Technische Universität München
Theoretische Informatik
Prof. J. Esparza / S. Kiefer / M. Luttenberger

Sommersemester 2009
Übungsblatt 9

LÖSUNG

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist am 13. Juli bis 10:15 abzugeben und wird am 13./14. Juli besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 9.1

1P+1P+2P+1P

Sie rufen bei Ihrer Tante und Ihrem Onkel an. Mit W'keit $\frac{1}{3}$ geht Ihre Tante ran, mit W'keit $\frac{2}{3}$ Ihr Onkel. Wenn Ihre Tante rangeht, telefonieren Sie im Schnitt 9 Minuten lang; wenn Ihr Onkel rangeht, telefonieren Sie im Schnitt 3 Minuten lang. In beiden Fällen ist die Länge des Telefongesprächs exponential-verteilt.

(a) Sei X die Länge des Telefongesprächs, wenn Sie bei diesen Verwandten anrufen. Berechnen Sie $\mathbb{E}X$.
Hinweis: Benutzen Sie Satz 13 aus dem Kapitel über Zufallszahlen (evtl. Folie 119).

(b) Zeigen Sie mithilfe des Satzes von der totalen W'keit für die Verteilungsfunktion F_X:

$$F_X(x) = 1 - \frac{1}{3}e^{-x/9} - \frac{2}{3}e^{-x/3}$$

(c) Berechnen Sie die Standardabweichung $\sigma(X)$ und den sogenannten „Variationskoeffizienten“ $\dfrac{\sigma(X)}{\mathbb{E}X}$. Reimen Sie sich damit zusammen, warum die Verteilung von X „hyperexponentiell“ genannt wird.
Hinweise: *hyper* bedeutet *über*. Wie im Diskreten gilt $\mathrm{Var}[X] = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$.

(d) Angenommen, das Gespräch dauert mindestens 10 Minuten. Wie groß ist die W'keit, dass Sie mit der Tante telefonieren?

Lösungsvorschlag:

(a) Sei X_1 (bzw. X_2) die Länge eines Telefongesprächs mit der Tante (bzw. dem Onkel). Laut Angabe sind X_1 und X_2 exponentialverteilt mit Parameter $\lambda_1 = \frac{1}{9}$ bzw. $\lambda_2 = \frac{1}{3}$. Sei X die Länge des Telefongesprächs. Dann ist

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X &= \underbrace{\mathbb{E}[X \mid \text{„Tante“}]}_{\mathbb{E}X_1} \cdot \Pr[\text{„Tante“}] + \underbrace{\mathbb{E}[X \mid \text{„Onkel“}]}_{\mathbb{E}X_2} \cdot \Pr[\text{„Onkel“}] \\ &= \frac{1}{3} \cdot 9 + \frac{2}{3} \cdot 3 = 5\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\Pr[X > x] &= \Pr[X > x \mid \text{„Tante“}] \cdot \Pr[\text{„Tante“}] + \Pr[X > x \mid \text{„Onkel“}] \cdot \Pr[\text{„Onkel“}] \\ &= \frac{1}{3}e^{-x/9} + \frac{2}{3}e^{-x/3}\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$F_X = \Pr[X \le x] = 1 - \Pr[X > X] = 1 - \frac{1}{3}e^{-x/9} - \frac{2}{3}e^{-x/3}$$

(c) Ähnlich wie zuvor gilt:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[X^2] &= \mathbb{E}[X^2 \mid \text{„Tante“}] \cdot \Pr[\text{„Tante“}] + \mathbb{E}[X^2 \mid \text{„Onkel“}] \cdot \Pr[\text{„Onkel“}] \\ &= \frac{1}{3}\mathbb{E}[X_1^2] + \frac{2}{3}\mathbb{E}[X_2^2]\end{aligned}$$

In den Folien wurde für eine ZV $Y \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ die Varianz mithilfe von $\mathbb{E}[Y^2] = \frac{2}{\lambda^2}$ bestimmt. Daher folgt:

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{\lambda_1^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{\lambda_2^2} \\ &= 54 + 12 = 66\end{aligned}$$

Weiterhin gilt $\sigma(X) = \sqrt{\operatorname{Var}[X]} = \sqrt{\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2} = \sqrt{66 - 25} = \sqrt{41} \approx 6.4$. Somit ist der Variationskoeffizient $\approx \frac{6.4}{5} \approx 1.3$. Die Verteilung heißt *hyperexponentiell*, weil der Variationskoeffizient größer ist als bei der Exponentialverteilung, wo er 1 ist.

