

---

## Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie

---

### Hausaufgabe 1 (5 Punkte)

Eine nicht leere Menge  $\mathcal{A}$  von Teilmengen einer Menge  $\Omega$  heißt *Mengenalgebra über  $\Omega$* , falls  $\mathcal{A}$  *abgeschlossen* ist gegenüber Vereinigungsbildung und Komplementbildung, d. h., falls gilt (1)  $A, B \in \mathcal{A} \implies A \cup B \in \mathcal{A}$  und (2)  $A \in \mathcal{A} \implies \overline{A} \in \mathcal{A}$ .

Eine Mengenalgebra über  $\Omega$  heißt *vollständig*, falls jede Teilmenge von  $\Omega$  in  $\mathcal{A}$  enthalten ist, d. h., falls  $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$  gilt.

1. Geben Sie 5 verschiedene Mengenalgebren über  $\Omega = \{1, 2, 3\} \subseteq \mathbb{N}$  an.
2. Seien  $n \in \mathbb{N}$  und  $|\Omega| = n \geq 2$ . Zeigen Sie, dass es eine 4-elementige Mengenalgebra über  $\Omega$  gibt! Wie viele Elemente enthält die vollständige Mengenalgebra über  $\Omega$ ?

### Lösung

1. Offenbar sind die Mengen  $\mathcal{A}_1 = \{\emptyset, \Omega\}$  und  $\mathcal{A}_2 = \mathcal{P}(\Omega)$  abgeschlossen. Es folgt, dass  $\mathcal{A}_1$  und  $\mathcal{A}_2$  (2- bzw. 8-elementige) Mengenalgebren sind.

Weitere (4-elementige) Mengenalgebren:

$$\mathcal{A}_3 = \{\{1\}, \{2, 3\}, \emptyset, \Omega\}, \mathcal{A}_4 = \{\{2\}, \{1, 3\}, \emptyset, \Omega\} \text{ und } \mathcal{A}_5 = \{\{3\}, \{1, 2\}, \emptyset, \Omega\}. \quad (3P)$$

2. Jede echte, nicht leere Teilmenge von  $\Omega$  erzeugt eine 4-elementige Mengenalgebra.  
Beispielweise erzeugt die Menge  $\{1\}$  die Algebra  $\mathcal{A} = \{\{1\}, \{2, \dots, n\}, \emptyset, \Omega\}$ . (2P)

### Hausaufgabe 2 (5 Punkte)

Seien  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  und  $A = \{2, 3, 4\}$ ,  $B = \{1, 3, 4, 5, 6\}$ .

1. Bestimmen Sie die von  $A$  und  $B$  erzeugte Algebra über  $\Omega$ , d. h., die hinsichtlich der Anzahl von Elementen kleinste Mengenalgebra  $\mathcal{A}$  über  $\Omega$ , für die  $A, B \in \mathcal{A}$  gilt.
2. Zeigen Sie, dass die Menge der Atome der von  $A$  und  $B$  erzeugten Algebra  $\mathcal{A}$  eine Partition von  $\Omega$  bilden.

Hinweis: Beachten Sie die Definition der Atome einer Booleschen Algebra aus der Vorlesung Diskrete Strukturen.

## Lösung

1. Wir bilden alle möglichen Durchschnitte von  $A, \overline{A}, B, \overline{B}$

$$\begin{aligned}A \cap B &= \{2, 3, 4\} \cap \{1, 3, 4, 5, 6\} = \{3, 4\}, \\A \cap \overline{B} &= \{2, 3, 4\} \cap \{2\} = \{2\}, \\ \overline{A} \cap B &= \{1, 5, 6\} \cap \{1, 3, 4, 5, 6\} = \{1, 5, 6\}, \\ \overline{A} \cap \overline{B} &= \emptyset.\end{aligned}$$

Seien  $K_1 = \{3, 4\}$ ,  $K_2 = \{2\}$  und  $K_3 = \{1, 5, 6\}$ . Da die Mengen  $K_i$  disjunkt sind, liefert die Vereinigung von Mengen von  $K_i$  unterschiedliche neue Mengen.

