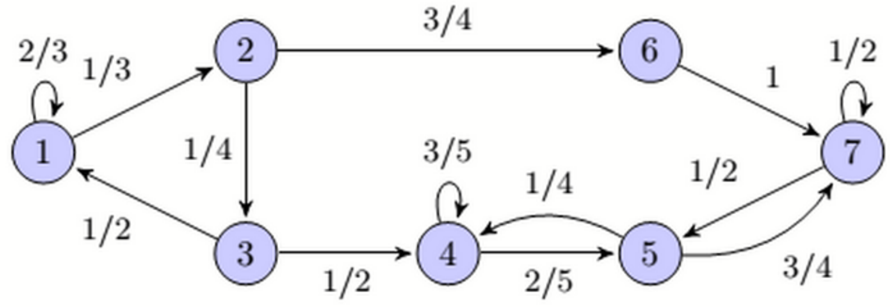
12.1



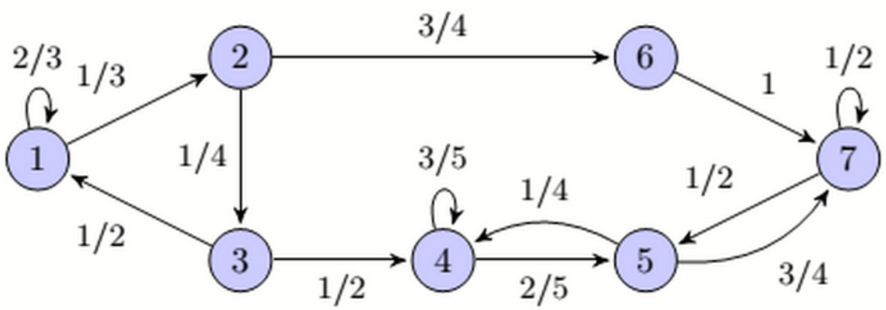
ⓐ W'keit für Übergang von 1 nach 7 in endlich vielen Schritten ist 1

⇝ Entweder LGS zu $f_{1,7}$ aufstellen

oder: Alle endlichen Pfade von 1 nach 7, die 7 genau einmal besuchen, überdecken alle Zustände des Graphen

⇝ Resultat zu Markov-Diagrammen besagt gerade, dass alle die Pfade zusammen Gewicht 1 haben

6



$$h_{1,7} = 1 + \frac{2}{3} h_{1,7} + \frac{1}{3} h_{2,7} = 3 + h_{2,7} = \frac{134}{21}$$

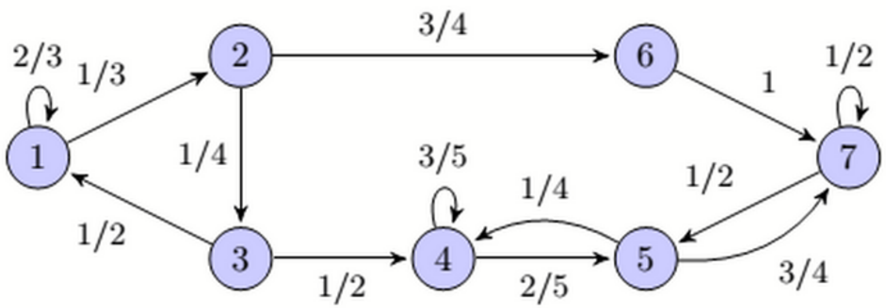
$$h_{2,7} = 1 + \frac{3}{4} \underbrace{h_{6,7}}_{=1} + \frac{1}{4} h_{3,7} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} h_{3,7} = \frac{71}{21}$$

$$h_{3,7} = 1 + \frac{1}{2} h_{1,7} + \frac{1}{2} h_{4,7} = \frac{137}{21}$$

$$h_{4,7} = 1 + \frac{3}{5} h_{4,7} + \frac{2}{5} h_{5,7} = \frac{5}{2} + h_{5,7} = \frac{28}{6} = \frac{14}{3}$$

$$h_{5,7} = 1 + \frac{1}{4} h_{4,7} = \frac{13}{8} + \frac{1}{4} h_{5,7} = \frac{13}{6}$$

