## Satz 88

*Sei* $A_1 = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta, F)$ *ein NPDA, der mit akzeptierendem Zustand akzeptiert. Dann kann in linearer Zeit ein NPDA* $A_2 = (Q', \Sigma, \Delta', q_0', Z_0', \delta')$ *konstruiert werden, der* $L(A_1)$ *mit leerem Stack akzeptiert.*

## Beweis:

$A_2$ simuliert $A_1$. Sobald $A_1$ in einen akzeptierenden Zustand gerät, rät $A_2$, ob die Eingabe zu Ende gelesen ist. Falls $A_2$ dies meint, wird der Keller geleert.

Um zu verhindern, dass bei der Simulation von $A_1$ der Keller leer wird, ohne dass $A_1$ akzeptiert, führen wir ein neues Kellersymbol $Z_0'$ ein:

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cup \{\bar{q}, q_0'\} \\ \Delta' &= \Delta \cup \{Z_0'\} \end{aligned}$$

und wir erweitern $\delta$ zu $\delta'$ gemäß

$$\begin{aligned} &\delta'(q_0', \epsilon, Z_0') = \{(q_0, Z_0 Z_0')\} && \\ &\delta'(q, \epsilon, Z) \mathrel{\cup}= \{(\bar{q}, \epsilon)\} && \text{für } q \in F,\ Z \in \Delta' \\ &\delta'(\bar{q}, \epsilon, Z) = \{(\bar{q}, \epsilon)\} && \text{für } Z \in \Delta' \end{aligned}$$

$\square$

**Bemerkung:**

Akzeptieren mit leerem Keller bedeutet, dass der NPDA akzeptiert, falls der Keller leer ist und die Eingabe gelesen ist.

**Bemerkung:**

Akzeptieren mit leerem Keller bedeutet, dass der NPDA akzeptiert, falls der Keller leer ist und die Eingabe gelesen ist, bzw.
dass, falls der Keller leer ist, der NPDA die bisher gelesene Eingabe akzeptiert.

## Satz 89

*Sei* $A_1 = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ *ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann kann in linearer Zeit ein NPDA* $A_2 = (Q', \Sigma, \Delta', q_0', Z_0', \delta', F)$ *konstruiert werden, welcher* $L(A_1)$ *mit akzeptierendem Zustand akzeptiert.*

## Beweis:

$A_2$ simuliert $A_1$. Am Anfang steht ein neues Kellersymbol auf dem Stack. Sobald bei der Simulation von $A_1$ dieses auf dem Stack vorgefunden wird, weiß man, dass $A_1$ seinen Stack leergeräumt hat und folglich akzeptiert. Folglich geht $A_2$ in einen akzeptierenden Zustand und hält:

$$\begin{aligned} Q' &= Q \cup \{q'_0, q_f\} \\ \Delta' &= \Delta \cup \{Z'_0\} \\ F &= \{q_f\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta'(q'_0, \epsilon, Z'_0) &= \{(q_0, Z_0 Z'_0)\} \\ \delta'(q, a, Z) &= \delta(q, a, Z) \text{ für } q \in Q,\ a \in \Sigma \cup \{\epsilon\},\ Z \in \Delta \\ \delta'(q, \epsilon, Z'_0) &= \{(q_f, Z'_0)\} \text{ für } q \in Q \end{aligned}$$

$\square$

# 4.8 Kellerautomaten und kontextfreie Sprachen

## Satz 90

*Sei $G$ eine CFG in Greibach-Normalform. Dann kann in linearer Zeit ein NPDA $N$ konstruiert werden (welcher mit leerem Stack akzeptiert), so dass*

$$L(N) = L(G) \; .$$

## Beweis:

Sei o.B.d.A. $\epsilon \notin L(G)$.

Der Automat startet mit $S$ auf dem Stack. Er sieht sich in jedem Schritt das oberste Stacksymbol $A$ an und überprüft, ob es in $G$ eine Produktion gibt, deren linke Seite $A$ ist und deren rechte Seite mit dem Terminal beginnt, welches unter dem Lesekopf steht.

Sei also $G = (V, T, P, S)$.

