16. 我们一共有三枚硬币,其中一枚的两面都画有正面的图像,另一枚的两面都画有反面的图像,而第三枚硬币是正常的硬币,两面的图像刚好是一正一反.现在从中随机地抽取一枚硬币进行抛掷,得到正面朝上,现在问这枚硬币的另一面画有反面图像的概率有多大?

17. 有一批产品共100件.按规定,从中随机地抽取4件产品进行检查,只要这4件产品中有一件不合格,就拒绝这批产品.如果这批产品中含有5件不合格品,这批产品被拒绝的概率是多少?

18. 令 A 和 B 是两个事件.假定 $\mathrm{P}(B)>0$,证明$\mathrm{P}(A\cap B|B)=\mathrm{P}(A|B)$.

1.4 节　全概率定理和贝叶斯准则

19. 爱丽丝在一个文件柜中寻找她的学期报告.她的文件柜有若干个抽屉.她知道她的学期报告在第 j 个抽屉的概率为 p_j(大于0).由于抽屉很乱,即使学期报告真的在第 i 个抽屉内,爱丽丝在第 i 个抽屉内找到学期报告的概率为 d_i.现在假定爱丽丝在某个抽屉内找,不妨设在第 i 个抽屉内找,而没有找到.证明在这个事件发生的条件下,她的学期报告在第 j 个抽屉内的概率是

$$\frac{p_j}{1-p_id_i},\quad 若\ j\neq i,\qquad\qquad \frac{p_i(1-d_i)}{1-p_id_i},\quad 若\ j=i.$$

20. **弱者利用策略在比赛中获利**.鲍里斯准备与一位对手进行两局的象棋比赛.他希望找出好的策略以提高他赢的概率.每局棋的结果有三种可能:赢,输,平局.如果在两局以后的积分相等,以后就采用突然死亡法,一直打下去,直到一方赢得一局,从而决定比赛的胜负.鲍里斯有两种不同的下棋风格,**保守的**和**进攻的**,并且鲍里斯在每一局都能自如地决定采用其中的一种风格,而与前一局的风格无关.当采用保守的风格时,和局的概率为 $p_d(p_d>0)$,输的概率为 $1-p_d$.当采用进攻的风格时,他赢的概率为 p_w,输的概率为 $1-p_w$.鲍里斯在突然死亡阶段总是采用进攻的风格,但是在第一、二局可以随意采用不同的风格.

(a) 找出下列几种策略下,鲍里斯得胜的概率:

(i) 在第一、二局采用进攻风格;

(ii) 在第一、二局采用保守风格;

(iii) 只要他的分数领先,就采用保守风格,其他情况采用进攻风格.

(b) 若 $p_w<1/2$,那么不管采取什么风格,鲍里斯均是一个游戏中的弱者.证明当采用策略(iii)的时候,鲍里斯可以有好于50%的赢棋机会(依赖于 p_w 和 p_d 的值).你怎样解释这种现象?

21. 两个人轮流从一个罐子中随机地取出一个球,罐子里放有 m 个白球和 n 个黑球.首先从罐子里取出白球者为胜.为计算第一个取球者获胜的概率,导出一个递推公式.

22. 一共有 k 个罐子,每个罐子中有 m 个白球和 n 个黑球.将罐子1中随机地取出一个球放到罐子2中,再在罐子2中随机地取出一个球放到罐子3中,如此往复,直到最后,从罐子 k 中随机地取出一个球.证明最后取出的球是白球的概率与第一次取出白球的概率是一样的,即 $m/(n+m)$.

23. 一共有两个罐子,最初两个罐子中含有相等个数的球.现在进行一次球的交换,即同时从各自的罐子中随机地拿出一个球放到对方的罐子中去.经过4次这样的交换以后,两个罐子的状态保持不变的概率是多少?所谓状态保持不变即原来在哪个罐子的球还是在哪个罐子中.

24. **犯人的难题**.已知三个犯人中有两个犯人将要被释放,但在事情还未公布之前,被释放犯人的身份是保密的.其中一个犯人要求看守人告诉他,在他的两个狱友中哪一个将被释放.看守拒绝了他的要求,理由如下:“在现有的信息之下,你被释放的概率为2/3.我若告诉你这个信息,将在你和另一个犯人之间确定哪一个人被释放,所以你被释放的概率就将变成1/2.''这个看守所列理由的错误在哪里?

25. **两个信封之谜**.你收到两个信封,每个信封内有若干钞票,钞票的数目都是整数(以元为单位),但两个信封内的钱数是不相同的.两个信封内的钱数可以认为是未知的常数.当你随机地打开一个信封以后,这个信封中的钱就是你的了.为了多拿钱.你还可以改变主意,决定拿另一个信封中的钱.一个朋友声称有一个策略,可以使拿到钱数较大的信封的概率超过1/2.其方法如下:你连续地抛掷一枚硬币,直到出现正面出现为止,令 X 为你抛掷硬币的次数再加上1/2.如果你头一次打开的信封里的钱数少于 X,你就换信封,否则不换.你的朋友的方法可行吗?

26. **归纳法的悖论**.考虑一个命题,但不知道命题的真伪.如果我们看到许多例子与这个命题相匹配,那么我们就增加了对这个命题为真的信心.这些推论方法称为(从哲学意义上,不是从数学上的)归纳推论法.现在考虑一个命题“所有的母牛是白色的”.其等价的命题为“凡不是白色的就不是母牛”.当我们观察到几只黑色的乌鸦的时候,我们的观察显然与这个命题是相适应的.但是这些观察会不会使得命题“所有的母牛是白色的”为真的可能性更大一些呢?

为分析这种情况,我们考虑一个概率模型:

$$A: \text{所有的母牛是白色的},$$

$$A^c: 50\% \text{ 的母牛是白色的}.$$

令 p 是事件 A 发生的先验概率 $\mathrm{P}(A)$.我们分别以概率 q 和 $1-q$ 观察一头母牛和一只乌鸦.这个观察与 A 是否发生是独立的.假设 $0<p<1, 0<q<1$,并且所有的乌鸦是黑色的.

