Satz 43

Eine Sprache $L \subseteq \Sigma^*$ ist genau dann durch einen regulären Ausdruck darstellbar, wenn sie regulär ist.

Beweis:

"$\Longrightarrow$":

Sei also $L = L(\gamma)$.

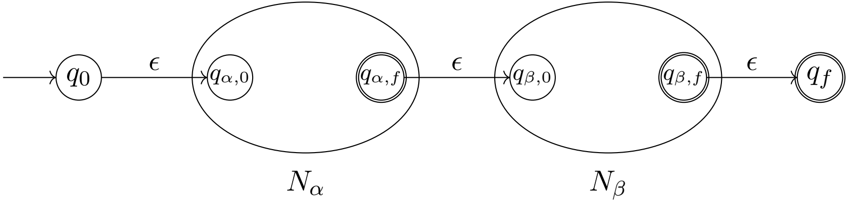
Wir zeigen: $\exists$ NFA N mit $L = L(N)$ mit Hilfe struktureller Induktion.

Induktionsanfang: Falls $\gamma = \emptyset$, $\gamma = \epsilon$, oder $\gamma = a \in \Sigma$, so folgt die Behauptung unmittelbar.

Induktionsschritt:

$\gamma = \alpha\beta$:
nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α und N_β mit

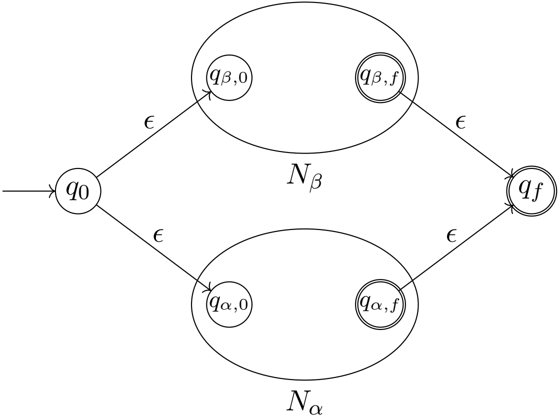
$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta)\ .$$



Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha \mid \beta)$:
nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α und N_β mit

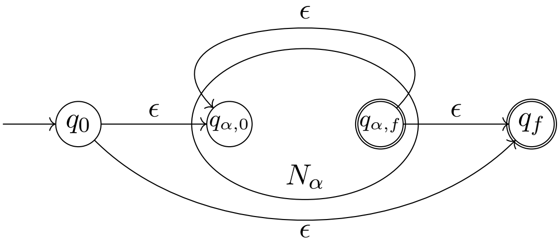
$$L(N_\alpha) = L(\alpha) \text{ und } L(N_\beta) = L(\beta)\ .$$



Induktionsschritt (Forts.):

$\gamma = (\alpha)^*$:
nach Induktionsannahme $\exists$ NFA N_α mit

$$L(N_\alpha) = L(\alpha)\ .$$



"$\Longleftarrow$":

Sei $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ ein deterministischer endlicher Automat. Wir zeigen: es gibt einen regulären Ausdruck γ mit $L(M) = L(\gamma)$.

Sei $Q = \{q_0, \dots, q_n\}$. Wir setzen

$$R_{ij}^k := \{w \in \Sigma^*;\ \text{die Eingabe } w \text{ überführt den im Zustand } q_i \text{ gestarteten Automaten in den Zustand } q_j, \text{ wobei alle zwischendurch durchlaufenen Zustände einen Index kleiner gleich } k \text{ haben}\}$$

Behauptung: Für alle $i, j \in \{0, \dots, n\}$ und alle $k \in \{-1, 0, 1, \dots, n\}$ gilt: Es gibt einen regulären Ausdruck α_{ij}^k mit $L(\alpha_{ij}^k) = R_{ij}^k$.

Bew.:

Induktion über k:

$k = -1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{-1} := \begin{cases} \{a \in \Sigma;\ \delta(q_i, a) = q_j\}, & \text{falls } i \neq j \\ \{a \in \Sigma;\ \delta(q_i, a) = q_j\} \cup \{\epsilon\}, & \text{falls } i = j \end{cases}$$

R_{ij}^{-1} ist also endlich und lässt sich daher durch einen regulären Ausdruck α_{ij}^{-1} beschreiben.

Bew.:

Induktion über k:

$k \Rightarrow k+1$: Hier gilt

$$R_{ij}^{k+1} = R_{ij}^{k} \cup R_{i\,k+1}^{k}(R_{k+1\,k+1}^{k})^{*}R_{k+1\,j}^{k}$$
$$\alpha_{ij}^{k+1} = (\alpha_{ij}^{k} \mid \alpha_{i\,k+1}^{k}(\alpha_{k+1\,k+1}^{k})^{*}\alpha_{k+1\,j}^{k})$$

Somit gilt: $L(M) = L((\alpha_{0\,f_1}^{n} \mid \alpha_{0\,f_2}^{n} \mid \cdots \mid \alpha_{0\,f_r}^{n}))$, wobei $f_1, \ldots, f_r$ die Indizes der Endzustände seien.

$\square$(Satz 43)

3.8 Abschlusseigenschaften regulärer Sprachen

Satz 44

Seien $R_1, R_2 \subseteq \Sigma^*$ *reguläre Sprachen. Dann sind auch*

$$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*, \Sigma^* \setminus R_1 (=: \bar{R}_1), R_1 \cap R_2$$

reguläre Sprachen.

Beweis:

$R_1R_2, R_1 \cup R_2, R_1^*$ klar.

$\Sigma^* \setminus R_1$	:	Sei $R_1 = L(A), A$ DFA, $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$, δ vollständig. Betrachte $A' = (Q, \Sigma, \delta, q_0, Q \setminus F)$. Dann ist $L(A') = \Sigma^* \setminus L(A)$
$R_1 \cap R_2$	:	De Morgan

□