Aufgabe 1.2 **Abzugeben sind (a) und (b)** **2P+4P**

Ein n-seitiges Objekt heißt „fair", falls bei einem Wurf jede seiner Seiten mit W'keit $1/n$ (nach „oben") zeigt.

03.05.2012

(a) Wir betrachten zwei faire Würfel, deren Seiten mit $1, 2, 3, 4, 5, 6$ beschriftet sind.

Bestimmen Sie für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die W'keit s_k, dass bei einem Wurf dieser beiden Würfel die Summe der angezeigten Zahlen gerade k ist.

Wie hängen die Werte s_k mit den Koeffizienten des Polynoms $(z + z^2 + \ldots + z^6)^2$ zusammen?

$$\Omega = [6] \times [6] = \{ (i,j) \mid i,j \in \{1,2,\ldots,6\}\}$$

$$\Pr[\omega] = \frac{1}{36} \quad \forall \omega \in \Omega$$

$$S_k = \{ (i,j) \in \Omega \mid i+j = k\}, \quad s_k = \Pr[S_k] = \frac{|S_k|}{36}$$

$$S_0 = S_1 = S_{13} = S_{14} = \ldots = \emptyset \leadsto s_0 = s_1 = s_{13} = s_{14} = \ldots = 0$$

$$S_k = \{ (1,k-1), (2,k-2), \ldots, (k-1,1)\} \text{ falls } k-1 \in \{1,\ldots,6\}$$

$\rightsquigarrow \quad s_k = \Pr[S_k] = \frac{k-1}{36} \quad$ für $k \in \{2, \dots, 7\}$

Für $k \geq 7$: $\quad i + j = k \iff 14 - i' - j' = k$

$$i' = 7 - i$$
$$j' = 7 - j$$

$\iff i' + j' = 14 - k =: k' \in \{2, \dots, 7\}$

$\rightsquigarrow \quad |S_k| = |S_{14-k}| = (14-k) - 1 = 13 - k$ für $k \in \{7, 8, \dots, 12\}$

$\rightsquigarrow \quad s_k = \frac{13-k}{36} \quad$ für $k \in \{7, 8, \dots, 12\}$

<u>Test:</u> $\quad S_{10} = \{(4,6), (5,5), (6,4)\} \rightsquigarrow |S_{10}| = 3 = 13 - 10$

$S_{14-10} = S_4 = \{(1,3), (2,2), (3,1)\} \rightsquigarrow |S_4| = 3$

Sei $p(z) = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$

Koeffizient von z^k in $p(z)^2$? (Kurz $[z^k]\,p(z)^2$?)

$$\left(\sum_{i=1}^{6} 1 \cdot z^i\right)\left(\sum_{j=1}^{6} 1 \cdot z^j\right) = \sum_{k=2}^{12} z^k \sum_{i+j=k} 1 \cdot 1$$

$= |S_k| = 36 \cdot s_k$

(b) Wir betrachten wiederum zwei faire Würfel.

Der eine Würfel ist mit den Zahlen $1, 3, 4, 5, 6, 8$ beschriftet. Der zweite Würfel ist noch unbeschriftet.

Ihre Aufgabe ist es, die Seiten des zweiten Würfels so zu beschriften, dass für alle $k \in \mathbb{N}_0$ die W'keit, dass bei einem Wurf dieser beiden Würfel deren Summe gerade k ist, ebenfalls s_k beträgt.

(Wir nehmen an, dass der zweite Würfel auch nach Beschriftung noch fair ist.)

$$\underline{\Omega} = \{1,3,4,5,6,8\} \times \{ (\underset{\text{Seite 1}}{s_1}, \underset{\text{Wert auf Seite 1}}{w_1}), \ldots, (s_6, w_6) \}, \quad Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{36}$$

$$\rightsquigarrow \quad \hat{S}_k = \{ (i, (s_j, w_j)) \in \Omega \mid i + w_j = k \}$$

$$\rightsquigarrow \quad \text{Soll gelten} \quad |\hat{S}_k| = |S_k|$$

$$= \begin{cases} k-1 & , k \in \{2, 3, \ldots, 7\} \\ 13-k & , k \in \{7, 8, \ldots, 12\} \\ 0 & , \text{sonst} \end{cases}$$

Ohne Einschränkung: $w_1 \leq w_2 \leq \ldots \leq w_6 \quad (*)$

$\rightsquigarrow \; |\hat{S}_2| = |S_2| = 1$

$\rightsquigarrow$ Wegen $(*)$ muss $\hat{S}_2 = \{(1, (s_1, w_1))\}$ gelten,

also $w_1 = 1 \wedge w_2 > 1$.

