Technische Universität München (I7) **Sommer 2013**
Prof. J. Esparza / Dr. M. Luttenberger / M. Schlund **23. Mai 2013**

Diskrete Wahrscheinlichkeitstheorie –Aufgabenblatt 6

Beachten Sie: Soweit nicht explizit angegeben, sind Ergebnisse stets zu begründen!

Hausaufgaben: Abzugeben bis zum 05.06.2013 um 12:00

Vereinfachen Sie Terme soweit wie möglich. Unnötig komplizierte Antworten werden nicht gewertet.

Aufgabe 6.1 2P+2P+2P

(a) Es seien X_1, X_2 unabhängige ZVn mit $X_i \sim \mathrm{Bin}(m_i, p)$.
Bestimmen Sie $\Pr[X_1 = k \mid X_1 + X_2 = n]$.

(b) Es seien X_1, X_2, X_3 unabhängige ZVn mit $X_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda_i)$.

(i) Bestimmen Sie $\Pr[X_1 = n_1, X_2 = n_2, X_3 = n_3 \mid X_1 + X_2 + X_3 = n]$.

(ii) Bestimmen Sie $\Pr[X_1 = n_1 \mid X_1 + X_2 + X_3 = n]$.

Aufgabe 6.2 2P+2P+2P

Seien X, Y zwei (diskrete) ZVn mit Werten in $\mathbb{R}$. Die *Kovarianz* von X und Y ist definiert als

$$\mathrm{Cov}(X, Y) := \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}[X])(Y - \mathbb{E}[Y])] = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[Y].$$

unter der Voraussetzung, dass $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[Y]$ und $\mathbb{E}[XY]$ existieren.

Aus der Definition folgt sofort, dass (1) $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$, falls X, Y unabhängig sind, und (2) $\mathrm{Var}[X] = \mathrm{Cov}(X, X)$.

(a) Zeigen Sie: Für $\mathrm{Cov}(X, Y) = 0$ gilt $\mathrm{Var}[X + Y] = \mathrm{Var}[X] + \mathrm{Var}[Y]$.

(b) Es seien X, Y unabhängig und identisch verteilt. Setze $U := X + Y$ und $V := X - Y$.

(i) Berechnen Sie $\mathrm{Cov}(U, V)$.

(ii) Nehmen Sie an, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $\Pr[X = a] =: p \in (0, 1)$ und $\Pr[X \geq a] = 1$. Zeigen Sie, dass dann U und V *nicht* unabhängig sind. *Hinweis*: Bestimmen Sie die W'keiten $\Pr[U = 2a]$ und $\Pr[U = 2a, V = 0]$.

Aufgabe 6.3 (Teil (d) befindet sich auf der nächsten Seite.) 2P+2P+2P+2P

Der FCB hat in der Saison 2012/13 in insgesamt 46 Spielen (Bundesliga und Champions-League-Endrunde) insgesamt 127 Tore erzielt, der BVB 104. Ein Spiel dauerte dabei im Mittel inklusive Nachspielzeit 92 Minuten. Wir betrachten nun das Champios-League-Finale am 25.05. unter diesen Annahmen: (1) Für beide Mannschaft gilt, dass die Anzahl der in einem vorgegebenen Zeitraum erzielten Tore die Voraussetzungen für die Poisson-Verteilung auf der Folie „Poisson-Verteilung IX" erfüllt. (2) Beide Mannschaften erzielen unabhängig von einander Tore. (3) Im Finale wird die reguläre Spielzeit inklusive Nachspielzeit 95 Minuten betragen. *Hinweis*: Rechnen Sie bei allen Aufgaben auf drei Nachkommastellen genau.

(a) Bestimmen Sie die W'keit, dass es nach 95 Minuten 3 : 2 für den BVB steht.

(b) Bestimmen Sie das wahrscheinlichste Torverhältnis nach 95 Minuten.

(c) Bestimmen Sie mit Hilfe eines Computers das kleinste k, so dass mit W'keit ≥ 0.9 innerhalb der ersten 95 Minuten insgesamt $\leq k$ Tore geschossen werden.

(d) Wir nehmen an, dass auch in einer möglichen Verlängerung die Approximation mittels der Poisson-Verteilung angewendet werden kann, wobei sich die mittlere Anzahl von Toren pro Minute bei beiden Mannschaften nicht ändert.

(i) Bestimmen Sie zunächst die W'keit, dass es nach 95 Minuten unentschieden steht, so dass es zu einer Verlängerung kommt.

