LÖSUNG

Übungen zu Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Dieses Blatt ist nicht abzugeben und wird am 27./28. April besprochen.

Beachten Sie: Alle Ergebnisse sind zu begründen!

Aufgabe 0.1 **0P**

Es sei $n \in \mathbb{N}$ und $k \in [n]$. Bestimmen Sie die Mächtigkeit folgender Mengen:

(a) $A := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_i \neq s_j \text{ für } 1 \leq i < j \leq k\}$.

(b) $B := [n]^k$.

(c) $C := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 < s_2 < \ldots < s_k\}$.

(d) $D := \{(s_1, \ldots, s_k) \in [n]^k \mid s_1 \leq s_2 \leq \ldots \leq s_k\}$.

Notation: Die natürlichen Zahlen beginnend mit 1 werden mit $\mathbb{N}$ bezeichnet. Weiter gelte $\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Für $k \in \mathbb{N}$ ist $[k]$ die Menge $\{1, 2, \ldots, k\}$. Falls A eine Menge ist und $k \in \mathbb{N}$, so bezeichnet A^k die Menge der k-Tupel über A.

Lösungsvorschlag:

(a) Für den ersten Eintrag des k-Tupels stehen n möglichen Zahlen zur Verfügung, für den zweiten Eintrag noch $n-1$, für den i.ten dann noch $n-(i-1)$. Insgesamt also

$$n \cdot (n-1) \cdots (n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!} =: n^{\underline{k}}.$$

(b) Für jede Position des k-Tupels stehen n Möglichkeiten zur Verfügung, also insgesamt n^k Möglichkeiten.

(c) Nach a) haben wir $n^{\underline{k}} = \frac{n!}{(n-k)!}$ verschiedene k-Tupel ohne Wiederholungen. Die k verschiedenen Zahlen können dabei auf $k!$ verschiedene Arten angeordnet werden. Da wir nur die aufsteigend-sortierte Anordnung zählen, erhalten wir

$$\frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}.$$

(d) Anmerkung: hier macht auch $k > n$ Sinn.

Wir können ein k-Tupel $(s_1, \ldots, s_k)$ aus Komb_k^n(m.W.) auch durch ein n-Tupel $(f_1, \ldots, f_n)$ kodieren, wobei f_i gerade angibt, dass die Zahl i genau f_i-mal in $(s_1, \ldots, s_k)$ vorkommt, z.B. für $n = 3$ und $k = 5$:

$$(2, 2, 2, 3, 3) \text{ wird zu } (0, 3, 2).$$

Kodieren wir jede Zahl f_i unär, so treten in $(f_1, \ldots, f_n)$ genau k Einsen und $n-1$ ‚Kommata' auf, z.B.:

$$(0, 3, 2) \text{ wird zu } (, 111, 11).$$

D.h. wir haben insgesamt $k + n - 1$ Positionen, auf welche wir genau k Einsen bzw. $n-1$ Kommata ohne Beachtung der Reihenfolge verteilen müssen, d.h. insgesamt $\binom{n+k-1}{k}$ Möglichkeiten.

Aufgabe 0.2 **0P**

Zeigen Sie:

(a) Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $k, l \in \mathbb{N}_0$ sei $s_{k,l}(q) := \sum_{i=k}^{k+l} q^i$. Dann gilt:

$$s_{k,l}(q) = \frac{q^k - q^{k+l+1}}{1-q}.$$

Hinweis: Betrachten Sie $s_{k,l}(q) - q \cdot s_{k,l}(q)$.

(b) Für $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$, $l \in \mathbb{N}$ sei $S_l(q) := \sum_{i=0}^{l}(i+1)q^i$. Dann gilt:

$$S_l(q) = \frac{1-q^{l+2}}{(1-q)^2} - (l+2)\frac{q^{l+1}}{1-q}$$

Hinweis: Betrachten Sie $S_{l+1}(q) - q \cdot S_l(q)$.

