

Современные методы вычислительной математики

Лектор — д.ф.-м.н., профессор Голушко Сергей Кузьмич

Лабораторная работа № 2. Методы решения бигармонических уравнений.

Содержание

1	Постановка краевой задачи для уравнения четвертого порядка	1
2	Описание МКНК	1
3	Способ 1. Метод итераций по подобластям решения глобальной СЛАУ	6
4	Способ 2. Решение глобальной СЛАУ прямым методом	7
5	Задания	9
6	Пример	13
7	Задание повышенной сложности	16
	Список литературы	17

Метод коллокации и наименьших квадратов

1 Постановка краевой задачи для уравнения четвертого порядка

Рассмотрим краевую задачу Дирихле для уравнения четвертого порядка на отрезке $[0, l]$

$$\frac{d^4 w(x)}{dx^4} = f(x), \quad (1)$$

$$w(0) = g_1(0), \quad (2)$$

$$w(l) = g_1(l), \quad (3)$$

$$w_x(0) = g_2(0), \quad (4)$$

$$w_x(l) = g_2(l), \quad (5)$$

где $w(x)$ — искомая функция, $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — заданные функции.

Уравнение (1) называется бигармоническим и описывает изгиб балок. В двумерном случае краевые задачи для уравнений бигармонического типа встречаются в различных разделах МСС: гидродинамике при малых числах Рейнольдса, линейной теории упругости при описании функции напряжений Эри, теории тонких пластин. В последнем случае бигармоническое уравнение также называют уравнением имени Софи-Жермен – Лагранжа.

Несмотря на то, что бигармоническое уравнение является линейным, многие вычислители сталкиваются с серьезными трудностями при его численном решении ввиду наличия производных четвертого порядка (плохо обусловленная задача). Одним из перспективных численных методов его решения — является МКНК, с помощью которого удалось получить результаты мирового уровня при решении различных краевых задач для двумерного бигармонического уравнения в нерегулярных областях [1]. Далее приведем его описание в одномерном случае.

2 Описание МКНК

Отрезок $[0, l]$ разбивается на K одинаковых отрезков (ячеек). В каждой ячейке вводится локальная система координат $y = \frac{x - x_c}{h}$,

где x_c — центр ячейки, $2h$ — ее длина, $y \in [-1, 1]$. Положим далее $v(y) = w(x(y))$. Задача (1)–(5) после замены в локальных переменных примет следующий вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^4} \frac{d^4 v}{dy^4} &= f(x(y)), \\ v(-1) &= g_1(0), \\ v(1) &= g_1(l), \\ \frac{1}{h} v_y(-1) &= g_2(0), \\ \frac{1}{h} v_y(1) &= g_2(l). \end{aligned} \tag{6}$$

В каждой j -ой ячейке сетки приближенное решение v_{hj} задачи (6) ищем в виде линейной комбинации с неопределенными коэффициентами базисных элементов пространства полиномов некоторой степени относительно одной переменной. Здесь в качестве базисных элементов рассматриваются ортогональные полиномы Чебышева и мономы. В случае применения полиномов Чебышева представление приближенного решения имеет вид

$$v_{hj}(y) = \sum_{i=0}^N c_{i,j} \phi_i(y), \quad y \in [-1, 1],$$

где $\phi_0(y) = 1$, $\phi_1(y) = y$, $\phi_{n+1}(y) = 2y\phi_n(y) - \phi_{n-1}(y)$.

Если в качестве базисных элементов взяты мономы, то приближенное решение имеет вид

$$v_{hj}(y) = \sum_{i=0}^N c_{i,j} y^i.$$

В МКНК для определения неизвестных $N + 1$ коэффициентов $c_{i,j}$ в каждой ячейке выписывается переопределенная «локальная» СЛАУ, состоящая из уравнений коллокации, условий согласования в точках, принадлежащих двум соседним ячейкам, и краевых условий в точках $x = 0, x = l$, если ячейка является

граничной. Совокупность всех «локальных» СЛАУ — глобальная СЛАУ, определяющая глобальное решение задачи.

Уравнения коллокации в каждой j -ой ячейке, $j = 1, \dots, K$, выписываются в $N + 1$ точках коллокации и имеют вид

$$p_c \frac{1}{h^4} \frac{d^4 v_{hj}(y_c)}{dy^4} = p_c f(x(y_c)), \quad (7)$$

где (y_c) — точки коллокации в локальной системе координат, $c = 1, \dots, N + 1$, p_c — положительный весовой множитель уравнения коллокации.

