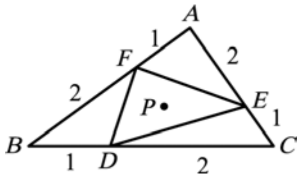
台北市立松山高中 97學年度 高二社會組 寒假數學作業題

一、多重選擇題（計四題）：

1.（　　　　）△ABC 中，D，E，F 三點分別在 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 上，且滿足 $\overrightarrow{BC}=3\overrightarrow{BD}$，$\overrightarrow{CA}=3\overrightarrow{CE}$，$\overrightarrow{AB}=3\overrightarrow{AF}$，而 P，Q 分別為△ABC，△DEF 的重心，則下列何者為真？
(A) $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\vec{0}$　(B) $\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\vec{0}$　(C) $3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$
(D) $3\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$　(E) $\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$。



答案：全

解析：(A)○：$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}$

$=\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BA}\right)+\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{CA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CB}\right)$

$=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$

(B)○：$\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{BD}+\overrightarrow{CE}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}+\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CA}\right)=\vec{0}$

(C)○：$\overrightarrow{AD}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\Rightarrow 3\overrightarrow{AD}=2\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

(D)○：Q 點為△DEF 的重心 $\Rightarrow \overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AE}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$

又 B－D－C 且 $\overline{BD}:\overline{DC}=1:2$，所以

$\overrightarrow{AQ}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\right)=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$

故 $3\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$

(E)○：P 點為△ABC 的重心 $\Rightarrow \overrightarrow{AP}+\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=\vec{0}$

故選(A)(B)(C)(D)(E)

2.（　　　　）參數方程式 $\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\end{cases}$，$t\geqq 0$ 與下列何者表同一圖形？

(A) $\begin{cases}x=1-2s\\y=3+4s\end{cases}$，$s\leqq 0$　(B) $\begin{cases}x=s\\y=5-2s\end{cases}$，$s\geqq 1$　(C) $\begin{cases}x=s-1\\y=7-2s\end{cases}$，$s\geqq 2$

(D) $\begin{cases}x=2s+1\\y=3-4s\end{cases}$，$s\geqq 1$　(E) $\begin{cases}x=s+3\\y=1-2s\end{cases}$，$s\geqq 3$。

答案：(A)(B)(C)

解析：參數 $\begin{cases}x=1+t\\y=3-2t\end{cases}$，$t\geqq 0\Rightarrow t=1$ 時，$(x,y)=(2,1)$

$\Rightarrow$ 表以點 (1，3) 為端點，且過點 (2，1) 之射線

(A)○：$\begin{cases}x=1-2s\\y=3+4s\end{cases}$，$s\leqq 0\Rightarrow s=0$ 時，表端點 (1，3)；$s=-\frac{1}{2}$ 時，表過點 (2，1)

(B)○：$\begin{cases}x=s\\y=5-2s\end{cases}$，$s\geqq 1\Rightarrow s=1$時，表端點 (1，3)；$s=2$ 時，表點 (2，1)，所以 $s\geqq 1$

與原圖形相同

(C)○：$\begin{cases}x=s-1\\y=7-2s\end{cases}$，$s\geqq 2\Rightarrow s=2$ 時，表端點（1，3）；$s=3$時，表點（2，1），所以 $s\geqq 2$ 與原圖形相同

(D)╳：$\begin{cases}x=2s+1\\y=3-4s\end{cases}$，$s\geqq 1\Rightarrow s=1$ 時，表端點（3，－1）(不合)

(E)╳：$\begin{cases}x=s+3\\y=1-2s\end{cases}$，$s\geqq 3\Rightarrow s=3$ 時，表端點（6，－5）(不合)

故選(A)(B)(C)

3. (　　　　)在坐標平面上，下列五組條件中，哪幾組可決定一圓？

(A)過三點（1，－3），（2，6），（4，24）

(B)以（1，0）與（3，4）為一直徑的兩端點

(C)過四點（1，0），（－1，0），（0，1）與（0，－1）

(D)圓心為（－1，2），且與 x 軸及 y 軸都相切。

答案：(B)(C)

解析：(A)過（1，－3），（2，6）之直線為 $9x-y+12=0$

又（4，24）在 $9x-y+12=0$ 上，即（1，－3），（2，6），（4，24）三點共線

故無法決定一圓

(B)以（1，0）與（3，4）為一直徑的兩端點之圓方程式為 $(x-1)(x-3)+(y-0)(y-4)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-4y+3=0$

故可決定一圓

(C)過四點（1，0），（－1，0），（0，1）與（0，－1）之圓方程式為 $x^2+y^2=1$

故可決定一圓

(D)圓心為（－1，2）之圓不可能同時與 x 軸及 y 軸相切

（∵圓心（－1，2）與 x 軸相切之半徑為 1 與 y 軸相切之半徑為 2，故此圓不存在）

4. (　　　　)設 A（4，4），B（1，5），C（－3，3），若△ABC 之外接圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$，則

(A) $d+e+2=0$　(B) $d+f+24=0$　(C) $d+e+f+26=0$

(D) $d+2e=d$　(E) $d+2e+3f=50$。

答案：(A)(C)(D)

解析：∵△ABC 之外接圓方程式為 $x^2+y^2+dx+ey+f=0$

且 A（4，4），B（1，5），C（－3，3）

$$\therefore \begin{cases}16+16+4d+4e+f=0\\1+25+d+5e+f=0\\9+9-3d+3e+f=0\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}4d+4e+f=-32\\d+5e+f=-26\\-3d+3e+f=-18\end{cases}$$

$\Rightarrow d=-2$，$e=0$，$f=-24$

(A) $d+e+2=-2+0+2=0$ 正確

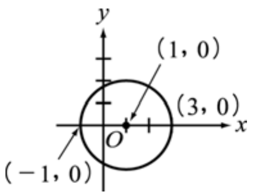
(B) $d+f+24=(-2)+(-24)+24=-2\neq 0$ 錯誤

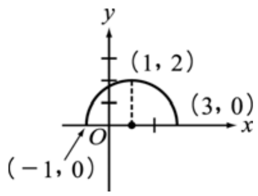
(C) $d+e+f+26=(-2)+0+(-24)+26=0$ 正確

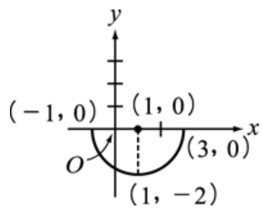
（D）d＋2e＝（－2）＋2・0＝（－2）＝d 正確
（E）d＋2e＋3f＝（－2）＋2・0＋3・（－24）＝－74≠50 錯誤
故選(A)(C)(D)

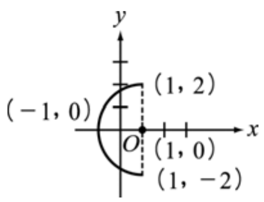
二、單一選擇題（計三題）：

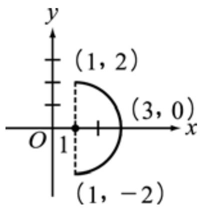
5. (　) 下列何者為方程式 $x=1+\sqrt{4-y^2}$ 的圖形？

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


答案：(E)

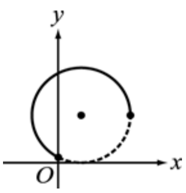
解析：$x=1+\sqrt{4-y^2}$

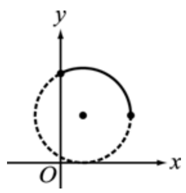
$\Rightarrow x-1=\sqrt{4-y^2}\geqq 0$

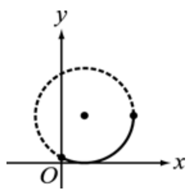
$\Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2=4-y^2\\(x-1)\geqq 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}(x-1)^2+y^2=4\\x\geqq 1\end{cases}$

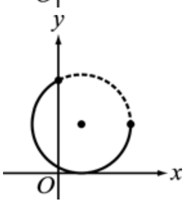
∴圖形為以（1，0）為圓心，半徑為 2 的圓的右半部，故選(E)

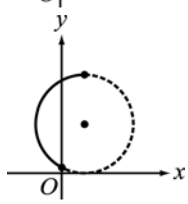
6. (　) 參數方程式 $\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\y=2-2\sin\theta\end{cases}$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ 的圖形為下列何者？

(A)


(B)


(C)


(D)


(E)


答案：(C)

解析：$\begin{cases}x=1+2\cos\theta\\y=2-2\sin\theta\end{cases}$，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$

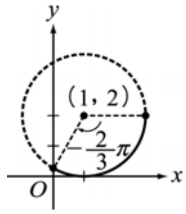
令 $\theta=-\phi$

則 $\begin{cases}x=1+2\cos(-\phi)=1+2\cos\phi\\y=2-2\sin(-\phi)=2+2\sin\phi\end{cases}$，$0\leqq-\phi\leqq\dfrac{2\pi}{3}$

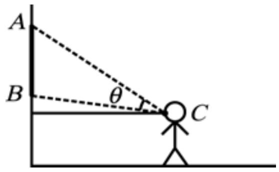
$\Rightarrow \begin{cases}x-1=2\cos\phi\\y-2=2\sin\phi\end{cases}$，$-\dfrac{2\pi}{3}\leqq\phi\leqq 0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2=4$ 且參數ϕ之限制為$-\dfrac{2\pi}{3}\leqq\phi\leqq 0$

故圖形如下



7. (　)琳達到畫廊賞畫(如圖),牆壁上懸掛一幅張大千的山水畫 AB,A 點,B 點分別離地 4 公尺,2 公尺高,若琳達的眼睛 C 離地 1.5 公尺高,則 C 離牆壁多遠時,她對該幅「山水畫」的視角最大? (A)$\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ (B)$\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ (C)$\sqrt{5}$ (D)$2\sqrt{5}$ (E)$3\sqrt{5}$ 公尺。



答案:(B)

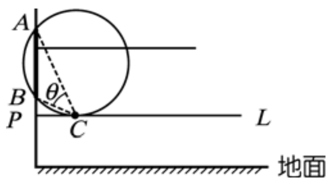
解析:過 C 作 L 直線平行地面

作一圓通過 A,B 且與 L 相切於 C

則 C 即為琳達眼睛之位置,此時$\overline{PB}=\dfrac{1}{2}$公尺

$\overline{PA}=\dfrac{5}{2}$公尺,而$\overline{PC}^2=\overline{PB}\times\overline{PA}=\dfrac{1}{2}\times\dfrac{5}{2}=\dfrac{5}{4}$(公尺)

$\therefore\overline{PC}=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$公尺



三、選擇、填充題(計三題):

8. 已知方程組$\begin{cases}x+y+2z=-2\\x+2y+3z=\alpha\\x+3y+4z=\beta\\x+4y+5z=\beta^2\end{cases}$有解,其中$\alpha$,$\beta$皆為非整數之常數,則$\alpha=$【　　　　】,$\beta=$【　　　　】。〔78.數甲〕

答案:$-\dfrac{5}{4}$;$-\dfrac{1}{2}$

解析:$\begin{cases}x+y+2z=-2\cdots\cdots\text{①}\\x+2y+3z=\alpha\cdots\cdots\text{②}\\x+3y+4z=\beta\cdots\cdots\text{③}\\x+4y+5z=\beta^2\cdots\cdots\text{④}\end{cases}$ 由$\begin{cases}\text{②}-\text{①}\\\text{③}-\text{②}\\\text{④}-\text{③}\end{cases}$得$\begin{cases}y+z=\alpha+2\\y+z=\beta-\alpha\\y+z=\beta^2-\beta\end{cases}$

故 $\begin{cases}\alpha+2=\beta-\alpha\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑤\\\alpha+2=\beta^2-\beta\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots⑥\end{cases}$

由⑤得 $\alpha=\dfrac{\beta}{2}-1$，代入⑥得 $(\dfrac{\beta}{2}-1)+2=\beta^2-\beta$

即 $2\beta^2-3\beta-2=0\Rightarrow\beta=2$ 或 $-\dfrac{1}{2}$（2 不合）

$\Rightarrow\alpha=-\dfrac{1}{4}-1=-\dfrac{5}{4}$

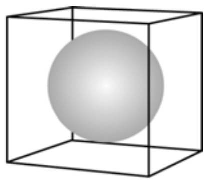
9.（　）設一球之球心與一正立方體之中心重合，考慮球面與正立方體所有邊的交點，則交點的個數不可能是 （A）0 （B）8 （C）12 （D）16 （E）24。〔90.數甲〕

答案：（D）

解析：考慮球在正立方體內部慢慢變大

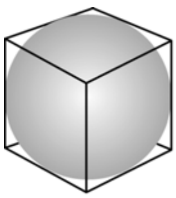
設球心 O，半徑 r，正立方體邊長 a

（1）當 $r<\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ 時，球在正立方體內部，故球與邊皆不相交　∴交點個數為 0



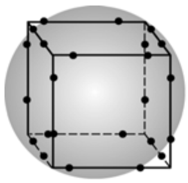
球在正立方體內部

（2）當 $r=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a$ 時，球與邊相切，共 12 個交點



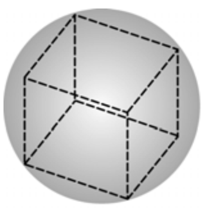
球與每邊相切

（3）當 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}a<r<\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 時，球與每條邊有 2 個交點　∴共有 2x12＝24 個交點



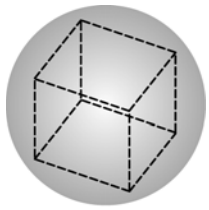
球與每邊交兩點

（4）當 $r=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 時，球與每個頂點相接　∴共有 8 個交點



球過正立方體之頂點

（5）當 $r>\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$ 時，正立方體在球內部，故球與邊皆不相交　∴交點個數為 0



正方體在球內部

故（D）16 個交點是不可能的，選（D）

10. 在坐標空間中，球面 S 交 xy 平面於一半徑為$\sqrt{13}$，圓心為（2，3，0）的圓，且 S 通過點（6，6，6），則 S 的半徑為【　　　　】。〔95.數甲〕

