Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2006
Lösungsblatt Mittelklausur
19. Juli 2006

Diskrete Strukturen II

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 90 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......

Vorzeitig abgegeben um ......

Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ	Korrektor
Erstkorrektur								
Zweitkorrektur								

Aufgabe 1 (6 Punkte)

Markieren Sie, ob folgende Aussagen in voller Allgemeinheit gelten (J:ja/wahr, N:nein/falsch). Falls Sie ein Kästchen versehentlich angekreuzt haben, so füllen Sie beide bitte vollständig aus und malen unmittelbar rechts daneben zwei neue Kästchen: ■■ ☐☐
Für jedes falsche Kreuz wird ein Punkt abgezogen (innerhalb der Aufgabe 1).

Wenn bei 1000 fairen Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.	J	N ✔
2 verschiedene Ergebnisse $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $\langle \Omega, \Pr \rangle$ mit positiven Wahrscheinlichkeiten $\Pr[\omega_1], \Pr[\omega_2] > 0$ sind stets abhängig.	J ✔	N
Es gibt eine diskrete Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1\}$ und $\mathbb{E}[X] = 0$.	J ✔	N
Falls $\mathbb{E}[X \cdot Y] = \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y]$ gilt, dann sind zwei Zufallsvariablen X und Y voneinander unabhängig.	J	N ✔
Jede Poisson-Verteilung ist auch eine Binomialverteilung.	J	N ✔
Die Wartezeit Z bis zum ersten Eintreten eines der Ereignisse aus einer rekurrenten Ereignisfolge ist eine geometrisch verteilte Zufallsvariable.	J	N ✔

Aufgabe 2 (6 Punkte)

Geben Sie zu den folgenden Aufgaben das Ergebnis als (Bruch-)Zahl an.

Eine Urne enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle. Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{5}$ bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

Wieviele Bälle enthält die Urne zu Beginn? .... $\boxed{12}$

Es gebe 4 mal so viele Kleinfirmen wie Großfirmen. Kleinfirmen sollen durchschnittlich 2 PKW's besitzen, Großfirmen dagegen 10 PKW's. Mit welcher Wahrscheinlichkeit stammt ein aus den Autos der Firmen zufällig ausgewählter PKW

aus einer Großfirma? .... $\boxed{\mathbf{\frac{5}{9}}}$

Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable, für die

$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X]$ gilt. Berechnen Sie $\Pr[X = 2]$! .... $\boxed{\mathbf{\frac{1}{4}}}$

Lösungsvorschlag

1. Sei n die Anzahl der schwarzen Bälle.
   Es gilt $\frac{n}{3n-2} = \frac{2}{5}$.
   Daraus folgt $n = 4$, mithin ist $3n = 12$ die Anzahl der Bälle zu Beginn. (2 Pkt.)

2. Sei g die Anzahl der Großfirmen. Dann gibt es $4g$ Kleinfirmen.
   Die Anzahl p der PKW's ist $p = 10 \cdot g + 2 \cdot 4g = 18g$.
   Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $\frac{10g}{18g} = \frac{5}{9}$. (2 Pkt.)

3. Mit $f_X(i) = p(1-p)^{i-1}$ gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ und $\mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

   Nun folgt aus $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X]$ die Gleichung $p = 1 - p$, mithin $p = \frac{1}{2}$.
   Für $i = 2$ ergibt sich als Ergebnis $f_X(i) = \frac{1}{4}$. (2 Pkt.)

Aufgabe 3 (7 Punkte)

Wir gehen aus von einem Zufallsexperiment mit Ereignissen aus einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $\langle\Omega, \Pr\rangle$, bei dessen Ausführung stets mindestens eines von 3 bestimmten Ereignissen $A, B, C \subseteq \Omega$ eintritt. A und B seien unabhängige Ereignisse mit den Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}$. Es sei C disjunkt zu A und B.

1. Berechnen Sie $\Pr[A \cup B]$!
2. Berechnen Sie $\Pr[C]$!
3. Geben Sie ein konkretes Beispiel für $\langle\Omega, \Pr\rangle$ an.

Lösungsvorschlag

1.
$$\begin{aligned} \Pr[A \cup B] &= \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] && \text{(1 Pkt.)} \\ &= \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A] \cdot \Pr[B] && \text{(1 Pkt.)} \\ &= \tfrac{3}{4} && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$

2. Aus $1 = \Pr[\Omega] = \Pr[C] + \Pr[A \cup B]$ (1 Pkt.)
   folgt $\Pr[C] = \frac{1}{4}$. (1 Pkt.)

3. Sei $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ eine 4-elementige Ergebnismenge.
   Wir setzen für alle $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ $\Pr[\omega_i] = \frac{1}{4}$. (1 Pkt.)
   Dann erfüllen $A = \{\omega_1, \omega_2\}$, $B = \{\omega_1, \omega_3\}$ und $C = \{\omega_4\}$
   die gewünschten Eigenschaften. (1 Pkt.)

