

---

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

---

Abgabetermin: 13. Juli 2015, 12:15 Uhr in die **DWT** Briefkästen.

### Tutoraufgabe 1

Der Hersteller ihrer Lieblingsschokokekse verspricht auf der Packung, dass mindestens jeder zweite Keks echte Schokolade enthält. Sie möchten diese Behauptung überprüfen und kaufen eine Packung mit vier Keksen. Dabei gehen Sie davon aus, dass jeder Keks unabhängig und mit identischer Wahrscheinlichkeit  $p$  echte Schokolade enthält. Befinden sich weniger als zwei Kekse mit echter Schokolade in der Packung, so lehnen Sie die Behauptung des Herstellers ab. Berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit erster Art. Überprüfen Sie außerdem die Alternativhypothese, dass höchstens jeder vierte Keks echte Schokolade enthält und berechnen Sie die Fehlerwahrscheinlichkeit zweiter Art.

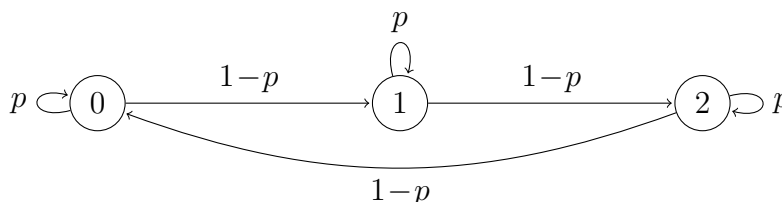
### Tutoraufgabe 2

Die Pferde  $a$ ,  $b$  und  $c$  aus Hausaufgabe 1 von Übungsblatt 1 treten erneut gegeneinander an. Von 1000 Rennen gewinnt  $a$  insgesamt 346 Rennen,  $b$  gewinnt 322 und  $c$  gewinnt 332. Untersuchen Sie die Vermutung, dass jedes Pferd mit der gleichen Wahrscheinlichkeit gewinnt, und überprüfen Sie insbesondere, ob sich die Hypothese mit einem Signifikanzniveau von 0,05 ablehnen lässt.

**Hinweis:** Sie dürfen  $\chi^2_{k,\alpha}$  mit  $k \cdot (1 - \frac{2}{9k} + z_\alpha \sqrt{\frac{2}{9k}})^3$  approximieren, wobei  $z_\alpha$  das  $\alpha$ -Quantil der Standardnormalverteilung ist.

### Tutoraufgabe 3

Wir betrachten eine Markov-Kette  $X_t$  mit  $t \geq 0$  über der Zustandsmenge  $S = \{0, 1, 2\}$ , die durch das folgende Übergangsdiagramm in Abhängigkeit eines Parameters  $0 < p < 1$  gegeben ist.



1. Bestimmen Sie die Übergangsmatrix  $P$ .
2. Geben Sie die bedingte Wahrscheinlichkeit  $\Pr[X_{t+2} = j \mid X_t = i]$  in Matrixschreibweise für alle  $i, j$  an.
3. Sei  $T_{0,2}$  die Mindestanzahl an Schritten um von Zustand 0 den Zustand 2 zu erreichen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit  $\Pr[T_{0,2} = 3]$  sowie  $\mathbb{E}[T_{0,2}]$ .

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Sie planen die Nachkommastellen von  $\pi$  als Pseudozufallsgenerator für die Zahlen von 0 bis 9 zu benutzen. Allerdings möchten Sie zunächst untersuchen, ob jede Ziffer mit der gleichen Wahrscheinlichkeit vorkommt. Führen Sie anhand der ersten 10000 Nachkommastellen einen geeigneten Hypothesentest mit Signifikanzniveau 0,05 durch.

**Hinweis:** Überlegen Sie sich eine geeignete Methode die ersten 10000 Nachkommastellen von  $\pi$  zu ermitteln. Sie dürfen auch elektronische Hilfsmittel zurate ziehen.

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

In einem Langzeittest wollen die WG-Bewohner  $a$  und  $b$  ermitteln, was der schnellste Weg zur Universität ist. Hierbei nimmt  $a$  jeden Tag die U-Bahn, während  $b$  mit dem Fahrrad fährt. Beide fahren jeden Morgen gleichzeitig los. Nach 1000 Tagen war  $a$  insgesamt 550-mal früher an der Universität als  $b$ . Kann man auf einem Signifikanzniveau von 0,05 annehmen, dass Fahrradfahren mindestens so schnell ist, wie die öffentlichen Verkehrsmittel? Geben Sie hierzu einen Binomialtest an.

### Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

Sie möchten den Erwartungswert  $\mu$  einer normalverteilte Zufallsvariable  $X$  mit Varianz 1 ausgehend von  $n$  unabhängigen Stichproben auf  $\mu = \mu_0$  gegen  $\mu = \mu_1$  testen. Wählen Sie eine geeignete Testgröße  $T$  und bestimmen Sie eine untere Schranke für  $n$  in Abhängigkeit von  $\mu_0$  und  $\mu_1$ , so dass sowohl der Fehler erster Art, als auch der Fehler zweiter Art kleiner als 0,01 sind.

### Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

Das Mittel über die Durchschnittsnoten der Klausuren im Fach Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie in den letzten zwanzig Jahre beträgt 2,95 mit einer Stichprobenvarianz von 1,94. Im Gegensatz dazu beträgt das Mittel der Wiederholungsklausuren lediglich 4,19 mit einer Stichprobenvarianz von 2,26. Angenommen die Durchschnittsnoten der regulären Klausuren und der Wiederholungsklausuren sind unabhängig und jeweils identisch normalverteilt. Außerdem gehen wir davon aus, dass beide Klausurtypen die gleiche Varianz haben. Testen Sie mit einem Signifikanzniveau von 0,05, ob beide Klausuren in der Regel gleich gut ausfallen.

$\Phi(x)$	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,500	0,504	0,508	0,512	0,516	0,520	0,524	0,528	0,532	0,536
0,1	0,540	0,544	0,548	0,552	0,556	0,560	0,564	0,567	0,571	0,575
0,2	0,579	0,583	0,587	0,591	0,595	0,599	0,603	0,606	0,610	0,614
0,3	0,618	0,622	0,626	0,629	0,633	0,637	0,641	0,644	0,648	0,652
0,4	0,655	0,659	0,663	0,666	0,670	0,674	0,677	0,681	0,684	0,688
0,5	0,691	0,695	0,698	0,702	0,705	0,709	0,712	0,716	0,719	0,722
0,6	0,726	0,729	0,732	0,736	0,739	0,742	0,745	0,749	0,752	0,755
0,7	0,758	0,761	0,764	0,767	0,770	0,773	0,776	0,779	0,782	0,785
0,8	0,788	0,791	0,794	0,797	0,800	0,802	0,805	0,808	0,811	0,813
0,9	0,816	0,819	0,821	0,824	0,826	0,829	0,831	0,834	0,836	0,839
1,0	0,841	0,844	0,846	0,848	0,851	0,853	0,855	0,858	0,860	0,862
1,1	0,864	0,867	0,869	0,871	0,873	0,875	0,877	0,879	0,881	0,883
1,2	0,885	0,887	0,889	0,891	0,893	0,894	0,896	0,898	0,900	0,901
1,3	0,903	0,905	0,907	0,908	0,910	0,911	0,913	0,915	0,916	0,918
1,4	0,919	0,921	0,922	0,924	0,925	0,926	0,928	0,929	0,931	0,932
1,5	0,933	0,934	0,936	0,937	0,938	0,939	0,941	0,942	0,943	0,944
1,6	0,945	0,946	0,947	0,948	0,949	0,951	0,952	0,953	0,954	0,954
1,7	0,955	0,956	0,957	0,958	0,959	0,960	0,961	0,962	0,962	0,963
1,8	0,964	0,965	0,966	0,966	0,967	0,968	0,969	0,969	0,970	0,971
1,9	0,971	0,972	0,973	0,973	0,974	0,974	0,975	0,976	0,976	0,977
2,0	0,977	0,978	0,978	0,979	0,979	0,980	0,980	0,981	0,981	0,982
2,1	0,982	0,983	0,983	0,983	0,984	0,984	0,985	0,985	0,985	0,986
2,2	0,986	0,986	0,987	0,987	0,987	0,988	0,988	0,988	0,989	0,989
2,3	0,989	0,990	0,990	0,990	0,990	0,991	0,991	0,991	0,991	0,992
2,4	0,992	0,992	0,992	0,992	0,993	0,993	0,993	0,993	0,993	0,994
2,5	0,994	0,994	0,994	0,994	0,994	0,995	0,995	0,995	0,995	0,995
2,6	0,995	0,995	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996	0,996
2,7	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997	0,997
2,8	0,997	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998
2,9	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,998	0,999	0,999	0,999