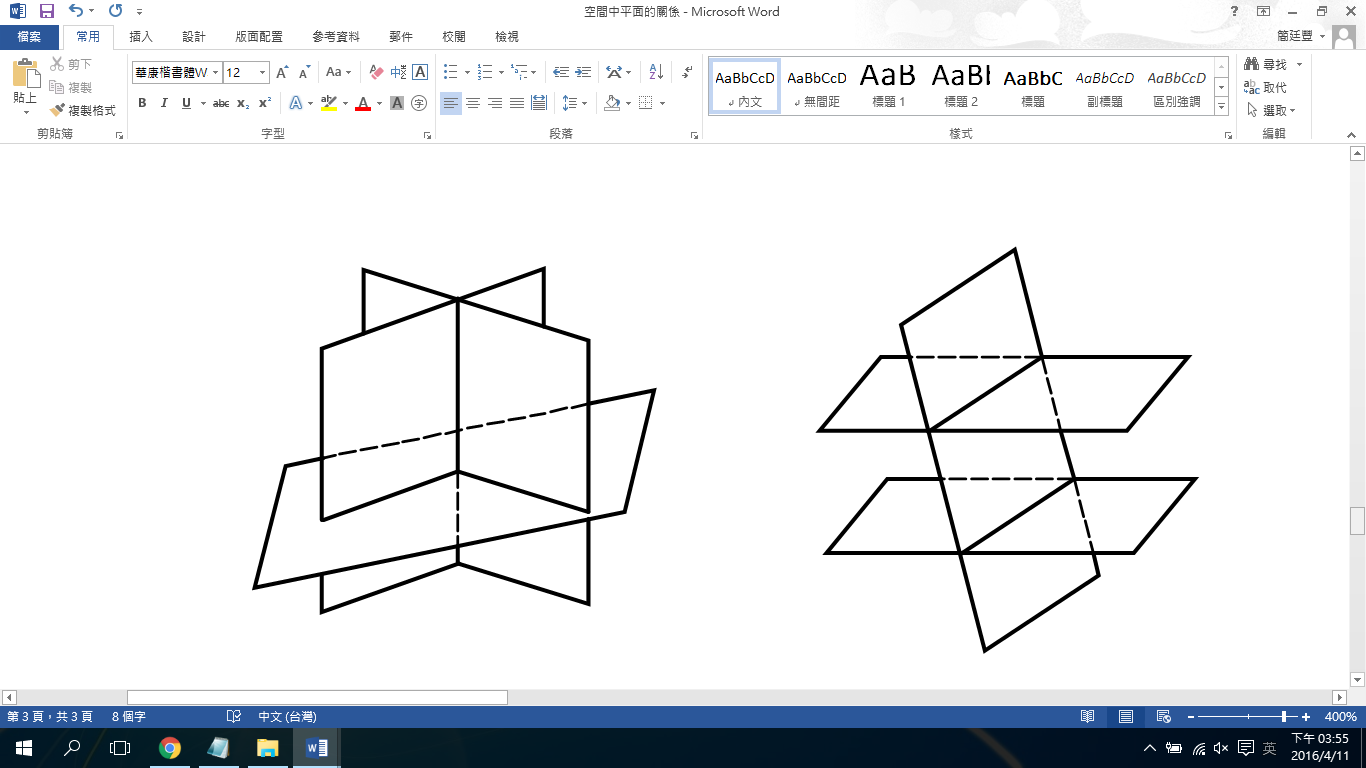
臺北市立松山高級中學 108學年度第二學期 第二次期中考

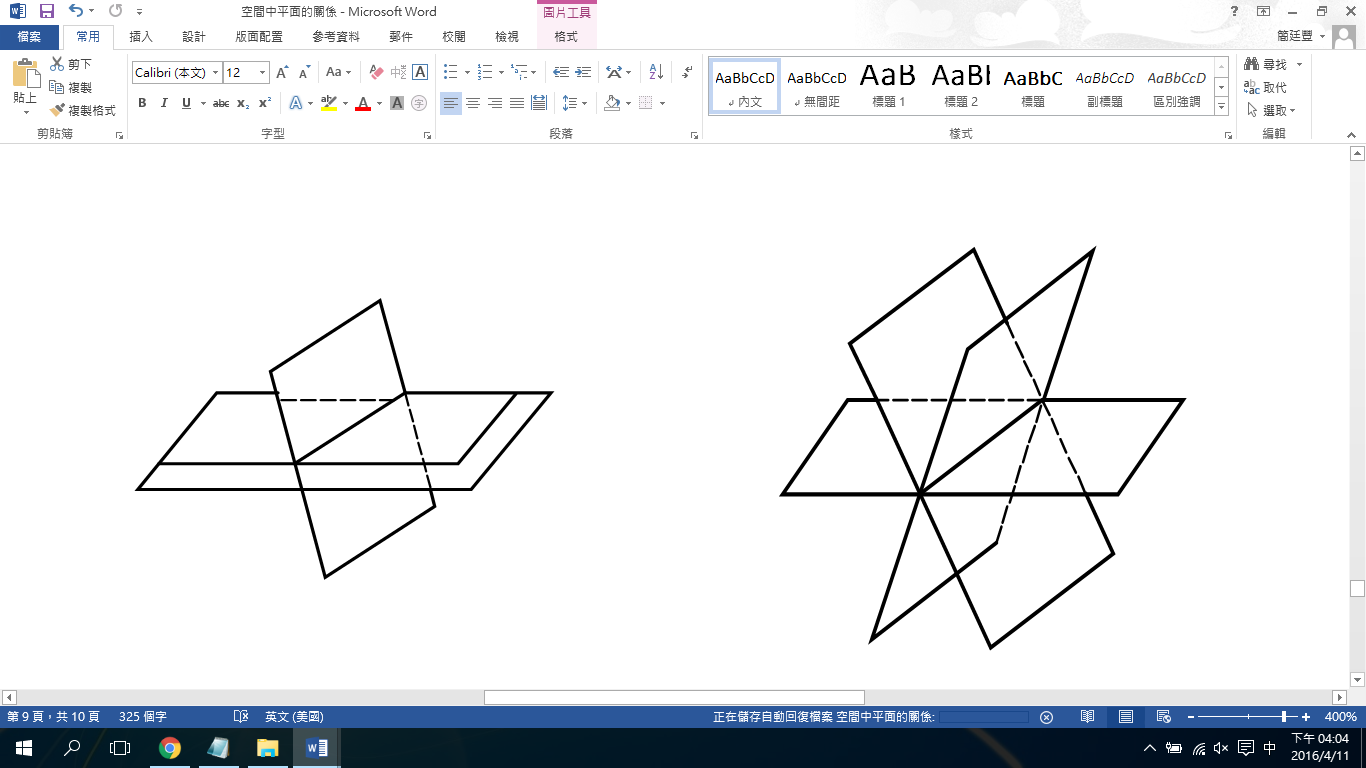
二年級 自然組 數學科試題卷

一、多重選擇題（占40分）

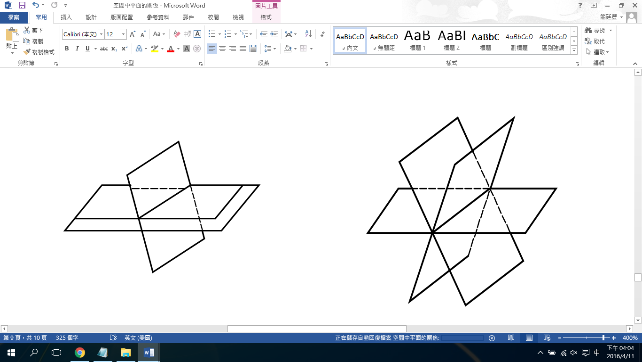
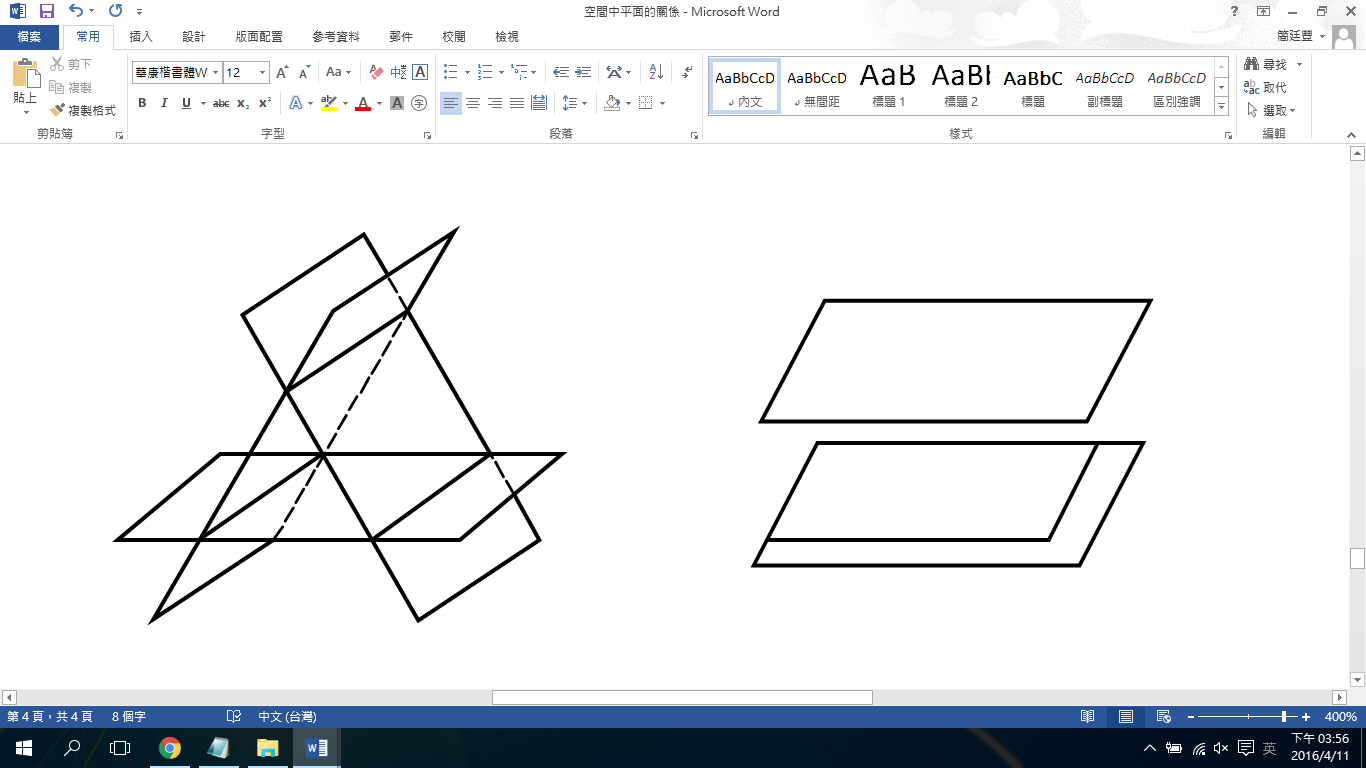
(134 ) 1. 設空間中有三平面*E*1, *E*2, *E*3，下列關於平面關係與聯立方程組的敘述，請選出正確的選項。



(1) 若 ，則三平面*E*1, *E*2, *E*3恰交於一點，形如



(2) 若 ，則三平面*E*1, *E*2, *E*3兩平面重合且與第三平面交於一直線，形如



(3) 若 ，則三平面*E*1, *E*2, *E*3兩兩交於一線但沒有共同交點，形如

(4) 若 有無限多組解，則0

(5) 若 無解，則≠ 0或≠ 0或≠ 0

(135 ) 2. 下列哪些選項中的矩陣經過一系列的列運算後可以化成 ？

(1) (2) (3) (4) (5)

(245 ) 3. 設二階方陣*A* = , *B* = ，請選出正確的選項。

(1) 若二階方陣*X*, *Y*滿足 (*A* + *B*)*X* = (*A* + *B*)*Y*，則*X* = *Y* (2) *B*的反矩陣*B*–1存在且*B*–1 = *B*