(d)

$$\Pr[\text{„Tante“} \mid X \geq 10] = \frac{\frac{1}{3}\Pr[X_1 \geq 10]}{\Pr[X \geq 10]} = \frac{\frac{1}{3} \cdot e^{-10/9}}{1 - F_X(10)} = \frac{\frac{1}{3} \cdot e^{-10/9}}{\frac{1}{3} \cdot e^{-10/9} + \frac{2}{3} \cdot e^{-10/3}} \approx 0.82$$

Aufgabe 9.2 **1P+1P+2P+2P**

Um erreichbar zu sein, benötigen Sie mindestens ein funktionierendes iPhone für Ihre geplante Nordpolreise. Unter arktischen Bedingungen ist die Lebensdauer eines iPhones exponentialverteilt mit Erwartungswert 4, d.h., es hält im Schnitt 4 Tage lang (egal ob Sie es benutzen oder nicht).

(a) Ihr Übungspartner rät Ihnen, zwei iPhones mitzunehmen, denn dann seien Sie im Erwartungswert 8 Tage lang erreichbar. Er argumentiert so:

> “Seien X_1 und X_2 die Lebensdauern von iPhone A und iPhone B. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit geht iPhone A als erstes kaputt. Wegen $\mathbb{E}X_1 = 4$ ist das im Erwartungswert nach 4 Tagen. Wegen der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung und wegen $\mathbb{E}X_2 = 4$ hält iPhone B dann im Schnitt noch weitere 4 Tage. Macht insgesamt 8 Tage.”

Was ist hier falsch und was ist richtig?

(b) Wie lange sind Sie im Erwartungswert erreichbar? Das heißt, berechnen Sie $\mathbb{E}S$, wobei $S = \max\{X_1, X_2\}$.

(c) Berechnen Sie den sogenannten *Median* von S. Das heißt, berechnen Sie t, sodass Sie nach genau t Tagen mit W'keit $\frac{1}{2}$ erreichbar sind. Berechnen Sie dazu zunächst die Verteilungsfunktion F_S von S.

(d) Seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ unabhängig und exponentialverteilt mit Parameter λ. Berechnen Sie $\mathbb{E}\left[\max\{X_1, X_2, \ldots, X_n\}\right]$.

Lösungsvorschlag:

(a) Falsch ist, dass das erste iPhone im Schnitt erst nach 4 Tagen kaputt geht: Die Zeitdauer, in der beide iPhones funktionieren, ist $\min\{X_1, X_2\}$. Nach Angabe gilt $X_1 \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ und $X_2 \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$ mit $\lambda = \frac{1}{4}$. Nach Vorlesung gilt $\min\{X_1, X_2\} \sim \operatorname{Exp}(\frac{1}{4} + \frac{1}{4})$. Folglich geht das erste iPhone im Schnitt schon nach $\frac{1}{1/2} = 2$ Tagen kaputt.

Richtig ist, dass, nachdem das erste iPhone kaputt gegangen ist, das zweite iPhone im Schnitt noch 4 Tage hält. Das folgt tatsächlich aus der Gedächtnislosigkeit der Exponentialverteilung.

(b) Nach Lösungsvorschlag für (a) gilt $\mathbb{E}S = 6$.

Man könnte auch so rechnen: Es gilt

$$S = \max\{X_1, X_2\} = X_1 + X_2 - \min\{X_1, X_2\}\,.$$

Es folgt

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \mathbb{E}X_2 - \mathbb{E}[\min\{X_1, X_2\}] = 4 + 4 - 2 = 6\,.$$

(c) Für $x \leq 0$ ist $F_S(0) = 0$. Für $x \geq 0$ gilt:

$$\begin{aligned} F_S(x) &= \Pr[S \leq x] \\ &= \Pr[\max\{X_1, X_2\} \leq x] \\ &= \Pr[X_1 \leq x \text{ und } X_2 \leq x] \\ &= \Pr[X_1 \leq x] \cdot \Pr[X_2 \leq x] \\ &= F_{X_1}(x) \cdot F_{X_2}(x) \\ &= (1 - e^{-\lambda x})^2 \end{aligned}$$

Für den Median t gilt:

$$\begin{aligned} 0.5 &\stackrel{!}{=} \Pr[S \leq t] \\ &= F_S(t) \\ &= (1 - e^{-\lambda t})^2 \end{aligned}$$

Auflösen nach t ergibt

$$t = -4 \ln \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \approx 4.9 \,.$$

(Also: Die W'keit, dass beide iPhones nach 5 Tagen kaputt sind, ist größer als 50%.)

