Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Lösungsblatt 5
2. Juni 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

1. Sei X eine Zufallsvariable über einem diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ mit $\Pr[x] \neq 0$ für alle $x \in \Omega$. Zeigen Sie:

   Falls $\mathrm{Var}[X + X] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[X]$ gilt, dann ist X eine Konstante, d.h. für alle $x_1, x_2 \in \Omega$ gilt $X(x_1) = X(x_2)$.

2. Sei X eine Bernoulli-verteilte Variable (Indikatorvariable) mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.

   (a) Zeigen Sie die Relationen $0 \leq \mathrm{Var}[X] \leq \frac{1}{4}$.

   (b) Sei $\mathrm{Var}[X] = \frac{5}{36}$. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$.

3. Sei X eine geometrisch verteilte Zufallsvariable, für die $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X]$ gilt. Berechnen Sie $\Pr[X = 2]$.

Lösungsvorschlag

1. Einerseits gilt $\mathrm{Var}[X + X] = \mathrm{Var}[2X] = 4 \cdot \mathrm{Var}[X]$,
   andererseits gilt $\mathrm{Var}[X + X] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[X] = 2 \cdot \mathrm{Var}[X]$.

   Mit $\mu = \mathbb{E}[X]$ folgt

   $$\mathrm{Var}[X] = \sum_{i \in W_X} (i - \mu)^2 \Pr[X = i] \;=\; \sum_{x \in \Omega} (X(x) - \mu)^2 \Pr[x] \;=\; 0 \,.$$

   Wegen $\Pr[x] \neq 0$ folgt $X(x) = \mu$ für alle $x \in \Omega$.

2. Für Bernoulli-verteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert oder Erfolgswahrscheinlichkeit p gilt $\mathrm{Var}[X] = p(1 - p)$.

   (a) Das Maximum für alle p liegt bei $p = \frac{1}{2}$. Es folgt $\mathrm{Var}[X] \leq \frac{1}{4}$.

   (b) Aus $p(1-p)^{i-1} = \frac{5}{36}$ folgt $36p^2 - 36p + 5 = 0$. Die Nullstellen des quadratischen Polynoms sind $\frac{1}{6}$ und $\frac{5}{6}$. Es gibt also 2 Lösungen für den Erwartungswert: $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{6}$ oder $\mathbb{E}[X] = \frac{5}{6}$.

3. Mit $f_X(i) = p(1 - p)^{i-1}$ gilt $\mathbb{E}[X] = \frac{1}{p}$ und $\mathrm{Var}[X] = \frac{1-p}{p^2}$.

   Nun folgt aus $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X]$ die Gleichung $p = 1 - p$, mithin $p = \frac{1}{2}$.
   Für $i = 2$ ergibt sich als Ergebnis $f_X(i) = \frac{1}{4}$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ das erste Mal mindestens zweimal vorgekommen ist. Der Wert der Zufallsvariablen X sei durch die Anzahl der Würfe bestimmt.

Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$!

Lösungsvorschlag

Vorbemerkung: Betrachten wir eine Folge $2, 1, 5, 5, 3, 5, \ldots$ von geworfenen Augenzahlen und die Aussage $A(5)$ für jeden Wurf w_n, dass nämlich die Zahl 5 mindestens 2-mal vorgekommen ist. Dann trifft diese Aussage für die Würfe w_4, w_5 und w_6 zu. Das erste Mal trifft die Aussage aber für w_4 zu.

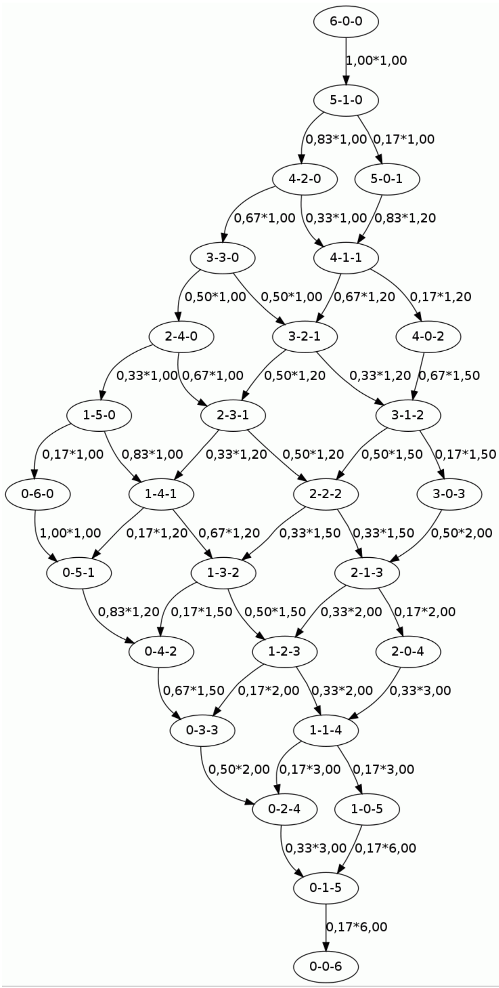
Wie bei der Lösung von VA 1, Blatt 4 identifizieren wir gewisse Phasen, in denen sich der Algorithmus befindet. In dem aktuellen Fall unterscheiden wir die Phasen in Abhängigkeit davon, dass eine Augenzahl bereits 0-mal bzw. 1-mal bzw. 2-mal gewürfelt wurde.
Wir protokollieren diese Phasen mit disjunkten Mengen $g_0, g_1, g_2 \subseteq [1, 6]$, wobei g_0 bzw. g_1 bzw. g_2 stets die Augenzahlen aus $[1, 6]$ enthalten, die 0-mal bzw. 1-mal bzw. 2-mal vorgekommen sind.
Beim Start des Algorithmus gilt natürlich $g_0 = [1, 6]$, $g_1 = \emptyset$, $g_2 = \emptyset$. Der Algorithmus endet mit $g_0 = \emptyset$, $g_1 = \emptyset$, $g_2 = [1, 6]$.
In der Phase (g_0, g_1, g_2) mit $g_2 \neq [1, 6]$ würfeln wir so lange bis eine Zahl aus g_0 oder g_1 erscheint. Der Wahrscheinlichkeitsraum für diese Phase ist $W_{g_0,g_1,g_2} = \langle \Omega_{g_0,g_1,g_2}, \Pr_{g_0,g_1,g_2} \rangle$ mit

