

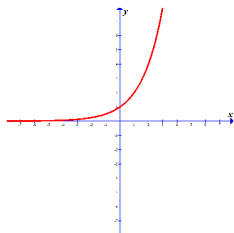
二年級 數學 A 試題卷

一、單選題（占 20 分）

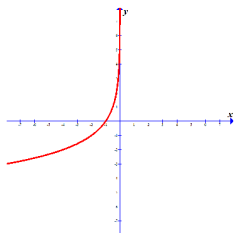
說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 分。每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。請將正確選項填寫在答案卷上。

- () 1. 在坐標平面上，將 $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ 的圖形以 $y = x$ 為對稱軸，作出線對稱圖形 Γ_1 ；再將 Γ_1 以 x 軸為對稱軸，作出線對稱圖形 Γ_2 。試問 Γ_2 應為下列何者？

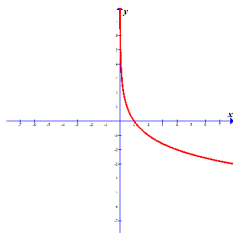
(1)



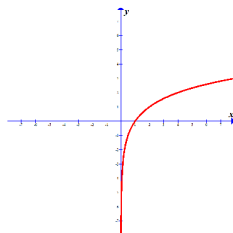
(2)



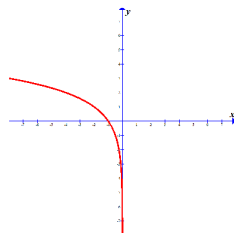
(3)



(4)



(5)



- () 2. 設 $x = \log_{13} 2357$ ，請選出正確的選項。

(1) $2 \leq x < 2.5$

(2) $2.5 \leq x < 3$

(3) $3 \leq x < 3.5$

(4) $3.5 \leq x < 4$

(5) $x \geq 4$

- () 3. 解不等式 $\log_{\frac{1}{2}}(x-1) > \log_{\frac{1}{2}}(5-2x)$ ，可求得 x 的解為下列何者？

(1) $x < 2$

(2) $x > 2$

(3) $1 < x < \frac{5}{2}$

(4) $2 < x < \frac{5}{2}$

(5) $1 < x < 2$

- () 4. 在一個 64 格的西洋棋盤上放置麥粒，第 1 格放 1 粒、第 2 格放 2 粒、第 3 格放 4 粒，此後每一格放置的麥粒數量是前一格的 2 倍，假設棋盤夠大且麥粒足夠多，共需要 x 粒麥粒便可放置完所有格子。在下列選項中，請選出最接近 x 的選項。

(1) 9.2×10^{18}

(2) 1.8×10^{19}

(3) 5.4×10^{19}

(4) 3.6×10^{20}

(5) 7.2×10^{21}

二、多選題（占 40 分）

說明：第 5 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。請將正確選項填寫在答案卷上。

- () 5. 設數列 $\langle a_n \rangle$ 之一般項 $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ，其中 n 為正整數。試選出正確的選項。
- (1) $a_1 = 2$
 - (2) $a_2 < a_3$
 - (3) 當 n 很大時，因為括號內的 $1 + \frac{1}{n}$ 會很接近 1，於是 a_n 會愈來愈接近 $1^n = 1$
 - (4) 當 n 很大時，因為括號內的 $1 + \frac{1}{n}$ 總是大於 1，而大於 1 的實數不斷自乘會愈來愈大，故 a_n 也會愈來愈大，從某一項起 a_n 將超過 10^{10}
 - (5) 當 n 很大時，儘管括號內的 $1 + \frac{1}{n}$ 會很接近 1，但同時自乘的次數也隨之增加，隨著 n 的增加， a_n 會愈來愈接近一個常數，這個常數不超過 3。
- () 6. 設 a, b, c 為等比數列滿足 $0 < a < 1 < b < c$ 。試選出正確的選項。
- (1) $\log a > 0$
 - (2) $\log a, \log b, \log c$ 是等差數列
 - (3) $\log a + \log c < 2 \log b$
 - (4) $\frac{2^{\log a} + 2^{\log c}}{2} > 2^{\log b}$
 - (5) $\log \frac{a+c}{2} > \log b$ 。
- () 7. 下列各方程式中，試選出恰有一實數解的選項。
- (1) $2^x = 2x$
 - (2) $2^x = x^2$
 - (3) $x + \log x = 0$
 - (4) $4^{x+1} - 11 \times 2^x - 3 = 0$
 - (5) $\log(3x+1) + \log(x-2) = 1$ 。
- () 8. 下列關於指數與對數函數及其圖形的特性，試選出正確的選項。
- (1) $y = 3^x$ 為嚴格遞增函數
 - (2) $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ 的圖形凹口向下
 - (3) $y = \log_{\frac{1}{2}} x$ 的圖形凹口向上
 - (4) 對任意 $a > 1$ ， $y = \log_a x$ 的圖形必通過點 $(1, 0)$
 - (5) $y = \log x$ 有一條水平漸近線。