$|\hat{S}_3| = |S_3| = 2$

Mögliche Elementarereignisse: $(1, (s_2, w_2)), \; (1, (s_3, w_3)), \ldots$

$\cancel{(3, (s_1, \underset{1}{w_1}))}$

$\rightsquigarrow \; w_2 = w_3 = 2 \wedge w_4 > 2$

$|\hat{S}_4| = |S_4| = 3$

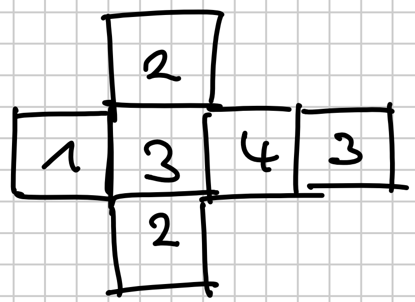
Mögliche Elementarereignisse: $(1, (s_4, w_4)), \ldots$

$(3, (s_1, w_1))$

$\leadsto \quad W_4 = W_5 = 3 \quad \wedge \quad W_6 > 3$

$\leadsto$ Da $|\hat{S}_{12}| = |S_{12}| = 1$ muss $W_6 = 4$ gelten

$\leadsto$



Koeffizient α_i zählt, wie viele Seiten des Würfels mit i beschriftet sind.

Lösung korrekt?

Setze $q(z) = z + z^3 + z^4 + z^5 + z^6 + z^8 = \sum_{i \in \mathbb{N}_0} \alpha_i z^i$

und $r(z) = z + 2z^2 + 2z^3 + z^4 = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \beta_j z^j$

$$q(z)\, r(z) = \sum_{k \in \mathbb{N}_0} z^k \underbrace{\sum_{i+j=k} \alpha_i \beta_j}_{\overset{!}{=:} S_k} \overset{!}{=} p(z)^2$$

(c) Geben Sie ein Verfahren an, um das Problem aus (b) allgemein zu lösen. D.h. gegeben nichtnegative ganze Zahlen $a_1 \leq a_2 \leq \ldots \leq a_6$ als Beschriftung der Seiten des ersten fairen Würfels, finde – soweit möglich – eine Beschriftung $b_1 \leq b_2 \leq \ldots \leq b_6$ des zweiten fairen Würfels, sodass die Augensumme immer noch mit W'keit s_k gerade k ist.

Setze $q(z) = z^{a_1} + z^{a_2} + \ldots + z^{a_6} = \sum \alpha_i z^i$

Falls $q(z)$ kein Teiler von $p(z)^2$ ist, dann gibt es keine gültige Beschriftung b_i.

$\leadsto$ Sonst sei $r(z) := \frac{p(z)^2}{q(z)}$ mit $r(z) = \sum_{j \in \mathbb{N}_0} \beta_j z^j$.

Überprüfe noch, ob $r(z)$ gültige Beschriftung darstellt:

- $\beta_j \geq 0$
- $r(1) = \sum \beta_j = 6$

<u>Anmerkung:</u> Faktorisiere $p(z)$ über $\mathbb{R}$:

$$p(z) = z\,(1 + z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5)$$

Sei $z \neq 1$

$$\overset{?}{=} z\,\frac{1-z^6}{1-z} = z\,\underbrace{\frac{1-z^3}{1-z}}_{=\,1+z+z^2}\,\underbrace{(1+z^3)}_{\text{Nst}:\,-1\ \rightsquigarrow\ (1+z)(1-z+z^2)}$$

$$= z\,(1+z)(1+z+z^2)(1-z+z^2)$$

keine Nst in $\mathbb{R}$

$\rightsquigarrow$

$$p(z)^2 = z^2\,(1+z)^2\,(1+z+z^2)^2\,(1-z+z^2)^2$$

$\rightsquigarrow$ Gültige Beschriftungen $q(z), r(z)$ müssen sich also aus diesen Polynomen zusammen setzen

$\leadsto$ mit $q(1) = r(z) = 1 \cdot 2 \cdot 3$

folgt weiterhin, dass sowohl $q(z)$ als auch $r(z)$

je einen Faktor $\underbrace{(1+z+z^2)}_{\overset{z=1}{=}\ 3}$ und $\underbrace{(1+z)}_{\overset{z=1}{=}\ 2}$ $\left[\text{da } z\big|_{z=1} = 1, \quad 1-z+z^2\big|_{z=1} = 1 \right]$

enthalten müssen.