c



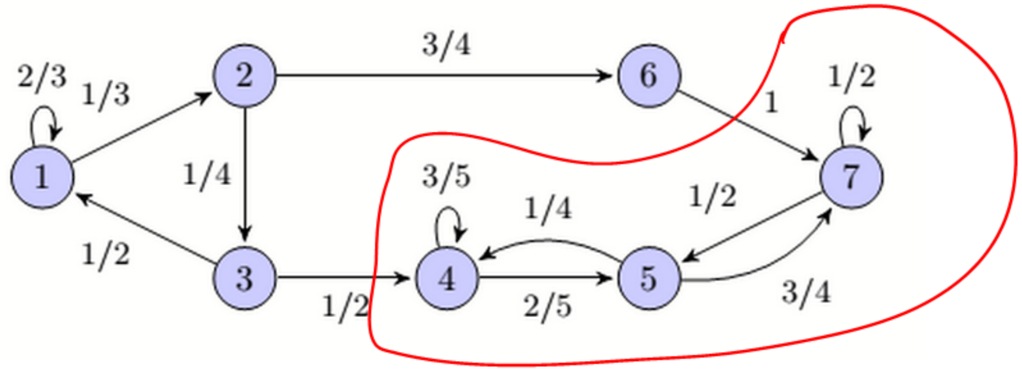
$$h_7 = 1 + \frac{1}{2} h_{5,7} \qquad = \frac{25}{12}$$

$$h_{5,7} = 1 + \frac{1}{4} h_{4,7} \qquad = \frac{13}{6}$$

$$h_{4,7} = 1 + \frac{3}{5} h_{4,7} + \frac{2}{5} h_{5,7} = 1 + \frac{3}{5} h_{4,7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{10} h_{4,7}$$

$$= \frac{10}{3} \cdot \frac{7}{5} = \frac{14}{3}$$

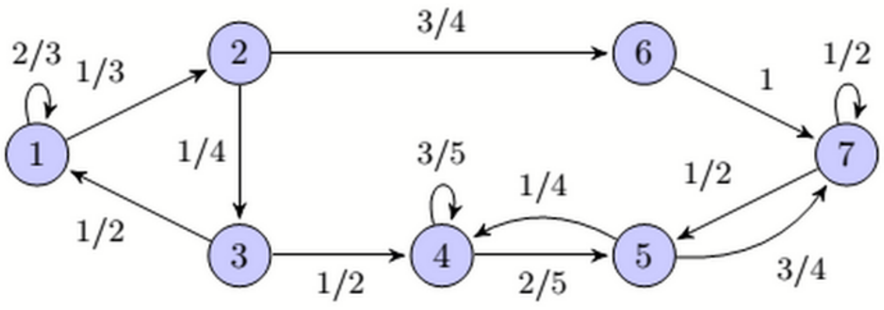
d)



- Mit W'keit 1 befindet man sich nach endlich vielen Schritten in $\{4,5,7\}$

- Der induzierte Teilgraph ist dabei irreduzibel und aperiodisch (z.B. liegen $7 \to 7$)

$\Rightarrow$ Damit ist die Grenzverteilung in $\{4,5,7\}$ eindeutig.



$$P = \begin{pmatrix} 3/5 & 2/5 & 0 \\ 1/4 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \text{suche EV } \underline{\text{von links}} \text{ zum EW } 1$$

$$\rightsquigarrow (\pi_1, \pi_2, \pi_3)\, P \overset{!}{=} (\pi_1, \pi_2, \pi_3) \text{ mit } \underline{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 = 1} \wedge \pi_i \geq 0$$

$$\rightsquigarrow \frac{3}{5}\pi_1 + \frac{1}{4}\pi_2 = \pi_1 \rightsquigarrow \pi_1 = \frac{5}{8}\pi_2 = \frac{1}{5}$$

$$\frac{2}{5}\pi_1 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_2$$

$$\frac{3}{4}\pi_2 + \frac{1}{2}\pi_3 = \pi_3 \rightsquigarrow \pi_3 = \frac{3}{2}\pi_2 = \frac{12}{25}$$