Konstruiere NPDA $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ mit

$$\begin{array}{lcl} Q & := & \{q_0\} \\ \Delta & := & V \\ \Sigma & := & T \\ Z_0 & := & S \end{array}$$

$$\delta(q_0, a, A) \ni (q_0, \alpha) \quad \text{für } (A \to a\alpha) \in P\ .$$

## Beweis (Forts.):

Zu zeigen ist nun: $L(N) = L(G)$.

**Hilfsbehauptung:**

$$S \rightarrow_G^* w_1 \ldots w_i A_1 \ldots A_m \text{ mit } w_j \in T, A_j \in V \text{ per Linksableitung}$$
$$\Leftrightarrow (q_0, w_1 \ldots w_i, Z_0) \rightarrow_N^* (q_0, \epsilon, A_1 \ldots A_m)$$

Der Beweis erfolgt durch Induktion über die Anzahl der Schritte in der Linksableitung.

## Beweis (Forts.):

Induktionsanfang ($i = 0$):

$$S \rightarrow_G^* S \qquad \Leftrightarrow \qquad (q_0, \epsilon, Z_0) \rightarrow_N^* (q_0, \epsilon, Z_0)$$

## Beweis (Forts.):

Induktionsschritt ($(i-1) \mapsto i$):

$$\begin{array}{lll} & S & \to_G^* w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \\ \Leftrightarrow & S & \to_G^* w_1 \dots w_{i-1} A' A_v \dots A_m \quad v \in \{1, \dots, m+1\} \\ & & \to_G w_1 \dots w_i A_1 \dots A_m \\ & & (\text{also } (A' \to w_i\, A_1 \dots A_{v-1}) \in P) \end{array}$$

gemäß Induktionsvoraussetzung

$$\begin{array}{lll} \Leftrightarrow & (q_0, w_1 \dots w_{i-1}, Z_0) & \to_N^* (q_0, \epsilon, A' A_v \dots A_m) \\ \Leftrightarrow & (q_0, w_1 \dots w_{i-1} w_i, Z_0) & \to_N^* (q_0, w_i, A' A_v \dots A_m) \\ & & \to_N (q_0, \epsilon, A_1 \dots A_m) \\ & & \text{da } (A' \to w_i\, A_1 \dots A_{v-1}) \in P) \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \quad (q_0, w_1 \dots w_i, Z_0) \quad \to_N^* (q_0, \epsilon, A_1 \dots A_m)$$

## Beweis (Forts.):

Aus der Hilfsbehauptung folgt

$$L(N) = L(G) \; .$$

$\square$

## Satz 91

*Sei* $N = (Q, \Sigma, \Delta, q_0, Z_0, \delta)$ *ein NPDA, der mit leerem Keller akzeptiert. Dann ist* $L(N)$ *kontextfrei.*

## Beweis:

Wir definieren:

$$
\begin{aligned}
&G = (V, T, P, S)\\
&T := \Sigma\\
&V := Q \times \Delta \times Q \cup \{S\} \qquad \text{wobei wir die Tupel mit } [\,,\,,\,] \text{ notieren}\\
&P \ni S \to [q_0, Z_0, q] \text{ für } q \in Q\\
&P \ni [q, Z, q_m] \to a[p, Z_1, q_1][q_1, Z_2, q_2] \cdots [q_{m-1}, Z_m, q_m]\\
&\qquad\qquad \text{für } \delta(q, a, Z) \ni (p, Z_1 \cdots Z_m), \forall q_1, \ldots, q_m \in Q,\\
&\qquad\qquad\qquad \text{mit } a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}\,.
\end{aligned}
$$

**Idee:** Aus $[p, X, q]$ sollen sich alle die Wörter ableiten lassen, die der NPDA $N$ lesen kann, wenn er im Zustand $p$ mit (lediglich) $X$ auf dem Stack startet und im Zustand $q$ mit leerem Stack endet.

## Beweis (Forts.):

**Hilfsbehauptung:**

$$[p, X, q] \rightarrow_G^* w \Leftrightarrow (p, w, X) \rightarrow_N^* (q, \epsilon, \epsilon)\,.$$

„$\Rightarrow$“: Induktion über die Länge $l$ der Ableitung.