Formal: Sei  $\mathcal{A} = \{\bigcup_{i \in I} K_i; I \subseteq \{1, 2, 3\}\}$ . Dann ist  $\mathcal{A}$  eine Algebra über  $\Omega$ . (3P)

2. Offenbar bildet das System  $\{K_1, K_2, K_3\}$  eine Partition über  $\Omega$ , da die  $K_i$  paarweise disjunkt sind und  $K_1 \cup K_2 \cup K_3 = \Omega$  gilt.

Für alle Elemente  $B$  von  $\mathcal{A}$  und Mengen  $K_i$  gilt entweder  $K_i \cap B = \emptyset$  oder  $K_i \subseteq B$ . Demnach sind alle  $K_i$  Atome der Algebra  $\mathcal{A}$ . (2P)

## Hausaufgabe 3 (5 Punkte)

1. Listen Sie alle 3-elementigen Multiteilmengen von  $\Omega = \{1, 2, 3\}$  auf.
2. Wie viele 5-elementigen Multiteilmengen von  $\Omega = \{1, 2, 3, 4\}$  gibt es?

## Lösung

Wir notieren Multimengen in der Form  $\langle a, b, \dots \rangle$  im Unterschied zur Mengennotation  $\{a, b, \dots\}$ .

1.  $\langle 1, 2, 3 \rangle$ ,  
 $\langle 1, 1, 2 \rangle$ ,  $\langle 1, 1, 3 \rangle$ ,  
 $\langle 2, 2, 1 \rangle$ ,  $\langle 2, 2, 3 \rangle$ ,  
 $\langle 3, 3, 1 \rangle$ ,  $\langle 3, 3, 2 \rangle$ ,  
 $\langle 1, 1, 1 \rangle$ ,  $\langle 2, 2, 2 \rangle$ ,  $\langle 3, 3, 3 \rangle$ . (3P)

2. Die Anzahl der  $m$ -elementigen Multiteilmengen einer  $n$ -elementigen Menge beträgt  $\binom{n+m-1}{m}$ .

Für  $\Omega$  ist die gesuchte Anzahl also  $\binom{4+5-1}{5} = \binom{8}{5} = 56$ . (2P)

## Hausaufgabe 4 (5 Punkte)

1. Eine Box enthalte 1 weißen, 2 schwarze und 4 rote, gleichartige Bälle. Wenn Sie mit zwei Ziehungen (ohne Zurücklegen) genau einen weißen und einen schwarzen Ball ziehen, machen Sie den Hauptgewinn.

Wie groß schätzen Sie Ihre Gewinnchance ein? Begründen Sie Ihre Antwort!

2. Wie viele Wörter der Länge 14 gibt es, in denen genau 4 Mal der Buchstabe  $a$ , 2 Mal der Buchstabe  $b$  und 5 Mal der Buchstabe  $c$  vorkommen.

## Lösung

1. Die Wahrscheinlichkeit, in der ersten Ziehung schwarz und in der zweiten Ziehung weiß zu ziehen, ist  $\Pr[sw] = \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{1}{21}$ .

Die Wahrscheinlichkeit, in der ersten Ziehung weiß und in der zweiten Ziehung schwarz zu ziehen, ist  $\Pr[ws] = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{21}$ .

Genau einen weißen und einen schwarzen Ball zieht man also mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{21}$ . (3P)

2. Aus der Länge  $14 > 11$  folgt, dass es  $n \geq 1$  weitere Buchstaben im Alphabet geben muss.

Man wählt zunächst 4 Positionen von 14 aus, um  $a$  zu platzieren, dann 2 Positionen der restlichen 10 Positionen für den Buchstaben  $b$  und schließlich 5 Positionen für den Buchstaben  $c$ . In den verbleibenden Positionen wird dann Buchstaben aus den zusätzlichen  $n$  Buchstaben platziert.

Die gesuchte Anzahl von Wörtern ist also

$$\binom{14}{4} \cdot \binom{10}{2} \cdot \binom{8}{5} \cdot n^3 = 2522520 \cdot n^3. \quad (2P)$$

---

**Hinweis:** Die Vorbereitungsaufgaben bereiten die Tutoraufgaben vor und werden in der Zentralübung unterstützt. Tutoraufgaben werden in den Übungsgruppen bearbeitet. Hausaufgaben sollen selbstständig bearbeitet und zur Korrektur und Bewertung abgegeben werden.

