Lösung

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie – Hausaufgabe 2

Abgabe bis zum 9.5. bis 8:30.

Alle Antworten sind unter Angabe des Rechenwegs zu begründen, soweit nicht anders gefordert! Fragen gerne im infler-Forum posten :).

Aufgabe 2.1 **Abzugeben sind (a) bis (c).** **2P+2P+2P**

(a) Bestimmen Sie einen W'keitsraum $(\Omega, \Pr[])$ und paarweise verschiedene Ereignisse A_1, A_2, A_3 mit

$$\Pr[A_1] = 3/4, \quad \Pr[A_2] = 2/3, \quad \Pr[A_3] = 1/2.$$

(b) Wie (a) nur sollen A_1, A_2, A_3 unabhängig sein.

(c) Wie (a) nur soll weiterhin gelten:

$$\Pr[A_1 \cup A_2] = 4/5, \quad \Pr[A_2 \cup A_3] = 3/4.$$

Wie viele Elementarereignisse muss Ω mindestens enthalten?

Hinweis: Schauen Sie sich das Venn-Diagramm zu der Siebformel in den Folien an. Stellen Sie dann z.B. ein geeignetes lineares Gleichungssystem auf und lösen Sie es mit Hilfe eines Computer-Algebra-Systems (z.B. `wolframalpha.com` oder die in der Rechnerhalle installierten CAS.)

Lösung:

(a) Setze z.B. $A_3 \subseteq A_2 \subseteq A_1$ an, d.h.

$$A_3 = \{\omega_1\}, A_2 = \{\omega_1, \omega_2\}, A_3 = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}.$$

Dann $\Pr[\omega_2] = \Pr[A_2 \setminus A_3] = 2/3 - 1/2 = 1/6$ und $\Pr[\omega_2] = \Pr[\omega_3] = \Pr[A_1 \setminus A_2] = 3/4 - 2/3 = 1/12$.

Schließlich setze $\Pr[\omega_4] = 1 - 3/4$ und $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_4\}$.

(b) Notation: $A_i^0 := \Omega \setminus A$ und $A_i^1 := A$.

Ansatz: $\Omega = \{\omega_{000}, \ldots, \omega_{111}\}$ mit $\{\omega_{s_1 s_2 s_3}\} = A_1^{s_1} \cap A_2^{s_2} \cap A_3^{s_3}$ und $x_{s_1 s_2 s_3} = \Pr[\omega_{s_1 s_2 s_3}]$.

Nach Vorlesung: A_1, A_2, A_3 sind genau dann unabhängig, wenn

$$\Pr[A_1^{s_1} \cap A_2^{s_2} \cap A_3^{s_3}] = \Pr[A_1^{s_1}] \cdot \Pr[A_2^{s_2}] \cdot \Pr[A_3^{s_3}]\,.$$

Also muss gelten:

$$\begin{aligned}
x_{000} &= 1/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 = 1/24\\
x_{100} &= 3/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 = 1/8\\
x_{010} &= 1/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 1/12\\
x_{110} &= 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 1/4\\
x_{001} &= 1/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 = 1/24\\
x_{101} &= 3/4 \cdot 1/3 \cdot 1/2 = 1/8\\
x_{011} &= 1/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 1/12\\
x_{111} &= 3/4 \cdot 2/3 \cdot 1/2 = 1/4
\end{aligned}$$

(c) Mit der Notation aus (b).

Der Ansatz aus (a) geht jetzt nicht mehr.

Nach Aufgabenstellung soll gelten:

$$\begin{array}{rcl}
1 & = & x_{000} + \ldots + x_{111} \\
4/5 & = & x_{100} + x_{010} + x_{110} + x_{101} + x_{011} + x_{111} \\
3/4 & = & x_{010} + x_{001} + x_{011} + x_{110} + x_{101} + x_{111} \\
3/4 & = & x_{100} + x_{110} + x_{101} + x_{111} \\
2/3 & = & x_{010} + x_{110} + x_{011} + x_{111} \\
1/2 & = & x_{001} + x_{101} + x_{011} + x_{111}
\end{array}$$