(c) Es sei $q \in [0, 1)$. Dann gilt:

$$\sum_{i=0}^{\infty}(i+1)q^i = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Lösungsvorschlag:

(a)

$$(1-q)s_{k,l} = s_{k,l} - s_{k+1,l} = q^k - q^{k+l+1} \Rightarrow s_{k,l} = \frac{q^k - q^{k+l+1}}{1-q}.$$

(b)

$$S_{l+1}(q) - q \cdot S_l(q) = s_{0,l+1}(q) = \frac{1-q^{l+2}}{1-q}.$$

Mit $S_{l+1}(q) = S_l(q) + (l+2)q^{l+1}$ ergibt sich:

$$(l+2)q^{l+1} + (1-q)S_l(q) = s_{0,l+1}(q) \Rightarrow S_l(q) = \frac{1-q^{l+2}}{(1-q)^2} - (l+2)\frac{q^{l+1}}{1-q}.$$

(c) Für $q \in [0, 1)$ folgt $\lim_{l\to\infty} q^l = 0$ und auch ($q > 0$) $\lim_{l\to\infty} lq^l = e^{\lim_{l\to\infty} \ln(l)+l\cdot\ln(q)} = 0$ ($q = 0$ ist trivial). Daher:

$$\lim_{l\to\infty} S_l(q) = \lim_{l\to\infty} \frac{1-q^{l+2}}{(1-q)^2} - (l+2)\frac{q^{l+1}}{1-q} = \frac{1}{(1-q)^2}.$$

Aufgabe 0.3 **0P**

In einem Fahrstuhl befinden sich 6 Personen. Der Fahrstuhl hält auf insgesamt 4 Stockwerken, wobei jeder Fahrgast auf einem der Stockwerke aussteigt und keine neuen Fahrgäste hinzusteigen.

(a) Wir unterscheiden nicht zwischen den Fahrgästen.

i) Geben Sie eine formale Beschreibung der Menge, welche gerade alle möglichen Zuteilungen der Fahrgäste auf die Stockwerke enthält.

ii) Wie viele Elemente enthält die Menge?

iii) Wie viele Fälle gibt es, in denen genau 3 Fahrgäste im zweiten Stock aussteigen?

(b) Wir unterscheiden nun zwischen den Fahrgästen.

i) Beschreiben Sie wieder formal die Menge, die alle möglichen Zuteilungen der Fahrgäste auf die Stockwerke enthält.

ii) Bestimmen Sie wieder die Mächtigkeit der gesuchten Menge.

iii) Wie viele Fälle gibt es, in denen auf jedem Stockwerk mindestens ein Fahrgast aussteigt?

Lösungsvorschlag:

(a) i) Auf dem i-ten Stockwerk steigen s_i viele Personen aus. Insgesamt steigen genau 6 Personen aus:

$$A := \{(s_1, \ldots, s_4) \in \mathbb{N}_0^4 \mid s_1 + s_2 + s_3 + s_4 = 6\}.$$

ii) Wir haben 6 Striche, die durch $4 - 1$ Kommata in 4 Gruppen unterteilt werden sollen:

$$\binom{6+4-1}{4-1} = \binom{9}{3} = 84.$$

iii) Es bleiben 3 Striche, die in 3 Gruppen unterteilt werden müssen:

$$\binom{3+3-1}{3-1} = \binom{5}{2} = 10.$$

(b) i) Wir ordnen jeder Person aus [6] ein Stockwerk aus [4] zu:

$$B := \{f : [6] \to [4] \mid f \text{ ist Funktion } \}.$$

ii) $|B| = 4^6$.

iii) Wir zählen nun nur die surjektiven Funktionen von [6] nach [4]. Deren Anzahl ist durch $4! \cdot S_{6,4}$ gegeben, wobei $S_{6,4}$ die Anzahl der möglichen Partitionen von 6 unterscheidbaren Objekten in 4 Klassen (Stirlingzahl 2. Art) ist. Zur Bestimmung von $S_{6,4}$ überlegt man sich, dass entweder genau eine Klasse mit genau 3 Objekten existieren muss, oder es genau zwei Klassen mit genau 2 Objekten geben muss.

Im Fall einer dreielementigen Klassen ist die Partition eindeutig durch die Wahl dieser Klasse beschrieben, was $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten ergibt.

Im Fall zweier zweielementinger Klassen haben wir zunächst $\binom{6}{2}$ Möglichkeiten für die Wahl der ersten der beiden, danach noch $\binom{4}{2}$ Möglichkeiten für die zweiter der beiden zweielementigen Klassen. Man muss nun beachten, dass die Partition nicht zwischen der ersten und zweiten zweielementigen Klasse unterscheidet, weswegen noch durch die möglichen Anordnungen, d.h. 2!, geteilt werden muss.

