Homework 4

Page 1 — سوالات فصل 2 — علیرضا فروزنده

سوال ۱)

$$\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2X = 2\begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - 2X = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = 2X \Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} = 2X$$

$$\Rightarrow X = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0.5 & -1.5 \end{bmatrix}$$

سوال ۲)

a) $$\begin{bmatrix} -2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ 0 & 6 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -11 \\ -10 & 13 \end{bmatrix}$$

b) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -5 \\ 1 \end{bmatrix}$$

سوال ۳) a) این ماتریس معکوس ندارد زیرا مربعی نیست.

b) $A = \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{xw - yz} \begin{bmatrix} w & -y \\ -z & x \end{bmatrix}$

c) این ماتریس و معکوس ندارد زیرا مربعی نیست.

سوال ۷) (امتیازی)

$$u \times v = \begin{bmatrix} V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_x & u_y & u_z \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = i(u_y V_z - u_z V_y)$$

$$\rightarrow -j(u_x V_z - u_z V_x) + k(u_x V_y - u_y V_x)$$

$$\begin{bmatrix} V_x & V_y & V_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & u_z & -u_y \\ -u_z & 0 & u_x \\ u_y & -u_x & 0 \end{bmatrix} =$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} (\cancel{-}V_y u_z) + (V_z u_y) & (V_x u_z) + (-V_z u_x) & (-V_x u_y) + (-V_y u_x) \end{bmatrix}$$

Page 3

سوال ۱۰) محاسبه دترمینان

$$\begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow ۲\,(۲۱-۰) = \boxed{۴۲}$$

$$\begin{bmatrix} ۲۱ & -۴ \\ ۱۰ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \overbrace{(۲۱\times ۷)}^{۱۴۷} - \overbrace{((-۴)\times ۱۰)}^{-۴۰} = \boxed{۱۸۷}$$

سوال ۱۱) محاسبه معکوس ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{۱}{\underbrace{\det(A)}_{۴۲}} \begin{bmatrix} ۲ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۳ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۷ \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} ۲۱ & -۴ \\ ۱۰ & ۷ \end{bmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \frac{۱}{\underbrace{\det(B)}_{۱۸۷}} \begin{bmatrix} ۷ & ۴ \\ -۱۰ & ۲۱ \end{bmatrix}$$

سوالات فصل 3

سوال ۱)

جمع پذیری تابع را بررسی می‌کنیم:

$$T\big((x_1, y_1, z_1) + (x_2, y_2, z_2)\big) = T(x_1, y_1, z_1) + T(x_2, y_2, z_2) =$$

$$= \big(x_1 + y_1 + x_2 + y_2\,,\ (x_1 + x_2) - 3\,,\ z_1 + z_2\big)$$

ضرب در عدد حقیقی:

$$T\big(\lambda(x_1, y_1, z_1)\big) = T(\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1) =$$

$$= (\lambda x_1 + \lambda y_1\,,\ \lambda x_1 - 3\,,\ \lambda z_1)$$

به نظر می‌رسد که جمع پذیری و ضرب در عدد حقیقی برقرار است پس تابع خطی است.

نمایش ماتریس استاندارد:

$$Av = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x+y \\ x \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Page 5

سوال ۵)

$$R=\begin{bmatrix} \cos(30)+(1-\cos 30) & (1-\cos 30)(-\sin 30) & (1-\cos 30)(\sin 30) \\ (1-\cos 30)(-\sin 30) & (\cos 30)+(1-\cos 30) & (1-\cos 30)(-\sin 30) \\ (1-\cos 30)(\sin 30) & (1-\cos 30)(-\sin 30) & (\cos 30)(1-\cos 30) \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow R=\begin{bmatrix} 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{bmatrix}$$

سوال ۷)

$$S=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$ ماتریس تغییر مقیاس :

$$T=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$ ماتریس انتقال :

ماتریس تبدیل واحد به صورت $M=T.S$ خواهد بود :