(ii) Bestimmen Sie nun die W'keit, dass es nach 30-minütiger Verlängerung zu einem Elfmeterschießen kommt. Verwenden Sie hierbei die Annahme, dass die Anzahl von geschossenen Toren in disjunkten Zeitintervallen unabhängig von einander sind.

Hinweis: Stellen Sie die gesuchten W'keiten mit Hilfe von $I_0(x) := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k}}{(k!)^2}$ dar. ($I_0(x)$ wird als modifizierte Besselfunktion bezeichnet.) Werten Sie den gewonnen Ausdruck mit Hilfe eines CAS aus. (Wolfram|Alpha erkennt `I_0(x)` als modifizierte Besselfunktion.)

Tutoraufgaben: Besprechung am 04/05/06.06.2013.

Aufgabe 6.1

Es werden 200 jeweils 1GB große Filmdateien zufällig auf 100 Server verteilt. Jeder Server hat eine Kapazität von k GB, d.h., bekommt ein Server mehr als k Filme, dann „läuft er über". Sie betreiben die Serverfarm und möchten wissen, auf welche Größe Sie die Server auslegen sollten.

(a) Sei, für $i \in \{1, \ldots, 100\}$, die Zufallsvariable X_i die Anzahl der Filme auf Server i. Geben Sie die Verteilung von X_i an. *Hinweis*: Überlauf spielt in (a)–(c) noch keine Rolle.

(b) Berechnen Sie einmal $\Pr[X_i > 6]$ genau und einmal mittels der Approximation durch die Poisson-Verteilung.

(c) Sei $k = 6$. Benutzen Sie das Ergebnis aus (b) und die boolesche Ungleichung aus den Folien, um zu zeigen, dass die W'keit, dass mindestens ein Server überläuft, kleiner als 0.5 ist.

Sie möchten die W'keit, dass mindestens ein Server überläuft, auf eine W'keit deutlich unter 0.5 begrenzen. Dazu müssen Sie die Kapazität k erhöhen. Allerdings sind Rechnungen wie in (b) mühsam, weil Binomialkoeffizienten und Summen berechnet werden müssen.

(d) Die W'keit, dass *mindestens ein* Server überläuft soll auf höchstens 0.01 begrenzt werden. Benutzen Sie die boolesche Ungleichung, um eine obere Schranke für die W'keit zu bestimmen, dass ein bestimmter Server überläuft.

(e) Leiten Sie nun mit Hilfe der Abschätzungen aus der Vorlesung (Markov,Chebyshev,Chernoff) möglichst kleine Werte für Kapazität k eines Server her, so dass die in (d) bestimmte Schranke eingehalten wird.

Aufgabe 6.2

(a) Es seien X_1, X_2 unabhängige ZVn, wobei jede ZV gleichverteilt über $[6]$ ist. (Faire Würfel.)

Bestimmen Sie die erzeugende Funktion von $X_1 + X_2$ und damit die Dichte von $X_1 + X_2$.

(b) Es seien Y_1, Y_2 wiederum unabhängige ZVn. Beide nehmen nur Werte in $\mathbb{N}_0$ an. Y_1 sei dabei gleichverteilt auf $\{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$.

Falls möglich bestimmen Sie die Dichte von Y_2 so, dass $Y_1 + Y_2$ dieselbe Dichte wie $X_1 + X_2$ aus (a) besitzt.

Aufgabe 6.3

Es sei S_n die Menge aller Permutationen der Menge $[n]$. Ein $x \in [n]$ heißt Fixpunkt einer Permutation $\pi \in S_n$, falls $\pi(x) = x$. Sei $\Omega_n = S_n$ mit $\Pr_n[\pi] = \frac{1}{|S_n|} = \frac{1}{n!}$ $(\forall \pi \in \Omega_n)$. Sei X die ZV, welche die Anzahl der Fixpunkte einer Permutation $\pi \in \Omega_n$ zählt.

Beispiel: Für $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 5 & 2 \end{pmatrix}$ ist $X(\pi) = 2$, da 1 und 3 Fixpunkte von π sind: $\pi(1) = 1$ und $\pi(3) = 3$.

(a) Die Indikatorfunktion $I_x \colon \Omega_n \to \{0, 1\}$ nehme genau dann den Wert 1 an, wenn x ein Fixpunkt ist.

Zeigen Sie mit Hilfe der Siebformel, dass $\Pr_n[X = 0] = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \frac{1}{j!}$.

(b) Zeigen Sie, dass $\Pr_n[X = k] = \frac{1}{k!} \cdot \Pr_{n-k}[X = 0]$ für $0 \le k \le n$.

(c) Approximieren Sie $\Pr_n[X = k]$ für $n \to \infty$.