Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Thema sind unabhängige Mengen von Ereignissen $E \subseteq \Omega$ eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p_i \in \mathbb{R}$ mit $0 \leq p_i \leq 1$ für alle $i \in [n]$.

Wir entwickeln ein Verfahren, das für den Wahrscheinlichkeitsraum W eine unabhängige Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ von n verschiedenen Ereignissen $A_i \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_i] = p_i$ konstruiert. Für die Konstruktionsschritte sind jeweils geeignete Voraussetzungen für die Existenz von Ereignissen mit bedingter Wahrscheinlichkeit p_i zu fordern.

- 1. Schritt:
  Wir wählen ein Ereignis $A_1 \subseteq \Omega$ mit $\Pr[A_1] = p_1$.

  Dann ist die Menge $\{A_1\}$ unabhängig. Beweis!

- $(k+1)$ter Schritt:
  Sei $\{A_1, A_2, \ldots, A_k\}$ eine unabhängige Menge von k Ereignissen A_i. Dann wählen wir für jedes $s = (s_1, \ldots, s_k)$ und Ereignis $A^s = \bigcap_{i \in [k]} A_i^{s_i}$ ein (Teil)-Ereignis B^s mit $B^s \subseteq A^s$ und $Pr[B^s | A^s] = p_{k+1}$ (der Exponent s_i sei definiert wie in der Vorlesung).

  Wir definieren $A_{k+1} = \bigcup_{s \in \{0,1\}^k} B^s$.

  Dann ist die Menge $\{A_1, A_2, \ldots, A_k, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge von $k+1$ Ereignissen. Beweis!

1. Beweisen Sie die Korrektheit des Verfahrens, indem Sie die Unabhängigkeit der konstruierten Mengen in beiden Schritten wie gefordert beweisen.

2. Geben Sie ein Beispiel an für Ereignisse A, B, C mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{1}{3}$, $\Pr[C] = \frac{1}{4}$, so dass die Menge $\{A, B, C\}$ unabhängig ist.

   In welchem Zusammenhang steht diese Aufgabe mit Hausaufgabe 1 von Blatt 1?

Lösungsvorschlag

(Beachten Sie die Korrektur des $(k+1)$ten Schrittes, die in der Zentralübung am Beispiel $k = 2$ vorgeführt wurde.)

Ähnlich wie bei linear unabhängigen Vektoren bezieht sich der Begriff der Unabhängigkeit stets auf eine Menge von Elementen. Insbesondere ist eine Menge S von Ereignissen genau dann unabhängig, wenn für jede endliche Teilmenge $X \subseteq S$ gilt

$$\Pr\left[\bigcap_{A \in X} A\right] = \prod_{A \in X} \Pr[A] \,.$$

1. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[A_{k+1}]$ wird mit dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit berechnet.

$$\begin{aligned}
\Pr[A_{k+1}] &= \Pr[\bigcup_{s\in\{0,1\}^k} B^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[B^s|A^s]\cdot\Pr[A^s] \\
&= \sum_{s\in\{0,1\}^k} p_{k+1}\cdot\Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\sum_{s\in\{0,1\}^k} \Pr[A^s] \\
&= p_{k+1}\,.
\end{aligned}$$

1. Schritt:
Im Fall einer einelementigen Ereignismenge $\{A_1\}$ haben wir nur für $X = \{A_1\}$ die Gleichung $\Pr[\bigcap_{A\in\{A_1\}} A] = \prod_{A\in\{A_1\}} \Pr[A]$ zu beweisen, die trivialerweise gilt.

2. Schritt:
Die Menge der Durchschnitte A^s mit $s = (s_1,\ldots,s_k)$ ist im Falle der Unabhängigkeit eine 2^k-Partition von Ω. Bei der Konstruktion eines Ereignisses A_{k+1}, so dass $\{A_1, A_2, \ldots, A_{k+1}\}$ eine unabhängige Menge ist, unterteilt man jede dieser Klassen A^s in konstantem Verhältnis p_{k+1} zu $1-p_{k+1}$.

Wir gehen nach Lemma 23 der Vorlesung vor und zeigen für alle $s \in \{0,1\}^{k+1}$ die Gleichung $\Pr[A^s] = \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]$.

Falls $s_{k+1} = 1$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap A_{k+1} = B^{(s_1,\ldots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr[B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= p_{k+1}\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \;=\; \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.
\end{aligned}$$

Falls $s_{k+1} = 0$, dann gilt $A^s = (\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}) \cap \overline{A_{k+1}} = A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}$ und wir erhalten

$$\begin{aligned}
\Pr[A^s] &= \Pr[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)}] \\
&= \Pr[A^{(s_1,\ldots,s_k)} \setminus B^{(s_1,\ldots,s_k)} \mid \bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= (1-p_{k+1})\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \\
&= \Pr[A_{k+1}^{s_{k+1}}]\cdot\Pr[\bigcap_{i\in[k]} A_i^{s_i}] \;=\; \prod_{i\in[k+1]} \Pr[A_i^{s_i}]\,.
\end{aligned}$$

2. Wir wählen $\Omega = [24]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{24}$ für alle $x \in \Omega$. Wir benützen die Schreibweisen des obigen Verfahrens zusammen mit Intervallen $[a, b] = \{a, a+1, \ldots, b\} \subseteq \mathbb{N}$.

   Sei $A = A_1 = [1, 12]$. Dann gilt $\Pr[A] = \frac{1}{2}$.

   Es folgen $A^{(1)} = [1, 12]$ und $A^{(0)} = [13, 24]$.

   Seien $B^{(1)} = [9, 12]$ und $B^{(0)} = [13, 16]$. Dann gilt $A_2 = B^{(1)} \cup B^{(0)} = [9, 16]$.

   Wir setzen $B = A_2$ und erhalten $\Pr[B] = \frac{1}{3}$.

   Wir haben nun die Partition

$$\begin{aligned} A^{(1,1)} &= A_1 \cap A_2 &= [9, 12]\,, \\ A^{(0,1)} &= \overline{A_1} \cap A_2 &= [13, 16]\,, \\ A^{(1,0)} &= A_1 \cap \overline{A_2} &= [1, 8]\,, \\ A^{(0,0)} &= \overline{A_1} \cap \overline{A_2} &= [17, 24]\,. \end{aligned}$$

   Seien $B^{(1,1)} = \{9\}$, $B^{(0,1)} = \{16\}$, $B^{(1,0)} = \{7, 8\}$ und $B^{(0,0)} = \{17, 18\}$.
   Dann gilt $A_3 = B^{(1,1)} \cup B^{(0,1)} \cup B^{(1,0)} \cup B^{(0,0)} = [7, 9] \cup [16, 18]$.

   Wir setzen $C = A_3$ und erhalten $\Pr[C] = \frac{1}{4}$.

   Die Menge aller Vereinigungen von Durchschnitten A^s bildet eine Boolsche Algebra.