

See discussions, stats, and author profiles for this publication at: <https://www.researchgate.net/publication/239921744>

Les Projets, Cours DEA C++ et el em ents nis

ARTICLE

READS

5

1 AUTHOR:



Frédéric Hecht

Pierre and Marie Curie University - Paris 6

135 PUBLICATIONS 1,644 CITATIONS

SEE PROFILE

Les Projets, Cours DEA C++ et éléments finis

F. Hecht

Année 2001-2002

Contents

1	Le Four à micro onde	1
2	Navier-Stokes	1
2.1	P1-P2	2
2.2	P1-iso P2	2
2.3	P1 non conforme, P0+P1	2
2.4	Modèle de turbulence	2
3	Méthodes de Schwarz	3
3.1	Méthode avec recouvrement	3
3.2	Méthode sans recouvrement	3
3.3	Méthode basé sur les joints	4
3.4	Une autre alternative avec recouvrement	4
4	Génération de maillage	4
5	Electrotechnique	4
5.1	Formulation du problème et résolution	5
5.1.1	Discrétisation	5
5.2	Le projet	7
5.2.1	Partie: Dispositif électromagnétique fixe	8
5.2.2	Alternateur en mouvement	9
5.2.3	Résumé de la marche à suivre	9

1 Le Four à micro onde

En version Helmholtz il s'agit de résoudre un problème du type:

Trouver u une fonction définie sur l'ouvert Ω à valeur dans \mathbb{C} tel que

$$\omega^2 u + \nabla \cdot \varepsilon \nabla u = 0 \text{ dans } \Omega$$

avec des données aux bord imaginaires.

En version Maxwell fréquentiel il faut résoudre

$$i\omega\mu H + \nabla \times E = 0; \quad -i\omega\varepsilon + \nabla \times H = \sigma E \quad \text{dans } \Omega$$

des données aux bords du type $E \times n = g$ et $\nabla \cdot E = 0$.

Le couplage avec la température θ , ce fait comme suit:

$$-\nabla \cdot K \nabla \theta = f$$

dans l'objet à cuire, et où f est nulle hors de l'objet à cuire, et est égal à $u\bar{u}$ dans l'objet à cuire.

Le projet est la résolution de 2 équations découplées avec les données suivante $\varepsilon = 1$ dans l'air et $\varepsilon = 4$ dans la viande.

On pourra prendre des conditions de Dirichlet sur l'objet à cuire.

2 Navier-Stokes

Soit un fluide incompressible de vitesse $u \in H^1(\Omega)^d$ et pression $p \in L^2(\Omega)$, solution des équations de Navier-Stokes incompressible dans un domaine Ω de \mathbb{R}^d où $d = 2$ ou 3 .

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u - \nu \Delta u + \nabla p = 0$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

plus des conditions aux limites de type Dirichlet $u|_{\Gamma} = u_{\Gamma}$.

Un utilisant la dérivée particulaire pour approcher le terme $\frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u$, on obtient le schéma suivant:

$$\frac{u^{n+1} - u^n \circ \chi^n}{\Delta t} \approx \frac{\partial u}{\partial t} + u \cdot \nabla u$$

où $\chi^n(x)$ est la fonction de transport qui donne la position de la particule x au temps t^n et qui était en $\chi^n(x)$ au temps $t^{n-1} = t^n - \Delta t$. Donc, on a $\chi^n(x) = \zeta_x(t^{n-1})$ où $\zeta_x(t)$ est solution de l'équation différentielle rétrograde suivante $d\zeta_x/dt = u(\zeta_x(t))$ avec condition finale $\zeta_x(t^n) = x$.

Le domaine de calcul pourra être une marche de $\frac{1}{2}$ dans un canal hauteur 1.



Nous obtenons le schéma temporelle, suivant d'ordre 1.

$$u^{n+1} - \nu \Delta t \Delta u^{n+1} + \Delta t \nabla p^{n+1} = u^n \circ \chi^n$$

$$\nabla \cdot u = 0$$

Donc, il ne reste plus qu'à discrétiser le problème de Stokes en utilisant une méthode standard.

la résolution du problème de Stokes ce fera avec un algorithme UZAWA, gradient conjugué. L'algorithme d'Uzawa est basé sur la remarque suivante: Dans le problème de Stokes:

$$\left. \begin{aligned} \alpha u - \nu \Delta u + \nabla p &= f \\ \nabla \cdot u &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \text{in } \Omega \quad (1)$$

SI dans la première équation, l'on connaît la pression p alors on peut calculer la vitesse $u(p)$, et le problème devient trouver p , telle que $\text{div}(u(p)) = 0$. Ce problème est linéaire symétrique défini négatif, vous pouvez donc utiliser un gradient conjugué pour résoudre ce problème. De plus, il est possible d'implémenter le préconditionneur de Cahouet-Charbat qui se construit comme suit si nous avons un problème de Stokes dépendant du temps (le problème à résoudre est $\nabla \cdot ((\alpha Id + \nu \Delta)^{-1} \nabla)$, où Id est l'identité). Si nous négligeons les conditions aux limites alors tous les opérateurs différentiels commutent, le préconditionneur est $\alpha \Delta^{-1} + \nu Id$.

