

Современные методы вычислительной математики

Лектор — д.ф.-м.н., профессор Голушко Сергей Кузьмич

Лабораторная работа № 3. Метод конечных элементов.

Содержание

1	Краткое описание метода	1
2	Одномерная краевая задача второго порядка	2
3	Задания	10
4	Пример	13
5	Задание повышенной сложности	15
	Список литературы к разделу 3	15

Метод конечных элементов

1 Краткое описание метода

Метод конечных элементов (МКЭ) завоевал всеобщее признание как весьма эффективный метод решения самых разнообразных задач механики, математической физики и техники. Такая популярность метода объясняется целым рядом причин, среди которых на первое место должны быть поставлены его большая универсальность, простота физической интерпретации и алгоритмичность. Метод очень удобен при использовании ЭВМ, так как все его алгоритмы записываются в матричном виде.

Идея метода проста. Изучаемая область разбивается на конечное число элементов, внутри каждого элемента задается некоторая функция формы, позволяющая определить перемещения внутри конечного элемента на основе перемещений внутри его узлов, являющихся местами стыков конечных элементов. Узловые перемещения представляют собой матрицу, состоящую из неизвестных коэффициентов. В качестве пространства, в котором ищется решение, берется пространство кусочно заданных функций, которые выражаются через достаточно простые функции на каждом конечном элементе и равны нулю вне элемента. В качестве базисных функций на элементе зачастую берутся полиномы низких степеней. Для каждого элемента выводится локальная СЛАУ $\{P\} = [K]\{u_h\}$, которая связывает вектор правой части $\{P\}$ и вектор неизвестных значений искомой функции $\{u_h\}$ в узлах элемента посредством матрицы жесткости $[K]$.

МКЭ имеет множество трактовок (подробнее см. [1, 2]). Поначалу МКЭ применялся в задачах механики твердого тела и не имел за собой строгого математического обоснования. Простейшие конечно-элементные модели могут быть построены исходя из принципов, положенных в основу механики. Например, используя уравнения равновесия для каждого из элементов в конструкции, можно получить матрицу СЛАУ для нахождения неизвестных в узлах элементов. С другой стороны, ту же самую глобальную матрицу можно получить исходя из принципа минимизации некоторого функционала. В механике такой функционал может

быть задан через принцип виртуальных перемещений или же через принцип минимума потенциальной энергии. Формулировка задач в терминах минимизации некоторых функционалов изучается в курсе вариационного исчисления. Во многих прикладных областях такой подход более удобен, так как сразу позволяет сформулировать условие, из которого потом получается итоговая СЛАУ, и при этом нет необходимости рассматривать исходные дифференциальные уравнения, описывающие задачу.

Однако с точки зрения численных методов решения дифференциальных уравнений целесообразным является построение МКЭ для исходной сильной постановки задачи в терминах дифференциальных уравнений. Для этого необходимо совершить переход к слабой постановке задачи посредством некоторых действий и манипуляций над исходными дифференциальными уравнениями. Такой подход является более строгим в математическом смысле и не требует привлечения законов механики. Такая трактовка МКЭ называется методом Бубнова-Галеркина и она же будет рассмотрена далее для решения ряда задач.

2 Одномерная краевая задача второго порядка

Одномерные краевые задачи не являются основной областью для использования МКЭ. Наиболее выразительно все достоинства этого метода проявляются при решении двумерных и трехмерных задач, однако одномерные задачи представляют из себя простую содержательную модель, на примере которой можно ознакомиться с основными аспектами МКЭ. Прежде чем переходить к МКЭ необходимо переформулировать исходную задачу в ее слабую форму. Для этого надо определиться с краевыми условиями в задаче, а также с пространством функций, в котором мы будем искать решение.

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) второго порядка на отрезке

$[0, L]$

$$\frac{d}{dx} \left(C(x) \frac{du(x)}{dx} \right) = f(x), \quad (1)$$

$$u(0) = 0, \quad u(L) = 0. \quad (2)$$

где $u(x)$ — искомая функция, $f(x)$ — заданная функция.