$$
\begin{aligned}
\Omega_{g_0,g_1,g_2} &= \{x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z \,;\, n \in \mathbb{N}, x_i \in g_2, z \in [1, 6] \setminus g_2\} \,, \\
\Pr_{g_0,g_1,g_2}[x_1 x_2 \ldots x_{n-1} z] &= \left(\frac{|g_2|}{6}\right)^{n-1} \cdot \frac{|g_0| + |g_1|}{6} \cdot \begin{cases} \frac{|g_0|}{|g_0|+|g_1|} & : z \in g_0 \\ \frac{|g_1|}{|g_0|+|g_1|} & : z \in g_1 \end{cases} .
\end{aligned}
$$

Für jede Phase (g_0, g_1, g_2) sei X_{g_0,g_1,g_2} die Zufallsvariable, die die Länge n des Ergebnisses in dieser Phase ausgibt. Der Erwartungswert von X_{g_0,g_1,g_2} ist nichts anderes als die „durchschnittliche Anzahl von Schritten“, die erforderlich sind, um in den nächsten Zustand überzugehen. Es gilt

$$
\mathbb{E}[X_{g_0,g_1,g_2}] = \frac{6}{|g_0| + |g_1|} .
$$

Die Übergänge aller Phasen können nun in einem Binärbaum bzw. Netz dargestellt werden.
Die folgende Graphik von Roman Karlstetter zeigt das komplette Netz.



Netzdarstellung (Roman Karlstetter)

Die Berechnung von $\mathbb{E}[X]$ kann durch Programm erfolgen. Das folgende Programm stammt von Julius Adorf. Es berechnet den Erwartunswert

$$\mathbb{E}[X] = 24.13\ldots.$$

```
#!/usr/bin/env python
# -*- coding: utf-8 -*-
# Autor: Julius Adorf
# Ausführen mit ‘python <filename>‘

def expected_value(never_seen, seen_once=0, seen_multiple=0):
    """DWT Übungsblatt 5, Hausaufgabe 2. Berechnung des Erwartungswerts für die
    Zahl X der Würfe mit einem sechsseitigen, fairen Würfel bis jede Augenzahl
    mindestens zweimal aufgetreten ist. Berechnet den Erwartungswert für den
    Teilbaum, der mit dem Zustand (never_seen, seen_once, seen_multiple)
    assoziiert ist."""
    if never_seen == 0 and seen_once == 0:
        # Wir haben alle Zahlen mindestens zweimal gesehen, es sind keine
        # weiteren Würfe notwendig, um das Ende des Spieles zu erreichen.
        return 0.0
```

```
    else:
        # Der mit dem Satz der totalen Erwartung zu berechnende Erwartungswert
        e = 0.0
        # e_ph ist der Erwartungswert für die Zahl der Würfe in dieser Phase.
        # Die Zahl der Würfe in dieser Phase ist geometrisch verteilt mit
        # Trefferwahrsch. (never_seen + seen_once) / n = (n - seen_multiple) / n
        n = never_seen + seen_once + seen_multiple
        e_ph = 1.0 * n / (n - seen_multiple)
        if never_seen > 0:
            # Fall 1: Diese Phase wird mit dem Würfeln einer noch nie gesehenen
            # Augenzahl beendet. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Phase so
            # endet ist proportional zu der Anzahl noch nicht gesehener
            # Augenzahlen.
            p = 1.0 * never_seen / (never_seen + seen_once)
            e += (e_ph + expected_value(never_seen-1, seen_once+1, seen_multiple)) * p
        if seen_once > 0:
            # Fall 2: Diese Phase wird mit dem Würfeln einer Zahl zum zweiten
            # Mal abgeschlossen. Die Wahrscheinlichkeit, dass die Phase so
            # endet ist proportional zu der Anzahl noch nicht zum zweiten Mal
            # gewürfelter Augenzahlen.
            q = 1.0 * seen_once / (never_seen + seen_once)
            e += (e_ph + expected_value(never_seen, seen_once-1, seen_multiple+1)) * q
        return e

print expected_value.__doc__
print
print "E[X] = %f" % expected_value(6)
```

