1 PHD

1.1 理论依据

$$H_1 = \Sigma_{XX}^{-1}\Sigma_{XXY}\Sigma_{XX}^{-1}$$
$$span(H_1) \subseteq S_{Y|X}$$

1.2 样本计算流程

1. 将 $X_1, \ldots, X_n$ 标准化为 $Z_1, \ldots, Z_n$

2. 计算 $\hat{\Sigma}_{ZZY}E_n(ZZ^TY), \quad \hat{\Sigma}_{XX}Var_n(X)$

3. 计算 $\hat{\Sigma}_{ZZY}$ 的前 q 个特征向量 $u_1, \ldots, u_n$，则对 $S_{Y|X}$ 中向量的估计为 $v_k = \hat{\Sigma}_{XX}^{-1/2}u_k, k = 1, \ldots, q$

2 SIR

2.1 理论依据

$$spanCov(E(X|Y)) \subseteq S_{Y|X}$$

将区间 $(-\infty, +\infty)$ 划分为 k 个区间 $I_i, i = 1, \ldots, k$, 定义 $\widetilde{Y} = \sum_{i=1}^{k} iI\{Y \in I_i\}$，则有

$$spanCov(E(X|\widetilde{Y})) \subseteq S_{Y|X}$$

2.2 样本计算流程

1. 将 $X_1, \ldots, X_n$ 标准化为 $Z_1, \ldots, Z_n$

2. 将 $[a, b] = [minY_{i i=1}^{n}, maxY_{i i=1}^{n}]$ 划分为 k 个区间，得到 $\widetilde{Y}_i$；由此计算 $\bar{\mu}_i = \frac{1}{\#\{I_i\}}\sum_{Y_j \in I_i} Z_j$

3. 计算协方差矩阵估计量 $\widetilde{M} = \sum_{i=1}^{k} E_n[I(Y \in I_i)]E_n(Z|\widetilde{Y} = i)E_n(Z|\widetilde{Y} = i)^T = \sum_{i=1}^{k} \frac{\#\{I_i\}}{n}\bar{\mu}_i\bar{\mu}_i^T$

4. 计算 $\widetilde{M}$ 的前 q 个特征向量 $u_1, \ldots, u_n$, 则对 $S_{Y|X}$ 中向量的估计为 $v_k = \hat{\Sigma}_X^{-1/2}u_k, k = 1, \ldots, q$

3 SAVE

3.1 理论依据

$$span(E[I_p - Var(X|Y)]^2) \subseteq S_{Y|X}$$

3.2 样本计算流程

1. 将 $X_1,\ldots,X_n$ 标准化为 $Z_1,\ldots,Z_n$
2. 将 $[a,b]=[minY_{i i=1}^{n},maxY_{i i=1}^{n}]$ 划分为 k 个区间，得到 $\widetilde{Y}_i$；由此计算 $\bar{\mu}_i=\frac{1}{\#\{I_i\}}\sum_{Y_j\in I_i}Z_j$
3. 计算条件方差估计量 $\hat{\Sigma}_i=\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{\#I_i}\sum_{Y_j\in I_i}(Z_j-\hat{\mu}_i)(Z_j-\hat{\mu}_i)^T$
4. 计算协方差矩阵估计量

$$\begin{aligned}\widetilde{M}&=\sum_{i=1}^{k}E_n[I(Y\in I_i)][I_{p\times p}-Var(Z|\widetilde{Y}=i)]^2\\&=\sum_{i=1}^{k}\frac{\#\{I_i\}}{n}(I_{p\times p}-\hat{\Sigma}_i)^2\end{aligned}$$

5. 计算 $\widetilde{M}$ 的前 q 个特征向量 $u_1,\ldots,u_n$，则对 $S_{Y|X}$ 中向量的估计为 $v_k=\hat{\Sigma}_X^{-1/2}u_k,k=1,\ldots,q$