臺北市立松山高級中學 104 學年度第二學期 第二次期中考

二年級自然組 數學科試題卷

一、多重選擇題

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項填寫在答案卷上。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 5 分；答錯 2 個選項者，得 2 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

(　　　　) 1. 有五位同學互相討論如何求得點 $P(3, 2, 6)$ 到直線 L：$\frac{x-1}{2}=\frac{y-2}{2}=\frac{z+1}{-3}$ 距離，並提出自己想法，請選出對話中提及之解題步驟與列式皆正確者。

(1) 小紅：「設 P 在 L 上的投影點為 Q，Q 的坐標可以 L 的參數式表示，算 $\overrightarrow{PQ}$，利用 $\overline{PQ}$ 垂直於 L 可以知道 $\overrightarrow{PQ}$ 和 L 的方向向量 $(2, 2, -3)$ 內積等於 0，可解出 Q 的坐標，再計算 $\overline{PQ}$ 長即為所求。」

(2) 小藍：「設 L 上一動點為 R，R 的坐標可以 L 的參數式表示。以 t 為參數，可以發現 $\overline{PR}^2$ 是 t 的二次函數，接著以配方法可以求出 $\overline{PR}^2$ 的最小值，$\overline{PR}^2$ 的最小值再開根號即為所求。」

(3) 小綠：「在 L 上取一點 $S(1, 2, -1)$，可以算出 $\overrightarrow{SP}$，運用正射影長公式得到 L 的方向向量 $(2, 2, -3)$ 在 $\overrightarrow{SP}$ 上的正射影長為 $\frac{(2,2,-3)\cdot\overrightarrow{SP}}{|\overrightarrow{SP}|}$，此即為點 P 到直線 L 的距離。」

(4) 小黃：「作一平面 E 過 P 且和 L 垂直，$(2, 2, -3)$ 為 E 的法向量，故可設平面 E: $2x+2y-3z=d$，其中 d 為實數，又 P 在 E 上，代入方程式可求得 $d=-8$，而後再將 L 以參數式表示，t 為參數，代入平面 E 可解出 $t=t_0$，再將 t_0 代回 L 的參數式找到 P 在 L 上的投影點 Q 的坐標，再計算 $\overline{PQ}$ 長即為所求。」

(5) 小白：「在 L 上取一點為 $S(1, 2, -1)$，則可以計算出 $\overrightarrow{SP}$，計算 $|\overrightarrow{SP}\times(2, 2, -3)|$，這是 $\overrightarrow{SP}$ 和 L 的方向向量 $(2, 2, -3)$ 所張的平行四邊形面積，將該面積除以 $|\overrightarrow{SP}|$，此可得點 P 到直線 L 的距離。」

(　　　　) 2. 下列關於直線 L: $\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{2}$ 與平面、直線的關係，請選出正確的選項。

(1) $\vec{v}=(1, 1, 2)$ 為 L 的方向向量

(2) 與平面 $x+y+2z=3$ 平行

(3) 與平面 $3x-y-z=2$ 只有交於一點，交點為 $(1, 0, 1)$

(4) 與直線 $\frac{x-2}{2}=\frac{1-y}{-2}=\frac{z-5}{4}$ 平行

(5) 與直線 $\frac{x}{2}=\frac{y-2}{3}=\frac{z-3}{6}$ 歪斜

(　　　) 3. 設空間中有三平面 E_1: $a_1x+b_1y+c_1z=d_1$、E_2: $a_2x+b_2y+c_2z=d_2$、E_3: $a_3x+b_3y+c_3z=d_3$，令

$\vec{n}_1=(a_1, b_1, c_1)$, $\vec{n}_2=(a_2, b_2, c_2)$, $\vec{n}_3=(a_3, b_3, c_3)$ 分別為此三平面的法向量，考慮聯立方程組

$$(*)\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=d_2 \\ a_3x+b_3y+c_3z=d_3 \end{cases}$$

並假設

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_x=\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_y=\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}, \Delta_z=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}$$

則下列關於平面關係與聯立方程組的敘述，請選出正確的選項。

(1) 若 $\Delta\neq 0$，則三法向量 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 不共面

(2) 若 $\Delta\neq 0$，則聯立方程組 (*) 恰有一解

(3) 若 $\Delta=\Delta_x=\Delta_y=\Delta_z=0$，則聯立方程組 (*) 有無限多組解

(4) 若 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 兩兩不平行且 $\Delta=0$ 但 $\Delta_y\neq 0$，此時三平面兩兩交於一線，且三線兩兩平行

(5) 若 $\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3$ 兩兩不平行且聯立方程組 (*) 有無限多組解，則三平面 E_1, E_2, E_3 交於一線。

(　　　) 4. 設 A, B 為二階方陣，I 為二階單位方陣，下列敘述中請選出正確的選項。

(1) 對於任意實數 k，有 $\det(kA)=|k|\det(A)$

(2) 若 A, B 皆有反方陣，則 A^2B 也有反方陣且它的反方陣為 $B^{-1}(A^{-1})^2$

(3) 若 $AB=I$，則 $BA=I$

(4) 若 $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$，其中的每一個元 $a_{ij}=i+2j$，則第 (2, 1) 元為 4

(5) 若 $A=\begin{bmatrix} 1 & -6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$、$B=\begin{bmatrix} 5 & -12 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$，則 $AB=BA$