- () 9. 已知 pH 值的定義為 $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ ，其中 $[\text{H}^+]$ 為氫離子濃度（單位：莫耳/升）。試選出正確的選項。（以下各數值計算皆四捨五入取至小數點後第二位）
- (1) 某清潔劑的 pH 值為 8.5，此清潔劑的氫離子濃度約為 3.16×10^{-9} 莫耳/升
 - (2) 某飲料氫離子濃度為 3×10^{-4} 莫耳/升，這杯飲料的 pH 值約為 3.52
 - (3) 若檸檬汁 pH 值為 2、牛奶 pH 值為 6，則檸檬汁的氫離子濃度約為牛奶的 10000 倍
 - (4) 將 pH 值為 1 的溶液與 pH 值為 7 的溶液各取 1 公升，兩溶液混合後 pH 值為 4
 - (5) 將 pH 值為 6 的溶液與 pH 值為 8 的溶液各取 1 公升，兩溶液混合後 pH 值為 14。

三、填充題（占 25 分）

說明：第 10 題至第 14 題，每題有若干空格，各空格可能填入 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0, -, ± 這些數字或符號其中一者。各題中之空格皆填答正確給 5 分，答錯或未完全答對不給分。請將答案填至答案卷。

10. 解不等式 $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 2^{1-x} - 8 \geq 0$ 得 $x \leq \underline{\textcircled{10-1} \textcircled{10-2}}$

11. 設正整數 a, b, c 滿足 $\log a < \log b < \log c < 3$ 且

$$\log_{2022} a + \log_{2022} b + \log_{2022} c = 2,$$

則 $a = \underline{\textcircled{11-1} \textcircled{11-2}}$

12. 解聯立方程式 $\begin{cases} (\log_3 2)x + \log_2 y = \log_2 3 \\ (\log_3 4)x + 3(\log_2 y) = \log_2 8 \end{cases}$ ，可得 $y = \underline{\textcircled{12-1} \textcircled{12-2}}$

13. 數學家知道一個估算前 n 個自然數的倒數和的近似公式：

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \approx \log_e n + \gamma$$

其中 $e \approx 2.71828$ 及 $\gamma \approx 0.5772$ 皆為常數且 $\log e \approx 0.4343$ 。試運用此公式，估算

$$\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{10000} \approx \underline{\textcircled{13-1} \textcircled{13-2}}$$