В каждой j -ой ячейке, $j = 1, \dots, K$, в качестве условия согласования решения в общих точках (в точках согласования в локальных системах координат каждой из двух согласуемых ячейках) между соседними ячейками требуется непрерывность линейной комбинации с весами значений искомого решения и его производных

$$p_{m_0} v_{hj} + \frac{p_{m_1}}{h} \frac{dv_{hj}}{dn_j} = p_{m_0} \hat{v}_h + \frac{p_{m_1}}{h} \frac{d\hat{v}_h}{dn_j}, \quad (8)$$

$$\frac{p_{m_2}}{h^2} \frac{d^2 v_{hj}}{dn_j^2} + \frac{p_{m_3}}{h^3} \frac{d^3 v_{hj}}{dn_j^3} = \frac{p_{m_2}}{h^2} \frac{d^2 \hat{v}_h}{dn_j^2} + \frac{p_{m_3}}{h^3} \frac{d^3 \hat{v}_h}{dn_j^3}, \quad (9)$$

где v_{hj} и \hat{v}_h — пределы приближенного решения задачи при стремлении изнутри и извне к границе j -й ячейки соответственно, p_{m_0} , p_{m_1} , p_{m_2} , p_{m_3} — положительные весовые множители условий согласования.

Если при записи (8) и (9) для j -й ячейки точка согласования имеет локальную координату $y = 1$, то в правой части (8) и (9) берется уже значение $y = -1$, так как для соседней правой ячейки в ее локальной системе координат значение y изменяется. Аналогичное правило со сменой знака для согласования j -й ячейки с левым соседом.

Здесь

$$\begin{aligned}\frac{dv_{hj}}{dn_j} &= \pm \frac{dv_{hj}}{dy} \text{ в точке } y = \pm 1, \\ \frac{d^2v_{hj}}{dn_j^2} &= \frac{d^2v_{hj}}{dy^2} \text{ в точке } y = \pm 1, \\ \frac{d^3v_{hj}}{dn_j^3} &= \pm \frac{d^3v_{hj}}{dy^3} \text{ в точке } y = \pm 1.\end{aligned}$$

В каждой точке согласования в j -й ячейке при записи (8) и (9) знак перед $\frac{d\hat{v}_h}{dy}$, $\frac{d^2\hat{v}_h}{dy^2}$ и $\frac{d^3\hat{v}_h}{dy^3}$ после перехода от $\frac{d\hat{v}_h}{dn_j}$, $\frac{d^2\hat{v}_h}{dn_j^2}$ и $\frac{d^3\hat{v}_h}{dn_j^3}$ полностью определяется и совпадает с соответствующим знаком (\pm) перед соответствующей производной для $\frac{dv_{hj}}{dy}$, $\frac{d^2v_{hj}}{dy^2}$ и $\frac{d^3v_{hj}}{dy^3}$.

Отметим, что в двумерном и трехмерном случаях \vec{n}_j — является внешней единичной нормалью к границе j -ой ячейки, и, таким образом, в условиях согласования рассматривается производная по нормали.

Итак, выпишем условия согласования для j -й ячейки, которая имеет две соседние ячейки, т.е. $j = 2, \dots, K - 1$:

для согласования с правым $(j + 1)$ -м соседним

$$p_{m_0} v_{hj}(1) + \frac{p_{m_1}}{h} \frac{dv_{hj}(1)}{dy} = p_{m_0} v_{h(j+1)}(-1) + \frac{p_{m_1}}{h} \frac{dv_{h(j+1)}(-1)}{dy}, \quad (10)$$

$$\frac{p_{m_2}}{h^2} \frac{d^2v_{hj}(1)}{dy^2} + \frac{p_{m_3}}{h^3} \frac{d^3v_{hj}(1)}{dy^3} = \frac{p_{m_2}}{h^2} \frac{d^2v_{h(j+1)}(-1)}{dy^2} + \frac{p_{m_3}}{h^3} \frac{d^3v_{h(j+1)}(-1)}{dy^3}, \quad (11)$$

