Aufgabe 1 **Abzugeben sind (e), (h), (i), (k) und (m).** **1P + 1P + 1P + 1P + 1P = 5P**

Es seien $n, k \in \mathbb{N}$. Geben Sie für jede der folgender Mengen an, wie man ihre Mächtigkeit berechnen kann (nicht nach Schwierigkeit geordnet):

(a) $A := \{\mathcal{P} \subseteq 2^{[n]} \mid \mathcal{P} \text{ ist eine Partition von } [n]\}$.

(b) $B := \{\mathcal{P} \in A \mid |\mathcal{P}| = k\}$.

(c) $C := \{f : [k] \to [n]\}$.

(d) $D := \{f : [k] \to [n] \mid f \text{ surjektiv }\}$.

(e) $E := \{f : [k] \to [n] \mid f \text{ injektiv }\}$.

(f) $F := \{f : [k] \to [n] \mid f \text{ bijektiv }\}$.

.05.2012

(a) $\mathcal{P} \subseteq 2^{[n]}$ Partition

d.h. $\mathcal{P} = \{K_1, \dots, K_r\}$

mit
- $K_i \neq \emptyset$
- $K_i \cap K_j = \emptyset$ für $i \neq j$
- $\bigcup_{i=1}^{r} K_i = [n]$

$$\leadsto |A| = \sum_{k=1}^{n} \underbrace{\{\mathcal{P} \subseteq 2^{[n]} \mid |\mathcal{P}| = k\}}_{\text{Partition von } A}$$

(Bell-Zahl)

minimal 1 Klasse, maximal n Klassen

siehe (b)

(b) $B = \{\mathcal{P} \subseteq 2^{[n]} \mid |\mathcal{P}| = k\}$

$\leadsto$ Stirling-Zahlen 2. Art:

$S_{n,k} \mathrel{\hat{=}}$ Anzahl Partitionen von $[n]$ in genau k Klassen

Rekursive Berechnung: $n, k \in \mathbb{N}$

- $S_{n,1} = 1$
- $S_{n,n} = 1$

- Falls $k > n$: $S_{n,k} = 0$
- Falls $1 \leq k < n$:

<u>1. Fall</u> $\mathcal{P} = \{ \underbrace{K_1, \dots, K_{k-1}}_{\text{Partition von } [n-1] \text{ in } k-1 \text{ Klassen}}, \{n\} \}$

<u>2. Fall:</u> $\mathcal{P} = \{ K_1, \dots, K_i \cup \{n\}, \dots, K_k \}$

mit $K_1, \dots, K_k$ Partition von $[n-1]$ in k Klassen

$$\leadsto S_{n,k} = S_{n-1,k-1} + k \cdot S_{n-1,k}$$

Möglichkeiten für Element n

(c) $C = \{ f : [k] \to [n] \}$

$|C| = n^k$

Identifiziere f mit $(\underset{\in [n]}{f(1)}, \dots, \underset{\in [n]}{f(k)})$

($\leadsto$ für $k=0$: $f = ()$ $\leadsto$ $|C| = n^0 = 1$)

leeres Wort / Tupel

(d) $D = \{ f : [k] \to [n] \mid f \text{ surjektiv} \}$

Jedes $i \in [n]$ hat mindestens ein Urbild unter f.

$\leadsto$ $\{ f^{-1}(1), f^{-1}(2), \dots, f^{-1}(n) \}$ ist Partition von $[k]$, wobei jeder Klasse $f^{-1}(i)$ ein eindeutiges Bild aus $[n]$ zugeordnet ist

$\leadsto$ $|D| = n! \, S_{k,n}$

(e) $E = \{ f : [k] \to [n] \mid f \text{ injektiv} \}$

$$|E| = \begin{cases} 0, & \text{falls } k > n \\ n(n-1) \cdot \ldots \cdot (n-k+1), & \text{sonst} \end{cases}$$

$$= \frac{n!}{(n-k)!}$$

(f) $F = \{ f : [k] \to [n] \mid f \text{ bijektiv} \}$

$$|F| = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \neq k \\ n!, & \text{sonst} \end{cases}$$

