Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Lösungsblatt 7
15. Juni 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Tutoraufgabe 1

Sei $\mathcal{M}$ eine Menge von Teilmengen aus Ω. Bei der von $\mathcal{M}$ erzeugten σ-Algebra, welche wir mit $\sigma(\mathcal{M})$ bezeichnen, handelt es sich um die kleinste σ-Algebra, die alle Mengen aus $\mathcal{M}$ enthält. Bestimmen Sie $\sigma(\mathcal{M})$ für $\mathcal{M} = \{\{1,2\},\{2,4\}\}$ über der Grundmenge $\Omega = [4]$.

Lösungsvorschlag

Jede σ-Algebra enthält nach Definition die Grundmenge Ω. Nach Angabe muss außerdem $\mathcal{M}$ eine Teilmenge von $\sigma(\mathcal{M})$ sein. Allgemein können wir $\sigma(\mathcal{M})$ iterativ erzeugen, indem wir die Menge $\mathcal{M} \cup \{\Omega\}$ abwechselnd unter Komplement und Vereinigung abschließen. Erreichen wir durch diese Konstruktion einen Fixpunkt, so handelt es sich bei der so gewonnenen Menge um eine σ-Algebra und mittels induktiver Argumentation wird klar, dass diese kleinstmöglich ist. In unserem konkreten Fall lohnt es sich allerdings etwas geschickter vorzugehen. Zunächst stellen wir fest, dass sich jede der Menge $\{i\}$, für $1 \leq i \leq 4$, durch Vereinigung und Komplement der Elemente aus $\mathcal{M}$ bilden lässt:

$$\begin{aligned}
\{3\} &= \Omega \setminus (\{1,2\} \cup \{2,4\}) \\
\{4\} &= \Omega \setminus (\{1,2\} \cup \{3\}) \\
\{1\} &= \Omega \setminus (\{2,4\} \cup \{3\}) \\
\{2\} &= \Omega \setminus (\{1\} \cup \{3\} \cup \{4\}).
\end{aligned}$$

Somit muss jede dieser Mengen in $\sigma(\mathcal{M})$ enthalten sein. Außerdem wissen wir, dass die leere Menge in $\sigma(\mathcal{M})$ enthalten ist, da es sich um das Komplement von Ω handelt. Tatsächlich ist die leere Menge in jeder σ-Algebra enthalten. Da wir durch Vereinigung der Mengen $\{i\}$ und $\emptyset$ alle möglichen Teilmengen von Ω erzeugen können, handelt es sich bei $\sigma(\mathcal{M})$ schlicht um die Potenzmenge von Ω, also $\mathcal{P}(\Omega)$.

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten eine kontinuierliche Zufallsvariable X mit der dazugehörigen Dichtefunktion $f_X(x) = c(1-x^4)$ für alle x zwischen -1 und 1 und $f_X(x) = 0$ für alle anderen x. Bestimmen Sie den Parameter c sowie Erwartungswert und Varianz von X.

Lösungsvorschlag

Nach der Vorlesung ist $f_X(x)$ eine Dichtefunktion, wenn sie integrierbar ist und außerdem $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$ gilt. Man beachte, dass die Funktion $f_X(x)$ in unserem Fall gerade ist, was heißt, dass ihr Graph symmetrisch zur y-Achse ist. Um den Parameter c zu bestimmen rechnen wir daher

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 2\int_0^1 c \cdot (1-x^4)\mathrm{d}x = 2c \cdot \left[x - \frac{x^5}{5}\right]_0^1 = c \cdot \frac{8}{5}.$$

Folglich muss c gleich $\frac{5}{8}$ sein. Sofern das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) \mathrm{d}x$ endlich ist, ist der Erwartungswert von X ist definiert als

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x.$$

Nachdem $f(x)$ gerade ist, ist auch $|x| \cdot f_X(x)$ gerade, was uns die Rechnung erleichtert. Somit erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x) \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 c \cdot (x - x^5) \mathrm{d}x = 2c \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \frac{2c}{3},$$

woraus wir schließen, dass der Erwartungswert von X tatsächlich existiert. Um $\mathbb{E}[X]$ genau zu bestimmen, nutzen wir aus, dass die Funktion $x \cdot f_X(x)$ ungerade, also symmetrisch zum Punkt $(0,0)$ ist. Demnach gilt