---

## Vorbereitung 1

1. Machen Sie sich die begrifflichen Unterschiede klar, wenn wir von „Ereignis“, „Elementarereignis“ oder „Ergebnismenge“ sprechen.
2. Begründen Sie den begrifflichen Zusammenhang zwischen endlichen Multimengen und endlichen diskreten Wahrscheinlichkeitsräumen.

## Lösung

1. Das Ergebnis  $x$  eines Vorgangs wird beobachtet oder gemessen. Dabei wird eine Eigenschaft  $E(x)$  des Ergebnisses festgestellt

formal in der Form  $x \in E$ , wobei  $E$  eine Menge ist.

Das Ereignis wird nun als Menge  $E$  beschrieben, wobei  $E$  eine Menge von möglichen Ergebnissen ist.

Die Zusammenfassung aller möglichen (Einzel-)Ergebnisse ist die Ergebnismenge.

Jedem Ergebnis  $x$  entspricht eine kleinste Menge  $E = \{x\}$ , so dass  $x \in E$  gilt. Diese Menge ist ein Elementarereignis und wird (leider) in der Literatur häufig von  $x$  nicht unterschieden.

2. Sei  $M$  eine endliche Multimenge. Dann gibt es eine Menge  $E$  und eine Funktion  $h : E \rightarrow \mathbb{N}_0$ , so dass jedes Element  $x'$  von  $M$  ein Vorkommen eines Elementes  $x$  ist von  $E$  und  $x$  genau  $h(x)$  mal in  $M$  vorkommt, und jedes  $x \in E$  in  $M$  genau  $h(x)$  Vorkommen besitzt.

Damit ist  $\langle E, \text{Pr} \rangle$  mit  $\text{Pr}[x] = \frac{h(x)}{|M|}$  ein diskreter endlicher Wahrscheinlichkeitsraum.

## Vorbereitung 2

1. „Wenn bei 1000 Münzwürfen stets Kopf und niemals Zahl erscheint, dann ist die Wahrscheinlichkeit, beim nächsten Wurf Zahl zu werfen, gleich Null.“

Warum ist diese Aussage nicht sinnvoll!

2. Eine Box enthalte schwarze Bälle und doppelt so viele weiße Bälle. Unter der Voraussetzung, dass man 2 weiße Bälle entnommen hat (ohne Zurücklegen), werde mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{2}{5}$  bei einer dritten Ziehung ein schwarzer Ball gezogen.

Wie viele Bälle enthielt die Box zu Beginn?

(Wir setzen entsprechende Laplacesche Gleichwahrscheinlichkeit voraus).

## Lösung

1. Es gibt keinen anderen logischen Zusammenhang zwischen den Ergebnissen der Ausführung eines Experiments und der jeweils nächsten Ausführung des Experiments als denjenigen, dass wiederholte Ausführungen denselben Annahmen über die Wahrscheinlichkeit von Ergebnissen unterliegen.

Die Aussage ist auch deshalb nicht sinnvoll, weil Wahrscheinlichkeiten nicht festgestellt werden (auch nicht auf der Grundlage der Ausführung von Experimenten), sondern Annahmen über die Natur einer experimentellen Anordnung bzw. eines Algorithmus sind.

Dies steht nicht im Widerspruch dazu, dass die Ergebnisse einer wiederholten Ausführung von Experimenten auch zu Änderungen von Wahrscheinlichkeitsannahmen bzw. Räumen führen können.

2. Sei  $n$  die Anzahl der schwarzen Bälle in der Box. Dann enthält die Box  $3n$  Bälle. Nach Entnahme von 2 weißen Bällen befinden sich noch  $3n - 2$  Bälle in der Box, von denen  $n$  Stück schwarz sind.

Die Wahrscheinlichkeit, nun einen schwarzen Ball zu ziehen, ist einerseits  $\frac{n}{3n-2}$  und andererseits  $\frac{2}{5}$ . Wir Lösen die Gleichung  $\frac{n}{3n-2} = \frac{2}{5}$  nach  $n$  auf und erhalten  $n = 4$ .

Antwort: Zu Beginn enthielt die Box 12 Bälle.

## Vorbereitung 3

1. Geben Sie ein Beispiel eines diskreten Wahrscheinlichkeitsraumes an, in dem Elementarereignisse mit Wahrscheinlichkeit 0 existieren.
2. Sei  $(\Omega, \text{Pr})$  ein diskreter Wahrscheinlichkeitsraum. Für Ereignisse  $A$  und  $B$  gelte  $\text{Pr}[A] = 1$  und  $\text{Pr}[B] = \frac{1}{3}$ .  
Zeigen Sie  $\text{Pr}[A \setminus B] = \frac{2}{3}$ .