для согласования с левым $(j - 1)$ -м соседом

$$p_{m_0} v_{hj}(-1) - \frac{p_{m_1}}{h} \frac{dv_{hj}(-1)}{dy} = p_{m_0} v_{h(j-1)}(1) - \frac{p_{m_1}}{h} \frac{dv_{h(j-1)}(1)}{dy}, \quad (12)$$

$$\frac{p_{m_2}}{h^2} \frac{d^2v_{hj}(-1)}{dy^2} - \frac{p_{m_3}}{h^3} \frac{d^3v_{hj}(-1)}{dy^3} = \frac{p_{m_2}}{h^2} \frac{d^2v_{h(j-1)}(1)}{dy^2} - \frac{p_{m_3}}{h^3} \frac{d^3v_{h(j-1)}(1)}{dy^3}. \quad (13)$$

Для ячейки с номером $j = 1$ выписываются условия согласования (10) и (11) только с правым соседом, а для ячейки с номером $j = 0$ — условия согласования (12) и (13) только с левым соседом.

В точках $x = 0$ и $x = l$ выписываются граничные условия, т.е. в концах граничных ячеек

$$\begin{aligned} p_{b_0} v_{h1}(-1) &= p_{b_0} g_1(0), \\ p_{b_0} v_{hK}(1) &= p_{b_0} g_1(l), \\ p_{b_1} \frac{1}{h} \frac{dv_{h1}}{dy} \Big|_{y=-1} &= p_{b_1} g_2(0), \\ p_{b_1} \frac{1}{h} \frac{dv_{hK}}{dy} \Big|_{y=1} &= p_{b_1} g_2(l), \end{aligned} \quad (14)$$

p_{b_0}, p_{b_1} — положительные весовые множители краевых условий Дирихле.

Объединяя уравнения коллокации (7), условия согласования (8), (9) и краевые условия (14) (в случае граничных ячеек), относительно неизвестных коэффициентов $c_{i,j}$ в каждой j -ой ячейке получим переопределенную локальную СЛАУ вида

$$Ac = b, \quad (15)$$

где A — прямоугольная вещественная матрица, c, b векторы неизвестных и правых частей соответственно. В каждой ячейке выписывается $N + 5$ уравнений относительно $N + 1$ неизвестного коэффициента

- **внутренние ячейки ($j = 2, \dots, K - 1$):** $N + 1$ уравнений коллокации, 4 уравнения согласования (по 2 на каждом крае);
- **левая граничная ячейка ($j = 1$):** $N + 1$ уравнений коллокации, 2 уравнения согласования на правом крае, 2 краевых условия на левом крае;
- **правая граничная ячейка ($j = K$):** $N + 1$ уравнений коллокации, 2 уравнения согласования на левой крае, 2 краевых условия на правом крае.

Рассмотрим два разных способа нахождения приближенного решения.

3 Способ 1. Метод итераций по подобластям решения глобальной СЛАУ

Здесь для нахождения приближенного решения задачи используется метод итераций по подобластям, в котором каждая ячейка сетки является подобластью. Одна «глобальная итерация» состоит из последовательного решения локальных СЛАУ (15) во всех ячейках области (см. рис. 1). При этом в правой части уравнений (8) и (9) в качестве \hat{v}_h берутся либо значения решения на текущей итерации, если они уже сосчитаны, либо их значения на предыдущей итерации. Решение системы (15) на каждой итерации находится из условия минимума функционала $\Phi(x) = \|Ax - b\|_2^2$ по коэффициентам $c_{i,j}$. При построении решения в каждой ячейке делается QR -декомпозиция матрицы A .

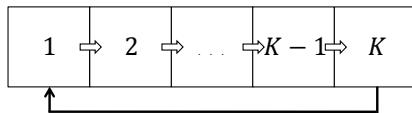


Рис. 1. Схема прохождения по подобластям в 1D

Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не выполнится условие

$$\max_{ij} |c_{i,j}^{n+1} - c_{i,j}^n| < \epsilon, \quad (16)$$

где $c_{i,j}^n$ — коэффициент полинома, аппроксимирующего решение в ячейке с номером j на n -й итерации, $j = 1, \dots, N$, величина ϵ — наперед заданная малая константа, называемая псевдопогрешностью решения. Отметим, что в этом случае необходимо задать начальное приближение коэффициентов $c_{i,j}^0$.