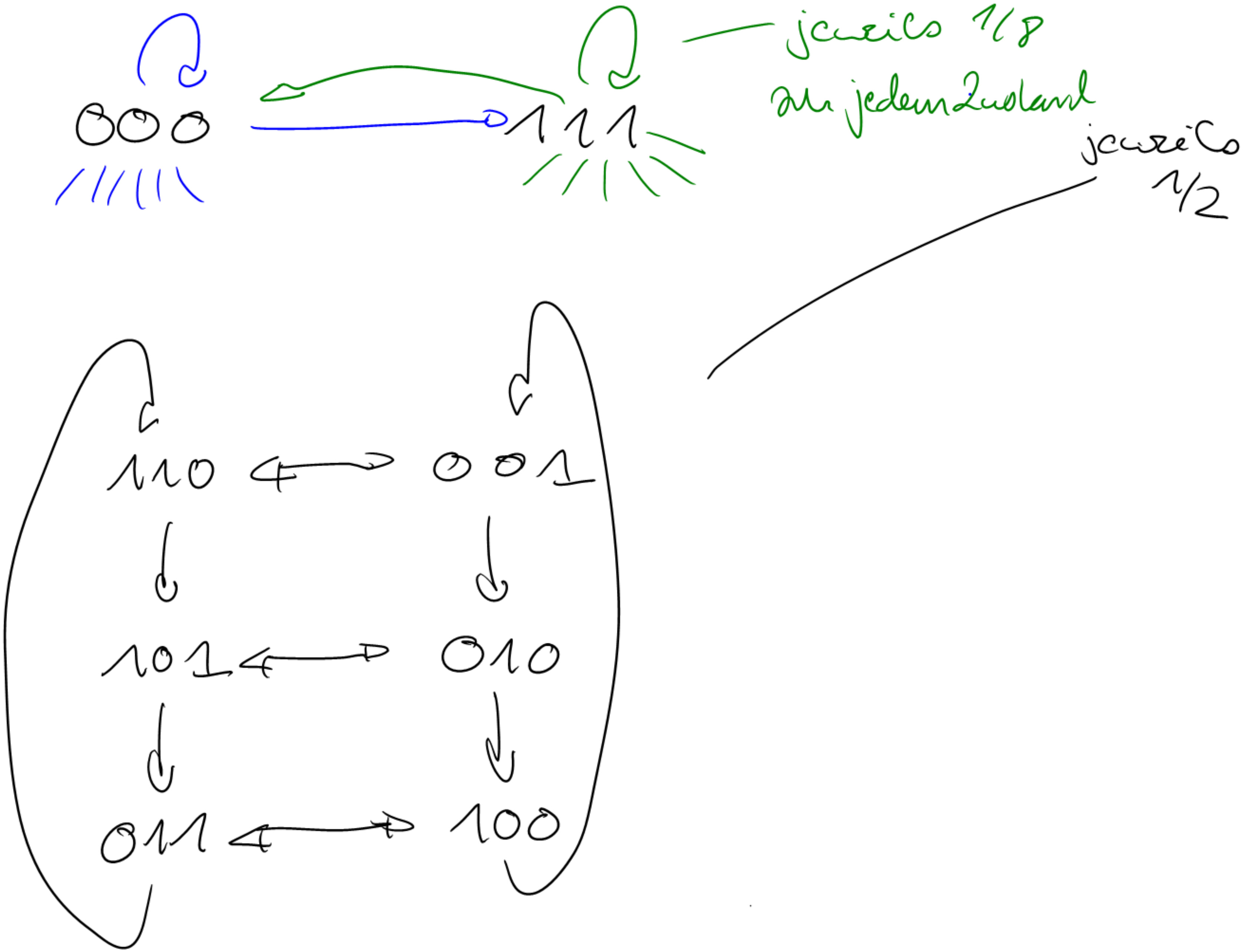
$$\frac{5}{8}\pi_2 + \pi_2 + \frac{3}{2}\pi_2 \overset{!}{=} 1$$