Das führt dann auf:

$$\begin{array}{rcl}
x_{110} & = & 1/4 - x_{010} \\
x_{001} & = & x_{100} - 1/20 \\
x_{101} & = & 2/15 - x_{100} \\
x_{011} & = & 1/20 - x_{010} \\
x_{111} & = & x_{010} + 11/30 \\
x_{000} & = & 1 - (x_{100} + \ldots + x_{111})
\end{array}$$

Da alle Variablen Werte in $[0, 1]$ annehmen müssen, wählt man x_{100} und x_{010} minimal unter den zulässigen Werten, also $x_{100} = 1/20$ und $x_{010} = 0$:

$$\begin{array}{rcl}
x_{100} & = & 1/20 \\
x_{010} & = & 0 \\
x_{110} & = & 1/4 - x_{010} = 1/4 \\
x_{001} & = & x_{100} - 1/20 = 0 \\
x_{101} & = & 2/15 - x_{100} = 1/12 \\
x_{011} & = & 1/20 - x_{010} = 1/20 \\
x_{111} & = & x_{010} + 11/30 = 11/30 \\
x_{000} & = & 1 - (x_{100} + \ldots + x_{111}) = 1/5
\end{array}$$

Auf die Elementarereignisse ω_{010} und ω_{001} kann also auch verzichtet werden.

Aufgabe 2.2 Abzugeben sind (a) und (b). 2P+3P

Professor Evilsparza muss wieder einmal eine mündliche Prüfung abnehmen. Auf Grund gewisser interner Statistiken hat die Fakultät Professor Evilsparza gebeten, nicht nur (seiner Meinung nach) ,,einfache” Fragen zu stellen, sondern auch ,,triviale” Fragen. Evilsparza entschließt sich daher folgendes System zu benutzen, um zwischen ,,einfachen” und ,,trivialen” Fragen zu alternieren:

- Vor Beginn einer jeden Prüfung füllt er je n Streichhölzer in zwei Streichholzschachteln. Eine Schachtel ist mit EINFACH, die andere mit TRIVIAL gekennzeichnet. Er steckt beide Schachteln in seine Jackentasche.
- Vor jeder Frage greift er in seine Jackentasche und zieht zufällig eine der beiden Schachteln (jeweils mit W'keit 1/2).
  - Ist die gezogene Schachtel nicht leer, so entnimmt er aus ihr ein Streicholz, steckt die u.U. leere Schachtel zurück in seine Jackentasche und stellt schließlich eine der Schachtel entsprechende Frage.
  - Sollte die gezogene Schachtel jedoch leer sein, was schließlich der Fall sein wird, so entscheidet sich, ob der Student besteht oder nicht:

    Professor Esparza holt dann auch die zweite Schachtel aus seiner Jackentasche: Nur wenn auch diese leer ist, lässt er den Studenten bestehen; ansonsten ist der Student durchgefallen. Die Antworten des Studenten spielen also für das Bestehen der Prüfung keine Rolle, was Professor Evilsparza erlaubt, seine Nerven zu schonen, da er dem Studenten nicht aufmerksam zuhören muss.

Wir bezeichnen mit B_n das Ereignis, dass ein Student besteht, wennn Professor Evilsparza zu Beginn n Streichhözer in jeder der beiden Schachteln füllt.

(a) Beschreiben Sie obiges Experiment für $n = 1$ und $n = 2$ mit Hilfe von Markov-Diagrammen.

Zeigen Sie hiermit, dass $\Pr[B_1] = 1/2$ und $\Pr[B_2] = 3/8$.

(b) Bestimmen Sie einen geschlossenen Ausdruck für $\Pr[B_n]$ (für beliebige $n \in \mathbb{N}$).

(A0.2d) könnte hilfreich sein.)

Lösung:

(a) Hier fehlen Bilder von wunderschönen Markov-Ketten.

(b) Man wähle als Zustände $\{(a,b) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0 \mid 0 \leq a,b \leq n\} \cup \{\perp\}$.

Für $a,b > 0$ hat der Zustand (a,b) die Nachfolger $(a-1,b)$ und $(a,b-1)$ (je mit W'keit $1/2$).

