

Отчёт для задания № 2.

Выполнил: Смольков Максим Дмитриевич, 25152.

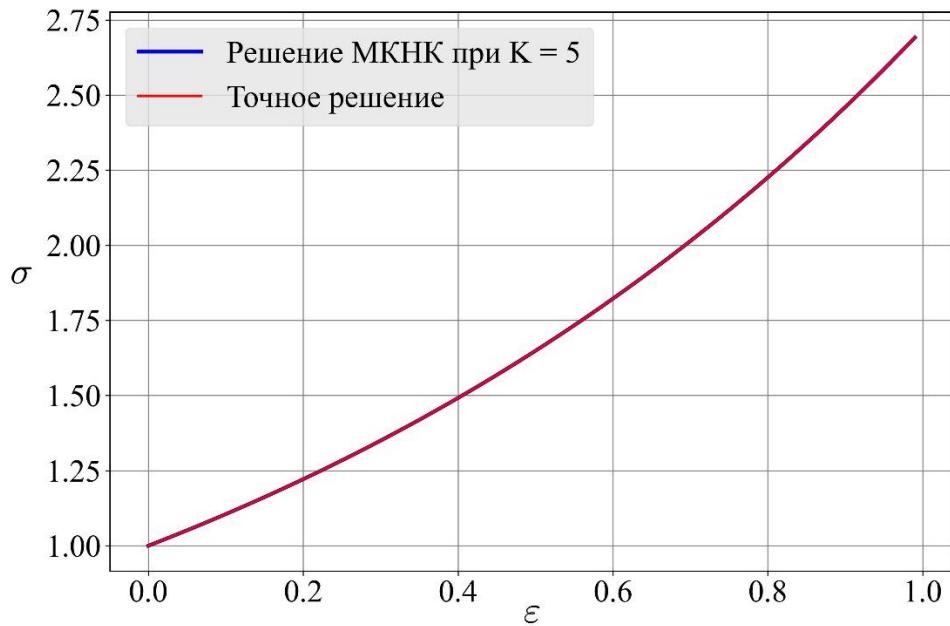
Описание задания: для приближения в ячейке использовались мономы 4 степени, глобальная СЛАУ решалась методом итераций по подобластям. В качестве QR-разложения использовался метод отражений Хаусхолдера. Программа написана на языке Python 3.12.

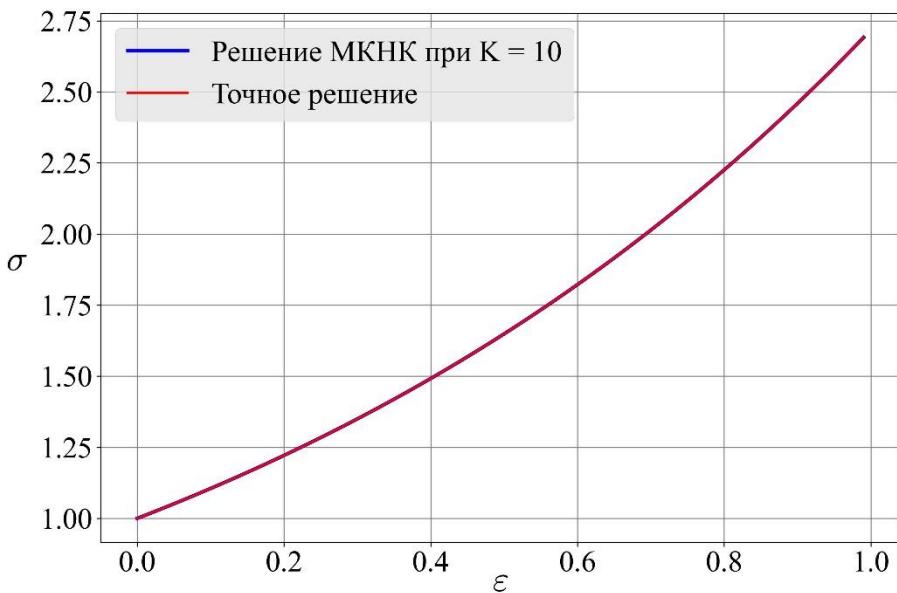
Расчеты проведены на компьютере Intel Core i3-10100 CPU 3.6 GHz, 4 Cores, DIMM DDR4 2666 MHz 16 Gb.

Таблица 1. Результаты численных экспериментов в случае реализации метода итераций по подобластям

Размер сетки	$\ E_a\ _\infty$	Порядок сходимости	$\ E_r\ _\infty$	Порядок сходимости	N_{iter}	$\mu(A_b)$	$\mu(A_i)$	Время расчетов
5	1,26E-05	-	4,63E-06	-	82	121,05	69,77	0,01
10	3,07E-06	2,03	1,13E-06	2,03	278	121,05	69,77	0,02
20	7,61E-07	2,01	2,80E-07	2,01	1070	121,05	69,77	0,13
40	1,90E-07	2,00	6,98E-08	2,00	4299	121,05	69,77	1,07
80	4,74E-08	2,00	1,75E-08	2,00	1721 3	121,05	69,77	8,5

Рисунок 1. Графики приближенного и точного решений





Вывод: Метод показал 2 порядок сходимости. С увеличением размера сетки в 2 раза абсолютная и относительные погрешности уменьшаются на 0.5 – 1 порядок, число итераций увеличивается в 4 раза.

1) Оцените арифметическую сложность решения глобальной СЛАУ?

Для всех N ячеек единожды выполняется QR-разложение локальной матрицы размера $M \times M$, что требует $O(M^3)$ операций на ячейку. Общая сложность этого этапа — $O(N \cdot M^3)$. Выполняется I итераций, где I пропорционально $O(N^2)$. На каждой итерации для всех N ячеек формируется вектор правой части за константное время и решается локальная система (обратный ход после QR) за $O(M^2)$ операций.

Таким образом, общая вычислительная сложность итерационного этапа составляет $O(I \cdot N \cdot M^2) = O(N^2 \cdot N \cdot M^2) = O(N^3 \cdot M^2)$. Считая $M = \text{const}$, получаем $O(N^3)$.

2) Почему обусловленность внутренних СЛАУ на каждой сетке одинакова?

Внутренние локальные СЛАУ во всех ячейках одного типа имеют одну и ту же матрицу $A_{\text{inner}} = \text{inner_cell}()$. Она строится в локальной координате и зависит только от степени полинома, выбора базиса и фиксированного набора точек.

3) Почему недостаточно один раз решить все локальные СЛАУ, не формируя глобальную систему или не организуя итерационный процесс?