2.1 P1-P2

Ici l'espace V_h est obtenue en prenant un élément fini P^2 Lagrange sur chaque triangle, ou les degrés de liberté sont sur les sommets des triangles, et aux milieux des arêtes des triangles.

Les 6 fonctions des bases sont :

$4\lambda_i^T \lambda_j^T$ au milieu de l'arête i, j ,

$\lambda_i^T (2\lambda_i^T - 1)$ au sommet i

le problème est la construction des tableaux des arêtes, et si possible la renumérotation des inconnues

2.2 P1-iso P2

Ici l'espace V_h est obtenue en prenant un élément fini P^1 sur un maillage emboîté 2 fois plus fin. Le problème est entre autre la construction du maillage 2 fois plus fin, le problème d'injection d'un maillage dans l'autre.

2.3 P1 non conforme, P0+P1

Ici l'espace V_h est obtenue en prenant un élément fin i P^1 non conforme, c'est a dire que les fontions sont P^1 sur chaque élément et définies par leurs valeurs aux milieux des arêtes du maillage. La pression est plus bizarre puisque que c'est la somme de deux espaces d'elements finis classiques, l'espace des fonctions P^1 continues et l'espace des fonctions constantes par triangles. On remarquera que l'intersection des deux espaces est réduit aux fonctions constante.

Avec cette approche, il faut changer quelque peu la formulation du problème de Stokes.

Soit V_h, V_{0h} l'espaces d'éléments finis associé aux vitesses et soit P_{0h} l'espace des pressions constantes par triangles à moyenne nulle et soit P_{1h} l'espaces des pressions affines continues à moyenne nulle, alors la formulation variationnelle est:

Trouver $u_h, p_{0h}, p_{1h} \in V_h \times P_{0h} \times P_{1h}$ où que $u|_\Gamma$ est donné et telle que

$$\sum_{K \in \mathcal{T}_h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h + p_{0h} \nabla \cdot v_h + v_h \cdot \nabla p_{1h} dx = \int_\Omega f v_h \quad \forall v_h \in V_{0h}$$

$$\int_\Omega \nabla \cdot u_h q_{0h} + u_h \nabla p_{1h} dx = 0, \quad \forall (q_{0h}, q_{1h}) \in P_{0h} \times P_{1h}$$

2.4 Modèle de turbulence

Le modèle de Smagorinsky propose une loi de viscosité fonction du maillage et du gradient de vitesse

$$\nu|_T = 0.01|T| |\nabla u + \nabla u^T|$$

couplé avec les équations de Navier-Stokes.

On pourra tester le modèle avec des conditions aux limites de non glissement ou de glissement:

$$u \cdot n = 0, u \cdot s = 0 \text{ ou } u \cdot s + \beta \frac{\partial u \cdot s}{\partial n} = 0$$

Et puis on pourra aussi tester le modèle $k - \varepsilon$:

$$\nu = c_\mu \frac{k^2}{\varepsilon}$$

$$\partial_t k + u \nabla k - \nu |\nabla u + \nabla u^T|^2 - \nabla \cdot (\nu \nabla k) + \varepsilon = 0$$

$$\partial_t \varepsilon + u \nabla \varepsilon - c_k k |\nabla u + \nabla u^T|^2 - c_\varepsilon \nabla \cdot (\nu \nabla k) + \varepsilon + c_2 \frac{\varepsilon^2}{k} = 0$$

avec des conditions aux limites sur k et $\partial \varepsilon / \partial n$ (cf. Mohammadi-Pironneau (1994)).

3 Méthodes de Schwarz

On se propose de résoudre en parallèle l'EDP

$$-\Delta u = f \quad \text{dans } \Omega, \quad u|_\Gamma = g$$

On dispose pour cela d'un générateur de maillage emc2 et d'un solveur éléments finis. Le solveur lit une triangulation d'un fichier, construit la matrice du système linéaire et le résout par une méthode itérative (gradient conjugué préconditionné).

3.1 Méthode avec recouvrement

Le domaine Ω est l'union $\Omega_1 \cup \Omega_2$ telle que $\Omega_1 \cap \Omega_2$ soit non vide. La partie de frontière de $\Omega_1 \cup \Omega_2$ qui est strictement à l'intérieur de Ω_i sera notée Γ_{ij} , ($i, j = 1, 2$). L'algorithme consiste à boucler en m sur

$$-\Delta u_i^m = f \quad \text{dans } \Omega_i, \quad u_i^m|_{\Gamma - \Gamma_{ij}} = g, u_i^m|_{\Gamma_{ij}} = u_j^{m-1}$$

avec $i = 1, 2$.