二、填充題

說明：第 A 題至第 I 題，答對題數 3 題以內者，每題 8 分，之後每多答對 1 題，每題 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。請將答案填寫至答案卷上。

A. 設 a, b, c 為實數，若兩直線 L_1: $\frac{x}{b+3c}=\frac{y}{-8}=\frac{z-2c}{-6}$ 及 L_2: $\frac{x}{-1}=\frac{y}{3a-b+7c}=\frac{z-6}{3}$ 重合，則數對 $(a, b, c)=$？

B. 設 A, B, C 皆為二階方陣，$A=\begin{bmatrix}6 & 2\\ 2 & 1\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$，若 $ACA+BCA=12\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{bmatrix}$，則矩陣 $C=$？

C. 設兩直線 L_1: $\frac{x-3}{1}=\frac{y-3}{2}=\frac{z}{2}$、$L_2$: $\frac{x-4}{2}=\frac{y+1}{-2}=\frac{z+1}{1}$。空間中一質點從 L_1 和平面 $z=0$ 的交點 P 出發，在 L_1 上沿著固定方向直線前進，2 秒後剛好抵達 L_1 和 L_2 的交點 Q，隨後立即轉向依同樣速率在 L_2 上直線前進，再經 k 秒後回到平面 $z=0$，若在 L_1、L_2 上行走時皆有相同速率，則實數 $k=$？

D. 已知兩平面 E_1: $x+3y+z=3$, E_2: $2x+y+z=0$ 的交線為 L：$\begin{cases}x=x_0+2t\\ y=2+bt\\ z=z_0+ct\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$，則數對 $(x_0, z_0, b, c)=$？

E. 設三元一次聯立方程組所含未知數的順序依次為 x, y, z，且其增廣矩陣為 $\begin{bmatrix}1 & 2 & 1 & 3\\ 2 & 5 & -2 & 5\\ 1 & 4 & -7 & k\end{bmatrix}$，已知該方程組有無限多組解，試求實數 $k=$？

F. 設 a, b 為正整數且 $4\le a\le 25$，若 $\begin{bmatrix}a & b\\ b & 3\end{bmatrix}$ 沒有反方陣，則數對 $(a, b)=$？

G. 兩直線 L_1: $\frac{x-2}{1}=\frac{y-4}{2}=\frac{z-1}{-2}$ 和 L_2: $\frac{x+1}{-2}=\frac{y+2}{2}=\frac{z+2}{1}$ 的公垂線方程式為 $\begin{cases}x=x_0+at\\ y=1+t\\ z=z_0+ct\end{cases}$ $,t\in\mathbb{R}$，試求數對 $(x_0, z_0, a, c)=$？

H. 設 $A=\begin{bmatrix}21 & 39\\ 18 & 12\end{bmatrix}$，若矩陣 X 為二階方陣，滿足 $A^2+AX=40A$，則矩陣 $X=$？

I. 設空間中有一直線 L: $\frac{x}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z}{2}$ 與兩點 $P(5, 4, 2)$、$Q(a, b, c)$，$b>0$，若 P 在 L 上的投影點與 Q 在 L 上的投影點皆為點 R，且 $\overline{PR}=\overline{QR}$、$\angle PRQ=120^\circ$，求 Q 點坐標 $(a, b, c)=$？

三、計算證明題

說明：本部分共有甲、乙二大題，每題 7 分，答案必須寫在答案卷上指定格內，超出格外不予計分，同時必須寫出演算過程或理由，依步驟給分，演算過程或理由不清楚將酌予扣分。

甲、有 A、B 兩支大瓶子，開始時將 A 瓶裝有 1 公升的水、B 瓶不裝水，每一輪的操作都是先將 A 瓶的水倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的水倒出一半回 A 瓶。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的水、B 瓶有 b_n 公升的水。

已知二階方陣 $P=\begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}$ 滿足 $\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x & u \\ y & v \end{bmatrix}^n\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$，

(1) (2 分) 請寫出此二階轉移矩陣 P

(2) (2 分) 經過兩輪操作後，水量分布矩陣 $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix}$ 為何？

(3) (3 分) 一直持續操作下去，A 瓶內的水量會趨近於多少公升？

乙、設 $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$、$I=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，

(1) (2 分) 試驗證 $A^2=-A$

(2) (2 分) 試證明：

$$\sum_{k=0}^{100} C_k^{100}(-1)^k=0$$

提示：(二項式定理) 設 m 為自然數，x, y 為任意實數，則

$$(x+y)^m=\sum_{k=0}^{m} C_k^m x^{m-k}y^k=C_0^m x^m y^0+C_1^m x^{m-1}y^1+C_2^m x^{m-2}y^2+\cdots+C_{m-1}^m x^1 y^{m-1}+C_m^m x^0 y^m$$

(3) (3 分) 從 (1) 可以推論得出 對任意自然數 k，有 $A^k=(-1)^{k-1}A$

又由二項式定理知道 $(A+I)^{100}=C_{100}^{100}A^{100}+C_{99}^{100}A^{99}+\ldots+C_2^{100}A^2+C_1^{100}A+C_0^{100}I$，

若 $(A+I)^{100}=sA+tI$，運用上面討論的結果，求出實數數對 (s, t)。

(若前面子題沒做出來，亦可直接運用前面子題的結果)