Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungen der Klausur
31. Juli 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 120 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	Σ	Korrektor
Erstkorrektur							
Zweitkorrektur							

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Falls $X \sim \mathcal{N}(0,1)$ und $Y \sim \mathcal{N}(0,2)$ normalverteilt sind, dann folgt $\mathrm{Var}[X+Y] = 3$.
2. Seien X und Y standardnormalverteilt. Dann gilt $\Pr[X \leq 0] = \Pr[Y \geq 0]$.
3. Bei kontinuierlichen Zufallsvariablen existiert stets der Erwartungswert.
4. Es gibt irreduzible Markov-Ketten mit Übergangsmatrizen, deren Diagonalelemente alle gleich Null sind.
5. Seien $X \sim \mathrm{Po}(1)$ und $Y \sim \mathrm{Bin}(n, \frac{1}{n})$. Dann gilt $|\Pr[X=2n] - \Pr[Y=2n]| < 2^{-n}$.
6. Sei X exponentialverteilt. Dann gilt $\Pr[X > 2 \mid X > 1] + \Pr[X \leq 1] = 1$.
7. Für erwartungstreue Schätzvariable ist der Bias gleich 1.
8. Eine Ereignisfolge $H_1, H_2, \ldots$ ist rekurrent, wenn es für alle i ein j mit $i < j$ gibt, so dass $H_i = H_j$ gilt.

Lösungsvorschlag

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es jeweils einen $\frac{1}{2}$ Punkt.

1. Falsch! Begründung: Das ist allgemein nur richtig, wenn X und Y unabhängig sind.
2. Wahr! Es gilt $\Pr[X \leq 0] = \frac{1}{2} = \Pr[Y \leq 0] = 1 - \Pr[Y \leq 0] = \Pr[Y \geq 0]$.
3. Falsch! Begründung: Durch Vertauschung von Abschnitten der Dichtefunktion können den kleinen Dichtewerten beliebig hohe Werte der Variablen zugeordnet werden.
4. Wahr! Beispiel: Alle $pij \neq 0$, wenn $i \neq j$.
5. Wahr! Begründung: $\Pr[Y = 2n] = 0$ und $\Pr[X = 2n] = \frac{e^{-1}}{(2n)!} < 2^{-n}$.
6. Wahr! Begründung: Da die Exponentialverteilung gedächtnislos ist, gilt $\Pr[X > 2 \mid X > 1] = \Pr[X > 1] = 1 - \Pr[X \leq 1]$.
7. Falsch! Für erwartungstreue Schätzvariable ist der Bias gleich 0.
8. Falsch!

Aufgabe 2 (8 Punkte)

Sei $a > 0$ und seien X, Y kontinuierliche Zufallsvariable mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a - a\cdot(x+y) & : \quad 0 \leq x,\, 0 \leq y,\; x+y \leq 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

1. Bestimmen Sie a.
2. Berechnen Sie die Randdichte $f_X(x)$.
3. Bestimmen Sie den Wert der Verteilungsfunktion $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.
4. Zeigen Sie die Abhängigkeit der Variablen X und Y.

Lösungsvorschlag

1. $a = 6$.

   Das Integral von $f_{X,Y}$ über den R^2 ist gleich dem Rauminhalt V_P einer Pyramide der Höhe a und Grundfläche 1/2, mithin $V_P = \frac{a}{3} \cdot \frac{1}{2}$.
   Wir setzen $V_P = 1$ und erhalten $a = 6$. (2 P.)

   Alternativ integriert man über die Randdichte f_X.