On construira donc 2 triangulations, une pour chaque Ω_i , soit directement (plus facile), soit à partir d'une triangulation unique de (plus difficile mais plus élégant) avec deux frontières internes. On pourra utiliser

l'indicateur de région, "region", défini par `freefem+1` pour chaque triangle (voir doc de `freefem`). Il faudra alors extraire les 2 triangulations de la triangulation globale. Dans les 2 cas, Il faudra ensuite construire un tableau de correspondance des numéros des sommets de Γ_{ij} d'une triangulation à l'autre (utiliser le numéro des frontières et un test sur les coordonnées des points).

3.2 Méthode sans recouvrement

Le domaine est l'union de $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ mais $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ est réduit à une frontière Σ . L'algorithme consiste à boucler en m sur

$$-\Delta u_i^m = f \quad \text{dans} \quad \Omega_i, \quad u_i^m|_{\Gamma-\Gamma_{ij}} = g, \quad u_i^m|_{\Sigma} = \lambda_j^{m-1}$$

avec $i=1,2$ et, pour un ρ fixe choisi à l'initialisation et un choix de normale n , en déterminant le signe de la formule suivante en faisant un petit calcul 1D.

$$\lambda^m = \lambda^{m-1} \pm \rho \left(\frac{\partial u_1^{m-1}}{\partial n} - \frac{\partial u_2^{m-1}}{\partial n} \right)$$

L'implémentation se fait comme dans la méthode avec recouvrement et là aussi on a le choix entre deux méthodes pour construire les triangulations de .

Amélioration du solveur:

Si le temps le permet, on pourra remplacer les itérations de point fixe par des itérations de gradient conjugué pour λ . Et si vous avez encore plus de temps vous pouvez préconditionner le gradient conjugué.

3.3 Méthode basé sur les joints

Le domaine est l'union de $\overline{\Omega_1} \cup \overline{\Omega_2}$ mais $\overline{\Omega_1} \cap \overline{\Omega_2}$ est réduit à une frontière Γ_{12} .

L'algorithme consiste à trouver $(u_h^1, u_h^2, \lambda_h) \in V_h^1 \times V_h^2 \times M_h$ solution de système variationnelle suivant:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_i} \nabla u_h^i \cdot \nabla v_h + \int_{\Gamma_{ij}} \frac{\partial u_h^i}{\partial n_i} \lambda &= \int_{\Omega_i} f v_h \quad \forall v_h \in V_h^i \quad u_h^i|_{\Gamma_i-\Gamma_{ij}} = g, \quad \forall i = 1, 2 \text{ et } j = 2 - i \\ \int_{\Gamma_{ij}} (u_h^1 - u_h^2) \mu &= 0 \quad \forall \mu \in M_h \end{aligned}$$

où V_h^i est l'espace d'éléments fini P_1 Lagrange défini sur Ω_i , M_h est l'espace d'élément fini P_1 défini sur Γ_{12} et où n_i la normal extérieur à Ω_i

3.4 Une autre alternative avec recouvrement

Sous les même hypothèse que la méthode avec recouvrement.

Algorithm is an alternative which does not require an interpolation on boundaries but in the interior of the domains.

Let

$$V_i = \{v \in L^2(\Omega) : v|_{\Omega_i} \in H_0^1(\Omega_i), v|_{\Omega \setminus \Omega_i} = 0\}$$

Choose $\rho > 0$.

Begin loop

- Compute $u_1^{n+1} \in V_1$ such that

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \rho(u_1^{n+1} - u_1^n) v_1 + \int_{\Omega} \nabla(u_1^{n+1} + u_2^n) \cdot \nabla v_1 = \int_{\Omega} f v_1, \quad \forall v_1 \in V_1.$$

- Compute $u_2^{n+1} \in V_2$ such that

$$\int_{\Omega_1 \cap \Omega_2} \rho(u_2^{n+1} - u_2^n) v_2 + \int_{\Omega} \nabla(u_1^n + u_2^{n+1}) \cdot \nabla v_2 = \int_{\Omega} f v_2, \quad \forall v_2 \in V_2$$

¹<http://www-rocq.inria.fr/Frederic.Hecht/FreeFemPlus.htm>

End loop

It is in fact a variation of Schwarz algorithm because if we call $v_1^{n+1} = u_1^{n+1} + u_2^n$, $v_2^{n+1} = u_2^{n+1} + u_1^n$ we find that these verify a time dependant version of Schwarz algorithm. However the convergence is easier to show and the discretization is different. The convergence of this algorithm is given by the following result

Theorem 1(J.L.Lions)

Algorithm 1 converges in the sense that $u_i^n \rightarrow u_i^$ with $u_1^* + u_2^* = u$ solution of (1) and the decomposition is uniquely defined by*

$$\begin{aligned}(B + A)u_1 &= \frac{1}{2}(B + A)(u + u_1^0 - u_2^0) \quad \text{in } \Omega_{12}, \quad u_1|_{S_1} = 0, \quad u_1|_{S_2} = u \\ (B + A)u_2 &= \frac{1}{2}(B + A)(u + u_2^0 - u_1^0) \quad \text{in } \Omega_{12}, \quad u_2|_{S_2} = 0, \quad u_2|_{S_1} = u\end{aligned}$$

4 Génération de maillage

Implémentation de l'algorithme de génération de maillage des notes de cours.

