HA 6.1

(a) X_1, X_2 unabh., $X_1 \sim Bin(m_1, p)$, $X_2 \sim Bin(m_2, p)$

$$\leadsto X_1 + X_2 \sim Bin(m_1 + m_2, p)$$

$Pr[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n]$ undefiniert, falls $n < 0$ <u>oder</u> $n > m_1 + m_2$

Falls $n \in \{0, 1, \dots, m_1 + m_2\}$:

$$Pr[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n] = \frac{Pr[X_1 = k \wedge X_2 = n-k]}{Pr[X_1 + X_2 = n]}$$

$$= \frac{\binom{m_1}{k} \cancel{p^k} \cancel{(1-p)^{m_1-k}} \binom{m_2}{n-k} \cancel{p^{n-k}} \cancel{(1-p)^{m_2-n+k}}}{\binom{m_1+m_2}{n} \cancel{p^n} \cancel{(1-p)^{m_1+m_2-n}}}$$

$\square$

(b) X_1, X_2, X_3 unabh. mit $X_i \sim Poi(\lambda_i)$

$\Rightarrow X_1+X_2+X_3 \sim Poi(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)$;

(i) Es gelte $n_1, n_2, n_3, n \geq 0$ mit $n_1+n_2+n_3=n$

$$Pr[X_1=n_1, X_2=n_2, X_3=n_3 \mid X_1+X_2+X_3=n]$$

$$= \frac{\frac{\lambda_1^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{\lambda_2^{n_2}}{n_2!} e^{-\lambda_2} \cdot \frac{\lambda^{n_3}}{n_3!} e^{-\lambda_3}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^n}{n!} \cdot e^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}}$$

$$= \frac{n!}{n_1! n_2! n_3!} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{n_1} \cdot \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{n_2} \cdot \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3}\right)^{n_3}$$

(ii) Es gelte $n_1, n \geq 0$ und $n_1 \leq n$

$$Pr[X_1 = n_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = n]$$

$$= \frac{Pr[X_1 = n_1, \; X_2 + X_3 = n - n_1]}{Pr[X_1 + X_2 + X_3 = n]} \quad \Big| \; X_2 + X_3 \sim Poi(\lambda_2 + \lambda_3) \text{ da unabh.}$$

$$= \frac{\frac{\lambda_1^{n_1}}{n_1!} e^{-\lambda_1} \cdot \frac{(\lambda_2+\lambda_3)^{n-n_1}}{(n-n_1)!} e^{-\lambda_2-\lambda_3}}{\frac{(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)^n}{n!} e^{-\lambda_1-\lambda_2-\lambda_3}}$$

$$= \binom{n}{n_1} \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \right)^{n_1} \cdot \left(1 - \frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3} \right)^{n-n_1}$$

HA6.2

(a) $\mathrm{Var}[X+Y] = \mathbb{E}[(X+Y)^2] - \mathbb{E}[X+Y]^2$

$$= \left(\mathbb{E}[X^2] + 2\mathbb{E}[XY] + \mathbb{E}[Y^2]\right)$$

$$- \left(\mathbb{E}[X]^2 + 2\mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y] + \mathbb{E}[Y]^2\right)$$

$$= \mathrm{Var}[X] + 2\,\mathrm{Cov}(X,Y) \quad \mathrm{Var}[Y]$$

$\mathrm{Cov}(X,Y) = 0$

$$\mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y] \quad \square$$

(b) · X, Y unabh., identisch verteilt.

· $U := X + Y$, $V := X - Y$

(i) $$\mathrm{Cov}(U,V) = \mathbb{E}[UV] - \mathbb{E}[U]\,\mathbb{E}[V]$$

$$= \mathbb{E}[\underbrace{(X+Y)(X-Y)}_{= X^2 - Y^2}] - \underbrace{\mathbb{E}[X+Y]\,\mathbb{E}[X-Y]}_{\overset{\text{Linearität}}{=} (\mathbb{E}[X]+\mathbb{E}[Y]) \cdot (\mathbb{E}[X]-\mathbb{E}[Y])}$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[Y^2] - (\mathbb{E}[X]^2 - \mathbb{E}[Y]^2)$$

$$= \mathrm{Var}[X] - \mathrm{Var}[Y] \underset{\text{identische Verteilung}}{=} 0$$

(ii) $\bullet$ $\Pr[U=2a] = \Pr[X=a \wedge Y=a] = \Pr[X=a]^2$

X, Y iid. $= p^2 \in (0,1)$

$$\left[\begin{array}{l} \underline{\text{Formal:}} \quad \Pr[U=2a \wedge (X<a \vee Y<a)] \\ \qquad \leq \Pr[X<a \vee Y<a] \leq 2\Pr[X<a] = \otimes \end{array}\right]$$