答案：$\sqrt{29}$

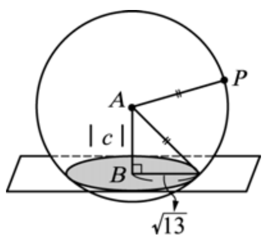
解析：球心 A（a，b，c）在 xy 平面垂足為 B（a，b，0）＝（2，3，0），因此 a=2，b=3

即球心 A（2，3，c），設 P（6，6，6），則 S 半徑為 $\overline{AP}$

因此$\sqrt{4^2+3^2+(c-6)^2}=\sqrt{c^2+(\sqrt{13})^2}$

即 $c^2-12c+61=c^2+13$，得 $c=4$

故 S 的半徑為$\sqrt{4^2+(\sqrt{13})^2}=\sqrt{29}$



四、填充題（計七十五題）：

11. $|\overrightarrow{u}|=1$，$|\overrightarrow{v}|=2$，$\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{v}$ 的夾角為 60°，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$，$\overrightarrow{OQ}=2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$，

則 $|\overrightarrow{PQ}|=$【　　　　】。

答案：$\sqrt{13}$

解析：$|\overrightarrow{PQ}|^2=|\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}|^2=|(2\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v})-(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v})|^2$

$=|\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}|^2=|\overrightarrow{u}|^2-4\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}+4|\overrightarrow{v}|^2$

$=1^2-4|\overrightarrow{u}||\overrightarrow{v}|\cos60^\circ+4\times2^2$

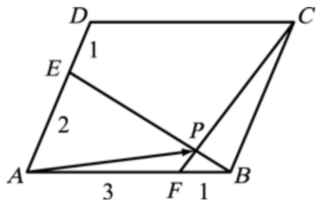
$=1-4\times1\times2\times\frac{1}{2}+16=13$

故 $|\overrightarrow{PQ}|=\sqrt{13}$

12. 設平行四邊形 ABCD，E 在 $\overline{AD}$ 上，$\overline{AE}=2\overline{ED}$，F 在 $\overrightarrow{AB}$ 上，$\overrightarrow{AF}=3\overrightarrow{FB}$，若 $\overline{CF}$ 與 $\overline{BE}$ 交於 P 點，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則數對（x，y）＝【　　　　】。

答案：$\left(\frac{9}{14},\frac{1}{7}\right)$

解析：$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$



(1) $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD})=(x+y)\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=(x+y)\overrightarrow{AB}+\frac{3}{2}y\overrightarrow{AE}$

因為 E－P－B，所以 $(x+y)+\frac{3}{2}y=1\Rightarrow 2x+5y=2$

(2) $\overrightarrow{AP}=x(\frac{4}{3}\overrightarrow{AF})+y\overrightarrow{AC}=\frac{4}{3}x\overrightarrow{AF}+y\overrightarrow{AC}$

因為 C－P－F，所以 $\frac{4}{3}x+y=1\Rightarrow 4x+3y=3$

(3) $\begin{cases}2x+5y=2\\4x+3y=3\end{cases}$ 解得 $x=\frac{9}{14}$，$y=\frac{1}{7}$

故數對 $(x，y)=(\frac{9}{14}，\frac{1}{7})$

13. 正△ABC 之邊長為 2，D，E 分別為 $\overline{BC}$ 上之三等分點，則 $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=$【　　　　】。

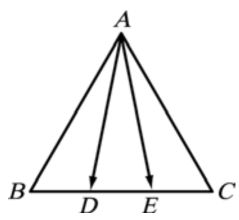
答案：$\frac{26}{9}$

解析：$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AE}=(\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AC})\cdot(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC})$

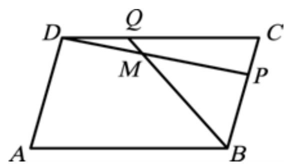
$=\frac{2}{9}|\overrightarrow{AB}|^2+\frac{5}{9}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\frac{2}{9}|\overrightarrow{AC}|^2$

$=\frac{2}{9}\times4+\frac{5}{9}\times2\times2\times\cos60^\circ+\frac{2}{9}\times4$

$=\frac{8}{9}+\frac{10}{9}+\frac{8}{9}=\frac{26}{9}$

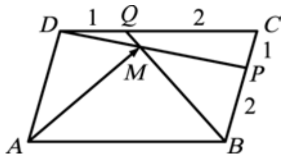


14. 如圖，ABCD 為一平行四邊形，$\overline{BP}:\overline{PC}=\overline{CQ}:\overline{QD}=2:1$，設 $\overline{BQ}$ 與 $\overline{DP}$ 交於 M，若 $\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AD}+n\overrightarrow{AB}$，則數對 $(m，n)=$【　　　　】。



答案：$(\frac{6}{7}，\frac{3}{7})$

解析：



由孟氏定理得 $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PC}}\cdot\dfrac{\overline{CD}}{\overline{DQ}}\cdot\dfrac{\overline{QM}}{\overline{MB}}=1$

$\Rightarrow \dfrac{\overline{QM}}{\overline{MB}}=\dfrac{\overline{PC}}{\overline{BP}}\cdot\dfrac{\overline{DQ}}{\overline{CD}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{6}$

$\Rightarrow \overrightarrow{AM}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{7}\overrightarrow{AQ}=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{7}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DQ})=\dfrac{1}{7}\overrightarrow{AB}+\dfrac{6}{7}(\overrightarrow{AD}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB})=\dfrac{6}{7}\overrightarrow{AD}+$

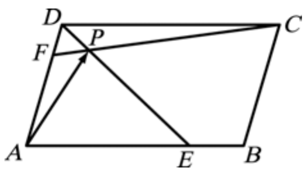
$\dfrac{3}{7}\overrightarrow{AB}$，

故 $m=\dfrac{6}{7}$，$n=\dfrac{3}{7}$，數對 $(m，n)=(\dfrac{6}{7}，\dfrac{3}{7})$

15. 設平行四邊形 ABCD，E 在 $\overline{AB}$ 上，$\overline{AE}=3\overline{EB}$，F 在 $\overline{AD}$ 上，$\overline{AF}=3\overline{FD}$，若 $\overline{CF}$ 交 $\overline{ED}$ 於 P，且 $\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}$，則 x=【　　　　】，y=【　　　　】。

答案：$\dfrac{3}{19}$；$\dfrac{15}{19}$

解析：



$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=\dfrac{4}{3}x\overrightarrow{AE}+y\overrightarrow{AD}\Rightarrow\dfrac{4}{3}x+y=1$……………①

$\overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AD}=x(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{BC})+y\overrightarrow{AD}=x\overrightarrow{AC}+(-x+y)\overrightarrow{AD}$

$=x\overrightarrow{AC}+\dfrac{4}{3}(-x+y)\overrightarrow{AF}$

$\Rightarrow x+\dfrac{4}{3}(-x+y)=1$……………②

由①、②解得 $x=\dfrac{3}{19}$，$y=\dfrac{15}{19}$

16. 於△ABC 中，$\overline{AB}=2$，$\overline{AC}=3$，$\overline{BC}=\sqrt{7}$，H 為△ABC 之垂心，若 $\overrightarrow{AH}=x\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC}$，則 x=【　　　　】，y=【　　　　】。

答案：$\dfrac{2}{3}$；$\dfrac{1}{9}$

解析：$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{AC}|^2-|\overrightarrow{BC}|^2)=\dfrac{1}{2}(4+9-7)=3$

又 H 為△ABC 之垂心 $\Rightarrow\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AH}=3$

所以 $\begin{cases}\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AB}=x|\overrightarrow{AB}|^2+y\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{AC}=x\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+y|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+3y=3\\3x+9y=3\end{cases}$

解得 $x=\dfrac{2}{3}$，$y=\dfrac{1}{9}$

17. △ABC 內部一點 P，滿足 $2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=0$，則△PAB：△PAC：△PBC=【　　　　】。

答案：4：3：2

解析：$2\overrightarrow{PA}+3\overrightarrow{PB}+4\overrightarrow{PC}=\overrightarrow{0}$

$\Rightarrow$ △PBC：△PCA：△PAB=2：3：4

$\Rightarrow$ △PAB：△PAC：△PBC=4：3：2

18. 設 E 為△ABC 之外心，且 $\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=5$，$\overline{CA}=6$，若 $\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 $\alpha=$【　　　　】，$\beta=$【　　　　】。

答案：$\dfrac{4}{35}$；$\dfrac{16}{35}$

解析：E 為△ABC 之外心 $\Rightarrow \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}|^2$，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AC}|^2$

又 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\dfrac{1}{2}(b^2+c^2-a^2)=\dfrac{1}{2}(36+16-25)=\dfrac{27}{2}$，所以

$\overrightarrow{AE}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC} \Rightarrow \begin{cases}\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AB}=\alpha|\overrightarrow{AB}|^2+\beta\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\\ \overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AC}=\alpha\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+\beta|\overrightarrow{AC}|^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}16\alpha+\dfrac{27}{2}\beta=8\\ \dfrac{27}{2}\alpha+36\beta=18\end{cases}$

解得 $\alpha=\dfrac{4}{35}$，$\beta=\dfrac{16}{35}$

19. 設 A（−2，4），B（6，−2），C（1，0），∠A 的內角及外角平分線與直線 BC 分別交於 P，Q 兩點，則 P 點的坐標為【　　　　】，Q 點的坐標為【　　　　】。

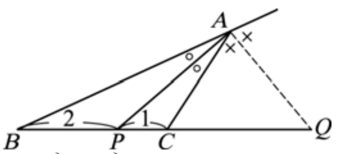
答案：$\left(\dfrac{8}{3},-\dfrac{2}{3}\right)$；$(-4,2)$

解析：$\overline{AB}=\sqrt{8^2+6^2}=10$，$\overline{AC}=\sqrt{3^2+4^2}=5$

(1) $\overline{AP}$ 是內角平分線 $\Rightarrow \overline{BP}:\overline{PC}=2:1 \Rightarrow P\left(\dfrac{1}{3}\times6+\dfrac{2}{3}\times1,\ \dfrac{1}{3}\times(-2)+\dfrac{2}{3}\times0\right)=P\left(\dfrac{8}{3},\right.$

$\left.-\dfrac{2}{3}\right)$

(2) $\overline{AQ}$ 是外角平分線 $\Rightarrow \overline{BQ}:\overline{QC}=2:1 \Rightarrow Q(2-6,\ 0-(-2))=Q(-4,2)$



20. $\vec{a}=(1,1)$，$\vec{b}=(2,-4)$，$\vec{c}=t\vec{a}+\vec{b}$（t 為實數），則 $|\vec{c}|$ 之最小值為【　　　　】。

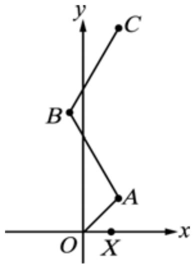
答案：$3\sqrt{2}$

解析：$\vec{c}=t\vec{a}+\vec{b}=t(1,1)+(2,-4)=(t+2,t-4)$

$\Rightarrow |\vec{c}|=\sqrt{(t+2)^2+(t-4)^2}=\sqrt{2t^2-4t+20}=\sqrt{2(t-1)^2+18}$

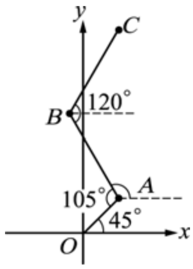
所以當 t=1 時，$|\vec{c}|$ 有最小值 $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$

21. 如圖，O（0，0），X（1，0），$\overline{OA}=2$，$\overline{AB}=4$，$\overline{BC}=4$，∠AOX=45°，∠OAB=105°，∠ABC=120°，則 C 點的坐標為【　　　　】。



答案：（$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}+4\sqrt{3}$）

解析：



$\overrightarrow{AB}$ 之方向角為 360°－105°－（180°－45°）＝120°

$\overrightarrow{BC}$ 之方向角為 120°－（180°－120°）＝60°

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} \overrightarrow{OA}=(2\cos 45^\circ，2\sin 45^\circ)=(\sqrt{2}，\sqrt{2}) \\ \overrightarrow{AB}=(4\cos 120^\circ，4\sin 120^\circ)=(-2，2\sqrt{3}) \\ \overrightarrow{BC}=(4\cos 60^\circ，4\sin 60^\circ)=(2，2\sqrt{3}) \end{cases}$$

所以 $\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=(\sqrt{2}，\sqrt{2}+4\sqrt{3})$

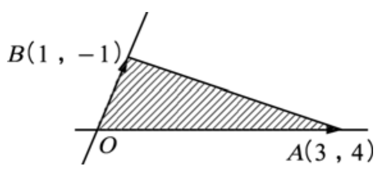
22. 設 A（3，4），B（1，－1），O（0，0），S＝{P｜$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$，$\alpha\geqq 0$，$\beta\geqq 0$，$\alpha+\beta\leqq 1$}，則 S 所成圖形之面積為【　　　　】。

答案：$\dfrac{7}{2}$

解析：$\overrightarrow{OA}$＝（3，4），$\overrightarrow{OB}$＝（1，－1），設 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$ 之夾角 θ

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}|\,|\overrightarrow{OB}|}=\frac{3\times 1+4\times(-1)}{5\times\sqrt{2}}=\frac{-1}{5\sqrt{2}}\Rightarrow \sin\theta=\frac{7}{5\sqrt{2}}$$

S 的圖形為△AOB（如圖）$\Rightarrow$ $\triangle AOB=\dfrac{1}{2}\overline{OA}\cdot\overline{OB}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\times 5\times\sqrt{2}\times\dfrac{7}{5\sqrt{2}}=\dfrac{7}{2}$



23. 設 P（8，9），Q（－2，4），R（1，8），則：

（1）$\overrightarrow{QP}$ 在 $\overrightarrow{QR}$ 方向上的正射影為【　　　　】。

（2）P 點在直線 QR 上的正射影點為【　　　　】。

答案：（1）（6，8）；（2）（4，12）

解析：（1）$\overrightarrow{QP}$＝（10，5），$\overrightarrow{QR}$＝（3，4），設點 P 在直線 QR 上的投影點為 P'

