Prof. Dr. Robert K. von Weizsäcker
Dr. Christoph March

Mathematische Vorübung

Aufgabe 1 (*Ableitungsregeln*)

(a) Berechnen Sie mit Hilfe der Produktregel die Ableitungen folgender Funktionen:

(i) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto f(x) = x \cdot (2 - x)$

(ii) $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, y \mapsto g(y) = y \cdot ln(y)$

(b) Berechnen Sie mit Hilfe der Quotientenregel die Ableitungen folgender Funktionen:

(i) $h : \mathbb{R}\backslash\{2\} \to \mathbb{R}, z \mapsto h(z) = \dfrac{z^2 - 4}{z - 2}$

(ii) $i : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, y \mapsto i(y) = \frac{ln(y)}{y}$

(c) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel die Ableitungen folgender Funktionen:

(i) $j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, z \mapsto j(z) = (z^3 - 2)^2$

(ii) $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto k(x) = e^{x^2 - cx}$

Aufgabe 2 (*Konkavität/Konvexität*)

Untersuchen Sie die Funktionen f und g aus Aufgabe 1a auf Konkavität bzw. Konvexität.

Aufgabe 3 (*Extrema*)

Bestimmen Sie, falls vorhanden, die Extremwertstellen (Extrema) der Funktionen f und g aus Aufgabe 1a.

Aufgabe 4 (*Reellwertige Funktionen mehrerer Veränderlicher*)

Berechnen Sie die partiellen Ableitungen folgender Funktionen und bilden Sie jeweils das totale Differential:

(a) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (x_1, x_2) \mapsto f(x_1, x_2) = 2x_1 + 4x_2$

(b) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, (K, L) \mapsto F(K, L) = K^\alpha L^\beta$

Aufgabe 5 (*Satz über implizite Funktionen*)

Berechnen Sie mit Hilfe des Satzes über implizite Funktionen $\frac{dx}{dt}$, wenn der Zusammenhang zwischen den Variablen durch die Gleichung

(a) $t^2 - 6x = 0$

(b) $x \cdot ln(t) - e^x + t = 0$

gegeben ist. Überprüfen Sie Ihre Ergebnisse, indem Sie, falls möglich, explizit nach x auflösen.