Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 9
8. Juli 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir werfen eine unfaire Münze, die mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ „Kopf“ und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ „Zahl“ zeigt. Wir betrachten für eine Folge von Würfen $W_1, W_2, \ldots$ das Ereignis $E(i,k)$, beim i-ten Wurf weniger als $(\frac{i}{2}+k)$-mal „Kopf“ geworfen zu haben.
Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\forall k > 0: \lim_{n\to\infty} \Pr\left[\bigcap_{i=1}^{n} E(i,k)\right] = 0\,.$$

Lösungsvorschlag

Wir widerlegen die Behauptung und begründen zunächst den Zusammenhang der Aufgabe mit rekurrenten Ereignissen, insbesondere mit dem „Random Walk“.

Wir betrachten Zufallsvariable K_i und Z_i für die Anzahl der Ergebnisse „Kopf“ bzw. „Zahl“, die bei i Würfen eingetreten sind. Beide Variablen sind als eine Summe von Indikatorvariablen binomialverteilt. Allerdings sind beide voneinander abhängig, denn es gilt $K_i + Z_i = i$.

Sei $D_i = K_i - Z_i$. Es gilt $D_i = K_i - (i - K_i) = 2K_i - i$ mit $W_{D_i} \subseteq [-i, i]$. Die Dichte von D_i ergibt sich aus der Dichte von K_i wie folgt.

$$f_{D_i}(j) = \begin{cases} f_{K_i}\left(\frac{j+i}{2}\right) & : -i \le j \le i \text{ und } j+i \text{ gerade} \\ 0 & : \text{ sonst} \end{cases}$$

Die Ereignisfolge $H_k = [D_k = 0]$, $k = 1, 2, \ldots$ ist rekurrent mit

$$\Pr[H_k] = \begin{cases} \binom{k}{k/2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k/2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k/2} & : \quad k \text{ gerade} \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

Wir betrachten die erzeugende Funktion $H(s) = \sum_{k=0}^{\infty} h_k s^k$ der Auftrittswahrscheinlichkeiten und zeigen, dass $H(1)$ konvergiert. Mit Korollar 83 der Vorlesung folgt dann, dass die Ereignisse H_k mit positiver Wahrscheinlichkeit nie eintreten. In der Sprache des Random Walk bedeutet dies, dass bei der Brown'schen Bewegung ein Teilchen nicht mit Wahrscheinlichkeit 1 zum Start zurückkehrt, falls die Wahrscheinlichkeiten der Links- bzw. Rechtsbewegung ungleich 1/2 sind.

Wir schätzen $H(1)$ wie folgt ab und benutzen dabei die Stirlingformel für die Näherung $\binom{2k}{k} \approx c_k \frac{2^{2k}}{\sqrt{k}}$ mit $c_k < c$ für ein existierendes positives c.

$$\begin{aligned}
H(1) &= \sum_{k=0}^{\infty} h_k \\
&= \sum_{k \in 2\mathbb{N}_0} \binom{k}{k/2} \left(\frac{1}{3}\right)^{k/2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k/2} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{2k}{k} \left(\frac{1}{3}\right)^{k} \left(\frac{2}{3}\right)^{k} \\
&\approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{2^{2k}}{\sqrt{k}} \left(\frac{2}{9}\right)^{k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{2^{2k}}{\sqrt{k}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{1}{\sqrt{k}} \left(\frac{8}{9}\right)^{k} \\
&< c \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^{k} \\
&= c \cdot 9 < \infty .
\end{aligned}$$

$H(1)$ konvergiert also, d.h., $\Pr[Z = \infty] \neq 0$, wobei Z die Schritte bis zum erstmaligen Eintreten eines Ereignisses aus der Folge H_k zählt.

Wir widerlegen nun die betreffende Gleichung für $k = 1$.

Das Ereignis $E(i,k)$ ist gleichbedeutend mit $K_i < \frac{i}{2}+k$, d. h. $D_i = 2K_i - i < i + 2k - i = 2k$. In der Sprache der Brown'schen Bewegung für $d = 1$ bedeutet dies, dass das Teilchen nach dem i-ten Schritt auf der linken Seite von $2k$ liegt. Das Ereignis

$$E_n = \bigcap_{i=1}^{n} E(i,k)$$

heißt dann, dass sich das Teilchen vom Start bis zum n-ten Schritt stets auf der linken Seite von $2k$ bzw. 2 befindet.

