

ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΠΑΤΡΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΜΗΧΑΝΙΚΩΝ Η/Υ ΚΑΙ ΠΛΗΡΟΦΟΡΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΕΠΕΞΕΡΓΑΣΙΑΣ ΣΗΜΑΤΩΝ ΚΑΙ ΤΗΛΕΠΙΚΟΙΝΩΝΙΩΝ

# Ψηφιακή Επεξεργασία Σημάτων

## 4-η Εργαστηριακή Άσκηση

## Στοχαστικές Διαδικασίες

Διδάσκοντες: Εμμανουήλ Ψαράκης, Δημήτριος Κοσμόπουλος

Επικουρικό έργο:  
Στέλιος Αυλακιώτης, Παναγιώτης Κάτσος, Αλέξανδρος-  
Οδυσσέας Φαρμάκης

**Σημείωση:** Η εκφώνηση συνοδεύεται από αρχείο κειμένου στο οποίο θα συμπληρώσετε τις απαντήσεις στα διάφορα ερωτήματα που εμφανίζονται εκεί. Κρατήστε τη δομή εκείνου του αρχείου ακέραιη. Φροντίστε όπου θα συμπληρώσετε γραφήματα να φαίνονται ευκρινώς. Αφού συμπληρώσετε όλα τα ερωτήματα θα ανεβάσετε στο eclass μόνο σε μορφή αρχείου PDF την αναφορά αυτή με όνομα αρχείου αυστηρά το εξής:  
ΕΠΩΝΥΜΟ\_ΑΜ\_ΕΤΟΣ.pdf (π.χ. "ΠΑΠΑΔΟΠΟΥΛΟΣ\_1312\_3.pdf").

Κατεβάστε την MATLAB από εδώ  
<https://www.mathworks.com/downloads/>.

Ενεργοποιήστε την με την άδεια *license.dat* που θα βρείτε εδώ  
<https://mussa.upnet.gr/user/index.php?action=downloadFile&fn=matlab-license>

## Άσκηση 1: Στοχαστικές Διαδικασίες

Θεωρήστε μία διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία:

$$X(n, \vartheta) = A(\vartheta)[u(n) - u(n - 100)]$$

όπου  $u$  η βηματική συνάρτηση και  $A(\vartheta)$  τυχαία μεταβλητή με ομοιόμορφη συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας στο διάστημα  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ .

- (α). Υπολογίστε την στοχαστική μέση τιμή της διαδικασίας.
- (β). Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **rand()** της MATLAB δημιουργήστε  $K$  υλοποιήσεις της διαδικασίας και εκτιμήστε, υπολογίζοντας την αριθμητική μέση τιμή κάθε χρονική στιγμή, την στοχαστική μέση τιμή της. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της στοχαστικής μέσης τιμής;
- (γ) Εκτιμήστε την ακολουθία αυτοσυσχέτισης. Τι παρατηρείτε καθώς αυξάνει ο αριθμός  $K$  των υλοποιήσεων της διαδικασίας που χρησιμοποιούνται στην εκτίμηση της ακολουθίας αυτοσυσχέτισης;
- (δ) Είναι η παραπάνω διαδικασία “λευκή”;
- (ε) Υπολογίστε την Πυκνότητα Φάσματος (Spectral Density) της διαδικασίας. Πόσο κοντά στην ιδανική πυκνότητα είναι η εκτίμησή της από την ακολουθία αυτοσυσχέτισης του Ερωτήματος δ και πως επηρεάζεται από το  $K$ ;

Σε όλα τα παραπάνω ερωτήματα να κάνετε όλες τις απαραίτητες γραφικές παραστάσεις.

## Άσκηση 2: Στοχαστικές Διαδικασίες

Επαναλάβετε την προηγούμενη άσκηση, θεωρώντας τώρα ότι η διακριτού χρόνου στοχαστική διαδικασία είναι Γκαουσιανή μέσης τιμής 0 και διασποράς 1. Για τη δημιουργία υλοποιήσεων της διαδικασίας χρησιμοποιήστε τη συνάρτηση **randn()** της MATLAB.

