SS 2013

Zentralübung zur Vorlesung Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie (Prof. Esparza)

Dr. Werner Meixner

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

19. April 2013

ZÜ I

Übersicht:

1. Organisation
2. Ziele
3. Thema der Woche
4. Vorbereitung auf HA und TA Blatt 1

1. Organisation der Zentralübung

- Zeit: Fr 16.00–17:30 Ort: HS1

  Ausnahmen:

  Am 31. Mai entfällt die ZÜ.

- Webseite:

  http://www14.in.tum.de/lehre/2013SS/dwt/uebung/

- Kontakt Dr. W. Meixner:
  - Epost: meixner@in.tum.de
  - Telefon: 089 289 17713
  - Raum: MI 03.09.040
  - Sprechstunde: im Anschluss an die Zentralübung und n.V.
- Material:
  - Gliederung auf Folien (siehe Webseite)
  - Ausarbeitung auf Tafel oder Handfolie
  - ttt-Aufzeichnung
  - Hin.Ti's

2. Ziele der Zentralübung

Diese sind: Spezielle und Allgemeine didaktische Ziele im Sinne einer Verstärkung des Erfolges beim Studium der DWT.

Spezielle:

- **Vorbereitung und Nachbesprechung** für Tutor- bzw. Hausaufgaben der DWT Übungsblätter.
- **Persönliche Kommunikation**

Allgemeine:

- **Brückenschlag** zu verwandten Vorlesungen in der Grundausbildung.
- Informelle **Metasprache** und übergeordnete **Interpretation**
- **Thema der Woche**.

Ziel ist aber auch:

Provokation!

Beispiel:

Was bedeutet der Begriff „Ereignis“?

Ist die Zahl 5
ein „Elementarereignis“?

Was meint der Begriff
„Zufall“?

3. Thema der Woche: Informelle Begriffe der W'theorie

Bemerkung: Beachten Sie insbesondere Informationsblatt 1!

Man kann ohne zu übertreiben behaupten, dass die wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe im Zentrum jeder naturwissenschaftlichen Theoriebildung stehen.

Ebenso wahr ist aber, dass in vielen Studiengängen eben diese wahrscheinlichkeitstheoretischen Begriffe erkenntnistheoretisch falsch und insbesondere z.B. nur als „Umrahmung" der Statistik gedeutet werden.

Für die Motivation einer Beschäftigung mit Wahr'theorie ist es außerordentlich wichtig, von Anbeginn damit zu rechnen, dass die Wahrscheinlichkeitstheorie ebenso wie die Berechenbarkeitstheorie

die Logik des „Tuns“,

d.h.,
die Logik der realen Vorgänge und Prozesse zum Gegenstand hat, und damit zu den Grundlagen der Informatik gehört.

Entsprechendes gilt für die Physik.

Informelle Begriffe der W'theorie:

Ereignis

Eintreten bzw. Vorkommen von Ereignissen

Experiment

Häufigkeit

Elementarereignis

Zufall

Wahrscheinlichkeit

(usw., siehe Informationsblatt 1)

Ereignis:

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff ist Teil der natürlichen Logik, mit der wir eine sich verändernde Welt logisch analysieren.

Im Zentrum dieser Logik stehen u. a. die Begriffe „Ereignis" und „Vorgang".

Ein Ereignis „tritt ein" oder „kommt vor"
stets als „Ergebnis" eines Vorgangs.

Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab
mit dem „Eintreten" oder „Vorkommen" eines Ereignisses,
das sein Ergebnis darstellt.

Die logischen Kategorien Ereignis und Vorgang bestimmen sich gegenseitig.

Tatsächlich ist es so, dass jede Ergebnisprognose für einen realen Vorgang grundsätzlich nichts anderes sein kann als eine Annahme in einem wahrscheinlichkeitstheoretischen Raum.

Vorkommen sind zählbar:

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch Algorithmen beschrieben. In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen „Experimente“.

Der Vorgang, der bei „Ausführung“ von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten „stattfindet“, „erzeugt“ Vorkommen von Ereignissen.

Häufigkeit:

Ein wesentliches Bestimmungsmerkmal der logischen Kategorie Vorgang ist die „Wiederholbarkeit“.

Grundsätzlich können sich Vorgänge wiederholen mit „gleichen“ Ereignisvorkommen als Ergebnis. Man denke z. B. an die wiederholte Ausführung von Algorithmen oder Experimenten in einem gleichen Kontext.

Ereignisse können „mehrfach vorkommen“ und alle Vorkommen eines bestimmten Ereignisses sind gleich.
Ein Vorgang endet mit einem (wiederholten) Vorkommen eines Ereignisses.