Wir haben berechnet, dass das Teilchen mit positiver Wahrscheinlichkeit nicht mehr zum Nullpunkt zurückkehrt. Da die Wahrscheinlichkeit für die Linksbewegung größer ist als die Wahrscheinlichkeit einer Rechtsbewegung, gibt es auch eine positive Wahrscheinlichkeit, dass das Teilchen nach links geht und dann nie mehr zum Nullpunkt zurückkehrt. Dies heißt aber, dass das Teilchen mit positiver Wahrscheinlichkeit auf der linken Seite von 2 bleibt, im Widerspruch zu $\lim_{n\to\infty} \Pr[E_n] = 0$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Die stetigen Zufallsvariablen X und Y seien gegeben durch die Koordinaten x bzw. y eines (gleichverteilt) zufällig gewählten Punktes $P \in B = \{(x,y)\,;\, |x| \leq y^2 \leq 1\}$ der x,y-Ebene.

1. Berechnen Sie die gemeinsame Dichte $f_{X,Y}(x,y)$!

2. Berechnen Sie die Randverteilung $F_Y(y)$!

3. Beweisen Sie, dass X und Y abhängig sind!

Lösungsvorschlag

1. Sei F_B die Fläche von B und c der konstante Wert von $f_{X,Y}$. Außerhalb von B ist der Wert von $f_{X,Y}$ gleich 0. Es gilt

$$\begin{aligned}\int_B f_{X,Y}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= c\cdot F_B\,,\\ F_B &= 4\int_0^1 y^2\,\mathrm{d}y\\ &= 4\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{4}{3}\,.\end{aligned}$$

Es folgt $c = \frac{1}{F_B} = \frac{3}{4}$, mithin $f_{X,Y}(x,y) = \frac{3}{4}$ für alle $(x,y)\in B$.

2. Es gilt $F_Y(y) = 1$ für $y \geq 1$ und $F_Y(y) = 0$ für $y \leq -1$.

Für $|y| \leq 1$ gilt

$$\begin{aligned}F_Y(y) &= \int_{-\infty}^{x}\left[\int_{\infty}^{\infty} f_{X,Y}(u,v)\,\mathrm{d}u\right]\mathrm{d}v\\ &= \int_{-1}^{y}\left(\int_{-v^2}^{v^2}\frac{3}{4}\,\mathrm{d}u\right)\mathrm{d}v\\ &= \int_{-1}^{y}\frac{3}{2}v^2\,\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{2}(y^3+1)\,.\end{aligned}$$

3. Für die Randdichten gelten $f_Y(y) = \frac{3}{2}v^2$ (siehe oben) und $f_X(u) = \frac{3}{2}(1-\sqrt{u})$.

Für den Koordinatenpunkt $(x,y) = (\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \notin B$ folgt $f_{X,Y}(x,y) = 0$,

andererseits $\quad f_Y(\frac{1}{2}) = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 \neq 0$

und $\quad f_X(\frac{1}{2}) = 2\left(1-\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{3}{4} \neq 0\,.$

Es folgt $f_{X,Y}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \neq f_X(\frac{1}{2})\cdot f_Y(\frac{1}{2})$, mithin die Abhängigkeit.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Seien X eine Zufallsvariable und $Y = aX + b$.

   Für welche $a,b\in\mathbb{R}$ besitzt Y den gleichen Erwartungswert wie X und die halbe Streuung (Standardabweichung) von X.

2. Seien X eine Poisson-verteilte Zufallsvariable und $Y = aX$.

   Für welche $a > 0$ ist Y Poisson-verteilt? Beweisen Sie Ihre Antwort!

Lösungsvorschlag

1. Aufgrund geltender Gleichungen folgen $\mathbb{E}[Y] = a \cdot \mathbb{E}[X] + b$ und $\mathrm{Var}[X] = a^2\mathrm{Var}[X]$.

   Damit setzen wir die Gleichungen für a und b wie folgt an. Dabei berücksichtigen wir, dass die Varianz das Quadrat der Streuung ist. D. h., die Varianz von Y ist ein Viertel der Varianz von X.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X] &= a \cdot \mathbb{E}[X] + b\,,\\ \frac{1}{4}\mathrm{Var}[X] &= a^2\mathrm{Var}[X]\,.\end{aligned}$$

   Falls $\mathrm{Var}[X] = 0$, dann ist a beliebig wählbar, wenn $b = (1-a)\cdot\mathbb{E}[X]$ gesetzt wird.

