Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 2
27. April 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 4. Mai 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Sie sind im Besitz zweier gezinkter Münzen a und b. Obwohl beide Münzen äußerlich identisch sind, zeigt a mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ Kopf wohingegen b mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ Kopf zeigt. Leider haben Sie vergessen, welche der Münzen welche ist. Um dies herauszufinden wählen Sie zufällig eine der beiden Münzen, wobei wir davon ausgehen, dass a und b gleich wahrscheinlich sind, und werfen diese n-mal.

1. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit für Kopf im i-ten Wurf $\frac{1}{2}$ ist.
2. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie im n-ten Wurf Kopf werfen, wenn alle vorherigen Würfe bereits Kopf gezeigt haben? Wie verhält sich diese Wahrscheinlichkeit für n gegen unendlich?
3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie Münze a gewählt, wenn m Ihrer n Würfe Kopf gezeigt haben?

Tutoraufgabe 2

Eine Familie von Ereignissen E_i wird paarweise unabhängig genannt, wenn für alle Indizes $i \neq j$ die Wahrscheinlichkeit $\Pr[E_i \cap E_j]$ gleich dem Produkt $\Pr[E_i] \cdot \Pr[E_j]$ ist. Beweisen oder widerlegen Sie, dass eine Familie paarweise unabhängiger Ereignisse unabhängig ist.

Tutoraufgabe 3

Da die Übungen in Diskreter Wahrscheinlichkeitstheorie aufeinander aufbauen, hängt der Lernerfolg eines Studenten unter anderem von seinen bisherigen Leistungen ab. Sollte der Student in der letzten Woche seine Hausaufgaben erfolgreich gelöst haben, so gehen wir davon aus, dass er dies auch in der aktuellen Woche mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ schafft. Ist er in der vorherigen Woche jedoch nicht erfolgreich, so sinken seine Chancen auf $\frac{1}{4}$. Beweisen Sie, dass ein Student, der in der ersten Woche mit Wahrscheinlichkeit $\frac{3}{4}$ erfolgreich ist, seine Hausaufgaben auch in Woche n mit Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^{n+1} + \frac{1}{2}$ erfolgreich bearbeitet.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Nehmen wir an, Sie züchten eine Bakterienkolonie in einer Petrischale. Von einer Generation auf die nächste kann sich jedes Bakterium entweder in zwei neue Bakterien teilen oder es stirbt. Beide Ereignisse treten mit der gleichen Wahrscheinlichkeit und unabhängig vom Verhalten der anderen Bakterien ein. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass Ihre Kolonie in der vierten Generation nicht ausgestorben ist, wenn die nullte Generation aus einer Bakterie besteht? Protokollieren Sie Ihre Rechnung.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Wir betrachten einen Hashfunktion, die n Schlüssel auf m Hashwerte abbildet. Vereinfachend gehen wir davon aus, dass der Hashwert eines Schlüssel zufällig gewählt wird, wobei jeder Hashwert gleich wahrscheinlich ist. Sollte der selbe Hashwert mehreren Schlüsseln zugeordnet werden, sprechen wir von einer Kollision. Für effizientes Hashing ist es wichtig, Kollisionen zwischen Schlüsseln zu vermeiden. Da dies für $n > m$ nicht möglich ist, betrachten wir im Folgenden stets den Fall $n \leq m$.

1. Wir nummerieren die Schlüssel von 1 bis n und bezeichnen E_i als das Ereignis, dass der i-te Schlüssel mit keinem Schlüssel eines kleineren Index kollidiert. Bestimmen Sie $\Pr[E_1]$ und $\Pr[E_i \mid \bigcap_{j=1}^{i-1} E_j]$ für $i > 1$.

2. Zeigen Sie, dass die Wahrscheinlichkeit mit der es zu keiner Kollisionen kommt mindestens $(1 - \frac{n-1}{m})^{n-1}$ ist.

3. Wie groß sollte m mindestens gewählt werden, damit beim Einfügen von 1000 Schlüsseln die Wahrscheinlichkeit einer Kollision höchstens $\frac{1}{10}$ ist?

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Ein Tutor für Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie betreut zwei Übungsgruppen, eine Vormittags und eine Nachmittags. In der Vormittagsgruppe studieren 12 der Teilnehmer Informatik und 3 Games Engineering. Die Nachmittagsgruppe besteht hingegen aus 11 Informatikstudenten, 4 Games Engineering Studenten und 2 Bioinformatikstudenten. Angenommen wir wählen zufällig und mit gleicher Wahrscheinlichkeit jeweils einen Teilnehmer aus beiden Gruppen und erhalten dabei sowohl einen Informatiker als auch einen Games Engineerer. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist der Informatikstudent aus der Vormittagsgruppe?

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Sie werfen eine Münze, die Kopf und Zahl jeweils mit der gleichen Wahrscheinlichkeit zeigt, n mal nacheinander, wobei $n \geq 2$ ist. Sei E das Ereignis, dass sowohl Kopf als auch Zahl geworfen wird und F das Ereignis, dass höchstens einmal Kopf geworfen wird. Zeigen Sie, dass die Ereignisse E und F ausschließlich für $n = 3$ unabhängig sind.

Hinweis: Die Ungleichung $2n + 2 < 2^n$ für $n > 3$ darf ohne Beweis verwendet werden.