（四捨五入至小數點後第一位）

14. 已知兩質數 p, q 滿足 $p < q$ ，若 $4.6 < \log p < 4.7$ 且

$$pq^2 = 10,479,510,080,569,031$$

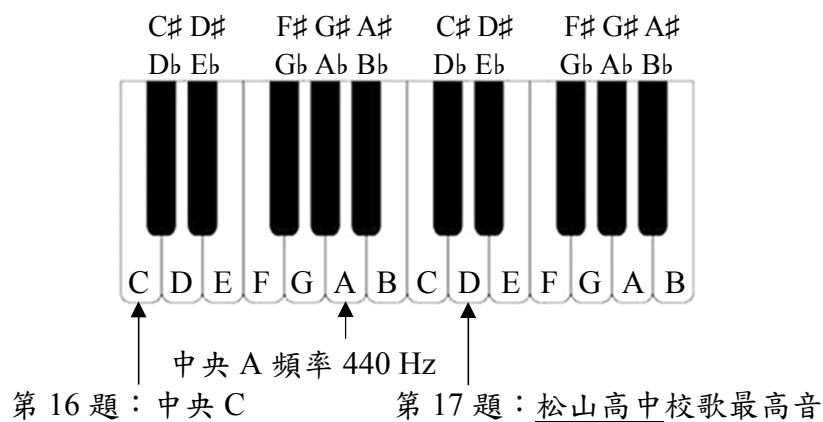
則 p 是 14-1 位數、 q 是 14-2 位數。

四、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

15-17 題為題組

樂理上，所謂的「十二平均律」，是指將一個八度音細分成十二個半音，並使這些音的頻率（單位：Hz）形成等比數列，亦即下個半音的頻率都是前一個半音的 $2^{\frac{1}{12}}$ 倍。如下圖是鋼琴鍵盤一部分，愈往右邊音愈高，左側的 C 與中間高八度的 C 之間共差了 12 個半音，因此後者的頻率為前者的頻率的 $(2^{\frac{1}{12}})^{12} = 2$ 倍。例如 C 與 D 之間夾了一個黑鍵 C \sharp /D \flat （升 C 或降 D），因此 C 和 D 之間差了 2 個半音；再例如 E 與 F 的兩個白鍵相鄰，它們之間差了 1 個半音。



15. C 和 D 之間差了 2 個半音，後者的頻率是前者的頻率的幾倍？（單選題，4 分）

- (1) $2^{\frac{1}{12}}$ 倍 (2) $2^{\frac{1}{6}}$ 倍 (3) $2^{\frac{1}{4}}$ 倍 (4) $2^{\frac{1}{3}}$ 倍 (5) $2^{\frac{1}{2}}$ 倍

16. 已知中央 A 的頻率為 440 Hz，中央 C（如上圖箭頭所示）的頻率最接近何者？（單選題，4 分）

- (1) 220 Hz (2) 247 Hz (3) 262 Hz (4) 294 Hz (5) 330 Hz

17. 已知松山高中校歌中，最低音是中央 C、最高音是高音 D（如上圖箭頭所示），若高音 D 的頻率是中央 C 的頻率的 k 倍，試求 $\log k$ 的值。（四捨五入至小數點後第三位）（非選擇題，7 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為 a ，公比為 r ($r \neq 1$) 的等比數列前 n 項之和為 $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 參考數值： $2^{\frac{1}{12}} \approx 1.059$, $2^{\frac{1}{6}} \approx 1.122$, $2^{\frac{1}{4}} \approx 1.189$, $2^{\frac{1}{2}} \approx 1.335$,

$\sqrt{2} \approx 1.414$, $\sqrt{3} \approx 1.732$, $\sqrt{5} \approx 2.236$, $\sqrt{6} \approx 2.449$, $\sqrt{10} \approx 3.162$, $\pi \approx 3.14159$, $e \approx 2.71828$

3. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010$, $\log 3 \approx 0.4771$, $\log 7 \approx 0.8451$

臺北市立松山高級中學 111 學年度第一學期 第二次期中考

二年級 數學 A 答案卷

班級：_____ 座號：_____ 姓名：_參考答案_

一、單選題(每題 5 分，共 20 分)

1	2	3	4
4	3	5	2

二、多選題(每題 8 分，共 40 分)

對	5	4	3	2	1	0
分	8	5	2	0	0	0

5	6	7	8	9
1, 2, 5	2, 4, 5	3, 4, 5	1, 3, 4	1, 2, 3

三、填充題(每題 5 分，共 25 分)

10		11		12		13		14	
10-1	10-2	11-1	11-2	12-1	12-2	13-1	13-2	14-1	14-2
—	1	1	8	8	9	4	6	5	6

四、混合題或非選擇題(依各題所註明之配分給分，共 15 分)

15. __2__ (4 分)

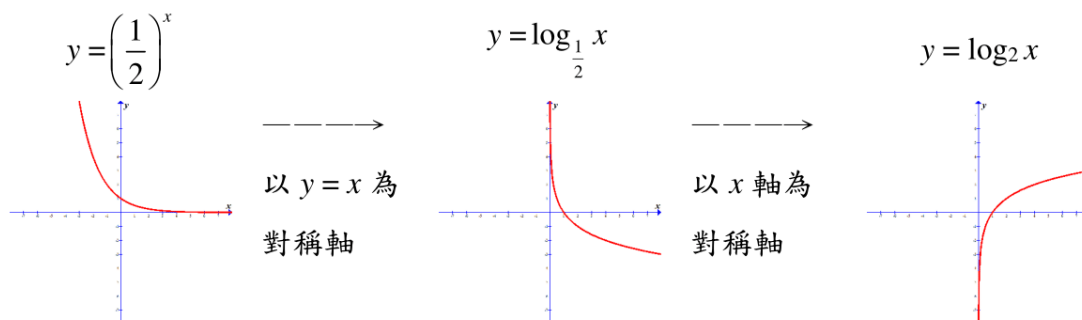
16. __3__ (4 分)