$\leadsto$ Wenn man noch verlangt, dass nur positive Werte auf den Würfeln stehen,

muss auch z als Faktor in $q(z)$ und $r(z)$ vorkommen

$\leadsto$ Es gibt nur die Möglichkeiten: (1) $q(z) = r(z) = p(z)$

oder (2) $q(z)$, $r(z)$ wie in (b)

Exercise 1.3 **Abzugeben ist (a).** **3P**

(a) Betrachten Sie folgendes Experiment:

1. Drei (unterschiedliche) Objekte a, b, c werden zufällig auf drei Tore verteilt. Jede mögliche Zuteilung der Objekte auf die Tore ist dabei gleichwahrscheinlich (W'keit 1/6).
2. Sie wählen das erste Tor mit W'keit p_1, das zweite Tor mit W'keit p_2 und das dritte Tor mit W'keit p_3, wobei $0 \leq p_1, p_2, p_3 \leq 1$ und $p_1 + p_2 + p_3 = 1$.

Beschreiben Sie das Experiment mit Hilfe eines geeigneten W'keitsraums $(\Omega, \Pr[])$ (anzugeben!).

Definieren Sie die Ereignisse T_a, T_b, T_c, dass sich hinter dem gewählten Tor gerade Objekt a bzw. b bzw. c verbirgt.

Zeigen Sie dann, dass $\Pr[T_a] = \Pr[T_b] = \Pr[T_c] = 1/3$ gilt – egal welche (zulässigen) Werte p_1, p_2, p_3 haben.

$$\Omega = \{ (\pi, t) \mid \pi : \{a, b, c\} \xrightarrow{\text{bij}} [3],\ t \in [3] \}$$

$$\leadsto \Pr[(\pi, t)] = \frac{1}{6} \cdot p_t \quad \forall (\pi, t) \in \Omega$$

$$T_a = \{ (\pi, t) \in \Omega \mid \pi(a) = t \}$$

$$= \bigcup_{i \in [3]} \{ (\pi, i) \in \Omega \mid \pi(a) = i \}$$

Für jedes $i \in [3]$ genau 2 Bijektionen π mit $\pi(a) = i$

$$\leadsto \Pr[T_a] = \sum_{i=1}^{3} \Pr[\{(\pi, i) \in \Omega \mid \pi(a) = i\}]$$

$$= \sum_{i=1}^{3} 2 \cdot \frac{1}{6} p_i = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{3} p_i = \frac{1}{3}.$$

(b) Betrachten Sie folgendes Experiment:

1. Es gibt drei Preisgelder $g_1 > g_2 > g_3 \geq 0$, die hinter drei Toren zufällig versteckt werden. Jede Zuteilung ist dabei gleichwahrscheinlich.
2. Kandidat: Wählt eines der drei Tore.
3. Quizmaster: Von den beiden nicht gewählten Toren öffnet er eines (siehe unten).
4. Kandidat: Wählt unter der verbleibenden zwei verschlossenen Toren ein Tor aus und erhält das dahinter verborgenen Preisgeld.

Der Kandidat weiss, wie sich der Quizmaster im 3. Schritt verhält. Eine Strategie für den Kandidaten ist dann eine Anweisung der Form:

"Falls der Quizmaster das Tor mit dem Preisgeld g_i öffnet, so wechsel mit W'keit p_i doch noch das Tor."

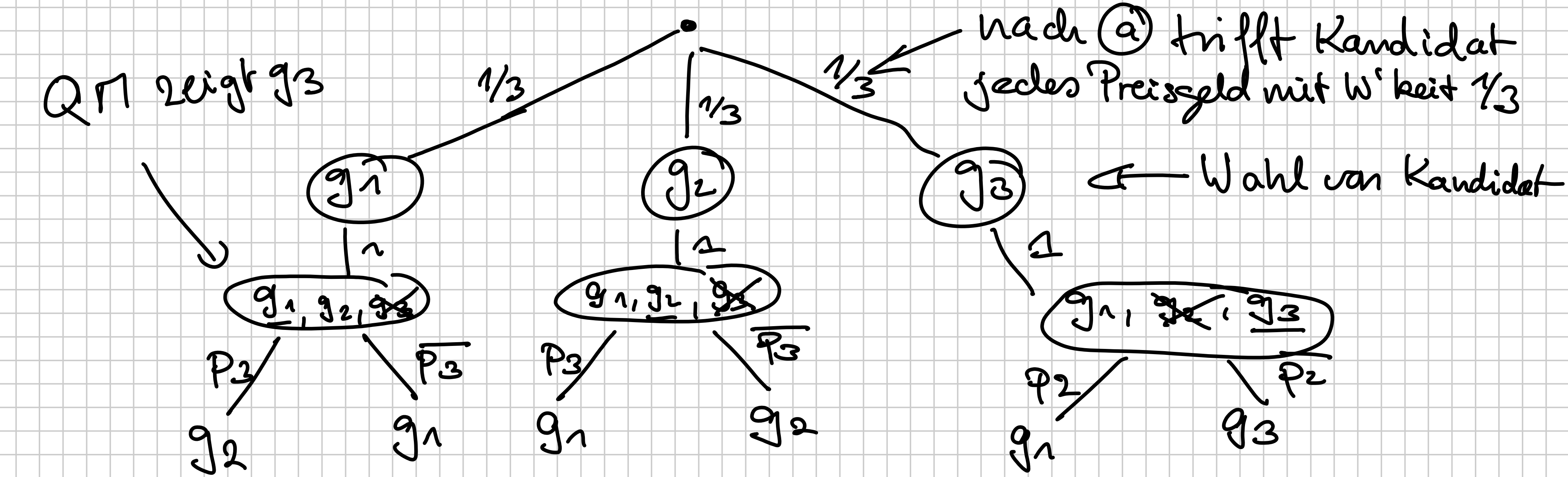
Eine Strategie ist somit ein Tripel (p_1, p_2, p_3) von W'keiten.

