Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 15. Juni bis 10:15 abzugeben und wird am 15./16. Juni besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 6.1 — 3P

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen (diskreten) Zufallsvariablen. Wir definieren für jedes $n \geq 1$ die Zufallsvariable $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. In der Vorlesung wurde für den Fall, dass die X_i identisch verteilt sind, das sog. *Schwache Gesetz der Großen Zahlen* bewiesen, d.h., für alle $\delta > 0$ gilt, dass

$$\Pr\left[\left|\frac{S_n}{n} - \mathbb{E}X_1\right| \leq \delta\right] \text{ gegen 1 konvergiert für } n \to \infty.$$

Wenn die X_i verschieden verteilt sind, erfüllen die X_i das Schwache Gesetz der Großen Zahlen nicht unbedingt.

Zeigen Sie: Wenn $\Pr\left[X_i = 2^i - 1\right] = \Pr\left[X_i = -(2^i - 1)\right] = \frac{1}{2}$, dann erfüllen die X_i das Schwache Gesetz nicht und es gilt:

$$\Pr\left[\left|\frac{S_n}{n}\right| \geq 1\right] = 1 \qquad \text{für alle } n \geq 1.$$

Aufgabe 6.2 — 1P+1P+1P

Sei X eine stetige Zufallsvariable mit Wertebereich $[-1, 1]$ und einer Dichte f_X der Form

$$f_X(x) = \begin{cases} ax + b & \text{wenn } |x| < 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie: $b = 1/2$.

(b) Zeigen Sie: $-1/2 \leq a \leq 1/2$.

(c) Zeigen Sie: $\mathbb{E}X = \frac{2}{3}a$ und damit auch $-1/3 \leq \mathbb{E}X \leq 1/3$.

Aufgabe 6.3 — 3P

Sei X eine beliebige stetige Zufallsvariable. Zeigen Sie, dass die Funktion

$$\phi(a) = \mathbb{E}[(X - a)^2]$$

ihr Minimum bei $a = \mathbb{E}X$ annimmt.
Hinweis: Leiten Sie z.B. die Funktion nach a ab.

Aufgabe 6.4 — 2P+2P+2P

Die Lebensdauer T einer Energiesparlampe hat die folgende (mit $\lambda > 0$ parametrisierte) Dichte:

$$f_T(t) = \begin{cases} \lambda^2 t e^{-\lambda t} & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$$

(a) Zeigen Sie, dass für alle $\lambda > 0$ die Funktion f_T tatsächlich eine Dichte ist, d.h., dass $\int_{-\infty}^{\infty} f_T(t)\, dt = 1$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\Pr\left[T \leq \frac{4}{\lambda}\right]$.

(c) Berechnen Sie $\mathbb{E}T$ in Abhängigkeit von λ.

Aufgabe 6.5 **1P+2P+2P**

(a) Es sei Ω eine Ergebnismenge. Weiterhin sei eine Menge $\mathcal{E}$ von Ereignissen gegegeben (d.h., $\mathcal{E} \subseteq 2^\Omega$). Wir nehmen an, dass $\mathcal{E}$ gerade die Ereignisse enthält, an denen wir prinzipiell interessiert sind. Wir suchen daher eine σ-Algebra $\mathcal{A}$ über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$. Dies wirft die Frage auf, ob es eine kleinste σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{E}$ enthält. Hierfür definiert man:

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap\{\mathcal{A} \mid \mathcal{A} \text{ ist } \sigma\text{-Algebra über } \Omega \text{ mit } \mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra über Ω ist mit $\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$, und für jede andere σ-Algebra über Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$ gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{A}$.

Bemerkungen:

- Man nennt $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ auch die kleinste von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra über Ω.
- Wenn es auf $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ kein W'keitsmaß gibt, so kann es auch auf keiner anderen σ-Algebra über Ω, die $\mathcal{E}$ enthält, ein W'keitsmaß geben.
- Die Borelschen Mengen über $\mathbb{R}$ sind gerade die kleinste σ-Algebra, die von den geschlossenen Intervallen erzeugt wird.
- Die Borelschen Mengen $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ über $\mathbb{R}^2$ sind definiert durch

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) := \sigma_{\mathbb{R}^2}(\{[a,b] \times [c,d] \mid a,b,c,d \in \mathbb{R} \wedge a < b \wedge c < d\}).$$

(b) Zeigen Sie, dass die Menge $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x + y \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

(c) Zeigen Sie, dass die Menge $K_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ in $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ enthalten ist.