Das folgende zweite Programm stammt von Markus Englert. Wir haben eine sehr kleine Schrift gewählt, um die Formatierung möglichst unverändert zu belassen.

```
/*
 *  Berechnung des Erwartungsertes von Uebungsblatt 5 HA 2
 */
public class Main
{

/*
 * Die Aufgabenstellung wird als Binaerbaum modelliert an dessen Knoten die Zustaende E_[g0,g1,g2]
 * stehen, d.h. die Zahlen in g0 wurden noch nicht gewuefelt, die Zahlen in g1 bereits einmal un die
 * Zahlen in g2 bereits zweimal. Die Kanten modellieren die Phasen zum Eintreffen des Ereignisses, wobei
 * X_[g0,g1,g2] die Anzahl der Wuerfe in dieser Phase angibt.
 */

/*
 * Rekursive Funktion zum Berechnen des Erwartungswertes fÃ¼r die Anazhl der Wuerfe, die ab dem Startzu-
 * stand bis zum Ende des Spiel benoetigt werden. Der Startzustand wird durch die Kardinalitaeten der
 * Mengen g0, g1 und g2 bestimmt.
 */
public static float  berechneErwartungswert(int g0, int g1, int g2)
{
float eg0 = 0.0f; //Erwartungswert des Kindbaumes der durch WÃ¼rfeln eines Elementes aus g0 entsteht
float eg1 = 0.0f; //Erwartungswert des Kindbaumes der durch WÃ¼rfeln eines Elementes aus g1 entsteht

float pg0 = 0.0f; //Wahrscheinlichkeit des Kindbaumes der durch WÃ¼rfeln eines Elementes aus g0 entsteht
float pg1 = 0.0f;     //Wahrscheinlichkeit des Kindbaumes der durch WÃ¼rfeln eines Elementes aus g1 entsteht


//Erwartungswert fuer die Anzahl der Wuerfe in der aktuellen Phase
float e ;
```

```
if(g0+g1 != 0) e = 6 / (float)(g0+g1);
else e = 0.0f;

//Erwartungswert des g0 Astes des Binaerbaumes berechnen
if(g0 != 0)
{
pg0 = (float)g0/(float)(g0+g1);
eg0 = berechneErwartungswert(g0-1, g1+1, g2);
}

//Erwartungswert des g1 Astes des Binaerbaumes berechnen
if(g1 != 0)
{
pg1 = (float)g1/(float)(g0+g1);
eg1 = berechneErwartungswert(g0, g1-1, g2+1);
}

//Ergebnis ist der Erwartungswert aus den Schritten der Kindbaeume + Schritte aus der aktuellen Phase
return(pg0 * eg0 + pg1 * eg1 + e);
}
public static void main(String[] args)
{
System.out.println( "Erwartunswert  HA 2: " + berechneErwartungswert(6,0,0));
}

}
```

Bemerkung: Die Aufgabenstellung sollte für interessierte Teilnehmer durchaus eine Herausforderung darstellen. Es hat großen Spaß gemacht zu sehen, wie sich Übungsteilnehmer engagiert mit der Aufgabenstellung beschäftigt und sehr schöne Lösungen gefunden haben.

Vielen Dank und Anerkennung dafür von der Übungsleitung!!!

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Mit einem fairen Würfel mit Augenzahlen $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ wird wie folgt gespielt. Beim Start wird der Würfel 1 mal geworfen. Die geworfene Augenzahl sei x. Dem Wurf geben wir die Nummer 0. Nun wird so lange gewürfelt, bis wieder x erscheint. Die dabei (nach dem Wurf Nummer 0) geworfenen Augenzahlen y mit $y \neq x$ werden addiert. Das Ergebnis sei die Zufallsvariable Z.

1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei X_i die Augenzahl im i-ten Wurf mit $1 \leq i \leq n-1$. Sei $Z_n = \sum_{i=1}^{n-1} X_i$. Berechnen Sie den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung, dass beim Start die Augenzahl x geworfen wurde und das Spiel im n-ten Schritt endet.

2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit endet das Spiel im n-ten Schritt?

3. Geben Sie für Z die Dichtefunktion und den Erwartungswert an.

Lösungsvorschlag

Wir schreiben kurz $SpE = n$ für „Spielende im n-ten Schritt“.
Der Startwurf mit Nummer 0 sei X_0.

1. Sei $x \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ und $n \in \mathbb{N}$.
   Wir berechnen zunächst den bedingten Erwartungswert $\mathbb{E}[X_i | X_0 = x \wedge SpE = n]$ mit $1 \leq i \leq n-1$.