2. $f_X(x) = 3 \cdot (1-x)^2$. Berechnung:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \\ &= 6 \cdot \int_0^{1-x} (1-x-y)\,\mathrm{d}y && \text{(1 P.)} \\ &= 6 \cdot \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1-x} = 3 \cdot (1-x)^2 \,. && \text{(1 P.)} \end{aligned}$$

3. $F_{X,Y}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$. Berechnung:

$$\begin{aligned} F_{X,Y}(\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{\frac{1}{2}} f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} 6 \cdot \left[-\frac{(1-x-y)^2}{2} \right]_{y=0}^{y=\frac{1}{2}} \mathrm{d}x && \text{(1 P.)} \\ &= \int_0^{\frac{1}{2}} \left(\frac{9}{4} - 3x \right) \mathrm{d}x \\ &= \left[\frac{9}{4}x - \frac{3}{2}x^2 \right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{3}{4} \,. && \text{(1 P.)} \end{aligned}$$

4. Für $(x,y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$: $f_{X,Y}(x,y) = 6 - 6(x+y) \neq 6 \cdot \frac{(1-x)^2}{2} \cdot 6 \cdot \frac{(1-y)^2}{2} = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.
   (2 P.)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

Wir testen einen Würfel, der im Verdacht steht, mit erhöhter Wahrscheinlichkeit p die Eins zu liefern. Eine Stichprobe von vier unabhängigen Würfen liefere 3 Mal die Eins.

1. Formulieren Sie einen Test zur Überprüfung der Hypothese $H_0 : p \le \frac{1}{4}$, die Sie ablehnen, wenn bei 4 Würfen mindestens 3 Mal eine Eins gewürfelt wird. Berechnen Sie den Wert des Fehlers 1. Art.
2. Welcher Wert von p würde die Wahrscheinlichkeit der obigen Stichprobe am größten machen? Begründung!
3. Bestimmen Sie zu Ihrem Test den Wert des Fehlers 2. Art unter der Annahme, dass $p > \frac{3}{4}$ ausgeschlossen werden kann.

Lösungsvorschlag

1. Seien X_1, X_2, X_3, X_4 gleichverteilte Indikatorvariable mit Erfolgswahrscheinlichkeit p. Dann gilt $Z = \sum_{i=1}^{4} X_i \sim \mathrm{Bin}(4, p)$. Der Ablehnungsbereich sei $\tilde{K} = \{3, 4\}$.

   (1 P.)

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \max_{p \le \frac{1}{4}} \Pr[Z \in \tilde{K}] \\ &= \max_{p \le \frac{1}{4}} \{\tbinom{4}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p) + \tbinom{4}{4} \cdot p^4\} \\ &= \max_{p \le \frac{1}{4}} \{4p^3 - 3p^4\} \\ &= \tfrac{13}{256}\,.\end{aligned}$$

   (2 P.)

   Die Bestimmung des Maximums geschieht mit Hilfe der Nullstellen 0 und 1 der Ableitung $f'(p) = 12p^2(1-p)$ von $f(p) = 4p^3 - 3p^4$. (1 P.)

2. Das Maximum-Likelihood Verfahren liefert $p = \frac{3}{4}$. (1 P.)

3. Die echte Alternative zu H_0 ist also $H_1 : \frac{1}{4} \le p \le \frac{3}{4}$. (1 P.)

$$\begin{aligned}\alpha_2 &= \max_{\frac{1}{4} \le p \le \frac{3}{4}} \Pr[Z \notin \tilde{K}] \\ &= \max_{\frac{1}{4} \le p \le \frac{3}{4}} (1 - \Pr[Z \in \tilde{K}]) \\ &= \max_{\frac{1}{4} \le p \le \frac{3}{4}} \{1 - (4p^3 - 3p^4)\} \\ &= \max_{p = \frac{1}{4}} \{1 - (4p^3 - 3p^4)\} \\ &= \tfrac{243}{256}\,.\end{aligned}$$

   (2 P.)

   Die Maximumbestimmung ist analog wie in Teilaufgabe 1.

Aufgabe 4 (10 Punkte)

Gegeben sei die Übergangsmatrix P einer Markov-Kette M mit Zuständen $S = \{0, 1, 2, 3\}$ wie folgt:

$$P = \begin{pmatrix} 0{,}4 & 0{,}6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0{,}8 & 0{,}2 \\ 0 & 0{,}2 & 0{,}8 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Zeichnen Sie ein Übergangsdiagramm für M.
2. Bestimmen Sie die Menge der transienten Zustände. Begründung!
3. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit $f_{0,2}$. Dabei muss jeweils der Rechenweg aus dem Protokoll hervorgehen.
4. Zeigen Sie, dass M eine eindeutige stationäre Verteilung q^T besitzt.

