TA 4.1

Erinnerung: E[X] ist definiert, falls E[|X|] endlich ist, d.h., falls die Summe (das Integral) absolut konvergieren, so dass man beliebig umordnenen kann, ohne den Wert selbst zu ändern.

$$\mathbb{E}[X \mid B] = \sum_{x \in W_X} x \, \frac{\Pr[X = x \cap B]}{\Pr[B]}$$

(S.d.t.W.) (aka. Fallunterscheidung)

$$= \sum_{x \in W_X} x \frac{1}{\Pr[B]} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} \Pr[X = x \cap B \cap A_i]$$

((Umordnung von abs. konv. Reihen))

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{x \in V_X} x \, \frac{\Pr[X = x \cap B \cap A_i]}{\underbrace{\Pr[B \cap A_i]}} \, \frac{\Pr[B \cap A_i]}{\Pr[B]}$$

<u>Anm.:</u> sollte das $= 0$ sein, gilt wieder dass „$\frac{1}{0} \cdot 0 = 0$".

d.h. Term vernachlässigen.

TA 4.2

(a) • $\Omega_s = [s \to d]^{d=1} \subseteq Q^*$

abzählbar

• $\forall q_0 q_1 \dots q_\ell \in \Omega_s : Pr_s[q_0 \dots q_\ell]$

$$= Pr[q_0 \dots q_\ell]$$

$$= \prod_{i=0}^{\ell-1} \delta(q_i, q_{i+1}) \in (0,1]$$

• $Pr_s[\Omega_s] = Pr[\Omega_s] = 1$ nach Satz 32.

Satz 32 gilt eigentlich nur fuer s != d. Allerdings ist im Fall s = d offensichtlich Omega = { d } mit Pr_d[d] = 1.

(b) $\mathbb{E}_s[N]$

$$= \sum_{t \in \underline{ST}} \mathbb{E}_s[N \mid Z_1 = t] \underbrace{\Pr_s[Z_1 = t]}_{= \delta(s,t)}$$

$$\mathbb{E}_s[N \mid Z_1 = t]$$

$$= \sum_{s q_1 \cdots q_\ell \in \Omega_s} N(s q_1 \cdots q_\ell) \Pr_s[s q_1 \cdots q_\ell \mid Z_1 = t]$$

$$= \sum_{s t q_2 \cdots q_\ell \in \Omega_s} \underbrace{N(s t q_2 \cdots q_\ell)}_{= 1 + N(\underbrace{t q_2 \cdots q_\ell}_{\in \Omega_t})} \frac{\delta(s,t)\,\delta(t,q_2) \cdots \delta(q_{\ell-1},q_\ell)}{\underbrace{\Pr_s[Z_1 = t]}_{= \delta(s,t)}}$$

$$= \mathbb{E}_t[1 + N]$$

$$= \sum_{t \in SE} \mathbb{E}_t[1 + N]\, \delta(s,t)$$

(c) $x_a := \mathbb{E}_a[N] = \mathbb{E}_a[N+1]\,\frac{1}{2} + \mathbb{E}_b[N+1]\,\frac{1}{2}$

$x_b := \mathbb{E}_b[N] = \mathbb{E}_a[N+1]\,\frac{1}{4} + \mathbb{E}_c[N+1]\,\frac{1}{4} + \mathbb{E}_d[N+1]\,\frac{1}{2}$

$(\mathbb{E}_d[N] = 0)$

$x_c := \mathbb{E}_c[N] = \mathbb{E}_b[N+1]\,\frac{1}{2} + \mathbb{E}_c[N+1]\,\frac{1}{2}$

$$\leadsto \quad x_a = 1 + \frac{1}{2}x_a + \frac{1}{2}x_b \overset{1}{\leadsto} x_a = 2 + x_b$$

$$x_b = 1 + \frac{1}{4}x_a + \frac{1}{4}x_c \qquad \| \; 3 \text{ (Symmetrie von a \& c)}$$

$$x_c = 1 + \frac{1}{2}x_b + x_c \overset{2}{\leadsto} x_c = 2 + x_b$$

$$\overset{4}{\leadsto} \quad x_b = 2 + \frac{1}{2}x_b \overset{5}{\leadsto} x_b = \underline{\underline{4}}, \; x_a = x_c = \underline{\underline{6}}$$

