

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 1

Abgabe bis zum 2.5. bis 8:30.

*Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im Infler-Forum posten :).*

### Aufgabe 1.1      Abzugeben sind (a) und (b).

1P+2P

In einer aus Datenschutzgründen nicht genauer benannten Vorlesung mit 18 Übungsgruppen werden gruppenübergreifende Abgaben zugelassen. Auf einer Abgabe stehen somit jeweils zwei Gruppennummern. Sollten sich die Gruppennummern auf einer Abgabe unterscheiden, so wurde von der Übungsleitung festgelegt, dass die Abgabe in der Gruppe mit der niedrigeren Nummer zurückgegeben wird.

Wir wählen als Ergebnismenge  $\Omega = [18] \times [18]$  die möglichen Paare von Gruppennummern auf einer Abgabe. Weiterhin sei  $R_k \subseteq \Omega$  das Ereignis, dass eine Abgabe in Gruppe  $k$  zurückgegeben wird.

Nehmen Sie an, dass auf einer Abgabe jedes Paar  $(i, j) \in \Omega$  von Gruppennummern mit der gleichen W'keit auftritt, also  $\Pr[(i, j)] = 18^{-2}$ .

- (a) Bestimmen Sie  $\Pr[R_k]$  für alle  $k \in [18]$ .
- (b) Bestimmen Sie weiterhin das kleinste  $K \in [18]$ , sodass mit mindestens einer W'keit von 0.5 eine Abgabe auf eine Gruppe in  $[K]$  fällt.

### Aufgabe 1.2      Abzugeben sind (a) und (b)

3P+4P

Ein  $n$ -seitiges Objekt heißt „fair“, falls bei einem Wurf jede seiner Seiten mit W'keit  $1/n$  (nach „oben“) zeigt.

- (a) Wir betrachten zwei faire Würfel, deren Seiten mit 1, 2, 3, 4, 5, 6 beschriftet sind.

Bestimmen Sie für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  die W'keit  $s_k$ , dass bei einem Wurf dieser beiden Würfel die Summe der angezeigten Zahlen gerade  $k$  ist.

Wie hängen die Werte  $s_k$  mit den Koeffizienten des Polynoms  $(z + z^2 + \dots + z^6)^2$  zusammen?

- (b) Wir betrachten wiederum zwei faire Würfel.

Der eine Würfel ist mit den Zahlen 1, 3, 4, 5, 6, 8 beschriftet. Der zweite Würfel ist noch unbeschriftet.

Ihre Aufgabe ist es, die Seiten des zweiten Würfels so zu beschriften, dass für alle  $k \in \mathbb{N}_0$  die W'keit, dass bei einem Wurf dieser beiden Würfel deren Summe gerade  $k$  ist, ebenfalls  $s_k$  beträgt.

(Wir nehmen an, dass der zweite Würfel auch nach Beschriftung noch fair ist.)

- (c) Geben Sie ein Verfahren an, um das Problem aus (b) allgemein zu lösen. D.h. gegeben nichtnegative ganze Zahlen  $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_6$  als Beschriftung der Seiten des ersten fairen Würfels, finde – soweit möglich – eine Beschriftung  $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_6$  des zweiten fairen Würfels, sodass die Augensumme immer noch mit W'keit  $s_k$  gerade  $k$  ist.

### Exercise 1.3      Abzugeben ist (a).

3P

- (a) Betrachten Sie folgendes Experiment:

1. Drei (unterschiedliche) Objekte  $a, b, c$  werden zufällig auf drei Tore verteilt. Jede mögliche Zuteilung der Objekte auf die Tore ist dabei gleichwahrscheinlich (W'keit  $1/6$ ).
2. Sie wählen das erste Tor mit W'keit  $p_1$ , das zweite Tor mit W'keit  $p_2$  und das dritte Tor mit W'keit  $p_3$ , wobei  $0 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 1$  und  $p_1 + p_2 + p_3 = 1$ .

Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe eines geeigneten W'keitsraums  $(\Omega, \Pr[\cdot])$  (anzugeben!).

Definieren Sie die Ereignisse  $T_a, T_b, T_c$ , dass sich hinter dem gewählten Tor gerade Objekt  $a$  bzw.  $b$  bzw.  $c$  verbirgt.

Zeigen Sie dann, dass  $\Pr[T_a] = \Pr[T_b] = \Pr[T_c] = 1/3$  gilt – egal welche (zulässigen) Werte  $p_1, p_2, p_3$  haben.