Die Kardinalität der Multimenge der Vorkommen eines Ereignisses nennt man „Häufigkeit“ des Ereignisses. Häufigkeiten sind stets natürliche Zahlen, also insbesondere endliche Zahlen.

Abstrakt wird der Begriff der Häufigkeit durch Multimengen beschrieben, wobei eine ,,Multimenge" als eine Zusammenfassung von Vorkommen von Elementen einer Menge definiert wird.

Damit erweist sich der Multimengenbegriff als ein zentraler Begriff der Wahrscheinlichkeitsheorie.

4. Vorbereitung auf HA und TA Blatt 1

4.1 Tipps zu Hausaufgaben von Blatt 1

Die folgenden Tipps zu Hausaufgaben sind für die Bearbeitung nicht notwendig, möglicherweise aber hilfreich. Man sollte zunächst versuchen, die Hausaufgaben ohne Hilfestellung zu lösen.

ad HA 1.1:

Eine Rekonstruktion der Zeilennummern kann man dadurch darstellen, dass man an jeder Position eines 15-Tupels notiert, welcher Kanal die entsprechende Zeile gesendet hat. Dem entspricht ein Wort der Länge 15 über dem Alphabet $\{A, B, C, D\}$.

ad HA 1.2:

Beide Seiten der Gleichung sind Polynome $p(z)$ und $q(z)$, d.h. die Gleichung hat die Form $p(z) = q(z)$.

Grundsätzlich kann man die Gleichheit von Polynomen $p(z)$ und $q(z)$ überprüfen, in dem man beide Polynome auf eine Normalform bringt.

Dies erfordert beispielsweise das Ausmultiplizieren der Ausdrücke auf der rechten Seite der Gleichung, was man mit Hilfe der angegebenen Binomialformel tun kann.

Bei der Berechnung der Koeffizienten der Monome z^i ist die folgende Formel hilfreich:

$$n(n-1)n^{\underline{i-2}} = n^{\underline{i}}$$

Alternativ kann man den zweiten Hinweis berücksichtigen und $q(z)$ mit Hilfe der angegebenen Differentialquotienten darstellen,

wobei anschließend mit Summenformel zu substituieren und die Summe abzuleiten ist.

ad HA 1.3:

Man stelle das Ergebnis als Tupel $(w_1, w_2) \in \{6\}^2$ dar und setze die möglichen positiven Fälle ins Verhältinis zu den insgesamt möglichen Fällen.

ad HA 1.4:

Berücksichtigen Sie, dass sich die Gewinnwahrscheinlichkeit nicht ändert, wenn die Urnen vertauscht werden.

4.2 VA 1

1. Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von ,,Ereignis", ,,Elementarereignis" oder ,,Ergebnismenge" sprechen.

Antwort:

Die Mengenlehre gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine ,,statische" Welt logisch analysieren.

Der Wahrscheinlichkeitsbegriff gehört zu demjenigen Teil der natürlichen Logik, mit dem wir eine
sich verändernde (,,dynamische") Welt logisch analysieren.

Im Zentrum dieser Logik stehen u. a.
die Begriffe ,,Ereignis" und ,,Vorgang".

Ein Ereignis „tritt ein“ oder „kommt vor“ stets als „Ergebnis“ eines Vorgangs.

Umgekehrt schließt jeder Vorgang ab mit dem „Eintreten“ oder „Vorkommen“ eines Ereignisses, das sein Ergebnis darstellt.

Die logischen Kategorien

Ereignis und Vorgang bedingen sich gegenseitig.

Also:

Die Zahl 5 ist kein Ereignis, sondern Element einer Menge.

Die Zahl 5 stellt aber zusammen mit einem Algorithmus ein (Elementar-)Ereignis dar, das eintreten kann, wenn der Algorithmus den Wert 5 liefert.

Zusammenfassung:

Die Wahrscheinlichkeitstheorie ist auf einer ,,algorithmischen" Mengenlehre gegründet.

In der Informatik werden Vorgänge präzise durch (nicht notwendig deterministische) Algorithmen beschrieben.

In der Physik nennt man diese präzisen Beschreibungen ,,Experimente".

Der Vorgang, der bei ,,Ausführung" von (Anweisungen in) Algorithmen bzw. Experimenten ,,stattfindet", ,,erzeugt" Vorkommen von Ereignissen.

Zurück zur Aufgabenstellung von VA 1.1:

Das Ergebnis x eines Vorgangs wird beobachtet oder gemessen. Dabei wird eine Eigenschaft $E(x)$ des Ergebnisses festgestellt formal in der Form $x \in E$, wobei E eine Menge ist.

Das Ereignis wird nun als Menge E beschrieben, wobei E eine Menge von möglichen Ergebnissen ist.

Die Zusammenfassung aller möglichen (Einzel-)Ergebnisse ist die Ergebnismenge.

