# TA6.1

(a) W'keit, dass Film j auf Server i abgelegt wird: $\frac{1}{100}$ unabhängig von allen anderen Filmen.

$$\rightsquigarrow \Pr[X_i = n] = \binom{200}{n} \left(\frac{1}{100}\right)^n \left(\frac{99}{100}\right)^{200-n}$$

**Beachte:** $X_1 + \dots + X_{100} = 200$, d.h. $X_1, \dots, X_n$ sind abhängig.

(b) $\Pr[X_i > 6] = 1 - \Pr[X_i \leq 6]$

**Genau:** $\Pr[X_i \leq 6] = \sum_{n=0}^{6} \binom{200}{n} \left(\frac{1}{100}\right)^n \left(\frac{99}{100}\right)^{200-n} \approx 0.9957\dots$

**Poisson:** $\Pr[X \leq 6] \approx \sum_{n=0}^{6} \frac{2^n}{n!} e^{-2} \approx 0.9954\dots$

$\leadsto \Pr[X_i > 6] \approx 0.0043$

(c) $\Pr\left[\bigvee_{i=1}^{100} X_i > 6\right] \leq \sum_{i=1}^{100} \Pr[X_i > 6]$

$= 100 \cdot \Pr[X_i > 6]$

$\approx 0.43 < 0.5$

(d) $$\Pr\left[\bigvee_{i=1}^{100} X_i > k\right] \overset{!}{\leq} 0.01$$

$$\text{IΛ}$$

$$100 \cdot \Pr[X_i > k] \overset{!}{\leq} 0.01$$

$$\Rightarrow \quad \Pr[X_i > k] \leq 10^{-4} \quad \text{ist hinreichend}$$

(e) Markov:

$$\Pr[X_i > k] = \Pr[X_i \geq k+1]$$

$$\leq \frac{\mathbb{E}[X_i]}{k+1} = \frac{2}{k+1} < 10^{-4}$$

$$\rightsquigarrow k \geq 2 \cdot 10^4 - 1$$

$$\rightsquigarrow k_{\text{Markov}} = 19\,999$$

Chebyshev:

$$\Pr[X_i > k] \le \Pr[|X_i - 2| \ge k-1]$$

$(k>2)$

$$\le \frac{2 \cdot \frac{99}{100}}{(k-1)^2} \overset{!}{<} 10^{-4}$$

$$\rightsquigarrow \quad (k-1)^2 > 2 \cdot 99 \cdot 100$$

$$\rightsquigarrow \quad k \ge 1 + \sqrt{19800} \simeq 141.7$$

$$\rightsquigarrow \quad k_{\text{chebyshev}} = 142$$

Chernoff:

$$\Pr[X_i > k] = \Pr[X_i \ge k+1] \overset{!}{=} \Pr[X_i \ge (1+\delta)\underbrace{E[X_i]}_{=2}]$$

$$\rightsquigarrow \quad k = \lceil 2\delta + 1 \rceil \text{ für } \delta > 0$$

$$\Pr[X_i \geq (1+\delta)\,\mathbb{E}[X_i]] \leq \left(\frac{e^{\delta}}{(1+\delta)^{1+\delta}}\right)^2 \overset{!}{\leq} 10^{-4}$$

$\rightsquigarrow$ CAS: $\delta \in [4.3, 4.4]$

$\rightsquigarrow$ $k = \lceil 2\delta + 1 \rceil = 10$

$\rightsquigarrow$ $k_{\text{chernoff}} = 10$

Zum Vergleich:

$\Pr[X_i \geq 9] =$ 0.0002125367725

$\Pr[X_i \geq 10] =$ 0.00004014180885

TA 6.2

a) $$G_{X_i}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} Pr[X_i = k]\, z^k$$

$$= \frac{1}{6} z^1 + \frac{1}{6} z^2 + \dots + \frac{1}{6} z^6$$

$$\left( = \frac{1}{6} \frac{z - z^7}{1-z} \quad \text{für } z \in [0,1) \right)$$

Nach VL: Für $X_1, X_2$ unabhängig gilt:

$$G_{X_1+X_2}(z) = G_{X_1}(z) \cdot G_{X_2}(z)$$

$$= G_{X_1}(z)^2$$

⑤ $G_{Y_1}(z) = \frac{1}{6}\left(z + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^8\right)$

gesucht: ZV $Y_2$, so dass $Y_1 + Y_2$ dieselbe Verteilung / Dichte wie $X_1 + X_2$ hat.

D.h. es soll $G_{Y_1+Y_2}(z) = G_{X_1+X_2}(z)$ gelten.