Слабая постановка задачи. Обозначим $H_0^1([0, L])$ — пространство функций из $H^1([0, L])$ с нулевым следом на границе. Умножим уравнение (1) на функцию $v \in H_0^1([0, L])$ и проинтегрируем полученное равенство на отрезке $[0, L]$:

$$\int_0^L \frac{d}{dx} \left(C(x) \frac{du}{dx} \right) v \, dx = \int_0^L f v \, dx.$$

Применяя к левой части интегрирование по частям и учитывая тот факт, что $v(0) = v(L) = 0$, получим следующее равенство

$$\int_0^L C(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = - \int_0^L f v \, dx. \quad (3)$$

Функция $u \in H_0^1([0, L])$ называется слабым решением задачи (1)–(2), если она удовлетворяет уравнению (3) для любой функции $v \in H_0^1([0, L])$. Можно показать, что, если коэффициент $C(x) \in C^1[0, L]$, $f \in C[0, L]$ и функция $u \in C^2[0, L]$ является слабым решением задачи, то она будет также решением задачи (1)–(2) в классическом смысле.

Рассмотрим смешанную краевую задачу для ОДУ второго порядка, когда $u(0) = 0$, $\frac{du}{dx}(L) = C_1$. В этом случае после интегрирования по частям получим следующее равенство

$$\int_0^L C(x) \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} \, dx = - \int_0^L f v \, dx + C_1 C(L) v(L). \quad (4)$$

Здесь для задания слабой постановки необходимо выбрать в качестве пространства функций — подпространство \widetilde{H}^1 пространства

$H^1([0, L])$, удовлетворяющих условию Дирихле только на левом краю.

Стоит отметить, что в отличие от рассматриваемого нами случая, слабая постановка не эквивалентна исходной дифференциальной постановке задачи, а выступает ее обобщением. В общем случае слабая постановка для исходной системы дифференциальных уравнений в частных производных может быть получена используя следующий алгоритм ([3], Глава 3, стр. 47):

- Домножить каждое уравнение в системе на подходящую произвольную функцию.
- Проинтегрировать полученное произведение по всей области решения задачи.
- Использовать интегрирование по частям для того, чтобы максимально снизить порядок производных подынтегральных функций.
- По возможности учесть краевые условия в постановке задачи.

Одномерные линейные элементы. После того, как исходная задача переформулирована в виде интегрального тождества (4), можно перейти к построению конечно-элементной модели. Сформулируем несколько общих этапов решения задачи (4) с помощью МКЭ.

- 1 *Дискретизация области.* Для начала необходимо разбить область на конечное число элементов.
- 2 *Выбор подходящей аппроксимирующей функции на элементе.* В большинстве случаев в качестве аппроксимирующей функции выбираются полиномы.
- 3 *Вывод локальной матрицы жесткости и вектора нагрузок на элементе.* Аппроксимирующие функции подставляются в интегральное тождество из слабой постановки задачи.

- 4 Сборка локальных матриц жесткости и векторов нагрузок всех элементов в глобальную матрицу жесткости и глобальный вектор нагрузок.
- 5 Учет главных краевых условий типа Дирихле в итоговой СЛАУ.
- 6 Решение полученной системы линейных алгебраических уравнений.
- 7 Вычисление необходимых характеристик по найденным значениям в узлах элементов.

Разобьем отрезок $[0, L]$ на N равных отрезков — конечных элементов. Рассмотрим минимальный случай, когда решение на каждом элементе u_e задается линейной функцией (линейные 1D элементы)

$$u_e^h = a_0 + a_1 x, \quad (5)$$

где a_0, a_1 — неизвестные коэффициенты. Таким образом, перед неизвестными коэффициентами здесь стоят две базисные функции (мономы). Для того, чтобы однозначно восстановить полином первой степени в области элемента необходимо выбрать две точки, в которых будет искаться решение. Как правило эти точки являются левым и правым узлами элемента.