(a) 给定事件 B={观察到一个黑色的乌鸦},求 $\mathrm{P}(A|B)$ 的值;

(b) 给定事件 C={观察到一头白色的母牛},求 $\mathrm{P}(A|C)$ 的值.

27. 爱丽丝和鲍勃一共有 $2n+1$ 枚对称的硬币.鲍勃连续抛掷了 $n+1$ 枚硬币,而爱丽丝抛掷 n 枚硬币.证明鲍勃抛出的正面数比爱丽丝抛出的正面数多的概率为1/2.

28. *关于条件概率的全概率公式. 设 $C_1,\cdots,C_n$ 为 n 个互不相容的事件, 并且形成样本空间的一个分割. 令 A 和 B 是两个事件, 满足 $\mathrm{P}(B\cap C_i)>0$ 对一切i成立. 证明下式成立

$$\mathrm{P}(A|B)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(C_i|B)\mathrm{P}(A|B\cap C_i).$$

解 首先, 下式成立

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}\left((A\cap B)\cap C_i\right),$$

再利用乘法规则得到

$$\mathrm{P}\left((A\cap B)\cap C_i\right)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C_i|B)\mathrm{P}(A|B\cap C_i).$$

综合两个等式得到

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C_i|B)\mathrm{P}(A|B\cap C_i),$$

上式两边除以 $\mathrm{P}(B)$ 并利用公式 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A\cap B)/\mathrm{P}(B)$, 就可以得到关于条件概率的全概率公式.

29. * 设 A,B 为两个事件, 满足 $\mathrm{P}(A)>0$和$\mathrm{P}(B)>0$. 我们称事件 B **暗示**事件 A, 如果它们满足 $\mathrm{P}(A|B)>\mathrm{P}(A)$;若它们满足 $\mathrm{P}(A|B)<\mathrm{P}(A)$ 则称事件 B 并**不暗示**事件 A.

(a) 证明事件 B 暗示事件 A 的充要条件是事件 A 暗示事件 B.

(b) 假设 $\mathrm{P}(B^c)>0$. 证明 B 暗示 A 的充要条件是 B^c 不暗示 A.

(c) 假定我们已经知道一个宝物藏匿于两个地点之一, 其概率分别为 β和$1-\beta$. 假定已知这个宝物藏匿于第一个地点, 在那个地点进行发掘, 找到它的概率为 $p>0$. 现在证明, 假定我们在第一个地点进行发掘, 而没有找到这个宝物, 这个事件“暗示”宝物在另一个地点.

解 (a) 利用等式 $\mathrm{P}(A|B)=\mathrm{P}(A\cap B)/\mathrm{P}(B)$ 可知, B 暗示 A 的充要条件是 $\mathrm{P}(A\cap B)>\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)$, 利用对称性可知, 这个条件也是 A 暗示 B 的充要条件.

(b) 由于 $\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(B^c)=1$, 我们有

$$\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(A|B)+\mathrm{P}(B^c)\mathrm{P}(A|B^c),$$

这个等式蕴涵

$$\mathrm{P}(B^c)(\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A|B^c))=\mathrm{P}(B)(\mathrm{P}(A|B)-\mathrm{P}(A)).$$

这样, $\mathrm{P}(A|B)-\mathrm{P}(A)>0$ (B 暗示 A)成立的充要条件为 $\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A|B^c)>0$($B^c$ 并不暗示 A).

(c) 设 A 和 B 由下式给出

$$A=\{\text{宝物是在第二个地点}\},$$

$$B=\{\text{在第一个地点并未发现宝物}\}.$$

利用全概率公式,我们得到

$$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A^c)\mathrm{P}(B|A^c)+\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B|A)=\beta(1-p)+(1-\beta),$$

故

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1-\beta}{\beta(1-p)+(1-\beta)}=\frac{1-\beta}{1-\beta p}>1-\beta=\mathrm{P}(A),$$

这说明 B 暗示 A.

1.5 节　独立性

30. 有一天,猎手带着他的两头猎犬跟踪某动物的踪迹.他们来到一个三岔口.猎手知道两条猎犬会相互独立地以概率 p 找到正确的方向.因此他让两条猎犬选择它们的方向.如果两头猎犬选择同一方向,他就沿着这个方向走.若两头猎犬选择不同的方向,他就随机地选择一个方向走.这个策略是否比只让一条猎犬选择方向优越?

31. **在噪声通道中的通信**.一串二进制信号(0或1)在噪声通道内传输.假设通道以概率 p 传送信号0,以概率 $1-p$ 传送信号1.错误传输的概率分别为 ϵ_0 和 ϵ_1(见图1.18).在传输中,不同信号的误差是相互独立的.

(a) 问能够正确地传送一个随机地选择的第 k 个信号的概率有多大?

(b) 假定传送的信号串为1011,这个信号串能够被正确地传输的概率有多大?

(c) 为了提高传输的可靠性,每个信号重复传输3次,译码规则采用多数决定制.换言之,在传送信号0(1)的时候,实际上传送的是000(111).在译码的时候,采用少数服从多数的原则,例如收到的信号为010,则译成信号0,若收到的信号为110,则译成信号1.作了这样的编码和译码的规定以后,信号0被正确传输的概率有多大?

(d) 在(c)中, ϵ_0 为何值才能使信号0被正确传输的概率增大?

(e) 假设编码和译码的规则采用(c)中的规定.当接收端得到101的时候,对方发信号0的概率有多大?