5 Electrotechnique

Pour la modélisation numérique d'un ensemble comprenant un circuit électrique et un circuit magnétique. électromagnétique par un modèle où les équations magnétiques et électriques sont considérées simultanément [3][5]. Pour effectuer une telle modélisation, on est amené à résoudre un système d'équations aux dérivées partielles non linéaire couplé à un système d'équations qui peut-être également non linéaire. En ayant recours à une discrétisation spatiale de type éléments finis et une discrétisation temporelle, on aboutit à un système d'équations où les inconnues sont les courants dans le circuit électrique et les valeurs nodales du potentiel vecteur aux noeuds du maillage. A ce stade de la modélisation, deux approches peuvent-être développées. Dans la première on conserve l'ensemble des inconnues (courants et potentiel vecteur). Dans la seconde on se ramène à un système d'équations où les inconnues sont uniquement les valeurs nodales du potentiel vecteur.

5.1 Formulation du problème et résolution

La modélisation d'un système électromagnétique (voir par exemple [1]) dans le cas de l'approximation bidimensionnelle conduit classiquement à la résolution de l'équation:

$$\sigma \frac{\partial A}{\partial t} + \text{rot} (\nu \text{rot} A) - J = 0 \quad (2)$$

sur le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, en tenant compte des conditions aux limites. Dans cette expression σ représente la conductivité, $A \equiv (0, 0, A)$ le potentiel vecteur, ν la réluctivité, et $J \equiv (0, 0, J)$ la densité de courant.

Dans le cas de systèmes en mouvement, comme les machines tournantes, par exemple, la prise en compte de ce mouvement peut être faite en résolvant l'équation (2) dans deux repères différents. Dans ces conditions le terme $\sigma(v \wedge \text{rot} A)$ n'apparaît pas explicitement [2]. Pour modéliser l'interface entre ces deux repères, diverses techniques peuvent être utilisées, bande de mouvement [3], ligne de glissement [4].

La densité de courant dans l'équation (2) peut s'exprimer sous la forme:

$$J = J_0 + \sum_{k=1}^{n_p} i_k \psi_k \quad (3)$$

où J_0 représente une densité de courant imposée (source de courant donnée ou densité de courant équivalente dans le cas d'aimants permanents), i_k le courant dans la phase (ou branche) k , n_p le nombre de phases incluses dans le domaine Ω et ψ_k une fonction de $L^2(\Omega)$ définie comme étant la densité de courant dans l'espace, correspondant à un courant de 1 Ampère dans la phase k , (on a évidemment $\psi_k \equiv 0$ en dehors du support de la phase k).

Les équations du circuit électrique peuvent s'écrire pour les branches $k, 1 \leq k \leq n_p$, d'extrémités k_1 et k_2 sous la forme:

$$(V_{k_1} - V_{k_2}) = R_k i_k + \frac{d\Phi_k}{dt} + l_k \frac{di_k}{dt} \quad (4)$$

et pour les autres branches $q, n_p < q \leq n_b$, du circuit électrique, pouvant contenir des résistances, des inductances, des générateurs de tension :

$$(V_{q_1} - V_{q_2}) = e_q + R_q i_q + l_q \frac{di_q}{dt} \quad (5)$$

où n_b représente le nombre total de branches du circuit électrique, $(V_{k_1} - V_{k_2})$ ou $(V_{q_1} - V_{q_2})$ la différence de potentiel aux bornes de la branche k ou q , R_k ou R_q la résistance, l_k ou l_q les inductances non prises en compte dans les équations magnétiques, Φ_k le flux à travers un enroulement. Bien souvent dans les systèmes électrotechniques, le temps d'établissement du courant dans une diode par rapport aux constantes de temps du système étudié est négligeable.

Les relations (2-5) montrent comment les équations magnétiques et électriques sont couplées (le flux Φ_k dans (4) pouvant s'exprimer en fonction du potentiel vecteur A).

5.1.1 Discrétisation

Pour résoudre numériquement le problème, on peut utiliser une discrétisation spatiale par la méthode des éléments finis (P_1) et une discrétisation temporelle avec un schéma de type implicite (Euler rétrograde). L'équation 2 exprimée sous forme faible sera du type:

$A_{t+\Delta t} \in \mathcal{V}$, solution de

$$\frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma A_{t+\Delta t} \cdot \omega \, dx + \int_{\Omega} \nu(x, |\text{rot} A_{t+\Delta t}|^2) \text{rot} A_{t+\Delta t} \cdot \text{rot} \omega \, dx \quad (6)$$

$$= \int_{\Omega} \left[J_0 + \left(\sum_{k=1}^{n_p} i_k \psi_k \right) \right] \cdot \omega \, dx + \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma A_t \cdot \omega \, dx \quad \forall \omega \in \mathcal{V} \quad (7)$$

avec \mathcal{V} espace fonctionnel adéquat (i_k étant considéré à l'instant $t + \Delta t$ -voir ci-après la discrétisation des équations électriques-).