В рассматриваемой линейной задаче матрицы A локальных внутренних СЛАУ ($2, \dots, K-1$) таких ячеек совпадают друг с другом и не зависят от номера итерации. От последней зависят

только правые части уравнений, полученных из условий согласования. По этой причине целесообразно на первой итерации запомнить верхнетреугольную матрицу R и ортогональную матрицу Q , с помощью которой приведена к верхнетреугольному виду матрица A . Перед решением локальной СЛАУ на каждой итерации достаточно умножить на Q только ее правую часть и, имея уже запомненную матрицу R , с помощью обратного хода Гаусса найти приближенное решение задачи. Такой способ не уменьшает количества итераций, но позволяет сократить время расчетов.

Помимо описанного здесь многопараметрического предобуславливателя (выбор значений весовых множителей) и свойства локальной системы координат в МКНК [2] существуют и другие современные алгоритмы ускорения итерационного процесса решения СЛАУ и улучшения свойств сходимости, которые эффективно комбинируются с МКНК [3, 4]:

- диагональный предобуславливатель;
- распараллеливание с помощью OpenMP со способом обхода подобластей, основанным на красно-черном упорядочивании;
- ускорения сходимости итерационного процесса, основанного на методах подпространств Крылова;
- операции продолжения вдоль восходящей ветви V-цикла на многосеточном комплексе в методе Федоренко.

Также можно применять экстраполяцию по Ричардсону [5] для повышения тончести расчетов и увеличения порядка сходимости.

4 Способ 2. Решение глобальной СЛАУ прямым методом

Глобальная СЛАУ (рис. 2), полученная объединением уравнений во всех ячейках расчетной области, имеет вид

$$\tilde{A}\tilde{x} = \tilde{b},$$

где \tilde{A} — прямоугольная блочно-трехдиагональная матрица размера $K(N+5) \times K(N+1)$, вектор неизвестных $\tilde{x} = (c_{0,1}, c_{1,1}, \dots, c_{N,1}, c_{0,2}, c_{1,2}, \dots, c_{N,2}, \dots, c_{0,K}, c_{1,K}, \dots, c_{N,K})$ размера $K(N+1)$, \tilde{b} — вектор правой части размера $K(N+5)$.

$$\begin{array}{c|c|c}
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
 \begin{array}{c} A \\ x \end{array} &
 \begin{array}{c} f \\ 0 \\ g \\ f \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ g \end{array} \\
 \hline
 \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} &
 \begin{array}{c} A \\ x \end{array} &
 \begin{array}{c} f \\ 0 \\ g \\ f \\ 0 \\ 0 \\ f \\ 0 \\ g \end{array} \\
 \end{array}$$

Рис. 2. Пример глобальной матрицы при $K = 3$. Здесь красным цветом обозначены блоки, в которых выписаны уравнения коллокаций, темно- и светло-зеленым — соответственно уравнения согласования с коэффициентами в текущей и соседней ячейках, синим — краевые условия (g — вектор правой части краевых условий, которые задаются функциями g_1 и g_2). На незакрашенных частях матрицы стоят нули

Пусть в каждой ячейке выписываются сначала **уравнения коллокации**, затем **условия согласования** (сначала выписанные в точке, принадлежащей j -й и $(j-1)$ -й ячейкам, а затем в точке, принадлежащей j -й и $(j+1)$ -й ячейкам), а затем **краевые условия** в случае граничной ячейки ($j = 1, j = K$).

Рассмотрим структуру матрицы \tilde{A} с $(j-1)(N+5)+1$ по $j(N+5)$ строками, где $j = 1, \dots, K$. В столбцах с номерами $(j-1)(N+1) + 1$ по $j(N+1)$ должна быть выписана локальная матрица, которая соответствует ячейке j внутри вышеуказанных строк.

Для составления глобальной матрицы \tilde{A} необходимо в условиях согласования правые части перенести влево с противоположным знаком и расположить значения, стоящие перед неизвестными коэффициенты $(j - 1)$ -й ($c_{0,j-1}, c_{1,j-1}, \dots, c_{N,j-1}$) и $(j + 1)$ -й ($c_{0,j+1}, c_{1,j+1}, \dots, c_{N,j+1}$) ячеек в соответствующих местах внутри этих же строк. Значения (с противоположным знаком) перед коэффициентами ($c_{0,j-1}, c_{1,j-1}, \dots, c_{N,j-1}$) будут располагаться в строчках с номерами $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 1$ по $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 2$ и в столбцах с номерами $(j - 2)(N + 1) + 1$ по $(j - 1)(N + 1)$, а значения (с противоположным знаком) перед коэффициентами ($c_{0,j+1}, c_{1,j+1}, \dots, c_{N,j+1}$) будут располагаться в строчках с номерами $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 3$ по $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 4$ и в столбцах с номерами $j(N + 1) + 1$ по $(j + 1)(N + 1)$.