17 (7 分)

高音 D 頻率是中央 D 頻率的 2 倍、中央 D 頻率是中央 C 頻率的 $2^{\frac{1}{6}}$ 倍，因此高音 D 頻率是中央 C 頻率的 $k = 2 \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{7}{6}}$ 倍，所求 $\log k = \log 2^{\frac{7}{6}} = \frac{7}{6} \log 2 \approx \frac{7}{6} \times 0.3010 \approx 0.351$ 。

111-1 高二上 數學 A 第二次期中考 參考解析

1. 依題意可依序繪出下面的圖形



2. 依對數定義得 $13^x = 2357$ ，又 $13^3 = 2197$ 且 $13^{3.5} \geq 13^3 \times 9^{0.5} = 13^3 \times 3 = 6591$

因此 $13^3 < 13^x < 13^{3.5}$ 故選 (3) $3 \leq x < 3.5$ 。

3. 對數有意義可知「真數」為正，有 $x-1 > 0$ 且 $5-2x > 0$ ，先得 $1 < x < \frac{5}{2}$

又底數 $\frac{1}{2} < 1$ ，於是 $x-1 < 5-2x$ ，解得 $x < 2$ 。綜合而得 (5) $1 < x < 2$

4. 利用等比級數求和公式，所求為 $1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^{63} = 2^{64} - 1 \approx 2^{64}$

其中 $\log 2^{64} = 64 \log 2 \approx 64 \times 0.3010 = 19.264$ ，即 $2^{64} \approx 10^{19.264} = 10^{0.264} \times 10^{19}$

又 $1 < 10^{0.264} < 10^{\log 2} = 2$ ，故最合適選 (2) 1.8×10^{19}

5. 有關此數列與 e 的資訊，可見課本 p.128、習作 p.51#6、學習資料 p.87#2。

6. (2) 設公比 $r > 1$ ， $b = ar$ ， $c = ar^2$ ， $\log a$ ， $\log b$ ， $\log c$ 是公差 $\log r > 0$ 等差數列

(3) 利用對數律或者上述所提等差數列，皆可知應為 $\log a + \log c = 2 \log b$

(4) 利用 $y = 2^x$ 圖形凹口向上或算幾不等式， $\frac{2^{\log a} + 2^{\log c}}{2} > 2^{\frac{\log a + \log c}{2}} = 2^{\log b}$

(5) 利用算幾不等式可知 $\frac{a+c}{2} > (ac)^{\frac{1}{2}} = b$ ，於是 $\log \frac{a+c}{2} > \log b$ 。

7. 選項 (1), (2), (3)，可透過繪製圖形得知解的數量。

$y = 2^x$ $y = 2x$	$y = 2^x$ $y = x^2$	$y = \log x$ $y = -x$
兩解 $x = 1, 2$	三解	恰一解

(4) $4^{x+1} - 11 \times 2^x - 3 = 0$ 整理得 $4(2^x)^2 - 11 \times 2^x - 3 = 0$ 因式分解得

$(4(2^x) + 1)((2^x) - 3) = 0$ 解得 $2^x = 3$ 即 $x = \log_2 3$ ，恰一解

(5) $\log(3x+1) + \log(x-2) = 1$ ，因為「真數」為正，所以 $x > 2$ ；

利用對數定義及對數律 $(3x+1)(x-2) = 10$ ，易解 $x = 3$ 或 $-\frac{4}{3}$ (不合)

故選 (3), (4), (5)。

8. 自行繪圖可判斷各選項，答案選 (1), (3), (4)。

9. (1) 氫離子濃度為 $10^{-8.5} = 10^{0.5} \times 10^{-9} = \sqrt{10} \times 10^{-9} \approx 3.16 \times 10^{-9}$ (莫耳/升)

