Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Effiziente Algorithmen
Prof. Dr. Ernst W. Mayr
Dr. Werner Meixner

Sommersemester 2010
Übungsblatt 4
12. Mai 2010

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

Abgabetermin: 18. April 2010, 14 Uhr in die **DWT Briefkästen**

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sei $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ ein Wahrscheinlichkeitsraum mit $\Omega = [30]$ und $\Pr[x] = \frac{1}{30}$ für alle $x \in \Omega$.

1. Konstruieren Sie unabhängige Ereignisse A, B, C in W mit Wahrscheinlichkeiten $\Pr[A] = \frac{1}{2}$, $\Pr[B] = \frac{2}{3}$ und $\Pr[C] = \frac{4}{5}$.

2. Bestimmen Sie alle Ereignisse X in W mit der Eigenschaft $\Pr[X \cap X] = \Pr[X] \cdot \Pr[X]$.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Gegeben sei ein (nichtdeterministischer) Algorithmus P, der bei Aufruf einen Buchstaben aus $A = \{a, b, c\}$ mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[a] = \frac{1}{2}$ bzw. $\Pr[b] = \frac{1}{3}$ bzw. $\Pr[c] = \frac{1}{6}$ ausgibt. Wir betrachten nun den folgenden Algorithmus P_n zur Ausgabe eines Wortes $w \in A^*$ der vorgegebenen Länge $n \in \mathbb{N}$. Dabei soll die Funktion *append*(w, x) einen Buchstaben x an das Wort w (rechts) anhängen.

$i := 0$; $w := \epsilon$;
while $i \neq n$ **do** $x := P$; $w := append(w, x)$; $i := i+1$ **end**

1. Deuten Sie die Ausgabe des Algorithmus P_n für bestimmtes n adäquat als (Elementar-)Ereignis in einem Wahrscheinlichkeitsraum $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$. Beweisen Sie die Gültigkeit Ihrer Angaben.

2. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, dass für eine Ausgabe w von P_5 die Anzahl der enthaltenen a gleich 1, die Anzahl der enthaltenen b gleich 2 und die Anzahl der enthaltenen c gleich 2 ist.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Wir setzen die vorausgegangene Aufgabe fort und nehmen eine zufällige Auswahl P' eines Parameters $n \in \mathbb{N}$ mit Wahrscheinlichkeit $\Pr[n] = \frac{2}{3}(\frac{1}{3})^{n-1}$ an. Dann definieren wir einen Prozess P'' dadurch, dass zunächst P' aufgerufen wird und der ausgegebene Wert als Eingabeparameter n für den Aufruf von P_n verwendet wird.

Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Prozess P'' ein Wort w ausgibt, das genau ein a enthält. Geben Sie insbesondere den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum an.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Wir wählen nacheinander Laplace-zufällig und unabhängig Buchstaben aus der 6-elementigen Multimenge der Buchstaben des Wortes `FJALLA` aus.

Berechnen Sie Erwartungswert und Varianz der folgenden Zufallsvariablen:

$X :=$ Anzahl der Züge (mit Zurücklegen) bis zweimal `A` gezogen wurde.

Geben Sie dabei die Zufallsvariable X als Abbildung einer geeigneten Ergebnismenge Ω eines entsprechenden Wahrscheinlichkeitsraumes $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$ an.

Hinweis: *Auf den Übungsblättern in diesem Semester wird es grundsätzlich die drei Aufgabentypen Vorbereitungsaufgabe, Tutoraufgabe und Hausaufgabe geben. Die als Vorbereitung bezeichneten Aufgaben dienen der häuslichen Vorbereitung der Tutoraufgaben. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Dabei wird die Lösung der Vorbereitungsaufgaben vorausgesetzt. Die Vorbereitungsaufgaben werden in der Zentralübung unterstützt.*

Vorbereitung 1

Mit einem fairen Würfel wird genau so lange gewürfelt, bis jede der Zahlen $1, \ldots, 6$ einmal vorgekommen ist. Sei der Wert der Zufallsvariablen X durch die Anzahl der Würfe bestimmt. Berechnen Sie $\mathbb{E}[X]$ und $\mathrm{Var}[X]$!

Tutoraufgabe 1

Sei $W = \langle \Omega_n, \Pr \rangle$ mit $\Omega_n = \{a, b, c\}^n$, wobei die Wahrscheinlichkeit, dass a bzw. b bzw. c in der i-ten Komponente von $w \in \Omega_n$ auftritt jeweils $\frac{1}{2}$ bzw. $\frac{1}{3}$ bzw. $\frac{1}{6}$ seien.
Wir betrachten die Zufallsvariablen $X_a, X_b, X_c : \Omega_n \longrightarrow \mathbb{R}$, die einem Wort w entsprechend die Anzahl der enthaltenen a bzw. b bzw. c zuordnen.

1. Sind X_a, X_b, X_c unabhängig? Begründung!
2. Geben Sie die gemeinsame Dichte der Variablen X_a und X_b an!
   Geben Sie die entsprechenden Randdichten von X_a und X_b an!
3. Berechnen Sie den Erwartungswert von X_c.

Tutoraufgabe 2

In einem Schützenverein haben Anfänger beim Tontaubenschießen nur eine Trefferquote von 10%.

1. Seien $i \in \mathbb{N}_0$, $k \in \mathbb{N}$. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erzielt ein Anfänger bei k Schüssen genau i Treffer?
2. Wir wollen die Leistung von 100 Anfängern mit Noten bewerten. Note 2 bedeutet, dass der Schütze bei 2 Schüssen genau 1 Treffer erzielt. Nun lassen wir jeden der 100 Schützen (je) 2 Schussversuche machen und bezeichnen mit X die Anzahl der Schützen, die die Note 2 erhalten.

   Geben Sie die Dichtefunktion der diskreten Wahrscheinlichkeitsverteilung der Zufallsvariablen X an! Berechnen Sie den Erwartungswert von X!

Tutoraufgabe 3

Angenommen eine Maschine gehe an jedem Betriebstag mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{3}$ kaputt.

1. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Maschine 10 Tage lang hintereinander störungsfrei arbeitet?
2. Wie groß ist die erwartete Anzahl k von hintereinander folgenden störungsfreien Tagen einer Maschine, unter der Annahme, dass die Maschine am Tag $k + 1$ defekt ist?