L'équation (7) peut être également exprimée sous forme matricielle (voir [2]) :

$$\left(\frac{\mathbf{T}}{\Delta t} + \mathbf{S} \right) A_{t+\Delta t} = F_{t+\Delta t} + \frac{\mathbf{T}}{\Delta t} A_t \quad (8)$$

cette équation matricielle est bien entendu non linéaire car les termes de la matrice \mathbf{S} dépendent de $A_{t+\Delta t}$. La correspondance entre les termes intégraux dans (7) et les termes matriciels dans (8) est immédiate. Le vecteur F peut s'écrire :

$$F = F_0 + \sum_{k=1}^{n_p} F_k i_k = F_0 + \mathbf{F} \mathcal{I}_{(n_p)} \quad (9)$$

F_0 étant relatif au terme source J_0 et avec

$$F_k = \left(\int_{\Omega} \psi_k \cdot \omega_l \, dx \right)_{l=1, n_s} \quad (10)$$

dans cette dernière expression n_s représente le nombre de degrés de liberté du potentiel vecteur sur le domaine d'étude Ω , ω_l les fonctions de base usuelles des éléments finis (P_1) et ψ_k est approché par:

$$\begin{cases} \psi_k(x) = 0 & \text{si } x \notin \text{phase } k \\ \psi_k(x) = \frac{\varepsilon_n N_n}{S_n} & \text{si } x \in \text{phase } k \end{cases} \quad (11)$$

pour l'encoche n appartenant à la phase k , $\varepsilon_n = \pm 1$ suivant le sens du bobinage, N_n représente le nombre de spires et S_n la section de l'encoche.

En ce qui concerne les équations du circuit électrique, l'application du schéma d'Euler implicite permet d'écrire les équations sous la forme:

$$(V_{k_1} - V_{k_2}) \Big|_{t+\Delta t} = \left(R_k + \frac{l_k}{\Delta t} \right) i_k \Big|_{t+\Delta t} + \frac{\Phi_k}{\Delta t} \Big|_{t+\Delta t} - \frac{l_k}{\Delta t} i_k \Big|_t - \frac{\Phi_k}{\Delta t} \Big|_t \quad (12)$$

ou bien

$$(V_{q_1} - V_{q_2}) \Big|_{t+\Delta t} = e_q \Big|_{t+\Delta t} + \left(R_q + \frac{l_q}{\Delta t} \right) i_q \Big|_{t+\Delta t} - \frac{l_q}{\Delta t} i_q \Big|_t \quad (13)$$

Dans l'équation (12), le flux Φ_k engendré dans les enroulements de la phase k , peut s'exprimer en fonction du potentiel vecteur par (ψ_k étant défini en (5-c,5-d)):

$$\Phi_k = h \int_{\Omega} A \cdot \psi_k dx \quad (14)$$

h représentant la longueur active des conducteurs suivant la troisième dimension. En remplaçant dans (14) le potentiel vecteur par son expression discrétisée et en tenant compte de (10) on peut écrire :

$$\Phi_k = h F_k^T \cdot A \quad (15)$$

ou bien sous forme matricielle

$$\Phi_{(n_p)} = h \mathbf{F}^T A \quad (16)$$

En considérant les équations électriques (4) et (5) (ou bien (12) et (13) sous forme discrétisée), on remarque que le circuit électrique est constitué des n_p branches internes (en relation directe avec le circuit magnétique, numérotées de 1 à n_p) auxquelles on ajoute les branches du circuit extérieur (numérotées de $(n_p + 1)$ à n_b). Lorsque les connexions sont faites, il en résulte un certain nombre de noeuds n_c . Nous prenons comme éléments inconnus dans le circuit électrique, les courants de branche $\mathcal{I}_{(n_b)} = (i_k)_{k=1, n_b}$ et les potentiels $V_{(n_c)} = (V_l)_{l=1, n_c}$ aux noeuds. En utilisant les lois d'Ohm-Kirchoff disant en substance que la somme des différences de potentiels des branches constituant une maille (chemin fermé) est nulle ainsi que, pour chaque nœud du circuit, la somme (algébrique) des courants des branches aboutissant au (ou partant du) nœud considéré. Le circuit électrique est linéaire et des considérations générales d'algèbre linéaire nous permettent d'exprimer les courants de branches internes à la machine $\mathcal{I}_{(n_p)} = (i_k)_{k=1, n_p}$ en fonction des forces électromotrices $E_{(n_p)} = (em_j)_{j=1, n_p} = -(\frac{d\Phi_j}{dt})_{j=1, n_p}$, par une relation du type

$$\mathcal{I}_{(n_p)} = \mathbf{Y} E_{(n_p)} + I_0 \quad (17)$$

\mathbf{Y} est une matrice $n_p \times n_p$, qui dans le cas présent est symétrique et positive (matrice d'admittance dans la théorie des réseaux électriques). En reportant (17) dans (3) et en utilisant (14), l'équation (7) devient