В случае квадратичной аппроксимации, решение на каждом элементе u_e задается квадратичной функцией

$$u_e^h = a_0 + a_1 x + a_2 x^2, \quad (6)$$

где a_0, a_1, a_2 — неизвестные коэффициенты. При этом помимо левого и правого узлов элемента добавляется один узел по центру элемента. Таким образом, зная решение в трех узлах можно однозначно восстановить квадратичную функцию.

При работе с МКЭ удобно переформулировать аппроксимацию так, чтобы неизвестными выступали не произвольные константы, а значения неизвестной функции в узлах элемента. Для этого введем координаты левой x_i и правой x_{i+1} границы i -го элемента.

Здесь и далее будем опускать верхний индекс h при работе с численной аппроксимацией решения

$$u_i = a_0 + a_1 x_i, \quad u_{i+1} = a_0 + a_1 x_{i+1}. \quad (7)$$

Получаем систему из двух уравнений на две неизвестные. Выражаем коэффициенты a_0, a_1

$$a_0 = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i}, \quad a_1 = \frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}. \quad (8)$$

Подставляем полученные выражения для коэффициентов в исходную формулу (5)

$$u_e = \frac{u_i x_{i+1} - u_{i+1} x_i}{x_{i+1} - x_i} + \frac{u_i - u_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} x = N_i(x) u_i + M_i(x) u_{i+1}, \quad (9)$$

$$N_i(x) = \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}, \quad M_i(x) = \frac{x_i - x}{x_i - x_{i+1}}.$$

Отметим тот факт, что $N_i(x_i) = 1$ и $N_i(x_{i+1}) = 0$, в свою очередь $M_i(x_i) = 0$ и $M_i(x_{i+1}) = 1$.

В матричном виде, полученные соотношения на элементе выглядят следующим образом

$$u_e = \begin{pmatrix} N_i & M_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Для $(i - 1)$ ого элемента имеем

$$u_e = \frac{u_{i-1} x_i - u_i x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} + \frac{u_{i-1} - u_i}{x_{i-1} - x_i} x = N_{i-1}(x) u_{i-1} + M_{i-1}(x) u_i.$$

Если рассмотреть вклад от всех элементов, то перед значением приближенного решения u_i в узле x_i стоит функция

$$\psi_i(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1} - x}{x_{i+1} - x_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases} \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

$$\psi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1 - x}{x_1 - x_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

$$\psi_N(x) = \begin{cases} \frac{x - x_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}, & x \in [x_{N-1}, x_N], \\ 0, & \text{иначе,} \end{cases}$$

где $\psi_i, i = 0, \dots, N$, называются функциями формы. Приближенное решение задачи имеет вид

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^N \psi_i(x) u_i. \quad (10)$$

Если подставить приближенное решение в слабую постановку задачи (3) и в качестве функций v взять те же самые функции формы ψ_i , то после подсчета всех интегралов получится итоговая СЛАУ без учета главных краевых условий

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} u_0 C(x) \frac{d\psi_0}{dx} \frac{d\psi_s}{dx} dx + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} u_k C(x) \frac{d\psi_k(x)}{dx} \frac{d\psi_s(x)}{dx} dx + \\ & + \int_{x_{N-1}}^{x_N} u_N C(x) \frac{d\psi_N}{dx} \frac{d\psi_s}{dx} dx = - \int_{x_{s-1}}^{x_{s+1}} f(x) \psi_s(x) dx, \quad s = 1 \dots N. \end{aligned}$$

Аналогично для смешанной краевой задачи (4)

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^{x_1} u_0 C(x) \frac{d\psi_0}{dx} \frac{d\psi_s}{dx} dx + \sum_{k=1}^{N-1} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} u_k C(x) \frac{d\psi_k(x)}{dx} \frac{d\psi_s(x)}{dx} dx + \\ & + \int_{x_{N-1}}^{x_N} u_N C(x) \frac{d\psi_N}{dx} \frac{d\psi_s}{dx} dx = - \int_{x_{s-1}}^{x_{s+1}} f(x) \psi_s(x) dx + C_1 C(L) \psi_s(L). \end{aligned}$$