Jeder Wert $y \neq x$ tritt bei X_i auf mit Wahrscheinlichkeit

$$Pr[X_i{=}y|X_i{\neq}x] = \frac{\Pr[X_i = y \wedge X_i \neq x]}{\Pr[X_i \neq x]} = \frac{\Pr[X_i = y]}{\Pr[X_i \neq x]} = \frac{1/6}{5/6} = \frac{1}{5}\,.$$

Wir erhalten

$$\mathbb{E}[X_i|X_0 = x \wedge SpE = n] \;=\; \sum_{(1\leq y\leq 6)\wedge(y\neq x)} \frac{1}{5}\cdot y = \frac{21-x}{5}\,,$$

und damit

$$\mathbb{E}[Z_n|X_0 = x \wedge SpE = n] \;=\; (n-1)\frac{21-x}{5}\,.$$

2. Es gilt für alle Startwerte x und alle $n \geq 1$

$$\Pr[SpE = n] = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6}\,.$$

3. Wir bestimmen zunächst den Erwartungswert von Z_n unter der Bedingung $SpE = n$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z_n|SpE = n] &= \sum_{x\in[1..6]} \mathbb{E}[Z_n|SpE = n \wedge X_0 = x]\cdot\Pr[X_0 = x] \\
&= \sum_{x\in[1..6]} (n-1)\frac{21-x}{5}\cdot\frac{1}{6} = (n-1)\cdot 21\cdot\frac{1}{6}\,.
\end{aligned}$$

Durch Anwendung des Satzes der totalen Wahrscheinlichkeit erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[Z] &= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[Z_n|SpE = n]\cdot\Pr[SpE = n] \\
&= \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} (n-1)\cdot 21\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{6} \\
&= \textstyle\frac{35}{72}\cdot\sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \\
&= \textstyle\frac{35}{72}\cdot\left(\frac{1}{1-\frac{5}{6}}\right)^2 \;=\; \frac{35}{2}\,.
\end{aligned}$$

Bemerkung Die Berechnung der Dichte f_Z erfolgt in zwei Schritten. Wir betrachten den folgenden 2. Schritt zuerst. Sei f_{Z_n} die Dichte von Z_n. Dann gilt nach dem Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit für alle $i \in \mathbb{N}$

$$f_Z(i) = \sum_{n=1}^{\infty} f_{Z_n}(i)\cdot\Pr[SpE = n]\,.$$

Der erste Schritt ist nun die Angabe der Dichte f_{Z_n} auf der Grundlage der bedingten Dichten $f_{X_i|X_0=x}$. Es gilt

$$f_{Z_n}(i) = \sum_{x=1}^{6}\frac{1}{6} f_{Z_n|X_0=x}(i)\,.$$

Wir bemerken, dass Z_n unter der Bedingung $X_0 = x$ eine Summe der unabhängigen Variablen X_i für $1 \leq i \leq n-1$ ist. Damit folgt mit Konvolution $\otimes$ der bedingten Dichten $f_{X_i|X_0=x}$ nach Satz der Vorlesung

$$f_{Z_n|X_0=x} = f_{X_1|X_0=x}\otimes f_{X_2|X_0=x}\otimes\ldots f_{X_{n-1}|X_0=x}\,.$$

Prinzipiell kann nun $f_Z(i)$ per Programm approximativ bestimmt werden.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir setzen beim Würfeln Laplace-Verteilung voraus.

1. Was ist wahrscheinlicher:
   (a) bei fünfmal Würfeln mindestens einen Fünfer zu würfeln?
   (b) bei zehnmal Würfeln mindestens zwei Dreier zu würfeln?
2. Sie würfeln so lange, bis Sie einen Einser bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den Einser beim fünften Wurf bekommen?
3. Sie würfeln so lange, bis Sie drei Einser (nicht notwendig hintereinander) bekommen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie den dritten Einser beim siebten Wurf erhalten?

Lösungsvorschlag

1. (a) Es gibt $5^5 = 3125$ Möglichkeiten mit fünf Würfen keinen Fünfer zu würfeln. Andererseits gibt es insgesamt $6^5 = 7776$ Möglichkeiten mit fünf hintereinander ausgeführten Würfen Augenzahlen zwischen 1 und 6 zu bekommen.

   Sei E das Ereignis, dass bei fünf Würfen mindestens einmal ein Fünfer dabei war, dann gilt

$$\mathcal{P}[E] = \frac{|E|}{6^5} = \frac{7776 - 3125}{7776} = \frac{4651}{7776} \approx 0,5981\,.$$

   Alternativ kann man auch wie folgt rechnen.

   Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der Fünfer bei fünf Würfen ergibt. Dann ist X binomialverteilt mit $X \sim \mathrm{Bin}(5, \frac{1}{6})$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq 1] &= 1 - \Pr[X = 0] \\
&= 1 - \binom{5}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^5 \\
&= 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^5 = \frac{4651}{7776} \approx 0,5981\,.
\end{aligned}$$

   (b) Sei X die Zufallsvariable, die die Anzahl der geworfenen Dreier bei 10 Würfen ergibt. Dann ist X wieder binomialverteilt, nun aber mit $X \sim \mathrm{Bin}(10, \frac{1}{6})$ und es gilt

$$\begin{aligned}
\Pr[X \geq 2] &= 1 - \Pr[X = 0] - \Pr[X = 1] \\
&= 1 - \binom{10}{0}\left(\frac{1}{6}\right)^0\left(\frac{5}{6}\right)^{10} - \binom{10}{1}\left(\frac{1}{6}\right)^1\left(\frac{5}{6}\right)^9 \\
&= 1 - 3\left(\frac{5}{6}\right)^{10} \approx 0,5155\,.
\end{aligned}$$

   Also ist die Variante (a) wahrscheinlicher.