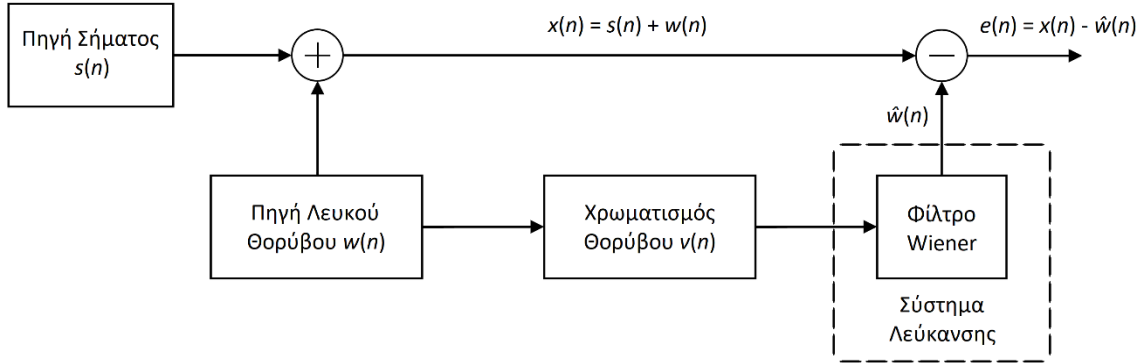
## Άσκηση 3: Βασικοί Νόμοι της Στατιστικής

Στο αρχείο **eye.mat** υπάρχει μία ακολουθία εικόνων. Σε κάθε πλαίσιο της ακολουθίας υπάρχει μία εικόνα (η ίδια) σε κάθε εικονοστοιχείο της οποίας κάθε έχει προστεθεί μια διαφορετική υλοποίηση του θορύβου μέσης τιμής μηδέν.

- (α) Χρησιμοποιήστε αποδοτικά τον Νόμο των Μεγάλων Αριθμών και αποκαλύψτε την εικόνα που κρύβεται στην ακολουθία. Εκτιμήστε την διασπορά του θορύβου καθώς και την κατανομή του.
- (β) Χρησιμοποιώντας την εικόνα που αποκαλύψατε, επιβεβαιώστε το Κεντρικό Οριακό Θεώρημα.

## Άσκηση 4: *FIR* Φίλτρο *Wiener*

Θεωρήστε το ακόλουθο σύστημα:



Σχήμα 1: Φίλτρο *Wiener*

όπου:

$$s(n) = \sin(\omega_0 n + \phi), \phi \sim U[0, 2\pi) \quad (1)$$

$$v(n) = \alpha v(n-1) + w(n), \alpha = 0.6, \text{ και } w(n) \sim N(0, 1) \quad (2)$$

λευκός γκαουσιανός θόρυβος.

(α) Τι είδους διαδικασία περιγράφει η Σχέση (2); Χρησιμοποιώντας  $\omega_0 = 0.25$  και τη συνάρτηση **randn**( ), δημιουργείτε μερικές υλοποιήσεις της. Υπολογίστε τα φασματικά χαρακτηριστικά του χρωματισμένου θορύβου. Συμφωνούν με τα θεωρητικά αναμενόμενα;

(β) Ποια η λειτουργία του Συστήματος Λεύκανσης; Καταγράψτε την απάντησή σας.

(γ) Η πηγή του σήματος της Σχέσης (1) είναι ντετερμινιστική ή στοχαστική; Δικαιολογείστε την απάντησή σας.

(δ) Αν η πηγή του σήματος είναι στοχαστική, είναι ασθενώς στάσιμη πρώτης ή δεύτερης τάξης; Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση **rand**( ), δημιουργείτε υλοποιήσεις της και προσπαθήστε να επιβεβαιώσετε τις απαντήσεις σας και πειραματικά. Καταγράψτε τα πειράματα που κάνατε και τα αποτελέσματά σας.

(ε) Εκφράστε την έξοδο του *FIR* φίλτρου *Wiener* μήκους  $M$  συναρτήσει των συντελεστών της κρουστικής του απόκρισης και του χρωματισμένου θορύβου.

(στ) Σχεδιάστε το βέλτιστο *FIR* φίλτρο *Wiener* μήκους 2 και υπολογίστε το μέσο τετραγωνικό σφάλμα.

(ζ) Επαναλάβετε την Ερώτηση 5 για φίλτρα μήκους 3, 4, 5, 6, υπολογίστε τα αντίστοιχα μέσα τετραγωνικά σφάλματα. Τι παρατηρείτε;

---