則 $\overrightarrow{QP}$ 在 $\overrightarrow{QR}$ 方向上的正射影 $\overrightarrow{QP'}=\dfrac{\overrightarrow{QP}\cdot\overrightarrow{QR}}{|\overrightarrow{QR}|^2}\overrightarrow{QR}=2(3，4)=(6，8)$

（2）$\overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{QP'}=(-2，4)+(6，8)=(4，12)$

24. 過點（2，4），且與直線 $2x+y+1=0$ 夾成 $\frac{\pi}{4}$ 角之直線方程式為【　　　　】。

答案：$3x-y-2=0$ 或 $x+3y-14=0$

解析：〈解法一〉

設此直線為 $y=mx+k$，取其法向量 $\vec{n}_1=(m,-1)$，再取 $\vec{n}_2=(2,1)$ 為直線 $2x+y+1=0$ 之法向量，因為兩直線夾角為 $\frac{\pi}{4}$

$\Rightarrow \vec{n}_1$ 與 $\vec{n}_2$ 之夾角為 $\frac{\pi}{4}$ 或 $\frac{3\pi}{4}$ $\Rightarrow \frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{|\vec{n}_1||\vec{n}_2|}=\pm\cos\frac{\pi}{4}\Rightarrow\frac{2m-1}{\sqrt{m^2+1}\cdot\sqrt{5}}=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$

$\Rightarrow 2(2m-1)^2=5(m^2+1)\Rightarrow 3m^2-8m-3=0\Rightarrow m=3$ 或 $-\frac{1}{3}$

又此直線過點（2，4），故此直線方程式為 $3x-y-2=0$ 或 $x+3y-14=0$

〈解法二〉

設所求直線斜率為 m，而已知直線 $2x+y+1=0$ 之斜率為 -2

代入夾角公式 $\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}=\pm\tan\theta\Rightarrow\frac{m-(-2)}{1-2m}=\pm1$

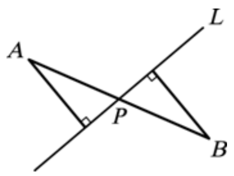
$\Rightarrow m+2\pm(1-2m)=0\Rightarrow m=3$ 或 $-\frac{1}{3}$

又此直線過點（2，4），故此直線方程式為 $3x-y-2=0$ 或 $x+3y-14=0$

25. 連接兩點 A（1，2）和 B（−2，1）的線段被直線 $L：x+2y-3=0$ 分成兩段 $\overline{AP}$，$\overline{BP}$，則 $\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=$【　　】。

答案：$\frac{2}{3}$

解析：$\frac{\overline{AP}}{\overline{BP}}=\frac{d(A,L)}{d(B,L)}=\frac{\frac{|1+2\times2-3|}{\sqrt{1+4}}}{\frac{|-2+2\times1-3|}{\sqrt{1+4}}}=\frac{2}{3}$



26. 兩直線 $3x+4y-7=0$ 及 $4x+3y+2=0$ 所夾鈍角的平分線方程式為【　　　　】。

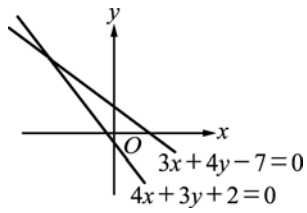
答案：$x-y+9=0$

解析：$\frac{|3x+4y-7|}{5}=\frac{|4x+3y+2|}{5}\Rightarrow(3x+4y-7)=\pm(4x+3y+2)$

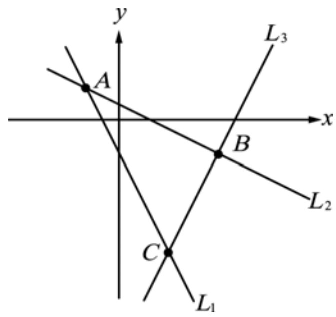
$\Rightarrow 7x+7y-5=0$ 或 $x-y+9=0$

由下圖知鈍角平分線之斜率應為正

$\Rightarrow$ 所求鈍角平分線方程式為 $x-y+9=0$



27. 三直線 L_1：$2x+y+1=0$，L_2：$x+2y-1=0$，L_3：$2x-y-7=0$ 圍成△ABC，則△ABC 的
（1）內心坐標為【　　　　　】。
（2）外心坐標為【　　　　　】。
（3）重心坐標為【　　　　　】。
（4）垂心坐標為【　　　　　】。



答案：（1）$\left(\frac{3}{2}，-\frac{3}{2}\right)$；（2）$\left(\frac{1}{4}，-\frac{3}{2}\right)$；（3）$\left(\frac{7}{6}，-\frac{4}{3}\right)$；（4）（3，−1）

解析：由三直線 L_1，L_2，L_3 方程式可得 A（−1，1），B（3，−1），C$\left(\frac{3}{2}，-4\right)$

（1）$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x+y+1|}{\sqrt{5}}$ 且∠A 平分線位於異號區 ⇒ $x+y=0$

$\frac{|x+2y-1|}{\sqrt{5}}=\frac{|2x-y-7|}{\sqrt{5}}$ 且∠B 平分線位於同號區 ⇒ $x-3y-6=0$

由∠A，∠B 平分線之交點可得內心坐標為$\left(\frac{3}{2}，-\frac{3}{2}\right)$

（2）由直線 L_2 的斜率為 $-\frac{1}{2}$，直線 L_3 的斜率為 2，可知 $L_2 \perp L_3$

所以△ABC 為直角三角形 ⇒ 外心在 $\overline{AC}$ 中點$\left(\frac{1}{4}，-\frac{3}{2}\right)$

（3）三頂點 A（−1，1），B（3，−1），C$\left(\frac{3}{2}，-4\right)$

⇒ 中心為$\left(\frac{1}{3}\left(-1+3+\frac{3}{2}\right)，\frac{1}{3}\left(1+(-1)+(-4)\right)\right)=\left(\frac{7}{6}，-\frac{4}{3}\right)$

（4）直角三角形的垂心為直角頂，故垂心為頂點 B 的坐標（3，−1）

28. 若點 P（1，−3），Q（−4，2）在直線 $3x+ky-2=0$ 之異側，則 k 之範圍為【　　　　　】。

答案：$k>7$ 或 $k<\frac{1}{3}$

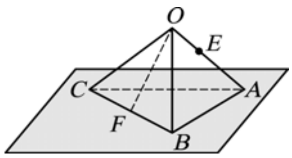
解析：P，Q 在異側 ⇒〔3x1+（−3）k−2〕〔3x（−4）+2k−2〕<0

⇒（−3k+1）（2k−14）<0

⇒（3k−1）（k−7）>0

$\Rightarrow k>7$ 或 $k<\dfrac{1}{3}$

29. 一黏貼於地面之實心三角錐 O－ABC，$\overline{OA}$，$\overline{OB}$，$\overline{OC}$ 兩兩互相垂直，$\overline{OA}=\overline{OB}=3$，$\overline{OC}=4$，又點 E，F 分別在 $\overline{OA}$，$\overline{BC}$ 上，且 $\overline{AE}=2$，$\overline{OF}\perp\overline{BC}$，今有一隻螞蟻欲自 E 點爬行四面體表面至 F 點，求其爬行最短路徑長為【　　　　】。



答案：$\dfrac{\sqrt{241}}{5}$

解析：路徑有 $E\to\overline{OB}\to F$ 及 $E\to\overline{OC}\to F$ 兩種

(1) $E\to\overline{OB}\to F$ 時，將△OAB 沿 $\overline{OB}$ 折起

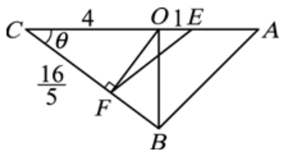
使 O，A，B，C 共平面，如下圖，

則 $\overline{CF}=\sqrt{\overline{OC}^2-\overline{OF}^2}=\sqrt{4^2-(\dfrac{3\times4}{5})^2}=\dfrac{16}{5}$

而 $\overline{EF}^2=\overline{CE}^2+\overline{CF}^2-2\cdot\overline{CE}\cdot\overline{CF}\cdot\cos\theta$

$=5^2+(\dfrac{16}{5})^2-2\cdot5\cdot\dfrac{16}{5}\cdot\dfrac{4}{5}=\dfrac{241}{25}$

$\Rightarrow\overline{EF}=\dfrac{\sqrt{241}}{5}$



(2) $E\to\overline{OC}\to F$ 時，將△OAC 沿 $\overline{OC}$ 折起

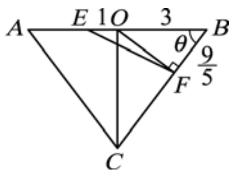
使 O，A，B，C 共平面，如下圖，

則 $\overline{BF}=\sqrt{\overline{OB}^2-\overline{OF}^2}=\sqrt{3^2-(\dfrac{3\times4}{5})^2}=\dfrac{9}{5}$

而 $\overline{EF}^2=\overline{BE}^2+\overline{BF}^2-2\cdot\overline{BE}\cdot\overline{BF}\cdot\cos\theta$

$=4^2+(\dfrac{9}{5})^2-2\cdot4\cdot\dfrac{9}{5}\cdot\dfrac{3}{5}=\dfrac{265}{25}$

$\Rightarrow\overline{EF}=\dfrac{\sqrt{265}}{5}$



由(1)、(2)比較得，$E\to\overline{OB}\to F$ 可得最短路徑 $\overline{EF}=\dfrac{\sqrt{241}}{5}$

30. 不共面三射線 OX，OY，OZ 互成 30° 角，P 在射線 OX 上，且 $\overline{OP}=2$，若 P 至平面 YOZ 之投影為 Q，Q 至射線 OY 之垂足為 R，直線 QR 交射線 OZ 於 S，則 $\overline{PS}^2+\overline{OR}^2=$【　　　　】。

答案：$11-4\sqrt{3}$

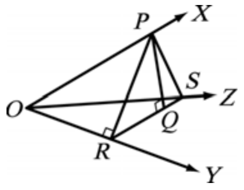
解析：$\because \overleftrightarrow{PQ}\perp$ 平面 YOZ，且 $\overleftrightarrow{QR}\perp\overleftrightarrow{OY}$，由三垂線定理知 $\overleftrightarrow{PR}\perp\overleftrightarrow{OY}$

(1)在△OPR 中　$\because \angle ORP=90^\circ$，$\angle POR=30^\circ$，且 $\overline{OP}=2$

故 $\overline{OR}=\overline{OP}\cos30^\circ=2\cos30^\circ=\sqrt{3}$

在△OSR 中　$\because \angle ORS=90^\circ$，$\angle SOR=30^\circ$，且 $\overline{OR}=\sqrt{3}$

故 $\overline{RS}=1$，$\overline{OS}=2$



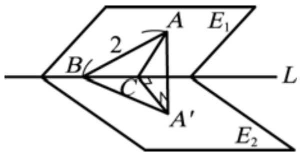
(2)在△OPS 中，由餘弦定律知

$$\overline{PS}^2=\overline{OP}^2+\overline{OS}^2-2\overline{OP}\cdot\overline{OS}\cdot\cos30^\circ=2^2+2^2-2\cdot2\cdot2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=8-4\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \overline{PS}=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{8-2\sqrt{12}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$$

(3)故 $\overline{PS}^2+\overline{OR}^2=(\sqrt{6}-\sqrt{2})^2+(\sqrt{3})^2=6+2-4\sqrt{3}+3=11-4\sqrt{3}$

31. 如圖，設 L 為兩平面 E_1 及 E_2 的交線，而 E_1，E_2 所成兩面角的銳角為 60°，若 A 點在 E_1 上但不在 L 上，B 點在 L 上，$\overleftrightarrow{AB}$ 與 L 所夾銳角為 30°，$\overline{AB}=2$，則 $\overline{AB}$ 在 E_2 上的投影 $\overline{A'B}$ 的長度為【　】。



答案：$\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

解析：$\because \overline{AA'}\perp E_2$，設 $\overline{A'C}\perp L$

則由三垂線定理知 $\overline{AC}\perp L$

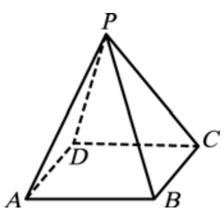
$\because \overline{AB}=2$　$\therefore \overline{AC}=\overline{AB}\sin30^\circ=1$，又 $\overline{BC}=\sqrt{3}$

$\because$ 二面角為 60°　$\therefore \angle ACA'=60^\circ$

$$\therefore \overline{A'C}=\overline{AC}\cdot\cos60^\circ=1\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

在直角△A'BC 中，$\overline{A'B}=\sqrt{(\sqrt{3})^2+(\frac{1}{2})^2}=\dfrac{\sqrt{13}}{2}$

32. 如圖，有一個各稜等長的金字塔，設其四個正三角形的斜面中相鄰兩面的夾角為 α，則 $\cos\alpha=$【　】。



答案：$-\dfrac{1}{3}$

解析：設 $\overline{PB}$ 之中點為 M，又△PAB，△PBC 都是正三角形

$\Rightarrow \overline{AP}=\overline{AB}$，$\overline{CP}=\overline{CB}$

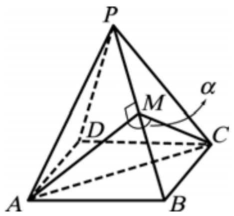
$\therefore \overline{AM}\perp\overline{PB}$，$\overline{CM}\perp\overline{PB}$

故 $\angle AMC=\alpha$（二面角的定義）

令 $\overline{AP}=1 \Rightarrow \overline{AM}=\overline{CM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

又 $\overline{AC}=\sqrt{\overline{AB}^2+\overline{BC}^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$

在△ACM 中，由餘弦定律得 $\cos\alpha=\dfrac{\overline{AM}^2+\overline{CM}^2-\overline{AC}^2}{2\overline{AM}\cdot\overline{CM}}=\dfrac{\frac{3}{4}+\frac{3}{4}-2}{2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}=-\dfrac{1}{3}$