   Falls $\mathrm{Var}[X] \neq 0$, dann folgt $a = \pm\frac{1}{2}$. Mit $b = (1-a)\mathbb{E}[X]$ folgen

$$(a_1, b_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\mathbb{E}[X]) \quad \text{und} \quad (a_2, b_2) = (-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\mathbb{E}[X])\,.$$

2. Tatsächlich folgt bereits aus den Eigenschaften des Wertebereichs einer Poisson-verteilten Zufallsvariablen, dass nur $a = 1$ möglich ist. Es muss gelten $a \cdot \mathbb{N} = \mathbb{N}$. Für den kleinsten Wert $x \in a \cdot \mathbb{N}$ mit $x \neq 0$ gilt $x = a$, mithin $x = 1$.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit $X \sim \mathrm{Bin}(2000, 0.05)$. Wir nehmen an, dass die Voraussetzungen sowohl für eine Approximation von entsprechenden Verteilungen mit Poisson-Verteilung als auch mit Normalverteilung vorliegen.
Berechnen Sie approxomativ

1. $\Pr[X = 110]$,
2. $\Pr[X > 110]$.

Begründen Sie jeweils die Wahl einer der Approximationen.

Lösungsvorschlag

1. Für die Wahrscheinlichkeit des Auftretens eines bestimmten Wertes einer diskreten Zufallsvariablen, wie hier $X = 110$, ist es naheliegend die approximierende diskrete Verteilung zu verwenden. In diesem Fall wählen wir deshalb die Poisson-Verteilung.

   Es gilt zunächst $E[X] = 2000 \cdot 0.05 = 100$. Mit $\lambda = n \cdot p_n = 100$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} b(k; n, p_n) = \lim_{n\to\infty} \binom{n}{k} \cdot p_n^k \cdot (1-p_n)^{n-k} = e^{-\lambda} \cdot \frac{\lambda^k}{k!}$$

   und wir erhalten mit $k = 110$

$$\Pr[X = 110] \;=\; b(110; 2000, 0.05) \;\approx\; e^{-100} \cdot \frac{100^{110}}{110!}\;.$$

Die Berechnung erfordert nun die Anwendung der Stirling-Formel auf die Fakultätsfunktion.

$$k! \;\approx\; \sqrt{2\pi k}\cdot\left(\frac{k}{e}\right)^k .$$

Damit rechnen wir

$$\begin{aligned} e^{-100}\cdot\frac{100^{110}}{110!} &= e^{-100}\cdot\frac{100^{110}}{\sqrt{2\pi\cdot 110}}\cdot\left(\frac{e}{110}\right)^{110} \\ &= \frac{e^{10}}{\sqrt{2\pi\cdot 110}}\cdot\left(\frac{100}{110}\right)^{110} \\ &\approx 0.0234\ldots \end{aligned}$$

Ergebnis: $\Pr[X=110] \;\approx\; 0.0234$.

Bemerkung: In praktischen Anwendungen müss nun eine Abschätzung der Genauigkeit der Berechnungen folgen.

2. Es giltt $\Pr[X > 110] = 1 - \Pr[X \leq 110]$. D.h., wir müssen lediglich den Wert der Verteilungsfunktion der binomialen Dichtefunktion an der Stelle 110 berechnen.

   Allerdings haben wir die Verteilungsfunktion der Poisson-Dichte noch nicht zur Verfügung. Schon aus diesem Grund bietet sich die Normalverteilung für eine Approximation an. In diesem Fall steht uns die Verteilungsfunktion Φ für die Standardnormalverteilung zur Verfügung.

   Wir berechnen die Wahrscheinlichkeit $\Pr[X \leq 110]$ mit $\mathbb{E}[X] = 2000\cdot 0.05 = 100$ und $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{100\cdot 0.95} = \sqrt{95}$ wie folgt.

$$\begin{aligned} \Pr[X \leq 110] &= F_X(110) \\ &\approx \Phi\left(\frac{k-np}{\sqrt{np(1-p)}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{110-100}{\sqrt{95}}\right) \\ &\approx \Phi\,(1.025978) \;\approx\; 0.847 \end{aligned}$$

   Ergebnis: $\Pr[X > 110] \approx 1 - 0.847 = 0.153$.

__Hinweis:__ Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.

Vorbereitung 1

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichproben einer Zufallsvariablen X und sei $\bar{X}$ das arithmetische Mittel der X_i. Wir verwenden die Zufallsvariable

$$V = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$$

als Schätzer für die Varianz von X.
Berechnen Sie den Bias von V! Welche Aussage gilt für $n \to \infty$?