Таким образом, для неизвестных значений u_i имеем глобальную СЛАУ, что эквивалентно $[K]\{u\} = \{P\}$, где $[K]$ является мат-

рицей жесткости, а $\{P\}$ — вектором нагрузок. Однако на практике, такой метод получения глобальной матрицы жесткости неудобен, так как требует больших вычислительных затрат. Предпочтительным является подход, в котором сначала выводятся локальные матрицы жесткости, а глобальная матрица получается исходя из комбинирования локальных матриц. При этом действует правило: если один узел является общим для нескольких элементов, то локальные матрицы этих элементов дают суммарный вклад в глобальную матрицу жесткости для общего узла.

Вывод локальной матрицы жесткости. Положим, что $C(x) = EI$ — константа во всей области. Для начала необходимо вычислить производные от N_i, M_i

$$\frac{d}{dx} \begin{pmatrix} N_i \\ M_i \end{pmatrix} = \frac{1}{x_{i+1} - x_i} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} x_{i+1} - x \\ x - x_i \end{pmatrix} = \frac{1}{L_e} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

где L_e — длина элемента. Матрица жесткости на элементе выглядит следующим образом

$$\begin{aligned} [K^{(e)}] \{u^{(e)}\} &= EI \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} N_i \\ M_i \end{pmatrix} \frac{d}{dx} (N_i \quad M_i) \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx = \\ &= EI \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{L_e^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix} dx = \frac{EI}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_i \\ u_{i+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Интегрирование ведется с учетом того, что производные от линейных функций постоянны.

Для подсчета правой части в общем случае необходимо вычислять интеграл численно. Однако, если функция изгибающего момента хорошо аппроксимируется линейной функцией на элементе, можно воспользоваться следующей аппроксимацией

$$M_e(x) = (N_i \quad M_i)_e \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix}.$$

Тогда правая часть может быть вычислена следующим образом

$$\{P^{(e)}\} = - \int_{x_i}^{x_{i+1}} \begin{pmatrix} N_i \\ M_i \end{pmatrix} (N_i \quad M_i) \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix} dx = - \frac{L_e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_i \\ f_{i+1} \end{pmatrix}$$

Таким образом, на данном этапе реализовано три первых шага. Имеется дискретизация области решения в виде равномерного разбиения отрезка. Функции формы элемента были выбраны на основе линейной аппроксимации решения на элементе. На каждом элементе найдена своя локальная матрица жесткости и вектор нагрузок.

Сборка глобальной матрицы жесткости. Рассмотрим процесс сборки в случае, когда область разбита на два элемента. Положим, что $C(x) = EI$ — константа во всей области. Неизвестными тогда выступают три значения в узлах u_0, u_1, u_2 , соответственно размер матрицы жесткости будет 3×3 . Первый элемент образован узлами 0 и 1. Второй элемент образован узлами 1 и 2. Тогда глобальная матрица жесткости будет являться суммой всех локальных матриц, предварительно увеличенных до размера глобальной матрицы. Например, для матрицы жесткости первого элемента, ненулевыми будут только вхождения на пересечении первой и второй строки с первым и вторым столбцом. Для второго элемента, ненулевыми будут вхождения на пересечении второй и третьей строки и второго третьего столбца.

$$\begin{aligned} [K] &= \frac{EI}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{EI}{L_e} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{EI}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (11)$$

Вектор нагрузок вычисляется аналогичным образом

$$\begin{aligned} \{P\} &= -\frac{L_e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} - \frac{L_e}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \\ &= -\frac{L_e}{6} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

После того как глобальная система собрана, необходимо учесть краевые условия (2). В глобальной матрице, строки и столбцы, соответствующие узлам на которых вводятся ограничения, зануляются, а на диагонали ставится значение единица. Соответствующему узлу в правой части ставится значение ноль.

$$\frac{EI}{L_e} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = -\frac{L_e}{6} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}.$$

Итоговая квадратная СЛАУ получена, для ее решения можно воспользоваться множеством методов, в том числе и из раздела 1. Учитывая, что здесь матрица является трехдиагональной и имеет диагональное преобладание, то имеет смысл для решения СЛАУ воспользоваться экономичным методом прогонки [4]. Подробнее о том, как собирается матрица жесткости и учитываются краевые условия читатель может также узнать в [5, 6].