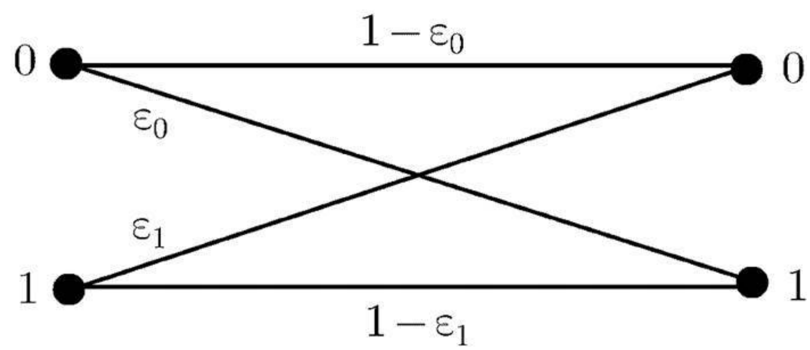

图 1.18　二进制通信通道中的传输误差概率

32. **国王的兄弟姐妹**. 国王只有一个兄弟或姐妹, 那么国王有一个兄弟的概率有多大? 此处假定国王的母亲生男或生女的概率为1/2, 而且各次生育是相互独立的. 注意回答此问题的时候, 你必须说清楚附加的假设.

33. **利用有偏的硬币作出无偏的决策**. 爱丽丝和鲍勃想利用一枚均匀的硬币来决定他们去看歌剧还是看电影. 不幸的是, 他们只有一枚有偏的硬币(而且他们并不知道偏的程度). 怎样利用一枚有偏的硬币作出无偏的决策, 即以1/2的概率看电影, 1/2的概率看歌剧呢?

34. 一个电子系统由许多相同的元件构成. 每个元件有效的概率为 p, 并且各元件之间是否有效是相互独立的. 这些元件由三个子系统构成(见图1.19). 这个系统称为有效的, 如果在图中由 A 到 B 有一条通路, 且通路上每一个元件是有效的. 这与图中的三个子系统同时有效是等价的. 三个子系统同时有效的概率有多大?[12]

[12]这个概率也是整个系统有效的概率. ——译者注

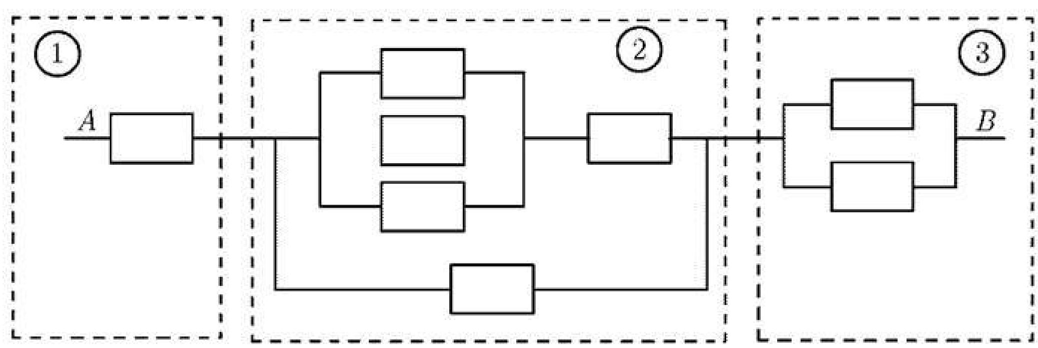

图 1.19　一个由许多相同元件构成的系统, 是三个子系统串联而成. 这个系统称为有效的, 如果存在由 A 到 B 的一条通路, 且通路上的每一个元件都是有效的

35. **n 选 k 的系统的可靠性**. 一个系统由 n 个相同元件组成, 其中每一个元件有效的概率为 p, 并且其他元件有效与否是相互独立的. 这个系统称为 n 选 k 系统, 如果这 n 个元件中至少有 k 个元件有效, 那么这个系统才有效. 这个 n 选 k 系统有效的概率有多大?

36. 一个电力供应系统从 n 个电厂得到电力供应城市用电. 由于种种原因, 电厂 i 以概率 p_i 中断供电, 而且各电厂之间是相互独立的.

(a) 假定每个电厂在供电的时候能够单独供应全市的用电. 问这个城市处于全市停电的概率有多大?

(b) 假定有两个以上电厂供电的时候, 才能避免全市停电. 问全市停电的概率有多大?

37. 有一个手机服务系统, 它有 n_1 个电话用户(有时候需要电话连接)和 n_2 个数据用户(有时候需要数据连接). 我们估计在给定的时刻, 每个电话用户需要系统服务的概率为 p_1, 每个数据用户需要系统服务的概率为 p_2. 假定各用户的需求是相互独立的. 已知一个电话用户的数据传输率为 r_1 比特/秒, 一个数据用户的数据传输率为 r_2 比特/秒. 而手机服务系统的容量为 c 比特/秒. 用户的需求超过系统容量的概率是多少?

38. **点数问题.**[13]泰里思和温迪在玩18个洞的高尔夫球, 奖金为10元钱. 他们各自赢得一个洞的概率分别为 p(泰里思)和1-p(温迪), 并且各个洞的输赢是相互独立的. 打完10个洞的时候, 他们的比分为4:6, 温迪占上风. 此时泰里思接到一个紧急电话, 必须回单位工作. 他们决定按照他们打完比赛时候赢得比赛的概率分割奖金. 假定 $p_T(p_W)$ 代表在目前10个洞的比分4:6的条件下, 完成18个洞的比赛后泰里思(温迪)领先的概率, 则泰里思应得 $10p_T/(p_T+p_W)$ 元, 而温迪应得 $10p_W/(p_T+p_W)$ 元. 泰里思应该分得多少钱?

[13]国内称为赌本分割问题. ——译者注

注 这是著名的点数问题的一个例子. 这个问题在概率论发展历史上起着很重要的作用. 这是舍瓦利耶·德梅雷于17世纪向帕斯卡提出的赌博中断情况下赌本的分割问题. 对此问题, 帕斯卡提出这样的想法: 赌本分割问题应当按中断的条件下双方各自赢得赌博的条件概率进行分配. 帕斯卡在某些特殊的情况下解决了这个问题, 并且通过与费马的通信激发了更多的想法和与概率有关的研究课题.

39. 有一个班的学生的出勤率很低, 这使教授很苦恼. 她决定若 n 个学生中出勤人数少于 k 个时就不上课. 现在假定各个学生独立地决定自己是否出勤, 在好天气的日子里, 每个学生出勤的概率为 p_g, 在坏天气的日子里, 每个学生出勤的概率为 p_b. 现在假定某一天是坏天气的概率为已知, 计算这位教授在这一天能够讲课的概率.

