то, например, при $x > 0$ погрешность оценивается так:

$$0 < r_n(x) < e^x \cdot \tfrac{x^{n+1}}{(n+1)!}.$$

В частности, если $x = 1$,

$$e \doteq 1 + \tfrac{1}{1!} + \tfrac{1}{2!} + \ldots + \tfrac{1}{n!}, \quad 0 < r_n(1) < \tfrac{3}{(n+1)!}.$$

Подобной формулой мы уже пользовались в $n^\circ 49$ для приближенного вычисления числа e, но оценка дополнительного члена, полученная другим путем, была более точной.

2) Взяв $f(x) = \sin x$, получим

$$\sin x \doteq x - \tfrac{x^3}{3!} + \tfrac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1}\tfrac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}.$$

В этом случае дополнительный член:

$$r_{2m}(x) = \tfrac{\sin\left(\theta x + (2m+1)\frac{\pi}{2}\right)}{(2m+1)!} x^{2m+1} = (-1)^m \cos\theta x \cdot \tfrac{x^{2m+1}}{(2m+1)!},$$

и погрешность оценивается легко:

$$|r_{2m}(x)| \leq \tfrac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!}.$$

В частности, если мы довольствуемся одним членом и полагаем

$$\sin x \doteq x,$$

то для того, чтобы погрешность была меньше, скажем, чем $0,001$, достаточно взять (считая $x > 0$)

$$\tfrac{x^3}{6} < 0,001, \text{ или } x < 0,1817,$$

что примерно равно 10°. При использовании двучленной формулой

$$\sin x \doteq x - \tfrac{x^3}{6},$$

для достижения той же точности уже достаточно взять

$$\tfrac{x^5}{120} < 0,001, \text{ или } x < 0,6544 \quad (\doteq 37,5);$$

если же ограничиваться углами $x < 0,4129 (\doteq 23,5)$, то погрешность будет даже $< 0,0001$, и т.д.

3) Аналогично, для $f(x) = \cos x$ имеем

$$\cos x \doteq 1 - \tfrac{x^2}{2!} + \tfrac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^m \tfrac{x^{2m}}{(2m)!},$$

причем

$$r_{2m+1}(x) = (-1)^{m+1} \cos\theta x \tfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!},$$

так что

$$|r_{2m+1}(x)| \leq \tfrac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}.$$

Например, для формулы

$$\cos x \doteq 1 - \tfrac{x^2}{2}$$

погрешность

$$|r_3(x)| \le \tfrac{x^4}{24}$$

и наверное будет, скажем, $< 0,0001$ для $x < 0,2213 (\doteq 13)$, и т.п.

Мы обращаем внимание читателя на существенное продвижение вперед по сравнению с формулами *пп*° 56, 57, 93: *теперь мы умеем устанавливать границы погрешности и располагаем формулами любой точности.*

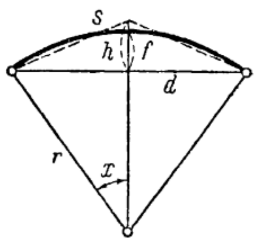

Рис. 41.

Наконец, приведем пример приближенной формулы совсем иного типа, но все же использующей формулу Тейлора.

4) Для приближенного спрямления дуги окружности, малой по сравнению с радиусом (рис. 41), Чебышёв[1]) дал следующее правило: *дуга s приближенно равна сумме равных сторон равнобедренного треугольника, построенного на хорде d и имеющего высотой $\sqrt{\frac{4}{3}}$ стрелки f.*

Если половину центрального угла обозначить через x, а радиус дуги – через r, то $s = 2rx$. С другой стороны,

$$\tfrac{1}{2}d = r\sin x = r\{\, x - \tfrac{x^3}{6} + o(x^4)\}, \quad (\tfrac{1}{2}d)^2 = r^2\{x^2 - \tfrac{x^4}{3} + o(x^5)\},$$

$$h = \sqrt{\tfrac{4}{3}}f = \sqrt{\tfrac{4}{3}}r(1-\cos x) = \sqrt{\tfrac{4}{3}}r\{\tfrac{1}{2}x^2 + o(x^3)\},$$

$$h^2 = r^2\{\tfrac{x^4}{3} + o(x^5)\},$$

так что упомянутая сумма сторон, по теореме Пифагора, равна

$$2\sqrt{(\tfrac{1}{2}d)^2 + h^2} = 2r\sqrt{x^2 + o(x^5)} = 2rx\sqrt{1 + o(x^5)} = 2rx + o(x^4).$$

Читателю ясно, что назначение множителя $\sqrt{\frac{4}{3}}$ в формуле Чебышёва именно в том, чтобы под корнем уничтожался член с x^4. В окончательном счете, полученное приближенное значение дуги отличается от самой дуги величиной выше четвертого порядка малости.

Мы вернемся к формуле Тейлора с дополнительным членом в главе XV (второй том), посвящённой бесконечным рядам, где эта формула будет играть весьма важную роль. Там же будут приведены примеры приложения рядов к приближенным вычислениям, которые зачастую, по существу, являются применением формулы Тейлора.

[1]Академик Пафнутий Львович Чебышёв (1821 -1894) — великий русский математик, основатель петербургской математической школы.