Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 3
4. Mai 2015

# Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 11. Mai 2015, 12:15 Uhr in die* ***DWT*** *Briefkästen.*

## Tutoraufgabe 1

Wir betrachten die Eckpunkte des dreidimensionalen Standardwürfels aus denen wir zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit eine Ecke auswählen. Außerdem definieren wir eine Zufallsvariable $X : \{0,1\}^3 \to \mathbb{R}$, welche jeden Eckpunkt des Würfels auf seine euklidische Norm abbildet. Es gilt also $X(p) = \|p\|_2$. Bestimmen sie die Dichte, die Verteilung, den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

## Tutoraufgabe 2

Konstruieren Sie einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$ sowie eine dazu passende Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$, so dass zwar der Erwartungswert von $X$ existiert aber keine Varianz.

## Tutoraufgabe 3

Spieler $a$ und $b$ spielen so lange Federball, bis einer der beiden zwei Ballwechsel mehr für sich entschieden hat als der andere. Dabei gibt die Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{N}$ an, wie viele Ballwechsel insgesamt gespielt werden. Angenommen der Ausgang eines Ballwechsels ist unabhängig vom bisherigen Spielverlauf und Spieler $a$ gewinnt mit Wahrscheinlichkeit $0 \leq p \leq 1$. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $X$. Für welchen Wert von $p$ ist die erwartete Anzahl an Ballwechseln maximal?

**Hinweis:** Nutzen Sie Satz 36 der Vorlesung.

## Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Ein Gilbertgraph $G(n, p)$ mit $n$ Knoten wird durch zufälliges Einfügen von ungerichteten Kanten zwischen Knotenpaaren gebildet. Dabei wird jedes Knotenpaar unabhängig mit Wahrscheinlichkeit $p$ durch eine Kante verbunden. Wir betrachten den $G(4, \frac{1}{2})$ und definieren die Zufallsvariable $X : \Omega \to [4]$ als Anzahl der Zusammenhangskomponenten. Bestimmen sie den Erwartungswert und die Varianz von $X$.

**Erinnerung:** Eine Zusammenhangskomponente bezeichnet eine inklusionsmaximale Teilmenge von Knoten in der jedes Knotenpaar über einen Pfad verbunden ist.

## Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien $E_1$, $E_2$ und $E_3$ drei nicht notwendigerweise unabhängige Ereignisse eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraums $(\Omega, \Pr)$. Die Zufallsvariable $X : \Omega \to \{0, 1, 2, 3\}$ zählt die eintretenden Ereignisse. Bestimmen Sie jeweils eine untere und eine obere Schranke für $\Pr[X = 3]$ unter der Voraussetzung, dass der Erwartungswert von $X$ gleich $\frac{3}{2}$ ist. Zeigen Sie anhand von Beispielen, dass Ihre Schranken optimal sind.

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Die Übungsleitung in Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie plant einen Multiple-Choice-Test. Dabei gibt es pro Aufgabe zwei verschiedene Kästchen, von denen entweder keins, eins oder beide angekreuzt werden müssen. Um eine möglichst faire Benotung der Aufgaben zu garantieren, erwägt die Übungsleitung mehrere Bewertungsschemen. Dafür nehmen wir an, dass ein Student mit Wissen $\kappa \in [0, 1]$ die Kästchen unabhängig und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{\kappa+1}{2}$ korrekt ausfüllt.

1. Sei $X : \Omega \to \{0, 1\}$ ein Bewertungsschema, bei dem genau dann ein Punkt vergeben wird wenn beide Kästchen richtig ausgefüllt wurden. Anderenfalls wird die Aufgabe mit null Punkten bewertet. Bestimmen Sie den Erwartungswert von $X$ pro Aufgabe in Abhängigkeit von $\kappa$.

2. Um zu verhindern, dass Studenten durch Zufall Punkte erhalten, ändern wir das Bewertungsschema so ab, dass für jede Aufgabe mit mindestens einem falsch ausgefüllten Kästchen ein Punkt abgezogen wird. Wie verhält sich der Erwartungswert dieser neuen Zufallsvariable $Y : \Omega \to \{-1, 1\}$ in Abhängigkeit von $\kappa$.

3. Die Übungsleitung entscheidet, dass ein faires Bewertungssystem das Wissen eines Studenten im Erwartungswert widerspiegeln sollte. Geben sie dementsprechend eine Zufallsvariable $Z : \Omega \to \{-1, 0, 1\}$ an, deren Erwartungswert genau $\kappa$ ist. Beweisen Sie die Korrektheit ihrer Konstruktion.

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir betrachten eine beliebige Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ auf einem endlichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \Pr)$. Des Weiteren sei $E \subseteq \Omega$ ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Die bedingte Varianz $\mathrm{Var}[X \mid E]$ ist definiert als $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X \mid E])^2 \mid E]$. Beweisen Sie, dass $\mathrm{Var}[X \mid E] = \mathbb{E}[X^2 \mid E] - \mathbb{E}[X \mid E]^2$ gilt.