Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Sommersemester 2009
Übungsblatt 9

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 13. Juli bis 10:15 abzugeben und wird am 13./14. Juli besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 9.1 — 1P+1P+2P+1P

Sie rufen bei Ihrer Tante und Ihrem Onkel an. Mit W'keit $\frac{1}{3}$ geht Ihre Tante ran, mit W'keit $\frac{2}{3}$ Ihr Onkel. Wenn Ihre Tante rangeht, telefonieren Sie im Schnitt 9 Minuten lang; wenn Ihr Onkel rangeht, telefonieren Sie im Schnitt 3 Minuten lang. In beiden Fällen ist die Länge des Telefongesprächs exponential-verteilt.

(a) Sei X die Länge des Telefongesprächs, wenn Sie bei diesen Verwandten anrufen. Berechnen Sie $\mathbb{E}X$.
Hinweis: Benutzen Sie Satz 13 aus dem Kapitel über Zufallszahlen (evtl. Folie 119).

(b) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von der totalen W'keit für die Verteilungsfunktion F_X:

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{3}e^{-x/9} - \frac{2}{3}e^{-x/3}$$

(c) Berechnen Sie die Standardabweichung $\sigma(X)$ und den sogenannten „Variationskoeffizienten“ $\dfrac{\sigma(X)}{\mathbb{E}X}$. Reimen Sie sich damit zusammen, warum die Verteilung von X „hyperexponentiell“ genannt wird.
Hinweise: *hyper* bedeutet *über*. Wie im Diskreten gilt $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$.

(d) Angenommen, das Gespräch dauert mindestens 10 Minuten. Wie groß ist die W'keit, dass Sie mit der Tante telefonieren?

Aufgabe 9.2 — 1P+1P+2P+2P

Um erreichbar zu sein, benötigen Sie mindestens ein funktionierendes iPhone für Ihre geplante Nordpolreise. Unter arktischen Bedingungen ist die Lebensdauer eines iPhones exponentialverteilt mit Erwartungswert 4, d.h., es hält im Schnitt 4 Tage lang (egal ob Sie es benutzen oder nicht).

(a) Ihr Übungspartner rät Ihnen, zwei iPhones mitzunehmen, denn dann seien Sie im Erwartungswert 8 Tage lang erreichbar. Er argumentiert so:

> “Seien X_1 und X_2 die Lebensdauern von iPhone A und iPhone B. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit geht iPhone A als erstes kaputt. Wegen $\mathbb{E}X_1 = 4$ ist das im Erwartungswert nach 4 Tagen. Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung und wegen $\mathbb{E}X_2 = 4$ hält iPhone B dann im Schnitt noch weitere 4 Tage. Macht insgesamt 8 Tage.”

Was ist hier falsch und was ist richtig?

(b) Wie lange sind Sie im Erwartungswert erreichbar? Das heißt, berechnen Sie $\mathbb{E}S$, wobei $S = \max\{X_1, X_2\}$.

(c) Berechnen Sie den sogenannten *Median* von S. Das heißt, berechnen Sie t, sodass Sie nach genau t Tagen mit W'keit $\frac{1}{2}$ erreichbar sind. Berechnen Sie dazu zunächst die Verteilungsfunktion F_S von S.

(d) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie $\mathbb{E}\left[\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\right]$.

Aufgabe 9.3 **1P+2P+2P+1P**

In einem Poisson-Prozess treffen Jobs auf einem Server ein, im Schnitt alle 5 Minuten. Die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Jobankünften ist also exponentialverteilt mit Parameter 1/5. Wenn 10 Minuten lang kein Job eingetroffen ist, geht das Betriebssystem in einen Energiesparmodus über. Wir möchten wissen, wie lange es im Schnitt dauert, bis das Betriebssystem im Energiesparmodus ist. Seien $T_1, T_2, \ldots$ die Wartezeiten zwischen den Jobanküften und W die Zeit bis zum Energiesparmodus.

(a) Geben Sie $\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \geq 10]$ an.
Hinweis: Benutzen Sie die Gedächtnislosigkeit.

(b) Benutzen Sie (a) und Satz 13 aus dem Kapitel über Zufallszahlen (evtl. Folie 119), um zu zeigen:

$$\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \leq 10] = \frac{5 - 15e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

(c) Geben Sie $\mathbb{E}[W \mid T_1 \geq 10]$ an. Benutzen Sie (b), um $\mathbb{E}[W \mid T_1 \leq 10]$ in Abhängigkeit von $\mathbb{E}W$ anzugeben.

(d) Benutzen Sie (c) und Satz 13 aus dem Kapitel über Zufallszahlen (evtl. Folie 119), um $\mathbb{E}[W]$ zu berechnen.

Aufgabe 9.4 **3P**

Suchanfragen treffen in einem Poisson-Prozess bei der Suchmaschine Hupf ein. Seien $T_1, T_2, \ldots$ die Zeiten zwischen zwei aufeinander folgenden Suchanfragen. Die T_i sind unabhängig und es gilt $T_i \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$. Sie haben in der Vorlesung gehört, dass die Zahl der Suchanfragen während eines Zeitraums t Poisson-verteilt ist mit Parameter λt. Die Aufgabe ist, das zu beweisen, das heißt, es ist zu zeigen, dass für $t > 0$ gilt:

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t \leq \sum_{i=1}^{n+1} T_i\right] = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Bezeichne $S_n := \sum_{i=1}^{n} T_i$. Es gilt:

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t \leq \sum_{i=1}^{n+1} T_i\right] = \Pr[S_n \leq t \leq S_n + T_{n+1}] = \Pr[t - T_{n+1} \leq S_n \leq t]$$

Setzen Sie von hier aus fort.
Hinweis: Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie gezeigt, dass für die Dichte von S_n gilt:

$$f_{S_n}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$