## Lösung

1. Seien  $\Omega = \{1, 2\}$  und  $\Pr[1]=1, \Pr[2]=0$ .

Dann ist  $W = \langle \Omega, \Pr \rangle$  ein endlicher diskreter Wahrscheinlichkeitsraum.

Denn offenbar gilt  $0 \leq \Pr[e] \leq 1$  für alle  $e \in \Omega$  und es gilt  $\sum_{e \in \Omega} \Pr[e] = 1$ .

2. Aus  $1 = \Pr[A] \leq \Pr[A \cup B] \leq 1$  folgt  $\Pr[A \cup B] = 1$ .

Wegen  $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$  und  $(A \setminus B) \cap B = \emptyset$  gilt

$$1 = \Pr[A \cup B] = \Pr[(A \setminus B) \cup B] = \Pr[A \setminus B] + \Pr[B] = \Pr[A \setminus B] + \frac{1}{3}.$$

Es folgt  $\Pr[A \setminus B] = \frac{2}{3}$ .

## Vorbereitung 4

Wir nehmen nun an, dass für das Ergebnis eines Experiments  $V$  das Gelten zweier Aussagen (das Eintreten zweier Ereignisse)  $A$  und  $B$  feststellbar sei. Wir beobachten bei einer bestimmten oftmalig wiederholten Durchführung von  $V$  das Eintreten von Ereignissen  $X$  und relativen Häufigkeiten  $h(X)$  wie folgt.

$$\begin{aligned} h(A \wedge B) &= \frac{1}{6}, \\ h(A \wedge \neg B) &= \frac{1}{3}, \\ h(\neg A \wedge B) &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Modellieren Sie diese Beobachtung adäquat mit einem endlichen, diskreten Wahrscheinlichkeitsraum!

## Lösung

Natürlich werden wir die Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten der entsprechenden Ereignisse modellieren. Dies impliziert zunächst, dass  $A$  und  $B$  nicht gleichzeitig als Elementarereignisse  $\{\omega\}$  mit  $\omega \in \Omega$  modelliert werden können. Dann nämlich müsste das Ereignis  $A \wedge B$  die Wahrscheinlichkeit 0 besitzen, denn Elementarereignisse sind unvereinbar.

Wir definieren die Bezeichnungen

$$o_1 = A \wedge B, \quad o_2 = A \wedge \neg B, \quad o_3 = \neg A \wedge B, \quad o_4 = \neg A \wedge \neg B$$

Da die  $o_i$  paarweise widersprüchlich sind und  $o_1 \vee o_2 \vee o_3 \vee o_4$  allgemeingültig (tautologisch) ist, setzen wir

$$\Omega = \{o_1, o_2, o_3, o_4\}.$$

Die Modellierung der Häufigkeiten als Wahrscheinlichkeiten zusammen mit der Gleichung  $\sum_{1 \leq i \leq 4} \Pr(o_i) = 1$  liefert

$$\Pr(o_1) = \frac{1}{6}, \quad \Pr(o_2) = \frac{1}{3}, \quad \Pr(o_3) = \frac{1}{3}, \quad \Pr(o_4) = \frac{1}{6}.$$

Wir bemerken, dass gilt

$$\Pr[A] = \Pr[B] = \frac{1}{2}.$$

## Tutoraufgabe 1 (Siebformel)

Wir betrachten 3 Fehlerarten  $A$ ,  $B$  und  $C$ , die bei der Fertigung eines Bauteils auftreten. Wir nehmen an, dass die 3 Fehlerarten gleich häufig vorkommen. Die Ausgangskontrolle protokolliert bei 1000 fehlerhaften Bauteilen folgende Fehler.

- 5 Bauteile haben gleichzeitig die Fehler  $A$ ,  $B$  und  $C$ ,
- 25 Bauteile haben genau die Fehler  $A$  und  $B$ ,
- 40 Bauteile haben genau die Fehler  $A$  und  $C$  und
- 50 Bauteile haben genau die Fehler  $B$  und  $C$ .