2. X sei die Anzahl der Würfe, bis die 1 geworfen wird. X ist geometrisch verteilt mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{6}$. Dann gilt

$$\Pr[X=5] \; = \; p \cdot (1-p)^4 = \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^4 \approx 0,0804\,.$$

3. Sie X die Variable, die die Anzahl der Würfe bis zum dritten Einser ergibt. Dann ist X negativ binomialverteilt mit Dichte

$$\Pr[X = z] = f_X(z) = \binom{z-1}{3-1}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^{z-3}\,.$$

Es gilt

$$\Pr[X = 7] = f_X(7) = \binom{6}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^4 = 15 \cdot \frac{5^4}{6^7} \approx 0,0335\,.$$

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

X sei Poisson-verteilt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[(X+1)^{-1}]$.

Lösungsvorschlag

Nach Voraussetzung gilt $X \sim \mathrm{Po}(\lambda)$ für irgendein bestimmtes $\lambda \geq 0$. Die diskrete Dichtefunktion von X ist dann $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und $f_X(i) = 0$ sonst. Nun gilt

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[(X+1)^{-1}] &= \sum_{i \in W_X} \frac{1}{i+1} f_X(i) \\
&= \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i+1} \cdot \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^{-1} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^{i+1}}{(i+1)!} \\
&= e^{-\lambda}\lambda^{-1} \left(-1 + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{\lambda^i}{i!} \right) \\
&= e^{-\lambda}\lambda^{-1}(-1 + e^{\lambda}) \\
&= \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} .
\end{aligned}$$

Bemerkung: Für eine Poisson-verteilte Variable X können systematisch alle Erwartungswerte für beliebige Polynome in X in geschlossener Form berechnet werden. Beispiel: $X^{\underline{n}}$. Die vorliegende Aufgabe zeigt, dass diese Methodik sogar auf die Funktion $(X+1)^{-1}$ anwendbar ist.

Vorbereitung 2

Eine Firma stellt Kuchen mit Rosinen her. Hierfür werden $\lambda \cdot N$ Rosinen in den Teig für N Kuchen gegeben, woraufhin die ganze Masse so gut durchmischt wird, dass wir annehmen können, dass jede einzelne Rosine mit derselben Wahrscheinlichkeit in einem der Kuchen landet. N ist unbekannt und groß.

Wie groß muss die durchschnittliche Zahl λ von Rosinen pro Kuchen sein, wenn höchstens durchschnittlich jeder hundertste Kuchen keine Rosinen enthalten darf?

Lösungsvorschlag

Aus der Problemstellung entnimmt man, dass die durchschnittliche Anzahl der Rosinen pro Kuchen mit λ gegeben ist. Über N bzw. die Anzahl $\lambda \cdot N$ der Rosinen ist nur bekannt, dass diese Zahlen sehr groß sind.

Wir betrachten das Problem aus der Sicht eines einzelnen Kuchens und stellen uns vor, dass dem Kuchen eine (potentiell unendliche) Anzahl X von Rosinen zugeteilt werden, wobei die einzelnen Rosinen immer mit gleicher Wahrscheinlichkeit zugeteilt werden.

Die Verteilung der Rosinen auf den Kuchen, d. h. der Zufallsvariablen X, nehmen wir approximativ als Poisson-Verteilung an, d. h. $f_X : \mathbb{R} \to [0,1]$ mit $f_X(i) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^i}{i!}$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und $f_X(i) = 0$ sonst. Dann erhalten wir

$$\Pr[X = 0] = \frac{e^{-\lambda}\lambda^0}{0!} = e^{-\lambda}\,.$$

Wenn durchschnittlich höchstens jeder hundertste Kuchen frei von Rosinen sein darf, dann bedeutet dies, dass $\Pr[X = 0] \le \frac{1}{100}$ erfüllt werden muss. Es folgt

$$\lambda \ge \ln 100 \approx 4,605\,.$$

Vorbereitung 3

Zwei Arbeiter A und B kontrollieren unabhängig eine Tagesproduktion. A und B protokollieren k_1 bzw. k_2 tatsächliche Fehler. Es sei n die Anzahl der tatsächlich aufgetretenen Produktionsfehler. Wir nehmen an, dass die Arbeiter jeden der n Fehler mit Wahrscheinlichkeit p_1 bzw. p_2 registriert haben.

Es seien X_1 bzw. X_2 die Zufallsvariablen, die die Anzahl der von Arbeiter A bzw. B gefundenen Fehler angeben. Wie sind die X_i verteilt? Für welche Werte von n gilt

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \ge 0.1] \le 0.01\,?$$

Lösungsvorschlag

Es gilt $X_i \sim \mathrm{Bin}(n; p_i)$. Daraus folgt $\mathbb{E}[X_i] = n \cdot p_i$, d. h. $\mathbb{E}[\frac{1}{n}X_i] = p_i$.
Wir wenden die Chebyshev-Ungleichung wie folgt an.

