Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2011
Lösungen der Klausur
10. Oktober 2011

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Name	Vorname	Studiengang	Matrikelnummer
....	....	☐ Diplom ☐ Inform. ☐ Bachelor ☐ BioInf. ☐ Lehramt ☐ WirtInf.	....

Hörsaal	Reihe	Sitzplatz	Unterschrift
....	....	....	....

Code:

Allgemeine Hinweise

- Bitte füllen Sie obige Felder in Druckbuchstaben aus und unterschreiben Sie!
- Bitte schreiben Sie nicht mit Bleistift oder in roter/grüner Farbe!
- Die Arbeitszeit beträgt 150 Minuten.
- Alle Antworten sind in die geheftete Angabe auf den jeweiligen Seiten (bzw. Rückseiten) der betreffenden Aufgaben einzutragen. Auf dem Schmierblattbogen können Sie Nebenrechnungen machen. Der Schmierblattbogen muss ebenfalls abgegeben werden, wird aber in der Regel nicht bewertet.

Hörsaal verlassen von ...... bis ...... / von ...... bis ......
Vorzeitig abgegeben um ......
Besondere Bemerkungen:

	A1	A2	A3	A4	A5	A6	A7	Σ	Korrektor
Erstkorrektur									
Zweitkorrektur									

Aufgabe 1 (8 Punkte)

Wahr oder falsch? Begründen Sie Ihre Antwort!

1. Es gibt unendliche Markov-Ketten mit diskreter Zeit, für die alle Zustände rekurrent sind.
2. Jede abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist eine Borelsche Menge.
3. Für jede erwartungstreue Schätzvariable X ist der Bias gleich dem Erwartungswert von X.
4. Falls $X \sim \text{Bin}(n, p)$ und $Y := 2X$, dann gilt $Y \sim \text{Bin}(2n, p)$.
5. Für Ereignisse A und B eines Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ mit $\Pr[A] = \frac{3}{4}$ und $\Pr[B] = \frac{1}{2}$ gilt stets $\Pr[A \cap B] \neq \frac{1}{5}$. (2 Punkte)
6. Sei $G_X(s) = \frac{1}{2-s}$ die wahrscheinlichkeitserzeugende Funktion einer Zufallsvariablen X, dann gilt $\Pr[X = 3] = \frac{1}{16}$. (2 Punkte)

Lösung

Für die richtige Antwort und für die richtige Begründung gibt es für Teilaufgaben 1 bis 4 jeweils einen halben Punkt und bei Teilaufgaben 5 und 6 jeweils einen ganzen Punkt.

1. Wahr! $p_{i,i} = 1$.
2. Wahr! Jedes Element der abzählbaren Menge ist als Intervall eine Borelsche Menge. Abzählbare Vereinigungen Borelscher Mengen sind wiederum Borelsche Mengen.
3. Falsch! Nur falls $\mathbb{E}[X] = 0$.
4. Falsch! $2X$ nimmt keine ungeraden Werte an.
5. Wahr!
   Aus $\Pr[A] + \Pr[B] - \Pr[A \cap B] = \Pr[A \cup B] \leq 1$
   folgt $\frac{1}{4} \leq \Pr[A \cap B]$.
6. Wahr! $\frac{1}{2-s} = \sum_{i=0}^{\infty} (\frac{1}{2})^{i+1} s^i$.

Aufgabe 2 (9 Punkte)

Die Menge $\Omega = [10] \times [10] \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ und die Funktion Pr mit $\Pr[e] = \frac{1}{100}$ für alle $e \in \Omega$ definieren einen diskreten Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$.

1. Seien $A = \{(x, y) \in \Omega\,;\, x \leq 2\}$ und $B = \{(x, y) \in \Omega\,;\, y \geq 6\}$ Ereignisse in W.

   Konstruieren Sie ein Ereignis $C \subseteq \Omega$ mit $\Pr[C] = \frac{1}{5}$, so dass die Ereignisse A, B und C unabhängig sind.

2. Des Weiteren seien X und Y diskrete Zufallsvariable über W mit $X((x, y)) = x+y-1$ und $Y((x, y)) = y$.

   (a) Bestimmen Sie die diskrete Dichtefunktion f_X.