(3) *A*2 – *B*2 = (*A* – *B*)(*A* + *B*) (4) *AB* = *BA*3 (5) (*BAB*)109 = *BAB*

(234 ) 4. 設*a*, *b*為實數，下列有關線性方程組 的敘述，請選出正確的選項。

(1) 若此線性方程組有解，則必定恰有一組解 (2) 若此線性方程組有解，則必有無限多組解

(3) 若此線性方程組有解，則*ab* – 4*a* – 6*b* + 25 = 0 (4) 若此線性方程組無解，則*ab* – 4*a* – 6*b* + 25 ≠ 0

(5) 若此線性方程組無解，則*a* = 6或*b* = 4

(125 ) 5. 設*a*, *b*為實數，二階方陣 是轉移矩陣，請選出正確的選項。

(1) *a* < *b*  (2) *A*2是轉移矩陣 (3) *A*的反方陣*A*–1存在且*A*–1亦為轉移矩陣

(4) 若初始狀態*X*0 =，則*A*2*X*0 = (5) 若初始狀態*X*0 = 且 *A*100*X*0 =，則 二、填充題（占50分）

A. 已知矩陣*A* = [ *aij* ]3×3 與 *B* = [ *bij* ]3×3，且其中每個元*aij* = *i*2 + *j*且*bij* = *ij* – 1，試求*AB*的第 (2, 3) 元。

B. 設 , 且 為2階單位方陣，若方陣*C =* 滿足*ACA* + *BCB* = *ACB* + *BCA* + *I*2，  
試求*a* + *b* + *c* + *d* =？ 7 + (–12) + (–18) + 31 = 8

C. 設有*A*, *B*兩支瓶子，兩支瓶子中各裝有些許礦泉水。每一輪操作都是依序完成以下三個步驟：

步驟一：先將*A*瓶的溶液倒出一半到*B*瓶， 步驟二：再將*B*瓶的溶液倒出一半回*A*瓶，

步驟三：最後將*A*瓶的溶液倒出一半回*B*瓶， 設*n*輪操作後，*A*瓶有*an*公升的溶液，*B*瓶有*bn*公升的溶液。

已知二階轉移矩陣滿足 ，求*c* =？ 0.625 (或寫5/8)

D. 設 *a*, *b* 為整數，已知聯立方程式 有無限多組解，試求*a* + *b* =？ (–1) + (–6) = –7

E. 已知聯立方程組 有唯一解 (*x*, *y*, *z*) = (2, 1, 3)，若 有一組解 (*x*, *y*, *z*)，則*x*=？ 72

F. 已知矩陣 經過列運算後可以化簡成 ，試求實數*k* =？ 2

G. 已知三平面 , , 交於一直線，試求實數*k* =？ 5

H. 已知二階方陣 ，試求det(*A*10) =？ 1024

I. 設二階方陣*A* = ，若det(*A*) = 1且*A* – *A*–1 沒有反方陣，則*a* + *d* =？ ±2

J. 愛麗絲與鮑伯兩人約定一種傳遞訊息的方式：愛麗絲將要傳遞的訊息化為有限數列 *a*1, *a*2, … , *an*，並將之填入一個矩陣*X*的第二列，而其第一列則依序填入1, 2, … , *n*，即

*X*

隨後，愛麗絲在矩陣*X*的左邊乘以一個約定的可逆方陣*A*來加密，得到*Y* = *AX*，並依此*Y*來傳遞密碼；收到密碼的鮑伯，則透過矩陣*A*與*Y*，來解出愛麗絲所傳遞的訊息。

已知當愛麗絲要傳遞訊息為0時，可得*X* = ，鮑伯收到密碼*Y* = ；

而又當愛麗絲要傳遞訊息為1時，可得*X* = ，鮑伯收到密碼*Y* = 。

若某次愛麗絲要傳遞訊息*a*, *b*, *c*時，可得*X* = ，鮑伯收到密碼*Y* = ，

試求愛麗絲傳遞的訊息*a*, *b*, *c*為何？(請填寫三碼數字) 520

三、計算題（占10分）

甲、已知一個三元一次聯立方程式所含未知數的順序依次為*x*, *y*, *z*，且其增廣矩陣為 ，請利用  
高斯消去法(Gaussian Elimination)解此聯立方程式。 (*x*, *y*, *z*) = (2, 1, –1)