(g) $G = \{ (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_i \neq s_j \text{ für } i \neq j \}$

$\leadsto$ $s : [k] \to [n]$, $i \mapsto s_i$ mit s injektiv

$\leadsto$ $|G| = |E|$

(h) $H = \{ (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_i < s_{i+1} \}$

$\leadsto$ Vergesse Reihenfolge der Tupel aus G und wähle als Repräsentanten gerade das aufsteigend sortierte Tupel

$\leadsto$ $k!$ mögliche Anordnungen werden durch 1 Tupel repräsentiert

$$\to |H| = \frac{|G|}{k!} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k > n \\ \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

$$|H| = \binom{n}{k}$$

(i) $I = \{ (s_1, s_2, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k \}$

Bijektion:

$$I \longrightarrow \{ f : [n] \to \mathbb{N}_0 \mid \sum_{i \in [n]} f(i) = k \}$$

$$(s_1, s_2, \ldots, s_k) \longmapsto f \text{ mit } f(i) = |\{ j \in [k] \mid s_k = i \}|$$

Wie oft kommt i in dem Tupel $(s_1, s_2, \ldots, s_k)$ vor

$$1^{f(1)} 2^{f(2)} \ldots n^{f(n)} \longleftarrow f$$

"Wort über Alphabet $[n]$".

$\rightsquigarrow$ siehe dann (j): $|I| = \binom{n+k-1}{k}$

(j) $J = \{ f : [k] \to \mathbb{N}_0 \mid \sum_{i \in [k]} f(i) = n \}$

Kodiere $\mathbb{N}_0$ unär über $\{ | \}$

$0 \mathrel{\hat{=}} \varepsilon$

$1 \mathrel{\hat{=}} |$

$2 \mathrel{\hat{=}} ||$

$3 \mathrel{\hat{=}} |||$

$\rightsquigarrow f \mathrel{\hat{=}} (\underbrace{|^{f(1)}, |^{f(2)}, |^{f(3)}, \ldots, |^{f(k)}}_{\substack{\text{Wort mit genau} \\ \sum_{i=1}^{k} f(i) = n \\ \text{Strichen und } k-1 \text{ Kommata}}})$

$\rightsquigarrow$ muss nur die Positionen der Striche festlegen

$$\rightsquigarrow |\mathcal{F}| = \binom{n+k-1}{n} = \binom{n+k-1}{k-1}$$

(k) $K = \{f : [k] \to \mathbb{N}_0 \mid \sum_{i \in [k]} f(i) \leq n\}$

<u>1. Möglichkeit:</u>

$$K = \bigcup_{e=1}^{n} \{f : [k] \to \mathbb{N}_0 \mid \sum f(i) = e\}$$

"disjunkte Vereinigung"

$$\rightsquigarrow |K| = \sum_{e=1}^{n} \binom{e+k-1}{k-1}$$

<u>2. Möglichkeit</u>

Bijektion:

$$K \longrightarrow \{g : [k+1] \to \mathbb{N}_0 \mid \sum g(i) = n\}$$

$$f \longmapsto g \text{ mit } \begin{array}{l} \bullet\ g(i) = f(i),\ i \in [n] \\ \bullet\ g(n+1) = n - \sum f(i) \end{array}$$

$\rightsquigarrow |K| = \binom{n+k+1-1}{k+1-1}$

$\rightsquigarrow$ Nebenresultat:

$$\binom{n+k}{k} = \sum_{l \in [n]} \binom{l+k-1}{k-1}$$

(l) $L = \{ f:[k] \to \mathbb{N} \mid \sum f(i) = n \}$

wie (j), allerdings nur noch $n-k$ Striche zu verteilen

$\rightsquigarrow |L| = \binom{n-k+k-1}{k-1} = \binom{n-1}{k-1}$

(m) wie (k), nur mit $n-k$ Strichen

$\rightsquigarrow |M| = \binom{n-k+k}{k} = \binom{n}{k}$

(a) Zeigen Sie folgende Identitäten der Binomialkoeffizienten:

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$.