40. 有一枚不均匀的硬币, 在抛掷的时候, 正面出现的概率为 p, 反面出现的概率为1-p. 令 q_n 为 n 次独立抛掷后得到偶数次正面向上的概率. 导出一个联系 q_n 和 q_{n-1} 的递推公式, 并利用递推公式导出 q_n 的公式

$$q_n = \left(1 + (1-2p)^n\right)/2.$$

41. 设在一个轮子上具有连续刻度, 不妨设刻度的范围为(0, 1). 每次转动这个轮子, 得到一个数. 现在设有无穷多个人参加这个游戏, 第 i 个人转动以后, 得到一个数. 只有得数最小的那个人留下来. 假设每次转动都相互独立, 且没有平局. 令 N 为第一个人被淘汰的时刻. 对任意 n, 计算$\mathrm{P}(N=n)$.

42.* **赌徒破产问题.** 一个赌徒进行一系列相互独立的押注活动. 每次押注, 他以概率 p 赢1元钱, 以概率 1-p 输1元钱. 开始押注时他有 k 元钱, 当他输光钱的时候, 或者他的

累计钱数为 n 元的时候,他就停止押注.问他以累计钱数为 n 元而停止押注的概率有多大?

解 用 A 表示以累计钱数为 n 元而停止押注的事件,用 F 表示第一次押注而赢得1元钱的事件.用 w_k 表示他开始的时候具有 k 元钱的条件下事件 A 发生的概率.利用全概率公式

$$w_k = \mathrm{P}(A|F)\mathrm{P}(F) + \mathrm{P}(A|F^c)\mathrm{P}(F^c) = p\mathrm{P}(A|F) + q\mathrm{P}(A|F^c), \quad 0 < k < n,$$

其中 $q = 1 - p$.利用过去押注结果和以后的押注是相互独立的,第一次押注赢得1元钱等同于以 k+1 元钱开始,故 $\mathrm{P}(A|F) = w_{k+1}$,类似可得 $\mathrm{P}(A|F^c) = w_{k-1}$.这样我们得到 $w_k = pw_{k+1} + qw_{k-1}$.这个结果可以写成

$$w_{k+1} - w_k = r(w_k - w_{k-1}), \quad 0 < k < n,$$

其中 $r = q/p$.利用这个递推公式和边界条件 $w_0 = 0$ 和 $w_n = 1$可以将 w_k 表达为 p 和 q 的函数.

我们有 $w_{k+1} - w_k = r^k(w_1 - w_0)$,并注意到 $w_0 = 0$,从而

$$w_{k+1} = w_k + r^k w_1 = w_{k-1} + r^{k-1}w_1 + r^k w_1 = w_1 + rw_1 + \cdots + r^k w_1.$$

上面的和式可以分成 $r = 1(p = q)$ 和 $r \neq 1(p \neq q)$ 两种情况计算出来,得到

$$w_k = \begin{cases} \dfrac{1-r^k}{1-r} w_1, & 若 p \neq q, \\ k w_1, & 若 p = q. \end{cases}$$

由于 $w_n = 1$,利用上式可以得到

$$w_1 = \begin{cases} \dfrac{1-r}{1-r^n}, & 若 p \neq q, \\ \dfrac{1}{n}, & 若 p = q, \end{cases}$$

从而

$$w_k = \begin{cases} \dfrac{1-r^k}{1-r^n}, & 若 p \neq q, \\ \dfrac{k}{n}, & 若 p = q. \end{cases}$$

43.* 令 A 和 B 为相互独立的事件. 利用事件独立性的定义证明下面的结论：

(a) 事件 A 和事件 B^c 相互独立；

(b) 事件 A^c 和事件 B^c 相互独立.

解 (a) 事件 A 可以表成两个互不相容的事件 $A\cap B^c$ 和 $A\cap B$ 的并. 利用概率的可加性公理和事件 A 和事件 B 的相互独立性, 得到

$$\mathrm{P}(A)=\mathrm{P}(A\cap B)+\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)+\mathrm{P}(A\cap B^c).$$

由此可知

$$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)(1-\mathrm{P}(B))=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B^c).$$

即 A 和 B^c 相互独立.

(b) 由 A 和 B 的相互独立性, 利用(a)推得 A 和 B^c 的相互独立性. 再将结论(a)应用于 B^c 和 A, 得到 B^c 和 A^c 的相互独立性.

44.* 令 A、B、C 为相互独立的事件, $\mathrm{P}(C)>0$. 证明 A 和 B 在给定 C 的条件之下是相互独立的.

解 我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A\cap B|C)&=\frac{\mathrm{P}(A\cap B\cap C)}{\mathrm{P}(C)}\\&=\frac{\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\mathrm{P}(C)}{\mathrm{P}(C)}\\&=\mathrm{P}(A)\mathrm{P}(B)\\&=\mathrm{P}(A|C)\mathrm{P}(B|C),\end{aligned}$$

由此可知 A 和 B 在给定 C 的条件之下是相互独立的. 在一系列的等式中, 第一个等式是由条件概率之定义所得, 第二个等式是由事件 A、B、C 的独立性, 第四个等式是分别利用了 A 与 C 的独立性和 B 与 C 的独立性.