1. Wie viele von den 1000 fehlerhaften Bauteilen haben den Fehler  $B$ ?

Beschreiben Sie die Situation zunächst mit einem Venn-Diagramm.

2. Wir nehmen an, dass im Protokoll der Ausgangskontrolle die Zählung wie oben steht und allerdings wegen eines einzigen Tippfehlers die letzte Zeile wie folgt lautet:

500 Bauteile haben genau die Fehler  $B$  und  $C$ .

Wie kann man allein aus den genannten Zahlen heraus nachweisen, dass ein Tippfehler vorliegen muss?

## Lösung

Aufgabenstellungen zur Wahrscheinlichkeitstheorie sind häufig in Anwendungsform eingekleidet. Der erste Schritt besteht dann stets in einer geeigneten Abstraktion. Dieser Schritt erfordert Übung und ist i.A. keineswegs trivial.

Wir abstrahieren hier in der Form, dass wir von einer Grundmenge  $\Omega$  der Mächtigkeit 1000 von „fehlerhaften Bauteilen“ ausgehen und Fehlerarten als Teilmengen  $A$  bzw.  $B$  bzw.  $C$  von  $\Omega$  darstellen. Die Häufigkeit einer Fehlerart in der vorgelegten Auswahl ist dann gegeben durch  $|A|$  bzw.  $|B|$  bzw.  $|C|$ .

Man beachte, dass wir von konkreten, festgestellten Häufigkeiten und nicht von Annahmen über Wahrscheinlichkeiten sprechen.

1. Seien  $A$ ,  $B$  und  $C$  Teilmengen von  $\Omega$ , so dass gleiche Häufigkeit  $|A| = |B| = |C|$  gilt (*allgemeines Venn-Diagramm, z.B. mit Kreisen gleicher Radien*).

Nach Voraussetzung gilt

$$|A \cap B \cap C| = 5, |A \cap B \cap \bar{C}| = 25, |A \cap \bar{B} \cap C| = 40, |\bar{A} \cap B \cap C| = 50.$$

Es folgt

$$|A \cap B| = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \bar{C}| = 5 + 25 = 30,$$

$$|A \cap C| = |A \cap B \cap C| + |A \cap \bar{B} \cap C| = 5 + 40 = 45,$$

$$|B \cap C| = |A \cap B \cap C| + |\bar{A} \cap B \cap C| = 5 + 50 = 55.$$

Nach dem Inklusions/Exklusionsatz für Mengen (siehe auch Siebformel) rechnen wir

$$\begin{aligned} 1000 &= |A \cup B \cup C| \\ &= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|, \end{aligned}$$

und gewinnen für  $|B|$  die Gleichung

$$1000 = 3|B| - 30 - 45 - 55 + 5 = 3|B| - 125.$$

Es folgt  $|B| = 375$ .

2. Die gleiche Rechnung mit geänderten Zahlen liefert

$$|A \cap B \cap C| = 5, |A \cap B \cap \overline{C}| = 25, |A \cap \overline{B} \cap C| = 40, |\overline{A} \cap B \cap C| = 500.$$

Es folgt

$$|A \cap B| = |A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \overline{C}| = 5 + 25 = 30,$$

$$|A \cap C| = |A \cap B \cap C| + |A \cap \overline{B} \cap C| = 5 + 40 = 45,$$

$$|B \cap C| = |A \cap B \cap C| + |\overline{A} \cap B \cap C| = 5 + 500 = 505$$

und gewinnen für  $|B|$  die Gleichung

$$1000 = 3|B| - 30 - 45 - 505 + 5 = 3|B| - 575.$$

Es folgt  $|B| = 525$ .

Nun muss aber auch die folgende Ungleichung gelten:

$$|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \overline{C}| + |\overline{A} \cap B \cap C| \leq |B|.$$

Diese Ungleichung gilt aber nicht, denn

$$|A \cap B \cap C| + |A \cap B \cap \overline{C}| + |\overline{A} \cap B \cap C| = 5 + 25 + 500 = 530 > 525 = |B|.$$

Bemerkung: Man beachte, dass die Mächtigkeiten von Mengen stets nichtnegativ sind. Es kann also nicht zu jedem Zahlenbeispiel nach Art der TA 1 ein passendes Mengensystem gefunden werden.