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{0} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x = -\int_0^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x + \int_0^{\infty} x \cdot f_X(x) \mathrm{d}x = 0.$$

Für die Varianz müssen wir noch zusätzlich den Erwartungswert von X^2 bestimmen. Erneut handelt es sich um eine gerade Funktion. Wir rechnen daher

$$\mathbb{E}[X^2] = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 \cdot f_X(x) \mathrm{d}x = 2 \int_0^1 c \cdot (x^2 - x^6) \mathrm{d}x = 2c \left[\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right]_0^1 = \frac{8c}{21}$$

und erhalten eine Varianz von

$$\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = \frac{5}{8} \cdot \frac{8}{21} - 0 = \frac{5}{21}.$$

Tutoraufgabe 3

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit einer abschnittsweise definierten Verteilungsfunktion

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x \leq 0 \\ x & \text{falls } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \text{falls } \frac{1}{2} < x \leq \ln(2) \\ 1 - e^{-x} & \text{falls } x > \ln(2) \end{cases}.$$

1. Zeigen Sie, dass $F_X(x)$ eine Verteilungsfunktion ist und geben Sie eine zugehörige Dichte an.

2. Sei U eine kontinuierliche Zufallsvariable, die auf dem Intervall $(0,1)$ gleichverteilt ist. Beschreiben Sie, wie X durch U simuliert werden kann.

Lösungsvorschlag

Damit eine Funktion eine zulässige Verteilungsfunktion ist, muss sie monoton steigen, stetig sein und sowohl $\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = 0$ als auch $\lim_{x\to\infty} F_X(x) = 1$ erfüllen. Da $F_X(x)$ abschnittsweise durch stetige Funktionen definiert ist, müssen wir nur die Übergänge zwischen den Definitionsabschnitten untersuchen, um Stetigkeit nachzuweisen. Durch einfaches Nachrechnen an den Stellen $x = 0$, $x = \frac{1}{2}$ und $x = \ln(2)$ sehen wir, dass

$$\begin{aligned}
F_X(0) &= \lim_{x\to 0^-} 0 = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2} = 0,\\
F_X(\frac{1}{2}) &= \lim_{x\to \frac{1}{2}^-} x = \lim_{x\to \frac{1}{2}^+} \frac{1}{2} = \frac{1}{2},\\
F_X(\ln(2)) &= \lim_{x\to \ln(2)^-} \frac{1}{2} = \lim_{x\to \ln(2)^+} 1 - e^{-x} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

gilt und das Kriterium der Stetigkeit somit erfüllt ist. Nachdem unsere Funktion stetig ist und jeder einzelne Abschnitt durch eine monoton steigende Funktion definiert ist, muss auch $F_X(x)$ monoton steigen. Zusätzlich gilt

$$\lim_{x\to-\infty} F_X(x) = \lim_{x\to-\infty} 0 = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to\infty} F_X(x) = \lim_{x\to\infty} 1 - e^{-x} = 1.$$

Somit erfüllt $F_X(x)$ alle Anforderungen an eine Verteilungsfunktion. Wir können $F_X(x)$ also eine Dichtefunktion $f_X(x)$ zuordnen. Dazu setzen wir $F'_X(x)$ an allen Definitionslücken linksseitig fort und erhalten

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \\ 1 & \text{für } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{für } \frac{1}{2} < x \leq \ln(2) \\ e^{-x} & \text{für } x > \ln(2) \end{cases}.$$