Тогда

- в столбце правой части \tilde{b} с $(j - 1)(N + 5) + 1$ по $(j - 1)(N + 5) + (N + 1)$ номер будут стоят значения правых частей **уравнений коллокации**, выписанных в соответствующих точках коллокации;
- в столбце правой части \tilde{b} с $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 1$ по $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 4$ номер для $j = 2, \dots, K - 1$ и с $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 1$ по $(j - 1)(N + 5) + (N + 1) + 2$ номер для $j = 1, j = K$ будут стоят нули, так как был совершен перенес правой части влево в **условиях согласования**;
- в столбце правой части \tilde{b} с $N + 4$ по $N + 5$ ($j = 1$) и с $K(N + 5) - 1$ по $K(N + 5)$ ($j = K$) номер будут выписаны значения правых частей **краевых условий**.

Полученную переопределенную глобальную СЛАУ необходимо решить прямым методом отражений Хаусхольдера или вращениями Гивенса.

5 Задания

Каждому выполняющему задание необходимо решить краевую задачу для бигармонического уравнения при следующих параметрах задачи: $l = 1, g_1(0) = g_1(l) = g_2(0) = g_2(l) = 0, p_c = h^4, p_{m_0} =$

$1, p_{m_1} = h, p_{m_2} = h^2, p_{m_3} = h^3, p_{b_0} = 1, p_{b_1} = h$. Тем, кому достанется вариант с методом итераций по подобластям для остановки итерационного процесса, необходимо взять $\epsilon = 10^{-12}$. В качестве начального приближения положить все коэффициенты $c_{i,j}^0 = 0.4$ для первой итерации.

Тем, кому достанутся полиномы Чебышева, необходимо расположить точки коллокации в корнях полинома Чебышева $N+1$ степени, так как такой полином на отрезке $[-1, 1]$ имеет как раз $N+1$ корней, которые и необходимо взять в качестве точек коллокации (уже в локальной системе координат). Обратите внимание, что в этом случае корни полиномов Чебышева сгущаются к концам отрезка, но не совпадают с ± 1 (см. рис. 3). Магистрантам, которые будут работать с мономами, необходимо равномерно внутри (не включая концы отрезка) расположить точки коллокации в каждой ячейке (см. рис. 4).

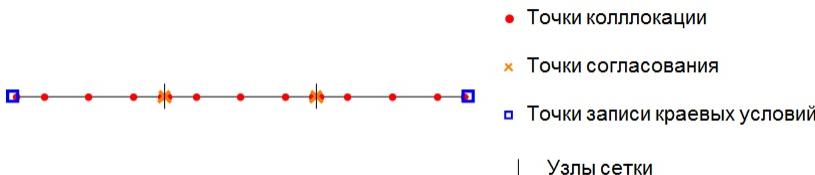


Рис. 3. Схема расположения точек коллокации, согласования и точек записи краевых условий в случае применения полиномов Чебышева при $N = 4$

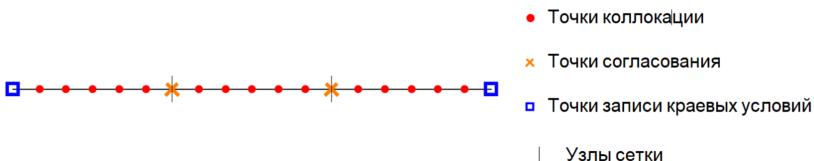


Рис. 4. Схема расположения точек коллокации, согласования и точек записи краевых условий в случае применения мономов при $N = 4$

Провести расчеты на последовательности измельчающихся се-

ток $K = 5, 10, 20, 40, 80, 160$. В качестве точного решения задачи рассмотреть $w_{ex}(x) = x^2(1-x)^2e^x$. Оно также необходимо, чтобы вычислить правую часть уравнения коллокации (7). Привести следующие значения в таблицах

- Относительную погрешность приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E_r\|_\infty = \frac{\max_{j=1,\dots,K} (\max_{m=1,\dots,Q_j} |w_{ex}(x_m) - v_{hj}(y(x_m))|)}{\max_{j=1,\dots,K} (\max_{m=1,\dots,Q_j} |w_{ex}(x_m)|)}, \quad (17)$$

и абсолютную погрешность приближенного решения в бесконечной норме

$$\|E_a\|_\infty = \max_{j=1,\dots,K} (\max_{m=1,\dots,Q_j} |w_{ex}(x_m) - v_{hj}(y(x_m))|), \quad (18)$$

где Q_j — количество равномерно распределенных контрольных точек (x_m) , взятых в j -ой ячейке в глобальной системе координат для подсчета в них погрешности, w_{ex} — точное решение задачи, v_{hj} — приближенное решение в j -ой ячейке. Взять $Q_j = 100$ в каждой ячейке.