33. 四個半徑均為 r 的球體，組成一三角堆垛，求此堆垛的高度為【　　　　】。

答案：$\left(2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)r$

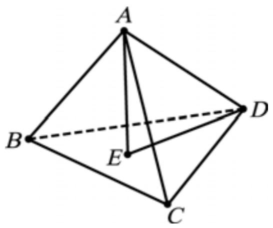
解析：(1)考慮四個球球心所形成的正四面體 ABCD

此四面體邊長為 2r，高為 $\overline{AE}$

錯誤!$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2r\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}$

$\overline{AE}^2=\overline{AD}^2-\overline{DE}^2=(2r)^2-\left(\dfrac{2\sqrt{3}r}{3}\right)^2=\dfrac{8}{3}r^2$

$\Rightarrow \overline{AE}=\sqrt{\dfrac{8}{3}r^2}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}r=\left(2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)r$



(2)堆垛下方三顆球的球心距離底面的高度為 r，上方的球，球心距離最高點的距離也為 r，

所以此堆垛的高度為 $2r+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}r=\left(2+\dfrac{2\sqrt{6}}{3}\right)r$

34. 在空間中有一點 P（2，1，−3），則：

(1)點 P 在 x 軸之正射影的坐標為【　　　　】。

(2)點 P 對 xy 平面之對稱點的坐標為【　　　　】。

(3)點 P 對 z 軸之對稱點的坐標為【　　　　】。

答案：(1)（2，0，0）；(2)（2，1，3）；(3)（−2，−1，−3）

解析：(1)在 x 軸之正射影的坐標 ⇒ x 坐標不變，y，z 坐標變成 0

（2，1，−3）⇒（2，0，0）

（2）對 xy 平面之對稱點的坐標 ⇒ x，y 坐標不變，z 坐標加負號

（2，1，−3）⇒（2，1，3）

（3）對 z 軸之對稱點的坐標 ⇒ x，y 坐標加負號，z 坐標不變

（2，1，−3）⇒（−2，−1，−3）

35. 設線段 QR 在 xy 平面，yz 平面，zx 平面上之射影長分別為 $2\sqrt{2}$，3，4，則 $\overline{QR}$ 之長為【　　】。

答案：$\dfrac{\sqrt{66}}{2}$

解析：設 Q（x_1，y_1，z_1），R（x_2，y_2，z_2）

∵Q，R 在 xy 平面上之投影點分別為 Q_1（x_1，y_1，0），R_1（x_2，y_2，0）⇒ $\overline{Q_1R_1}=2\sqrt{2}$

∴ $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=(2\sqrt{2})^2=8$……………①

同理 $(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=3^2=9$……………②

$(z_2-z_1)^2+(x_2-x_1)^2=4^2=16$……………③

由 $\dfrac{①+②+③}{2}$ 得 $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2=\dfrac{33}{2}$

∴$\overline{QR}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=\sqrt{\dfrac{33}{2}}=\dfrac{\sqrt{66}}{2}$

36. 設 P 點向三坐標軸引垂線，其垂足均在各軸的正向部分，且到 x，y，z 軸的距離依序為 5，$\sqrt{34}$，$\sqrt{41}$，求 P 點坐標為【　　　　】。

答案：（5，4，3）

解析：設 P（x，y，z）

$$\begin{cases} y^2+z^2=25……………① \\ x^2+z^2=34……………② \\ x^2+y^2=41……………③ \end{cases}$$

$\dfrac{①+②+③}{2}$ ⇒ $x^2+y^2+z^2=50$

⇒ $x^2=25$，$y^2=16$，$z^2=9$

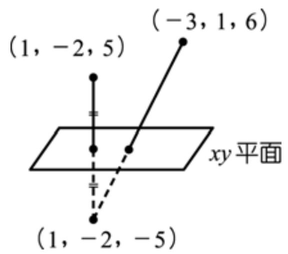
∵x，y，z＞0　∴x＝5，y＝4，z＝3

⇒ P（5，4，3）

37. x，y 為實數，試求 $\sqrt{(x-1)^2+(y+2)^2+25}+\sqrt{(x+3)^2+(y-1)^2+36}$ 之最小值為【　　　　】。

答案：$\sqrt{146}$

解析：原式的幾何意義為 xy 平面上一點到（1，−2，5）及（−3，1，6）的距離和



故原式的最小值即是（1，-2，-5）與（-3，1，6）的距離$=\sqrt{4^2+3^2+11^2}=\sqrt{146}$

38. 設 A（3，4，2），B（2，7，-4），P 為 xy 平面上任一點，則：

（1）$\overline{AP}+\overline{BP}$ 之最小值為【　　　　】。

（2）$|\overline{AP}-\overline{BP}|$ 之最大值為【　　　　】。

答案：（1）$\sqrt{14}$；（2）$\sqrt{46}$

解析：（1）A 對 xy 平面的對稱點 A'（3，4，-2）

$\overline{A'B}=\sqrt{1+9+4}=\sqrt{14}$

（2）$|\overline{AP}-\overline{BP}|$ 之最大值$=\overline{AB}=\sqrt{1+9+36}=\sqrt{46}$

39. 空間中三點 A（1，-2，5），B（3，7，1），C（-1，3，5），則：

（1）$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=$【　　　　】。

（2）△ABC 的面積為【　　　　】。

答案：（1）（20，8，28）；（2）$2\sqrt{78}$

解析：（1）$\overrightarrow{AB}=$（2，9，-4），$\overrightarrow{AC}=$（-2，5，0）

$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=\left(\begin{vmatrix}9 & -4\\5 & 0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 2\\0 & -2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}2 & 9\\-2 & 5\end{vmatrix}\right)$

$=$（20，8，28）

（2）△ABC 面積$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{20^2+8^2+28^2}=2\sqrt{78}$

40. 設 x，y，z 為實數，且 $x^2+y^2+z^2=9$，求 $x+2y-z$ 的最小值為【　　　　】，且此時（x，y，z）$=$【　　　　】。

答案：$-3\sqrt{6}$；$\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{6},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

解析：根據柯西不等式，$(x^2+y^2+z^2)[1^2+2^2+(-1)^2]\geqq(x+2y-z)^2$

$\Rightarrow 9\times6\geqq(x+2y-z)^2$

$\Rightarrow -3\sqrt{6}\leqq x+2y-z\leqq3\sqrt{6}$

∴最小值為$-3\sqrt{6}$

此時 $\frac{x}{1}=\frac{y}{2}=\frac{z}{-1}=t\Rightarrow x=t$，$y=2t$，$z=-t$

$\Rightarrow t+4t+t=-3\sqrt{6}\Rightarrow t=-\frac{\sqrt{6}}{2}$

∴（x，y，z）$=\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},-\sqrt{6},\frac{\sqrt{6}}{2}\right)$

41. x，y，z 均為正數，且 $2x+y+z=6$，求 $\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$ 之最大值為【　　　　】。

答案：$\sqrt{15}$

解析：根據柯西不等式，$[(\sqrt{2x})^2+(\sqrt{y})^2+(\sqrt{z})^2][(\frac{1}{\sqrt{2}})^2+1^2+1^2]\geqq(\sqrt{x}+\sqrt{y}+$

$\sqrt{z}$ ）^{2}

$\Rightarrow$（$2x+y+z$）・（$\frac{1}{2}+1+1$）$\geqq$（$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$）^{2}

$\Rightarrow 6\times\frac{5}{2}\geqq$（$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}$）^{2}

$\Rightarrow -\sqrt{15}\leqq\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\leqq\sqrt{15}$

∴最大值為 $\sqrt{15}$

42. $x>0$，$y>0$，求（$4x+\frac{1}{9y}$）（$\frac{1}{x}+25y$）之最小值為【　　　　】。

答案：$\frac{121}{9}$

解析：根據柯西不等式，〔（$2\sqrt{x}$）^{2}+（$\frac{1}{3\sqrt{y}}$）^{2}〕〔（$\frac{1}{\sqrt{x}}$）^{2}+（$5\sqrt{y}$）^{2}〕$\geqq$（$2+\frac{5}{3}$）^{2}

∴（$4x+\frac{1}{9y}$）（$\frac{1}{x}+25y$）$\geqq\frac{121}{9}$

∴最小值為 $\frac{121}{9}$

43. 設△ABC 中，$a=\overline{BC}=3$，$b=\overline{CA}=4$，$c=\overline{AB}=5$，在△ABC 內部一點 P 到 $\overline{BC}$，$\overline{CA}$，$\overline{AB}$ 的距離分別為 x，y，z，則 $x^2+y^2+z^2$ 之最小值為【　　　　】。

答案：$\frac{72}{25}$

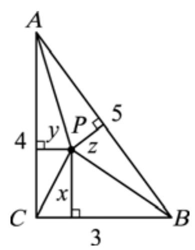
解析：如下圖，△ABC 之面積＝△PBC 之面積＋△PCA 之面積＋△PAB 之面積

∴$\frac{1}{2}\times3\times4=\frac{1}{2}\times3\times x+\frac{1}{2}\times4\times y+\frac{1}{2}\times5\times z$

$\Rightarrow 3x+4y+5z=12$

由柯西不等式（$x^2+y^2+z^2$）（$3^2+4^2+5^2$）

$\geqq$（$x\times3+y\times4+z\times5$）$^{2}\Rightarrow$（$x^2+y^2+z^2$）$\times50\geqq12^2\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geqq\frac{72}{25}$



44. 設 A（1，4，−3），B（5，6，7），則 $\overline{AB}$ 的垂直平分面為【　　　　】。

答案：$2x+y+5z=21$

解析：$\overrightarrow{AB}=$（4，2，10）// （2，1，5）

且 $\overline{AB}$ 中點 M（$\frac{1+5}{2}$，$\frac{4+6}{2}$，$\frac{-3+7}{2}$）＝M（3，5，2）

∴設平面 E：$2x+y+5z=k$，將 M（3，5，2）代入 E

$6+5+10=21=k$　$\therefore E：2x+y+5z=21$

45. 設 P（-1，1，2），Q（2，0，-3），R（5，1，-2），則平面 PQR 之方程式為【　　　　】。

答案：$2x-9y+3z+5=0$

解析：$\overrightarrow{PQ}=$（3，-1，-5），$\overrightarrow{PR}=$（6，0，-4）

$$\begin{array}{cccc} -1 & -5 & 3 & -1 \\ 0 & -4 & 6 & 0 \\ \hline & 4 & -18 & 6 \end{array}$$

$\overrightarrow{PQ}\times\overrightarrow{PR}=$（4，$-18$，6）// （2，$-9$，3）

取 $\vec{n}=$（2，-9，3），過點 P（-1，1，2）

平面為 $2(x+1)-9(y-1)+3(z-2)=0$

即 $2x-9y+3z+5=0$

46. 一平面與平面 $3x+2y+z+11=0$ 平行，且其三軸之截距和為 22，試求其方程式為【　　　　】。

答案：$3x+2y+z=12$

解析：設平面 $E：3x+2y+z=k \Rightarrow \dfrac{x}{\frac{k}{3}}+\dfrac{y}{\frac{k}{2}}+\dfrac{z}{k}=1$

$\therefore \dfrac{k}{3}+\dfrac{k}{2}+k=22 \Rightarrow 2k+3k+6k=132$

$\Rightarrow 11k=132 \Rightarrow k=12$

$\therefore E：3x+2y+z=12$

47. 設 A（1，2，3）與 B（3，0，1），求 $\overline{AB}$ 在平面 $E：x+y+z+2=0$ 的正射影長為【　　　　】。

答案：$\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

解析：$\overrightarrow{AB}=$（2，-2，-2），$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{4+4+4}=2\sqrt{3}$

$\vec{n}=$（1，1，1）

$\therefore \cos\theta=\dfrac{2-2-2}{2\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}}=-\dfrac{1}{3} \Rightarrow \sin\theta=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

$\therefore \overline{A'B'}=\overline{AB}\cdot\sin\theta=2\sqrt{3}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{4\sqrt{6}}{3}$

48. 平面 $E_1：x+y+z=7$ 與 $E_2：2x+2y+2z=5$ 之距離為【　　　　】。

答案：$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

解析：$E_1：2x+2y+2z=14$

$\therefore d(E_1，E_2)=\dfrac{14-5}{\sqrt{4+4+4}}=\dfrac{9}{2\sqrt{3}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

49. 點（x，y，z）在平面 $E：2x+y-2z=5$ 上移動，求 $\sqrt{(x-3)^2+y^2+(z+1)^2}$ 的最小值為【　　　　】。

答案：1

解析：所求即點（3，0，－1）到平面 E 的距離

$$\therefore d=\frac{|6+0+2-5|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{3}{3}=1$$

50. 設平面 E_1：$x+2y-2z-1=0$，E_2：$2x+y-2z+3=0$，試求：

(1) E_1 與 E_2 之夾角平分面之方程式為【　　　　】。

(2) E_1 與 E_2 之所夾銳角平分面之方程式為【　　　　】。

答案：(1) $x-y+4=0$ 或 $3x+3y-4z+2=0$；(2) $3x+3y-4z+2=0$

解析：(1) $\frac{|x+2y-2z-1|}{\sqrt{1+4+4}}=\frac{|2x+y-2z+3|}{\sqrt{4+1+4}}$

$\Rightarrow (x+2y-2z-1)=\pm(2x+y-2z+3)$

$\Rightarrow x-y+4=0$ 或 $3x+3y-4z+2=0$

(2)取 E_1 上一點（1，0，0）

分別求（1，0，0）到兩角平分面的距離，較小的為銳角平分面

$$\frac{|1+4|}{\sqrt{1+1}}>\frac{|3+2|}{\sqrt{9+9+16}}$$

$\therefore 3x+3y-4z+2=0$ 為銳角平分面

51. 過 $2x-3y+2z=2$ 與 $6x+y+z=1$ 的交線且平行 x 軸之平面方程式為【　　　　】。

答案：$2y-z+1=0$

解析：設平面 E：$(2x-3y+2z-2)+k(6x+y+z-1)=0$

$\Rightarrow (6k+2)x+(k-3)y+(k+2)z+(-k-2)=0$

$\therefore$法向量 $\vec{n}=(6k+2,k-3,k+2)$ 與 x 軸方向向量 $\vec{v}=(1,0,0)$ 垂直

$\Rightarrow (6k+2,k-3,k+2)\cdot(1,0,0)=0\Rightarrow 6k+2=0\Rightarrow k=-\frac{1}{3}$