$A_{t+\Delta t} \in \mathcal{V}$, solution de

$$\left. \begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma A_{t+\Delta t} \cdot \omega dx + \int_{\Omega} \nu(x, |rot A_{t+\Delta t}|^2) rot A_{t+\Delta t} \cdot rot \omega dx \\ & + \frac{h}{\Delta t} \sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij} \left(\int_{\Omega} \psi_i \cdot \omega dx \right) \left(\int_{\Omega} \psi_j \cdot A_{t+\Delta t} dx \right) = \\ & \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma A_t \cdot \omega dx + \frac{h}{\Delta t} \sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij} \left(\int_{\Omega} \psi_i \cdot \omega dx \right) \left(\int_{\Omega} \psi_j \cdot A_t dx \right) + \int_{\Omega} \left(J_0 + \sum_{i=1}^{n_p} I_{0,i} \psi_i \right) \cdot \omega dx \end{aligned} \right\} \quad \forall \omega \in \mathcal{V} \quad (18)$$

la matrice d'admittance $\mathbf{Y} = (y_{ij})$ étant évaluée en $t + \Delta t$ ou t selon la stratégie retenue. Cette formulation peut être vue comme une généralisation de la technique utilisée en [6]. C'est une équation intégral-différentielle en A , à caractère symétrique défini positif.

Le système non linéaire (18) (à considérer à chaque pas de temps) peut être résolu en combinant des méthodes de méthodes de gradient conjugué préconditionné, car il correspond à la minimisation de la fonctionnelle suivante:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(A_{t+\Delta t}) = & \frac{1}{2} \left[\int_{\Omega} \chi(x, |rot A_{t+\Delta t}|^2) dx + \int_{\Omega} \sigma A_{t+\Delta t} \cdot A_{t+\Delta t} \cdot dx \right. \\ & + \left. \frac{h}{\Delta t} \sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij} \left(\int_{\Omega} \psi_i \cdot A_{t+\Delta t} dx \right) \left(\int_{\Omega} \psi_j \cdot A_{t+\Delta t} dx \right) \right] \\ & - \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} \sigma A_t \cdot A_{t+\Delta t} dx - \frac{h}{\Delta t} \sum_{i,j=1}^{n_p} y_{ij} \left(\int_{\Omega} \psi_i \cdot A_{t+\Delta t} dx \right) \left(\int_{\Omega} \psi_j \cdot A_t dx \right) \\ & - \int_{\Omega} \left(J_0 + \sum_{i=1}^{n_p} I_{0,i} \psi_i \right) \cdot A_{t+\Delta t} dx \end{aligned} \quad (19)$$

Où $\chi(x, t) = \int_0^t \nu(x, \tau) d\tau$.

5.2 Le projet

Nous allons étudier un alternateur représenté par la figure 1.

Les définitions des numéros de référence physique des sous domaines:

- 0 air
- 1 fer feuilleté du rotor (non conducteur)
- 2 fer feuilleté du stator (non conducteur)
- 3 cuivre du rotor (conducteur)
- 19 bobinage alimentation (excitation)
- 20 bobinage inducteur (sortie)
- 21 bobinage alimentation (excitation)
- 22 bobinage inducteur (sortie)

Les définitions des numéros de référence physique des sommets, et frontières:

- 0 interne
- 1 ligne de glissement
- 2 bord supérieur $\pi/12$ (sauf ligne de glissement)
- 3 bord inférieur $-\pi/12$ (sauf ligne de glissement)
- 4 centre
- 5 bord extérieur

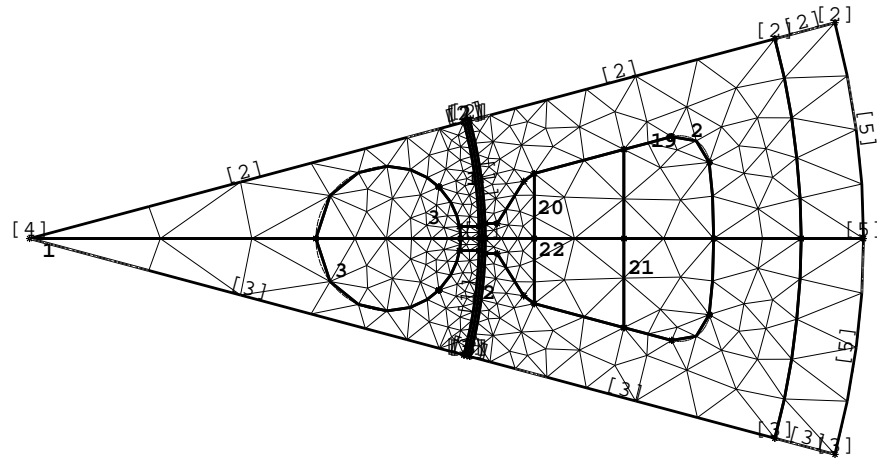


Figure 1: Maillage de l'alternateur complet

Les maillages sont dans les fichiers , et l'unité est le millimètre

- `alter012.msh` pour le 1/12 de l'alternateur (rotor+stator).
- `stator012.msh` pour le 1/12 du stator
- `rotor012.msh` pour le 1/12 du rotor

Remarque toutes les données physiques sont dans le système d'unité *MKSA*.