## Tutoraufgabe 2 (Hierarchische Partitionierung)

Sei  $X$  eine endliche Menge mit  $n$  Elementen. Die Struktur der Menge sei gegeben durch geschachtelte Partitionierung wie folgt:

- $X = A_1 \uplus A_2$  mit  $|A_1| : |A_2| = 3 : 2$ .
- $A_1 = B_1 \uplus B_2 \uplus B_3$  mit  $|B_1| : |B_2| : |B_3| = 1 : 1 : 2$ .
- $A_2 = C_1 \uplus C_2 \uplus C_3$  mit  $|C_1| : |C_2| : |C_3| = 1 : 1 : 2$ .
- $C_3 = D_1 \uplus D_2$  mit  $|D_1| : |D_2| = 1 : 1$ .

1. Bestimmen Sie  $n$  so, dass alle genannten Zahlverhältnisse ganzzahlig realisierbar sind. Stellen Sie die Hierarchie der Partitionen durch eine Baumstruktur dar.
2. Nehmen Sie nun an, dass jedes Element  $x$  aus  $X$  mit gleicher Wahrscheinlichkeit ausgewählt wird und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses  $x \in D_1$ .

## Lösung

1. Berücksichtigt man alle 3 Hierarchiestufen des Baumes, dann erfüllt  $|X| = 2 \cdot 4 \cdot 5$  die Anforderungen. Allerdings reicht auch  $|X| = 4 \cdot 5$ , weil die dritte Stufe des Baumes einseitig ist.
2. Die Auswahl von  $x \in D_1$  erfordert die Auswahl von  $x \in A_2$  gefolgt von  $x \in C_3$  gefolgt von  $x \in D_1$ . Damit gilt

$$\begin{aligned} \Pr[x \in D_1] &= \Pr[x \in A_2] \cdot \Pr[x \in C_3, \text{ falls } x \in A_2] \cdot \Pr[x \in D_1, \text{ falls } x \in C_3] \\ &= \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{2}{20}. \end{aligned}$$

Man beachte, dass die Menge  $X$  auf die Blätter des Hierarchiebaumes verteilt ist.

### Tutoraufgabe 3 (Produkte von Wahrscheinlichkeiten)

Eine faire Münze ist eine Münze, die mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  „Kopf“ zeigt und mit Wahrscheinlichkeit  $1/2$  „Zahl“. Wir werfen eine solche Münze  $n$  mal, dabei erhalten wir  $k$  mal „Kopf“ und  $n - k$  mal „Zahl“.

1. Bestimmen Sie den zu  $n$  zugehörigen Ergebnisraum  $\Omega_n$ .
2. Sei  $n$  gerade. Geben Sie eine möglichst gute asymptotische Abschätzung für  $Pr[k = n/2]$  an. (Hinweis: Verwenden Sie die *Stirling-Formel*.)
3. Wie groß ist  $Pr[k \text{ gerade}]$  in Abhängigkeit von  $n$ ?
4. Wie groß ist  $Pr[\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil : \text{Ergebnis } i\text{-ter Wurf} = \text{Ergebnis } (n-i+1)\text{-ter Wurf}]$ ?

### Lösung

1. Wir können jedes Elementarereignis eines  $n$ -maligen Münzwurfs als Zeichenreihe  $x_1 \dots x_n$  der Länge  $n$  darstellen, wobei  $x_i = K$  gilt, wenn beim  $i$ -ten Wurf „Kopf“ gefallen ist, und  $x_i = Z$  sonst. Daher ist also

$$\Omega_n = \{x_1 \dots x_n ; x_i \in \{K, Z\}\},$$

i.e. die Menge aller Zeichenreihen der Länge  $n$  über dem Alphabet  $\{K, Z\}$ . Damit ist auch klar, dass  $|\Omega_n| = 2^n$  gilt.

2. Nach Voraussetzung gilt für die Wahrscheinlichkeit der Ergebnisse jedes einzelnen Münzwurfs:  $\mathcal{P}[\text{„Kopf“}] = \frac{1}{2}$  und  $\mathcal{P}[\text{„Zahl“}] = \frac{1}{2}$ .