45.* 令 A_1、A_2、A_3、A_4 为相互独立的事件, $\mathrm{P}(A_3\cap A_4)>0$. 证明

$$\mathrm{P}(A_1\cup A_2|A_3\cap A_4)=\mathrm{P}(A_1\cup A_2).$$

解 我们有

$$\mathrm{P}(A_1|A_3\cap A_4)=\frac{\mathrm{P}(A_1\cap A_3\cap A_4)}{\mathrm{P}(A_3\cap A_4)}=\frac{\mathrm{P}(A_1)\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_4)}{\mathrm{P}(A_3)\mathrm{P}(A_4)}=\mathrm{P}(A_1).$$

类似地可以得到 $\mathrm{P}(A_2|A_3\cap A_4)=\mathrm{P}(A_2)$ 和 $\mathrm{P}(A_1\cap A_2|A_3\cap A_4)=\mathrm{P}(A_1\cap A_2)$, 最后得到,

$$\begin{aligned}\mathrm{P}(A_1 \cup A_2 | A_3 \cap A_4) &= \mathrm{P}(A_1 | A_3 \cap A_4) + \mathrm{P}(A_2 | A_3 \cap A_4) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2 | A_3 \cap A_4) \\ &= \mathrm{P}(A_1) + \mathrm{P}(A_2) - \mathrm{P}(A_1 \cap A_2) \\ &= \mathrm{P}(A_1 \cup A_2).\end{aligned}$$

46.* **拉普拉斯继承准则**. 设有 $m+1$ 个盒子, 第 k 个盒子内放有 k 个红球和 $m-k$ 个白球, 其中 k 由0变到 m. 现在随机地取一个盒子(每个盒子等概率被取到), 独立地、有放回地从这个盒子内抽取一个球, 一共抽取 n 次. 假定这 n 次抽得的球都是红球. 问从这个盒子内再抽取一个球, 这个球为红球的概率有多大?当 m 很大的时候, 这个概率会怎样变化?

解 记 E 为第 $n+1$ 次抽得红球的事件, R_n 表示前 n 次都抽得红球的事件. 直观上看, 连续抽出红球说明被抽取盒子里含有很多红球, 因此 $\mathrm{P}(E|R_n)$ 比较靠近1. 事实上, 拉普拉斯利用此例去计算给定5000年中每天日出的条件下明天日出的概率. (我们不清楚拉普拉斯多么严肃地对待这个计算问题, 但是这已成为概率论发展过程中的一个传说.)

我们有

$$\mathrm{P}(E|R_n) = \frac{\mathrm{P}(E \cap R_n)}{\mathrm{P}(R_n)},$$

再利用全概率公式, 得到

$$\mathrm{P}(R_n) = \sum_{k=0}^{m} \mathrm{P}(\text{选中了第 } k \text{ 个盒子}) \left(\frac{k}{m}\right)^n = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^n,$$

$$\mathrm{P}(E \cap R_n) = \mathrm{P}(R_{n+1}) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^{n+1}.$$

对于较大的 m, 可将和数看成积分的近似值:

$$\mathrm{P}(R_n) = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{k}{m}\right)^n \approx \frac{1}{(m+1)m^n} \int_0^m x^n \mathrm{d}x = \frac{1}{(m+1)m^n} \cdot \frac{m^{n+1}}{n+1} \approx \frac{1}{n+1}.$$

类似地,

$$\mathrm{P}(E \cap R_n) = \mathrm{P}(R_{n+1}) \approx \frac{1}{n+2},$$

故

$$\mathrm{P}(E|R_n) \approx \frac{n+1}{n+2}.$$

当 m 和 n 很大的时候, 再抽得一个红球是几乎确定的.

47.* 二项式系数公式和帕斯卡三角形.

(a) 在抛掷 n 枚硬币的试验中,将出现 k 次正面向上的结果数记作 $\binom{n}{k}$,利用 $\binom{n}{k}$ 的这个定义导出帕斯卡三角形中所具有的递推关系(见图1.20);

(b) 利用(a)中推导出来的递推关系和归纳法,证明下面的公式

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

解 (a) 可以有两种方法产生含有 k 次正面向上的序列 $(0<k<n)$.

(1) 前 n-1 次抛掷硬币的试验中出现 k 次正面向上,第 n 次抛掷的时候出现反面向上.这种序列一共有 $\binom{n-1}{k}$ 个.

(2) 前 n-1 次抛掷硬币的试验中出现 k-1 次正面向上,第 n 次抛掷的时候出现正面向上.这种序列一共有 $\binom{n-1}{k-1}$ 个.

这样,

$$\binom{n}{k}=\begin{cases}\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}, & \text{当 } k=1,2,\cdots,n-1,\\ 1, & \text{当 } k=0,n.\end{cases}$$

这个公式总结了帕斯卡三角形中提示的递推算法.(见图1.20)

(b) 现在利用(a)中的公式以及归纳法导出下面的公式

$$\binom{n}{k}=\frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

对于 n=1,利用约定0!=1,我们得到 $\binom{1}{0}=\binom{1}{1}=1$,即对于 n=1 公式是成立的.现在假定公式对于 n-1 以前的一切正整数都成立.转而讨论 n 的情况.对于 $k=1,\cdots,n-1$,由下式

$$\begin{aligned}\binom{n}{k}&=\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k}\\&=\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-k+1)!}+\frac{(n-1)!}{k!(n-1-k)!}\\&=\frac{k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}+\frac{n-k}{n}\frac{n!}{k!(n-k)!}\\&=\frac{n!}{k!(n-k)!}\end{aligned}$$

看出,公式是成立的.而对于 $k=0,n$ 的情况,公式也显然成立.这样我们用归纳法证明了公式对一切 n 是成立的.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & \binom{0}{0} & & & & \\
 & & & \binom{1}{0} & & \binom{1}{1} & & & \\
 & & \binom{2}{0} & & \binom{2}{1} & & \binom{2}{2} & & \\
 & \binom{3}{0} & & \binom{3}{1} & & \binom{3}{2} & & \binom{3}{3} & \\
\binom{4}{0} & & \binom{4}{1} & & \binom{4}{2} & & \binom{4}{3} & & \binom{4}{4} \\
 & & & & \cdots\cdots\cdots & & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots\cdots\cdots & & & &
\end{array}
$$

图 1.20　利用帕斯卡三角依次计算二项式系数的方法.左边的三角阵列上的数就是在右边阵列上的相应的数.而右边的三角阵列上的数,除了每一排的两端的数都是1以外,其余位置是的数都是上一排的两个相邻数的和

48.* **博雷尔-坎泰利引理.**考虑一个无穷试验序列.假定第 i 次试验成功的概率为 p_i.记 N 为试验序列中没有一次成功的事件,并记 I 为试验序列中具有无限多次成功的事件.