(ii) $\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$.

(iii) $\sum_{0\le k\le n} \binom{m+k}{k} = \binom{m+n+1}{n}$.

(iv) $\sum_{0\le k\le n} \binom{k}{m} = \binom{n+1}{m+1}$.

(v) $\sum_{k\ge 0} \binom{m}{k}\binom{n}{l-k} = \binom{m+n}{l}$.

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & 0 \le k \le n \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

(a) (i) • direkt über Formel

<u>oder:</u> $\binom{n}{k} = |H|$

$$\binom{n-1}{k}$$

$$\rightsquigarrow H = \{ \vec{s} \in [n-1]^k \mid \vec{s} \in H \}$$
$$\cup \{ (s_1, \dots, s_{k-1}) \in [n-1]^k \mid (s_1, \dots, s_{k-1}, n) \in H \}$$

$$\Downarrow$$
$$\binom{n-1}{k-1}$$

(ii) direkt über Formel oder siehe (c)

(iii) siehe A0.1 (k) mit $\binom{m+k}{k} = \binom{m+k}{m}$

(iv)
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{k}{m} = \sum_{k=m}^{n} \binom{k}{m}$$
$$\overset{k=m+j}{=} \sum_{j=0}^{n-m} \binom{m+j}{m}$$
$$\overset{(iii)}{=} \binom{m+(n-m)+1}{n-m} = \binom{n+1}{m+1}$$

(i) Partitioniere

$$A = \{ (s_1, \dots, s_l) \in [m+n]^l \mid s_i < s_{i+1} \}$$

nach "wie viele Elemente aus $[m]$"

$$\rightsquigarrow A = \bigcup_{k=0}^{l} \{ (s_1, \dots, s_k) \circ \underbrace{(s_{k+1}, \dots, s_l)}_{\substack{l-k \\ \text{Elemente} \\ \text{aus } [m+n]\setminus[m]}} \}$$

concat

k Elemente aus $[m]$

$$\rightsquigarrow |A| = \sum_{k=0}^{l} \binom{m}{k} \binom{n}{l-k}$$

$$|A| = \binom{m+n}{l}$$

(b)

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}}$$

$$\binom{n}{m}\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{m-k}$$

$$\rightsquigarrow \frac{\binom{m}{k}}{\binom{n}{k}} = \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

(ii)

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{\binom{n-k}{m-k}}{\binom{n}{m}}$$

$j = m-k$

$\rightsquigarrow j = m-0 \dots m-m$

$=$

$$\frac{1}{\binom{n}{m}} \sum_{j=0}^{m} \binom{n-m+j}{j}$$

(iii)

$$\frac{1}{\binom{n}{m}} \binom{n-m+m+1}{m}$$

$$= \frac{\frac{(n+1)!}{m!\,(n+1-m)!}}{\frac{n!}{m!\,(n-m)!}}$$

$$= \frac{n+1}{n-m+1}$$

c) Erinnerung: $(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$

Notation: $[z^k] f \mathrel{\hat{=}}$ Koeffizient von z^k in f.