   (b) Zeigen Sie, dass X und Y abhängig sind.

Lösung

1. $C = \{(x, y)\,;\, y = 5 \vee y = 6\}\,.$ (3P)

2. (a) Es gilt

$$f_X(i) = \Pr[X = i] = \begin{cases} \frac{i}{100} : 1 \leq i \leq 10\,, \\ \frac{20-i}{100} : 11 \leq i \leq 19\,, \\ 0 : \text{sonst.} \end{cases}$$ (3P)

   (b) $\Pr[X = 2, Y = 2] = \Pr[(1, 2)] = \frac{1}{100}\,,$
   $\Pr[X = 2] = \frac{2}{100}\,,$
   $\Pr[Y = 2] = \frac{1}{10}\,.$
   Es folgt $\Pr[X = 2, Y = 2] \neq \Pr[X = 2] \cdot \Pr[Y = 2]\,.$

   (3P)

Aufgabe 3 (8 Punkte)

1. Ein Kartenstapel mit 27 Karten enthalte genau einen Joker. Zwei Personen A und B ziehen nach dem folgenden 3-schrittigen Verfahren letztendlich genau eine Karte aus dem Stapel.

   Wir starten das folgende Verfahren mit $x = 27$ Karten und wiederholen es so lange, bis nur mehr eine Karte auf dem Tisch liegt.

   - A teilt die x Karten in zufälliger Weise in einen linken, rechten und mittleren Stapel mit je $\frac{x}{3}$ verdeckten Karten. Dann entfernt B den linken Stapel. Nun sieht A in den verbleibenden 2 Stapeln nach und entfernt einen Stapel, der den Joker nicht enthält. Nun liegt noch ein einziger Stapel mit $\frac{x}{3}$ Karten auf dem Tisch.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit liegt am Ende ein Joker auf dem Tisch, wenn wir Laplace-Wahrscheinlichkeiten voraussetzen? (Ergebnis als Bruchzahl angeben!)

2. Wir nehmen an, dass sich unter verschiedenen 27 Karten genau 3 Joker befinden. Eine Person A wählt davon Laplace-zufällig 5 Karten aus und gibt diese einer Person B in die Hand.

   Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat B mindestens 2 Joker in ihrer Hand?

   (Zur Darstellung des Ergebnisses dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik unausgewertet verwendet werden.)

Lösung

1. $\Pr[\text{Joker}] = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}$.

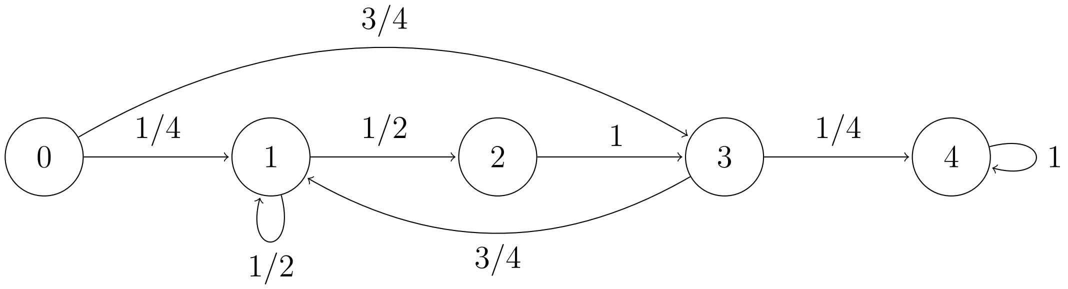
   (4P)

2. Hypergeometrische Verteilung und totale Wahrscheinlichkeit:

   $\Pr[\geq 2 \text{ Joker}] = \frac{\binom{3}{2}\binom{24}{5-2}}{\binom{27}{5}} + \frac{\binom{3}{3}\binom{24}{5-3}}{\binom{27}{5}}$. (4P)

Aufgabe 4 (9 Punkte)

Sei $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ eine endliche (zeit)homogene Markov-Kette mit diskreter Zeit über der Zustandsmenge $S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$. Die positiven Übergangswahrscheinlichkeiten seien durch das folgende Übergangsdiagramm gegeben:



1. Sei T_{02} die Übergangszeit vom Zustand 0 in den Zustand 2.
   (a) Bestimmen Sie $\Pr[T_{02} = n]$ für alle $n \in \{2, 3\}$!
   (b) Zeigen Sie $\Pr[T_{02} = n] > 0$ für alle $n \geq 4$.
2. Berechnen Sie die Ankunftswahrscheinlichkeit f_{01} !
3. Berechnen Sie die erwartete Übergangszeit h_{34} !