Lösungsvorschlag

Sei $S = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2$. Dann folgt

$$V = \frac{n-1}{n} \cdot S\,.$$

Berechnung des Bias von V:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[V - \mathrm{Var}[X]] &= \mathbb{E}[V] - \mathrm{Var}[X] \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \mathbb{E}[S] - \mathrm{Var}[X] \\
&= \frac{n-1}{n} \cdot \mathrm{Var}[X] - \mathrm{Var}[X] \\
&= -\frac{\mathrm{Var}[X]}{n}\,.
\end{aligned}$$

Der Bias strebt gegen 0 für $n \to \infty$.

Tutoraufgabe 1

Sei $X = \sum_{i=1}^{2000} X_i$ die Summe der Augenzahlen, wenn man 2000-mal mit einem idealen Würfel würfelt.

1. Berechnen Sie näherungsweise $\Pr[7000 \le X \le 7100]$!
2. Wie groß muss man Δ wählen, damit $\Pr[7000 - \Delta \le X \le 7000 + \Delta] \approx \frac{1}{2}$ gilt?

Approximieren Sie die entsprechenden Wahrscheinlichkeiten mit Hilfe des Zentralen Grenzwertsatzes.

Lösungsvorschlag

1. Zunächst gilt für jedes i

$$\mu = \mathbb{E}[X] = 2000 \cdot \mathbb{E}[X_i] = 2000 \cdot \frac{7}{2} = 7000$$

und

$$\mathrm{Var}[X] = 2000 \cdot \mathrm{Var}[X_i] = 2000 \cdot \frac{35}{12} = \frac{17500}{3}\,.$$

Mit

$$\sigma = \sqrt{\frac{17500}{3}} = 50 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}}\,.$$

folgt

$$\begin{aligned}
\Pr[7000 \le X \le 7100] &= \Pr\left[\frac{7000-\mu}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{7100-\mu}{\sigma}\right] \\
&= \Pr\left[0 \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \sqrt{\frac{12}{7}}\right] \\
&\approx \Phi(1,309307341...) - \Phi(0) \\
&\approx 0,90478... - 0,5 \\
&= 0,40478... \quad .
\end{aligned}$$

Man beachte, dass $\frac{X-\mu}{\sigma}$ als standardnormalverteilt betrachtet und der Funktionswert $\Phi(1,309307341...)$ durch Interpolation aus den Tabellenwerten approximiert wurde. Außerdem wurde $0 < \frac{X-\mu}{\sigma}$ durch $0 \le \frac{X-\mu}{\sigma}$ ersetzt, weil Φ stetig ist.

2. Man beachte im Folgenden u. a. die Verwendung der Gleichung $\Phi(-z) = 1 - \Phi(z)$. Außerdem benützen wir wieder die Stetigkeit von Φ.

$$\begin{aligned}
\Pr[7000 - \Delta \le X \le 7000 + \Delta] &= \Pr\left[\frac{-\Delta}{\sigma} \le \frac{X-\mu}{\sigma} \le \frac{\Delta}{\sigma}\right] \\
&\approx \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{\Delta}{\sigma}\right) \\
&= 2 \cdot \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - 1\,.
\end{aligned}$$

Wir setzen nun $2 \cdot \Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) - 1 = \frac{1}{2}$. Das bedeutet

$$\Phi\left(\frac{\Delta}{\sigma}\right) = 0,75\,.$$

Mit dem Quantil

$$z_{0,75} \approx 0,6745$$

erhalten wir

$$\Delta = z_{0,75} \cdot \sigma \approx 0,6745 \cdot 50 \cdot \sqrt{\frac{7}{3}} = 51,51788... \quad .$$

Bei der Bestimmung des Quantils aus der Tabelle von Φ haben wir eine Interpolation angewendet.

Tutoraufgabe 2

Die tatsächlich benötigte CPU-Zeit einer Benutzersitzung an einer Workstation werde als eine Zufallsvariable mit unbekanntem Erwartungswert μ und der Varianz $\sigma^2 = 6{,}25$ [sec^2] angenommen.
Seien X_i unabhängige Stichproben der CPU-Zeit und $\bar{X}$ das arithmetische Mittel der X_i. Wie viele unabhängige Stichproben sollten mindestens gemessen werden, damit

$$\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0{,}1] \geq 0{,}9$$

gilt. Man verwende zur Beantwortung der Frage

1. die Ungleichung von Chebyshev,
2. den Zentralen Grenzwertsatz.

