SS 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Ernst W. Mayr

Fakultät für Informatik
TU München

http://www14.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/

Sommersemester 2011

Kapitel 0 Organisatorisches

- Vorlesungen:
  - Di 14:00–15:30 (PH HS1), Do 14:15–15:45 (PH HS1)
    Abweichende Termine: 19.5, 9.6, 30.6, 14.7.: ZÜ statt VL (PH HS1)
    Pflichtvorlesung Grundstudium(Diplom, Bachelor IN, Bioinformatik)
    Modulnr.: IN0018
- Übung:
  - 2SWS Tutorübung: siehe Webseite zur Übung
  - 2SWS (freiwillige) Zentralübung: Fr 16:00–17:30 (PH HS1) (aber: siehe oben)
  - Übungsleitung: Dr. W. Meixner
- Umfang:
  - 3V+2TÜ+2ZÜ, 6 ECTS-Punkte
- Sprechstunde:
  - nach Vereinbarung

- Vorkenntnisse:
  - Einführung in die Informatik I/II
  - Diskrete Strukturen
- Weiterführende Vorlesungen:
  - Effiziente Algorithmen und Datenstrukturen
  - Randomisierte Algorithmen
  - Komplexitätstheorie
  - Internetalgorithmik
  - ...
- Webseite:

  http://wwwmayr.in.tum.de/lehre/2011SS/dwt/

- Übungsleitung:
  - Dr. Werner Meixner, MI 03.09.040 (meixner@in.tum.de)
    Sprechstunde: Dienstag, 11:30Uhr und nach Vereinbarung
- Sekretariat:
  - Frau Lissner, MI 03.09.052 (lissner@in.tum.de)

- Übungsaufgaben und Klausur:
  - Ausgabe jeweils am Dienstag auf der Webseite der Vorlesung, ab 12:00Uhr
  - Abgabe eine Woche später bis 12:00Uhr, Briefkasten im Keller
  - Vorbereitung in der Tutorübung
- Klausur:
  - Zwischenklausur (50% Gewicht) tba
  - Endklausur (50% Gewicht) tba
  - Wiederholungsklausur tba
  - bei den Klausuren sind *keine* Hilfsmittel außer einem handbeschriebenen DIN-A4-Blatt zugelassen
  - Für das Bestehen des Moduls müssen 40% der erreichbaren Hausaufgabenpunkte erzielt werden; die Note ergibt sich aus den Leistungen in der zweigeteilten Klausur.
  - vorauss. 11 Übungsblätter, das letzte am 18. Juli 2011, jedes 20 Punkte

1. Vorlesungsinhalt

- Endliche Wahrscheinlichkeitsräume
  - Wahrscheinlichkeitsraum, Ereignis, Zufallsvariable
  - spezielle Verteilungen
  - Ungleichungen von Markov und Chebyshev
- Unendliche Wahrscheinlichkeitsräume
  - Normalverteilung, Exponentialverteilung
  - Zentraler Grenzwertsatz
- Stochastische Prozesse
  - Markovketten
  - Warteschlangen
- Statistik
  - Schätzvariablen
  - Konfidenzintervalle
  - Testen von Hypothesen

2. Literatur

- T. Schickinger, A. Steger:
  Diskrete Strukturen - Band 2,
  Springer Verlag, 2001
- M. Greiner, G. Tinhofer:
  Stochastik für Informatiker,
  Carl Hanser Verlag, 1996
- H. Gordon:
  Discrete Probability,
  Springer-Verlag, 1997
- R. Motwani, P. Raghavan:
  Randomized Algorithms,
  Cambridge University Press, 1995

M. Hofri:
Probabilistic Analysis of Algorithms,
Springer Verlag, 1987

L. Fahrmeir, R. Künstler, I. Pigeot, G. Tutz:
Statistik - Der Weg zur Datenanalyse,
Springer-Verlag, 1997

3. Einleitung

Was bedeutet Zufall?

- Große Menge von „gleichen“ Ereignissen, wobei sich bestimmte Eigenschaften/Messgrößen jeweils ändern können
- Unkenntnis über den Ausgang eines durchgeführten Experiments
- Ein komplexes Experiment wird theoretisch vielfach mit eventuell sich änderndem Ergebnis ausgeführt
- physikalischer Zufall (Rauschen, Kernzerfall)

Zufall in der *diskreten* Informatik

- Die Eingabe für einen bestimmten Algorithmus wird aus einer großen Menge möglicher Eingaben zufällig gewählt:

  average case

- Die Laufzeit einzelner Schritte eines Algorithmus hängt in „unbekannter" Weise von der Eingabe ab:

  amortisierte Kostenanalyse

- Der Algorithmus verwendet Zufallsbits, um mit großer Wahrscheinlichkeit gewisse Problemsituationen zu vermeiden:

  Randomisierung

Kapitel I Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume

1. Grundlagen

Definition 1

1. Ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist durch eine Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ von Elementarereignissen gegeben.
2. Jedem Elementarereignis ω_i ist eine (Elementar-)Wahrscheinlichkeit $\Pr[\omega_i]$ zugeordnet, wobei wir fordern, dass $0 \le \Pr[\omega_i] \le 1$ und

$$\sum_{\omega \in \Omega} \Pr[\omega] = 1.$$

3. Eine Menge $E \subseteq \Omega$ heißt Ereignis. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E]$ eines Ereignisses ist durch

$$\Pr[E] := \sum_{\omega \in E} \Pr[\omega]$$

definiert.