(i) Nehmen Sie an, dass der Quizmaster im 3. Schritt stets das Tor mit dem niedrigeren Preisgeld öffnet.

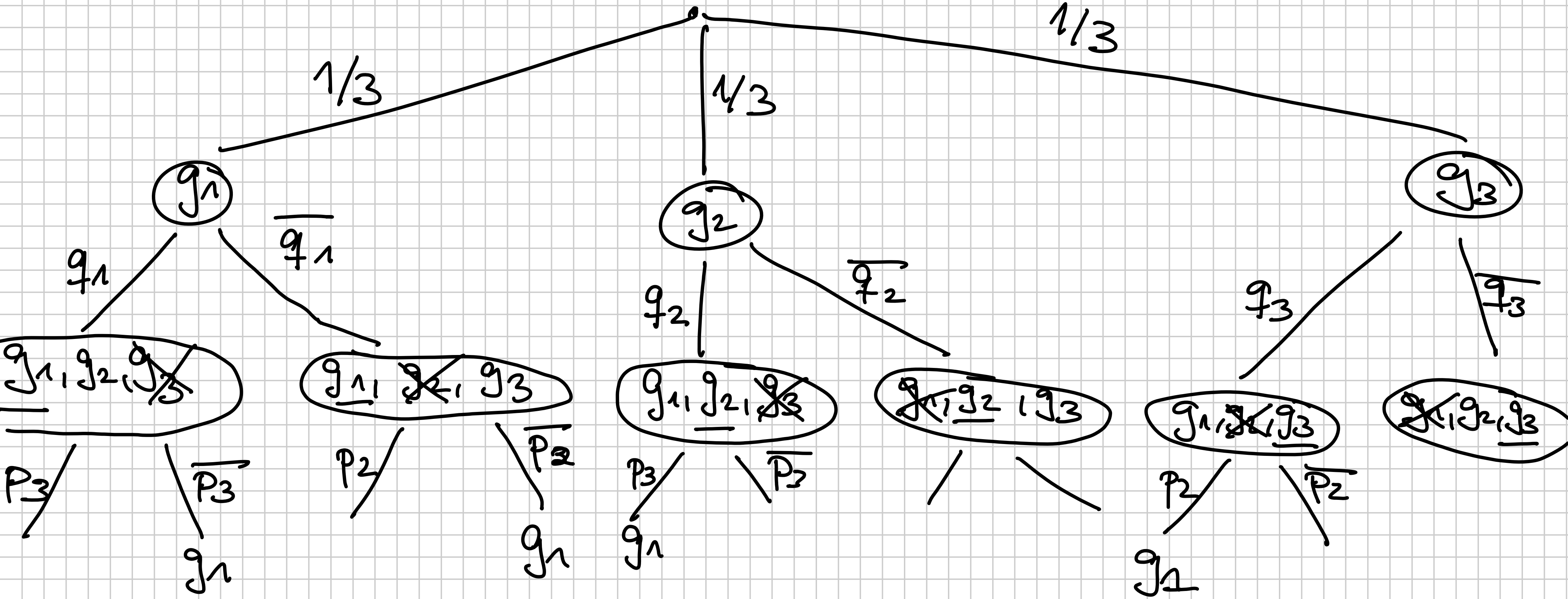
Welche Strategie würden Sie als Kandidat spielen, wenn Sie die W'keit maximieren wollen, dass Sie das Preisgeld g_1 erhalten?