Aufgabe 4 (7 Punkte)

Mit einem fairen Würfel mit Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird wie folgt gespielt. Beim Start wird der Würfel 1 mal geworfen. Die geworfene Augenzahl sei x. Dem Wurf geben wir die Nummer 0. Nun wird so lange gewürfelt, bis wieder x erscheint. Die dabei geworfenen Augenzahlen y mit $y \neq x$ werden addiert. Das Ergebnis sei die Zufallsvariable Z.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X_i die Augenzahl im i-ten Wurf mit $1 \leq i \leq n-1$. Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung, dass beim Start die Augenzahl x geworfen wurde und das Spiel im n-ten Schritt endet.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel im n-ten Schritt?

3. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Z!

Lösungsvorschlag

Wir schreiben kurz $SpE = n$ für „Spielende im n-ten Schritt“.
Der Startwurf mit Nummer 0 sei X_0.

1. Sei $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $n \in \mathbb{N}$.
   Wir berechnen zunächst den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i | X_0 = x \wedge SpE = n]$ mit $1 \leq i \leq n-1$.

   Jeder Wert $y \neq x$ tritt bei X_i auf mit Wahrscheinlichkeit

   $$Pr[X_i{=}y | X_i{\neq}x] = \frac{\Pr[X_i = y \wedge X_i \neq x]}{\Pr[X_i \neq x]} = \frac{\Pr[X_i = y]}{\Pr[X_i \neq x]} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}\,.$$

   (1 Pkt.)

   Wir erhalten

   $$\mathbb{E}[X_i | X_0 = x \wedge SpE = n] \;=\; \sum_{(1 \leq y \leq 6) \wedge (y \neq x)} \frac{1}{5} \cdot y = \frac{21 - x}{5}\,,$$

   (1 Pkt.)

   und damit

   $$\mathbb{E}[Z_n | X_0 = x \wedge SpE = n] \;=\; (n-1)\frac{21 - x}{5}\,.$$

   (1 Pkt.)

2. Es gilt für alle Startwerte x und alle $n \geq 1$

   $$\Pr[SpE = n] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{1}{6}\,.$$

   (1 Pkt.)

3. Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung $SpE = n$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Z_n|SpE=n] &= \sum_{x\in[1..6]} \mathbb{E}[Z_n|SpE=n \wedge X_0=x]\cdot \Pr[X_0=x] \\ &= \sum_{x\in[1..6]} (n-1)\frac{21-x}{5}\cdot\frac{1}{6} = (n-1)\cdot 21\cdot\frac{1}{6}\,.\end{aligned}$$

(1 Pkt.)

Durch Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\mathbb{E}[Z] = \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n|SpE=n]\cdot\Pr[SpE=n]$$

(1 Pkt.)

$$\begin{aligned} &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)\cdot 21\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} \\ &= \textstyle\frac{35}{72}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\ &= \textstyle\frac{35}{72}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right)^2 = \frac{35}{2}\,.\end{aligned}$$

(1 Pkt.)

Aufgabe 5 (7 Punkte)

Aus einer Urne U_X bzw. U_Y werden zufällig Lose mit Werten $X \in \{1,2,3\}$ bzw. $Y \in \{4,5,6\}$ gezogen. Die Werte 2 und 5 sollen die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ haben, alle übrigen Werte die Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$. X und Y seien die entsprechenden unabhängigen Zufallsvariablen. Es sei $S = X + Y$. Sei S_i die i-te Wiederholung der Ziehung S und

$$Z = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i$$

der Mittelwert aus n Wiederholungen von S.

1. Berechnen Sie $\mathbb{E}[Z]$ und $\mathrm{Var}[Z]$.
2. Zeigen Sie, dass für $n \geq 20$ gilt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < 0,5] \geq 0,8\,.$$

Lösungsvorschlag

1.
$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 1\cdot\tfrac{1}{4} + 2\cdot\tfrac{1}{2} + 3\cdot\tfrac{1}{4} = 2 && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})\\
\mathbb{E}[Y] &= 4\cdot\tfrac{1}{4} + 5\cdot\tfrac{1}{2} + 6\cdot\tfrac{1}{4} = 5 && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})\\
\mathbb{E}[S] &= \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y] \qquad = 7 && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})\\
\mathbb{E}[Z] &= \tfrac{1}{n}\cdot n\cdot \mathbb{E}[S] \qquad = 7 && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})
\end{aligned}$$