$$M=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{bmatrix}$$

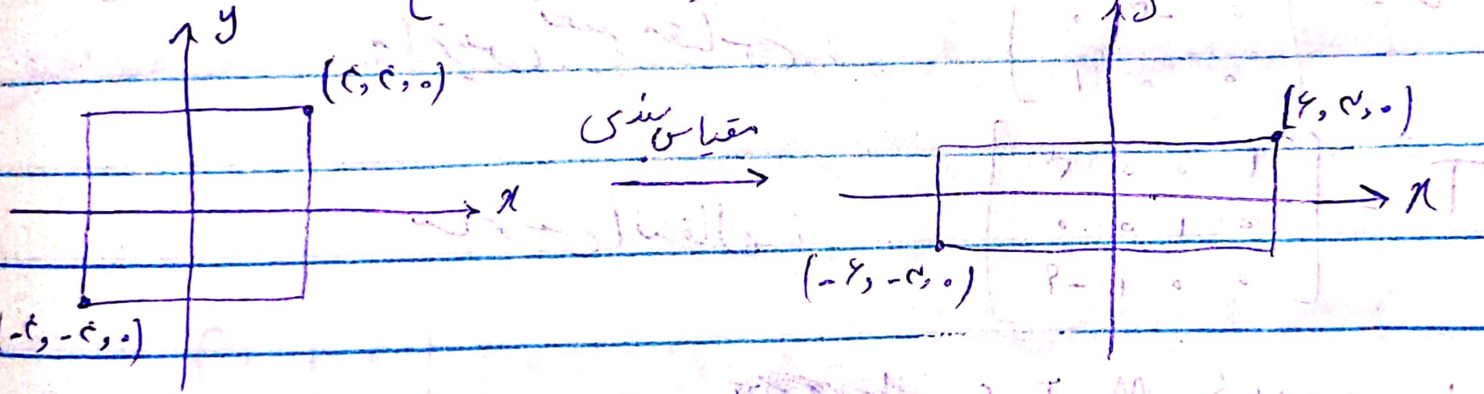
Page 6

سوال ۹)

$$S=\begin{bmatrix}1.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.75 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$[-4, -4, 0]\begin{bmatrix}1.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.75 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[-6, -3, 0]$$

$$[4, 4, 0]\begin{bmatrix}1.5 & 0 & 0\\ 0 & 0.75 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=[6, 3, 0]$$



سوال ۱۵)

الف)

$$[x, y, z, 0]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ b_x & b_y & b_z & 1\end{bmatrix}=[x, y, z, 0]$$

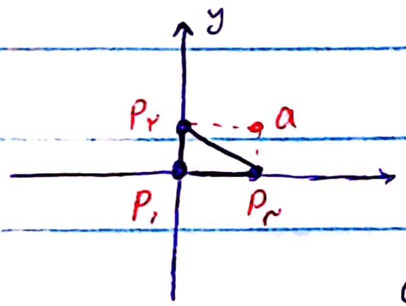
ب)

$$[x, y, z, 1]\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ b_x & b_y & b_z & 1\end{bmatrix}=[(x+b_x), (y+b_y), (z+b_z), 1]$$

ادامه سوال ۱۵) انتقال در قسمت الف تغییری ایجاد نمی‌کند
اما در قسمت ب نقاط و بردار ها را منتقل می‌کند.
انتقال مختصات یک بردار در موقعیت استاندارد منطقی نیست زیرا
تغییری در خصوصیات بردار مانند طول یا جهت انجام نمی‌شود و ممکن
است زائد و اضافی باشد.

سوال ۱۹) $P_1=(0,0,0)$ ، $P_2=(0,1,0)$ ، $P_3=(2,0,0)$

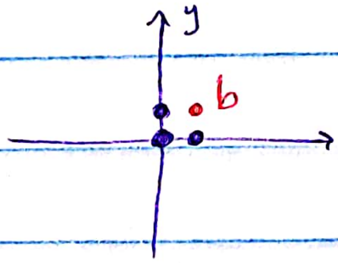
a)



$(0,0,0)$
$(0,\frac{1}{3},0)$
$(\frac{2}{3},0,0)$

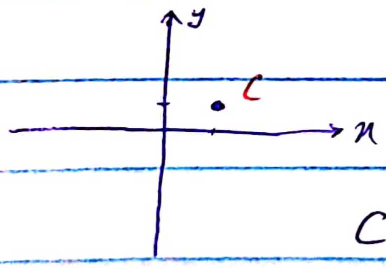
$a=(\frac{2}{3},\frac{1}{3},0)$

b)



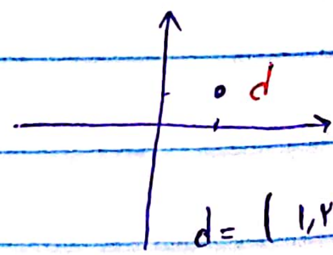
$b=(0.2,0.2,0$

c)



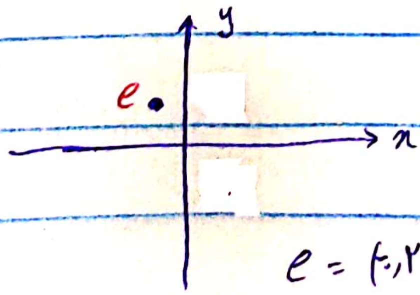
$c=(1,0.5,0)$

d)



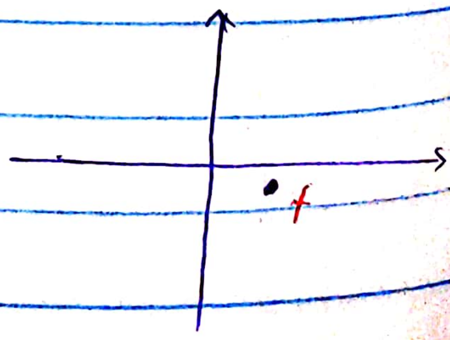
$d=(1.2,0.6,$

e)



$e=(-0.2,0.5,0)$

f)



$f=(1,-0.3,0)$