(ii) Welches Tor würden Sie als Quizmaster im 3. Schritt wählen, wenn Sie die W'keit minimieren möchten, dass der Kandidat das Preisgeld g_1 erhält? Nehmen Sie an, dass der Kandidat eine wie oben beschriebene Strategie (p_1, p_2, p_3) benutzt und Sie diese Strategie sogar kennen.

Zeigen Sie, dass der Kandidat dennoch stets seine Strategie so wählen kann, dass er mit mindestens W'keit $1/3$ das Preisgeld g_1 gewinnt.



$$\rightsquigarrow \Pr["g_1"] = \frac{1}{3}\overline{p_3} + \frac{1}{3} p_3 + \frac{1}{3} p_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} p_2 \rightsquigarrow p_2 = 1$$



$$\rightsquigarrow \Pr[\text{"}g_1\text{"}] = \frac{1}{3}\left(q_1 \cdot \overline{p_3} + \overline{q_1} \cdot \overline{p_2} + q_2 \cdot p_3 + q_3 \cdot p_2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(\cancel{q_1} - q_1 p_3 + 1 - \cancel{q_1} - p_2 + q_1 p_2 + q_2 p_3 + q_3 p_2\right)$$

$$= \frac{1}{3}\left(1 - p_2 + q_1 (p_2 - p_3) + q_2 p_3 + q_3 p_2\right)$$

$\leadsto$ Optimal für QM: $q_2 = q_3 = 0$

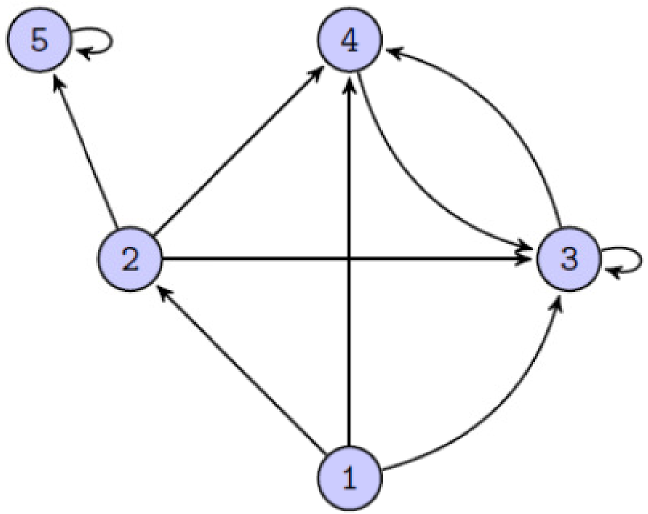
und $\begin{cases} \text{falls } p_2 < p_3 : & q_1 = 1 \\ \text{sonst} : & q_1 = 0 \end{cases}$

$\leadsto$ Spieler kann mit jeder Strategie mit $p_2 = 0$
$\Pr[\text{"}g_1\text{"}] \geq \frac{1}{3}$ garantieren.

Aufgabe 1.4 **Abzugeben sind (a),(b),(c),(d) und (e)**

Der Digraph D rechts beschreibt einen Ausschnitt des Intarwebs.

1: `TUM.de`
2: `wikipedia.org`
3: `icanhascheezburger.com`
4: `4chan.org`
5: `youtube.com`



(a) Geben Sie die starken Zusammenhangskomponenten von D an.

(b) Stellen Sie die Adjazenzmatrix $A = (a_{i,j})_{i,j\in[5]}$ von D auf. $a_{i,j}$ sollte dabei einer möglichen Kante von i nach j entsprechen.

(c) Berechnen Sie A^2. Wie lässt sich der Eintrag $[i,j]$ von A^2 interpretieren? (und allgemein: was ist die Interpretation von A^n für $n \in \mathbb{N}$?). Was bringt diese Interpretation?

(a) je nach Def. "Interessant" = maximal $\wedge$ nicht-trivial

$\rightsquigarrow$ interessante SCCs: $\{5\}$, $\{3,4\}$

(b)