5.2.1 Partie: Dispositif électromagnétique fixe

Cette machine dont la section transversale ($\phi_{ext} = 80mm$) et le schéma de bobinage sont , comprend au stator un enroulement d'excitation et 2 enroulements d'induits répartis dans 12 encoches. Quant au rotor, il est constitué de 12 barres en court circuit. Etant donné les répétitivités géométriques et électriques, le domaine de calcul peut se réduire à 1/12 ème de la machine, avec des conditions antipériodicité;

Le bobinage de l'alimentation est faite avec 50 spires par 1/2 encoche (sous domaine 19 ou 21), et le bobinage de l'inducteur est faire avec 30 spires par 1/2 encoche (sous domaine 20 ou 22).

Les caractéristiques des matériaux magnétiques (Fer) sont approchées en utilisant la relation suivant.

$$\nu_F(|B|^2) = \varepsilon + (C - \varepsilon) \frac{(|B|^2)^\alpha}{(|B|^2)^\alpha + T} \quad (20)$$

avec $\varepsilon = 0.51636 \cdot 10^{-3}$, $\alpha = 5.4192$, $C = 0.17577$, $T = 8758.756$ pour les deux parties en fer du stator et rotor .
donc on a

$$\nu = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7}} \begin{cases} \nu_F & \text{dans le fer} \\ 1 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (21)$$

Le système électromagnétique dans lequel une partie massive en cuivre est conductrice et donc soumise à des courants de Foucault (partie C de numéro de référence **3** figure 1); ce système est alimenté par une tension de de 15V sinusoïdale (pour simuler le mouvement) de fréquence 50 hertz, avec un générateur qui a un résistance interne de $1ohm$.

Les courants de Foucault (densités) se développant dans la partie conductrice ($C \sigma_C = 50 \cdot 10^6$) et on a $\sigma = 0$ dans toutes les autres sous domaine qui sont non conducteur, il n'y a pas de problème de conservation des courant de Foucault car les barres sont interconnectées, et car que nous avons des conditions antipériodicités. Dans cette application le circuit électrique se réduit à une maille. Si \mathbf{R} représente la résistance totale du circuit, la matrice d'admittance définie en (17) , dans le cas où l'on ne tient pas compte des inductances de fuite, est tout simplement le scalaire $\frac{1}{\mathbf{R}}$.

5.2.2 Alternateur en mouvement

Cet alternateur dont le fonctionnement n'est pas classique, a été spécialement conçu par la société VALEO. D'un point de vue informatique, la numérotation des inconnues ce fera via l'introduction de 2 maillages, un maillage du rotor (partie tournante) et un maillage du stator partie fixe). Le mouvement est modélisé de façon incrémentale en changement la numérotation des points communs de la ligne de glissement au fils de itérations.

Le but de ce projet est de résoudre ce problème pour un point de fonctionnement correspondant à une vitesse de rotation de 3000 tr/min et une alimentation en tension $E=15v$, où l'alternateur débite sur une résistance de $1000Ohm$.

5.2.3 Résumé de la marche à suivre

1. Il faut commencer par mettre en œuvre les conditions aux limites de type périodique et anti-périodique.

Pour modéliser ces conditions aux limites, nous allons introduire deux tableaux dl et $coef$ de dimension le nombre sommets.

Soit R la rotation de $\pi/6$ correspond à la périodicité.

soit i et j deux sommets telle que le sommet j soit image par R du sommet i , donc on a :

- si condition de périodicité alors on a $dl[i] = dl[j]$ et $coef[i] = coef[j]$.
- si condition de antipériodicité alors on a $dl[i] = dl[j]$ et $coef[i] = -coef[j]$.

$dl[i]$ donne le numéro du degré de liberté i associé au sommet i . Bien sur les degrés de liberté sont numérotés de manière consécutive de de 0 à $NbDL - 1$.

La valeur de la solution (stocké dans un tableau x de taille $NbDL$) au sommet i est donné par $coef[idl] \times x[idl]$ où $idl = dl[i]$.

Attention maintenant la taille des vecteurs inconnue, second membre, et donné initial sont de taille $NbDL$.

Pour construire ces tableaux, l'on commencera par construire le tableau qui a un sommet i du bord inférieur (de ref 2, 1) associe le sommet j du bord supérieur (de ref 3, 1) qui est l'image de i par r , puis après il faut numéroter les degrés de libertés.