Für $a = 0, b > 0$ hat $(0,b)$ die Nachfolger $\perp$ und $(0,b-1)$ (je mit W'keit $1/2$). Entsprechend für $a > 0, b = 0$.

Der Student besteht die Prüfung, wenn ein Pfad von (n,n) nach $(0,0)$ durch Evilsparza konstruiert wird; der Student besteht nicht, falls Evilsparza einen Pfad von (n,n) nach $\perp$ konstruiert.

Es gibt genau $\binom{2n}{n}$ Pfade von (n,n) nach $(0,0)$ in diesem Graphen. Jeder Pfad hat W'keit 2^{-2n}.

Somit: $\Pr[B_n] = \binom{2n}{n}2^{-2n}$.

Asymptotisch: $\binom{2n}{n} \sim 4^n(\pi n)^{-1/2}$, sodass $\Pr[B_n] \sim (\pi n)^{-1/2}$ für große n.

Aufgabe 2.3 — Abzugeben sind (a), (b.i), (c.i) und (c.ii) — 2P+3P+2P+2P

Die kleine Maxi (4 Jahre) hat bald Geburtstag. Ihr Vater Xaver möchte der Kleinen zu diesem Anlass eine CD schenken. Er weiß jedoch nicht genau, welche Musik Maxi wirklich mag. Er läd deshalb – selbstverständlich legale – Kopien von jeweils einem Song von Justus Nagetier und Kyoto Motel herunter. Er spielt beide Songs der Kleinen ein paar Mal. Bei jedem Vorspielen der Stücke klatscht Maxi **entweder** mit **oder** sie singt mit. (Nie beides, die Motorik des Kindes ist noch im Entwicklungsstadium.) Xaver spielt beide Lieder Maxi mehrmals vor und kommt schließlich zu folgenden *bedingten* W'keiten:

- Bei dem Song von Kyoto Motel klatsch die Kleine mit W'keit 0.3 mit, während sie mit W'keit 0.7 mitsingt.
- Wenn er das Lied von Justus Nagetier abspielt, so klatscht Maxi mit W'keit 0.6 mit, mit der verbleibenden W'keit von 0.4 singt sie mit.

Da Xaver mittlerweile keinen der beiden Songs mehr ertragen kann, lässt er die kleine Maxi alleine in ihrem Zimmer mit den beiden Liedern, lauscht aber weiterhin an der Tür zu ihrem Zimmer und achtet darauf, wann sie mitsingt (die Kleine hat leider auch einen leichten Sprachfehler, weswegen er nicht erkennen, welches Lied sie gerade versucht mitzusingen) und wann sie mitklatscht. Nehmen Sie an, dass Xaver die Pausen zwischen den Songs erkennen kann.

(a) Nachdem Xaver längere Zeit an der Tür gelauscht hat, kommt er wiederum zum Schluss, dass Maxi mit W'keit 0.54 zu den Liedern klatscht, während sie mit W'keit 0.46 mitsingt. Er geht weiterhin davon aus, dass Maxi in seiner Abwesenheit stets mit W'keit p den Song von Kyoto Motel abspielt, während sie mit W'keit $1-p$ den Song vom Nagetier anhört.

Bestimmen Sie, von welchem der beiden Künstler Xaver eine CD für Maxi kaufen sollte (bestimmen Sie p).

(b) Xavers Modellierung aus (a) ist leider nicht ganz korrekt. Tatsächlich verhält sich Maxi in seiner Abwesenheit wie folgt: Den ersten Song, den sie abspielt, wählt sie mit W'keit $1/2$ aus. Danach jedoch gilt, dass sie nach Justus Nagetiers Lied mit W'keit p auf Wiederholen drückt und mit W'keit $1-p$ den Song von Kyoto Motel wählt. Nach dem Song von Kyoto Motel drückt sie hingegen mit W'keit q die Wiederholentaste und wechselt mit W'keit $1-q$ zum Song von Justus.

Nehmen Sie $0 < p, q < 1$ an.