Beispiel 2

Zwei faire Würfel (einer weiß, einer schwarz) werden geworfen. Wir sind an der Gesamtzahl der angezeigten Augen interessiert:

$$\begin{aligned}\Omega \quad = \{ \quad & (1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),\\ & (2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(2,5),(2,6),\\ & (3,1),(3,2),(3,3),(3,4),(3,5),(3,6),\\ & (4,1),(4,2),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),\\ & (5,1),(5,2),(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),\\ & (6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6) \quad \}\end{aligned}$$

1. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr((i,j))$ eines jeden Elementarereignisses (i,j) ist $\frac{1}{36}$.
2. Die Wahrscheinlichkeit $\Pr(E)$ des Ereignisses

$$E = \{\text{Die Gesamtzahl der Augen ist } 10\}$$

   ist $\frac{1}{12}$.

Wir hätten aber auch sagen können:

$$\Omega = \{2, 3, 4, \ldots, 10, 11, 12\}$$

Die Wahrscheinlichkeit der Elementarereignisse ist dann aber nicht mehr ganz elementar. Es ist z.B.

1. $\Pr(2) = \frac{1}{36}$;
2. $\Pr(4) = \frac{1}{12}$;
3. $\Pr(7) = \frac{1}{6}$.

Beispiel 3

Eine faire Münze wird so lange geworfen, bis die gleiche Seite zweimal hintereinander fällt. Dann ist

$$\Omega = \{\text{hh, tt, htt, thh, thtt, hthh, hthtt, ththh}, \ldots\}$$

Frage: Was sind die Wahrscheinlichkeiten der einzelnen Elementarereignisse?

$\bar{E}$ heißt komplementäres Ereignis zu E.
Allgemein verwenden wir bei der Definition von Ereignissen alle bekannten Operatoren aus der Mengenlehre. Wenn also A und B Ereignisse sind, dann sind auch $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$ etc. Ereignisse.
Zwei Ereignisse A und B heißen disjunkt oder auch unvereinbar, wenn $A \cap B = \emptyset$ gilt.

Definition 4

$$
\begin{aligned}
\text{relative Häufigkeit von } E \quad &:= \quad \frac{\text{absolute Häufigkeit von } E}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}} \\
&= \quad \frac{\text{Anzahl Eintreten von } E}{\text{Anzahl aller Beobachtungen}}.
\end{aligned}
$$

Definition 5

Ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}$ heißt endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

Bei unendlichen Wahrscheinlichkeitsräumen werden wir gewöhnlich nur den Fall $\Omega = \mathbb{N}_0$ betrachten. Dies stellt keine große Einschränkung dar, da wir statt einer Ergebnismenge $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots\}$ auch $\mathbb{N}_0$ als Ergebnismenge verwenden können, indem wir ω_i mit $i-1$ identifizieren. Wir sagen, dass durch die Angabe der Elementarwahrscheinlichkeiten ein Wahrscheinlichkeitsraum auf Ω definiert ist.

Beispiel 6

Wir beobachten die an einer Straße vorbeifahrenden Autos. Dabei gelte:

1. Es fahren doppelt so viele Autos von links nach rechts wie von rechts nach links.
2. Von zehn Autos sind acht silbergrau und zwei beige.

- Das Ereignis "*Wir beobachten ein von links nach rechts fahrendes Auto*" hat die Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$.
- Das Ereignis "*Das nächste Auto ist ein Taxi von rechts*" passiert mit Wahrscheinlichkeit

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{5} .$$

Beispiel 7 (Unendlicher Wahrscheinlichkeitsraum)

Wir betrachten eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit p Kopf zeigt und mit Wahrscheinlichkeit $q := 1 - p$ Zahl.

Wir führen Versuche aus, indem wir die Münze wiederholt solange werfen, bis *Zahl* fällt.

Das *Ergebnis* eines solchen Versuchs ist die Anzahl der durchgeführten Münzwürfe.

Damit ergibt sich hier als Ergebnismenge

$$\Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\} .$$

Beispiel 7 (Forts.)

Sei, für $i \in \mathbb{N}$, ω_i das Elementarereignis

$$\omega_i \mathrel{\widehat{=}} \text{Die Münze wird } i\text{-mal geworfen}\ .$$

Dann gilt:

$$\Pr[\omega_i] = p^{i-1} q\ ,$$

und

$$\sum_{\omega\in\Omega} \Pr[\omega] = \sum_{i=1}^{\infty} p^{i-1} q = q \cdot \sum_{i=0}^{\infty} p^i = \frac{q}{1-p} = 1\ .$$

(wie es sein soll!)