Au niveau de la matrice pour l'assemblage il faut changer

$$a(dl[iv], dl[jv]) = coef(iv) * coef(jv) * al(iloc, jloc)$$

où iv (resp. jv) est le sommet $iloc$ (resp. $jloc$) du triangle courant. De fait, il faut changer dans les deux routines qui calcule le second membre et qui calcule le produit matrice vecteur.

Dans un premier temps, vous testerez les conditions de périodicité sur un laplacien.

2. Vous allez mettre la partie non linéaire dans le gradient conjugué. Pour cela il suffit de changer le calcul de $ro = \rho$. Le ρ correspond au calcul du ρ qui minimize la fonctionnelle \mathcal{E} correspondant en $x + \rho h$. Donc nous avons $D\mathcal{E}(x + \rho h).h = 0$ et la différentielle $D\mathcal{E}$ de \mathcal{E} est définie par l'équation statique

$$\int_{\Omega} \nu(ref, |\nabla(x + \rho h)|^2)(x + \rho h)h = \int_{\Omega} J_0 h \quad (22)$$

Où J_0 est la densité de courant donné si il passe un courant de un ampère dans la phase dans la phase d'excitation (la phase 1 ici). Nous avons donc $J_0 = \psi_1$ où ψ_1 est défini par (11). Vous pourrez calculer le vecteurs F_k de l'équation (10) et remarque que l'on a $\int_{\Omega} J_0 h$ est égale au produit scalaire de F_k et de h , où h est tantôt vue comme un vecteur ou tantôt vue comme la fonction \tilde{h} associé au vecteur h qui définie par

$$\tilde{h} = \sum_{i=0}^{nv-1} h[dl[i]] coef[i] w_i$$

3. Il faut ajouter les termes en temps de l'équation (18) plus les termes (du coef. ij de la matrice) qui est de la forme

$$\frac{h}{\delta t} \sum_{kl} y_{kl} F_k[i] F_l[j]$$

$$\text{où } F_k[i] = \int_{\Omega} \psi_k \cdot \omega_i$$

Ici le circuit électrique a deux phases indépendantes donc la matrices admittance $Y = (y_{ij})_{(i,j)=1,2}$ est diagonale.

La phase 1 d'alimentation est formée d'une résistance R_a et d'un générateur V_a , et la phase 2 induite est juste resistance R_i . Donc nous avons:

$$y_{11} = \frac{1}{R_a}, \quad y_{22} = \frac{1}{R_i}$$

Le terme sources de l'équation (18) sont donc

$$I_{0,1} = \frac{V_a}{R_a}, \quad I_{0,2} = 0, \quad J_0 = 0/$$

Nous avons tous les termes pour calculer et résoudre l'équation (18).

4. Prise en compte du mouvement, pour cela il faut lire les 2 maillages (rotor et stator). Pour chaque pas de temps i le stator a subit une rotation R_i d'angle $i \times (15/16)^\circ$ de degrés (il y a 16 intervalles sur la ligne de glissement du demi maillage).

Il faut retrouver les sommets k et l communs entre le rotor (tourné de R_i) et le stator pour définir les tableaux dlr et dls des degrés de liberté des sommets, les valeurs de tableau $coefr$ et $coef_s$ sont telle que $coefr[k] = (-1)^m coef_s[l] = 1$ ou m est le nombre de rotation de 30° qu'il faut pour passer du sommet k du rotor au sommet l du stator.

5. Pour finir, il faut faire un rapport et présenter les resultats.

References

- [1] D. SHEN, G. MEUNIER, J.L. COULOMB, J.C. SABONNADIÈRE, *Solution of magnetic field and electrical circuit combined problem*, IEEE-Mag.21, pp 2288-2291, 1985.
- [2] F. BOUILLAUT, A. RAZEK, *Prise en compte du mouvement dans la détermination numérique des courants de Foucault dans une structure électromagnétique*, Revue de Physique Appliquée, tome 18, pp 103-106, 1983.
- [3] B. DAVAT, Z. REN, M. LAJOIE-MAZENC, *The movement in field modeling*, IEEE-Mag.21, pp 2296-2298, 1985.
- [4] A. MARROCCO, *Analyse numérique de problèmes d'électrotechnique*, Ann. Sc. Math. Québec, vol 1, No 2, pp 271-296, 1977.
- [5] F. PIRIOU, A. RAZEK, *Coupling of saturated electromagnetic systems to non-linear power electronic devices*, IEEE-Mag.24, pp 274-277, 1988.
- [6] A. MARROCCO, *Computation of the coil and eddy currents in a voltage supplied system*, Conférence Franco-Soviétique, Novosibirsk juin 1981.
- [7] F. HECHT, A. MARROCCO, F. PIRIOU, A. RAZEK, *Modélisation électromagnétique d'un alternateur couplé à un circuit extérieur*, Proceedings of " Team Workshop and Meeting on the Applications of Eddy-Currents Computations, Bièvres march 1989, pp 265-278.