(i) Geben Sie die W'keiten, dass Maxi als i-tes Lied den Song von Kyoto Motel bzw. das Lied von Justus Nagetier anhört, an; definieren Sie dazu erst eine passende "Übergangsmatrix" (siehe A1.4). Gehen Sie entsprechend A1.4 vor, um geschlossene Formeln für diese W'keiten in Abhängigkeit von p, q und i herzuleiten. (Die Matrix kann diagonalisiert werden. Ein Eigenwert ist 1. Warum?)

(ii) Leiten Sie nun geschlossene Formeln für die W'keiten her, dass Maxi beim i-ten Lied klatscht bzw. mitsingt.

Gegen welche Werte konvergieren diese W'keiten?

Unter der Annahme, dass die von Xaver in (a) bestimmten W'keiten den Grenzwerten entsprechen, welche Werte ergeben sich für p und q? Welche CD sollte Xaver nach diesem Modell kaufen ($p < q$ oder $q > p$)?

(c) Nehmen Sie nun an, dass $p = 3/4$ und $q = 3/5$ gilt für die Modellierung aus (b).

Xaver wartet nur für drei Stücke an der Tür. Dabei hört ("beobachtet") er, dass Maxi beim ersten und zweiten Lied jeweils mitsingt und beim dritten Lied mitklatscht. Kurz, er beobachtet die Folge SSK (S für singen, K für klatschen). Er fragt sich, in welcher Folge Maxi die Lieder angehört hat. Eine "Liedfolge" kann kurz als ein endliches Wort über dem Alphabet $\{N, M\}$ beschrieben werden (N für Nagetier, M für Motel).

(i) Bestimmen Sie zunächst die bedingten W'keiten, dass unter der Beobachtungsfolge SS die Liedfolge gerade l_1l_2 war für alle $l_1l_2 \in \{N, M\}^2$.

(ii) Bestimmen Sie nun die Liedfolgen $l_1l_2l_3$, welche mit der höchsten Wahrscheinlichkeit zu der Beobachtungsfolge SSK geführt habe.

(iii) Geben Sie einen Algorithmus an, der bei gegebener Beobachtungsfolge die wahrscheinlichsten Liedfolgen bestimmt.

Lösung:

(a) Sei M das Ereignis, dass Maxi den Song von Kyoto Motel anhört. Entsprechend seien N und K, S definiert (Nagetier/-Klatschen/Singen).

Nach Aufgabenstellung gilt

$$W := \begin{pmatrix} \Pr[K \mid M] & \Pr[S \mid M] \\ \Pr[K \mid N] & \Pr[S \mid N] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}$$

und

$$\vec{v} = (\Pr[M], \Pr[N]) = (p, 1-p), \quad \vec{w} = (\Pr[K], \Pr[S]) = (0.54, 0.46).$$

Somit:

$$\Pr[K] = \Pr[K \mid M] \cdot p + \Pr[K \mid N] \cdot (1-p) \quad \text{bzw.} \quad p = \frac{\Pr[K] - \Pr[K \mid N]}{\Pr[K \mid M] - \Pr[K \mid N]} = \frac{0.54 - 0.6}{0.3 - 0.6} = \frac{6/100}{3/10} = 1/5.$$

Alternativ:

$$\vec{v} = \vec{w} \cdot W^{-1} = (0.54, 0.46) \cdot \begin{pmatrix} 0.4 & -0.7 \\ -0.6 & 0.3 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{0.12 - 0.42} = (1/5, 4/5).$$

(b) Man kann sich die Folge der Lieder als Markov-Diagramm vorstellen: Sei M_i das Ereignis, dass das i-te Lied das von Kyoto Motel ist, d.h. dass sich Maxi nach i Schritten im "Zustand M" befindet. Entsprechend N_i, K_i, S_i.

(i) Nach Aufgabenstellung gilt

$$\vec{v}_1 := (\Pr[M_1], \Pr[N_1]) = (1/2, 1/2)$$

und

$$V := \begin{pmatrix} \Pr[M_{i+1} \mid M_i] & \Pr[N_{i+1} \mid M_i] \\ \Pr[M_{i+1} \mid N_i] & \Pr[N_{i+1} \mid N_i] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q & 1-q \\ 1-p & p \end{pmatrix}.$$

Es folgt:

$$\vec{v}_{i+1} := (\Pr[M_i], \Pr[N_i]) = \vec{v}_0 \cdot V^i$$

für $i \geq 0$.