$\therefore E\ (2x-3y+2z-2)-\frac{1}{3}(6x+y+z-1)=0$

$\Rightarrow 2y-z+1=0$

52. 空間中一點（2，3，1）關於平面 $x+2y+3z-6=0$ 的對稱點坐標為【　　　　】。

答案：$\left(\frac{9}{7},\frac{11}{7},-\frac{8}{7}\right)$

解析：設投影點坐標為 $H(2+t,3+2t,1+3t)$ 代入平面

$2+t+6+4t+3+9t-6=0\Rightarrow t=-\frac{5}{14}$

$\therefore H\left(\frac{23}{14},\frac{16}{7},-\frac{1}{14}\right)$

$\therefore$對稱點 $A'\left(2\cdot\frac{23}{14}-2,2\cdot\frac{16}{7}-3,2\cdot\left(-\frac{1}{14}\right)-1\right)=\left(\frac{9}{7},\frac{11}{7},-\frac{8}{7}\right)$

53. 設二平面 $x+2y+3z=6$ 與 $2x-3y-z=5$ 的交線為 $\frac{x-4}{a}=\frac{y-c}{b}=\frac{z-d}{-1}$，求 $a+b+c+d=$【

】。

答案：3

解析：令 $\vec{u}=(1,2,3)$，$\vec{v}=(2,-3,-1)$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\left(\begin{vmatrix}2&3\\-3&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}3&1\\-1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&2\\2&-3\end{vmatrix}\right)$$

$=(7,7,-7)\,//\,(1,1,-1)\Rightarrow a=1$，$b=1$

令 $x=4$，$\begin{cases}2y+3z=2\\-3y-z=-3\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}y=1\\z=0\end{cases}\Rightarrow c=1$，$d=0$

$\therefore a+b+c+d=3$

54. 試求由直線 L：$\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{y-2}{1}=\dfrac{z-1}{2}$ 及點 A（4，3，1）所決定的平面方程式為【　　　　】。

答案：$2x-6y+z=-9$

解析：取 L 上一點 B（1，2，1）

則 $\overrightarrow{AB}=(-3,-1,0)$

又 $\vec{v}=(2,1,2)$

$\therefore\vec{n}=\left(\begin{vmatrix}-1&0\\1&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&-3\\2&2\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-3&-1\\2&1\end{vmatrix}\right)=(-2,6,-1)$

$\therefore$ 令 $E：2x-6y+z=k$

A（4，3，1）代入 $\Rightarrow 8-18+1=-9=k$

$\therefore E：2x-6y+z=-9$

55. 已知 L_1：$\dfrac{x-4}{3}=\dfrac{y-2}{-1}=\dfrac{z-1}{2}$ 與 L_2：$\dfrac{x-5}{-7}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+2}{a}$ 相交，則 a=【　　　　】，兩直線的交點坐標為【　　　　】。

答案：-1；$(-2,4,-3)$

解析：$\begin{cases}4+3t=5-7k\cdots\cdots①\\2-t=3+k\cdots\cdots②\\1+2t=-2+ak\cdots\cdots③\end{cases}$

由①、② $\Rightarrow\begin{cases}3t+7k=1\\t+k=-1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}t=-2\\k=1\end{cases}$ 代入③

$1-4=-2+a\Rightarrow a=-1$

交點 $(4-6,2+2,1-4)=(-2,4,-3)$

56. 在空間中，有一點 A（1，2，−1）及一直線 L：$\dfrac{x-2}{1}=\dfrac{y-7}{2}=\dfrac{z-6}{1}$，則：

(1)點 A 到直線 L 的距離為【　　　　】。

(2)點 A 到直線 L 的正射影坐標為【　　　　】。

答案：(1) $\sqrt{21}$；(2) $(-1,1,3)$

解析：設 L 上一點 B $(2+t,7+2t,6+t)$

$\overrightarrow{AB}=(1+t,5+2t,7+t)$

$\overrightarrow{AB}\cdot(1,2,1)=1+t+10+4t+7+t=6t+18=0\Rightarrow t=-3$

$\Rightarrow B=(-1,1,3)$

$\overline{AB}=\sqrt{4+1+16}=\sqrt{21}$

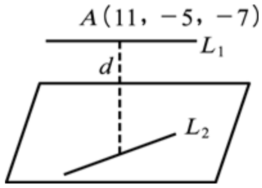
57. 兩直線 L_1：$\dfrac{x-11}{4}=\dfrac{y+5}{-3}=\dfrac{z+7}{-1}$ 與 L_2：$\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}$ 不共平面，則：

(1)包含 L_2 且與 L_1 平行之平面 E 方程式為【　　　　】。

(2) L_1 與 L_2 之間的公垂線段長為【　　　　】。

答案：（1）$2x+5y-7z+32=0$；（2）$\sqrt{78}$

解析：



（1）將 L_2 改成兩面式為 $\begin{cases}\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y-4}{-4}\\ \dfrac{y-4}{-4}=\dfrac{z-6}{-2}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}4x+3y+8=0\\ y-2z+8=0\end{cases}$

則包含 L_2 之平面 E 可設為 $(4x+3y+8)+k(y-2z+8)=0$

$\Rightarrow 4x+(3+k)y-2kz+(8+8k)=0$……………（＊）

其法向量為 $\vec{n}=(4,3+k,-2k)$

若 $L_1//E$

則 $\vec{n}$ 垂直 L_1 之方向向量 $(4,-3,-1)$

$\Rightarrow 16-3(3+k)-(-2k)=0\Rightarrow k=7$ 代回（＊）

得所求平面方程式為 $4x+10y-14z+64=0$

即 $2x+5y-7z+32=0$

（2）在 L_1 上取一點 $A(11,-5,-7)$，則

$d(L_1,L_2)=d(A,E)=\dfrac{|22-25+49+32|}{\sqrt{4+25+49}}=\sqrt{78}$

58. 若方程組 $\begin{cases}x-y+2z=1-a\\ x+3y-3z=1+a\\ 3x+y+z=a\end{cases}$ 有解，則 $a=$【　　　　】。

答案：$\dfrac{3}{2}$

解析：考慮增廣矩陣：$\begin{bmatrix}1&-1&2&1-a\\1&3&-3&1+a\\3&1&1&a\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \times(-1)\\ \times(-3)\end{matrix}\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2&1-a\\0&4&-5&2a\\0&4&-5&4a-3\end{bmatrix}\begin{matrix}\\ \\ \times(-1)\end{matrix}$

$\rightarrow\begin{bmatrix}1&-1&2&1-a\\0&4&-5&2a\\0&0&0&2a-3\end{bmatrix}$

有解，因此 $2a-3=0\Rightarrow a=\dfrac{3}{2}$

59. 設 $\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}=3$，$\begin{vmatrix}a&b\\e&f\end{vmatrix}=-1$，則 $\begin{vmatrix}3a&3b\\c+2e&d+2f\end{vmatrix}=$【　　　　】。

答案：3

解析：$\begin{vmatrix}3a&3b\\c+2e&d+2f\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3a&3b\\c&d\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}3a&3b\\2e&2f\end{vmatrix}=3\begin{vmatrix}a&b\\c&d\end{vmatrix}+3\cdot2\begin{vmatrix}a&b\\e&f\end{vmatrix}=3\cdot3+6(-1)=3$

60. 三直線 $x-y-9=0$，$x+2y=0$ 及 $3x-y-7=0$ 所圍成之三角形的面積為【　　　　】。

答案：21

解析：解 $\begin{cases} x-y-9=0 \\ x+2y=0 \end{cases}$ 得 A $(6，-3)$

解 $\begin{cases} x-y-9=0 \\ 3x-y-7=0 \end{cases}$ 得 B $(-1，-10)$

解 $\begin{cases} x+2y=0 \\ 3x-y-7=0 \end{cases}$ 得 C $(2，-1)$

$\overrightarrow{AB}=(-7，-7)$，$\overrightarrow{AC}=(-4，2)$

$\therefore \triangle ABC$ 面積 $=\frac{1}{2}\left|\begin{vmatrix} -7 & -7 \\ -4 & 2 \end{vmatrix}\right|=21$

61. 已知 $xyz\neq 0$ 且 $3x+y-2z=2x+3y-3z=5x+4y-5z$，則 $\frac{2x^2+y^2-z^2+3xy}{x^2+5y^2+z^2-5yz}=$【　　　　】。

答案：$\frac{39}{8}$

解析：由已知得 $\begin{cases} 3x+y-2z=2x+3y-3z \\ 2x+3y-3z=5x+4y-5z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-2y+z=0 \\ 3x+y-2z=0 \end{cases}$

故 $x:y:z=\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}:\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}=3:5:7$

令 $x=3t$，$y=5t$，$z=7t$

$\frac{2x^2+y^2-z^2+3xy}{x^2+5y^2+z^2-5yz}=\frac{18t^2+25t^2-49t^2+45t^2}{9t^2+125t^2+49t^2-175t^2}=\frac{39t^2}{8t^2}=\frac{39}{8}$

62. 方程組 $\begin{cases} 3x+ay=0 \\ 2x+4y=b-3 \end{cases}$ 除了 $(0，0)$ 外尚有其他解，則數對 $(a，b)=$【　　　　】。

答案：$(6，3)$

解析：除 $(0，0)$ 外尚有其他解，因此方程組有無限多組解

$\Rightarrow \Delta=\begin{vmatrix} 3 & a \\ 2 & 4 \end{vmatrix}=0$ 且 $\Delta_y=\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & b-3 \end{vmatrix}=0$

$\Rightarrow 12-2a=0$ 且 $3(b-3)=0$

故 $a=6$，$b=3$，數對 $(a，b)=(6，3)$

63. 若 $\begin{cases} a_1x+b_1y=c_1 \\ a_2x+b_2y=c_2 \end{cases}$ 之解為 $(2，-3)$，則 $\begin{cases} (2a_1-3b_1)x+2b_1y+c_1=0 \\ (2a_2-3b_2)x+2b_2y+c_2=0 \end{cases}$ 之解為數對 $(x，y)=$【

】。

答案：$(-1，0)$

解析：由 $\begin{cases} (2a_1-3b_1)x+2b_1y=-c_1 \\ (2a_2-3b_2)x+2b_2y=-c_2 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} (-2x)a_1+(3x-2y)b_1=c_1 \\ (-2x)a_2+(3x-2y)b_2=c_2 \end{cases}$，因此 $\begin{cases} -2x=2 \\ 3x-2y=-3 \end{cases}$ 得

$\begin{cases} x=-1 \\ y=0 \end{cases}$

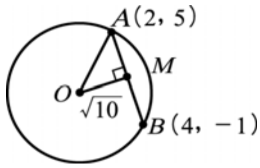
故數對 $(x，y)=(-1，0)$

64. 設 A $(2，5)$，B $(4，-1)$，若 $\overline{AB}$ 為圓 C 之一弦，且弦心距為 $\sqrt{10}$，則圓 C 之方程式為【

】。(請以標準式表示)

答案：$(x-6)^2+(y-3)^2=20$ 或 $x^2+(y-1)^2=20$

解析：



設圓心 O，**錯誤!** 之中點為 M

$\Rightarrow$ M（3，2）且 $\overline{OM} \perp \overline{AB}$

又 $m_{\overline{AB}} = \dfrac{-1-5}{4-2} = -3$

$\therefore m_{\overline{OM}} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{OM}$：$\dfrac{y-2}{x-3} = \dfrac{1}{3}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{OM}$：$x-3y+3=0$

令 O（$3t-3$，t）

又 $\overline{AB} = \sqrt{(4-2)^2+(-1-5)^2} = 2\sqrt{10}$

$\Rightarrow \overline{AM} = \sqrt{10}$

$\Rightarrow r = \overline{OA} = \sqrt{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2} = \sqrt{20}$

又 $\overline{OA} = \sqrt{(3t-5)^2+(t-5)^2} = \sqrt{20}$

$\Rightarrow 10t^2-40t+30=0$

$\Rightarrow t^2-4t+3=0$

$\Rightarrow t=3$ 或 1

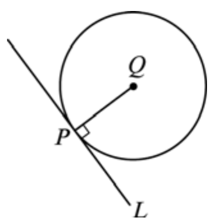
$\Rightarrow$ 圓心 O 為（6，3）或（0，1）

$\Rightarrow$ 圓方程式為 $(x-6)^2+(y-3)^2=20$ 或 $x^2+(y-1)^2=20$

65. 設半徑為 5 的圓 C 與直線 L：$4x+3y+17=0$ 相切於 P（-2，-3），則圓 C 的圓心坐標為【　　　　】或【　　　　】。

答案：（2，0）或（-6，-6）

解析：



設圓心 Q（a，b）　$\because \overrightarrow{PQ} \perp L$　$\therefore \overrightarrow{PQ} = t\vec{n} = t(4, 3) = (4t, 3t)$

由 $\overline{PQ}=5$ 得 $(4t)^2+(3t)^2=25 \Rightarrow t=\pm 1$

$\therefore \overrightarrow{PQ} = \pm(4, 3)$，即 $(a+2, b+3) = \pm(4, 3)$

$\Rightarrow$ Q（a，b）＝（2，0）或（-6，-6）

66. 以 A（2，-3），B（-4，1）為一直徑之兩端點的圓方程式為【　　　　】。（請以一般式表示）

答案：$x^2+y^2+2x+2y-11=0$

解析：由直徑式得 $(x-2)(x+4)+(y+3)(y-1)=0$

$\Rightarrow x^2+2x-8+y^2+2y-3=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+2x+2y-11=0$

67. 自定點 A（6，0）作線段 $\overline{AP}$，當 P 點繞原點作一圓，若此圓半徑為 2，則：

（1）$\overline{AP}$ 之中點所成圖形之方程式為【　　　　】。

（2）在 $\overline{AP}$ 上取一點 Q 使 $\overline{AQ}:\overline{QP}=3:2$，則 Q 所成圖形之方程式為【　　　　】。

