

台北市立松山高級中學九十六學年度第二學期高三理組數學科
第一次月考試題卷

一、多重選擇題（每題 6 分共 30 分）

1. 下列敘述何者正確？

- (A) 若數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 均收斂，則 $\langle a_n + b_n \rangle$ 收斂
(B) 若數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 均收斂，則 $\langle a_n b_n \rangle$ 收斂
(C) 若數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ ， $\langle a_n - b_n \rangle$ 均收斂，則 $\langle b_n \rangle$ 收斂
(D) 若數列 $\langle a_n + b_n \rangle$ ， $\langle a_n - b_n \rangle$ 均收斂，則 $\langle a_n b_n \rangle$ 收斂
(E) 若數列 $\langle a_n \rangle$ ， $\langle b_n \rangle$ 均發散，則數列 $\langle a_n b_n \rangle$ 發散。

2. 下列何者敘述為真？

- (A) 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = f(c)$ 且 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = g(c)$ ，則 $\lim_{x \rightarrow c} g(f(x)) = g(f(c))$
(B) 若 $f(a) \neq f(b)$ ，且 $f(a) < k < f(b)$ ，則至少有一 c 使得 $f(c) = k$
(C) 若 f 是開區間 (a, b) 上的連續函數，且 $f(a) \neq f(b)$ ，則至少有一 c 使得 $f(c) = k$
(D) 若 f 是閉區間 $[a, b]$ 上的連續函數，且 $f(a) \cdot f(b) < 0$ ，則至少有一 c 使得 $f(c) = 0$
(E) 若函數 $f(x)$ ， $g(x)$ ， $h(x)$ 在開區間 (a, b) 內 $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ ，且 $a < c < b$ ，
 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow c} h(x)$ ，則 $\lim_{x \rightarrow c} g(x) = L$ 。

3. 下列何者正確？

- (A) $x^5 + 10x^2 + 3 = 0$ 沒有正實根
(B) $x^3 - 3x^2 + 3x - 4 = 0$ 沒有實根
(C) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 沒有實根
(D) $x^{2n+1} + 1 = 0$ 沒有實根， $n \in N$
(E) $x^3 + 2x^2 - 20x - 30 = 0$ 必有一正實根。

4. 下列函數，何者為 R (實數) 上之連續函數？

- (A) $f(x) = \begin{cases} \frac{x+2}{2}, & \text{若 } x \leq 3 \\ \frac{12-2x}{3}, & \text{若 } x > 3 \end{cases}$ (B) $g(x) = \begin{cases} x^3 + 1, & \text{若 } x < 1 \\ x + 1, & \text{若 } x \geq 1 \end{cases}$ (C) $h(x) = \begin{cases} \frac{x^2 - 1}{x + 1}, & \text{若 } x \neq -1 \\ -1, & \text{若 } x = -1 \end{cases}$
(D) $t(x) = \begin{cases} x, & \text{若 } x < 0 \\ x^2, & \text{若 } x \geq 0 \end{cases}$ (E) $k(x) = \begin{cases} \frac{x}{|x|}, & \text{若 } x \neq 0 \\ 0, & \text{若 } x = 0 \end{cases}$ 。

5. 下列哪一些函數在所給區間中，有最大值也有最小值

- (A) $f(x) = x^3 - 7x^2 - 5x + 4$ ， $x \in [0, 100]$ (B) $g(x) = \frac{2x+5}{x^2+x-6}$ ， $x \in [-1, 1]$
(C) $h(x) = \sin x$ ， $x \in (0, 2\pi)$ (D) $p(x) = \frac{x+5}{x^2+2x-3}$ ， $x \in [0, 2]$
(E) $q(x) = x^2 - 2x - 1$ ， $x \in (-1, 2)$

二、填充題（每格 6 分共 60 分）

1. 試求下列極限

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n+8}{7n-2} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^{n-1} + 5^{n+2}}{5^n} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(3) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \sqrt{1-x}}{x} = \underline{\hspace{2cm}}。$$

$$(4) \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1} \right) = \underline{\hspace{2cm}}。$$

2. 設 $f(x)$ 為三次多項式且 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x)}{x-1} = 2$, $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{f(x)}{x-3} = 1$, 試求 $f(x) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

3. 若 $a_n = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}} + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{4n^2-2n}}$, 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

4. 若 $\triangle ABC$ 為直角三角形, 其中 $\overline{AB} = 5$, $\overline{AC} = 4$, $\overline{BC} = 3$, 動點 P 在射線 \overline{CA} 上,

若 $\overline{AP} = l$, $\overline{BP} = m$, 則 $\lim_{l \rightarrow \infty} (m-l) = \underline{\hspace{2cm}}$ 。

5. 若函數 $f(x) = \begin{cases} -x-5, & x < -3 \\ ax+b, & -3 \leq x < 5 \\ -2x+32, & x \geq 5 \end{cases}$, $\forall x \in R$ 為連續, 求數對 (a, b) 之值
 $= \underline{\hspace{2cm}}$ 。

6. 已知 $f(x) = 8x^2 - 13x - 2$ 與 $g(x) = x^2 + kx - k^2 + k$ 兩圖形交於 (a, b) 、 (c, d) 兩點, 若 $0 < a < 1 < c < 2$, 求 k 之範圍為 $\underline{\hspace{2cm}}$ 。

7. 若 $x \in [-3\pi, 3\pi]$, 方程式 $x \sin x = 7$ 有 $\underline{\hspace{2cm}}$ 個實數解。

三、計算證明題（10分）

1. (1) 試證： $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$

(2) 試求：(A) $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{5\theta}{\sin 3\theta} = ?$ (B) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{(4x - \pi)}{\sin(2x - \frac{\pi}{2})}$

臺北市立松山高級中學九十六學年度第二學期高三理組數學科
第一次月考答案卷

三年__班__號 姓名：_____


一、多重選擇題（每題 6 分共 30 分）

1	2	3	4	5

二、填充題（ 每格 6 分共 60 分 ）

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)	2.
3.	4.	5.	6.	7.

三、計算證明題（每題10分）



台北市立松山高級中學九十六學年度第二學期高三理組數學科
第一次月考答案卷

三年__班__號 姓名：_____

一、多重選擇題 (每題 6 分共 30 分)

1	2	3	4	5
ABCD	DE	AE	BD	ABC

二、填充題 (每格 6 分共 60 分)

1.(1)	1.(2)	1.(3)	1.(4)	2.
$\frac{2}{7}$	25	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$(x-1)(x-3)(\frac{3}{4}x - \frac{7}{4})$
3.	4.	5.	6.	7.
1	4	(3, 7)	$-2 < k < -1, 3 < k < 4$	4

三、計算證明題 (每題10分)

1. (1)略

(2)(A) $\frac{5}{3}$ (B)2