Technische Universität München
Fakultät für Informatik
Lehrstuhl für Theoretische Informatik
Prof. Dr. Susanne Albers
Dennis Kraft, Richard Stotz

Sommersemester 2015
Übungsblatt 8
15. Juni 2015

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

*Abgabetermin: 22. Juni 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.*

Tutoraufgabe 1

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable, die mit Parameter $\lambda > 0$ exponentialverteilt ist, und sei $Y = e^{aX}$ mit $a > 0$.

1. Geben Sie die Wahrscheinlichkeiten $\Pr[X \le 1]$, $\Pr[X > 26 \mid X > 24]$ und $\Pr[X = 5]$ für $\lambda = 5$ explizit an.
2. Bestimmen Sie die Dichte $f_Y(y)$ der Zufallsvariable Y.
3. Für welche Werte von a existiert der Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$?

Tutoraufgabe 2

Eine kontinuierliche Zufallsvariable X ist logarithmisch normalverteilt mit den Parametern μ und $\sigma > 0$, wenn ihre Dichte gegeben ist durch $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \cdot \exp(-\frac{(\ln(x)-\mu)^2}{2\sigma^2})$ für positive x und für alle anderen x gilt $f_X(x) = 0$.

1. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable $Y = \ln(X)$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ.
2. Berechnen Sie den Erwartungswert von X für $\mu = 0$ und $\sigma = 1$.

Tutoraufgabe 3

Seien X und Y zwei unabhängig kontinuierliche Zufallsvariablen, die gleichverteilt auf dem Intervall $[-1, 1]$ sind. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[|X| + |Y| \le 1]$.

Hinweise: Veranschaulichen Sie sich das Ereignis $|X| + |Y| \le 1$ anhand einer Skizze.

Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Wir betrachten eine Familie von kontinuierlichen Zufallsvariablen X_1 bis X_n mit gemeinsamer Dichtefunktion $f(x_1, \ldots, x_n) = (\sqrt{(2\pi)^n} \prod_{i=1}^n \sigma_i)^{-1} \cdot \exp(-\sum_{i=1}^n \frac{(x_i-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2})$, wobei μ_i und σ_i dem jeweiligen Erwartungswert sowie der Standardabweichung von X_i entsprechen. Bestimmen Sie die Randdichten $f_{X_i}(x_i)$, und zeigen Sie, dass die Zufallsvariablen X_i normalverteilt sind mit den Parametern μ_i und σ_i.

Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Sie fahren mit der U-Bahn vom Marienplatz nach Garching. Leider bleibt Ihr Zug aufgrund einer Betriebsstörung an einem zufälligen und gleichverteilten Punkt der Strecke stehen. Da eine Weiterfahrt nicht möglich ist, entscheiden Sie sich, zu Fuß nach Garching bzw. zurück zum Marienplatz zu gehen, je nachdem welche Station näher ist. Praktischerweise verläuft Ihr Fußweg parallel zur Bahnstrecke. Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz der Strecke, die Sie zu Fuß zurücklegen müssen. Sie dürfen annehmen, dass der Gesamtweg Länge 1 in einer passenden Einheit hat.

Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sei X eine kontinuierliche Zufallsvariable mit Dichtefunktion $f_X(x)$. Bestimmen Sie ausgehend von $f_X(x)$ die Dichtefunktion der linear transformierten Zufallsvariable $Y = aX + b$ für beliebige Parameter $a, b \in \mathbb{R}$. Gehen Sie insbesondere auf den Fall $a = 0$ ein.

Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Die Übungsleitung für Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie möchte sich einen Kaffee kaufen und verlässt daher ihr Büro für $X \sim \exp(\frac{1}{5})$ Minuten. Obwohl das Postfach der Übungsleitung am Anfang der Kaffeepause noch leer ist, trifft in der Zeit bis zu ihrer Rückkehr exakt alle 10 Minuten eine neue E-Mail ein. Sei Y die Anzahl der E-Mails, die die Übungsleitung bei ihrer Rückkehr vorfindet.

1. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $\Pr[Y \geq i]$ für $i \in \mathbb{N}_0$ und ermitteln sie die Dichtefunktion von Y.

2. Zeigen Sie, dass die Zufallsvariable Y in dem Sinne gedächtnislos ist, als dass gilt $\Pr[Y \geq i + j \mid Y \geq j] = \Pr[Y \geq i]$ für beliebige $i, j \in \mathbb{N}_0$.