- Порядок сходимости погрешности численного решения, который определяется как $R = \log_2 \frac{E_{K/2}}{E_K}$, где E_K — значение погрешности на подробной сетке из K ячеек, $E_{K/2}$ — значение погрешности на грубой сетке из $K/2$ ячеек.

- Время решения глобальной СЛАУ t_{sol} с указанием компьютера;

Тем, кому достанется вариант с методом итераций по подобластям

- Количество итераций N_{iter} , которое понадобилось для остановки итерационного процесса.
- $\mu(A_b)$ — число обусловленности матрицы СЛАУ в граничной левой ячейке.

- $\mu(A_i)$ — число обусловленности матрицы СЛАУ во внутренней ячейке.
- Тем, кому достанется вариант с решением глобальной СЛАУ прямым методом*
- $\mu(\tilde{A})$ — число обусловленности глобальной матрицы СЛАУ.

Также необходимо нарисовать график точного и приближенных решений. Отметим, что графика помогает локализовать ошибки в вычислительных программах.

Распределение вариантов происходит по следующему принципу. Студентам, которые в первом задании использовали полиномы Чебышева или Лежандра, в этом задании в качестве базисных элементов необходимо взять мономы. Те, кто использовали мономы, в этом задании в качестве базисных элементов берут полиномы Чебышева. Также необходимо реализовать другой алгоритм QR-разложения матрицы по сравнению с первым заданием. Если Ваша фамилия в списке группы стоит на нечетном месте, то необходимо реализовать метод итераций по подобластям, если на четном — решение глобальной СЛАУ прямым методом. Кроме того, если ваша фамилия в списке группы стоит на нечетном месте, то необходимо взять $N = 4$ (степень полиномиального решения), если на четном, то $N = 5$.

Рекомендация. Иногда проще написать программу для произвольного K , замечая некоторую зависимость в аппроксимации задачи полиномами. Здесь важно учесть рекуррентное соотношение для полиномов Чебышева, а так же тот факт, что полиномы относительно легко дифференцируются.

При оформлении вывода ответьте на следующие вопросы в зависимости от способа решения СЛАУ:

- 1) Оцените арифметическую сложность решения глобальной СЛАУ? (способ 1 и 2)
- 2) Почему обусловленность внутренних СЛАУ на каждой сетке одинакова? (способ 1)

- 3) Почему недостаточно один раз решить все локальные СЛАУ, не формируя глобальную систему или не организуя итерационный процесс? (способ 1 и 2)
- 4) Как можно учесть разреженность матрицы глобальной СЛАУ при ее решении? (способ 2)

Прислать отчет проделанной работы в виде pdf- или текстового файла в google класс. Указать версию языка программирования. Защита задания происходит в устной форме преподавателю.

Распределение вариантов происходит по следующему принципу. Магистрантам, которые в первом задании использовали полиномы Чебышева или Лежандра, в этом задании в качестве базисных элементов необходимо взять мономы. Те, кто использовали мономы, в этом задании в качестве базисных элементов берут полиномы Чебышева. Если ваша фамилия в списке группы стоит на нечетном месте, то необходимо реализовать метод итераций по подобластям, если на четном — решение глобальной СЛАУ прямым методом. Кроме того, если ваша фамилия в списке группы стоит на нечетном месте, то необходимо взять $N = 4$ (степень полиномиального решения), если на четном, то $N = 5$.

6 Пример

В качестве примера работы программы рассмотрим решение краевой задачи Дирихле для бигармонического уравнения (1)–(5) с тестовым решением $w_{ex} = e^x$. В табл. 1 и табл. 2 приведены результаты численных экспериментов при $N = 5$ (моменты). На рис. 5 изображены графики точного и приближенного решения при различных K . Расчеты проведены на компьютере Intel Core i5-8265U CPU 1.6 GHz, 4 Cores, DIMM DDR4-2400 1200 MHz 8 Gb.

