Le Projet, DESS option C++ et éléménts finis

F. Hecht, S. Del Pino

Année 2001-2002

Pour la modélisation numérique d'un ensemble comprenant un circuit électrique et un circuit magnétique. La stratégie, consiste à simuler le système électromagnétique par un modéle où les équations magnétiques et électriques sont considérées simultanément [3][5]. Pour effectuer une telle modélisation, on est amené à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire couplé à un système d'équations qui peut-être également non linéaire. En ayant recours à une discrétisation spatiale de type éléments finis et une discrétisation temporelle, on aboutit à un système d'équations où les inconnues sont les courants dans le circuit électrique et les valeurs nodales du potentiel vecteur aux noeuds du maillage. A ce stade de la modélisation, deux approches peuvent-être développées. Dans la première on conserve l'ensemble des inconnues (courants et potentiel vecteur). Dans la seconde on se ramène à un système d'équations où les inconnues sont uniquement les valeurs nodales du potentiel vecteur.

0.1 Formulation du problème et résolution

La modélisation d'un système électromagnétique (voir par exemple [1]) dans le cas de l'approximation bidimensionnelle conduit classiquement à la résolution de l'équation:

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + rot\ (\nu\ rotA) - J = 0 \tag{1}$$

sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, en tenant compte des conditions aux limites. Dans cette expression σ représente la conductivité, $A \equiv (0, 0, A)$ le potentiel vecteur, ν la réluctivité, et $J \equiv (0, 0, J)$ la densité de courant.
Dans le cas de systèmes en mouvement, comme les machines tournantes, par exemple, la prise en compte de ce mouvement peut être faite en résolvant l'équation (1) dans deux repères différents. Dans ces conditions le terme $\sigma(v \wedge rotA)$ n'apparaît pas explicitement [2]. Pour modéliser l'interface entre ces deux repères, diverses techniques peuvent être utilisées, bande de mouvement [3], ligne de glissement [4].
La densité de courant dans l'équation (1) peut s'exprimer sous la forme:

$$J = J_0 + \sum_{k=1}^{n_p} i_k \psi_k \tag{2}$$

où J_0 représente une densité de courant imposée (source de courant donnée ou densité de courant équivalente dans le cas d'aimants permanents), i_k le courant dans la phase (ou branche) k, n_p le nombre de phases inclues dans le domaine Ω et ψ_k une fonction de $L^2(\Omega)$ définie comme étant la densité de courant dans l'espace, correspondant à un courant de 1 Ampère dans la phase k, (on a évidemment $\psi_k \equiv 0$ en dehors du support de la phase k).
Les équations du circuit électrique peuvent s'écrire pour les branches $k, 1 \leq k \leq n_p$, d'extrémités k_1 *et* k_2 sous la forme:

$$(V_{k_1} - V_{k_2}) = R_k i_k + \frac{d\Phi_k}{dt} + l_k \frac{di_k}{dt} \tag{3}$$

et pour les autres branches $q, n_p < q \leq n_b$, du circuit électrique, pouvant contenir des résistances, des inductances, des générateurs de tension :

$$(V_{q_1} - V_{q_2}) = e_q + R_q i_q + l_q \frac{di_q}{dt} \tag{4}$$

où n_b représente le nombre total de branches du circuit électrique, $(V_{k_1} - V_{k_2})$ ou $(V_{q_1} - V_{q_2})$ la différence de potentiel aux bornes de la branche k ou q, R_k ou R_q la resistance , l_k ou l_q les inductances non prises en compte dans les équations magnétiques, Φ_k le flux à travers un enroulement. Bien souvent dans les systèmes

électrotechniques, le temps d'établissement du courant dans une diode par rapport aux constantes de temps du système étudié est négligeable.
Les relations (1-4) montrent comment les équations magnétiques et électriques sont couplées (le flux Φ_k dans (3) pouvant s'exprimer en fonction du potentiel vecteur A).