乙、已知聯立方程式 恰有一組解，請利用克拉瑪公式(Cramer’s rule)解此聯立方程式。 (*x*, *y*, *z*) = (3, 2, 1

) 一張含有 螢幕擷取畫面 的圖片

自動產生的描述

一張含有 螢幕擷取畫面 的圖片

自動產生的描述

108-2 高二自然組第二次期中考 參考解析

一、1. (1) 此聯立方程式恰有一組解 (*x*, *y*, *z*) = (1, 0, 2)，故圖形為三平面恰交於一點

(2) 平面*E*1與*E*2平行，皆和另一平面*E*3不平行且不重合，應為兩平面平行且與第三平面分別交於一直線

(3) 平面之法向量兩兩不平行且聯立方成式無解，故三平面確實兩兩交於一線但沒有共同交點

(4) 無限多組解必定有 =0

(5) (三平面兩兩平行)或(其中兩平面重合且和另一平面平行)，兩狀況皆為無解，但都有 =0

一、2. (1) 將第二列乘以 (–2) 倍加到第三列可得

(2) 列運算前後之解不會改變，題目之解為 (*x*, *y*, *z*) = (1, 2, 3)，但此選項有無限多組解

(3) 先將第一列和第三列交換、再將第二列和第三列交換可得

(4) 列運算前後之解不會改變，題目之解為 (*x*, *y*, *z*) = (1, 2, 3)，但此選項之解為 (*x*, *y*, *z*) = (3, 2, 1)

(5) 將第三列乘以1倍加到第二列、再將第二列乘以1倍加到第一列可得

一、3. (1) 矩陣一般而言沒有消去律，反例可取*X* =, *Y* = 滿足 (*A* + *B*)*X* = (*A* + *B*)*Y* 但 *X* ≠ *Y*

(2) 因為det(*B*) = –1 ≠ 0，所以*B*–1 存在，且*B*–1 = = *B*

(3) *A*2 – *B*2 = 但 (*A* – *B*)(*A* + *B*) =

(4) 因為*A*2 = –*I*2，所以右式 *BA*3 = –*BA* = ，

又可知左式*AB* = ，所以*AB* == *BA*3

(5) 因為*A*2 = –*I*2 且 *B*2 = *I*2 ，所以 (*BAB*)109 = (*BAB*)(*BAB*)…(*BAB*) = *BA*109*B* = *B*(*A*2)54*AB* = *B*(–*I*2)54*AB* = *BAB*

一、4. 利用高斯消去法：

第一列乘以 (–3) 倍加到到二列、乘以 (–2) 倍加到到三列，第二、三列交換，第二列乘以 –(*a* – 6) 倍加到第三列。

由第三列可得知當 (*a* – 6)(*b* – 4) = –1 無限多組解、 (*a* – 6)(*b* – 4) ≠ –1 無解。

(1) (2) 若此方程組有解，則必為無限多組解

(3) 若此方程組有解，則必為無限多組解，(*a* – 6)(*b* – 4) = –1，即*ab* – 4*a* – 4*b* + 25 = 0

(4) 若此方程組無解，則有 (*a* – 6)(*b* – 4) ≠ –1，即*ab* – 4*a* – 4*b* + 25 ≠ 0

(5) 若此方程組無解，則有 (*a* – 6)(*b* – 4) ≠ –1，可取*a* = 7且*b* = 3為反例。

一、5. 轉移矩陣之各行之和為1，可解得*a* = 及*b* = ，此轉移矩陣*A* =

(1) *a* = , *b* = ，可得*a* < *b* (2) *A*2 ===

(3) 因為det(*A*) = ≠ 0，所以*A*–1 存在，但*A*–1 = 有負元，故*A*–1非轉移矩陣

(4) *A*2*X*0 =

(5) 穩定狀態*X* 滿足 *AX* = *X* 得 *k* + (1 – *k*) = *k*，解得 *k* =

設 *AnX*0 = = ，對於所有自然數*n*，聲稱 *k* < *an*+1 < *an*：

當*n* = 1時，*a*2 = < = *a*1 且*a*2 = > = *k*，命題成立；

設*n* = *m*時，命題亦成立，即*k* < *am*+1 < *am*；

則*n* = *m* + 1時，

(1) *an*+1 = *am*+1+1 = *am*+1 + (1 – *am*+1) = *am*+1 + = *am*+1 + *k* < *am*+1 + *am*+1 = *am*+1 = *an*