Ниже приведен пример глобальной СЛАУ на сетке из трех ячеек $K = 3$ в случае применения моментов при $N = 5$ для этого примера. Элементы матрицы и правой части выписаны с округлением. Отметим, что в реализованной программе уравнения записываются в точках слева направо. Здесь произведена перестановка в соответствии с описанием структуры матрицы из подраздела

Таблица 1. Пример таблицы с результатами численных экспериментов в случае реализации метода итераций по подобластям

K	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_r\ _\infty$	R	N_{iter}	t_{sol}	$\mu(A_b)$	$\mu(A_i)$
5	2.08e-6	—	7.67e-7	—	84	0.005	1.77e+2	2.89e+2
10	5.21e-7	2.00	1.92e-7	2.00	278	0.012	1.77e+2	2.89e+2
20	1.30e-7	2.00	4.79e-8	2.00	1060	0.069	1.77e+2	2.89e+2
40	3.25e-8	2.00	1.20e-8	2.00	4052	0.408	1.77e+2	2.89e+2
80	7.93e-9	2.03	2.92e-9	2.03	16232	3.214	1.77e+2	2.89e+2
160	1.24e-9	2.68	4.56e-10	2.68	64950	25.837	1.77e+2	2.89e+2

Таблица 2. Пример таблицы с результатами численных экспериментов в случае решения глобальной СЛАУ прямым методом

K	$\ E_a\ _\infty$	R	$\ E_r\ _\infty$	R	t_{sol}	$\mu(\tilde{A})$
5	2.08e-6	—	7.67e-7	—	0.006	2.68e+3
10	5.21e-7	2.00	1.92e-7	2.00	0.002	3.92e+4
20	1.30e-7	2.00	4.79e-8	2.00	0.046	6.19e+5
40	3.25e-8	2.00	1.20e-8	2.00	0.116	9.87e+6
80	8.10e-9	2.01	2.98e-9	2.01	0.406	1.58e+8
160	1.43e-9	2.50	5.27e-10	2.50	1.649	2.59e+9

4 и рис. 2, которая, естественно, не влияет на результат. После решения данной СЛАУ получились следующие значения коэффициентов (с округлением)

в 1-й ячейке:	во 2-й ячейке:	в 3-й ячейке:
1.181358816008	1.648715589676	2.300974199358
0.196890633168	0.274786689730	0.383498967470
0.016407054776	0.022899856344	0.031957143876
0.000912075864	0.001272213240	0.001774825436
0.000038106699	0.000053182182	0.000074221714
0.000001268451	0.000001770265	0.000002470604

Значение погрешностей получились $\|E_a\|_\infty = 5.69 \cdot 10^{-6}$ и $\|E_r\|_\infty = 2.09 \cdot 10^{-6}$.

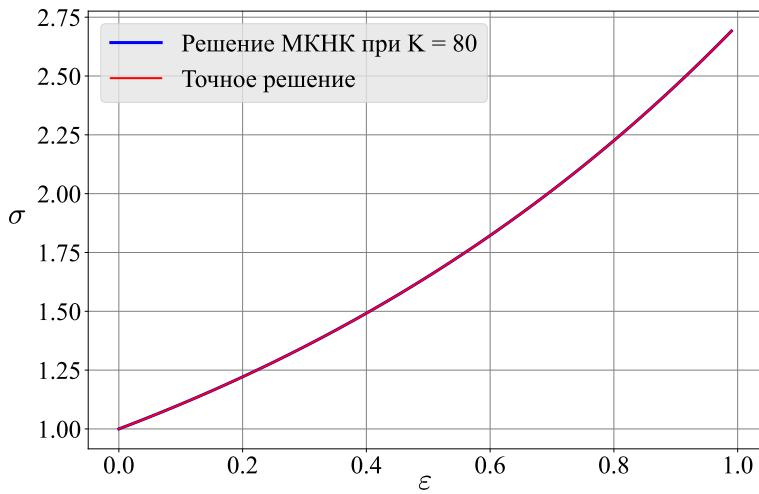


Рис. 5. Приближенное решение, полученное МКНК при $K = 80$

7 Задание повышенной сложности

Для тех, кто реализовывал метод итераций по подобластям, необходимо запрограммировать ускорение по Крылову для МКНК. Исследовать зависимость количества итераций от количества невязок в этом методе. С помощью него провести расчеты, заполнить таблицу для случая использования метода итераций по подобластям для решения глобальной СЛАУ и нарисовать соответствующие графики. Оценить вклад этого алгоритма.