Induktionsanfang ($l = 1$):

$$\begin{aligned} & [p, X, q] \rightarrow_G w \\ \Rightarrow \quad & \delta(p, w, X) \ni (q, \epsilon) \\ \Rightarrow \quad & (p, w, X) \rightarrow_N (q, \epsilon, \epsilon) \end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

Induktionsschritt ($(l-1) \mapsto l$):

Gelte

$$\begin{aligned}[p, X, q_{m+1}] &\to_G a[q_1, X_1, q_2][q_2, X_2, q_3] \cdots [q_m, X_m, q_{m+1}] \\ &\to_G^* aw^{(1)} \cdots w^{(m)} = w\end{aligned}$$

mit $(q_1, X_1 \cdots X_m) \in \delta(p, a, X)$, $[q_i, X_i, q_{i+1}] \to_G^{l_i} w^{(i)}$ und $\sum l_i < l$.

Dann gilt gemäß Induktionsvoraussetzung

$$\begin{aligned}\Rightarrow \quad & (q_i, w^{(i)}, X_i) \to_N^{l_i} (q_{i+1}, \epsilon, \epsilon) \quad \forall i \in \{1, \ldots, m\} \\ \Rightarrow \quad & (p, \underbrace{aw^{(1)} \cdots w^{(m)}}_{=w}, X) \to_N (q_1, w^{(1)} \cdots w^{(m)}, X_1 \cdots X_m) \\ & \to_N^{<l} (q_{m+1}, \epsilon, \epsilon)\ .\end{aligned}$$

## Beweis (Forts.):

„$\Leftarrow$“: Induktion über die Länge $l$ einer Rechnung des NPDAs $N$

Induktionsanfang ($l = 1$):

$$
\begin{array}{ll}
 & (p, w, X) \rightarrow_N (q, \epsilon, \epsilon) \\
\Rightarrow & (q, \epsilon) \in \delta(p, w, X) \qquad \text{(also } |w| \leq 1\text{)} \\
\Rightarrow & ([p, X, q] \rightarrow w) \in P\,.
\end{array}
$$

## Beweis (Forts.):

Induktionsschritt ($(l-1) \mapsto l$):

Sei

$$
\begin{aligned}
(p, w, X) &\rightarrow_N (q_1, w', X_1 \cdots X_m) \\
&\rightarrow_N^* (q, \epsilon, \epsilon)
\end{aligned}
$$

eine Rechnung von $N$ der Länge $l$, mit $w = ew'$ und $e \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$.

Nach Definition gibt es

$$([p, X, q] \rightarrow e[q_1 X_1 q_2] \cdots [q_m X_m q_{m+1}]) \in P \quad \text{mit } q_{m+1} = q$$

und eine Zerlegung $w' = w^{(1)} \cdots w^{(m)}$, so dass $w^{(1)} \cdots w^{(i)}$ der von $N$ zu dem Zeitpunkt verarbeitete Teilstring von $w'$ ist, wenn $X_{i+1}$ zum ersten Mal oberstes Stacksymbol (bzw., für $i = m$, der Stack leer) wird.

## Beweis (Forts.):

Gemäß Induktionsvoraussetzung gilt also

$$(q_i, w^{(i)}, X_i) \rightarrow_N^{l_i} (q_{i+1}, \epsilon, \epsilon) \qquad \text{mit } \sum l_i < l \text{ und}$$
$$[q_i, X_i, q_{i+1}] \rightarrow_G^* w^{(i)} \ .$$

Also folgt:

$$\begin{aligned} [p, X, q] &\rightarrow_G e[q_1, X_1, q_2] \cdots [q_m, X_m, q_{m+1}] \quad \text{mit } q_{m+1} = q \\ &\rightarrow_G^{<l} ew^{(1)} \cdots w^{(m)} = w \end{aligned}$$

Aus der Hilfsbehauptung folgt der Satz. $\square$

## Satz 92

*Folgende Aussagen sind äquivalent:*

- $L$ *wird von einer kontextfreien Grammatik erzeugt.*
- $L$ *wird von einem NPDA akzeptiert.*

## Beweis:

Folgt aus den vorhergehenden Sätzen. $\square$