Betrachten wir nun die Simulation durch U. Da unsere Verteilungsfunktion nicht streng monoton steigt, müssen wir den Simulationsansatz der Vorlesung anpassen. Insbesondere ist die Umkehrfunktion zu $F_X(x)$ nicht definiert. Wir nutzen stattdessen die Funktion $G_X : (0,1) \to \mathbb{R}$ mit $G_X(x) = \inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = x\}$. Für unsere Verteilungsfunktion gilt

$$G_X(x) = \begin{cases} x & \text{für } 0 < x \leq \frac{1}{2} \\ \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) & \text{für } \frac{1}{2} < p < 1 \end{cases}.$$

Zum Abschluss müssen wir nur noch zeigen, dass $G_X(U)$ die selbe Verteilung wie X besitzt. Dabei orientieren wir uns an der Vorlesung und rechnen

$$\begin{aligned}
\Pr\left[G_X(U) \leq t\right] &= \Pr\left[F_X(G_X(U)) \leq F_X(t)\right]\\
&= \Pr\left[F_X(\inf\{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = U\}) \leq F_X(t)\right]\\
&= \Pr\left[U \leq F_X(t)\right]\\
&= F_U(F_X(t))\\
&= F_X(t)\\
&= \Pr[X \leq t].
\end{aligned}$$

Der vorletzte Schritt der Gleichungskette folgt aus der Beobachtung, das $F_X(t) < 1$ gilt.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Die Klasse der Borel'schen Mengen $\mathcal{B}$ ist definiert als Menge aller Teilmengen der reellen Zahlen, die sich durch abzählbar viele Vereinigungen und Komplemente von geschlossenen Intervallen $[x, y]$, mit $x, y \in \mathbb{R}$ und $x \leq y$, erzeugen lassen. Bei $\mathcal{B}$ handelt es sich also um eine durch geschlossene Intervalle erzeugte σ-Algebra.

1. Zeigen Sie, dass die Intervalle $[x, y)$, (x, y) und $[x, \infty)$ für beliebige reelle Zahlen $x < y$ ebenfalls Borel'sche Mengen sind.

2. Beweisen Sie, dass die Menge der rationalen Zahlen eine Borel'sche Menge ist.

Lösungsvorschlag

Um zu beweisen, dass eine Menge an reellen Zahlen Borel'sch ist, müssen wir einen Weg finden, diese durch abzählbar viele Vereinigungen und Komplemente von geschlossenen Intervallen auszudrücken. Für ein Intervall $[x, y)$ ist diese Konstruktion folgendermaßen

$$[x, y) = [x, y] \cap (\mathbb{R} \setminus [y, y]) = \mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus [x, y]) \cup [y, y]).$$

Durch ähnliche Argumentation kann man auch zeigen, dass $(x, y]$ eine Borel'sche Menge ist. Schneidet man diese beiden halboffenen Intervalle erhält man außerdem

$$(x, y) = [x, y) \cap (x, y] = \mathbb{R} \setminus ((\mathbb{R} \setminus [x, y)) \cup (\mathbb{R} \setminus (x, y])),$$

was zeigt, dass auch das offene Intervall (x, y) Borel'sch ist. Beim letzten Intervall der ersten Teilaufgabe nutzen wir eine abzählbar unendliche Vereinigung und erhalten

$$[x, \infty) = \bigcup_{i=\lceil x \rceil}^{\infty} [x, i].$$

Für die zweite Teilaufgabe beobachten wir, dass sich jede rationale Zahl $x \in \mathbb{Q}$ als Borel'sche Menge $[x, x]$ darstellen lässt. Nachdem es nur abzählbar viele rationale Zahlen gibt, ist $\mathbb{Q}$ ebenfalls eine Borel'sche Menge welche sich wie folgt erzeugen lässt

$$\mathbb{Q} = \bigcup_{x \in \mathbb{Q}} [x, x].$$

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten einen Kreis $K = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - p_1\|_2 = 1\}$ um den Mittelpunkt $p_1 = (0, 0)^T$ mit Radius 1, sowie eine Gerade $G = \{p_2 + r \cdot v \in \mathbb{R}^2 \mid r \in \mathbb{R}\}$ durch den Punkt $p_2 = (0, 1)^T$ mit zufälliger Richtung $v \in \mathbb{R}^2$. Angenommen der Winkel φ zwischen den Vektoren $(-1, 0)^T$ und v ist gleichverteilt auf dem Intervall $[0, \pi]$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Sehne, die sich aus dem Schnittpunkten zwischen K und G ergibt, mindestens Länge 1 hat?