答案：（1）$(x-3)^2+y^2=1$；（2）$(5x-12)^2+(5y)^2=36$

解析：（1）令 P（x，y）　$\therefore x^2+y^2=2^2=4$……………（＊）

又令 $\overline{AP}$ 中點坐標為（X，Y）

$$\therefore \begin{cases} X=\dfrac{x+6}{2} \\ Y=\dfrac{y+2}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2X-6 \\ y=2Y \end{cases}$$ 代入（＊）

得 $(2X-6)^2+(2Y)^2=2^2 \Rightarrow (X-3)^2+Y^2=1$

$\therefore$方程式為 $(x-3)^2+y^2=1$

（2）令 Q（s，t）　$\because \overline{AQ}:\overline{QP}=3:2$

$$\therefore \begin{cases} s=\dfrac{3x+2\times 6}{3+2} \\ t=\dfrac{3y+2\times 0}{3+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} s=\dfrac{3x+12}{5} \\ t=\dfrac{3y}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=\dfrac{5s-12}{3} \\ y=\dfrac{5t}{3} \end{cases}$$ 代入（＊）得 $\left(\dfrac{5s-12}{3}\right)^2+\left(\dfrac{5t}{3}\right)^2=4$

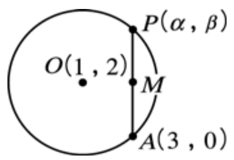
$\Rightarrow (5s-12)^2+(5t)^2=36$

$\therefore$方程式為 $(5x-12)^2+(5y)^2=36$

68. 已知 A（3，0）為圓 $(x-1)^2+(y-2)^2=8$ 上一點，過 A 之所有弦中點之軌跡方程式為【　　】。

答案：$x^2+y^2-4x-2y+3=0$ 且 $(x, y)\neq(3, 0)$

解析：



設 $P(\alpha, \beta)$ 為圓上異於 A 之點（P 為 A 時，$\overline{PA}$ 不為弦）

設 M 為 $\overline{PA}$ 之中點

$\Rightarrow M\left(\dfrac{\alpha+3}{2}, \dfrac{\beta+0}{2}\right)$

令 $x=\dfrac{\alpha+3}{2}$，$y=\dfrac{\beta+0}{2}$

$\Rightarrow \alpha=2x-3$，$\beta=2y$

$\because P(\alpha, \beta)$ 在圓上且異於 A 點

$\therefore (\alpha-1)^2+(\beta-2)^2=8$ 且 $(\alpha, \beta)\neq(3, 0)$

將 $\alpha=2x-3$，$\beta=2y$ 代入上式得

$(2x-4)^2+(2y-2)^2=8$ 且 $(2x-3, 2y)\neq(3, 0)$

$\Rightarrow (x-2)^2+(y-1)^2=2$ 且 $(x, y)\neq(3, 0)$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-2y+3=0$ 且 $(x, y)\neq(3, 0)$

〈另解〉所求之弦中點軌跡為以 $\overline{OA}$ 為直徑之圓但不含 A 點（∵A 在圓上）

∴所求：$(x-3)(x-1)+(y-0)(y-2)=0$ 且 $(x, y) \neq (3, 0)$

$\Rightarrow x^2+y^2-4x-2y+3=0$ 且 $(x, y) \neq (3, 0)$

69. 點 A（-3，4），圓 C：$x^2+y^2-4x+2y+1=0$，若直線過 A 且與圓 C 相交於 P，Q 兩點，且 $\overline{PQ}=2\sqrt{3}$，則 $\overleftrightarrow{PQ}$ 之方程式為【　　　　】。

答案：$4x+3y=0$ 或 $3x+4y-7=0$

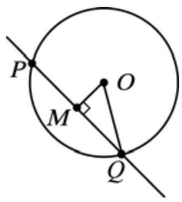
解析：C：$(x-2)^2+(y+1)^2=4$

∴圓心 O（2，-1），半徑 $r=2$

設 $\overleftrightarrow{PQ}$ 之斜率為 m

則 $\overleftrightarrow{PQ}$：$\dfrac{y-4}{x-(-3)}=m$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{PQ}$：$mx-y+4+3m=0$



設 M 為 $\overline{PQ}$ 之中點

則 $\overline{MQ}=\dfrac{1}{2}\overline{PQ}=\sqrt{3}$

$\Rightarrow \overline{OM}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{MQ}^2}=\sqrt{2^2-(\sqrt{3})^2}=1$

又 $\overline{OM}=d(O, \overleftrightarrow{PQ})$

$\Rightarrow 1=\dfrac{|2m+1+4+3m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}$

$\Rightarrow m=-\dfrac{4}{3}$ 或 $-\dfrac{3}{4}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{PQ}$ 之方程式為 $4x+3y=0$ 或 $3x+4y-7=0$

70. 過 P（1，2）作圓 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 之一割線，交圓於 A，B，則 $\overline{PA}\cdot\overline{PB}=$【　　　　】。

答案：1

解析：P 至圓 $x^2+y^2-4x+2y-4=0$ 之切線段長為

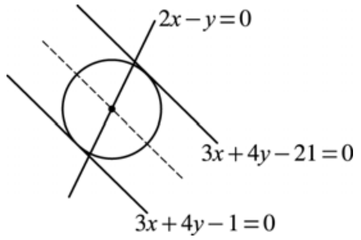
$T=\sqrt{1^2+2^2-4\times1+2\times2-4}=1$

$\Rightarrow \overline{PA}\cdot\overline{PB}=T^2=1$

71. 若圓 $x^2+y^2+ax+by+c=0$ 與兩平行線 $3x+4y-1=0$，$3x+4y-21=0$ 相切且圓心在直線 $2x-y=0$ 上，則 $a=$【　　　　】，$b=$【　　　　】。

答案：-2；-4

解析：



$\because x^2+y^2+ax+by+c=0$ 與兩平行線 $3x+4y-1=0$ 及 $3x+4y-21=0$ 相切

$\therefore$圓心在 $3x+4y-\left(\dfrac{1+21}{2}\right)=0$ 上

即圓心在 $3x+4y-11=0$ 上

又已知圓心在 $2x-y=0$ 上

$\therefore$圓心即為 $3x+4y-11=0$ 與 $2x-y=0$ 之交點

$\Rightarrow$ 圓心坐標為 $(1,2)$

$$\Rightarrow r=\frac{|3\times 1+4\times 2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{10}{5}=2$$

$\Rightarrow$ 圓方程式為 $(x-1)^2+(y-2)^2=2^2$

$\Rightarrow x^2+y^2-2x-4y+1=0$

$\Rightarrow a=-2$，$b=-4$

72. 求過點 $(1,-8)$ 且與 x，y 軸均相切之圓方程式為【　　　　】。

答案：$(x-5)^2+(y+5)^2=25$ 或 $(x-13)^2+(y+13)^2=169$

解析：$\because (1,-8)$ 在第四象限

$\therefore$圓心亦在第四象限

$\therefore$設圓心 $(h,-h)$，半徑為 h

$\Rightarrow (x-h)^2+(y+h)^2=h^2$ 過 $(1,-8)$

$\Rightarrow (1-h)^2+(-8+h)^2=h^2$

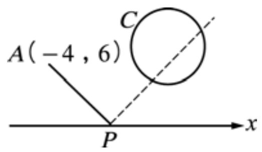
$\Rightarrow h^2-18h+65=0$

$\Rightarrow (h-5)(h-13)=0$

$\Rightarrow h=5$ 或 13

$\Rightarrow$ 所求為 $(x-5)^2+(y+5)^2=25$ 或 $(x-13)^2+(y+13)^2=169$

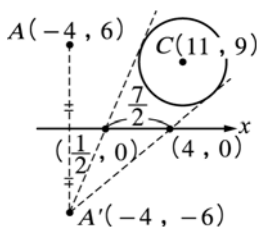
73. 一圓 C：$(x-11)^2+(y-9)^2=9$ 及一點 A $(-4,6)$，自 A 發射出的光線，到達 x 軸上的一點 P，經 x 軸反射後，會與圓 C 相交，試求此種 P 點所在的範圍之長度為【　　　　】。



答案：$\dfrac{7}{2}$

解析：A $(-4,6)$ 對稱於 x 軸之對稱點 A' $(-4,-6)$

過 A' 與圓 C 相切的直線設為 $y+6=m(x+4)$



則 d（O，L）＝r ⇒ $\dfrac{|11m-9+4m-6|}{\sqrt{m^2+1}}=3$

⇒ $12m^2-25m+12=0$

⇒（3m－4）（4m－3）＝0　∴$m=\dfrac{4}{3}$ 或 $\dfrac{3}{4}$

∴切線為 $y+6=\dfrac{4}{3}(x+4)$ 或 $y+6=\dfrac{3}{4}(x+4)$

與 x 軸交點，令 y＝0 ⇒ $x=\dfrac{1}{2}$ 或 4　∴P 的範圍長度為 $\left|4-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{7}{2}$

74. 已知圓 C：$x^2+y^2+8x+4y+10=0$ 及一定點 P（1，3），自 P 向圓 C 作兩條切線得切點 A，B，則：

(1)切線方程式為【　　　　】。

(2)切點弦所在直線之方程式為【　　　　】，又 $\overline{AB}$＝【　　　　】。

(3)令∠APB＝θ，則 sinθ＝【　　　　】，△PAB 之面積為【　　　　】。

(4)△PAB 之外接圓方程式為【　　　　】。

答案：(1) $x-3y+8=0$ 或 $3x-y=0$；(2) $x+y+4=0$；$4\sqrt{2}$；(3) $\dfrac{4}{5}$；16；(4) $x^2+y^2+3x-y-10=0$

解析：(1) C：$(x+4)^2+(y+2)^2=10$

設切線斜率為 m

則切線方程式為 $\dfrac{y-3}{x-1}=m$

⇒ $mx-y+3-m=0$

∵相切

∴ $\dfrac{|-4m+2+3-m|}{\sqrt{m^2+(-1)^2}}=\sqrt{10}$

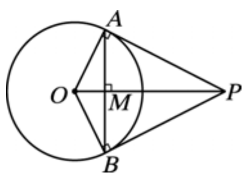
⇒ $3m^2-10m+3=0$

⇒ $m=\dfrac{1}{3}$ 或 3

∴切線方程式為 $x-3y+8=0$ 或 $3x-y=0$

(2) $\overleftrightarrow{AB}$：$1\cdot x+3\cdot y+8\cdot\dfrac{1+x}{2}+4\cdot\dfrac{3+y}{2}+10=0$

⇒ $\overleftrightarrow{AB}$：$x+y+4=0$



$\overline{PA}=\sqrt{1^2+3^2+8\cdot1+4\cdot3+10}=2\sqrt{10}$

$\overline{OA}=r=\sqrt{10}$

$\overline{OP}=\sqrt{(1-(-4))^2+(3-(-2))^2}=5\sqrt{2}$

設 M 為 $\overline{AB}$ 與 $\overline{OP}$ 之交點

則 M 為 $\overline{AB}$ 之中點

$\Rightarrow \overline{AM}=\dfrac{\overline{OA}\cdot\overline{AP}}{\overline{OP}}=\dfrac{\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$

$\Rightarrow \overline{AB}=2\overline{AM}=4\sqrt{2}$

(3)設 $\angle APO=\phi$

則 $\sin\phi=\dfrac{\overline{OA}}{\overline{OP}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}$

$\cos\phi=\dfrac{\overline{PA}}{\overline{OP}}=\dfrac{2\sqrt{10}}{5\sqrt{2}}=\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$

又 $\theta=2\phi$

$\Rightarrow \sin\theta=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}=2\cdot\sin\phi\cos\phi=2\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{5}\cdot\dfrac{2\sqrt{5}}{5}=\dfrac{4}{5}$

$\triangle PAB$ 面積 $=\dfrac{1}{2}\overline{PA}\cdot\overline{PB}\cdot\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\dfrac{4}{5}=16$

(4) $\triangle PAB$ 之外接圓即為以 $\overline{PO}$ 為直徑之圓

$\Rightarrow$ 所求：$(x+4)(x-1)+(y+2)(y-3)=0$

$\Rightarrow x^2+y^2+3x-y-10=0$

75. 過圓 $x^2+y^2+2x-4y+1=0$ 與直線 $2x-y+4=0$ 之交點，且與 y 軸相切之圓方程式為【　　】。

答案：$x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 或 $x^2+y^2+14x-10y+25=0$

解析：設所求之圓方程式為 $x^2+y^2+2x-4y+1+k(2x-y+4)=0$……………(＊)

∵與 y 軸相切

∴$x=0$ 代入(＊)得 $y^2-(k+4)y+4k+1=0$

∵相切

∴$(k+4)^2-4(4k+1)=0$

$\Rightarrow k^2-8k+12=0$

$\Rightarrow k=2$ 或 6

∴所求之圓方程式為 $x^2+y^2+6x-6y+9=0$ 或 $x^2+y^2+14x-10y+25=0$

76. 若平面 $E：x-2y+2z+k=0$ 與球面 $S：x^2+y^2+z^2+2x-4y-4=0$ 相交（含相切），則 k 的範圍為【　　　　】，又若 E 與 S 相交成一最大圓，則 k=【　　　　】。

答案：$-4\leqq k\leqq 14$；5

解析：$S：(x+1)^2+(y-2)^2+z^2=9$

球心 $O(-1,2,0)$，半徑 $r=3$

∵E 與 S 相交

∴$d(O,E)\leqq r$

$\Rightarrow \dfrac{|-1-2\cdot 2+2\cdot 0+k|}{\sqrt{1^2+(-2)^2+2^2}} \leqq 3$

$\Rightarrow |k-5| \leqq 9$

$\Rightarrow -4 \leqq k \leqq 14$

若 E 與 S 相交成最大圓

則 E 過 S 之球心 O（-1，2，0）

$\Rightarrow -1-2\cdot 2+2\cdot 0+k=0$

$\Rightarrow k=5$

77. 球面 S：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+2z+2=0$，平面 E：$x+2y+2z+k-2=0$（$k>0$），若平面 E 與球面 S 相切，則 k=【　　　　】，切點坐標為【　　　　】。

