TA5.1

- $\Pr[X > k+1 \mid X > k] = \Pr[X > 1]$,

  da X gedächtnislos $(l=1)$.

- $\Pr[X > 1] = 1 - \underbrace{\Pr[X=0]}_{=0} - \underbrace{\Pr[X=1]}_{=p} = 1-p =: \bar{p}$

- $$\Pr[X > k+1] = \overbrace{\Pr[X > k+1 \mid X > k]}^{=\bar{p}} \Pr[X > k] + \underbrace{\Pr[X > k+1 \mid X \le k]}_{=0\text{, da } [X > k+1 \wedge X \le k] = \emptyset} \Pr[X \le k]$$

  $$= \bar{p} \Pr[X > k]$$

<u>Induktiv:</u> $\Pr[X > k] = \bar{p}^k \underbrace{\Pr[X > 0]}_{=1}$

Damit: $\Pr[X = k] = \Pr[X > k-1] - \Pr[X > k]$

$$= \bar{p}^{k-1} - \bar{p}^k$$

$$= \bar{p}^{k-1}(1 - \bar{p}) = p(1-p)^{k-1}$$

$\Rightarrow \quad X \sim \mathrm{Geo}(p) \qquad (p = \Pr[X = 1])$

Anmerkung:

- Falls $\Pr[X=0] = p \in (0,1)$
- $\Pr[X>0] = 1-p = \bar{p}$

$\rightsquigarrow \Pr[X>k] = \bar{p}^{k+1}$

$\Pr[X=k] = p(1-p)^k$

$\rightsquigarrow$ Gedächtnislosigkeit legt Verteilung nicht vollständig fest. Muss noch angeben, ab wann gezählt wird.

TA 5.2

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[loop above, "\overline{p}"] \arrow[r, "p"] & 1 \arrow[loop above, "\overline{p}"] \arrow[r, "p"] & 2 \arrow[loop above, "\overline{p}"] \arrow[r] & \cdots \end{tikzcd}$$

$$\boxed{\overline{p} = 1-p}$$

(a) Nach k Schritten kann man sich nur in $\{0,1,\dots,k\}$ befinden. Wo genau, hängt von der Anzahl der Kanten nach "rechts" (= Erfolge) ab.

$$\rightsquigarrow \Pr[Z_k = n] = \binom{k}{n} p^n \, \overline{p}^{\,k-n}$$

$$\rightsquigarrow \quad Z_k \sim \mathrm{Bin}(k, p)$$

(b) $[Z_k = n \wedge Z_{k-1} < n]$

bedeutet, man betritt mit dem k-ten Schritt das erste Mal den Zustand "n". (Ersteintritt)

(Man kann hier nicht von links kommen.)

$\rightsquigarrow$ Pfade müssen von der Form

$$\bar{p}^{k_1} \; p \; \bar{p}^{k_2} \ldots \; p \; \bar{p}^{k_n} \; p$$

sein mit $\sum k_i = k-n$.

$$\rightsquigarrow \#\{(k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{N}_0^n \mid \sum_{i=1}^n k_i = k-n\} = \binom{k-n+n-1}{n-1}$$

$$\rightsquigarrow \Pr[Z_k = n \wedge Z_{k-1} < n] = \binom{k-1}{n-1} p^n \bar{p}^{k-n}$$

Alternativ:

$$\Pr[Z_k = n \wedge Z_{k-1} < n]$$

Wechsle im kten Schritt von $n-1$ nach n

$$\underset{4}{=} \Pr[Z_{k-1} = n-1] \cdot p$$

Da man in dem gegebenen Graphen nur von $n-1$ nach n gekommen sein kann in einem Schritt

$$= \binom{k-1}{n-1} p^{n-1} \, \bar{p}^{(k-1)-(n-1)} \cdot p$$

(c) $T_1, T_2, \ldots$ unabh, $T_i \sim \text{Geo}(p)$

$$N_t = \max\{n \in \mathbb{N}_0 \mid T_1 + \ldots + T_n \leq t\}$$

$\leadsto N_t = N_{\lfloor t \rfloor}$

Einfach laut vorlesen:

$T_i \hat{=}$ Anzahl der Versuche bis zum ersten Erfolg

$T_1 + \ldots + T_n \hat{=}$ Anzahl Versuche bis zum n-ten Erfolg (negativ binomialverteilt)

$N_t \hat{=}$ maximale Anzahl von Erfolgen bei (höchstens) t Versuchen.

$$[N_{\lfloor t \rfloor} = n] \;\hat{=}\; \text{In } \lfloor t \rfloor \text{ Versuchen genau } n \text{ Erfolge}$$

$$\rightsquigarrow [N_{\lfloor t \rfloor} = n] = [Z_{\lfloor t \rfloor} = n] \quad \text{siehe } a)$$

$$\rightsquigarrow \Pr[N_{\lfloor t \rfloor} = n] = \binom{\lfloor t \rfloor}{n} p^n \overline{p}^{\lfloor t \rfloor - n}$$