0.1.1 Discrétisation

Pour résoudre numériquement le problème, on peut utiliser une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis (P_1) et une discrétisation temporelle avec un schéma de type implicite (Euler rétrograde). L'équation 1 exprimée sous forme faible sera du type:
$A_{t+\Delta t} \in \mathcal{V}$, solution de

$$\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \sigma A_{t+\Delta t}.\omega\, dx + \int_\Omega \nu(x, |rotA_{t+\Delta t}|^2)\; rotA_{t+\Delta t}.rot\omega\, dx \tag{5}$$

$$= \int_\Omega \left[J_0 + \Big(\sum_{k=1}^{n_p} i_k\psi_k\Big)\right].\omega\, dx + \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \sigma A_t.\omega\, dx \quad \forall\omega \in \mathcal{V} \tag{6}$$

avec $\mathcal{V}$ espace fonctionnel adéquat (i_k étant considéré à l'instant $t + \Delta t$ -voir ci-après la discrétisation des équations électriques-).
L'équation (6) peut être également exprimée sous forme matricielle (voir [2]) :

$$\Big(\frac{\mathbf{T}}{\Delta t} + \mathbf{S}\Big)A_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{T}}{\Delta t}A_t \tag{7}$$

cette équation matricielle est bien entendu non linéaire car les termes de la matrice $\mathbf{S}$ dépendent de $A_{t+\Delta t}$. La correspondance entre les termes intégraux dans (6) et les termes matriciels dans (7) est immédiate. Le vecteur F peut s'écrire :

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^{n_p} F_k i_k = F_0 + \mathbf{F}\mathcal{I}_{(n_p)} \tag{8}$$

F_0 étant relatif au terme source J_0 et avec

$$F_k = \Big(\int_\Omega \psi_k.\omega_l dx\Big)_{l=1,n_s} \tag{9}$$

dans cette dernière expression n_s représente le nombre de degrés de liberté du potentiel vecteur sur le domaine d'étude Ω, ω_l les fonctions de base usuelles des éléments finis (P_1) et ψ_k est approché par:

$$\begin{cases} \psi_k(x) = 0 & \text{si } x \notin \text{ phase } k \\ \psi_k(x) = \dfrac{\varepsilon_n N_n}{S_n} & \text{si } x \in \text{ phase } k \end{cases} \tag{10}$$

pour l'encoche n appartenant à la phase k, $\varepsilon_n = \pm 1$ suivant le sens du bobinage, N_n représente le nombre de spires et S_n la section de l'encoche.
En ce qui concerne les équations du circuit électrique, l'application du schéma d'Euler implicite permet d'écrire les équations sous la forme:

$$(V_{k_1} - V_{k_2})\Big|_{t+\Delta t} = (R_k + \frac{l_k}{\Delta t})i_k\Big|_{t+\Delta t} + \frac{\Phi_k}{\Delta t}\Big|_{t+\Delta t} - \frac{l_k}{\Delta t}i_k\Big|_t - \frac{\Phi_k}{\Delta t}\Big|_t \tag{11}$$

ou bien

$$(V_{q_1} - V_{q_2})\Big|_{t+\Delta t} = e_q\Big|_{t+\Delta t} + (R_q + \frac{l_q}{\Delta t})i_q\Big|_{t+\Delta t} - \frac{l_q}{\Delta t}i_q\Big|_t \tag{12}$$

Dans l'équation (11), le flux Φ_k engendré dans les enroulements de la phase k, peut s'exprimer en fonction du potentiel vecteur par (ψ_k étant défini en (10)):

$$\Phi_k = \kappa \int_\Omega A.\psi_k dx \tag{13}$$

κ représentant la longueur active des conducteurs suivant la troisième dimension. En remplaçant dans (13) le potentiel vecteur par son expression discrétisée et en tenant compte de (9) on peut écrire :