Aufgabe 6.6 Unkorrigierte Zusatzaufgabe **0P**

Sei $X_1, X_2, \ldots$ eine Folge von unabhängigen (diskreten) Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}X_i = 0$ für alle $i \in \{1, 2, \ldots\}$. Wir definieren für jedes $n \geq 1$ die Zufallsvariable $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. In der Vorlesung wurde für den Fall, dass die X_i identisch verteilt sind, das sog. *Schwache Gesetz der Großen Zahlen* bewiesen, d.h., für alle $\delta > 0$ gilt, dass

$$\Pr\left[\left|\frac{S_n}{n}\right| \leq \delta\right] \text{ gegen 1 konvergiert für } n \to \infty.$$

Tatsächlich gilt für identisch verteilte X_i aber sogar das (schwerer zu beweisende) *Starke Gesetz der Großen Zahlen*, d.h.

$$\Pr\left[\frac{S_n}{n} \text{ konvergiert gegen 0 für } n \to \infty\right] = 1$$

Ziel der Aufgabe ist zu sehen, dass das nicht dasselbe ist.
Hinweis: Alle Teilaufgaben können unabhängig voneinander gelöst werden.

Wir betrachten nun (nicht identisch verteilte) X_i mit der Dichte

$$\Pr[X_i = i] = \Pr[X_i = -i] = \frac{1}{2i \log_2 i}, \quad \Pr[X_i = 0] = 1 - \frac{1}{i \log_2 i} \quad \text{für } i \geq 2$$

und $\Pr[X_1 = 0] = 1$. In den folgenden drei Teilaufgaben zeigen wir, dass diese X_i das Schwache Gesetz erfüllen.

(a) Zeigen Sie:

$$\operatorname{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right] = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{i=2}^{n} \frac{i}{\log i}$$

(b) Verwenden Sie (a), um zu zeigen, dass $\operatorname{Var}\left[\frac{S_n}{n}\right]$ gegen 0 konvergiert für $n \to \infty$.

Hinweis: Betrachten Sie nur Quadratzahlen n und zerlegen Sie die Summe in $\sum_{i=2}^{\sqrt{n}-1}$ und $\sum_{i=\sqrt{n}}^{n}$.

(c) Verwenden Sie (b) und die Chebyshev-Ungleichung, um zu zeigen, dass die X_i das Schwache Gesetz erfüllen.

Im Rest der Aufgabe zeigen wir, dass diese X_i das Starke Gesetz **nicht** erfüllen.

(d) Betrachten Sie eine beliebige Folge $A_1, A_2, \ldots$ unabhängiger Ereignisse mit $\Pr[A_i] = a_i$. Geben Sie einen Ausdruck für $\Pr[$"Kein A_i mit $i \geq r$ geschieht"$]$ an und benutzen Sie anschließend die Ungleichung $1 - x \leq e^{-x}$, um zu zeigen:

$$\Pr[\text{"Kein } A_i \text{ mit } i \geq r \text{ geschieht"}] \leq e^{-\sum_{i=r}^{\infty} a_i}$$

(e) Zeigen Sie mit (d) folgende Version des Borel-Cantelli-Lemmas:
Wenn $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergiert, dann ist $\Pr[$"Nur endlich viele A_i geschehen"$] = 0$.

(f) Sei nun A_i das Ereignis "$|X_i| \geq i$". Geben Sie $\Pr[A_i] = a_i$ an und zeigen Sie mit dem Integralkriterium (siehe Wikipedia), dass $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ divergiert. Mit (e) folgt dann also $\Pr[$"Nur endlich viele A_i geschehen"$] = 0$.

(g) Zeigen Sie mit (f), dass die X_i das Starke Gesetz nicht erfüllen, indem Sie zeigen:

$$\Pr\left[\frac{S_n}{n} \text{ konvergiert gegen 0 für } n \to \infty\right] = 0$$

Hinweis: Angenommen, $\frac{S_n}{n} \to 0$. Dann folgt $\frac{X_n}{n} \to 0$ wegen $\frac{X_n}{n} = \frac{S_n}{n} - \frac{n-1}{n} \cdot \frac{S_{n-1}}{n-1}$. Setzen Sie von hier fort.