Lemma 8

Für Ereignisse $A, B, A_1, A_2, \ldots$ *gilt:*

1. $\Pr[\emptyset] = 0$, $\Pr[\Omega] = 1$.
2. $0 \leq \Pr[A] \leq 1$.
3. $\Pr[\bar{A}] = 1 - \Pr[A]$.
4. *Wenn* $A \subseteq B$, *so folgt* $\Pr[A] \leq \Pr[B]$.

Lemma 8 (Forts.)

5. *(Additionssatz) Wenn die Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ paarweise disjunkt sind (also wenn für alle Paare $i \neq j$ gilt, dass $A_i \cap A_j = \emptyset$), so folgt*

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i].$$

Für disjunkte Ereignisse A, B erhalten wir insbesondere

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B]\ .$$

Für eine unendliche Menge von disjunkten Ereignissen $A_1, A_2, \ldots$ gilt analog

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[A_i]\ .$$

Beweis:

Die Aussagen folgen unmittelbar aus Definition 1, den Eigenschaften der Addition und der Definition der Summe. $\square$

Eigenschaft 5 in Lemma 8 gilt nur für disjunkte Ereignisse. Für den allgemeinen Fall erhalten wir folgenden

Satz 9 (Siebformel, Prinzip der Inklusion/Exklusion)

Für Ereignisse $A_1, \ldots, A_n$ $(n \geq 2)$ gilt:

$$\begin{aligned}
\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right] &= \sum_{i=1}^{n} \Pr[A_i] - \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap A_{i_2}] + - \ldots \\
&+ (-1)^{l-1} \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_l \leq n} \Pr[A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_l}] + - \ldots \\
&+ (-1)^{n-1} \cdot \Pr[A_1 \cap \ldots \cap A_n] \,.
\end{aligned}$$

Satz 9 (Forts.)

Insbesondere gilt für zwei Ereignisse A und B

$$\Pr[A \cup B] = \Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B]\ .$$

Für drei Ereignisse A_1, A_2 und A_3 erhalten wir

$$\begin{aligned}\Pr[A_1 \cup A_2 \cup A_3] &= \Pr[A_1] + \Pr[A_2] + \Pr[A_3] \\ &\quad -\Pr[A_1 \cap A_2] - \Pr[A_1 \cap A_3] \\ &\quad -\Pr[A_2 \cap A_3] \\ &\quad +\Pr[A_1 \cap A_2 \cap A_3]\ .\end{aligned}$$

Beweis:

Wir betrachten zunächst den Fall $n = 2$. Dazu setzen wir $C := A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$. Gemäß dieser Definition gilt, dass C und $A \cap B$ sowie C und B disjunkt sind. Deshalb können wir Eigenschaft 5 von Lemma 8 anwenden:

$$\Pr[A] = \Pr[C \cup (A \cap B)] = \Pr[C] + \Pr[A \cap B] \,.$$

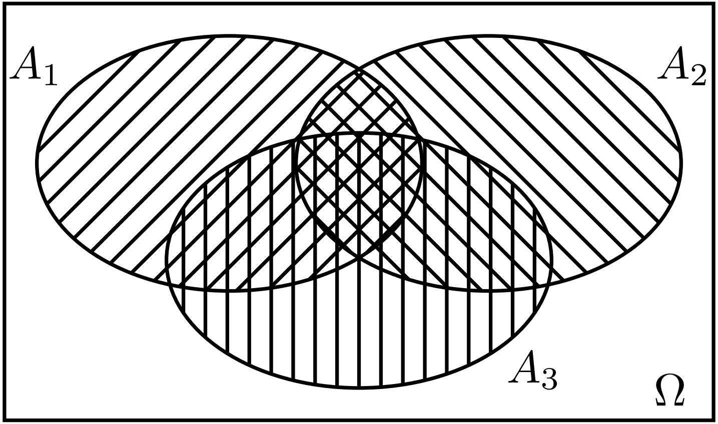
Wegen $A \cup B = C \cup B$ folgt daraus

$$\begin{aligned} \Pr[A \cup B] = \Pr[C \cup B] = \Pr[C] + \Pr[B] = \\ \Pr[A] - \Pr[A \cap B] + \Pr[B] \end{aligned}$$

und wir haben die Behauptung für $n = 2$ gezeigt.

Beweis (Forts.):

Der Fall $n = 3$:



Man beachte, dass durch die im Satz angegebene Summe jedes Flächenstück insgesamt genau einmal gezählt wird.

Beweis (Forts.):

Der allgemeine Fall kann nun durch Induktion über n gezeigt werden (was wir aber hier nicht ausführen!).

Satz 9 findet man manchmal auch unter der Bezeichung *Satz von Poincaré-Sylvester*, nach dem Franzosen

Jules Henri Poincaré (1854–1912)

und dem Engländer

James Joseph Sylvester (1814–1897)

benannt.