(b) Betrachten Sie folgendes Experiment:

1. Es gibt drei Preisgelder  $g_1 > g_2 > g_3 \geq 0$ , die hinter drei Toren zufällig versteckt werden. Jede Zuteilung ist dabei gleichwahrscheinlich.
2. Kandidat: Wählt eines der drei Tore.
3. Quizmaster: Von den beiden nicht gewählten Toren öffnet er eines (siehe unten).
4. Kandidat: Wählt unter der verbleibenden zwei verschlossenen Toren ein Tor aus und erhält das dahinter verborgenen Preisgeld.

Der Kandidat weiss, wie sich der Quizmaster im 3. Schritt verhält. Eine Strategie für den Kandidaten ist dann eine Anweisung der Form:

“Falls der Quizmaster das Tor mit dem Preisgeld  $g_i$  öffnet, so wechsel mit W'keit  $p_i$  doch noch das Tor.”

Eine Strategie ist somit ein Tripel  $(p_1, p_2, p_3)$  von W'keiten.

- (i) Nehmen Sie an, dass der Quizmaster im 3. Schritt stets das Tor mit dem niedrigeren Preisgeld öffnet.

Welche Strategie würden Sie als Kandidat spielen, wenn Sie die W'keit maximieren wollen, dass Sie das Preisgeld  $g_1$  erhalten?

- (ii) Welches Tor würden Sie als Quizmaster im 3. Schritt wählen, wenn Sie die W'keit minimieren möchten, dass der Kandidat das Preisgeld  $g_1$  erhält? Nehmen Sie an, dass der Kandidat eine wie oben beschriebene Strategie  $(p_1, p_2, p_3)$  benutzt und Sie diese Strategie sogar kennen.

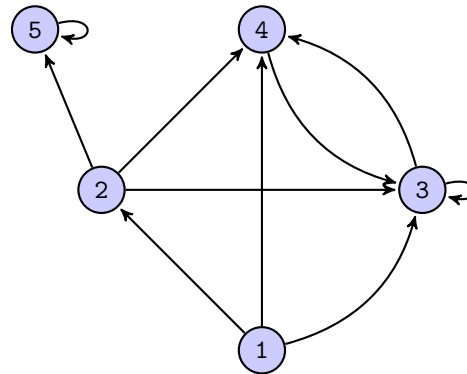
Zeigen Sie, dass der Kandidat dennoch stets seine Strategie so wählen kann, dass er mit mindestens W'keit  $1/3$  das Preisgeld  $g_1$  gewinnt.

#### Aufgabe 1.4 Abzugeben sind (a),(b),(c),(d) und (e)

1P+1P+1P+1P+3P

Der Digraph  $D$  rechts beschreibt einen Ausschnitt des Intarwebs.

- 1: TUM.de  
2: wikipedia.org  
3: icanhascheezburger.com  
4: 4chan.org  
5: youtube.com



- (a) Geben Sie die starken Zusammenhangskomponenten von  $D$  an.
- (b) Stellen Sie die Adjazenzmatrix  $A = (a_{i,j})_{i,j \in [5]}$  von  $D$  auf.  $a_{i,j}$  sollte dabei einer möglichen Kante von  $i$  nach  $j$  entsprechen.
- (c) Berechnen Sie  $A^2$ . Wie lässt sich der Eintrag  $[i, j]$  von  $A^2$  interpretieren? (und allgemein: was ist die Interpretation von  $A^n$  für  $n \in \mathbb{N}$ ?). Was bringt diese Interpretation?
- (d) Der kleine Michel (3 Jahre) surfte “zufällig” in diesem Ausschnitt des Intarwebs umher, indem er von einer Seite mit  $k$  ausgehenden Links auf einen Link mit der Wahrscheinlichkeit  $1/k$  klickt. Angenommen Michel startet auf TUM.de. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich nach genau 3 Klicks auf 4Chan.org befindet?

Mit  $d_i$  sei der Ausgangsgrad des Knotens  $i$  in  $D$  bezeichnet, z.B.  $d_3 = 2$ . Die “gewichtete Adjazenzmatrix”  $W$  ergibt sich aus  $A$ , indem die  $i$ -te Zeile  $(a_{i,1}, a_{i,2}, \dots, a_{i,5})$  mit  $1/d_i$  multipliziert wird.

- (e) Stellen Sie  $W$  für den Graphen  $D$  auf.

Wie lässt sich  $W$  verwenden, um Frage (d) für jedes Paar von Webseiten und jede feste Anzahl  $n$  von Klicks zu beantworten? Beweisen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Induktion.

- (f) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die W'keit an, dass sich Michel nach genau  $n$  Klicks auf 4chan.org befindet.