Lösungsvorschlag

1. $\Pr[|\bar{X} - \mu| < 0{,}1] \geq 0{,}9$ gilt genau dann, wenn $\Pr[|\bar{X} - \mu| \geq 0{,}1] \leq 0{,}1$. Wir benutzen die letztere Form.

   Es gilt für alle i $\mathbb{E}[\bar{X}] = \mathbb{E}[X_i] = \mu$ und $\mathrm{Var}[\bar{X}] = \frac{1}{n}\mathrm{Var}[X_i]$. Chebyshev kann nun direkt für alle $t > 0$ wie folgt angewandt werden.

   $$\Pr[|\bar{X} - \mu| \geq 0{,}1] \leq \frac{\mathrm{Var}[X_i]}{n \cdot 0{,}1^2} = \frac{6,25}{n \cdot 0{,}1^2}\,.$$

   Wir betrachten n so, dass gilt $\frac{6{,}25}{n \cdot 0{,}1^2} \leq 0{,}1$. Diese Ungleichung gilt genau dann, wenn gilt

   $$n \geq \frac{6,25}{0{,}1^3} = 6250\,.$$

   Es reicht aus, $n = 6250$ zu setzen.

2. Wir setzen $\bar{\sigma}^2 = \mathrm{Var}[\bar{X}]$. Dann gilt $\bar{\sigma}^2 = \frac{\mathrm{Var}[X_i]}{n} = \frac{6{,}25}{n}$ und $\bar{\sigma} = \frac{2{,}5}{\sqrt{n}}$.

   $$\begin{aligned}
   \Pr[|\bar{X} - \mu| < 0{,}1] &= \Pr[-0{,}1 < \bar{X} - \mu < 0{,}1] \\
   &= \Pr\left[-\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}} < \frac{\bar{X} - \mu}{\bar{\sigma}} < \frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right] \\
   &\approx \Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) - \Phi\left(-\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) \\
   &= 2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) - 1\,.
   \end{aligned}$$

   Es gilt $2 \cdot \Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) - 1 \geq 0,9$ genau dann, wenn

   $$\Phi\left(\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}}\right) \geq 0,95\,.$$

   Das Quantil $z_{0{,}95}$ bestimmt man mit Interpolation aus der Tabelle

   $$z_{0{,}95} \approx 1,645\,.$$

Damit erhalten wir für n die Ungleichung

$$\frac{0{,}1}{\bar{\sigma}} = \frac{\sqrt{n}}{25} \geq 1,645$$

mit der Lösung

$$n \geq 25^2 \cdot 1,645^2 = 1691,26... \quad .$$

Tutoraufgabe 3

Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige Stichproben einer Zufallsvariablen X, und seien $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 + \ldots + \lambda_n = 1$. Wir benutzen $Y = \sum_{i=1}^n \lambda_i X_i$ als Schätzer für $\mathbb{E}[X]$.

1. Zeigen Sie, dass Y erwartungstreu ist.
2. Y hängt ab von der Wahl der Parameter λ_i. Zeigen Sie, dass Y dann die höchste Effizienz besitzt innerhalb der Wahlmöglichkeiten der Parameter, wenn $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n$ gilt.

Lösungsvorschlag

1. Wir weisen $\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[X]$ nach.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Y] &= \mathbb{E}[\sum_{i=1}^n \lambda_i X_i] \\
&= \sum_{i=1}^n \lambda_i \mathbb{E}[X_i] \\
&= \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) \mathbb{E}[X] \\
&= \mathbb{E}[X]\,.
\end{aligned}$$

2. Da Y erwartungstreu ist, gilt $MSE = \mathrm{Var}[Y]$. Nachzuweisen ist also für alle λ_i die Ungleichung $\mathrm{Var}[Y] \geq \mathrm{Var}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i]$. Wegen $\mathrm{Var}[\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i] = \frac{1}{n}\mathrm{Var}[X]$ ist also nachzuweisen

$$\mathrm{Var}[Y] = \sum_{i=1}^n \mathrm{Var}[\lambda_i X_i] = \sum_{i=1}^n {\lambda_i}^2 \mathrm{Var}[X] \geq \frac{\mathrm{Var}[X]}{n}\,,$$

was gleichbedeutend ist mit der Ungleichung

$$\sum_{i=1}^n {\lambda_i}^2 \geq \frac{1}{n}\,.$$

Wegen $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ ist dies aber äquivalent mit

$$\frac{\sum_{i=1}^n {\lambda_i}^2}{n} \geq \left(\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i}{n}\right)^2\,.$$

Die letzte Ungleichung folgt sofort aus der Konvexität der Quadratfunktion.