(d) $\mathrm{Var}_s[N] = \underbrace{\mathbb{E}_s[N^2]}_{\text{noch zu bestimmen}} - \underbrace{\mathbb{E}_s[N]^2}_{\text{schon bekannt}}$

- $\mathbb{E}_a[N^2] = \mathbb{E}_a[\underbrace{(N+1)^2}_{!!!}]\cdot\frac{1}{2} + \mathbb{E}_b[(N+1)^2]\frac{1}{2}$

$= \mathbb{E}_a[N^2+2N+1]\frac{1}{2} + \mathbb{E}_b[N^2+2N+1]\frac{1}{2}$

$\mathbb{E}_a[N]=6$, $\mathbb{E}_b[N]=4$ $\longrightarrow$ $= 11 + \frac{1}{2}\mathbb{E}_a[N^2] + \frac{1}{2}\mathbb{E}_b[N^2]$

$\rightsquigarrow \mathbb{E}_a[N^2] = 22 + \mathbb{E}_b[N^2]$

- Symmetrie: $\mathbb{E}_c[N^2] = 22 + \mathbb{E}_b[N^2]$

$$\leadsto \mathbb{E}_b[N^2] = \frac{1}{4}\,\mathbb{E}_a[(N+1)^2] + \frac{1}{4}\,\mathbb{E}_c[(N+1)^2]$$

$$+ \frac{1}{2}\,\underbrace{\mathbb{E}_d[(N+1)^2]}_{=1,\ \text{da } N \equiv 0 \text{ auf } \Omega_d}$$

$$= \frac{1}{2}\,\mathbb{E}_a[N^2+2N+1] + \frac{1}{2}$$

$\mathbb{E}_a[N] = 6$

$\mathbb{E}_b[N] = 4$

$$= \frac{1}{2}\,\underbrace{\mathbb{E}_a[N^2]}_{=22+\mathbb{E}_b[N^2]} + \frac{13}{2} + \frac{1}{2}$$

$$= 18 + \frac{1}{2}\,\mathbb{E}_b[N^2]$$

$$\leadsto \mathbb{E}_b[N^2] = 36 \leadsto \mathbb{E}_a[N^2] = 40 = \mathbb{E}_c[N^2]$$

$$\leadsto \mathrm{Var}_a[N] = 40 - 36 = \underline{\underline{4}}$$

TA 4.3 $U \sim \mathrm{geo}(1/5)$, $V \sim \mathrm{geo}(2/3)$, W uni([5]),

$Y \sim \mathrm{bin}(10, 2/5)$

$Z \sim \mathrm{bin}(8, 3/4)$

$$\mathbb{E}\Big[\big(Z + \underbrace{\min(U+W, V+W)}_{= W + \min(U,V)}\big)(Y+Z)\Big]$$

$k-1$ Misserfolge

$$\Pr[\min(U,V) \geq k] = \Pr[U \geq k]\,\Pr[V \geq k] = \left(\frac{4}{5}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \left(\frac{4}{15}\right)^{k-1} \leadsto \min(U,V) =: M \sim \mathrm{geo}\left(\frac{11}{15}\right)$$

unabh   unabh.

$$= \mathbb{E}\left[ZY + Z^2 + (W+M)(Y+Z)\right]$$

$$= \mathbb{E}[Z]\,\mathbb{E}[Y] + \left(\mathrm{Var}[Z] + \mathbb{E}[Z]^2\right) + \mathbb{E}[W+M]\cdot\mathbb{E}[Y+Z]$$