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \ge 0.1] \le \frac{\mathrm{Var}[\frac{1}{n}X_i]}{0.01}\,.$$

Weiter gilt $\mathrm{Var}[\frac{1}{n}X_i] = \frac{1}{n^2} \cdot n \cdot p_i(1-p_i)$. Wegen $p_i \in [0,1]$ gilt $p_i(1-p_i) \le \frac{1}{4}$ und es folgt

$$\Pr[|\frac{1}{n}X_i - p_i| \ge 0.1] \le \frac{\mathrm{Var}[\frac{1}{n}X_i]}{0.01} \le \frac{1}{0,04n}\,.$$

Damit haben wir die hinreichende Bedingung

$$n \ge 2500\,.$$

Bemerkung: Solange wir keine weiteren Informationen zu den Wahrscheinlichkeiten p_1 und p_2 haben, können wir die Abschätzung nicht verbessern.

Tutoraufgabe 1

1. Ein Geigerzähler registriert mit Wahrscheinlichkeit 10^{-4} ein von einer Quelle Q emittiertes Teilchen. Wenn Q 30 000 Teilchen emittiert, wie groß ist dann (approximativ) die Wahrscheinlichkeit, dass der Zähler kein Teilchen registriert? Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er mehr als 2 Teilchen registriert?

2. Beweisen Sie (analog zum Beweis der Chernoff-Schranken in der Vorlesung), dass die Chernoff-Schranke auch für Poisson-verteilte Zufallsvariablen gilt.

Lösungsvorschlag

1. Wir können die Poisson-Approximation verwenden. Nach dieser ist die Zahl der registrierten Teilchen mit

$$\lambda = n \cdot p_i = 3 \quad (i \leq 30\,000)$$

verteilt. Also gilt

$$\Pr[\text{kein Teilchen}] \approx e^{-3} \approx 5.0\%$$

und

$$\Pr[\text{mehr als 2 Teilchen}] = 1 - \Pr[\leq 2 \text{ Teilchen}] \approx 1 - e^{-3}(1 + 3 + 9/2) \approx 57.7\%.$$

2. Sei X Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda = \mu$. Dann gilt für jedes $t \in \mathbb{R}^+$, dass

$$\mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-\mu}\mu^k}{k!} e^{tk} = e^{-\mu} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\mu e^t)^k}{k!} = e^{\mu(e^t-1)} .$$

Mit der Markov-Ungleichung folgt

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] = \Pr[e^{tX} \geq e^{t(1+\delta)\mu}] \leq \frac{\mathbb{E}[e^{tX}]}{e^{t(1+\delta)\mu}} = e^{\mu(e^t-1)-t(1+\delta)\mu}.$$

Mit $t := \ln(1+\delta)$ erhalten wir hieraus

$$\Pr[X \geq (1+\delta)\mu] \leq e^{\mu\delta - (\ln(1+\delta))(1+\delta)\mu} = \left(\frac{e^\delta}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^\mu .$$

Tutoraufgabe 2

Wir betrachten ein Chamäleon, das in den nächsten 10 Stunden 500 Insekten fangen muss, um seinen Kalorienbedarf zu decken. Pro Stunde passieren das Chamäleon in Reichweite genau 100 Insekten, davon sind 60 klein und werden mit einer Wahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{1}{6}$ gefangen. Die anderen 40 sind groß und können mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ gefangen werden.

Sei Z die Zufallsvariable der Anzahl der in den nächsten 10 Stunden gefangenen Insekten. Schätzen Sie jeweils mit den Ungleichungen nach Markov, Chebyshev und Chernoff die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Z \geq 500]$ ab, mit der das Chamäleon nicht verhungert.

Lösungsvorschlag

1. Wir leiten dieses Beispiel ausführlich mit den beteiligten Wahrscheinlichkeitsräumen ab. Normalerweise ist diese Ausführlichkeit nur dann erforderlich, wenn man formale Beweise anstrebt.

   - Ein kleines Insekt wird entweder gefangen (Ereignis ω_k) oder nicht gefangen (Ereignis $\overline{\omega}_k$), jeweils mit den genannten Wahrscheinlichkeiten:

     $$\Omega_k = \{\omega_k, \overline{\omega}_k\} \quad \text{und} \quad Pr_k(\omega_k) = \frac{1}{6},\ Pr_k(\overline{\omega}_k) = \frac{5}{6}\,.$$

     In einem analogen Experiment wird ein großes Insekt gefangen (Ereignis ω_g) oder nicht gefangen (Ereignis $\overline{\omega}_g$), jeweils mit den genannten Wahrscheinlichkeiten:

     $$\Omega_g = \{\omega_g, \overline{\omega}_g\} \quad \text{und} \quad Pr_g(\omega_g) = \frac{3}{4},\ Pr_g(\overline{\omega}_g) = \frac{1}{4}\,.$$