Lösung

1. $\Pr[T_{02} = 2] = \frac{1}{24} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$,
   $\Pr[T_{02} = 3] = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{11}{32}$.

   (2P)

   Für alle übrigen n gilt $\Pr[T_{02} = n] > 0$, da auf jedem Weg nach 2 der Zustand 1 passiert werden muss und dort die Schleife ausgeführt werden kann.

   (1P)

2. Es gilt

$$\begin{aligned} f_{01} &= p_{01} + p_{03} f_{31} \\ &= \tfrac{1}{4} + \tfrac{3}{4} f_{31}\,, \\ f_{31} &= \tfrac{3}{4}\,. \end{aligned}$$

   Es folgt $\quad f_{01} = \frac{13}{16}$. (2P)

3. Mit Hilfe des Gleichungssystem

$$\begin{aligned} h_{34} &= 1 + \frac{3}{4} h_{14} \\ h_{14} &= 1 + \frac{1}{2} h_{14} + \frac{1}{2} h_{24} \\ h_{24} &= 1 + h_{34} \end{aligned}$$

   folgt $h_{34} = 13$. (4P)

Aufgabe 5 (9 Punkte)

Sei X eine binomialverteilte Zufallsvariable mit Parametern $n = 4$ und $p = \frac{1}{2}$, d.h. $X \sim \mathrm{Bin}(4, \frac{1}{2})$.

1. Geben Sie die erzeugende Funktion $G_X(s)$ in geschlossener Form an.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert der bedingten Variablen $X|X \neq 2$.
3. Ein Experiment bestehe darin, dass die Zufallsvariable X wiederholt ausgewertet wird, und zwar so oft, bis bei der n-ten Wiederholung der Wert 2 erstmalig erscheint. Dann wird die Summe der aufgetretenen Werte $\neq 2$ gebildet.

   Sei X_i für $i \in \mathbb{N}$ die i-te Wiederholung von X, sei N die Zufallsvariable, die die Nummer n der letzten Wiederholung darstellt, und sei $S = \sum_{i=1}^{N-1} X_i$.

   Berechnen Sie den Erwartungswert $\mathbb{E}[S]$ von S.

Lösung

1. $$G_X(s) = (1 - \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}s)^4 = \tfrac{1}{16}(1+s)^4 = = \tfrac{1}{16} + \tfrac{4}{16}s + \tfrac{6}{16}s^2 + \tfrac{4}{16}s^3 + \tfrac{1}{16}s^4\,.$$ (2P)

2. $$\begin{aligned}\Pr[X = x|X \neq 2] &= \begin{cases} \frac{\Pr[X=x]}{\Pr[X\neq 2]} & : \text{falls } x \neq 2 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{10} & : \text{falls } x = 0 \ \vee \ x = 4 \\ \frac{2}{5} & : \text{falls } x = 1 \ \vee \ x = 3 \\ 0 & : \text{sonst} \end{cases}\end{aligned}$$

   (2P)

   Es folgt: $\mathbb{E}[X|X \neq 2] = \frac{1}{10} \cdot 0 + \frac{2}{5} \cdot 1 + \frac{2}{5} \cdot 3 + \frac{1}{10} \cdot 4 = 2\,.$ (1P)

3. N ist geometrisch verteilt mit $p = \frac{3}{8}$. (1P)

   Es folgt $\mathbb{E}[N] = \frac{8}{3}$, mithin $\mathbb{E}[N-1] = \frac{8}{3} - 1 = \frac{5}{3}\,.$ (1P)

