

1. 已知数列 a_n 的极限为 a , 证明:

$$\bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{N=1}^{\infty} \bigcap_{n=N}^{\infty} \left(a_n - \frac{1}{k}, a_n + \frac{1}{k} \right) = \{a\}.$$

2. 已知 E 是一可数集, 证明: 对一切 d, n , 总存在 t_0 , 使得

$$\left\{ t_0 + nd : n \in \mathbb{N} \right\} \cap E = \emptyset.$$

3. 设一族函数 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 记 $E = \{x \in \mathbb{R} : \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) > 0\}$, 证明: E 为一 F_σ 集.

4. 已知 G 是开集, E 是零测集, 证明 $\overline{G} = \overline{G \setminus E}$.

5. 已知 $E \subset [0, 1]$, 有 $m^*(E) \geq 0$ 且 $0 < c < m^*(E)$, 证明: 存在 E 的子集 A , 使得 $m^*(A) = c$.