   - Die 600-fache bzw. 400-fache Wiederholung beider Experimente führt auf Produkträume Ω_K bzw. Ω_G mit 600 bzw. 400 Komponenten.

     $$\begin{aligned}
     \Omega_K &= \{x = (x_1, \ldots, x_{600}) : x_i \in \Omega_k\},\\
     \Pr[x] &= \prod_{i_1}^{600} \Pr[x_i],\\
     \Omega_G &= \{x = (x_1, \ldots, x_{400}) : x_i \in \Omega_g\},\\
     \Pr[x] &= \prod_{i_1}^{400} \Pr[x_i].
     \end{aligned}$$

   - Um die Anzahl kleiner bzw. großer gefangener Insekten zählen zu können, führen wir die Zufallsvariablen X bzw. Y wie folgt ein.

     $$\begin{aligned}
     X_i(x) &= \begin{cases} 1 & : \ x_i = \omega_k \\ 0 & : \ x_i = \overline{\omega}_k \end{cases}\ , \quad i = 1, \ldots, 600,\ x \in \Omega_K,\\
     X &= \sum_{i=1}^{600} X_i \qquad (X_i \text{ unabhängig})\,,\\
     Y_i(x) &= \begin{cases} 1 & : \ x_i = \omega_g \\ 0 & : \ x_i = \overline{\omega}_g \end{cases}\ , \quad i = 1, \ldots, 400,\ x \in \Omega_G,\\
     Y &= \sum_{i=1}^{400} X_i \qquad (Y_i \text{ unabhängig})\,.
     \end{aligned}$$

     X und Y sind binomialverteilt. Es gilt

     $$W_X = \{0, 1, \ldots, 600\} \quad \text{und} \quad W_y = \{0, 1, \ldots, 400\}\,,$$

     $$f_X(i) = \binom{600}{i} \left(\frac{1}{6}\right)^i \left(\frac{5}{6}\right)^{600-i} \quad \text{und} \quad f_Y(i) = \binom{400}{i} \left(\frac{3}{4}\right)^i \left(\frac{1}{4}\right)^{400-i}\,.$$

- Erwartungswerte und Varianz von X und Y sind

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= 600 \cdot \frac{1}{6} = 100\,, \\
\mathrm{Var}[X] &= 600 \cdot \frac{1}{6} \cdot \frac{5}{6} = \frac{500}{6}\,, \\
\mathbb{E}[Y] &= 400 \cdot \frac{3}{4} = 300\,, \\
\mathrm{Var}[Y] &= 400 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{4} == \frac{300}{4}\,.
\end{aligned}$$

- Um nun kleine und große Insekten gleichzeitig unabhängig zählen zu können, führt man wieder einen Produktraum ein, dieses Mal

$$\Omega = \Omega_K \times \Omega_G = \{z = (x,y);\; x \in \Omega_K \text{ und } y \in \Omega_G\}\,,$$

$$\Pr[(x,y)] = P_X[x] \cdot P_Y[y]\,.$$

Die Variablen X und Y werden auf Ω erweitert zu

$$X'((x,y)) = X(x) \qquad \text{und} \qquad Y'((x,y)) = Y(y).$$

X' bzw. Y' haben die gleiche Wahrscheinlichkeitsdichte wie X bzw. Y, entsprechend haben sie den gleichen Erwartungswert und die gleiche Varianz. X' und Y' sind unabhängig.

Für die Gesamtzahl $Z = X' + Y'$ von Insekten gilt nun

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z) &= \mathbb{E}(X') + \mathbb{E}(Y') = 400 \\
\mathrm{Var}(Z) &= \mathrm{Var}(X') + \mathrm{Var}(Y') = \frac{1900}{12} \approx 158.
\end{aligned}$$

2. Nach Markov gilt für $t = 500$ und $\mathbb{E}(Z) = 400$

$$\Pr[Z \geq t] \leq \frac{\mathbb{E}(Z)}{t} = \frac{400}{500} = 0.8\,.$$

Nach Chebyshev gilt für alle $t > 0$

$$\Pr[|Z - \mathbb{E}(Z)| \geq t] \leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{t^2}\,.$$

Damit können wir wie folgt abschätzen

$$\begin{aligned}
\Pr[Z \geq 500] &= \Pr[Z - 400 \geq 100] \\
&\leq \Pr[Z - 400 \geq 100] + \Pr[400 - Z \geq 100] \\
&= \Pr[|Z - 400| \geq 100] \\
&\leq \frac{\mathrm{Var}(Z)}{t^2} = \frac{1900/12}{100^2} \approx 0{,}016.
\end{aligned}$$

Nach Chernoff gilt

$$\Pr[Z \geq 500] = \Pr[Z \geq (1 + 1/4)400] \leq \left(\frac{\exp(1/4)}{(1+1/4)^{(1+1/4)}}\right)^{400} \approx 0.94 \cdot 10^{-5}.$$

Es sind nur diejenigen Abschätzungen brauchbar, die die Wahrscheinlichkeit nahe 0 oder 1 einschränken. Die Abschätzung nach Markov ist hier unbrauchbar.