Diagonalisieren von V:

- EW:

  $0 \stackrel{!}{=} (q-x)(p-x) - (1-p)(1-q) = x^2 - (p+q)x + (p+q) - 1$ fürt auf:

  $$x_{1,2} = \frac{(p+q) \pm \sqrt{(p+q)^2 - 4(p+q) + 4}}{2} = \frac{(p+q) \pm ((p+q) - 2)}{2} \rightsquigarrow x_1 = 1, x_2 = (p+q) - 1.$$

- EV zu $x_1 = 1$:

  Da die Zeilensumme stets 1 ist in V:

  $$(1,1)^\top = V \cdot (1,1)^\top.$$

- EV zu $x_2 = (p+q) - 1$:

  $$\begin{aligned} 0 &\stackrel{!}{=} qu + (1-q)v - (p+q-1)u = (1-p)u + (1-q)v \\ 0 &\stackrel{!}{=} (1-p)u + pv - (p+q-1)v = (1-p)u + (1-q)v \end{aligned}$$

  Also z.B. $(u, v) = (\overline{q}, -\overline{p})$ für $\overline{p} = 1-p, \overline{q} = 1-q$.

- Setze

  $$T = \begin{pmatrix} 1 & \overline{q} \\ 1 & -\overline{p} \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T^{-1} = \frac{1}{\overline{p} + \overline{q}} \begin{pmatrix} \overline{p} & \overline{q} \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

  Dann

  $$T^{-1} \cdot V \cdot T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p+q-1 \end{pmatrix} =: D.$$

Somit:

$$\vec{v}_{i+1} = \vec{v}_1 \cdot T \cdot D^i \cdot T^{-1} = \frac{1}{\overline{p} + \overline{q}} \left(\overline{p} + \frac{\overline{q} - \overline{p}}{2}(p+q-1)^i, \overline{q} - \frac{\overline{q} - \overline{p}}{2}(p+q-1)^i \right).$$

(ii) Es folgt für (ii):

$$\vec{w}_i = (\Pr[K_i], \Pr[S_i]) = \vec{v}_1 \cdot V^i \cdot W.$$

Womit sich (hässliche) geschlossene Ausdrücke für $\Pr[K_i]$ und $\Pr[S_i]$ herleiten lassen.

Im Grenzwert gilt wegen $0 < p, q < 1$:

$$\lim_{i\to\infty} \vec{v}_i = \frac{1}{\overline{p}+\overline{q}}(\overline{p}, \overline{q}),$$

also

$$\lim_{i\to\infty} \vec{w}_i = \frac{1}{\overline{p}+\overline{q}}(\overline{p}, \overline{q}) \cdot W \stackrel{!}{=} (0.54, 0.46)$$

bzw.

$$\frac{1}{\overline{p}+\overline{q}}(\overline{p}, \overline{q}) = (0.54, 0.46) \cdot W^{-1} = (1/5, 4/5).$$

Somit folgt $\overline{q} > \overline{p}$, also $p > q$ (Nagetier wird bevorzugt – wenn denn die Modellierung und die Rechnung sinnvoll ist).

(c) (i) Für die Beobachtungsfolge SS kommen nur die vier Liedfolgen MM, NM, MN, NN in Frage. Man berechnet zuerst die W'keit, dass eine spezielle Liedfolge und die Beobachtungsfolge SS eintreten.