$$\rightsquigarrow \pi_2 = \underline{\underline{\frac{8}{25}}}$$

12.2

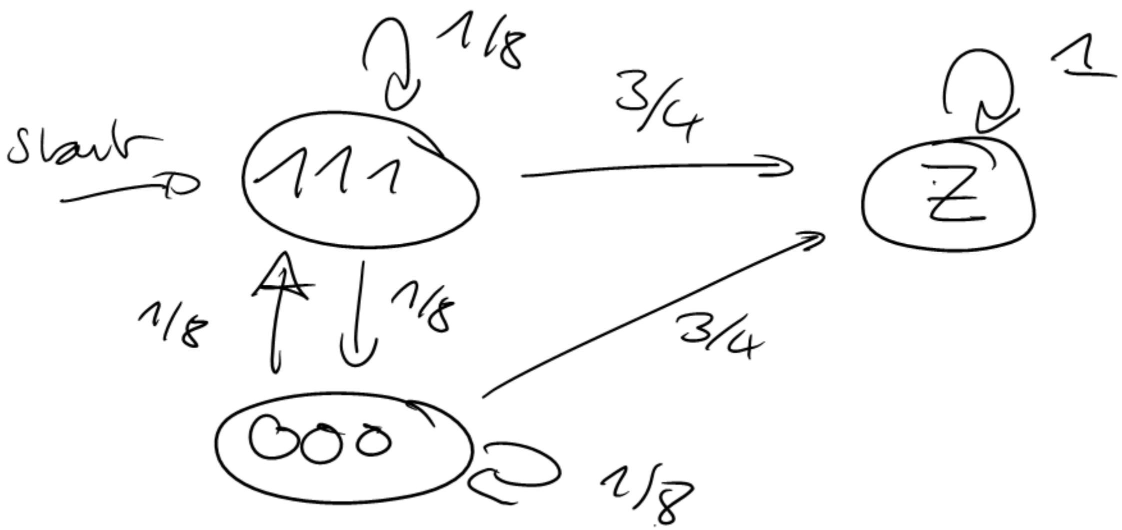
(a)

jeweils $\longrightarrow$ 1/8 zu jedem Zustand



- Sobald sich die Prozesse in einem der Zustände aus $\{001, 010, \dots, 110\}$ befinden, versucht nur noch jeweils ein Prozess pro Zeitschritt auf die Ressource zuzugreifen.

$\rightsquigarrow$ Hierfür reicht es wieder die Knoten $\{001, \dots, 110\}$ zu einem absorbierenden Zustand zu kontrahieren:



($Z \mathrel{\hat{=}}$ Ziel)

Auf dieses "Markov-Diagramm" lässt sich wieder der Satz aus der VL anwenden, dass

$$\Pr\left[[111 \rightsquigarrow z]^{z=1} \right] = 1 ,$$

falls die Pfade aus $[111 \rightsquigarrow z]^{z=1}$ den Graphen vollständig überdecken.

Alternativ löst man das LGS zu $f_{111,z}$:

$$f_{111,z} = \frac{1}{8} f_{111,z} + \frac{1}{8} f_{000,z} + \frac{3}{4} = \frac{1}{7} f_{000,z} + \frac{6}{7}$$

$$f_{000,z} = \frac{1}{8} f_{000z} + \frac{1}{8} f_{111,z} + 3/4$$

$$= \frac{1}{8} f_{000,z} + \frac{1}{56} f_{000,z} + \frac{6}{56} + \frac{3}{4}$$

$$= \frac{1}{7} f_{000,z} + \frac{6}{7} = \underline{\underline{1}}$$

wegen Symmetrie könnte man $f_{111,z} = f_{000,z}$ auch direkt ansehen

Entsprechend für die Übergangszeit $h_{111,Z}$

$$h_{111,Z} = 1 + \frac{1}{8} h_{111,Z} + \frac{1}{8} h_{000,Z} = \frac{8}{7} + \frac{1}{7} h_{000,Z}$$

$$h_{000,Z} = 1 + \frac{1}{8} h_{000,Z} + \frac{1}{8} h_{111,Z}$$

$$= 1 + \frac{1}{8} h_{000,Z} + \frac{1}{7} + \frac{1}{56} h_{000,Z}$$

$$= \frac{8}{7} + \frac{1}{7} h_{000,Z} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}} = h_{111,Z}$$

- Mit W'keit 1 wird schließlich die durch $\{000, 111\}$ induzierte SCC verlassen, sodass man sich im Limes nur noch in der durch die verbleibenden Knoten induzierten SCC befindet.