(d) Sei T_i die Zeitspanne zwischen dem Kaputtgehen des $(i-1)$-ten iPhones und dem Kaputtgehen des i-ten iPhones. Es gilt $T_1 = \min\{X_1, \ldots, X_n\}$. Also $T_1 \sim \text{Exp}(\lambda n)$, und folglich $\mathbb{E}T_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{n}$.

Aus der Gedächtnislosigkeit folgt, dass T_2 verteilt ist wie $\min\{Y_1, \ldots, Y_{n-1}\}$, wobei die Y_i unabhängig sind und $Y_i \sim \text{Exp}(\lambda)$ gilt. Also $T_2 \sim \text{Exp}(\lambda(n-1))$, und folglich $\mathbb{E}T_2 = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{1}{n-1}$.

$\vdots$ Das ist also ähnlich wie beim Coupon-Collector-Problem im Diskreten.

Mit $S = T_1 + \cdots + T_n$ folgt:

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}T_1 + \cdots \mathbb{E}T_n = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \cdots \frac{1}{1} \right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} \,.$$

Aufgabe 9.3 **1P+2P+2P+1P**

In einem Poisson-Prozess treffen Jobs auf einem Server ein, im Schnitt alle 5 Minuten. Die Zeit zwischen zwei aufeinander folgenden Jobankünften ist also exponentialverteilt mit Parameter 1/5. Wenn 10 Minuten lang kein Job eingetroffen ist, geht das Betriebssystem in einen Energiesparmodus über. Wir möchten wissen, wie lange es im Schnitt dauert, bis das Betriebssystem im Energiesparmodus ist. Seien $T_1, T_2, \ldots$ die Wartezeiten zwischen den Jobanküften und W die Zeit bis zum Energiesparmodus.

(a) Geben Sie $\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \geq 10]$ an.
Hinweis: Benutzen Sie die Gedächtnislosigkeit.

(b) Benutzen Sie (a) und Satz 13 aus dem Kapitel über Zufallszahlen (evtl. Folie 119), um zu zeigen:

$$\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \leq 10] = \frac{5 - 15e^{-2}}{1 - e^{-2}}$$

(c) Geben Sie $\mathbb{E}[W \mid T_1 \geq 10]$ an. Benutzen Sie (b), um $\mathbb{E}[W \mid T_1 \leq 10]$ in Abhängigkeit von $\mathbb{E}W$ anzugeben.

(d) Benutzen Sie (c) und Satz 13 aus dem Kapitel über Zufallszahlen (evtl. Folie 119), um $\mathbb{E}[W]$ zu berechnen.

Lösungsvorschlag:

(a) Aus der Gedächtnislosigkeit folgt $\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \geq 10] = 10 + \mathbb{E}[T_1] = 10 + 5 = 15$.

(b) Da $T_1 \sim \text{Exp}(1/5)$ gilt $\Pr[T_1 \leq 10] = 1 - e^{-1/5 \cdot 10} = 1 - e^{-2}$ und $\Pr[T_1 \geq 10] = e^{-2}$. Aus Satz 13 folgt:

$$5 = \mathbb{E}T_1 = \mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \leq 10] \cdot \underbrace{\Pr[T_1 \leq 10]}_{1-e^{-2}} + \underbrace{\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \geq 10]}_{15} \cdot \underbrace{\Pr[T_1 \geq 10]}_{e^{-2}}$$

Auflösen nach $\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \leq 10]$ liefert das Ergebnis.

(c) Es gilt $\mathbb{E}[W \mid T_1 \geq 10] = 10$.

Wenn $T_1 \leq 10$ gilt, lässt sich W zerlegen in $W = T_1 + W_1$. Die Wartezeit W_1 hängt von $T_2, T_3, \dots$ genauso ab wie W von $T_1, T_1, \dots$ abhängt. Also sind W und W_1 identisch verteilt, insbesondere sind die Erwartungswerte gleich. Es folgt:

$$\mathbb{E}[W \mid T_1 \leq 10] = \mathbb{E}[T_1 + W_1 \mid T_1 \leq 10] = \underbrace{\mathbb{E}[T_1 \mid T_1 \leq 10]}_{\frac{5-15e^{-2}}{1-e^{-2}}} + \underbrace{\mathbb{E}[W_1 \mid T_1 \leq 10]}_{\mathbb{E}W}$$

(d) Mit Satz 13 gilt:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[W] &= \mathbb{E}[W \mid T_1 \leq 10] \cdot \Pr[T_1 \leq 10] + \mathbb{E}[W \mid T_1 \geq 10] \cdot \Pr[T_1 \geq 10] \\
&= 5 - 15e^{-2} + (1 - e^{-2})\mathbb{E}W + 10e^{-2} \\
&= 5 - 5e^{-2} + (1 - e^{-2})\mathbb{E}W
\end{aligned}$$