Da wir für die Wiederholung eines Experiments keine Abhängigkeiten annehmen, gilt dann für die Wahrscheinlichkeit eines bestimmten Ergebnisses  $x = x_1 \dots x_n \in \{K, Z\}^*$  die Gleichung

$$\mathcal{P}[x] = \mathcal{P}[x_1] \cdot \dots \cdot \mathcal{P}[x_n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Seien  $k, n \in \mathbb{N}_0$  und  $n$  gerade. Dann gibt es bekanntlich nach dem Binomialsatz  $\binom{n}{k}$  Zeichenreihen aus  $\{K, Z\}^n$ , in denen  $K$  genau  $k$ -mal vorkommt.

Sei  $A_{n/2}$  das Ereignis „ $k = n/2$  bei  $n$ -maligem Werfen einer Münze“. Dies bedeutet, dass  $A_{n/2} \subseteq \Omega_n$  die Menge aller Elementarereignisse ist, so dass genau  $n/2$  mal „Kopf“ geworfen wird.

Dann gilt  $|A_{n/2}| = \binom{n}{n/2}$ .

Wir schreiben  $f \sim g$  für eine asymptotische Abschätzung  $f \in \Theta(g)$  und gewinnen mit der Stirling-Formel

$$|A_{n/2}| = \binom{n}{n/2} = \frac{n!}{((n/2)!)^2} \sim \frac{\sqrt{2\pi n} \cdot (n/e)^n}{\pi n \cdot (n/2e)^n} = 2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}$$

und somit

$$Pr[A_{n/2}] = \frac{|A_{n/2}|}{|\Omega_n|} \sim \frac{2^n \cdot \sqrt{\frac{2}{\pi n}}}{2^n} = \sqrt{\frac{2}{\pi n}}.$$



*Bemerkung:* Wir erinnern an die Stirling-Formel  $n! = \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n \cdot (1 + o(1))$  und die asymptotische Abschätzung  $\binom{2n}{n} \in \Theta\left(\frac{4^n}{\sqrt{n}}\right)$  (siehe DS). Die Abschätzung wird z.B. über den Grenzwert entsprechender Quotienten wie folgt bewiesen:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{4\pi n} \cdot \left(\frac{2n}{e}\right)^{2n} \cdot (1 + o(1))}{2\pi n \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^{2n} \cdot (1 + o(1))^2} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{2n}}{\sqrt{n}\sqrt{\pi}} \cdot \frac{\sqrt{n}}{4^n} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}. \end{aligned}$$

3. Sei  $B_n$  das Ereignis „ $k$  ist gerade bei  $n$ -maligem Werfen einer Münze“. Dann können wir durch Induktion zeigen, dass

$$|B_n| = |\overline{B_n}| = \frac{1}{2}|\Omega_n|.$$

Für  $B_1$  ist dies klar.

Sei  $|B_i| = |\overline{B_i}| = \frac{1}{2}|\Omega_i|$  für ein  $i \geq 1$ . Dann ist

$$B_{i+1} = \{x_1 \dots x_i K ; k \text{ ungerade für } x_1 \dots x_i\} \cup \{x_1 \dots x_i Z ; k \text{ gerade für } x_1 \dots x_i\}.$$

Es folgt  $|B_{i+1}| = |B_i| + |\overline{B_i}| = |\Omega_i| = \frac{1}{2}|\Omega_{i+1}|$ . Mithin gilt für alle  $n \in \mathbb{N}$

$$Pr[B_n] = \frac{\frac{1}{2}|\Omega_n|}{|\Omega_n|} = \frac{1}{2}.$$

4. Sei  $A_n$  das Ereignis „ $\forall i \leq \lceil \frac{n}{2} \rceil$  : Ergebnis  $i$ -ter Wurf = Ergebnis  $n - i + 1$ -ter Wurf bei  $n$ -maligem Werfen einer Münze“. Für gerade  $n$  ist

$$|A_n| = |\{x_1 \dots x_{n/2} x_{n/2} \dots x_1 ; x_i \in \{K, Z\}\}| = 2^{n/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil}$$

während für ungerades  $n$  gilt

$$|A_n| = |\{x_1 \dots x_{(n-1)/2} x_{\lceil n/2 \rceil} x_{(n-1)/2} \dots x_1 ; x_i \in \{K, Z\}\}| = 2 \cdot 2^{(n-1)/2} = 2^{\lceil n/2 \rceil}.$$

Daher ist

$$Pr[A_n] = \frac{|A_n|}{|\Omega_n|} = \frac{2^{\lceil n/2 \rceil}}{2^n} = \frac{1}{2^{\lceil n/2 \rceil}}.$$