$$\Phi_k = \kappa F_k^T.A \tag{14}$$

ou bien sous forme matricielle

$$\Phi_{(n_p)} = \kappa \mathbf{F}^T A \tag{15}$$

En considérant les équations électriques (3) et (4) (ou bien (11) et (12) sous forme discrétisée), on remarque que le circuit électrique est constitué des n_p branches internes (en relation directe avec le circuit magnétique, numérotées de 1 à n_p) auxquelles on ajoute les branches du circuit extérieur (numérotées de (n_p+1) à n_b). Lorsque les connexions sont faites, il en résulte un certain nombre de noeuds n_c. Nous prenons comme éléments inconnus dans le circuit électrique, les courants de branche $\mathcal{I}_{(n_b)} = (i_k)_{k=1,n_b}$ et les potentiels $V_{(n_c)} = (V_l)_{l=1,n_c}$ aux noeuds. En utilisant les lois d'Ohm-Kirchoff disant en substance que la somme des différences de potentiels des branches constituant une maille (chemin fermé) est nulle ainsi que, pour chaque nœud du circuit, la somme (algébrique) des courants des branches aboutissant au (ou partant du) nœud considéré. Le circuit électrique est linéaire et des considérations générales d'algèbre linéaire nous permettent d'exprimer les courants de branches internes à la machine $\mathcal{I}_{(n_p)} = (i_k)_{k=1,n_p}$ en fonction des forces électromotrices $E_{(n_p)} = (em_j)_{j=1,n_p} = -(\frac{d\Phi_j}{dt})_{j=1,n_p}$, par une relation du type

$$\mathcal{I}_{(n_p)} = \mathbf{Y} E_{(n_p)} + I_0 \tag{16}$$

$\mathbf{Y}$ est une matrice $n_p \times n_p$, qui dans le cas présent est symétrique et positive (matrice d'admittance dans la théorie des réseaux électriques). La non linéarité du En reportant (16) dans (2) et en utilisant (13), l'équation (6) devient
$A_{t+\Delta t} \in \mathcal{V}$, solution de

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \sigma A_{t+\Delta t}.\omega\,dx + \int_\Omega \nu(x,|rotA_{t+\Delta t}|^2)\; rotA_{t+\Delta t}.rot\omega\,dx \\
&\qquad + \frac{\kappa}{\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij}\Big(\int_\Omega \psi_i.\omega\,dx\Big)\Big(\int_\Omega \psi_j.A_{t+\Delta t}\,dx\Big) = \\
&\frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \sigma A_t.\omega\,dx + \frac{\kappa}{\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij}\Big(\int_\Omega \psi_i.\omega\,dx\Big)\Big(\int_\Omega \psi_j.A_t\,dx\Big) + \int_\Omega\Big(J_0 + \sum_{i=1}^{n_p} I_{0,i}\psi_i\Big).\omega\,dx
\end{aligned}\right\} \quad \forall\omega\in\mathcal{V} \tag{17}$$

la matrice d'admittance $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ étant évaluée en $t+\Delta t$ ou t selon la stratégie retenue. Cette formulation peut être vue comme une généralisation de la technique utilisée en [6]. C'est une équation intégro-différentielle en A, à caractère symétrique défini positif.
Le système non linéaire (17) (à considérer à chaque pas de temps) peut être résolu en combinant des méthodes de méthodes de gradient conjugué préconditionné, car il correspond à la minimisation de la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}(A_{t+\Delta t}) = \frac{1}{2}\Bigg[&\int_\Omega \chi(x,|rotA_{t+\Delta t}|^2)dx + \int_\Omega \sigma A_{t+\Delta t}.A_{t+\Delta t}.\,dx \\
+ &\quad \frac{\kappa}{\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij}\Big(\int_\Omega \psi_i.A_{t+\Delta t}\,dx\Big)\Big(\int_\Omega \psi_j.A_{t+\Delta t}\,dx\Big)\Bigg] \\
- &\quad \frac{1}{\Delta t}\int_\Omega \sigma A_t.A_{t+\Delta t}\,dx - \frac{\kappa}{\Delta t}\sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij}\Big(\int_\Omega \psi_i.A_{t+\Delta t}\,dx\Big)\Big(\int_\Omega \psi_j.A_t\,dx\Big) \\
- &\quad \int_\Omega\Big(J_0 + \sum_{i=1}^{n_p} I_{0,i}\psi_i\Big).A_{t+\Delta t}\,dx
\end{aligned} \tag{18}$$

Où $\chi(x,t) = \int_0^t \nu(x,\tau)d\tau$.