Man erhält somit:

$$4! \cdot \left(\binom{6}{3} + \frac{\binom{6}{2} \cdot \binom{4}{2}}{2!} \right) = 24 \cdot (20 + 45) = 1560.$$

Aufgabe 0.4 **0P**

Beim Poker wird bekanntlich mit 52 Karten gespielt. Jede der Karten trägt dabei einen der 13 Kartenwerte $2 < 3 < \ldots < 10 < B < D < K < A$ und eine der vier Farben $\diamondsuit < \heartsuit < \spadesuit < \clubsuit$, wobei jede der 52 Kombinationen genau einmal vorkommt. Jede Karte ist damit durch ein Paar aus Kartenwert und Farbe beschrieben, z.B. $10\spadesuit$.

Eine *Hand* eines Spielers besteht aus genau fünf verschiedenen Karten, wobei folgende Kartenkombinationen unterschieden werden:

- Royal Flush: Die fünf Karten setzen sich aus den Kartenwerten $10, B, D, K, A$ zusammen, wobei alle fünf Karten dieselbe Farbe besitzen.
  Bsp.: $10\spadesuit, B\spadesuit, D\spadesuit, K\spadesuit, A\spadesuit$.
- Straight Flush: Alle fünf Karten haben diesselbe Farbe, die Kartenwerte sind durchgehend, wobei auch $A, 2, 3, 4, 5$ erlaubt ist. Es handelt sich jedoch um keinen Royal Flush.
  Bsp.: $4\heartsuit, 5\heartsuit, 6\heartsuit, 7\heartsuit, 8\heartsuit$.
- Vierling: Vier Karten desselben Wertes.
  Bsp.: $3\clubsuit, 3\spadesuit, 3\heartsuit, 3\diamondsuit, 2\spadesuit$.
- Full House: Je drei bzw. zwei Karten desselben Wertes.
  Bsp.: $2\clubsuit, 2\spadesuit, 3\heartsuit, 3\spadesuit, 3\diamondsuit$.
- Flush: Alle fünf Karten haben dieselbe Farbe, bilden aber keinen Straight oder Royal Flush.
  Bsp.: $2\spadesuit, 5\spadesuit, 7\spadesuit, 9\spadesuit, A\spadesuit$.
- Straße: Fünf aufeinanderfolgende Kartenwerte, jedoch kein Flush. Auch hier ist $A, 2, 3, 4, 5$ zulässig.
  Bsp.: $4\spadesuit, 5\spadesuit, 6\spadesuit, 7\spadesuit, 8\heartsuit$.

- Drilling: Genau drei Karten desselben Wertes, jedoch kein Full House.
  Bsp.: $3\spadesuit, 3\heartsuit, 3\diamondsuit, 2\heartsuit, 5\spadesuit$.
- Zwei Paare: Zwei Kartenpaare desselben Wertes, jedoch kein Vierling oder Full House.
  Bsp.: $2\spadesuit, 2\heartsuit, A\clubsuit, A\diamondsuit, 3\clubsuit$.
- Ein Paar: Genau zwei Karten haben denselben Wert, es handelt sich jedoch um keine der vorangegangenen Kombinationen.
  Bsp.: $A\clubsuit, A\diamondsuit, 2\spadesuit, 3\spadesuit, 7\heartsuit$.

Royal Flush ist dabei die Hand mit dem höchsten Wert, gefolgt von Straight Flush, usw.

Eine *Hand* kann als geordnetes 5-Tupel, also eine $(52, 5)$-Kombination ohne Wiederholung, beschrieben werden, da die Reihenfolge der einzelnen Karten eines Spielers irrelevant ist.

(a) Überprüfen Sie, dass die seltenere Hand den höheren Wert hat, d.h. wie viele Möglichkeiten gibt es für einen Royal Flush, für einen Straight Flush, etc?

(b) Beim *Texas Hold'Em* hat ein Spieler selbst zwei Karten, während fünf weitere Karten allen Spielern zur Verfügung stehen. Jeder Spieler kann sich dann aus den insgesamt jeweils sieben Karten die beste *Hand* heraussuchen, d.h. die fünf Karten, die für ihn die beste Kartenkombination bilden.

   Bsp.: Sie haben die Karten $7\clubsuit, 9\spadesuit$ erhalten. Weiterhin stehen allen Spielern die Karten $5\heartsuit, 5\spadesuit, 6\diamondsuit, 8\spadesuit, 8\heartsuit$ zur Verfügung. Sie können hieraus ein Paar, Zwei Paare oder eine Straße bilden. Da die Straße den höchsten Wert von diesen drei Möglichkeiten besitzt, werden diese sieben Karten als Straße für Sie gewertet.

   i) Bestimmen Sie für die *Texas Hold'Em*-Variante die Anzahl der Möglichkeiten für einen Royal Flush. Vergleich Sie auch die relativen Häufigkeiten für einen Royal Flush in der klassichen Variante mit fünf Karten und im Texas Hold'em.