(a) 假定试验是相互独立的,并且 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i=\infty$.证明 $\mathrm{P}(N)=0$ 和 $\mathrm{P}(I)=1$.

(b) 假定 $\sum_{i=1}^{\infty} p_i<\infty$.证明 $\mathrm{P}(I)=0$.

解　(a) 由事件 N 发生可知前 n 次试验中没有一次成功,因此

$$\mathrm{P}(N) \leq \prod_{i=1}^{n}(1-p_i).$$

两边取对数,得到

$$\log \mathrm{P}(N) \leq \sum_{i=1}^{n} \log(1-p_i) \leq \sum_{i=1}^{n}(-p_i).$$

上式中令 $n \to \infty$,我们得到 $\log \mathrm{P}(N)=-\infty$,因此 $\mathrm{P}(N)=0$.

记 L_n 表示这个无穷次试验中只有有限次成功并且最后一次成功出现在第 n 次试验.由于我们已经证明了 $\mathrm{P}(N)=0$.不难验证 $\mathrm{P}(L_n)=0$.又由于事件 I^c 是不相容的事件序

列 $L_n(n \geq 1)$ 和 N 的并. 我们得到

$$\mathrm{P}(I^c) = \mathrm{P}(N) + \sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{P}(L_n) = 0,$$

所以 $\mathrm{P}(I) = 1$.

(b) 令 S_i 表示第 i 次试验成功的事件. 对某个固定的 n 和每一个 $i > n$, 定义 F_i 表示在时刻 n 以后在时刻 i 第一次成功的事件, 显然 $F_i \subset S_i$. 最后令 A_n 表示在时刻 n 以后至少有一次成功的事件. 注意到 $I \subset A_n$, 因为无限多次成功说明任意时刻 n 以后至少有一次成功. 显然事件 A_n 是不相容的事件序列 $\{F_i : i > n\}$ 之并. 这样

$$\mathrm{P}(I) \leq \mathrm{P}(A_n) = \mathrm{P}\left(\bigcup_{i=n+1}^{\infty} F_i\right) = \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{P}(F_i) \leq \sum_{i=n+1}^{\infty} \mathrm{P}(S_i) = \sum_{i=n+1}^{\infty} p_i.$$

由于 $\sum_{i=n+1}^{\infty} p_i < \infty$, 令 $n \to \infty$, 上式右边趋于0, 这说明 $\mathrm{P}(I) = 0$.

1.6 节　计数法

49. **德梅雷之谜**. 独立地抛掷一个6面体骰子, 共三次. 问下面的事件中哪个事件可能性大一些, 和数为11还是和数为12?(这个问题是17世纪法国贵族德梅雷向他的朋友帕斯卡提出的.)

50. **生日问题**. 一共有 n 个人参加一个聚会. 假定每个人的生日是相互独立地分布的, 并且均匀地分布在一年中的某一天, 并且排除了2月29日这一特殊的日子(假定没有人在这一天生日). 问没有任何两人在同一天生日的概率有多大?

51. 有一个罐子中含有 m 个红球和 n 个白球.

(a) 我们随机地从中抽走两个球. 写出样本空间并计算抽出两个不同颜色的球的概率. 计算的时候利用两种不同的方法：一种方法是利用离散均匀分布率的计数方法, 另一种方法是利用序贯的基于乘积规则的方法.

(b) 我们转动一个具有3条边的骰子, 每条边上分别标明1, 2, 3. 如果出现 k, 则从罐子中取出 k 个球, 放在一边. 写出样本空间并利用全概率公式计算取出的球全是红色的概率.

52. 经过充分洗牌的一副52张的扑克牌中, 从上到下地一张一张地翻牌, 求出第13张牌是第一次遇到的老 K 的概率.

53. 一共有90个学生, 其中包括乔和简. 现在将他们随机地分成3个班(每个班30人). 求乔和简被分在同一个班内的概率.

54. 有20辆小汽车停放在一个停车场. 这20辆车中有10辆是美国制造, 另外10辆是其他国制造. 停车场是一字排开的共有20个车位. 在某一天内这些车辆的停放是完全随机的.

(a) 一共有多少种不同的车辆停放方法?

(b) 这些车互相错位地停放的概率有多大(既没有两辆美国车相邻,也没有两辆外国车相邻)?

55. 在一个 8×8 的国际象棋盘中放上8个车(国际象棋的棋子是放在方格子内,不是放在交叉线上的!).假定所有放法都是等可能的.求出这些车是安全的概率(在同一行上不能有两个车,在同一列上也不能有两个车.)

56. 某个系一共开设8门低水平课程 $L_1,L_2,\cdots,L_8$ 和10门高水平课程 $H_1,H_2,\cdots,H_{10}$. 一个有效的课程表由4门低水平课程和3门高水平课程组成.

(a) 一共可以排出多少种不同的课程表?

(b) 假定课程 $H_1,\cdots,H_5$ 必须以 L_1 为先修课程,$H_6,\cdots,H_{10}$ 必须以 L_2 和 L_3 为先修课程.问在这样的条件下可以排出多少种不同的课程表?

57. 利用26个字母能够写出多少6个单词的句子,其中每个字母恰好出现一次?所谓一个单词就是指一个非空的字母序列.当然这些单词和句子可以是毫无意义的.

58. 从一副充分洗牌的扑克牌中取出上面的7张牌.求出下列事件的概率:

(a) 7张牌中恰好含有3张A;

(b) 7张牌中恰好含有2张K;

(c) 7张牌中恰好含有3张A,或者恰好含有2张K,或者恰好含有3张A和2张K.

59. 停车场停有100辆车,其中 k 辆是有问题的,按柠檬法案应退回厂家的.现在从中随机地选出 m 辆进行试车,问其中恰有 n 辆问题车的概率有多大?

60. 将一副52张充分洗牌的扑克牌分发给4个玩家.求每个玩家得到一张A的概率.