0.2 Le projet

Nous allons étudier un alternateur représanter par la figure 1.
Les définitions des numéro de référence physique des sous domaine:

0 air

1 fer feuilleté du rotor (non conducteur)

2 fer feuilleté du stator (non conducteur)

3 cuivre du rotor (conducteur)

19 bobinage alimentation (excitation)

20 bobinage inducteur (sortie)

21 bobinage alimentation (excitation)

22 bobinage inducteur (sortie)

Les définition des numero de référence physique des sommets, et frontières:

0 interne

1 ligne de glissement

2 bord supérieur $\pi/12$ (sauf ligne de glissement)

3 bord inférieur $-\pi/12$ (sauf ligne de glissement)

4 centre

5 bord exterieur

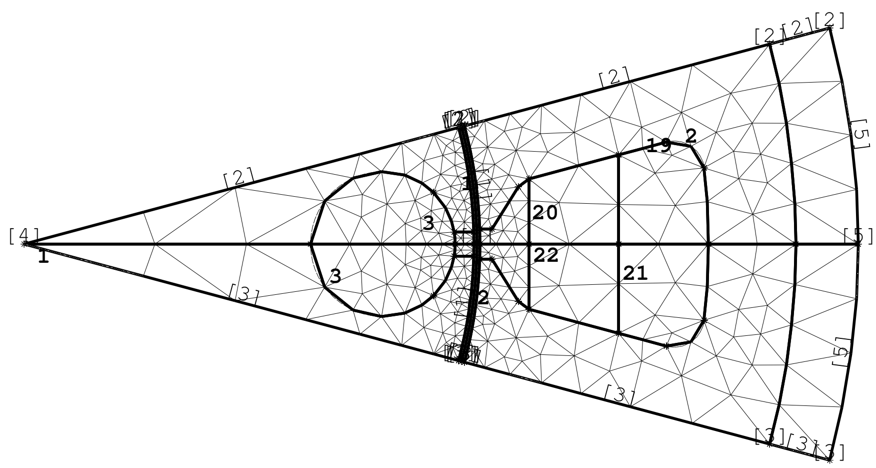

Figure 1: Maillage de l'alternateur complet

Les maillages sont dans les fichiers , et l'unité est le millimétre

- `alter012.msh` pour le 1/12 de l'alternateur (rotor+stator).
- `stator012.msh` pour le 1/12 du stator
- `rotor012.msh` pour le 1/12 du stator

Remarque toutes les données physiques sont dans le système d'unité $MKSA$.

0.2.1 Partie: Dispositif électromagnétique fixe

Cette machine dont la section transversale ($\kappa = 80mm$) et le schéma de bobinage sont , comprend au stator un enroulement d'excitation et 2 enroulements d'induits répartis dans 12 encoches. Quant au rotor, il est constitué de 12 barres en court circuit. Etant donné les répétitivités géométriques et électriques, le domaine de calcul peut se réduire à 1/12 ème de la machine, avec des conditions antipériodicité;
Le bobinage de l'alimentation est faite avec 50 spires par 1/2 encoche (sous domaine 19 ou 21), et le bobinage de l'inducteur est faire avec 30 spires par 1/2 encoche (sous domaine 20 ou 22).

Les caractéristiques des matériaux magnétiques (Fer) sont approchées en utilisant la relation suivant.

$$\nu_F(|B|^2) = \varepsilon + (C-\varepsilon)\frac{(|B|^2)^\alpha}{(|B|^2)^\alpha + T} \tag{19}$$

avec $\varepsilon = 0.51636\ 10^{-3}, \alpha = 5.4192, C = 0.17577, T = 8758.756$ pour les deux parties en fer du stator et rotor .

donc on a

$$\nu = \frac{1}{4\pi 10^{-7}} \left\{ \begin{array}{ll} \nu_F & \text{dans le fer} \\ 1 & \text{ailleur} \end{array} \right. \tag{20}$$

Pour simplifier, nous ne traiterons que le cas où la fonctions ν sera considére contante par rapport à $|B|^2$ et aura la valeur associé à $B = 0$, afin de rendre les systèmes linéaires.