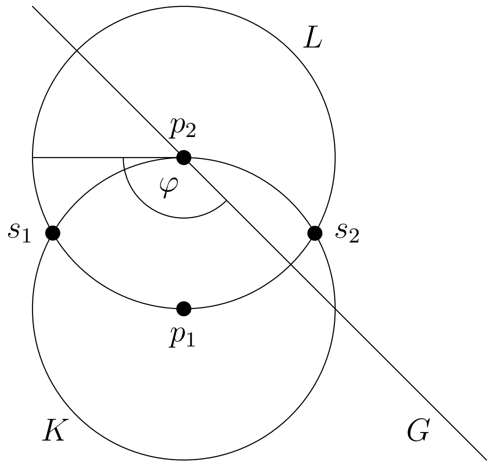

Abbildung 1: Skizze zu Hausaufgabe 2

Lösungsvorschlag

Um diese Aufgabe zu lösen ist es hilfreich, eine Skizze anzufertigen. Dazu betrachten wir einen zweiten Kreis $L = \{p \in \mathbb{R}^2 \mid \|p - p_2\|_2 = 1\}$ mit Mittelpunkt p_2 und Radius 1. Seien s_1 und s_2 nun die beiden Punkte, an denen sich K und L schneiden. Die jeweiligen Winkel zwischen den Vektoren $(-1,0)^T$ und $s_1 - p_2$ bzw. $s_2 - p_2$ bezeichnen wir mit χ_1 bzw. χ_2. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit gehen wir davon aus, dass $\chi_1 < \chi_2$. An einer Skizze erkennt man, dass die Länge der Sehne genau dann mindestens 1 ist, wenn φ im Intervall $[\chi_1, \chi_2]$ liegt. Um χ_1 zu bestimmen betrachten wir nun das Dreieck, welches sich aus den Punkten p_1, p_2 und s_1 ergibt. Per Definition von s_1 handelt es sich um ein gleichseitiges Dreieck. Somit ist der Winkel zwischen $s_1 - p_2$ und $p_1 - p_2$ gleich $\frac{\pi}{3}$. Außerdem ist bekannt, dass Vektoren $(-1,0)^T$ und $p_1 - p_2$ rechtwinklig zueinander sind. Der gesuchte Winkel χ_1 ist also

$$\chi_1 = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}.$$

Unter Ausnutzung der Symmetrie zwischen s_1 und s_2 könne wir auch unmittelbar χ_2 angeben, nämlich $\frac{5\pi}{6}$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt also

$$\Pr\left[\frac{\pi}{6} \le \varphi \le \frac{5\pi}{6}\right] = F_\varphi\left(\frac{5\pi}{6}\right) - F_\varphi\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\frac{5\pi}{6} - \frac{\pi}{6}}{\pi} = \frac{2}{3}.$$

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage. Eine σ-Algebra $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ enthält entweder endlich viele oder überabzählbar unendlich viele Elemente.

Hinweise: Sei $\mathcal{M}$ eine unendliche Menge disjunkter Mengen. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass die Menge $\{\bigcup_i^\infty A_i \mid A_i \in \mathcal{M}\}$ überabzählbar ist.

