HA 11.1

$$\left.\begin{array}{l}\alpha = 0.1 \\ k = 5\end{array}\right\} \chi^2_{4,0.9} \approx 7.78$$

$p_1 = 1/20 \quad p_2 = 1/20 \quad p_3 = 1/5 \quad p_4 = 2/5 \quad p_5 = 3/10$

$$T = \sum_{i=1}^{k} \frac{(h_i - np_i)^2}{np_i}$$

(a) $h_1 = 4 \quad h_2 = 5 \quad h_3 = 20 \quad h_4 = 50 \quad h_5 = 41$

$np_1 = 6 \quad np_2 = 6 \quad np_3 = 24 \quad np_4 = 48 \quad np_5 = 36$

$$\leadsto T = \frac{2^2}{6} + \frac{1^2}{6} + \frac{4^2}{24} + \frac{2^2}{48} + \frac{5^2}{36}$$

$$= \frac{48 + 12 + 48 + 6 + 50}{72} = \frac{164}{72} = 2\frac{5}{18}$$

$$= 2\frac{2,5}{9}$$

$$= 2,2\overline{7}$$

• Da $T \leq \chi_{4,0.9}$ kann H_0 nicht abgelehnt werden zum gewählten Signifikanzniveau $\alpha = 0.1$.

(5) $h_1 = 4$ $h_2 = 5$ $h_3 = 20 - r$ $h_4 = 50$ $h_5 = 41 + r$

$np_1 = 6$ $np_2 = 6$ $np_3 = 24$ $np_4 = 48$ $np_5 = 36$

$$\rightsquigarrow T = \frac{2^2}{6} + \frac{1^2}{6} + \frac{(4+r)^2}{24} + \frac{2^2}{48} + \frac{(5+r)^2}{36}$$

$$= 2{,}2\overline{7} + \frac{r^2}{24} + \frac{8}{24}r + \frac{r^2}{36} + \frac{10}{36}r$$

$$= 2{,}2\overline{7} + \frac{5}{72}r^2 + \frac{44}{72}r \overset{!}{\leq} \chi_{4,0.9} \approx 7.78$$

$$\Leftrightarrow \quad 5r^2 + 44r - 396{,}16 \overset{!}{\leq} 0$$

$$\rightsquigarrow \quad r = \frac{-44 \pm \sqrt{44^2 + 4 \cdot 5 \cdot 396{,}16}}{10}$$

$$\rightsquigarrow \quad r \leq 5{,}529\ldots \quad \rightsquigarrow r = 5 \checkmark$$

11.2

$X_1, \dots, X_n$ unabh.

$X_i \sim \Gamma(\lambda, 3)$

Dichte: $\dfrac{\lambda^3}{\Gamma(3)} x^{3-1} e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x)$

$$= \frac{\lambda^3}{2} x^2 e^{-\lambda x} I_{(0,\infty)}(x) = f_\lambda(x)$$

a) $L(\lambda; \vec{x}) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i) \underset{x_i > 0}{=} \prod_{i=1}^{n} \dfrac{\lambda^3}{2} x_i^2 e^{-\lambda x_i}$

$$= \frac{\lambda^{3n}}{2^n} \left(x_1^2 x_2^2 \cdots x_n^2\right) e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \lambda} L = 3n \frac{\lambda^{3n-1}}{2^n} \left(x_1^2 \cdots x_n^2\right) e^{-\lambda \sum x_i} - \frac{\lambda^{3n}}{2^n} \left(x_1^2 \cdots x_n^2\right) \left(\sum x_i\right) e^{-\lambda \sum x_i}$$

$$= \frac{\lambda^{3n-1}}{2^n} (x_1^2 \cdots x_n^2) \left(3n - \lambda \sum x_i\right) e^{-\lambda \sum x_i} \overset{!}{=} 0$$

$\rightsquigarrow$ ML-Schätzer: $\hat{\lambda} = \dfrac{3n}{\sum x_i} = \dfrac{3}{\overline{X}}$

ⓑ Dichte von $\hat{\lambda}$:

$$\Pr[\hat{\lambda} \leq t] \underset{t>0}{=} \Pr\left[\frac{3n}{t} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i\right]$$

$$= \int_{\frac{3n}{t}}^{\infty} f_{\Gamma(\lambda,3n)}(x)\,dx$$

$$= 1 - \int_{0}^{\frac{3n}{t}} f_{\Gamma(\lambda,3n)}(x)\,dx \checkmark$$

$\rightsquigarrow f_{\hat{\lambda}}(t) = + f_{\Gamma(\lambda,3n)}\left(\frac{3n}{t}\right) \cdot \frac{3n}{t^2} \checkmark$ für $t>0$ sonst $=0$.