61.* **超几何概率.** 一个罐子里边放有 n 个球,其中 m 个是红球.现在从罐子中随机地、无放回地抽取 k 个球(无放回的意思在下一次抽取球的时候已经抽出的球不再放回罐子).问抽出的 k 个球中恰含 i 个红球的概率有多大?

解 样本空间由 $\binom{n}{k}$ 种从罐子中选择 k 个球的方法组成.与我们感兴趣的事件有关的选择方法数可以这样计算;在 m 个红球中选 i 个球有 $\binom{m}{i}$ 种选法,从 $n-m$ 个不是红色的球中选 $k-i$ 个球有 $\binom{n-m}{k-i}$ 种选法.这样一共有 $\binom{m}{i}\binom{n-m}{k-i}$ 种选法.由于各种选法都是等可能的,相关的概率为

$$\frac{\dbinom{m}{i}\dbinom{n-m}{k-i}}{\dbinom{n}{k}},$$

其中 $i \geq 0$ 满足条件 $i \leq m, i \leq k$, 且 $k-i \leq n-m$. 对于其他的 i 相应的概率为0.

62.＊ 存在不可区分的对象的排列数. 在对 n 个对象进行排列的时候, 若遇到某些对象之间不可区分, 此时会造成不同的排列之间不可区分. 因此这种具有不可区分对象的排列数会小于 $n!$. 例如三个不同的字母A、B、C共有6种不同的排列

$$\mathrm{ABC}, \mathrm{ACB}, \mathrm{BAC}, \mathrm{BCA}, \mathrm{CAB}, \mathrm{CBA},$$

但是字母A, D和D只有3种不同的排列

$$\mathrm{ADD}, \mathrm{DAD}, \mathrm{DDA}.$$

(a) 假定 n 个对象中有 k 个是不可区分的. 证明可区分的对象的序列一共有$n!/k!$个.

(b) 现在假定一共有 r 种不可区分的对象类型, 而第 i 种类型内, 一共有 k_i 个不可区分的对象. 证明可区分的对象排列数为

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

解 (a) 不妨将 n 个对象中 k 个不可区分的对象D记为 $\mathrm{D}_1, \cdots, \mathrm{D}_k$. 若顾及它们的下标, 这 k 个原本不可区分的对象就是可区分了. 将这些对象进行排列, 一共有 $n!$ 个不同的排列. 把这些原本不可区分的对象的下标去掉, 则这些排列中每一个排列都有一些排列与这个排列不可区分. 这些不可区分的排列形成一个类, 这个类中一共有 $k!$ 个排列. 这样, $n!$ 个排列可以分成 $n!/k!$ 个类, 每个类内的排列都是不可区分的. 这样, 可区分的对象序列数就是 $n!/k!$. 例如 A、D、D 三个对象的排列有3!=6个(把题中给出的 A、B、C 的六种不同排列中的 B、C 替换为 D 即可)

$$\mathrm{ADD}, \mathrm{ADD}, \mathrm{DAD}, \mathrm{DAD}, \mathrm{DDA}, \mathrm{DDA},$$

这6个排列种有些排列是不可区分的. 可以将它们分成 $n!/k!=3!/2!=3$ 个类

$$\{\mathrm{ADD}, \mathrm{ADD}\}, \{\mathrm{DAD}, \mathrm{DAD}\}, \{\mathrm{DDA}, \mathrm{DDA}\},$$

而每个类内含有 $k!=2!=2$ 个不可区分的排列.

(b) 一种办法是将(a)中的方法进行推广. 对每一个类别 i , 有 k_i 个不可区分的对象, 单就这个不可区分的对象而言, 就有 $k_i!$ 种不可区分的排列. 由于一共有 r 类不可区分的对象, 这样每一个排列, 都会属于一个具有 $k_1!k_2!\cdots k_r!$ 个排列的大类, 在这个大类内的所有排列都是不可区分的. 这样可以区分的对象序列的个数就是

$$\frac{n!}{k_1!k_2!\cdots k_r!}.$$

另一种考虑的方法如下：在 n 个位置中选定 k_1 个位置给第一类不可区分的对象占有, 剩下的 $n-k_1$ 个位置中再选定 k_2 个位置给第二类不可区分的对象占有, 依次类推, 对于每一类不可区分的对象都分派了位置. 这样每一种位置的分配位置的方法对应于一种可区分的对象序列. 这样的分配位置的方法数等于将 n 个对象分成 r 个组的方法数, 每一个组的大小分别是 $k_1, \cdots, k_r$, 而这种分组方法的数目就是多项式系数.

第 2 章　离散随机变量

2.1　基本概念

在许多概率模型中试验结果是数值化的,例如许多仪器的仪表板的读数以及股价等.也有其他一些例子中的试验结果不是数值化的，但是这些试验结果与某些数值相联系.例如，从某个群体中 选择学生,我们希望了解每位学生的平均学分．当我们讨论这些数值的时候,通常给这些数值确定概率．我们可以通过**随机变量**实现这个任务，这正是本章重点介绍的对象.

现在设在某个试验中，所有可能的试验结果构成一个样本空间.对于样本空间中的每一个可能的试验结果，关联着一个特定的数.这种试验结果与数的对应关系形成随机变量(见图 2.1).我们将试验结果所对应的数称为随机变量的**取值**．从数学上讲，**随机变量是试验结果的实值函数**.

