Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / M. Luttenberger / S. Schwoon

Sommersemester 2007
Übungsblatt 9

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt wird am 4./5. Juli besprochen.

Aufgabe 9.1

In einem Supermarkt sind zwei Kassen geöffnet. Die durchschnittliche Zeit, die zum Bedienen eines Kunden benötigt wird, sei an Kasse Eins eine Minute und an Kasse Zwei 40 Sekunden. Wir gehen davon aus, dass die Wartezeiten jeweils exponentiell mit dem entsprechenden Parameter verteilt sind.

(a) Wir nehmen an, Sie wüssten nicht, welche der Kassen schneller ist. Sie entscheiden sich daher bei Erreichen der Kassen für diejenige, an welcher die kürzere Warteschlange ist.

Sei l_1 die Anzahl der Personen, die an Kasse Eins anstehen, l_2 die Anzahl von Kunden an Kasse Zwei - jeweils gemessen zu dem Zeitpunkt, zu welchem Sie die Kasse erreichen. Für welche Werte (l_1, l_2) hätten Sie sich doch lieber für die längere Warteschlang entscheiden sollen?

(b) Wir nehmen nun an, dass sich $l \geq 2$ Kunden vor Ihnen befinden, wobei der vorderste Kunde sofort an der nächsten frei werdenden Kasse bedient wird. D.h. für $l = 2$ würden Sie direkt an die nächste frei werdende Kasse nachrücken.

Wie lange stehen Sie jetzt an, bis Sie bedient werden? Und mit welcher Wahrscheinlichkeit werden Sie an Kasse Eins bedient?

Aufgabe 9.2

Wir betrachten zwei unabhängige Zufallsvariablen $X \sim \exp(\lambda)$ und $Y \sim \exp(\mu)$.

(a) Berechnen Sie die Dichte von $X + Y$. Beachten Sie dabei, dass die Fälle $\lambda = \mu$ und $\lambda \neq \mu$ unterschieden werden müssen.

(b) Es seien nun $T_1, \ldots, T_n$ unahbhängige und identisch verteilte Zufallsvariablen mit $X_i \sim \exp(\lambda)$. Weiter bezeichne S_n die Summe $T_1 + T_2 + \ldots + T_n$.

i) Zeigen Sie, dass die Dichte von S_n gleich

$$f_{S_n}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} & \text{für } z \geq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

ist.

Hinweis:

Den Induktionsanfang haben Sie bereits in (a) gezeigt.

ii) Zeigen Sie hiermit, dass für die Verteilungsfunktion von S_n

$$F_{S_n}(z) = -\frac{(\lambda z)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} + F_{S_{n-1}}(z)$$

für $z \geq 0$ gilt.

Geben Sie $F_{S_n}(z)$ nun in geschlossener Form an.

Hinweis:

Für den ersten Schritt müssen Sie nur einmal geeignet Produktintegration anwenden. Für den zweiten Schritt beachte man, dass $F_{S_1}(z) = F_{T_1}(z)$ gilt. $F_{T_1}(z)$ sollte Ihnen bekannt sein.

iii)* **Freiwillige Zusatzaufgabe - wird nicht besprochen**

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit

$$\Pr[S_n \leq t \wedge S_{n+1} > t].$$

Verwenden Sie hierbei, dass T_{n+1} und S_n unabhängig sind. Verwenden Sie weiterhin, dass für zwei unabhängige Zufallsvariablen Y, Z und stetige Funktionen $u, o : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stets

$$\Pr[u(Y) \leq Z \leq o(Y)] = \int\limits_{y=-\infty}^{\infty} [F_Z(o(y)) - F_Z(u(y))] \cdot f_Y(y) \cdot dy$$

gilt.