Lösungsvorschlag

Die Aussage ist wahr. Um dies zu beweisen, zeigen wir, dass jede unendliche σ-Algebra $\mathcal{A}$ eine überabzählbare Teilmenge enthält. Sei dazu $\mathcal{M}$ eine Teilmenge von $\mathcal{A}$. Gemäß der Definition einer σ-Algebra wissen wir, dass die Menge $\{\bigcup_i^\infty A_i \mid A_i \in \mathcal{M}\}$ ebenfalls in $\mathcal{A}$ enthalten sein muss. Sollte $\mathcal{M}$ aus paarweise disjunkten Menge bestehen und unendlich groß sein, so folgt aus dem Hinweis, dass $\{\bigcup_i^\infty A_i \mid A_i \in \mathcal{M}\}$ überabzählbar ist. Somit bleibt nur noch zu zeigen, dass eine solche Menge $\mathcal{M}$ existiert. Angenommen es gebe keine unendliche Teilmenge von $\mathcal{A}$ aus paarweise disjunkten Mengen. Ist dies der Fall, dann muss es zumindest eine größte Menge $\mathcal{M}$ aus paarweise disjunkten Menge geben. Nachdem $\mathcal{A}$ unendlich groß ist, muss es außerdem ein Element $A \in \mathcal{A}$ geben, welches nicht in $\mathcal{M}$ vorhanden ist. Wir wissen bereits, dass A nicht disjunkt zu jedem Element in $\mathcal{M}$ sein kann, da dies die Maximalität von $\mathcal{M}$ verletzen würde. Folglich existiert ein $B \in \mathcal{M}$, so dass $A \cap B \neq \emptyset$. Das bedeutet aber auch, dass wir B durch Vereinigen und Komplementbildung in zwei disjunkte und gleichzeitig nicht leere Teilmengen aufspalten können, nämlich

$$B \cap A = \Omega \setminus ((\Omega \setminus A) \cup (\Omega \setminus B)) \quad \text{und} \quad B \setminus A = \Omega \setminus ((\Omega \setminus B) \cup (B \cap A)).$$

Somit sind sowohl $B \cap A$ als auch $B \setminus A$ in $\mathcal{A}$ enthalten. Ersetzt man nun B in der Menge $\mathcal{M}$ durch $B \cap A$ und $B \setminus A$, so ergibt sich eine neue Menge paarweise disjunkter Mengen, die größer als $\mathcal{M}$ ist. Dies ist ein Widerspruch zur Maximalität von $\mathcal{M}$. Daraus folgt, dass eine unendliche Menge $\mathcal{M}$ existieren muss, was den Beweis abschließt.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(x) = \frac{c}{1+x^2}$.

1. Bestimmen Sie den Parameter c, so dass $f_X(x)$ eine gültige Dichte ist.
2. Existiert der Erwartungswert von X?

Hinweise: Verwenden Sie in der ersten Teilaufgabe die Substitution $x = \tan(\varphi)$ für das Intervall $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$

Lösungsvorschlag

Aus der Vorlesung ist bekannt, dass die Funktion $f_X(x)$ genau dann eine gültige Dichte ist, wenn sie integrierbar ist und $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = 1$ gilt. Mithilfe des Hinweises werten wir das Integral durch Substitution $x = \tan(\varphi)$ aus. Da die Ableitung der Tangensfunktion $\frac{1}{(\cos(x))^2}$ ist, erhalten wir

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1+x^2}\mathrm{d}x = c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+(\tan(\varphi))^2} \cdot \frac{1}{(\cos(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi.$$

Mithilfe trigonometrischer Sätze, insbesondere $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ und $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$, können wir dies auflösen und erhalten

$$c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{1+\left(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}\right)^2} \cdot \frac{1}{(\cos(\varphi))^2} = c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{(\cos(\varphi))^2 + (\sin(\varphi))^2}\mathrm{d}\varphi = c\int_{-\pi/2}^{\pi/2} 1\mathrm{d}\varphi = c\pi.$$

Folglich muss der Parameter c gleich $\frac{1}{\pi}$ sein. Damit der Erwartungswert von X existiert, muss das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$ endlich sein. Für unser Integral gilt jedoch die Abschätzung

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x \geq \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x.$$

Nachdem $\ln(1+x^2)$ die Stammfunktion von $\frac{2x}{1+x^2}$ ist, gilt außerdem

$$\int_0^\infty \frac{2x}{1+x^2}\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \left[\ln(1+x^2)\right]_0^n = \infty.$$

Damit ist auch $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \cdot f_X(x)\mathrm{d}x$ unendlich und somit ist der Erwartungswert von X nicht definiert.