HA 5.3

Sei $X_n = \sum_{j=1}^{n} X_{n,j} \hat{=}$ Moleküle innerhalb t Stunden

ⓐ Erwartete Anzahl an Molekülen pro Stunde:

$$0.1 \cdot 6.02 \cdot 10^{23} = 6.02 \cdot 10^{22}$$

↑ Moleküle pro Mol (unwichtig)

⇝ Erwartete Anzahl von Molekülen in t Stunden:

$$\lambda := t \cdot 6.02 \cdot 10^{22}$$

$$\rightsquigarrow \quad \lambda \overset{!}{=} \mathbb{E}[X_n] \underset{\uparrow}{=} n\,\mathbb{E}[X_{n,j}]$$

Linearität

& $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ identisch verteilt

$$\rightsquigarrow \quad \mathbb{E}[X_{n,j}] = \frac{\lambda}{n}$$

Indikatorvariable

(b) $$S_n = \sum_{j=1}^{n} I_{[X_{n,j} \geq 1]}$$

$\hat{=}$ Anzahl von Zeitintervallen, in denen mindestens ein Molekül hergestellt wird.

Da $X_{n,1}, \dots, X_{n,n}$ unabhängig,

sind auch die Ereignisse $[X_{n,1} \geq 1], \dots, [X_{n,n} \geq 1]$ unabhängig und daher auch die zugehörigen Indikatorvariablen $I_{[X_{n,1} \geq 1]}, \dots, I_{[X_{n,n} \geq 1]}$

$\rightsquigarrow S_n \sim \mathrm{Bin}(n, p_n)$

Wegen $I_{[X_{n,j} \geq 1]}(\omega) \leq X_{n,j}(\omega)$

folgt $\quad n p_n = \mathbb{E}[S_n] \leq \mathbb{E}[X_n] = \lambda$

$$\rightsquigarrow \quad p_n \leq \frac{\lambda}{n}$$

(c) $\Pr[X_{n,j} \geq k] = p_n^k$

$$\rightsquigarrow \mathbb{E}[X_{n,j}] = \sum_{k \geq 1} \Pr[X_{n,j} \geq k]$$

$$= -1 + \sum_{k=0}^{\infty} p_n^k = -1 + \frac{1}{1-p_n}$$

$$= \frac{p_n}{1-p_n} \overset{!}{=} \frac{\lambda}{n}$$

$$\rightsquigarrow \quad p_n = \frac{\lambda/n}{1+\lambda/n}$$

($X_{n,j}$ ist auch geometrisch verteilt, zählt aber nur die Misserfolge.)

d)

$$n \cdot p_n = n \cdot \frac{\lambda/n}{1+\lambda/n} = \frac{\lambda}{1+\underbrace{\frac{\lambda}{n}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0}} \xrightarrow{n\to\infty} \lambda$$

Mit dem Hinweis gilt entsprechend der Vorlesung, dass $\operatorname{Bin}(n, p_n) \xrightarrow{n\to\infty} \operatorname{Poi}(\lambda)$, also

$$\Pr[S_n = k] \xrightarrow{n\to\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = \frac{(t\lambda_0)^k}{k!} e^{-\lambda_0 t}$$

für $\lambda = \frac{6.02 \cdot 10^{22} \cdot t}{\lambda_0}$

(e) Setze $A_n = \bigcup_{j=1}^{n} [X_{n,j} \geq 2]$

$\hat{=}$ In mindestens einem Zeitintervall entstehen ≥ 2 Moleküle

$$\Pr[A_n] \leq \sum_{j=1}^{n} \Pr[X_{n,j} \geq 2] = n \cdot p_n^2$$

$$= n \cdot \frac{\lambda^2/n^2}{\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^2} = \frac{\overbrace{\lambda^2/n}^{\xrightarrow{n\to\infty} 0}}{\underbrace{(1-\lambda/n)^2}_{\downarrow\, n\to\infty \atop 1}}$$

$$\xrightarrow{n\to\infty} 0$$

$$\Pr[X_n = k] = \Pr[X_n = k \wedge A_n] + \Pr[X_n = k \wedge \overline{A_n}]$$

$$\Pr[X_n = k \wedge A_n] \leq \Pr[A_n] \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\Pr[X_n = k \wedge \overline{A_n}] = \Pr[S_n = k \wedge \overline{A_n}] = \Pr[S_n = k] - \Pr[S_n = k \wedge A_n]$$

$$\Pr[S_n = k \wedge A_n] \leq \Pr[A_n] \xrightarrow{n \to \infty} 0$$

$$\rightsquigarrow \lim_{n \to \infty} \Pr[X_n = k] = \lim_{n \to \infty} \Pr[S_n = k] = \mathrm{Poi}(\lambda; k)$$