(2) pH 值為 $-\log(3 \times 10^{-4}) = 4 - \log 3 \approx 4 - 0.4771 = 3.5239 \approx 3.52$

(3) 氫離子濃度：檸檬汁 10^{-2} 、牛奶 10^{-6} ，前者為後者 $\frac{10^{-2}}{10^{-6}} = 10^4 = 10000$ 倍

選項 (4), (5) 可透過生活經驗判斷，選 (1), (2), (3)。

10. 解不等式 $\left(\frac{1}{4}\right)^x + 2^{1-x} - 8 \geq 0$ ，化簡得 $(2^{-x})^2 + 2(2^{-x}) - 8 \geq 0$

因式分解得 $((2^{-x}) + 4)((2^{-x}) - 2) \geq 0$ 又 $(2^{-x}) + 4 > 0$ 因此 $(2^{-x}) - 2 \geq 0$ 即 $2^{-x} \geq 2$

利用 $y = 2^x$ 嚴格遞增特性，有 $-x \geq 1$ ，解得 $x \leq -1$ 。

11. 利用對數律，可得 abc 的標準分解式 $abc = 2022^2 = 2^2 \times 3^2 \times 337^2$

又 $1 \leq a < b < c < 1000$ ，必有 $c = 2 \times 337$ 且 $b = 337$ ，從而 $a = 2 \times 3^2 = 18$ 。

12. 解聯立方程式 $\begin{cases} (\log_3 2)x + \log_2 y = \log_2 3 \\ (\log_3 4)x + 3(\log_2 y) = \log_2 8 \end{cases}$ ，上式整理得 $x = \frac{\log_2 3 - \log_2 y}{\log_3 2}$

代入下式得 $(\log_3 4) \cdot \frac{\log_2 3 - \log_2 y}{\log_3 2} + 3(\log_2 y) = 3$ 即 $\log_2 (3^2 y) = 3$ 解得 $y = \frac{8}{9}$

13. 利用此近似公式，所求 $\frac{1}{101} + \frac{1}{102} + \frac{1}{103} + \dots + \frac{1}{10000}$ (延伸學習：黎曼ζ函數)

$$= \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{10000} \right) - \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{100} \right) \approx (\log_e 10000 + \gamma) - (\log_e 100 + \gamma) = \log_e \frac{10000}{100}$$

$$= \log_e 100 = \frac{\log 100}{\log e} \quad \text{將 } \log e \approx 0.4343 \text{ 代入可知所求約 } \frac{\log 100}{\log e} \approx \frac{2}{0.4343} \approx 4.6$$

14. 由題意 $4.6 < \log p < 4.7$ 知 $10000 < 10^{4.6} < p < 10^{4.7} < 100000$ ， p 為 5 位數。

$$\text{因 } \log(pq^2) = \log 10,479,510,080,569,031 \approx \log 10^{16} = 16$$

且 $\log(pq^2) = \log p + 2 \log q$ ，解得 $\log q \approx \frac{1}{2}(16 - 4.6) = 5.7$ ， q 為 6 位數。

註：此兩質數為 $p = 41879$ ， $q = 500233$ 。(延伸閱讀：RSA 公鑰加密系統)

15. C 和 D 之間差了 2 個半音， $(2^{\frac{1}{12}})^2 = 2^{\frac{1}{6}}$ ，故應選 (2) $2^{\frac{1}{6}}$ 倍

16. 已知中央 A 的頻率為 440 Hz，中央 C 的頻率應為

$$\frac{440}{\left(2^{\frac{1}{12}}\right)^9} = \frac{440}{2^{\frac{3}{4}}} = 220 \cdot 2^{\frac{1}{4}} \approx 220 \cdot 1.089 = 261.58, \text{ 故選 (3) } 262 \text{ Hz}$$

17. 高音 D 頻率是中央 D 頻率的 2 倍、中央 D 頻率是中央 C 頻率的 $2^{\frac{1}{6}}$ 倍，因

此高音 D 頻率是中央 C 頻率的 $k = 2 \times 2^{\frac{1}{6}} = 2^{\frac{7}{6}}$ 倍，所求

$$\log k = \log 2^{\frac{7}{6}} = \frac{7}{6} \log 2 \approx \frac{7}{6} \times 0.3010 \approx 0.351。$$