   Es folgt $\mathbb{E}[S] = \mathbb{E}[N-1] \cdot \mathbb{E}[X|X \neq 2] = \frac{5}{3} \cdot 2 = \frac{10}{3}\,.$

   (2P)

Aufgabe 6 (8 Punkte)

Sei $a > 0$, und seien X, Y kontinuierliche Zufallsvariablen mit gemeinsamer Dichtefunktion

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} a\cdot(1 - x\cdot y) & : \quad 0 \le x \le 1,\, 0 \le y \le 1 \\ 0 & : \quad \text{sonst} \end{cases}$$

1. Berechnen Sie die Randdichten $f_X(x)$ und $f_Y(y)$.
2. Bestimmen Sie a.
3. Sind die Variablen X und Y unabhängig? Beweisen Sie Ihre Antwort.

Lösung

1. $f_X(x) = a \cdot (1 - \frac{x}{2})$. Berechnung:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 a\cdot(1 - x\cdot y)\,\mathrm{d}y \\ &= a \cdot \left[y - \frac{xy^2}{2} \right]_{y=0}^{y=1} = a \cdot (1 - \frac{x}{2})\,. \end{aligned} \qquad \text{(2P)}$$

   Entsprechend gilt $f_Y(y) = a \cdot (1 - \frac{y}{2})$. (1P)

2. Aus der Form des Gebiets, in dem die Dichte ungleich Null ist, ergibt sich die Gleichung

$$\begin{aligned} 1 = F_{X,Y}(1,1) &= \int_0^1 f_X(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 a \cdot (1 - \frac{x}{2})\,\mathrm{d}x \\ &= a \cdot \left[x - \frac{x^2}{4} \right]_{y=0}^{y=1} = \frac{3}{4} \cdot a \end{aligned}$$

   Mithin $a = \frac{4}{3}$. (3P)

3. Nein! I.A. gilt
   $f_{X,Y}(x,y) = a(1 - xy) \neq a(1 - \frac{x}{2}) \cdot a(1 - \frac{y}{2}) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$.
   (2P)

Aufgabe 7 (9 Punkte)

An der Kasse eines Kaufhauses werden Waren in Pakete verpackt. Die benötigte Zeit T_i für die Fertigstellung eines Pakets i sei exponentialverteilt, und die Zufallsvariablen T_i seien unabhängig für alle i mit jeweils demselben Erwartungswert von $0,5$ Minuten.

1. Wir interessieren uns für die zur Fertigstellung von 60 Paketen benötigte Zeit $S = \sum_{i=1}^{60} T_i$. Wie groß ist die Varianz von S?

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit p, dass die Fertigstellung von 2 Paketen länger als 2 Minuten benötigt.

3. Nun interessieren wir uns für die Anzahl $P(t)$ der bis zum Zeitpunkt t fertiggestellten Pakete. Die Zeit wird wieder in Minuten gemessen. Für jedes t ist $P(t)$ eine Zufallsvariable.

   Bestimmen Sie für $t = 2$ die Dichtefunktion $f_{P(t)}$ und geben Sie für $f_{P(t)}(5)$ einen arithmetischen Ausdruck an.

Hinweis: Es dürfen bekannte Funktionen der Kombinatorik und die Exponentialfunktion unausgewertet verwendet werden.

Lösung

1. Es gilt $\lambda = \frac{1}{0{,}5} = 2\,.$

   $\mathrm{Var}[T_i] = \frac{1}{\lambda^2} = 0,25\,,$

   $\mathrm{Var}[S] = 60 \cdot 0,25 = 15\,.$

   (3 P.)

2. (siehe Übungsblatt 10)

   $p = 1 - F_{T_1+T_2}(2) = 1 - (1 - e^{-\lambda t} - \lambda t e^{-\lambda t})\big|_{t=2} = e^{-4} + 4e^{-4} = 5e^{-4}\,.$

   (3 P.)

3. $P(2)$ ist Poisson-verteilt mit Parameter $\lambda t = 4$.

   $\Pr[P(2) = 5] = \frac{(\lambda t)^5}{5!} e^{-\lambda t}\Big|_{\lambda t=4} = \frac{(4)^5}{5!} e^{-4}\,.$

   (3 P.)