Lösungsvorschlag: Wichtig ist, dass man jede Kartenkombination nur einmal zählt. Man muss also eine eindeutige Darstellung finden. Für die meisten Fälle bietet es sich an, eine Hand wie folgt zu kodieren: (i) Zunächst legt man die geordnete Sequenz der auftretenden Kartenwerte fest; (ii) dann überlegt man sich, welche dieser Werte mehrfach auftreten; (iii) schließlich legt man die Farben fest, mit welchen die entsprechenden Kartenwerte auftreten.

a) Variante mit fünf Karten:

   - Ein Royal Flush legt die Wertesequenz eindeutig fest. Da jeder Werte genau einmal vorkommt, muss nur die Farbe der Sequenz festgelegtwerden, womit es nur vier Möglichkeiten gibt. ($\approx 0,0001539\%$)
   - Ein Straight Flush ist eindeutig durch den höchsten Wert $(5, 7, \ldots, K)$ der Wertesequenz und die Farbe festgelegt. Das ergibt $9 \cdot 4 = 36$. $(0,00139\%)$
   - Ein Vierling ist festgelegt durch zwei sortierte Kartenwerte $\binom{13}{2}$, die Position des Vierers innerhalb der sortierten Wertesequenz $\binom{2}{1}$ und schließlich durch die Farben der jeweiligen Werte $\binom{4}{4} \cdot \binom{4}{1}$: $78 \cdot 4 \cdot 2 = 624$ $(0,024\%)$
   - Das Full House ist durch zwei (sortierte) Kartenwerte $\binom{13}{2}$, der Position des Paars $\binom{2}{1}$, und den Farben $\binom{4}{3} \cdot \binom{4}{2}$ beschrieben: $78 \cdot 24 \cdot 2 = 3744$ $(0,144\%)$
   - Es gibt zunächst $\binom{13}{5}$ mögliche sortierte Sequenzen von fünf Werten; da die Sequenz nicht durchgehend sein soll, muss man die 10 möglichen Sequenzen abziehen: $1287 - 10 = 1277$. Mit den vier möglichen Farben erhält man dann 5108 $(0,19654\%)$.
   - Die Straße ist durch ihren höchsten Wert $(5, 7, \ldots, A)$ festgelegt, wobei jeder Kartenwert jede beliebige Farben tragen kann; es soll sich jedoch nicht um einen Royal Flush oder Straight Flush handeln: $10 \cdot 4^5 - 36 - 4 = 10200$ $(0,39245\%)$.
   - Ein Drilling ist durch drei Kartenwerte $\binom{13}{3}$, dem Wert des Drillings $\binom{3}{1}$, und den Farben $\binom{4}{3} \cdot 4^2$ festgelegt: $286 \cdot 4^3 \cdot 3 = 54912$ $(2,11\%)$.
   - Zwei Paare werden durch drei Kartenwerte $\binom{13}{3}$, dem Wert der einzelnen Karte $\binom{3}{1}$, und den jeweiligen Farben $\binom{4}{2}^2 \cdot \binom{4}{1}$ kodiert: $286 \cdot 144 \cdot 3 = 123552$ $(4,75\%)$.
   - Das Paar ist eindeutig beschrieben durch eine sortierte Sequenz von vier verschiedenen Werten $\binom{13}{4}$, dem Wert des Paares $\binom{4}{1}$, und den Farben $\binom{4}{2} \cdot 4^3$: $\binom{13}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot 4^3 \cdot \binom{4}{1} = 1098240$. $(42,26\%.)$

b) *Texas Hold'Em:* ($\binom{52}{7} = 133784560$).

   - Royal Flush: Der Royal Flush ist eindeutig beschrieben durch seine Farbe und die verbleibenden zwei Karten. Diese dürfen beliebig aus den 47 nicht im Royal Flush verwendeten Karten ausgewählt werden.

Man erhält somit $4 \cdot \binom{47}{2} = 4324$.

Damit ist die relative Häufigkeit $\approx 0,003232\%$ ungefähr zwanzigmal höher als bei der Variante mit nur fünf Karten.