3 Задания

При выполнении заданий необходимо найти точное решение задачи, вид матрицы жесткости для $N = 5$, таблицу по образцу табл. 1 и несколько графиков, на которых изображены точное и приближенное решения. В таблице необходимо привести следующие значения

- Относительную погрешность приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E_r\|_\infty = \frac{\max_{m=1,\dots,Q} |u_{ex}(x_m) - u_h(x_m)|}{\max_{m=1,\dots,Q} |u_{ex}(x_m)|}, \quad (12)$$

где Q — количество равномерно распределенных на отрезке $[0, L]$ точек x_m , u_{ex} — точное решение задачи, u_h — приближенное решение. Взять $Q = 10000$.

- Относительную погрешность приближенного решения в L_2

норме

$$\|E_r\|_{L_2} = \sqrt{\frac{\int_0^L (u_{ex}(x) - u_h(x))^2 dx}{\int_0^L u_{ex}^2(x) dx}}. \quad (13)$$

- Порядок сходимости погрешности численного решения, который определяется как $R = \log_2 \frac{E_{N/2}}{E_N}$, где E_N — значение погрешности на сетке из N ячеек, $E_{N/2}$ — значение погрешности на сетке из $N/2$ ячеек.
- $\mu([K])$ — число обусловленности матрицы жесткости.
- Время решения задачи с указанием компьютера.

При оформлении вывода ответьте на следующие вопросы:

- 1) Оцените арифметическую сложность полученного алгоритма.
- 2) Влияет ли способ нумерации элементов на вычислительную эффективность алгоритма?
- 3) Оцените, во сколько раз увеличится глобальная СЛАУ, если вместо n линейных элементов использовать n квадратичных.
- 4) Каким образом найти локальную матрицу жесткости и вектор правой части, если нет возможности провести интегрирование аналитически?

Варианты заданий

1. Задача о растяжении стержня постоянного сечения, где $C(x) = EA$, $f(x) = \rho g A$. Здесь $L = 5$ м — длина балки, $g = 9.81$ м/с² — ускорение свободного падения, $P = 30000$ Н — сила, $E = 30$ ГПа — модуль упругости, $\rho = 2150$ кг/м³ — плотность, $A = 0.0341$

m^2 — постоянная площадь поперечного сечения. Краевые условия: $u(0) = 0, \frac{du}{dx}(L) = -P/(EA)$.

2. Задача о растяжении стержня переменного сечения, где $C(x) = EA(x)$, $f(x) = \rho g A$. Здесь $L = 5$ м — длина балки, $g = 9.81$ м/с² — ускорение свободного падения, $P = 30000$ Н — сила, $E = 30$ ГПа — модуль упругости, $\rho = 2150$ кг/м³ — плотность, $A(x) = bh(x)$ — переменная площадь поперечного сечения, $b = 0.1$ м — ширина балки, $h(x) = 0.1 + x/(10L)$ — высота балки. Краевые условия: $u(0) = 0, \frac{du}{dx}(L) = -P/(EA(L))$.

3. Задача о трехточечном изгибе балки (сила прикладывается в центре балки), где $C(x) = 1$, $f(x) = \kappa(x) = \frac{12M(x)}{Ebh^3}$. Здесь $\kappa(x)$ — кривизна, $M(x)$ — изгибающий момент, b — ширина, h — высота, E — модуль Юнга. Здесь

$$M(x) = \begin{cases} Px/2 & \text{при } x \in [0, L/2], \\ P(L-x)/2 & \text{при } x \in [L/2, L]. \end{cases} \quad (14)$$

Параметры: $L = 2$ м — длина балки, $P = 6000$ Н — сила, $E = 200$ ГПа, $b = 0.1$ м, $h = 0.1$. Краевые условия: $u(0) = 0, u(L) = 0$. Для вывода точного решения здесь необходимо проинтегрировать уравнение на отрезках $[0, L/2]$, $[L/2, L]$, а в центре балки потребовать непрерывность решения и его первой производной.