Die Abschätzung nach Chernoff dagegen besagt klar, dass mit hoher Wahrscheinlichkeit das Chamäleon verhungern wird. Allerdings konnte die Chernoff'sche Formel nur benutzt werden, weil bekannt war, dass Z eine Summe von 1000 unabhängigen Bernoulli-Zufallsvariablen ist. Es gilt

$$Z = X_1 + X_2 + \ldots . X_{600} + Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{400}$$

mit unabhängigen Bernoulli-verteilten Variablen X_i und Y_i.
Merke: die Bernoulli-Parameter p der X_i und Y_i müssen dabei nicht gleich sein.

Die Abschätzung nach Chebyshev ist ebenfalls brauchbar und hat zudem den Vorteil, dass sie für jede Zufallsvariable Z uneingeschränkt gilt.

Tutoraufgabe 3

Wir starten mit einem Euro Kapital $K_0 = 1$ und spielen folgendes Spiel mit einer fairen Münze: Wir setzen jedes Mal die Hälfte unseres Kapitals und werfen die Münze. Fällt Kopf, verlieren wir den Einsatz. Fällt Zahl, erhalten wir unseren Einsatz zurück und zusätzlich 4/3 des Einsatzes als Gewinn.

1. Welchen Gewinn X_n erwarten wir bei n Würfen?

   Gegen welchen Grenzwert strebt der erwartete Gewinn $\mathbb{E}[X_n]$ für $n \to \infty$?

2. Das Kapital K_n sei gegeben durch $K_n = X_n + 1$. Es sei $Y_n = K_n/K_{n-1}$ mit (logarithmischem) Erwartungswert $\mu = \mathbb{E}[\ln Y_n]$. Zeigen Sie, dass $K_n \le \exp(\mu n/2)$ gilt mit einer für wachsendes n gegen 1 strebenden Wahrscheinlichkeit, d. h.

   $$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\frac{\ln(K_n)}{n} \le \frac{\mu}{2}\right] = 1\,.$$

   Hinweis: Nutzen Sie das Gesetz der großen Zahlen.

3. Interpretieren Sie die Ergebnisse! Erklären Sie insbesondere den scheinbaren Widerspruch eines erwarteten unendlichen Gewinns und der Wahrscheinlichkeit, dass das Kapital gegen 0 strebt!

Lösungsvorschlag

1. Sei K_n unser Kapital in der n-ten Runde mit $K_0 = 1$ und $X_n = K_n - K_0$ der entsprechende Gewinn. Sei $Y_n = 1/2$, wenn im n-ten Wurf Kopf fällt, und $Y_n = 1 + 4/3 \cdot 1/2 = 5/3$, wenn im n-ten Wurf Zahl fällt. Dann ist $K_n = K_0 \cdot Y_1 \cdot Y_2 \cdots Y_n$. Aus

   $$\mathbb{E}[Y_i] = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{3} = \frac{13}{12}$$

   folgt unmittelbar

   $$\mathbb{E}[K_n] = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{E}[Y_k] = \left(\frac{13}{12}\right)^n \to \infty\,.$$

   Also erwarten wir einen unendlich großen Gewinn!

2. Es gilt $\mu = \mathbb{E}(\ln Y_i) = (\ln 1/2 + \ln 5/3) \cdot \frac{1}{2} < 0$. Nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt für alle $\delta > 0$ und, in Abhängigkeit von n, beliebig klein werdendem $\varepsilon > 0$

$$\Pr\left[\left|\frac{\ln Y_1 + \ln Y_2 + \cdots + \ln Y_n}{n} - \mu\right| \geq \delta\right] \leq \varepsilon\,.$$

Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left|\frac{\ln Y_1 + \ln Y_2 + \cdots + \ln Y_n}{n} - \mu\right| < \delta\right] = 1\,.$$

Mit $\delta = \left|\frac{\mu}{2}\right| = -\frac{\mu}{2}$ folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Pr\left[\left|\frac{\ln K_n}{n} - \mu\right| < -\frac{\mu}{2}\right] = 1\,.$$

Wegen

$$\Pr\left[\left|\frac{\ln K_n}{n} - \mu\right| < -\frac{\mu}{2}\right] \leq \Pr\left[\frac{\ln K_n}{n} - \mu \leq -\frac{\mu}{2}\right]$$

und

$$\Pr\left[\frac{\ln K_n}{n} - \mu \leq -\frac{\mu}{2}\right] = \Pr\left[\ln K_n \leq \frac{n\mu}{2}\right] = \Pr[K_n \leq \exp(\mu n/2)]$$

folgt

$$\lim_{n\to\infty} \Pr[K_n \leq \exp(\mu n/2)] = 1\,.$$

Für großes n also geht die Wahrscheinlichkeit gegen 1, dass $K_n \leq \exp(\mu n/2)$. Wegen $\mu < 0$ strebt also unser Kapitalstand mit immer größerer Wahrscheinlichkeit gegen 0 je länger wir spielen.

3. Es handelt sich um ein Spiel, das vorteilhaft ist, wenn man mit einer sehr geringen Wahrscheinlichkeit einen extrem großen Gewinn erzielen will. Mit großer Wahrscheinlichkeit verliert man dabei das Anfangskapital.