答案：13 或 1；（$\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{10}{3}$，$-\dfrac{7}{3}$）或（$\dfrac{5}{3}$，$-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$）

解析：S：$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+1)^2=4$

球心 O（1，-2，-1），半徑 $r=2$

若 E 與 S 相切，則 d（O，E）=r

$\Rightarrow \dfrac{|1+2\cdot(-2)+2\cdot(-1)+k-2|}{\sqrt{1^2+2^2+2^2}}=2$

$\Rightarrow |k-7|=6$

$\Rightarrow k=13$ 或 1

（1）若 $k=13$，則 E：$x+2y+2z+11=0$

切點即為 O 對 E 之投影點

$\Rightarrow \left(1-\dfrac{1\cdot 1\cdot 6}{1^2+2^2+2^2}，-2-\dfrac{1\cdot 2\cdot 6}{1^2+2^2+2^2}，-1-\dfrac{1\cdot 2\cdot 6}{1^2+2^2+2^2}\right)$

故切點坐標為（$\dfrac{1}{3}$，$-\dfrac{10}{3}$，$-\dfrac{7}{3}$）

（2）若 $k=1$，則 E：$x+2y+2z-1=0$

切點即為 O 對 E 之投影點

$\Rightarrow \left(1-\dfrac{1\cdot 1\cdot(-6)}{1^2+2^2+2^2}，-2-\dfrac{1\cdot 2\cdot(-6)}{1^2+2^2+2^2}，-1-\dfrac{1\cdot 2\cdot(-6)}{1^2+2^2+2^2}\right)$

故切點坐標為（$\dfrac{5}{3}$，$-\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{1}{3}$）

78. 點 P（x，y，z）為球面 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$，則：

（1）$2x-y-2z+1$ 之最大值為【　　　　】，最小值為【　　　　】。

（2）$(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$ 之最小值為【　　　　】。

答案：（1）18；0；（2）16

解析：$x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$

$\Rightarrow (x-1)^2+(y+2)^2+(z+2)^2=9$

球心 O（1，-2，-2），半徑 $r=3$

（1）令 $2x-y-2z+1=k$

$\Rightarrow 2x-y-2z+1-k=0$ 表一平面

$\because$P（x，y，z）在 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$ 上

$\therefore 2x-y-2z+1-k=0$ 與 $x^2+y^2+z^2-2x+4y+4z=0$ 有交點

即 O 至 $2x-y-2z+1-k=0$ 之距離不大於 r

$$\Rightarrow \frac{|2+2+4+1-k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+(-2)^2}} \leqq 3$$

$\Rightarrow |9-k| \leqq 9$

$\Rightarrow -9 \leqq k-9 \leqq 9$

$\Rightarrow 0 \leqq k \leqq 18$

（2）$(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$ 表 (x,y,z) 至 $(4,-4,4)$ 之距離平方

$\because (4-1)^2+(-4+2)^2+(4+2)^2=49>9$

$\therefore (4,-4,4)$ 在球面外部

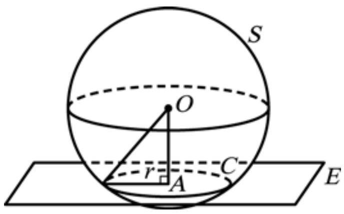
又 $(4,-4,4)$ 至球面之最短距離為 $\sqrt{(4-1)^2+(-4+2)^2+(4+2)^2}-3=4$

故 $(x-4)^2+(y+4)^2+(z-4)^2$ 之最小值為 $4^2=16$

79. 設球 S：$x^2+y^2+z^2-2x+2y+4z-10=0$ 與平面 E：$2x-y+2z-8=0$ 相交得一圓，則此圓的圓心為【　　　　】，半徑為【　　　　】。

答案：$(3,-2,0)$；$\sqrt{7}$

解析：



S：$(x-1)^2+(y+1)^2+(z+2)^2=16$

球心 O $(1,-1,-2)$，半徑 R＝4

設 S 與 E 之截圓為 C，圓心為 A，半徑為 r

$$\overline{OA}=d(O,A)=\frac{|2\cdot 1-(-1)+2\cdot(-2)-8|}{\sqrt{2^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{9}{3}=3$$

$$\Rightarrow r=\sqrt{R^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}$$

又 A 為 O 對 E 之投影點

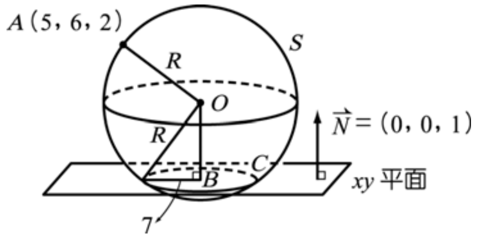
$$\therefore A\left(1-\frac{1\cdot 2\cdot(-9)}{2^2+(-1)^2+2^2},\ -1-\frac{1\cdot(-1)\cdot(-9)}{2^2+(-1)^2+2^2},\ -2-\frac{1\cdot 2\cdot(-9)}{2^2+(-1)^2+2^2}\right)$$

$\Rightarrow A(3,-2,0)$

80. 一球面與 xy 平面交於平面上之圓 $(x+1)^2+(y-3)^2=7^2$，且通過點 A $(5,6,2)$，則此球面之方程式為【　　　　】。

答案：$(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=49$

解析：



設所求之球面為 S，其球心為 O，半徑為 R

與 xy 平面交於圓 C，圓 C 之圓心為 B（－1，3，0），半徑為 7

∵$\overrightarrow{OB}$ 與 xy 平面垂直

∴$\overrightarrow{OB} /\!/ \vec{N}$

$\Rightarrow \overleftrightarrow{OB}：\begin{cases} x=-1 \\ y=3 \\ z=0+t \end{cases}$，$t\in R$

故可令 O（－1，3，t）

$\Rightarrow \overline{OB}=|t-0|=|t|$

$\Rightarrow R=\sqrt{\overline{OB}^2+7^2}=\overline{OA}$

$\Rightarrow t^2+49=\overline{OA}^2=(-1-5)^2+(3-6)^2+(t-2)^2$

$\Rightarrow t^2+49=t^2-4t+49$

$\Rightarrow t=0$

∴O（－1，3，0），$R=\sqrt{0^2+7^2}=7$

$\Rightarrow S：(x+1)^2+(y-3)^2+z^2=49$

81. 一球面 S 切平面 E：$x-2y-2z=7$ 於點（3，－1，－1），且過點 P（1，1，－3），則此球面之方程式為【　　　　】。

答案：$x^2+(y-5)^2+(z-5)^2=81$

解析：設 $S：x^2+y^2+z^2+2ax+2by+2cz+d=0$

過（3，－1，－1）與 S 相切之平面方程式為

$3x-y-z+a(x+3)+b(y-1)+c(z-1)+d=0$

$\Rightarrow (3+a)x+(b-1)y+(c-1)z=-3a+b+c-d$

上式與 $x-2y-2z=7$ 同義

$\Rightarrow \dfrac{3+a}{1}=\dfrac{b-1}{-2}=\dfrac{c-1}{-2}$

$=\dfrac{-3a+b+c-d}{7}$……………①

又 S 過 P（1，1，－3）

∴$1+1+9+2a+2b-6c+d=0$

$\Rightarrow 2a+2b-6c+d+11=0$……………②

由①可得 $\begin{cases} 10a-b-c+d+21=0 & \cdots\cdots③ \\ 6a-9b-2c+2d+7=0 & \cdots\cdots④ \\ 6a-2b-9c+2d+7=0 & \cdots\cdots⑤ \end{cases}$

由②、③、④、⑤得 $a=0$，$b=-5$，$c=-5$，$d=-31$

$\Rightarrow S：x^2+y^2+z^2-10y-10z-31=0$

$\Rightarrow S：x^2+(y-5)^2+(z-5)^2=81$

82. 設 S：$x^2+y^2+z^2=9$，L：$\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z-4}{5}$，則包含直線 L 且與球面 S 相切之切平面方程式為【　　　　】。

答案：$x+2y+2z-9=0$ 或 $2x-y-2z-9=0$

解析：L：$\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-6}=\frac{z-4}{5}$

$$\Rightarrow L：\begin{cases}\frac{x-7}{2}=\frac{y+3}{-6}\\ \frac{y+3}{-6}=\frac{z-4}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow L：\begin{cases}3x+y-18=0\\ 5y+6z-9=0\end{cases}$$

包含 L 之平面 E 可令為 $3x+y-18+k(5y+6z-9)=0$

$\Rightarrow$ E：$3x+(5k+1)y+6kz-9k-18=0$

S 之球心 O（0，0，0），半徑 $r=3$

$\because$S 與 E 相切

$\therefore d(O，E)=r$

$$\Rightarrow \frac{|-9k-18|}{\sqrt{3^2+(5k+1)^2+(6k)^2}}=3$$

$$\Rightarrow |3k+6|=\sqrt{61k^2+10k+10}$$

$\Rightarrow 9k^2+36k+36=61k^2+10k+10$

$\Rightarrow 52k^2-26k-26=0$

$\Rightarrow 2k^2-k-1=0$

$\Rightarrow k=1$ 或 $-\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ E：$3x+6y+6z-27=0$ 或 $3x-\frac{3}{2}y-3z-\frac{27}{2}=0$

即 E：$x+2y+2z-9=0$ 或 $2x-y-2z-9=0$

83. 一球面 S：$x^2+y^2+z^2-4x+2y-6z+5=0$ 及球外一點 P（3，2，4），由點 P 向球 S 作切線，則所有的切點形成一個圓 C，試回答下列各題：

(1)點 P 到球面 S 的切線段長為【　　　　】。

(2)圓 C 所在的平面方程式為【　　　　】。

(3)圓 C 的面積為【　　　　】。

答案：(1) $\sqrt{2}$；(2) $x+3y+z-11=0$；(3) $\frac{18}{11}\pi$

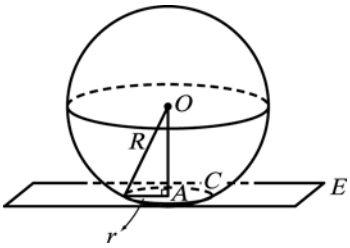
解析：(1) P 至 S 之切線段長為 $\sqrt{3^2+2^2+4^2-4\cdot3+2\cdot2-4\cdot6+5}=\sqrt{2}$

(2)圓 C 所在的平面方程式為 $3x+2y+4z-4\cdot\frac{3+x}{2}+2\cdot\frac{2+y}{2}-6\cdot\frac{4+z}{2}+5=0$

$\Rightarrow 3x+2y+4z-6-2x+2+y-12-3z+5=0$

$\Rightarrow x+3y+z-11=0$

(3)設 E：$x+3y+z-11=0$



S：$(x-2)^2+(y+1)^2+(z-3)^2=9$

球心 O（2，−1，3），半徑 R＝3

設圓 C 之圓心為 A，半徑為 r

$\overline{OA}=d(O,E)=\dfrac{|2-3+3-11|}{\sqrt{1^2+3^2+1^2}}=\dfrac{9}{\sqrt{11}}$

$\Rightarrow r=\sqrt{R^2-\overline{OA}^2}=\sqrt{9-\dfrac{81}{11}}=\sqrt{\dfrac{18}{11}}$

∴圓 C 的面積為 $\pi r^2=\dfrac{18}{11}\pi$

84. 在空間中，球面 $x^2+y^2+z^2=10$ 上有兩點 A（1，0，−3），B（−2，$\sqrt{5}$，1），一隻螞蟻沿球面從 A 爬至 B，則最小距離為【　　　　】。

答案：$\dfrac{2\sqrt{10}\pi}{3}$

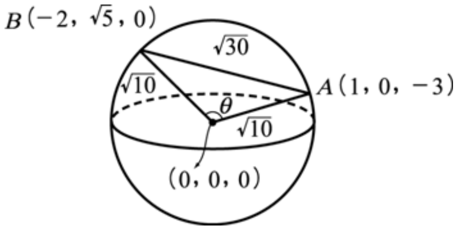
解析：$\overline{AB}=\sqrt{(1+2)^2+(0-\sqrt{5})^2+(-3-1)^2}$

$=\sqrt{9+5+16}=\sqrt{30}$

$\therefore \cos\theta=\dfrac{(\sqrt{10})^2+(\sqrt{10})^2-(\sqrt{30})^2}{2\times\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=-\dfrac{1}{2}$

$\therefore \theta=120^\circ=\dfrac{2\pi}{3}$

$\therefore \overparen{AB}=r\cdot\theta=\sqrt{10}\cdot\dfrac{2\pi}{3}=\dfrac{2\sqrt{10}\pi}{3}$



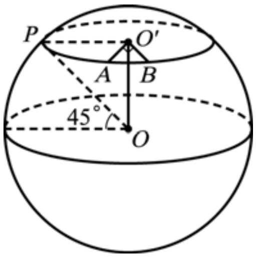
85. 設地球的半徑為 6400 公里，A，B 兩地均在北緯 45°線上，A 在東經 35°，B 在西經 55°，則：

(1)在北緯 45°線上，A，B 兩地的緯線長為【　　　　】公里。

(2)A，B 兩地的球面距離為【　　　　】公里。

答案：(1)$1600\sqrt{2}\pi$；(2)$\dfrac{6400}{3}\pi$

解析：(1)如圖，北緯 45°所在圓 O' 的半徑



$\overline{O'P}=\overline{OP}\times\sin 45^{\circ}=6400\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=3200\sqrt{2}$

又$\angle AO'B=35^{\circ}+55^{\circ}=90^{\circ}$

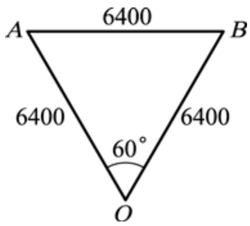
$\therefore$A，B 兩地的緯線長$=2\pi\times 3200\sqrt{2}\times\dfrac{90^{\circ}}{360^{\circ}}=1600\sqrt{2}\pi$（公里）