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

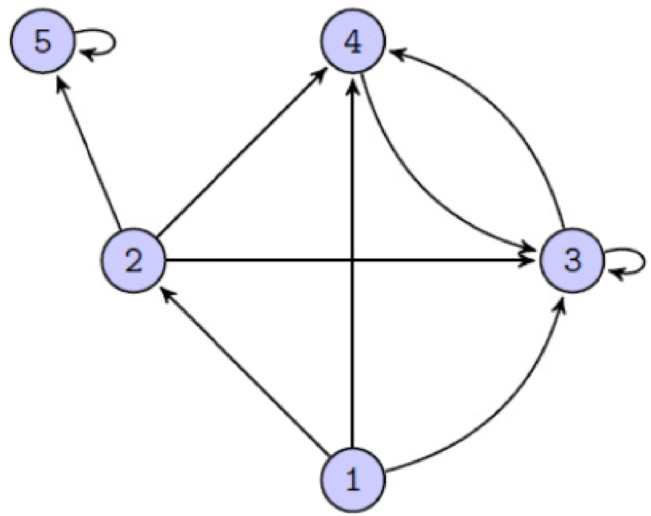
(c) $A^2 = \ldots$ $\quad$ $e_i \, A^k \, e_j^T = \#$ Pfade der Länge k von i nach j in Graph D

mit $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{\uparrow\ i\text{-te Komponente}}{1}, 0, \ldots, 0)$

Aufgabe 1.4 **Abzugeben sind (a),(b),(c),(d) und (e)**

Der Digraph D rechts beschreibt einen Ausschnitt des Intarwebs.

1: `TUM.de`
2: `wikipedia.org`
3: `icanhascheezburger.com`
4: `4chan.org`
5: `youtube.com`



(d) Der kleine Michel (3 Jahre) surft "zufällig" in diesem Ausschnit des Intarwebs umher, indem er von einer Seite mit k ausgehenden Links auf einen Link mit der Wahrscheinlichkeit $1/k$ klickt. Angenommen Michel startet auf `TUM.de`. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er sich nach genau 3 Klicks auf `4Chan.org` befindet?

Pfade der Länge 3 von 1 nach 4: 1 2 3 4 , 1 3 3 4 , 1 4 3 4

W'keit : $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{2}$

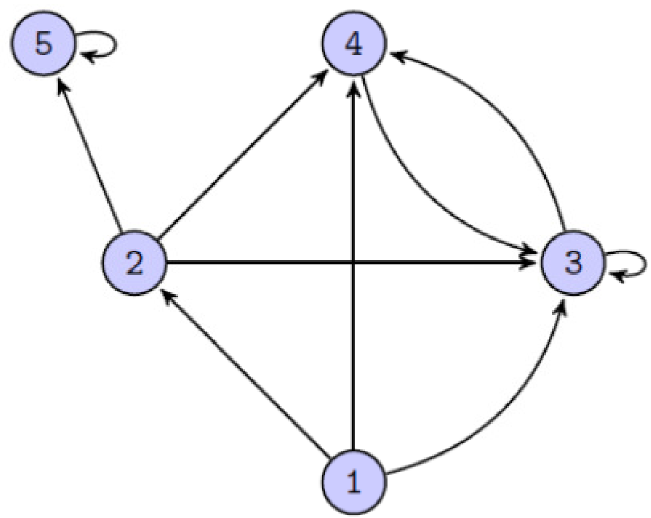
$\sum$: $\frac{1}{18}+\frac{1}{12}+\frac{1}{6}=\frac{2+3+6}{36}=\frac{11}{36}$

١٠

Aufgabe 1.4 **Abzugeben sind (a),(b),(c),(d) und (e)**

Der Digraph D rechts beschreibt einen Ausschnitt des Intarwebs.

1: `TUM.de`
2: `wikipedia.org`
3: `icanhascheezburger.com`
4: `4chan.org`
5: `youtube.com`



Mit d_i sei der Ausgangsgrad des Knotens i in D bezeichnet, z.B. $d_3 = 2$. Die "gewichtete Adjezenzmatrix" W ergibt sich aus A, indem die i-te Zeile $(a_{i,1}, a_{i,2}, \ldots, a_{i,5})$ mit $1/d_i$ multipliziert wird.

(e) Stellen Sie W für den Graphen D auf.

Wie lässt sich W verwenden, um Frage (d) für jedes Paar von Webseiten und jede feste Anzahl n von Klicks zu beantworten? Beweisen Sie Ihre Antwort mit Hilfe von Induktion.

