台北市立松山高級中學九十四學年度第一學期第一次期中考高三數學甲試題

一、選擇題(每題五分)

1. 原坐標系作坐標軸平移，以$O'(h，k)$為新原點，，二次曲線Γ 的原方程式$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 其新方程式為$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$，則下列敘述何者恆為真？
(A)原圖形為橢圓經平移軸後面積可能變大　(B) $A'+B'+C'=A+B+C$　(C) $D'=2Ah+Bk+D$
(D) $E'=Bh+2Ck+E$　(E) $F'=Ah^2+Bhk+Ck^2+Dh+Ek+F$

2. 將坐標軸旋轉θ 角($\cot 2\theta=\dfrac{A-C}{B}$)，二次曲線$\Gamma$ 的原方程式$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$ 其新方程式為$A'x'^2+B'x'y'+C'y'^2+D'x'+E'y'+F'=0$，則下列敘述何者恆為真？
(A) $A'-C'=A-C$　(B) $B^2=4(AC-A'C')$　(C) $F'=F$　(D) $D'^2+E'^2=D+E$
(E)原圖形為橢圓經旋轉軸後可能變為圓。

3. 將坐標系S旋轉θ 角得到坐標系S'，若P點對S與S'的坐標分別為$(x_1, y_1)_S$ 與$(x_1', y_1')_{S'}$，且Q點對S與S'的坐標分別為$(x_2, y_2)_S$ 與$(x_2', y_2')_{S'}$，下列式子中正確的為何？
(A) $x_1+y_1=x_1'+y_1'$　(B) $x_1^2+y_1^2=x_1'^2+y_1'^2$　(C) $x_1y_2-x_2y_1=x_1'y_2'-x_2'y_1'$
(D) $x_1x_2+y_1y_2=x_1'x_2'+y_1'y_2'$　(E) $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2=(x_1'-x_2')^2+(y_1'-y_2')^2$

4. 設$A=\begin{bmatrix}-2 & 3\\ -1 & 1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，C，D為二階方陣，則下列何者正確？
(A) $AB=AC\Rightarrow B=C$　(B) $AB=BA$　(C) $A^6+A^3=2B$　(D) $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$
(E) O為二階零方陣，$CD=O\Rightarrow C=O$或$D=O$

二、填充題(每格 5 分)

1. 坐標系S平移$(2,1)$得到坐標系S'，$y'^2=4x'$ 的原方程式為____(A)____。

2. 將坐標系S旋轉θ 得到坐標系S'，若P點對S與S'的坐標分別為$(x, y)_S$ 與$(x', y')_{S'}$，已知$x=-\dfrac{1}{2}x'-\dfrac{\sqrt{3}}{2}y'$，若$0^o\le\theta<360^o$，則$\theta$為____(B)____。

3. 方程式$3x^2-2xy+3y^2=k$ 的圖形為橢圓，點$P(x，y)$ 為其上一動點，若點P滿足$x^2+y^2\leqq 4$，試求k的最大值為____(C)____。

4. 設點P(x，y)在方程式$2x^2-2xy+y^2-6x+2y+1=0$ 的圖形上，試求x的範圍____(D)____與y的範圍____(E)____。

5. 若X為 2 階方陣且滿足$2X+2\begin{bmatrix}2 & -1\\ 2 & -3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 2 & 4\end{bmatrix}$，求X=____(F)____。

6. 設$A=\begin{bmatrix}3 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a & b\\ 1 & c\end{bmatrix}$，若$(A-B)(A+B)=A^2-B^2$，則b=____(G)____。

7. 設 A 為 n 階方陣，其元素皆為自然數，排列情形如下

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 3 & 6 & 10 & \cdots \\ 2 & 5 & 9 & \cdots & \cdots \\ 4 & 8 & \cdots & & \\ 7 & \vdots & & & \\ \vdots & \vdots & & & \end{bmatrix}$$，其中 $n>100$，若 $a_{pq}=100$，

則 $(p,q)=$ ____(H)____。

8. 設A=$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ a & 1 & 5 \\ 1 & 2a & 8 \end{bmatrix}$沒有乘法反元素，則實數a = ____(I)____。

9. $A=\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，若 $A+A^2+A^3+\ldots\ldots+A^{20}=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$，則實數$b=$____(J)____。

三、計算題(每題 10 分)

1. 將二次曲線Γ：$x^2-4xy+4y^2+10x-11=0$ 標準化，並求出其焦點及正焦弦長？

2. 二次曲線Γ：$4x^2+24xy+11y^2-24x+28y-44=0$ 為一雙曲線，
(1)試求其中心？
(2)頂點為何？

3. 求A=$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$，求$A^{-1}$=？，若 3 階方陣滿足AX=$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$，求X=？

台北市立松山高級中學九十四學年度第一學期第一次期中考高三數學甲答案卷

三年___班___號 姓名：____________

一、選擇題

1.	2.	3.	4.

二、填充題

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
(F)	(G)	(H)	(I)	(J)

三、計算題(共 30 分)

1.
2.
3.

台北市立松山高級中學九十四學年度第一學期第一次期中考高三數學甲答案卷

三年___班___號 姓名：____________

一、選擇題

1.	2.	3.	4.
BCDE	BC	SCDE	ABCD

二、填充題

(A)	(B)	(C)	(D)	(E)
$(y-1)^2=4(x-2)$	120^o	8	$0\leqq x\leqq 4$	$1-2\sqrt{2}\leq y\leq 1+2\sqrt{2}$
(F)	(G)	(H)	(I)	(J)
$\begin{bmatrix} -1 & 4 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$	1	(6，9)	0，2	-210

三、計算題(共 30 分)

1\. Ans： $y''^2=-\frac{4\sqrt{5}}{5}x''$

頂點 $(\frac{3}{\sqrt{5}},\frac{1}{\sqrt{5}})$

正焦弦長= $\frac{4\sqrt{5}}{5}$

2\. Ans：中心(-3，2)

頂點 $(\frac{-23}{5},\frac{16}{5})$，$(\frac{-7}{5},\frac{4}{5})$

3\. Ans：$A^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & -1 \\ 9 & -8 & -3 \end{bmatrix}$，$X=\frac{1}{5}\begin{bmatrix} -5 & 9 & 11 \\ 5 & -12 & -3 \\ 15 & -46 & -29 \end{bmatrix}$