$\bullet$ $\Pr[U=2a \wedge V=0] = \Pr[X=a \wedge Y=a] = p^2 \in (0,1)$

$\bullet$ $\Pr[Y=a] \in (0,1) \wedge \Pr[Y \geq a] = 1 \Rightarrow \exists b : b>a \wedge \Pr[Y=b]>0$

$\Longrightarrow \Pr[V=0] = 1 - \Pr[V \neq 0] < 1 - \Pr[X=a]\Pr[Y=b] < 1$

$\Rightarrow \Pr[U=2a] \cdot \Pr[V=0] < p^2 \cdot 1 = \Pr[U=2a \wedge V=0]$

$\square$

HA 6.3

Tore pro Minute im Mittel:

$$\text{FCB}: \quad \frac{98+29}{(34+12)\cdot 92} \approx 0.03$$

$$\text{BVB}: \quad \frac{81+23}{(34+12)\cdot 92} \approx 0.025$$

Tore pro 95 Minuten im Mittel:

$$\text{FCB}: \quad \frac{98+29}{(34+12)} \cdot \frac{95}{92} \approx 2.851$$

$$\text{BVB}: \quad \frac{81+23}{(34+12)} \cdot \frac{95}{92} \approx 2.335$$

$\Rightarrow$ $F_{95} \sim Poi(2.851)$: Tore des FCBs in 95min

$B_{95} \sim Poi(2.335)$: Tore des BVB in 95min

F_{95}, B_{95} unabhängig.

(a) $Pr[B_{95} = 3] \, Pr[F_{95} = 2]$

$$= \frac{(2.335)^3}{3!} \cdot \frac{(2.851)^2}{2!} e^{-2.335} \cdot e^{-2.851}$$

≈ 0.048 (laut wolframalpha)

⑤ $\Pr[B_{95}=m]\Pr[F_{95}=n]$ zu maximieren

$$\frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda}{k} \cdot \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$$

$\uparrow$

wächst, solange wie $\lambda > k$.

$\rightsquigarrow$ $\frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}$ maximal bei $\lfloor \lambda \rfloor$.

$\rightsquigarrow$ wahrscheinlichstes Ergebnis nach 95 min:

2 : 2

c) Gesucht ist ein möglichst kleines k, sodass

$$\Pr[\underbrace{F_{95} + B_{95}}_{\mathrm{Poi}(5.186)} \leq k] \geq 0.9$$

⇝ z.B. mittels wolfram alpha:

$$\mathrm{sum}\left((5.186)^{i} / i! \cdot e^{\wedge}(-5.186), i=0 \ldots k \right)$$

Für k=8 : ≈ 0.919

Für k=7: ≈ 0.846

⇝ Somit ist k=8.

(d) Nach Annahme 4 von der angegebenen Folie sind die in disjunkten Zeitintervallen erzielten Tore unabhängig voneinander.

⇝ Gesucht ist daher mit $F_{30} \sim \mathrm{Poi}(0.900)$, $B_{30} \sim \mathrm{Poi}(0.737)$

$$\Pr[F_{95} = B_{95} \wedge F_{30} = B_{30}]$$
$$= \Pr[F_{95} = B_{95}] \cdot \Pr[F_{30} = B_{30}]$$

W'keit für Unentschieden nach 95 min

W'keit für Unentschieden nach 30 min Verlängerung.

Allgemein für $X \sim Poi(\lambda)$, $Y \sim Poi(\mu)$, X, Y unabh.

$$Pr[X = Y] = \sum_{k=0}^{\infty} Pr[X=k]\, Pr[Y=k]$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \cdot \frac{\mu^k}{k!} e^{-\mu}$$

$$= e^{-\lambda-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\mu)^k}{(k!)^2}$$

$$= e^{-\lambda-\mu} \cdot I_0\left(2 \cdot \sqrt{\lambda\mu}\right)$$

$$\left(I_0(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2} \right)$$

$$\rightsquigarrow \Pr[F_{95} = B_{95}] \doteq e^{-5.186} \cdot I_0\left(2 \cdot \sqrt{2.335 \cdot 2.851}\right)$$

$$\approx 0.176$$

$$\Pr[F_{30} = B_{30}] \doteq e^{-1.637} \cdot I_0\left(2 \cdot \sqrt{0.9 \cdot 0.737}\right)$$

$$\approx 0.347$$

$$\rightsquigarrow \Pr[F_{95} = B_{95} \wedge F_{20} = B_{30}] \approx 0.061$$