$\Rightarrow$ Gesucht: $[a^3 b^5 c^7] (a+b+c)^{15}$

$$[a^3 b^5 c^7] (a+(b+c))^{15}$$

$$= [b^5 c^7] \binom{15}{3} (b+c)^{12}$$

$$= \binom{15}{3} \binom{12}{5} = \binom{15}{12} \binom{12}{5}$$

$$[a^3 b^5 c^7]\,(b+(a+c))^{15}$$

$$= [a^3 c^7]\binom{15}{5}(a+c)^{10}$$

$$= \binom{15}{5}\binom{10}{7}$$

$$\leadsto \binom{15}{12}\binom{12}{5} = \binom{15}{5}\binom{10}{7}$$

Analog: $\binom{n}{m}\cdot\binom{m}{k} = \binom{n}{k}\cdot\binom{n-k}{m-k}$

mit $[a^j b^k c^e]\,(a+b+c)^n$

und $m = k+e$,

d

$$\begin{tikzcd}
(1,m) \arrow[r] & (2,m) \arrow[r, dashed] & (n,m) \\
(1,2) \arrow[u, dotted] \arrow[r] & (2,2) \arrow[u, dotted] \arrow[r, dashed] & (n,2) \arrow[u, dotted] \\
(1,1) \arrow[u] \arrow[r] & (2,1) \arrow[u] \arrow[r, dashed] & (n,1) \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

Kürzester Pfad von $(1,1)$ nach (n,m) besteht aus $(n-1)$ Bewegungen nach oben & $(m-1)$ Bewegungen nach rechts

$\rightsquigarrow$ Pfad durch Wort der Länge $(n-1)+(m+1)$ über Alphabet $\{r, o\}$ mit genau $(n-1)$ 'r's eindeutig beschrieben

$\rightsquigarrow \binom{n+m-2}{n-1}$ Pfade

A 0.3

ⓐ

$$\sum_{i=M}^{N} x^i =: g_{M,N}(x)$$

$\leadsto \cdot\; g_{M+1,N+1}(x) - g_{M,N}(x)$

$= x^{M+1} + x^{M+2} + \dots + x^{N+1}$
$- x^M - x^{M+1} - \dots - x^N$
$= x^{N+1} - x^M$

$\cdot\; g_{M+1,N+1}(x) = x \cdot g_{M,N}(x)$

$\leadsto$ für $x \neq 1$:

$$g_{M,N}(x) = \frac{x^{N+1} - x^M}{x-1} = \frac{x^M - x^{N+1}}{1-x}$$

für $x = 1$:

$$g_{M,N}(x) = N - M + 1$$

(b)

$$\sum_{i=0}^{\infty} 5^{-i} = \lim_{N\to\infty} g_{0,N}\left(\tfrac{1}{5}\right)$$

$$= \lim_{N\to\infty} \frac{1-5^{-N-1}}{1-5^{-1}}$$

$$= \frac{5}{4}$$

(c) $\displaystyle\sum_{i=0}^{\infty} i\, x^{i-1}$ $\quad j = i-1$

$$\sum_{i=0}^{N} i x^{i-1} = \sum_{j=0}^{N-1} (j+1)x^j$$

$$= x^0 + x^1 + x^2 + \dots + x^{N-1}$$
$$+ x^1 + x^2 + \dots + x^{N-1}$$
$$+ x^2 + \dots + x^{N-1}$$
$$\ddots$$
$$+ x^{N-1}$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} g_{j,N-1}(x)$$

$$= \sum_{j=0}^{N-1} \frac{x^j - x^N}{1-x} \quad (x \neq 1)$$

$$= \frac{g_{0,N-1}(x) - N \quad x^N}{1-x}$$

$$= \frac{\frac{1-x^N}{1-x} - N x^N}{1-x}$$

$$\rightsquigarrow \sum_{i=0}^{\infty} i\, x^{i-1} = \lim_{N\to\infty} (1-x)^{-2} - x^N (1-x)^{-2} - N x^N (1-x)^{-1}$$

$$\overset{|x|<1}{=} \underline{\underline{(1-x)^{-2}}}$$

(d) $\sum_{i=0}^{\infty} i\, x^{i+3} = x^4 \frac{1}{(1-x)^2}$

$|x|<1$

(e) $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \left(\frac{2}{7}\right)^i \left(\frac{1}{6}\right)^{n-i}}$

$$= \lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{2}{7} + \frac{1}{6}\right)^n}_{0< \quad <1} = 0$$