Nach Aufgabenstellung berechnet sich die W'keit, dass die Liedfolge MN und die Beobachtungsfolge SS zusammen eintreten wie folgt:

- Mit W'keit 1/2 spielt Maxi das Lied von Kyoto Motel als erstes ab. Daher singt sie mit W'keit 7/10 mit.
- Mit W'keit 2/5 wechselt sie dann von Kyoto Motel zu Justus Nagetier als zweites Lied, womit sie mit W'keit 4/10 mitsingt.
- Insgesamt:

$$1/2 \cdot 7/10 \cdot 2/5 \cdot 4/10$$

Entsprechend berechnet sich folgende Tabelle:

$l_1 l_2$	$\Pr[l_1 l_2 \wedge SS]$
MM	$\frac{1}{2}\frac{7}{10} \cdot \frac{3}{5}\frac{7}{10} = 147/1000$
NM	$\frac{1}{2}\frac{4}{10} \cdot \frac{1}{4}\frac{7}{10} = 7/200$
MN	$\frac{1}{2}\frac{7}{10} \cdot \frac{2}{5}\frac{4}{10} = 7/125$
NN	$\frac{1}{2}\frac{4}{10} \cdot \frac{3}{4}\frac{4}{10} = 3/50$

Somit:

$$\Pr[SS] = 149/500$$

und

$$\begin{aligned}
\Pr[MM \mid SS] &= \tfrac{147/1000}{149/500} = 147/298 \\
\Pr[NM \mid SS] &= \tfrac{147/1000}{149/500} = 35/298 \\
\Pr[MN \mid SS] &= \tfrac{147/1000}{149/500} = 28/149 \\
\Pr[NN \mid SS] &= \tfrac{147/1000}{149/500} = 30/149
\end{aligned}$$

(ii) Da das dritte Lied und die zugehörige Beobachtung nur vom zweiten Lied abhängt, reicht es, die wahrscheinlichsten Folgen zu SS nach M bzw. N zu betrachten, um diese dann entsprechend zu SSK fortzusetzen, also MM und NN.

Man muss somit nur die Folgen MMN, MMM, NNM, NNN betrachten.

$l_1 l_2 l_3$	$\Pr[l_1 l_2 l_3 \wedge SSK]$
MMM	$147/1000 \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{3}{10} = 0.02646$
NNM	$60/1000 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{10} = 0.0045$
MMN	$147/1000 \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{6}{10} = 0.03528$
NNN	$60/1000 \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{10} = 0.027$

Die wahrscheinlichste Liedfolge unter der Beobachtung SSK ist somit MMN.

(iii) Allgemein sei nun eine Beobachtungsfolge $b_1 b_2 \ldots b_n$ gegeben. Ziel ist es die wahrscheinlichsten Liedfolgen (Ursachenfolgen) $l_1 l_2 \ldots l_n$ zu bestimmen. Da wiederum l_{i+1} und b_{i+1} alleine von l_i abhängen, kann man iterativ für $i = 1 \ldots n$ vorgehen:

Man merkt sich die wahrscheinlichsten Ursachenfolgen $l_1 \ldots l_i$ mit $l_i = M$ bzw. $l_i = N$ samt der entsprechenden maximalen W'keit in Tabellen $U[l_i, i]$ und $P[l_i, i]$: Dann gilt:

- Es sei $w_{M,K} = 7/10$ die W'keit, dass Maxi beim Lied von Kyoto Motel klatscht. Entsprechend $w_{M,S}, w_{N,K}, w_{N,S}$.

  Dann gilt für die maximale W'keit $P[M, i+1]$:

  $$P[M, i+1] = \max(P[M, i] \cdot q \cdot w_{M,l_{i+1}}, P[N, i] \cdot (1-p) \cdot w_{M,l_{i+1}}).$$

  Entsprechend
  $$P[N, i+1] = \max(P[M, i] \cdot (1-q) \cdot w_{N,l_{i+1}}, P[N, i] \cdot p \cdot w_{N,l_{i+1}}).$$

- Der Eintrag $U[M, i+1]$ ergibt sich entsprechend auch den Einträgen $U[M, i]$ und $U[N, i]$:

  Ergibt sich $P[M, i+1]$ aus $P[M, i]$, so hänge an alle Sequenzens aus $U[M, i]$ ein M heran und trage sie in $U[M, i+1]$ ein; sollte sich $P[M, i+1]$ (auch) aus $P[N, i]$ ergeben, so verfahre entsprechend mit $U[N, i+1]$.

Effizienter ist es allerdings, zuerst nur $P[,]$ zu berechnen, um dann danach mittels Backtracking die wahrscheinlichsten Ursachen zu bestimmen: Viterbi Algorithmus.