4. Задача о четырехточечном изгибе балки (сила прикладывается в точках $x = a$ и $x = L - a$ центре балки), где $C(x) = 1$, $f(x) = \kappa(x) = \frac{12M(x)}{Ebh^3}$. Здесь $\kappa(x)$ — кривизна, $M(x)$ — изгибающий момент, b — ширина, h — высота, E — модуль Юнга. Здесь

$$M(x) = \begin{cases} Px & \text{при } x \in [0, a], \\ Pa & \text{при } x \in [a, L-a], \\ P(L-x) & \text{при } x \in [L-a, L]. \end{cases} \quad (15)$$

Параметры: $L = 2$ м — длина балки, $a = 0.6$, $P = 6000$ Н — сила, $E = 200$ ГПа, $b = 0.1$ м, $h = 0.1$. Краевые условия:

$u(0) = 0, u(L) = 0$. Для вывода точного решения здесь необходимо проинтегрировать уравнение на отрезках $[0, a]$, $[a, L - a]$, $[L - a, L]$, а в точках $x = a$, $x = L - a$ потребовать непрерывность решения и его первой производной.

5. Задача об изгибе балки распределенной нагрузкой, где $C(x) = 1$, $f(x) = \kappa(x) = \frac{12M(x)}{Ebh^3}$. Здесь $\kappa(x)$ — кривизна, $M(x)$ — изгибающий момент, b — ширина, h — высота, E — модуль Юнга. Здесь $M(x) = \frac{1}{2}x \int_0^L q(s)ds - \int_0^x q(s)(x - s)ds$, где $q(x)$ — распределенная нагрузка. Параметры: $L = 2$ м — длина балки, $a = 0.6$, $q(x) = \sin \frac{\pi x}{L}$ Па — нагрузка, $E = 200$ ГПа, $b = 0.1$ м, $h = 0.1$. Краевые условия: $u(0) = 0, u(L) = 0$.

Прислать отчет проделанной работы в виде pdf- или текстового файла в google класс. Указать версию языка программирования. Защита задания происходит в устной форме преподавателю.

Варианты заданий распределяются в зависимости от номера ФИО в общем списке группы следующим образом: магистранты под номерами 1, 6, 11, 16, ... делают **вариант 1**; под номерами 2, 7, 12, 17, ... — **вариант 2**, под номерами 3, 8, 13, 18, ... — **вариант 3**, под номерами 4, 9, 14, 19, ... — **вариант 4**, под номерами 5, 10, 15, 20, ... — **вариант 5**. Если вы себя не обнаружили в списке групп, то свяжитесь с преподавателем для получения варианта.

4 Пример

В качестве примера рассмотрим задачу об изгибе балки постоянной распределенной нагрузкой (рис. 1). Положим $C(x) = 1$, $f(x) = \kappa(x) = \frac{12M(x)}{EI}$. Здесь $\kappa(x)$ — кривизна, $M(x)$ — изгибающий момент, b — ширина, h — высота, E — модуль Юнга. Здесь $M(x) = qx(x - L)/2$, где $q = const$ — распределенная нагрузка. Параметры: $L = 10$, $q = 1$, $EI = 1$. Краевые условия: $u(0) = 0, u(L) = 0$. Точное решение этой задачи