Auflösen nach $\mathbb{E}W$ ergibt

$$\mathbb{E}[W] = 5e^2 - 5 \approx 32\,.$$

Aufgabe 9.4 **3P**

Suchanfragen treffen in einem Poisson-Prozess bei der Suchmaschine Hupf ein. Seien $T_1, T_2, \dots$ die Zeiten zwischen zwei aufeinander folgenden Suchanfragen. Die T_i sind unabhängig und es gilt $T_i \sim \operatorname{Exp}(\lambda)$. Sie haben in der Vorlesung gehört, dass die Zahl der Suchanfragen während eines Zeitraums t Poisson-verteilt ist mit Parameter λt. Die Aufgabe ist, das zu beweisen, das heißt, es ist zu zeigen, dass für $t > 0$ gilt:

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t \leq \sum_{i=1}^{n+1} T_i\right] = \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}$$

Bezeichne $S_n := \sum_{i=1}^{n} T_i$. Es gilt:

$$\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t \leq \sum_{i=1}^{n+1} T_i\right] = \Pr[S_n \leq t \leq S_n + T_{n+1}] = \Pr[t - T_{n+1} \leq S_n \leq t]$$

Setzen Sie von hier aus fort.
Hinweis: Auf dem letzten Übungsblatt haben Sie gezeigt, dass für die Dichte von S_n gilt:

$$f_{S_n}(z) = \begin{cases} \frac{\lambda^n z^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda z} & z \geq 0 \\ 0 & z < 0 \end{cases}$$

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned}
\Pr[t - T_{n+1} < S_n \leq t] &= \int_{T=0}^{\infty} f_T(T) \int_{S=t-T}^{t} f_{S_n}(S) \mathrm{d}S \mathrm{d}T \\
&= \int_{T=0}^{\infty} f_T(T)[F_{S_n}(t) - F_{S_n}(t-T)] \mathrm{d}T \\
&= F_{S_n}(t) \int_{T=0}^{\infty} f_T(T) \mathrm{d}T - \int_{T=0}^{\infty} f_T(T) F_{S_n}(t-T) \mathrm{d}T \\
&= F_{S_n}(t) \int_{T=0}^{\infty} f_T(T) \mathrm{d}T - \int_{T=0}^{t} f_T(T) F_{S_n}(t-T) \mathrm{d}T
\end{aligned}$$

(Partielle Integration: $u := f_T(T)$, $V := F_{S_n}(t-T)$, $U = F_T(T)$, $v = -f_{S_n}(t-T)$)

$$= F_{S_n}(t) - \left([F_T(T) F_{S_n}(t-T)]_0^t + \int_0^t F_T(T) f_{S_n}(t-T) \mathrm{d}T\right)$$

(Für $T \geq 0$: $F_T(T) = 1 - e^{-\lambda T} = 1 - \frac{1}{\lambda}\lambda e^{-\lambda T} = 1 - \frac{1}{\lambda} f_T(T)$)

$$
\begin{aligned}
&= F_{S_n}(t) - \left(0 + \int_0^t (1 - \frac{1}{\lambda} f_T(T)) f_{S_n}(t-T)\mathrm{d}T\right) \\
&= F_{S_n}(t) - \left(\int_0^t f_{S_n}(t-T)\mathrm{d}T - \frac{1}{\lambda}\int_0^t f_T(T) f_{S_n}(t-T)\mathrm{d}T\right) \\
&= F_{S_n}(t) - \left(F_{S_n}(t) - \frac{1}{\lambda} f_{S_{n+1}}(t)\right) \\
&= \frac{1}{\lambda} f_{S_{n+1}}(t) \\
&= \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}.
\end{aligned}
$$

Einfachere Lösung (Dank an Jakob Engel):

$$
\begin{aligned}
\Pr\left[\sum_{i=1}^{n} T_i \leq t \leq \sum_{i=1}^{n+1} T_i\right] &= \Pr[S_n \leq t \leq S_{n+1}] \\
&= \Pr[t \leq S_{n+1}] - \Pr[t < S_n] \\
&= (1 - F_{S_{n+1}}(t)) - (1 - F_{S_n}(t)) \\
&= F_{S_n}(t) - F_{S_{n+1}}(t)
\end{aligned}
$$

mit der Rekursionsformel aus Aufgabe 8.4(b):

$$
\begin{aligned}
&= F_{S_n}(t) - \left(-\frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t} + F_{S_n}(t)\right) \\
&= \frac{\lambda^n t^n}{n!} e^{-\lambda t}
\end{aligned}
$$