Le système électromagnétique dans lequel une partie massive en cuivre est conductrice et donc soumise à des courants de Foucault (partie C de numéro de référence **3** figure 1); ce système est alimenté par une tension de de $15V$ sinusoïdale (pour simuler le mouvement) de fréquence 50 hertz, avec un générateur qui a un résitance interne de $1ohm$.

Les courants de Foucault (densités) se développant dans la partie conductrice ($\mathbf{C}\ \sigma_C = 50\,10^6$) et on a $\sigma = 0$ dans toutes les autres sous domaine qui sont non conducteur, il n'y a pas de problème de conservation des courant de Foucault car les barres sont interconnectées, et car que nous avons des conditions antipériodicitées.

Dans cette application le circuit électrique se réduit à une maille. Si $\mathbf{R}$ représente la résistance totale du circuit, la matrice d'admittance définie en (16) , dans le cas où l'on ne tient pas compte des inductances de fuite, est tout simplement le scalaire $\frac{1}{\mathbf{R}}$.

0.2.2 Alternateur en mouvement

Cet alternateur dont le fonctionnement n'est pas classique, a été spécialement conçu par la société VALEO. D'un point de vue informatique, la numérotation des inconnues ce fera via l'introduction de 2 maillages, un maillage du rotor (partie tournante) et un maillage du stator partie fixe). Le mouvement est modélisé de façon incrémentale en changement la numérotation des points communs de la ligne de glissement au fils de itérations.

Le but de ce projet est de résoudre ce problème pour un point de fonctionnement correspondant à une vitesse de rotation de 3000 tr/min et une alimentation en tension E=15v, où l'alternateur débite sur une résistance de $1000Ohm$.

Pour simplifier, nous ne tiendrons pas compte de la saturation magnétique, la fonction $\nu_F(|B|^2)$ sera la constante $\nu_F(0)$, et donc le problème devient lineaire.

0.2.3 Résume de la marche à suivre

1. Il faut commencer par mettre en œuvre les conditions aux limites de type périodique et anti-périodique.

   Pour modéliser ces conditions aux limites, nous allons introduire deux tableaux dl et $coef$ de dimension le nombre sommets.

   Soit R la rotation de $\pi/6$ correspond à la périodicité.

   soit i et j deux sommets telle que le sommet j soit image par R du sommet i, donc on a :

   - si condition de périodicité alors on a $dl[i] = dl[j]$ et $coef[i] = coef[j]$.
   - si condition de antipériodicité alors on a $dl[i] = dl[j]$ et $coef[i] = -coef[j]$.

   $dl[i]$ donne le numéro du dégre de liberté i associé au sommet i. Bien sur les dégrés de liberté sont numérotés de manière consécutive de de 0 à $NbDL - 1$.

   La valeur de la solution (stocké dans un tableau x de taille $NbDL$) au sommet i est donné par $coef[idl] \times x[idl]$ où $idl = dl[i]$.

   Attention maintenant la taille des vecteurs inconnue, second membre, et donné initial sont de taille $NbDL$.

   Pour construire ces tableaux, l'on commencera par construire le tableau qui a un sommet i du bord inférieur (de ref $2, 1$) associe le sommet j du bord supérieur (de ref $3, 1$) qui est l'image de i par r, puis après il faut numéroter les degrés de libertés.

   Au niveau de la matrice pour l'assemblage il faut changer

   $$a(dl[iv], dl[jv]) += coef(iv) * coef(jv) * al(iloc, jloc)$$

où iv (resp. jv) est le sommet $iloc$ (resp. $jloc$) du triangle courant. De fait, il faut changer dans les deux routines qui calcule le second membre et qui calcule le produit matrice vecteur.

Dans un premier temps, vous testerez les conditions de périodicité sur un laplacien.

