4. Kontextfeie Grammatiken und Sprachen

4.1 Grundlagen und ein Beispiel

Sei

$$L_= := \{w \in \{0,1\}^*;\ w \text{ enthält gleich viele 0en und 1en}\}.$$

Sei $\#_a(w)$ die Anzahl der Zeichen a in der Zeichenreihe w, d.h.

$$L_= = \{w \in \{0,1\}^*;\ \#_0(w) = \#_1(w)\}.$$

$L_=$ ist sicherlich nicht regulär (vgl. Pumping-Lemma).

Satz 65

Die (kontextfreie) Grammatik G

$$S \to \epsilon \mid T$$
$$T \to TT \mid 0T1 \mid 1T0 \mid 01 \mid 10$$

erzeugt $L_=$.

Beweis:

Sei $w \in L_=$. Betrachte für jedes Präfix x von w die Zahl

$$\#_1(x) - \#_0(x) \ .$$

Falls $w = w'w''$ für nichtleere $w', w'' \in L_=$, wende man Induktion über $|w|$ an, falls nicht, ist w von der Form $0w'1$ oder $1w'0$, und Induktion liefert wiederum die Behauptung. □

Definition (Wiederholung, siehe Def. 23)

- *Eine kontextfreie Grammatik G heißt eindeutig, wenn es für jedes $w \in L(G)$ genau einen Ableitungsbaum gibt.*
- *Eine kontextfreie Sprache L heißt eindeutig, falls es eine eindeutige kontextfreie Grammatik G mit $L = L(G)$ gibt. Ansonsten heißt L inhärent mehrdeutig.*

Die oben angegebene Grammatik für $L_=$ ist nicht eindeutig.

4.2 Die Chomsky-Normalform

Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine kontexfreie Grammatik.

Definition 66

Eine kontextfreie Grammatik G ist in Chomsky-Normalform, falls alle Produktionen eine der Formen

$$A \to a \qquad A \in V, a \in \Sigma,$$
$$A \to BC \qquad A, B, C \in V, \text{ oder}$$
$$S \to \epsilon$$

haben.

Algorithmus zur Konstruktion einer (äquivalenten) Grammatik in Chomsky-Normalform

Eingabe: Eine kontextfreie Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$

1. Wir fügen für jedes $a \in \Sigma$ zu V ein neues Nichtterminal Y_a hinzu, ersetzen in allen Produktionen a durch Y_a und fügen $Y_a \to a$ als neue Produktion zu P hinzu.

   /* linearer Zeitaufwand, Größe vervierfacht sich höchstens */

2. Wir ersetzen jede Produktion der Form

   $$A \to B_1 B_2 \cdots B_r \ (r \geq 3)$$

   durch

   $$A \to B_1 C_2,\ C_2 \to B_2 C_3, \ldots, C_{r-1} \to B_{r-1} B_r,$$

   wobei $C_2, \ldots, C_{r-1}$ neue Nichtterminale sind.

   /* linearer Zeitaufwand, Größe vervierfacht sich höchstens */

3. Für alle $C, D \in V$, $C \neq D$, mit

$$C \to^+ D,$$

füge für jede Produktion der Form

$$A \to BC \in P \text{ bzw. } A \to CB \in P$$

die Produktion

$$A \to BD \text{ bzw. } A \to DB$$

zu P hinzu.

/* quadratischer Aufwand pro A */

4. Für alle $\alpha \in V^2 \cup \Sigma$, für die $S \to^* \alpha$, füge $S \to \alpha$ zu P hinzu.
5. Streiche alle Produktionen der Form $A \to B$ aus P.

Zusammenfassend können wir festhalten:

Satz 67

Aus einer kontextfreien Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ der Größe $s(G)$ kann in Zeit $O(|V|^2 \cdot s(G))$ eine äquivalente kontextfreie Grammatik in Chomsky-Normalform der Größe $O(|V|^2 \cdot s(G))$ erzeugt werden.

4.3 Der Cocke-Younger-Kasami-Algorithmus

Der CYK-Algorithmus (oft auch Cocke-Kasami-Younger, CKY) entscheidet das Wortproblem für kontextfreie Sprachen, falls die Sprache in Form einer Grammatik in Chomsky-Normalform gegeben ist.

Eingabe: Grammatik $G = (V, \Sigma, P, S)$ in Chomsky-Normalform, $w = w_1 \dots w_n \in \Sigma^*$ mit der Länge n. O.B.d.A. $n > 0$.

Definition

$$V_{ij} := \{A \in V;\ A \to^* w_i \dots w_j\} .$$

Es ist klar, dass $w \in L(G) \Leftrightarrow S \in V_{1n}$.

Der CYK-Algorithmus berechnet alle V_{ij} induktiv nach wachsendem $j - i$. Den Anfang machen die

$$V_{ii} := \{A \in V;\ A \to w_i \in P\},$$

der rekursive Aufbau erfolgt nach der Regel

$$V_{ij} = \bigcup_{i \le k < j} \{A \in V;\ (A \to BC) \in P \wedge B \in V_{ik} \wedge C \in V_{k+1,j}\} \quad \text{für } i < j.$$

Die Korrektheit dieses Aufbaus ist klar, wenn die Grammatik in Chomsky-Normalform vorliegt.