Lösungsvorschlag

1. Zeichnung. (1 P.)
2. Menge trans. Zustände $= \{0, 1, 2\}$.

   Begründung: Es gibt jeweils einen in 0 bzw. 1 bzw. 2 beginnenden Pfad zum Zustand 3, der keine Verlängerung zurück nach 0 bzw. 1 bzw. 2 besitzt.

   (2 P.)
3. Es gilt

$$\begin{aligned} & f_{0,2} &=& \; p_{0,2} + p_{0,0} \cdot f_{0,2} + p_{0,1} \cdot f_{1,2} + p_{0,3} \cdot f_{3,2} \\ & &=& \; 0 + 0{,}4 \cdot f_{0,2} + 0{,}6 \cdot f_{1,2} + 0 \\ \Longrightarrow \; & f_{0,2} &=& \; f_{1,2}\,. \end{aligned} \qquad (2 \text{ P.})$$

$$\begin{aligned} & f_{1,2} &=& \; p_{1,2} + p_{1,0} \cdot f_{0,2} + p_{1,1} \cdot f_{1,2} + p_{1,3} \cdot f_{3,2} \\ & &=& \; 0{,}8 + 0 + 0 + 0{,}2 \cdot \underbrace{f_{3,2}}_{=0} \\ & &=& \; 0{,}8 \\ \Longrightarrow \; & f_{0,2} &=& \; 0{,}8\,. \end{aligned} \qquad (2 \text{ P.})$$

4. $q^T = (0, 0, 0, 1)$.

   Entweder durch Lösung der Gleichung $q^T = q^T P$.

   Oder mit der Überlegung, dass wegen Wahrscheinlichkeiten $f_{0,3} = 1, f_{1,3} = 1, f_{2,3} = 1$ mit dem absorbierenden Zustand 3 keine andere Verteilung stationär sein kann.

   (3 P.)

Aufgabe 5 (6 Punkte)

Seien $X_1, X_2, \ldots, X_{100}$ unabhängige Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit gleicher Erfolgswahrscheinlichkeit $\frac{1}{50}$. Sei $S_{100} = \sum_{i=1}^{100} X_i$.

1. Berechnen Sie Zahlen $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$, so dass $\mathbb{E}[Y] = 0$ und $\text{Var}[Y] = 1$ für $Y = a \cdot S_{100} + b$ gelten.

2. Wenden Sie den zentralen Grenzwertsatz an zur approximativen Berechnung eines Intervalls $[d_1, d_2]$, so dass

$$\Pr[d_1 \le S_{100} \le d_2] \;\approx\; 1 - \alpha = 1 - 0.05\,.$$

   Benutzen Sie dabei das Quantil $c = x_{1-\frac{\alpha}{2}} \approx 1.96$ der Standardnormalverteilung.

Lösungsvorschlag

1. $\mathbb{E}[S_{100}] = 100 \cdot \frac{1}{50} = 2$.
   $\text{Var}[S_{100}] = 2 \cdot (1 - \frac{1}{50}) = \frac{49}{25}$. (1 P.)
   Aus $\mathbb{E}[Y] = a \cdot \mathbb{E}[S_{100}] + b$ folgt $0 = 2a + b$. (1 P.)
   Aus $\text{Var}[Y] = a^2 \text{Var}[S_{100}]$ folgt $1 = a^2 \cdot \frac{49}{25}$. (1 P.)
   Mithin $a = \frac{5}{7}$ und $b = -\frac{10}{7}$.

2. Ansatz: $\Pr[d_1 \le S_{100} \le d_2] = \Pr[-c \le Y \le c] = 1 - \alpha$. (1 P.)
   Mit $Y = a \cdot S_{100} + b$ ergibt sich $d_1 = \frac{-c-b}{a} = \ldots$ und $d_2 = \frac{c-b}{a} = \ldots$. (2 P.)