<u>Behauptung:</u> $e_z \cdot W^n \cdot e_j^T$

ist die W'keit von z nach j in genau n Schritten zu gelangen (wenn man mit W'keit z in i startet)

<u>Nach Vorlesung</u> ("Markov-Diagramme")

Sei $\Omega_n = \Pi_{z,n}$ die Menge aller Pfade beginnend in Knoten z mit Länge genau n in D.

$$Pr_n \text{ auf } \Omega_n: \quad Pr_k[(\underset{z}{\overset{\shortparallel}{v_1}}, v_2, \dots, v_{n+1})] := \prod_{i=1}^{n} \overbrace{w_{v_i, v_{i+1}}}^{\underset{\shortparallel}{\delta(v_i, v_{i+1})}}$$

für alle $(v_1, \dots, v_{n+1}) \in \Omega_n$

Ereignisse: $E_n^j = \{ (\underbrace{v_1}_{= z}, \dots, \underbrace{v_{n+1}}_{= j}) \in \Omega_n \mid v_{n+1} = j \}$

Zu zeigen: $Pr_n[E_n^j] = e_z \cdot W^n \cdot e_j^T$

<u>$n = 0$:</u>

- $\Omega_0 = \{(1)\}$
- $j = z$: $Pr_0[E_0^1] = Pr_0[\{(1)\}] = \prod_{i=1}^{0} \delta(v_i, v_{i+1}) = 1$

  $j \neq z$: $Pr_0[E_0^j] = Pr_0[\{\}] = 0$
- $e_z \cdot W^0 \cdot e_j^T = e_z \cdot e_j^T = \delta_{zj} = \begin{cases} 1, & z = j \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$ ✓

Kronecker-Delta

$n \longrightarrow n+1$:

- $$\Pr_{n+1}\left[E^{j}_{n+1}\right] = \sum_{(v_1,\dots,v_{n+1},v_{n+2}) \in E^{j}_{n+1}} \prod_{i=1}^{n+1} \delta(v_i, v_{i+1})$$

$$= \sum_{(v_1,\dots,v_{n+1},\, j) \in E^{j}_{n+1}} \left(\prod_{i=1}^{n} \delta(v_i, v_{i+1}) \right) \delta(v_{n+1}, j)$$

$\Big\downarrow$ Definition von $\Pr_n$

$$= \sum_{s=1}^{5} \sum_{(v_1,\dots,\, s,\, j) \in E^{j}_{n+1}} \Pr_n\left[(v_1, v_2, \dots, s)\right] \cdot \delta(s, j)$$

$$= \sum_{s=1}^{5} \delta(s,j) \cdot \sum_{(\underbrace{v_1, v_2, \dots, s}_{E_n^s},\ \underset{\text{fest}}{\uparrow j}) \in E_{n+1}^{j}} Pr_n[(v_1, \dots, s)]$$

$$= \sum_{s=1}^{5} \delta(s,j) \; Pr_n[E_n^s]$$

|| Induktion

$$= \sum_{s=1}^{5} \underbrace{\delta(s,j)}_{= w_{s,j}} \left(e_z \, W^{n} e_s^{T}\right)$$

$$= \sum_{s=1}^{5} (e_z W^n e_s^T)(e_s W e_j^T)$$

$$= e_z W^n \underbrace{\left(\sum_{s=1}^{5} e_s^T e_s\right)}_{\mathrm{Id}} W e_j^T = e_z W^{n+1} e_j^T$$

$\square$

(f) Geben Sie einen geschlossenen Ausdruck für die W'keit an, dass sich Michel nach genau n Klicks auf `4chan.org` befindet.

Grundidee: Diagonalisiere $W = T D T^{-1}$

dann $e_1 W^n e_j^T = e_1 T D^n T^{-1} e_j^T$

mit $D^n = \begin{pmatrix} \lambda_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_J^n \end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow$ Ausmultiplizieren liefert dann direkt den gesuchten Term.

<u>Problem hier</u>: W ist nicht diagonalisierbar

$\rightsquigarrow$ Ausweg: Jordan Normalform (nicht Prüfungs-relevant)

$$J = \begin{pmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1/3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 9/2 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ -9 & 3/2 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2/27 & -2/27 & 0 \\ 0 & 0 & 16/27 & 8/27 & 1/9 \\ 0 & 0 & 4/9 & 2/9 & 1/3 \\ 3 & 0 & -2 & -2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & -2/3 & 0 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

mit $W = P J P^{-1}$

Hier gilt für $n \geq 2$: $J^n = \begin{pmatrix} (-1/2)^n & & & & \emptyset \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & \emptyset & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$

<u>Für $n \geq 2$</u> :

$$\leadsto e_1 W^n e_4^T = e_1 P \begin{pmatrix} (-1/2)^n & & & & \\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & 0 \end{pmatrix} P^{-1} e_4^T = \underbrace{-\frac{2}{27}\left(-\frac{1}{2}\right)^n}_{\xrightarrow{n\to\infty} 0} + \underbrace{\frac{8}{27}}_{\text{limes}}$$