Bsp.: $110 \leftrightarrow 001$

$110 \rightarrow 101 \rightarrow 011$

$\leadsto$ Diese SCC ist aperiodisch und irreduzibel

$\rightarrow$ eindeutige stationäre Verteilung unabh. von Start-verteilung

$\leadsto$ In der SCC hat jeder Knoten 2 Vorgänger und 2 Nachfolger, jeweils mit Übergangsw'keit 1/2

$$\leadsto \begin{array}{cccccccc} 000 & 001 & 010 & 011 & 100 & 101 & 110 & 111 \\ \end{array}$$
$$\left(0, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, 0\right)$$ ist stationäre Verteilung

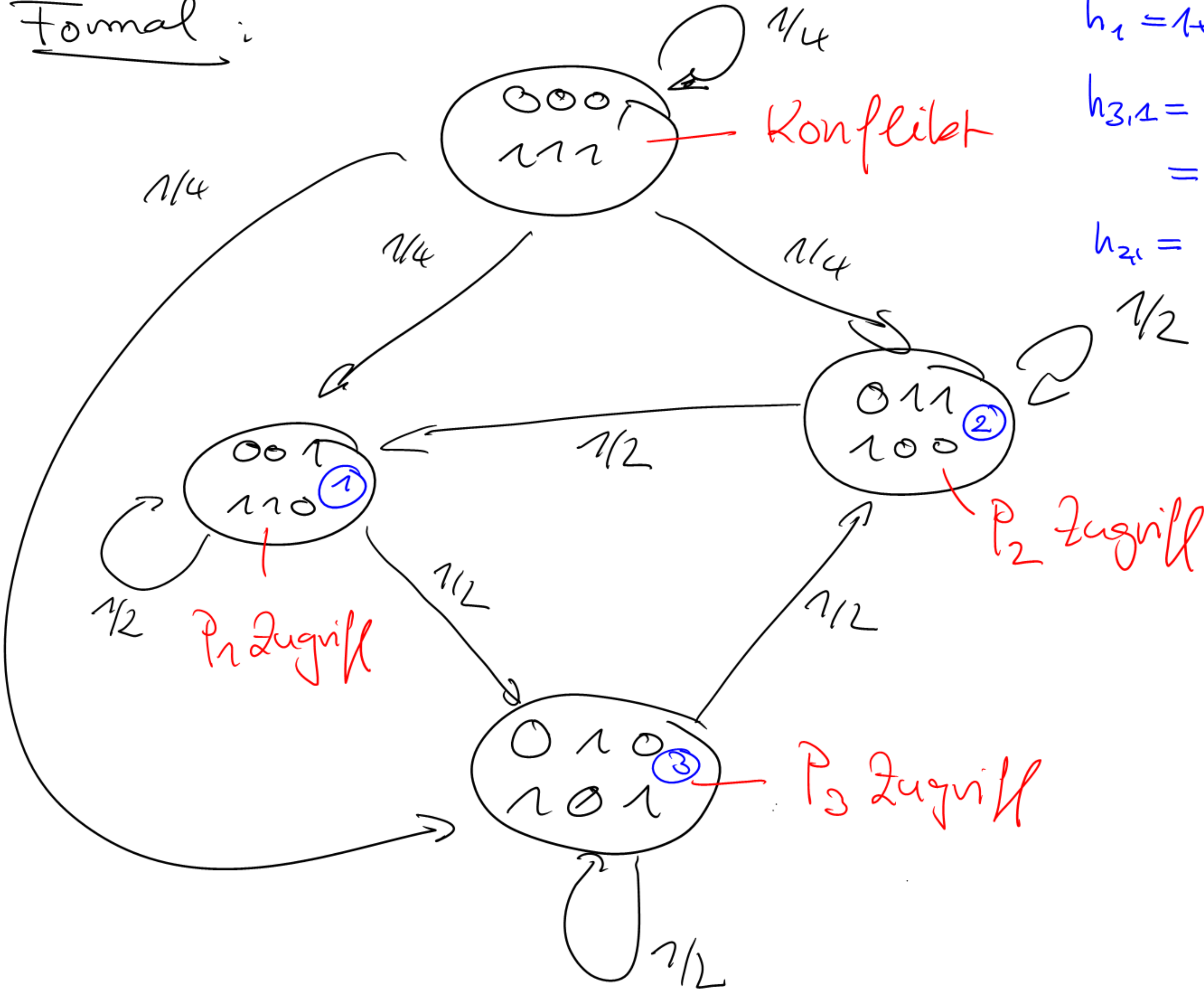
Die mittlere Rückkehrzeiten sind somit

$$h_{000} = h_{111} = \infty$$
$$h_{001} = h_{010} = \ldots = h_{110} = 6$$

Beachtet man, dass P_1 sowohl im Zustand 001 als auch im Zustand 110 auf die Ressource zugreift und entsprechend für die restlichen Prozesse, so wartet ein Prozess im Mittel 3 Zeitschritte, bis er wieder Zugriff bekommt.

$\longrightarrow$

Formal :



$h_1 = 1 + \frac{1}{2} h_{3,1} = \underline{\underline{3}}$

$h_{3,1} = 1 + \frac{1}{2} h_{3,1} + \frac{1}{2} h_{2,1}$

$= 2 + h_{2,1} = 4$

$h_{2,1} = 1 + \frac{1}{2} h_{2,1} = 2$

analog

$h_2 = h_3 = 3$

(b)

- Die Zustände in [3a] sind

  von der Form abbbb für $a \in \{0,1\}$ und $b = 1-a$

  – bis auf zyklische Vertauschung.

  Für diese ergeben sich die Nachfolger

- Entsprechend für [3b] und aabbb

$\leadsto$ Wie man leicht einsieht, verhalten sich die Zustände abbbb und aabbb bzgl. der Übergangsw'keiten unterschiedlich