Для тех, кто решал глобальную СЛАУ прямым методом, необходимо реализовать создание матрицы в разреженном формате и ее решение методом, учитывающим разреженность. В последнем случае можно использовать библиотечные функции. Провести верификацию алгоритма и сравнить два подхода с точки зрения скорости решения задачи.

Алгоритм ускорения по Крылову.

Рассмотрим алгоритм ускорения по Крылову на примере итерационного процесса

$$\vec{x}_{n+1} = T\vec{x}_n + \vec{f}, \quad n = 0, 1, \dots, \quad (19)$$

решения СЛАУ $A\vec{x} = \vec{b}$, где A , T — квадратные вещественные матрицы, \vec{b} , \vec{f} — векторы правых частей.

Пусть найден набор векторов $\{\vec{x}_{n-k}, \dots, \vec{x}_n\}$. К текущему приближению \vec{x}_{n-1} добавляется поправка \vec{y}

$$\vec{x}_{n-1}^* = \vec{x}_{n-1} + \vec{y} = \vec{x}_{n-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i \vec{r}_{n-k+i}, \quad (20)$$

где $\vec{r}_i = T\vec{x}_i + \vec{f} - \vec{x}_i = \vec{x}_{i+1} - \vec{x}_i$ ($i = 0, 1, \dots$) — векторы невязок, $(k-1)$ — число невязок, используемых для одной поправки. Можно показать, что $T\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1}$. Вектор \vec{y} ищется здесь в подпространстве Крылова

$$\mathcal{K}_{k-1}(\vec{r}_{n-k}, T) = \text{span}\{\vec{r}_{n-k}, T\vec{r}_{n-k}, \dots, T^{k-2}\vec{r}_{n-k}\}, \quad (21)$$

где $\text{span}\{\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{k-2}\}$ — линейная оболочка векторов $\vec{v}_0, \dots, \vec{v}_{k-2}$. Коэффициенты $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-2}$ находятся из условия минимизации

функционала невязки

$$\Phi(\alpha_0, \dots, \alpha_{k-2}) = \|\vec{x}_{n-1}^* - T\vec{x}_{n-1}^* - \vec{f}\|_2^2. \quad (22)$$

Задача о нахождении минимума функционала (22) эквивалентна решению переопределенной СЛАУ

$$\alpha_0 (\vec{r}_{n-k+1} - \vec{r}_{n-k}) + \dots + \alpha_{k-2} (\vec{r}_{n-1} - \vec{r}_{n-2}) = -\vec{r}_{n-1} \quad (23)$$

с неизвестными $\alpha_0, \dots, \alpha_{k-2}$ методом наименьших квадратов. Таким образом, в качестве нового приближения можно взять вектор

$$\vec{x}_n^* = T(\vec{x}_{n-1} + \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i \vec{r}_{n-k+i}) + f = \vec{x}_n + \sum_{i=0}^{k-2} \alpha_i \vec{r}_{n-k+i+1}.$$

Список литературы

- [1] Беляев В. А., Брындин Л. С., Голушко С. К., Семисалов Б. В., Шапеев В. П. Н- и hp -варианты метода коллокаций и наименьших квадратов для решения краевых задач для бигармонического уравнения в нерегулярных областях и их приложения // Журнал вычислительной математики и математической физики. 2022. Т. 62, № 4. С. 531–552.
- [2] Голушко С. К., Идимешев С. В., Шапеев В. П. Метод коллокаций и наименьших невязок в приложении к задачам механики изотропных пластин // Вычислительные технологии. 2013. Т. 18, № 6. С. 31–43.
- [3] Vorozhtsov E. V., Shapeev V. P. On the efficiency of combining different methods for acceleration of iterations at the solution of PDEs by the method of collocations and least residuals // Applied Mathematics and Computation. 2019. V. 363, Art. 124644 (19 p.).

- [4] Беляев В. А. Об эффективной реализации и возможностях метода коллокации и наименьших квадратов решения эллиптических уравнений второго порядка // Вычислительные методы и программирование. 2021. Т. 22, № 3. С. 211–229.
- [5] https://en.wikipedia.org/wiki/Richardson_extrapolation