(2)$\triangle O'AB$ 中　$\because\angle AO'B=90^{\circ}$

$\therefore\overline{AB}=\overline{O'A}\times\sqrt{2}=3200\sqrt{2}\times\sqrt{2}=6400$

故$\triangle OAB$ 為正三角形

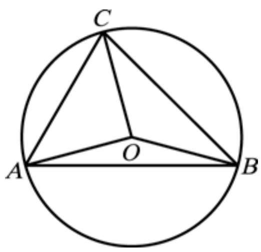
$\therefore\overset{\frown}{AB}=r\theta=6400\times\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{6400}{3}\pi$（公里）



五、計算題（計六題）：

86. 設某圓之圓心為 O，半徑為 2，設△ABC 為此圓的一內接三角形，而$\angle A=60^{\circ}$，$\angle B=45^{\circ}$，試求 $|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|$ 之值。

答案：



如圖，$\angle A=60^{\circ}\Rightarrow\angle BOC=120^{\circ}$，

$\angle B=45^{\circ}\Rightarrow\angle COA=90^{\circ}$，且得$\angle AOB=150^{\circ}$

$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|^2=|\overrightarrow{OA}|^2+|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2+2(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA})$

$=2^2+2^2+2^2+2(2\times2\times\cos150^{\circ}+2\times2\times\cos120^{\circ}+2\times2\times\cos90^{\circ})$

$=12+2[4\times(-\dfrac{\sqrt{3}}{2})+4\times(-\dfrac{1}{2})+4\times0]$

$=8-4\sqrt{3}$

故$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}|=\sqrt{8-4\sqrt{3}}=\sqrt{6}-\sqrt{2}$

答：$\sqrt{6}-\sqrt{2}$

87. 設 x，y 為實數，若 $2x-3y=26$，則 x^2+y^2 之最小值為何？並求此時數對（x，y）為何？

答案：$[2^2+(-3)^2](x^2+y^2)\geqq(2x-3y)^2$

$\Rightarrow 13(x^2+y^2)\geqq 26^2$

$\Rightarrow x^2+y^2\geqq 52$，所以 x^2+y^2 有最小值 52

此時 $\dfrac{x}{2}=\dfrac{y}{-3}\Rightarrow$ 令 $x=2t$，$y=-3t$ 代入 $2x-3y=26$

$\Rightarrow 4t+9t=26$ 得 $t=2$

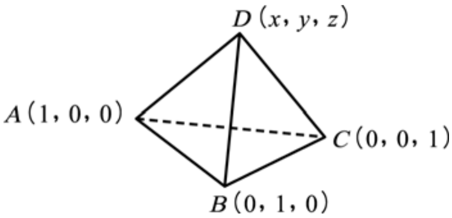
$\Rightarrow x=4$，$y=-6$

故 x^2+y^2 有最小值 52，此時數對（x，y）＝（4，－6）

答：最小值為 52，此時數對（x，y）＝（4，－6）

88. 設 A（1，0，0），B（0，1，0），C（0，0，1）及 D 為一正四面體之四個頂點，求 D 點坐標。

答案：



$\overline{DA}=\overline{DB}=\overline{DC}=\overline{AB}=\sqrt{1^2+1^2+0^2}=\sqrt{2}$

$\begin{cases}(x-1)^2+y^2+z^2=x^2+(y-1)^2+z^2\cdots\cdots\text{①}\\ x^2+(y-1)^2+z^2=x^2+y^2+(z-1)^2\cdots\cdots\text{②}\\ (x-1)^2+y^2+z^2=2\cdots\cdots\text{③}\end{cases}$

由①、②、③

$\Rightarrow\begin{cases}-2x+1=-2y+1\\ -2y+1=-2z+1\\ (x-1)^2+y^2+z^2=2\end{cases}$

$\Rightarrow x=y=z$ 代入③

$\Rightarrow 3x^2-2x-1=0\Rightarrow(3x+1)(x-1)=0\Rightarrow x=-\dfrac{1}{3}$ 或 $x=1$

$\therefore$ D $\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ 或（1，1，1）

答：$\left(-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3},-\dfrac{1}{3}\right)$ 或（1，1，1）

89. 空間中三點 A（5，1，－3），B（11，4，0），C（7，3，－2），試求下列各值：

(1) $\overrightarrow{AB}$ 在 $\overrightarrow{AC}$ 上的正射影。

(2) 線段 AB 在直線 AC 上的正射影長。

(3) 點 B 在 $\overleftrightarrow{AC}$ 上的投影點坐標。

答案：$\overrightarrow{AB}=(6,3,3)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,1)$

(1) $\dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AC}|^2}\overrightarrow{AC}=\dfrac{12+6+3}{9}(2,2,1)$

$=\dfrac{7}{3}(2,2,1)=\left(\dfrac{14}{3},\dfrac{14}{3},\dfrac{7}{3}\right)$

(2) $\sqrt{(\frac{14}{3})^2+(\frac{14}{3})^2+(\frac{7}{3})^2}=\sqrt{(\frac{7}{3})^2(4+4+1)}=\frac{7}{3}\times 3=7$

(3) $(5,1,-3)+(\frac{14}{3},\frac{14}{3},\frac{7}{3})=(\frac{29}{3},\frac{17}{3},-\frac{2}{3})$

答：(1) $(\frac{14}{3},\frac{14}{3},\frac{7}{3})$；(2) 7；(3) $(\frac{29}{3},\frac{17}{3},-\frac{2}{3})$

90. 兩歪斜線 L_1：$\frac{x+5}{2}=\frac{y-5}{-1}=\frac{z+6}{3}$，$L_2$：$\frac{x-1}{1}=\frac{y+7}{2}=\frac{z-3}{-1}$，求 L_1，L_2 之公垂線 L 的對稱比例式。

答案：設 $P(-5+2t,5-t,-6+3t)\in L_1$，$Q(1+s,-7+2s,3-s)\in L_2$

$\therefore \overrightarrow{PQ}=(s-2t+6,2s+t-12,-s-3t+9)$

$\therefore (s-2t+6,2s+t-12,-s-3t+9)\cdot(2,-1,3)=0$

$(s-2t+6,2s+t-12,-s-3t+9)\cdot(1,2,-1)=0$

$\Rightarrow \begin{cases}-3s-14t+51=0\\6s+3t-27=0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s=3\\t=3\end{cases}$

$\therefore P(1,2,3)$，$Q(4,-1,0)$　$\therefore \overrightarrow{PQ}=(3,-3,-3)\,//\,(1,-1,-1)$

$\therefore L$：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$

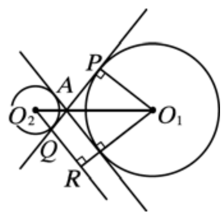
答：$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{-1}=\frac{z-3}{-1}$

91. 兩圓：C_1：$x^2+y^2-6x-2y+1=0$，C_2：$x^2+y^2+4x+3=0$，則：

(1) C_1 與 C_2 之內公切線段長為何？

(2) C_1 與 C_2 之內公切線交點坐標為何？〔屏東高中〕

答案：



(1)圓 C_1：$x^2+y^2-6x-2y+1=0\Rightarrow(x-3)^2+(y-1)^2=9$

圓心為 $O_1(3,1)$，半徑為 $r_1=3$

圓 C_2：$x^2+y^2+4x+3=0\Rightarrow(x+2)^2+y^2=1$

圓心為 $O_2(-2,0)$，半徑為 $r_2=1$

作兩圓之一公切線段 $\overline{PQ}$

$\overline{O_1P}\perp\overline{PQ}$ 且 $\overline{O_2Q}\perp\overline{PQ}$

過 O_1 作 $\overleftrightarrow{PQ}$ 之平行線，交 $\overleftrightarrow{O_2Q}$ 於 R，則 $\overline{O_1R}=\overline{PQ}$

在直角$\triangle O_1O_2R$ 中，$\overline{O_1O_2}^2=\overline{O_1R}^2+\overline{O_2R}^2$

$\Rightarrow(3+2)^2+(1-0)^2=\overline{PQ}^2+(1+3)^2\Rightarrow\overline{PQ}^2=26-16=10$

$\therefore\overline{PQ}=\sqrt{10}$

(2)令兩內公切線之交點為 A，則 $A\in\overline{O_1O_2}$ 且 $\overline{O_1A}:\overline{AO_2}=r_1:r_2=3:1$

$\therefore A\left(\frac{3\times(-2)+1\times 3}{3+1},\frac{3\times 0+1\times 1}{3+1}\right)=\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$

答：(1) $\sqrt{10}$；(2) $\left(-\frac{3}{4},\frac{1}{4}\right)$

六、(課本範例與隨堂練習)計算證明題（計一題）：

92. 坐標空間中，求直線 L：$\frac{x+1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z+2}{1}$ 被球面 S：$x^2+y^2+z^2=25$ 所截出的線段長。〔3-3 隨堂練習 6〕

答案：直線 L 的參數式為 $\begin{cases}x=2t-1\\ y=-2t+1\\ z=t-2\end{cases}$，$t\in R$

設 L 上的點 P（2t－1，－2t＋1，t－2）

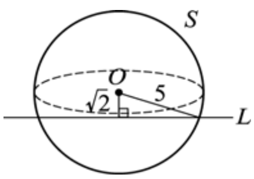
球面 S 的球心 O（0，0，0），則

$\overline{OP}=\sqrt{(2t-1)^2+(-2t+1)^2+(t-2)^2}=\sqrt{9t^2-12t+6}$

$=\sqrt{9\left(t-\frac{2}{3}\right)^2+2}\geqq\sqrt{2}$

即球心 O 與直線 L 的距離為 $\sqrt{2}$

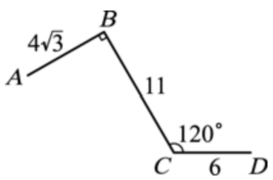
故弦長是 $2\sqrt{5^2-(\sqrt{2})^2}=2\sqrt{23}$



答：$2\sqrt{23}$

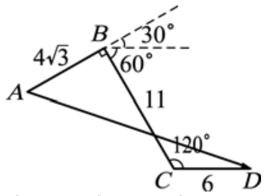
七、(習題)計算證明題（計三題）：

93. 一公路依地形迂迴而建，如下圖所示。從 A 地到 B 地，B 地到 C 地，C 地到 D 地，距離分別是 $4\sqrt{3}$，11，6 公里，而 AB 與 BC，BC 與 CD 間，兩公路的夾角分別是 90°，120°，試求 A 地到 D 地的直線距離。〔1－1 習題 11〕



答案：所求 $\overline{AD}=|\overrightarrow{AD}|$，而 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$

由下圖可知 $\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BC}$ 與 $\overrightarrow{CD}$，$\overrightarrow{AB}$ 與 $\overrightarrow{CD}$ 的夾角分別是 90°，60°，30°



故 $|\overrightarrow{AD}|^2=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})\cdot(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD})$

$=|\overrightarrow{AB}|^2+|\overrightarrow{BC}|^2+|\overrightarrow{CD}|^2+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{CD}+2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{CD}$

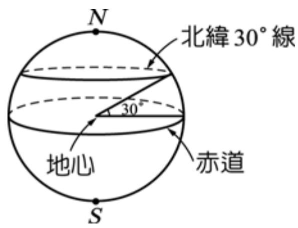
$=(4\sqrt{3})^2+11^2+6^2+2\cdot 0+2\cdot 11\cdot 6\cdot\cos 60^\circ+2\cdot 4\sqrt{3}\cdot 6\cdot\cos 30^\circ$

$=48+121+36+66+72=343$

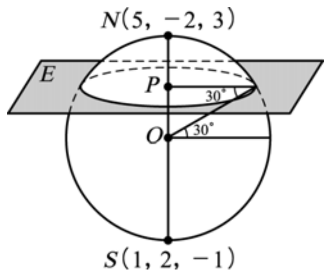
得出 $|\overrightarrow{AD}|=\sqrt{343}=7\sqrt{7}$（公里）

答：$7\sqrt{7}$ 公里

94. 設一地球儀南北極之點坐標分別為 S（1，2，−1），N（5，−2，3），試求包含北緯 30°線之平面方程式。〔3-3 習題 10〕



答案：



球半徑 $R=\overline{ON}$，因此 $\overline{OP}=R\sin 30^\circ=\frac{1}{2}\overline{ON}$

得 $\overline{NP}:\overline{PS}=1:3$

P 坐標為 $\frac{3}{4}(5,-2,3)+\frac{1}{4}(1,2,-1)$

$=(4,-1,2)$

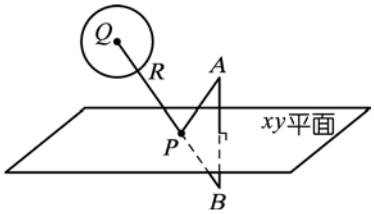
又 $\overrightarrow{PN}=(1,-1,1)$ 為平面 E 之法向量

故平面為 $(x-4)-(y+1)+(z-2)=0$，即 $x-y+z-7=0$

答：$x-y+z-7=0$

95. 坐標空間中，球面 S 的方程式為 $x^2+y^2+z^2+6x+6y-6z+23=0$，R 是球面 S 上的點，點 P 在 xy 平面上，點 A 的坐標是（−1，1，1），求 $\overline{AP}+\overline{PR}$ 的最小值。〔3-3 習題 11〕

答案：



球面 S：$(x+3)^2+(y+3)^2+(z-3)^2=4$，球心 Q（$-3$，$-3$，3），半徑 2

A（-1，1，1）對 xy 平面的對稱點 B（-1，1，-1）

$\overline{AP}+\overline{PR}=\overline{BP}+\overline{PR}\geqq\overline{BR}\geqq\overline{BQ}-\overline{QR}$

而 $\overline{BQ}=\sqrt{2^2+4^2+4^2}=6$，$\overline{QR}$ 即半徑 2

因此最小值為 $\overline{BQ}-\overline{QR}=6-2=4$

答：4