(2) *an*+1 = *am*+1+1 = *am*+1 + (1 – *am*+1) = *am*+1 + > *k* + = + = = *k*

綜合 (1), (2) 可得 *k* < *an*+1 < *an*，命題亦成立 由數學歸納法得證

因為*a*1 > *a*2 > … > *a*100 > *k*，所以 | *s* – *k* | = *a*100 – *k* < *a*2 – *k* =

二、A. *AB* =

，故所求*AB*的第 (2, 3) 元為**96**

二、B. 依題意，移項得*ACA* + *BCB* – *ACB* – *BCA* = *I*2，利用加法交換律得*ACA* – *ACB* + *BCB* – *BCA* = *I*2、

乘法對加法的左分配律得*AC*(*A* – *B*) – *BC*(*A* – *B*) = *I*2、乘法對加法的右分配律得(*A* – *B*)*C*(*A* – *B*) = *I*2、

因此 *C* = (*A* – *B*)–1 *I*2 (*A* – *B*)–1 = = ，所求7 + (–12) + (–18) + 31 = **8**

二、C.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| 設*A*瓶內有*an*公升、*B*瓶內有*bn*公升 | *A*瓶 *an* | *B*瓶 *bn* |
| 步驟一：先將*A*瓶的溶液倒出到*B*瓶 |  |  |
| 步驟二：再將*B*瓶的溶液倒出到*A*瓶 |  |  |
| 步驟三：最後將*A*瓶的溶液倒出到*B*瓶 |  |  |

可得 ，其中所求*c* = = **0.625**

二、D. 因為有無限多組解，所以 = *ab* – 6 = 0，得*ab* = 6，整數數對 (*a*, *b*) 共有八種可能：

(*a*, *b*) = (1, 6), (2, 3), (3, 2), (6, 1), (–1, –6), (–2, –3), (–3, –2), (–6, –1)，對應聯立方程式有

, , , ,

, , , ，

其中僅有 為無限多組解，其餘皆為無解，故*a* = –1, *b* = –6，得*a* + *b* = **–7**

二、E. ，故亦恰有一組解 (*x*, *y*, *z*)

又

所以*x’* = = **72**

二、F. 因為 經過列運算後可以化簡成 ，又兩者皆具有恰一解，

所以兩聯立方程式 和 有一組相同的解 (*x*, *y*, *z*)，

此解 (*x*, *y*, *z*) 滿足*x* + *z* = 5 … 、 *x* + *y* = 2 … 、 *y* = *k*2 – 2*k* … 、 *z* = *k*2 – 1 …

由 – + – 消去*x*, *y*, *z* 得5 – 2 + (*k*2 – 2*k*)– (*k*2 – 1) = 0 即 4 – 2*k* = 0 解得*k* = 2；

此時，代回各式得*x* = 2, *y* = 0, *z* = 3，再代回原來兩組聯立方程式檢驗無誤，故所求*k* = **2**

二、G. 利用高斯消去法：

第一列乘以 2 倍加到到二列、乘以 1 倍加到到三列，第二列乘以 (1/3) 倍，第二列乘以 (–2) 倍加到到三列。

依題意，此聯立方程式有無限多組解，故*k* – 5 = 0即*k* = **5**

二、H. 計算*A*2 =，故*A*10 = (*A*2)5 = (–2*I*2)5 = –32*I*2

所求det(*A*10) = det(–32*I*2) = det() = (–32) × (–32) = **1024**

二、I. 依題意，det(*A*) = *ad* – *bc* = 1 … 。 又 ，可算得

因為 *A* – *A*–1 沒有反方陣，所以det(*A* – *A*–1) = – (*a* – *d*)2 – 4*bc* = 0，化簡得到 (*a* – *d*)2 + 4*bc* = 0 …

由4 + 消去*bc* 得 (*a* – *d*)2 + 4*ad* = 4 整理得 (*a* + *d*)2 = 4 即 *a* + *d* = **±2**

二、J. 依題意，，可解出 ，

鮑伯得到*Y*後，透過 解得 ，

因此，原先愛麗絲傳遞的訊息為**520**