Die Variation von Z berechnet sich wie folgt.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X^2] &= 1\cdot\tfrac{1}{4} + 2^2\cdot\tfrac{1}{2} + 3^2\cdot\tfrac{1}{4} &&= \tfrac{9}{2} &&\\
\mathbb{E}[Y^2] &= 4^2\cdot\tfrac{1}{4} + 5^2\cdot\tfrac{1}{2} + 6^2\cdot\tfrac{1}{4} &&= \tfrac{51}{2} && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})\\
\mathrm{Var}[X] &= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 &&= \tfrac{1}{2} &&\\
\mathrm{Var}[Y] &= \mathbb{E}[Y^2] - \mathbb{E}[Y]^2 &&= \tfrac{1}{2} &&\\
\mathrm{Var}[S] &= \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] &&= 1 && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})
\end{aligned}$$

Wir erhalten

$$\mathrm{Var}[Z] = \tfrac{1}{n^2}\cdot n\cdot \mathrm{Var}[S] \qquad = \tfrac{1}{n} \qquad (1\text{ Pkt.})$$

2. Nach Chebyshev gilt für alle $t > 0$

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| \geq t] \leq \tfrac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2} \qquad (1\text{ Pkt.})$$

bzw.

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[Z]| < t] \geq 1 - \tfrac{\mathrm{Var}[Z]}{t^2}\,.$$

Wegen $\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[S]$ folgt

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}[S]| < \tfrac{1}{2}] \geq 1 - \tfrac{4}{n} \qquad (1\text{ Pkt.})$$

und setzen

$$1 - \tfrac{4}{n} \geq 0,8 = \tfrac{4}{5}.$$

Die Ungleichung ist genau dann erfüllt, wenn gilt

$$n \geq 20. \qquad (1\text{ Pkt.})$$

Aufgabe 6 (7 Punkte)

Gegeben sei eine Zufallsvariable X mit $W_X = \{0, 1, 2\}$. Für die Dichtefunktion f_X von X gelte $f_X(1) = \frac{1}{4}$ und $f_X(2) = \frac{1}{5}$. X_i sei die i-te Wiederholung von X. Wir bilden $Z = \sum_{i=1}^{N} X_i$ in Abhängigkeit des Wertes einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen N, die den Wert 0 mit Wahrscheinlichkeit e^{-2} annehme.

1. Geben Sie die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion $G_X(s)$ der Zufallsvariablen X an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z.
3. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, mit der Z den Wert 0 annimmt.

   Hinweis: Man beachte, dass Z auch dann den Wert 0 annimmt, wenn $N = 0$ gilt.

Lösungsvorschlag

1. Es gilt
$$f_X(0) = 1 - (\tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{5}) = \tfrac{11}{20}\,,$$
und damit
$$\begin{aligned} G_X(s) &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \Pr[X = k] \cdot s^k && \text{(1 Pkt.)} \\ &= \tfrac{11}{20} + \tfrac{1}{4}s + \tfrac{1}{5}s^2\,. && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$

2. Es gilt
$$\mathbb{E}[Z] = \mathbb{E}[N] \cdot \mathbb{E}[X]\,. \qquad \text{(1 Pkt.)}$$
Für die Dichte von N gilt für alle $i \in \mathbb{N}_0$
$$f_X(i) = \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}\,,$$
also
$$f_X(0) = \tfrac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} \;=\; e^{-\lambda} \;=\; e^{-2}\,,$$
woraus folgt
$$\mathbb{E}[N] = \lambda \;=\; 2\,. \qquad (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.})$$
Weiter gilt
$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X] &= \tfrac{1}{4} + 2 \cdot \tfrac{1}{5} \;=\; \tfrac{13}{20}\,. && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.}) \\ \mathbb{E}[Z] &= \tfrac{13}{10}\,. \end{aligned}$$

3. Seien G_Z, G_N und G_X die wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktionen von Z bzw. N bzw. X. Dann gilt
$$\begin{aligned} \Pr[Z = 0] &= G_Z(0)\,. && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.}) \\ &= G_N(G_X(0))\,. && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.}) \\ &= G_N(\tfrac{11}{20})\,. && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.}) \\ &= \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-2} \cdot 2^k}{k!} \cdot (\frac{11}{20})^k\,. && (\tfrac{1}{2}\text{ Pkt.}) \\ &= e^{-2} \textstyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(\frac{11}{10})^k \;=\; e^{-2+\frac{11}{10}}\,. \\ &= e^{-\frac{9}{10}} && \text{(1 Pkt.)} \end{aligned}$$