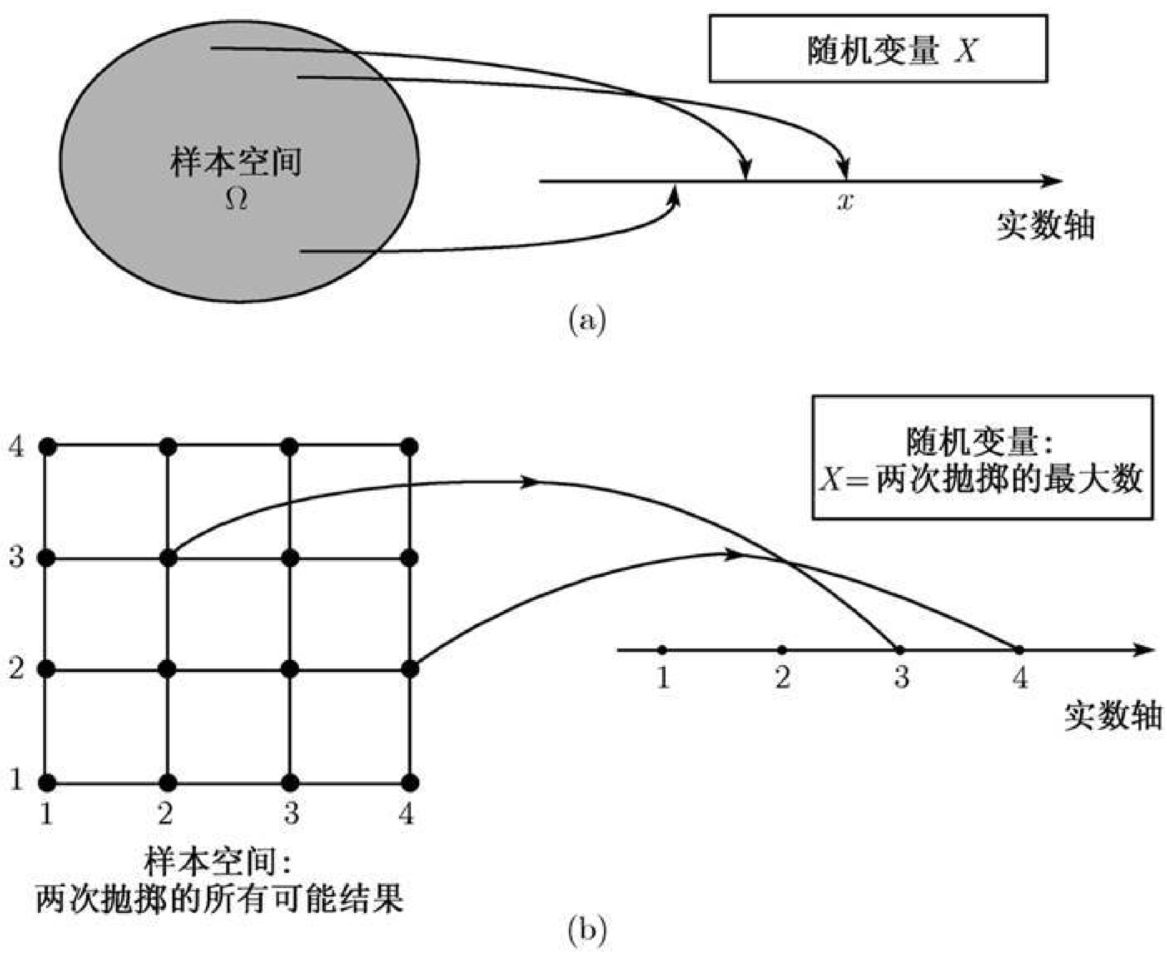

图 2.1　(a)随机变量的图像化表示．这是一个试验结果的函数,对每一个试验结果确定一个数值；(b) 随机变量的一个例子.将一个具有4个面的骰子连续抛掷两次,

相应的随机变量是两次抛掷所得到的最大数. 若试验结果是(4,2),则随机变量的值为4

现在举几个随机变量的例子.

(a)连续抛掷一枚硬币共5次,在这个试验中正面出现的次数是一个随机变量.然而作为试验结果的长度为5的正面和反面的序列却不能作为随机变量,因为它对于一个试验结果没有给出一个明显的数值.

(b) 在两次抛掷一个骰子的试验中, 下面的例子是随机变量:

(i) 两次抛掷骰子所得到的点数之和;

(ii) 两次抛掷一个骰子所得到6点的次数;

(iii) 第二次抛掷所得到的点数的5次方.

(c) 在传输信号的试验中,传输信号所需的时间、接收到的信号中发生错误的次数、传输信号过程中的时间延迟等都是随机变量.

我们列出若干关于随机变量的基本概念, 这些概念将在本章中详细介绍.

与随机变量相关的主要概念

在一个试验的概率模型之下

- **随机变量**是试验结果的实值函数;
- **随机变量的函数**定义了另一个随机变量;
- 对于一个随机变量, 我们可以定义一些平均量,例如**均值**和**方差**;
- 可以在某事件或某随机变量的**条件**之下定义一个随机变量;
- 存在一个随机变量与某事件或某随机变量相互**独立**的概念.

若一个随机变量的值域(随机变量的取值范围)为一个有限集合或最多为可数无限集合,则称这个随机变量为**离散的**. 例如上面(a)和(b)中提到的随机变量, 由于它只能取有限多个值, 所以是离散的随机变量.

若一个随机变量可以取到不可数无限多个数,则这个随机变量就不是一个离散的随机变量.例如从区间[-1,1]上随机地取一个点 a,随机变量 a^2 就不是离散的随机变量. 另一方面随机变量

$$\mathrm{sgn}(a) = \begin{cases} 1, & 若\ a > 0, \\ 0, & 若\ a = 0, \\ -1, & 若\ a < 0 \end{cases}$$

是一个离散的随机变量.

本章只讨论离散随机变量. 尽管有时候省略了形容词“离散”,但我们讨论的还是离散随机变量的性质.

与离散随机变量相关的概念

在一个试验的概率模型之下:

- **离散随机变量**是试验结果的一个实值函数,但是它的取值范围只能是有限多个值或可数无限多个值;
- 一个离散随机变量有一个**分布列**,它对于随机变量的每一个取值, 给出一个概率;
- **离散随机变量的函数**也是一个离散随机变量, 它的分布列可以从原随机变量的分布列得到.

下面的几节将讨论上面所提到的概念及其相关的方法理论.此外我们还将提供重要的离散随机变量的例子.第3章将讨论一般的随机变量(不一定为离散随机变量).

尽管本章中看起来引入了很多新的概念, 实际上并非如此.我们只是将第一章中的概念(概率、条件和独立性等)简单地应用到了随机变量上去, 仅仅引进了一些新的记号. 本章中真正新的概念是均值与方差.