2. Le problème etant linéaire, il suffit utiliser une méthode de gradient conjugué pour resoudre le probème statique:

   Trouver le A_h potentiel A tel que

$$\int_\Omega \nu(ref)\nabla A_h.\nabla A'_h = \int_\Omega J_0 A'_h \quad \forall A'_h \in V_h \tag{21}$$

   Où J_0 est la densité de courant donné si il passe un courant de un ampère dans la phase dans la phase d'exitation (la phase 1 ici). Nous avons donc $J_0 = \kappa\psi_1$ où ψ_1 est défini par (10). Vous pourrez calculer le vecteurs F_k de l'équation (9) et remarque que l'on a $\int_\Omega J_0 A'_h$ est égale on produit scalaire de F_k et de $\tilde{A'_h}$, où A'_h est tantôt vue comme un vecteur ou tantôt vue comme la fonction A'_h associé au vecteur $\tilde{A'_h}$ tel que

$$A'_h = \sum_{i=0}^{nv-1} \tilde{A'_h}[dl[i]]\, coef[i]\, w_i$$

3. Il faut ajouter les termes en temps de l'équation (17) plus les termes (du coef. ij de la matrice) qui est de la forme

$$\frac{A'_h}{\delta t}\sum_{kl} y_{kl}F_k[i]F_l[j]$$

   où $F_k[i] = \int_\Omega \psi_k.\omega_i$

   Ici le circuit électrique a deux phases indépendantes donc la matrices admitance $Y = (y_{ij})_{(i,j=1,2}$ est diagonale.

   La phase 1 d'alimentation est formée d'une résistance R_a et d' un générateur V_a, et la phase 2 induite est juste resistance R_i. Donc nous avons:

$$y_{11} = \frac{1}{R_a}, \quad y_{22} = \frac{1}{R_i}$$

   Le terme sources de l'équation (17) sont donc

$$I_{0,1} = \frac{V_a}{R_a}, \quad I_{0,2} = 0, \quad J_0 = 0/$$

   Nous avons tous les termes pour calculer et résoudre l'équation (17).

4. Prise en compte du mouvement, pour cela il faut lire les 2 maillages (rotor et stator). Pour chaque pas de temps i le stator a subit une rotation R_i d'angle $i \times (15/16)^o$ de degrées (il y a 16 intervales sur la ligne de glissement du demi maillage).

   Il faut retrouver les sommets k et l communs entre le rotor (tourné de R_i) et le stator pour définir les tableaux dlr et dls des dégrées de liberté des sommets, les valeurs de tableau $coefr$ et $coefs$ sont telle que $coefr[k] = (-1)^m coefs[l] = 1$ ou m est le nombre de rotation de 30^o qu'il faut pour passer du sommet k du rotor au sommet l du stator.

5. Pour finir, il faut faire un rapport et présenter les resultats.

References

[1] D. Shen, G. Meunier, J.L. Coulomb, J.C. Sabonnadière, *Solution of magnetic field and electrical circuit combined problem*, IEEE-Mag.21, pp 2288-2291, 1985.

[2] F. Bouillaut, A. Razek, *Prise en compte du mouvement dans la détermination numérique des courants de Foucault dans une structure électromagnétique*, Revue de Physique Appliquée, tome 18, pp 103-106, 1983.

[3] B .Davat, Z. Ren,M. Lajoie-Mazenc, *The movement in field modeling*, IEEE-Mag.21, pp 2296-2298, 1985.

[4] A. Marrocco, *Analyse numérique de problèmes d'électrotechnique*, Ann. Sc. Math. Québec, vol 1, No 2, pp 271-296, 1977.

[5] F. Piriou, A. Razek, *Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices*, IEEE-Mag.24, pp 274-277, 1988.

[6] A. Marrocco, *Computation of the coil and eddy currents in a voltage supplied system*, Conférence Franco-Soviétique, Novosibirsk juin 1981.

[7] F. Hecht, A. Marrocco, F. Piriou, A. Razek, *Modélisation électromagnétique d'un alternateur couplé à un circuit extérieur*, Proceedings of " Team Workshop and Meeting on the Applications of Eddy-Currents Computations, Bièvres march 1989, pp 265-278.