$$u_{exact} = \frac{q(2Lx^3 - x^4 - L^3x)}{24EI}.$$

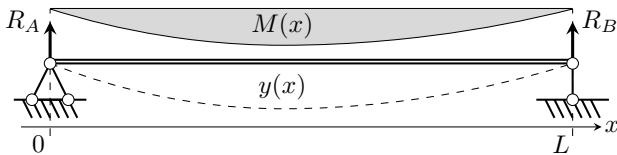


Рис. 1. Расчетная схема для задачи об изгибе балки

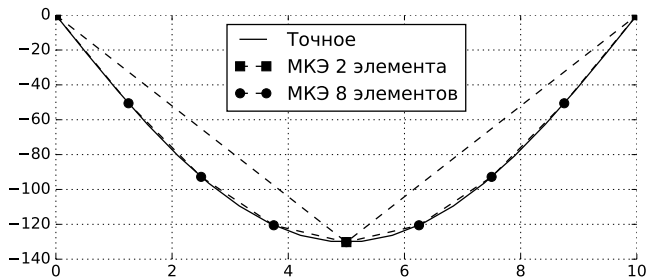


Рис. 2. Численное и точное решения

Таблица 1. Пример таблицы с результатами численных экспериментов

N	$\ E_r\ _\infty$	R	$\ E_r\ _{L_2}$	R	$\mu([K])$	время, с
2	2.15e-1	—	2.18e-1	—	2.50e+0	5.00e-1
4	6.96e-2	1.63e+0	5.57e-2	1.97e+0	5.83e+0	4.67e-1
8	1.84e-2	1.92e+0	1.40e-2	1.99e+0	2.53e+1	4.68e-1
16	4.67e-3	1.98e+0	3.52e-3	2.00e+0	1.03e+2	5.59e-1
32	1.17e-3	2.00e+0	8.80e-4	2.00e+0	4.14e+2	7.27e-1
64	2.93e-4	2.00e+0	2.20e-4	2.00e+0	1.66e+3	9.04e-1
128	7.32e-5	2.00e+0	5.50e-5	2.00e+0	6.64e+3	1.50e+0

На рис. 2 показано точное решение задачи вместе с двумя численными решениями. Значения погрешности и скорость сходимости решения отображены в табл. 1. Видно, что численное решение сходится к точному со вторым порядком независимо от используемой нормы. Расчеты проведены на процессоре Intel Core i7-4700mq CPU 2.4 GHz.

5 Задание повышенной сложности

Необходимо решить с помощью МКЭ следующую задачу

$$-\frac{d^2u}{dx^2} - u + x^2 = 0, \quad x \in [0, 1],$$

$$u(0) = 0, \quad \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=1} = 1.$$

Точное решение задачи задается формулой

$$u(x) = \frac{2 \cos(1-x) - \sin(x)}{\cos(1)} + x^2 - 2.$$

Необходимо вывести слабую постановку задачи. Для аппроксимации нужно использовать квадратичные элементы второго порядка. Вывести локальную матрицу жесткости при условии, что три узла квадратичного элемента располагаются на его краях и по центру. Для интегрирования вектора правой части используйте те же функции формы, что и при аппроксимации решения. Заполнить таблицу по аналогии с табл. 1.

Список литературы к разделу 3

- [1] Андреев В. Б. Лекции по методу конечных элементов: Учебное пособие. М.: МАКС Пресс. 2010. 264 с.
- [2] Марчук Г. И., Агошков В. И. Введение в проекционно-сеточные методы. М.: Наука. 1981. 416 с.
- [3] Zienkiewicz O.C., Taylor R.L., Zhu J.Z. The finite element method: its basis and fundamentals. 7th edition. Oxford: Butterworth-Heinemann. 2013. 756 p.
- [4] Шарый С. П. Курс вычислительных методов. Новосибирск: НГУ, 2021. 669 с. Электронный учебник, доступный на сайте <http://www.ict.nsc.ru/matmod/files/textbooks/SharyNuMeth.pdf>
- [5] Крылов О. В. Метод конечных элементов и его применение в инженерных расчетах. М.: Радио и связь. 2002. 104 с.

- [6] Reddy J. N. An introduction to the finite element method. 3rd Edition. New York: McGraw-Hill. 2005. 420 p.