Zur Komplexität des CYK-Algorithmus

Es werden $\frac{n^2+n}{2}$ Mengen V_{ij} berechnet. Für jede dieser Mengen werden $|P|$ Produktionen und höchstens n Werte für k betrachtet.
Der Test der Bedingung $(A \to BC) \in P \wedge B \in V_{ik} \wedge C \in V_{k+1,j}$ erfordert bei geeigneter Repräsentation der Mengen V_{ij} konstanten Aufwand. Der Gesamtaufwand ist also $O(|P|n^3)$.

Mit der gleichen Methode und dem gleichen Rechenaufwand kann man zu dem getesteten Wort, falls es in der Sprache ist, auch gleich einen Ableitungsbaum konstruieren, indem man sich bei der Konstruktion der V_{ij} nicht nur merkt, welche Nichtterminale sie enthalten, sondern auch gleich, warum sie sie enthalten, d.h. aufgrund welcher Produktionen sie in die Menge aufgenommen wurden.

4.4 Das Pumping-Lemma und Ogdens Lemma für kontextfreie Sprachen

Zur Erinnerung: Das Pumping-Lemma für reguläre Sprachen: Für jede reguläre Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in $z = uvw$ mit $|uv| \leq n$, $|v| \geq 1$ und $uv^*w \subseteq L$.

Zum Beweis haben wir $n = |Q|$ gewählt, wobei Q die Zustandsmenge eines L erkennenden DFA war. Das Argument war dann, dass beim Erkennen von z (mindestens) ein Zustand zweimal besucht werden muss und damit der dazwischen liegende Weg im Automaten beliebig oft wiederholt werden kann.

Völlig gleichwertig kann man argumentieren, dass bei der Ableitung von z mittels einer rechtslinearen Grammatik ein Nichtterminalsymbol (mindestens) zweimal auftreten muss und die dazwischen liegende Teilableitung beliebig oft wiederholt werden kann.

Genau dieses Argument kann in ähnlicher Form auch auf kontextfreie Grammatiken (in Chomsky-Normalform) angewendet werden:

Satz 68 (Pumping-Lemma)

Für jede kontextfreie Sprache L gibt es eine Konstante $n \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $z \in L$ mit $|z| \geq n$ zerlegen lässt in

$$z = uvwxy,$$

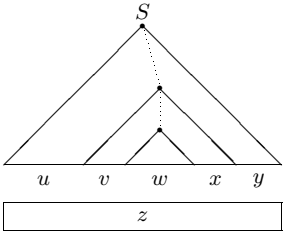
mit

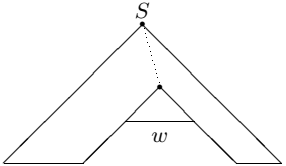
1. $|vx| \geq 1$,
2. $|vwx| \leq n$, *und*
3. $\forall i \in \mathbb{N}_0 : uv^i wx^i y \in L$.

Beweis:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L$. Wähle $n = 2^{|V|}$. Sei $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$. Wir zählen die Länge eines Pfades als die Anzahl seiner Knoten. Dann hat der Ableitungsbaum für z (ohne die letzte Stufe für die Terminale) mindestens die Tiefe $|V| + 1$, da er wegen der Chomsky-Normalform den Verzweigungsgrad 2 hat.

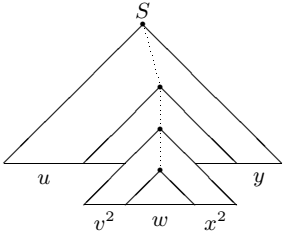
Auf einem Pfadabschnitt der Länge $\geq |V| + 1$ kommt nun mindestens ein Nichtterminal wiederholt vor. Die zwischen diesen beiden Vorkommen liegende Teilableitung kann nun beliebig oft wiederholt werden.

Beweis:





Dieser Ableitungsbaum zeigt $uwy \in L$



Dieser Ableitungsbaum zeigt $uv^2wx^2y \in L$

Beweis:
Sei $G = (V, \Sigma, P, S)$ eine Grammatik in Chomsky-Normalform mit $L(G) = L$. Wähle $n = 2^{|V|}$. Sei $z \in L(G)$ mit $|z| \geq n$. Wir zählen die Länge eines Pfades als die Anzahl seiner Knoten. Dann hat der Ableitungsbaum für z (ohne die letzte Stufe für die Terminale) mindestens die Tiefe $|V| + 1$, da er wegen der Chomsky-Normalform den Verzweigungsgrad 2 hat.

Auf einem Pfadabschnitt der Länge $\geq |V| + 1$ kommt nun mindestens ein Nichtterminal wiederholt vor. Die zwischen diesen beiden Vorkommen liegende Teilableitung kann nun beliebig oft wiederholt werden.

Um $|vwx| \leq n$ zu erreichen, muss man ein am weitesten unten liegendes Doppelvorkommen eines Nichtterminals wählen. □