A 1.1

- $\Omega = [18] \times [18]$
- $\Pr[\omega] = \frac{1}{|\Omega|} = \frac{1}{18^2} \quad \forall \omega \in \Omega$

$$R_k = \{ (i,j) \in \Omega \mid \min(i,j) = k \}$$
$$= \{ (k,k) \} \cup \{ (k,j), (i,k) \mid k < i,j \leq 18 \}$$

$\leadsto |R_k| = 1 + 2(18-k) = 37 - 2k$

$\leadsto \Pr[R_k] = \frac{37-2k}{18^2}$

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^{K} R_i\right] = \sum_{i=1}^{K} \frac{37-2i}{18^2}$$

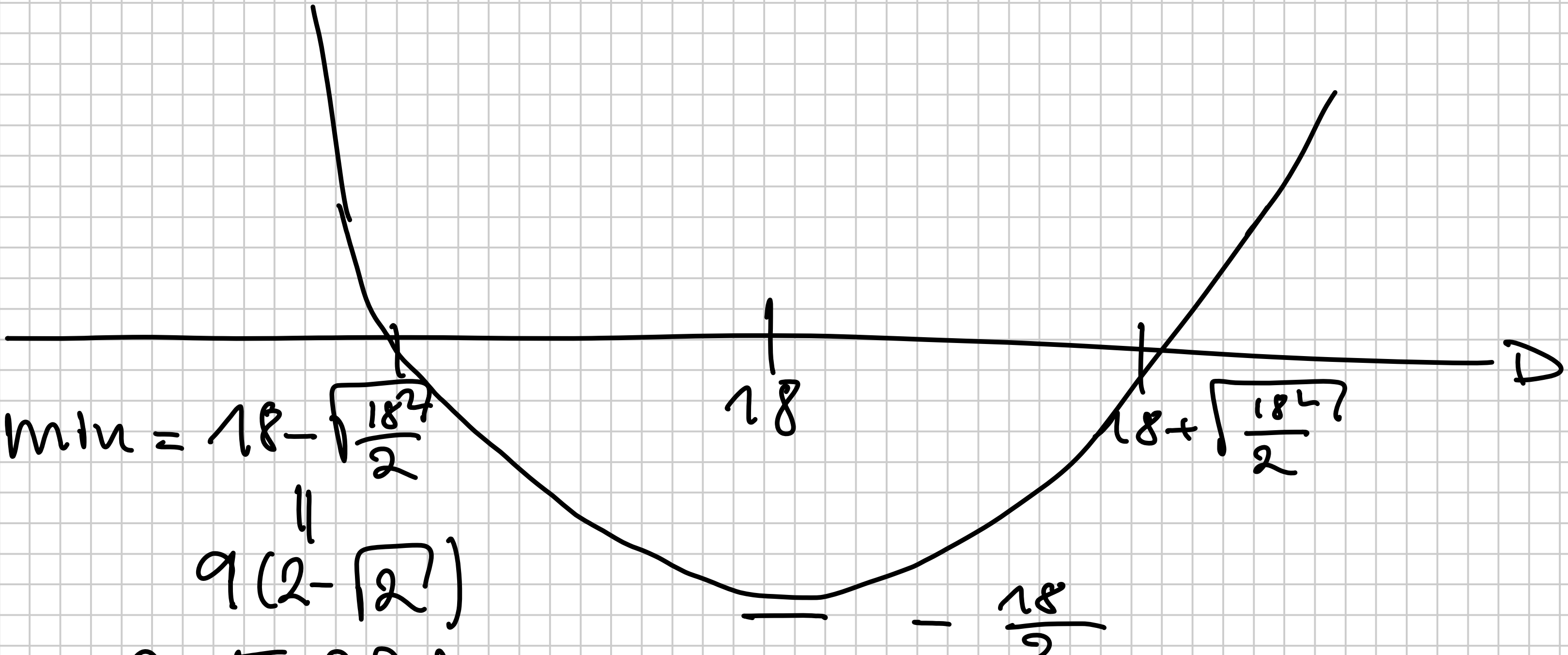
$$= 18^{-2}\left(37K - 2\sum_{i=1}^{K} i\right) \qquad \sum_{i=1}^{K} i = \frac{K(K+1)}{2}$$

$$= 18^{-2}\left(37K - K^2 - K\right)$$

$$= 18^{-2}\left(36K - K^2\right) \overset{!}{\geq} \frac{1}{2}$$

$$\leadsto \quad 0 \geq K^2 - 36K + \frac{18^2}{2}$$

$$= (K-18)^2 - \frac{18^2}{2}$$



$$\min = 18-\sqrt{\frac{18^2}{2}} = 9(2-\sqrt{2}) \approx 5{,}2720$$

$\leadsto$ $\underline{K_{min} = 6}$