Schliesslich gilt also $B_i \in U_j \Rightarrow i = j$.)

(a) Wie gross ist für eine beliebige Urne $U$ die Wahrscheinlichkeit $Pr_{k,i}$, dass sich bei $k$-maliger Ausführung des Experiments die Anzahl $i$ von Bällen in $U$ befinden?

(b) Die Zufallsvariable $X$ sei gegeben durch die Anzahl von Urnen, die bei 2-maliger Ausführung des Experiments $E$ genau 1 (einen) Ball enthalten.

Berechnen Sie den Erwartungswert von $X$.

(Hörsaalansage: Bei jeder Wiederholung werden 100 neue Bälle geworfen.)

---

**Lösungsvorschlag**

(a) Die Wahrscheinlichkeit, dass eine geworfener Ball $b_i$ in Urne $U_i$ landet ist

$p = \frac{1}{100}$. (1 Pkt.)

Die $k$-malige Wiederholung von Würfen stellt sich dar als Binomialverteilung mit folgenden Wahrscheinlichkeiten $Pr_{k,i}$ für die Anzahl $i$ von korrekten Treffern in jeder Urne $U = U_n$:

$Pr_{k,i} = \binom{k}{i}(\frac{1}{100})^i(1 - \frac{1}{100})^{k-i}$. (2 Pkte.)

(b) Für jede Urne $U_n$ mit $1 \leq n \leq 100$ ist eine Indikatorvariable $X_n$ gegeben, die den Wert 1 annimmt mit Wahrscheinlichkeit

$p = Pr_{2,1} = 2 \cdot (\frac{1}{100})^1 \cdot (\frac{99}{100})^1$. (1 Pkt.)

Für die Zufallsvariable $X$ gilt dann

$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_{100}$. (1 Pkt.)

Die Werte von $X$ sind binomialverteilt mit

$Pr(X = n) = \binom{100}{n} \cdot (\frac{2\cdot 99}{100\cdot 100})^n \cdot (1 - \frac{2\cdot 99}{100\cdot 100})^{100-n}$. (1 Pkt.)

Der Erwartungswert von $X$ ist

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= 100 \cdot p && \text{(1 Pkt.)} \\ &= 100 \cdot \frac{2\cdot 99}{100\cdot 100} = 1,98. && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$

## Aufgabe 5 (4 Punkte)

Sei $W = (\Omega, Pr)$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ und $Pr(\omega) \neq 0$ für alle $\omega \in \Omega$.

Kann es in $W$ zwei verschiedene unabhängige Ereignisse $A, B \subseteq \Omega$ geben, wenn $|A| = |B| = 2$ gilt?
Beweisen Sie Ihre Antwort?

---

**Lösungsvorschlag**

Antwort: Nein ($\frac{1}{2}$ Pkt.)

Beweis:
Wir schreiben abkürzend $p_i = Pr(\omega_i)$
und setzen o. B. d. A. $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ mit ($\frac{1}{2}$ Pkt.)

$$Pr(A) = p_1 + p_2 \qquad \text{und} \qquad Pr(B) = p_1 + p_3 \qquad \text{und} \qquad Pr(A \cap B) = p_1.$$

Es gilt
$p_1 + p_2 + p_3 = 1.$ (1 Pkt.)
Die Unabhängikeit impliziert
$p_1 = (p_1 + p_2) \cdot (p_1 + p_3),$ (1 Pkt.)
d. h.
$p_1 = (1 - p_3) \cdot (1 - p_2) = 1 - p_3 - p_2 + p_2 \cdot p_3$
mithin
$p_1 + p_2 + p_3 = 1 = 1 + p_2 \cdot p_3.$
Wegen $p_2 \cdot p_3 \neq 0$ ist diese Gleichung aber nicht erfüllbar. (1 Pkt.)

## Aufgabe 6 (4 Punkte)

Angenommen eine Maschine gehe an jedem Betriebstag mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ kaputt.

(a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine 10 Tage hintereinander störungsfrei funktioniert?

(b) Wie gross ist die erwartete Anzahl von hintereinander folgenden störungsfreien Tagen?

---

**Lösungsvorschlag**

(a) Es wurde nicht gefordert, dass die Maschine am 11. Tag kaputt geht. (Der Gewinn wird ausbezahlt, wenn die Maschine den 10. Tag störungsfrei überstanden hat.) 10 störungsfreie Tage beobachtet man also mit der Wahrscheinlichkeit

$$p = (\tfrac{1}{2})^{10} = \tfrac{1}{1024}. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

(b) Jede Maschine, die am n. Tag kaputt geht, war (n-1) Tage störungsfrei. Die Wahrscheinlichkeit $p$, am n. Tag kaputt zu gehen, ist

$$p = (\tfrac{1}{2})^{n-1} \cdot \tfrac{1}{2} = (\tfrac{1}{2})^n. \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})$$

Die durchschnittliche Anzahl störungsfreier Tage für eine Maschine ist also

$$\mathbb{E}(\text{Anzahl störungsfreier Tage}) = \textstyle\sum_{n\geq 2} (n-1)(\tfrac{1}{2})^n, \qquad \text{(1 Pkt.)}$$

d. h.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\text{Anzahl störungsfreier Tage}) &= \tfrac{1}{4} \textstyle\sum_{n\geq 1} n \cdot (\tfrac{1}{2})^{n-1} & (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.}) \\ &= \tfrac{1}{4} \cdot \tfrac{1}{(1-\frac{1}{2})^2} = 1. & \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$