$\leadsto$ $G_{Y_1}(z)$ muss $G_{X_1}(z)^2$ teilen.

$\leadsto$ Polynomdivision ist eindeutig, also ist $G_{Y_2}(z)$ eindeutig mit: $G_{Y_2}(z) = \frac{1}{6}\left(z + 2z^2 + 2z^3 + z^4\right)$

$\leadsto$ $\Pr[Y_2 = 1] = \frac{1}{6}$, $\Pr[Y_2 = 2] = \frac{2}{6}$, $\Pr[Y_2 = 3] = \frac{2}{6}$, $\Pr[Y_2 = 4] = \frac{1}{6}$

## TA 6.3

- $\Omega = \{ \pi : [n] \xrightarrow{\text{bij.}} [n] \}, \ |\Omega| = n!$
- $Pr[\pi] = \frac{1}{n!}$

a) $I_x(\pi) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \pi(x) = x \quad (x \text{ ist Fixpunkt}) \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

**Damit:** $Pr[X = 0] = Pr[I_1 = 0 \wedge I_2 = 0 \wedge \dots \wedge I_n = 0]$

$$= Pr\left[\prod_{j=1}^{n} (1 - I_j) = 1\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} (1 - I_j)\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\sum_{k=0}^{n} \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S| = k}} \prod_{j \in S} (-I_j)\right] = \dots$$

$$\ldots = \mathbb{E}\left[ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=k}} \prod_{j \in S} I_j \right]$$

Linearität

$$\overset{\downarrow}{=} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=k}} \mathbb{E}\left[ \prod_{j \in S} I_j \right]$$

$$= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\sum_{\substack{S \subseteq [n] \\ |S|=k}}}_{\uparrow} \underbrace{\Pr\left[ \forall j \in S : I_j = 1 \right]}_{= \frac{(n-|S|)!}{n!} \text{ (s.u.)}}$$

$\cdot \; \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}$ Möglichkeiten, da $|S|=k$ vorgegeben

$$= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

- $[\forall j \in S : I_j = 1]$ $\quad (|S| = k)$

$= \{\pi \in \Omega \mid \forall j \in S : \pi(j) = j\}$

$\rightsquigarrow$ $\pi$ ist an den $k$ Stellen aus $S$ vorgegeben.

$\rightsquigarrow$ Auf Rest $[n] \setminus S$ ist $\pi$ eine beliebige Permutation.

$\rightsquigarrow$ $|[\forall j \in S : I_j = 1]| = (n-k)!$

$\rightsquigarrow$ $\Pr[\forall j \in S : I_j = 1] = \frac{(n-k)!}{n!}$

(b) Für $\pi \in \Omega$ sei

$$\mathrm{Fix}(\pi) := \{ x \in [n] \mid \pi(x) = x \}$$

$$[X=k] = \{ \pi \in \Omega \mid |\mathrm{Fix}(\pi)| = k \}$$

$$= \bigcup_{\substack{F \subseteq [n] \\ |F| = k}} \{ \pi \in \Omega \mid \mathrm{Fix}(\pi) = F \}$$

- Jedes $\pi$ mit $\mathrm{Fix}(\pi) = F$ bestimmt eindeutig eine fixpunktfreie Permutation auf $[n] \setminus F$.
- Und für $\mathrm{Fix}(\ ) = F$ vorgegeben, erweitert sich jede fixpunktfreie Permutation eindeutig zu einem $\pi \in \Omega$ mit $\mathrm{Fix}(\pi) = F$.

Nach ⓐ gibt es über einer $n$-elementigen Menge

$$n!\,\Pr[X=0] = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$$

fixpunktfreie Permutationen.

$$\leadsto \left|\{\pi \in \Omega \mid \mathrm{Fix}(\pi) = F\}\right| = (n-|F|)! \sum_{m=0}^{n-|F|} \frac{(-1)^m}{m!}$$

$$\leadsto \left|[X=k]\right| = \sum_{\substack{F \subseteq [n] \\ |F|=k}} \left|\{\pi \in \Omega \mid \mathrm{Fix}(\pi) = F\}\right|$$

$$= \binom{n}{k} \cdot (n-k)! \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^m}{m!}$$

$$\Rightarrow P_n[X=k] = \frac{|[X=k]|}{n!}$$

$$= \underbrace{\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}}_{=\frac{1}{k!}} \cdot \sum_{m=0}^{n-k} \frac{(-1)^m}{m!}$$

$$\overset{n\to\infty}{=} \frac{1}{k!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} = \frac{1}{k!} \cdot e^{-1}$$

für ein vorgegebenes $k$

$$= \mathrm{Poi}(1;k).$$