$\longrightarrow$

$a\ b\ b\ b\ b \in [3a]$

$\downarrow$

$b\ \{a,b\}^3\ a$

$\|$

$b\ a\ a\ a\ a \in [3a]$

$b\ a\ a\ b\ a \in [1]$

$b\ a\ b\ a\ a \in [1]$

$b\ a\ b\ b\ a \in [1]$

$b\ b\ a\ a\ a \in [3b]$

$b\ b\ a\ b\ a \in [1]$

$b\ b\ b\ a\ a \in [3b]$

$b\ b\ b\ b\ a \in [3a]$

$a\ a\ b\ b\ b \in [3b]$

$\downarrow$

$\{a,b\}\ b\ \{a,b\}^2\ a$

$\|$

$a\ b\ a\ a\ a \in [3a]$

$a\ b\ a\ b\ a \in [1]$

$a\ b\ b\ a\ a \in [3b]$

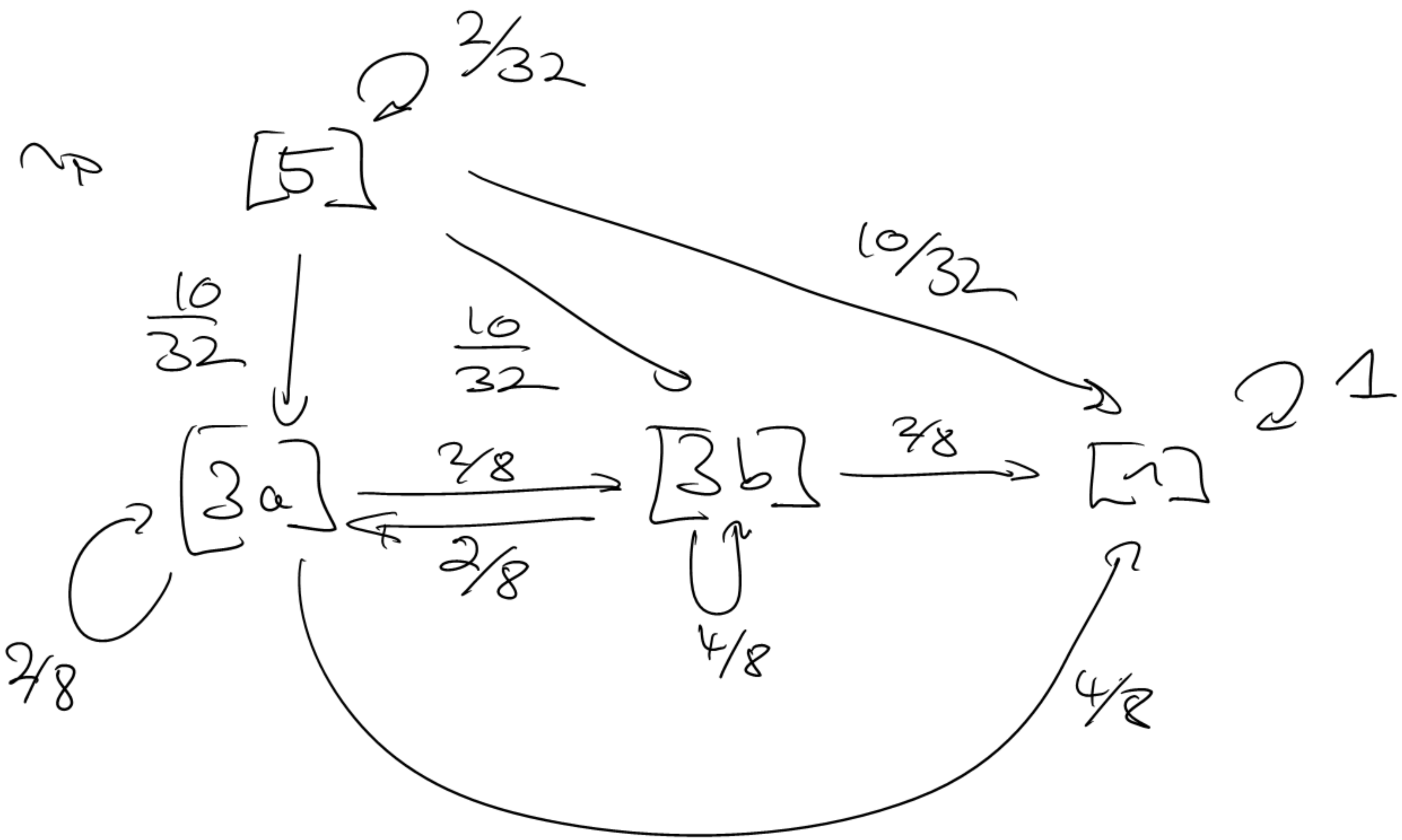
$a\ b\ b\ b\ a \in [3b]$

$b\ b\ a\ a\ a \in [3b]$

$b\ b\ a\ b\ a \in [1]$

$b\ b\ b\ a\ a \in [3b]$

$b\ b\ b\ b\ a \in [3a]$



⇝ Mit derselben Begründung wie in ⓐ wird mit W'keit 1 schließlich der absorbierende Zustand [1] erreicht. Alle Zustände in [1] haben genau einen Block der Läng 2, sind also von der Form aabab (bis auf zyklische Vertauschung) so dass stets genau ein Prozess versucht, auf die Ressource zuzugreifen.

(Offensichtlich hat ein Zustand der Form aabab nur die Nachfolger {a,b}baba, welche beide in [1] liegen.)

- Übergangs für $h_{[5];[1]}$:

$$h_{[5],[1]} = 1 + \frac{1}{16} h_{[5][1]} + \frac{5}{16} h_{[3a][1]} + \frac{5}{16} h_{[3b][1]} = \frac{44}{15}$$

$$h_{[3a][1]} = 1 + \frac{1}{4} h_{[3a][1]} + \frac{1}{4} h_{[3b][1]} = \frac{4}{3} + \frac{1}{3} h_{[3b][1]}$$

$$h_{[3b][1]} = 1 + \frac{1}{2} h_{[3b][1]} + \frac{1}{4} h_{[3a][1]} = \frac{12}{5}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} h_{[3b][1]} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12} h_{[3b][1]} = \frac{12}{5} \cdot \frac{4}{3} = \frac{16}{5}$$