$$\leadsto \mathbb{E}[\hat{\lambda}] = \int_0^\infty t \, f_{\Gamma(\lambda, 3n)}\left(\frac{3n}{t}\right) \cdot \frac{3n}{t^2} \, dt$$

$$= \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to 0 \\ (b<a)}} \int_b^a \frac{3n}{t} f_{\Gamma(\lambda,3n)}\left(\frac{3n}{t}\right) dt$$

$$\underset{t = \frac{3n}{x}}{=} \lim_{\substack{a \to \infty \\ b \to 0}} \int_{\frac{3n}{b}}^{\frac{3n}{a}} - x \, f_{\Gamma(x,3n)}(x) \, \frac{3n}{x^2} \, dx$$

$$\frac{dt}{dx} = -\frac{3n}{x^2}$$

$$= \lim_{\substack{a \to 0 \\ b \to \infty}} 3n \int_a^b \frac{\lambda^{3n}}{(3n-1)!} x^{3n-2} e^{-\lambda x} dx$$

$$= 3n \frac{\lambda}{3n-1} \underbrace{\int_0^\infty \frac{\lambda^{3n-1}}{(3n-2)!} x^{3n-2} e^{-\lambda x} dx}_{\text{Dichte von } \Gamma(\lambda, 3n-1)} = \frac{3n}{3n-1} \lambda \checkmark$$

$\rightsquigarrow \hat{\lambda}$ nur asymptotisch erwartungstreu.

(c) Konsistenz im quadratischen Mittel:

$$mse_\lambda(\hat{\lambda}) = \mathbb{E}[(\hat{\lambda}-\lambda)^2]$$

$$= \mathbb{E}[\hat{\lambda}^2] - 2\lambda\,\mathbb{E}[\hat{\lambda}] + \lambda^2$$

$$\mathbb{E}[\hat{\lambda}^2] = \int_0^\infty t^2 f_{\Gamma(\lambda,3n)}\left(\frac{3n}{t}\right)\frac{3n}{t^2}\,dt$$

$$= 3n\int_0^\infty f_{\Gamma(\lambda,3n)}(x)\,\frac{3n}{x^2}\,dx$$

$$= (3n)^2\int_0^\infty \frac{\lambda^{3n}}{(3n-1)!}\cdot x^{3n-3}e^{-\lambda x}\,dx = \frac{(3n)^2\lambda^2}{(3n-1)(3n-2)}$$

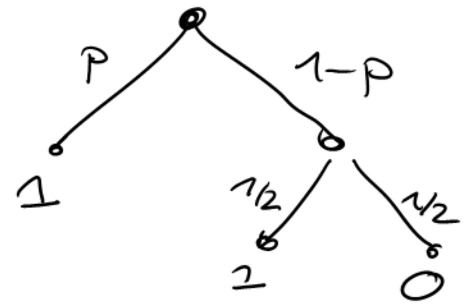
$$\rightsquigarrow \operatorname{mse}_\lambda(\hat{\lambda}) = \frac{(3n)^2}{(3n-1)(3n-2)}\lambda^2 - 2\,\frac{3n}{3n-1}\lambda^2 + \lambda^2$$

$$= \frac{3n+2}{(3n-2)(3n-1)}\lambda^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$\rightsquigarrow \hat{\lambda}$ konsistent im quadratischen Mittel.

11.3

X_i :



$\rightsquigarrow X_i \sim \mathrm{Ber}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p\right)$

$X_1, \dots, X_n$ unabhängig.

$\overline{X}$ erwartungstreuer Schätzer für $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}p$

$\rightsquigarrow T = 2\overline{X} - 1$ erwartungstreuer Schätzer für p.

$\rightsquigarrow$ Prof. Evilsparza will W'keit kontrollieren, dass er fälschlicherweise mit der Produktion beginnt.

$\rightsquigarrow$ d.h. im Fall $p=0$ soll W'keit, dass $p>0$ angenommen wird, durch α beschränkt sein

$\rightsquigarrow H_0: p=0 \quad \text{vs.} \quad H_1: p>0$

$\leadsto$ Ablehnungsbereich:

Da $\mathbb{E}[T] = p$,

d.h. T wächst mit p im Mittel,

sollte $H_0: p = 0$ abgelehnt werden,

falls T zu groß

$\leadsto$ $Pr_{p=0}[T \geq K] \leq \alpha$

$\leadsto$ Bei der gegebenen Stichprobe kann man die W'keit noch genau mittels Computer berechnen; alternativ approximiert man mittels ZGWS.