Jedem Ergebnis x entspricht eine kleinste Menge $E = \{x\}$, so dass $x \in E$ gilt. Diese Menge ist ein Elementarereignis und wird (leider) in der Literatur häufig von x nicht unterschieden.

2. Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

Lösung:

Sei M eine endliche Multimenge.

Dann gibt es eine Menge E und eine Funktion $h : E \to \mathbb{N}_0$,
so dass
jedes Element x' von M ein Vorkommen eines Elementes x von E ist
und
jedes $x \in E$ in M genau $h(x)$ Vorkommen besitzt.

Damit ist $\langle E, \Pr \rangle$ mit $\Pr[x] = \frac{h(x)}{|M|}$ ein diskreter endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

4.3 VA 2

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null."

   Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

Lösung:

Es gibt keinen anderen logischen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Ausführung eines Experiments und der jeweils nächsten Ausführung des Experiments
als denjenigen,
dass wiederholte Ausführungen denselben Annahmen über die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen unterliegen.

Die Aussage ist auch deshalb nicht sinnvoll,
weil Wahrscheinlichkeiten nicht festgestellt werden
(auch nicht auf der Grundlage der Ausführung von Experimenten),
sondern Annahmen über die Natur einer experimentellen Anordnung bzw. eines Algorithmus sind.

Bemerkung:

Dies steht nicht im Widerspruch dazu,
dass die Ergebnisse einer wiederholten Ausführung von Experimenten auch zu
Änderungen von Wahrscheinlichkeitsannahmen bzw. Räumen führen können.

2. Eine Box enthalte
schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle.

   Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

   Wie viele Bälle enthielt die Box zu Beginn?

   Es sei Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit vorausgesetzt.

Lösung:

Sei n die Anzahl der schwarzen Bälle in der Box.
Dann enthält die Box $3n$ Bälle.

Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch
$3n - 2$ Bälle in der Box, von denen n Stück schwarz sind.

Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen,
berechnet sich einerseits zu $\frac{n}{3n-2}$
und ist andererseits gegeben durch $\frac{2}{5}$.
Wir Lösen die Gleichung $\frac{n}{3n-2} = \frac{2}{5}$ nach n auf und erhalten $n = 4$.

Antwort: Zu Beginn enthielt die Box 12 Bälle.

4.4 VA 3

1. Geben Sie ein Beispiel
   eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.

Lösung:

Seien $\Omega = \{1, 2\}$ und $\mathrm{Pr}[1] = 1, \mathrm{Pr}[2] = 0$.

Dann ist $W = \langle\Omega, \mathrm{Pr}\rangle$
ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Denn offenbar gilt $0 \leq Pr[e] \leq 1$ für alle $e \in \Omega$
und es gilt $\sum_{e\in\Omega} \mathrm{Pr}[e] = 1$.

2. Sei $\langle\Omega, \Pr\rangle$ ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.
Für Ereignisse A und B gelte $\Pr[A] = 1$ und $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

Zeigen Sie $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

Lösung:

Aus $\quad 1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$
folgt $\quad \Pr[A \cup B] = 1.$

Wegen $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ und $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$ gilt

$$\begin{aligned} 1 = \Pr[A \cup B] &= \Pr[(A \setminus B) \cup B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] \\ &= \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Es folgt $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$.

4.5 VA 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments V das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse) A und B feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von V das Eintreten von Ereignissen X und relativen Häufigkeiten $h(X)$ wie folgt.

$$
\begin{aligned}
h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}\,,\\
h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}\,,\\
h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}
$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

Lösung:

Natürlich werden wir die Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse modellieren.

Dies impliziert zunächst, dass A und B nicht gleichzeitig als Elementarereignisse ω mit $\omega \in \Omega$ modelliert werden können.

Dann nämlich müsste das Ereignis $A \wedge B$ die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen, denn Elementarereignisse sind unvereinbar.

Wir definieren die Bezeichnungen

$$o_1 = A \wedge B\,, \quad o_2 = A \wedge \neg B\,, \quad o_3 = \neg A \wedge B\,, \quad o_4 = \neg A \wedge \neg B$$

Da die o_i paarweise widersprüchlich sind und $o_1 \vee o_2 \vee o_3 \vee o_4$ allgemeingültig (tautologisch) ist, setzen wir

$$\Omega = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}\,.$$

Die Modellierung der Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zusammen mit der Gleichung $\sum_{1\le i\le 4} \Pr(o_i) = 1$ liefert

$$\Pr(o_1) = \frac{1}{6}\,, \qquad \Pr(o_2) = \frac{1}{3}\,, \qquad \Pr(o_3) = \frac{1}{3}\,, \qquad \Pr(o_4) = \frac{1}{6}\,.$$

Wir bemerken, dass gilt

$$\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}\,.$$