Fourier Analysis of Discrete-Time Systems

DTFS를 이해하기 전에 Fourier Series를 복습하고자 한다.

Fourier Series : 주기함수 x(t)에 대하여 Time domain을 Frequency domain에서의 급수로 표현

$x(t) = \sum a_k exp[jwkt/T]$

이는 Discrete 한 상태에서도 동일하다. Discrete한 Fourier Series를 DTFS라 정의하고자 한다.

$x[n] = \sum a_k exp[j\omega_k n]$ ($\omega_k = 2\pi k/N$)

$a_k = 1/N \sum x[n] exp[-j\omega_k n]$

직관적으로 이게 무슨 의미를 하는지 정확히 이해를 해보자.

설명하기에 앞서 $exp[j2\pi k/N]$의 기하학적 의미를 설명하고자 한다. 이 때 k는 0~N-1까지 가진다.

우선 $exp[j2\pi k/N]$는 복소 평면 상 단위 원 위에 존재하고 있고 $2\pi/N$은 단위 원을 N등분 한거라고 생각할 수 있다.

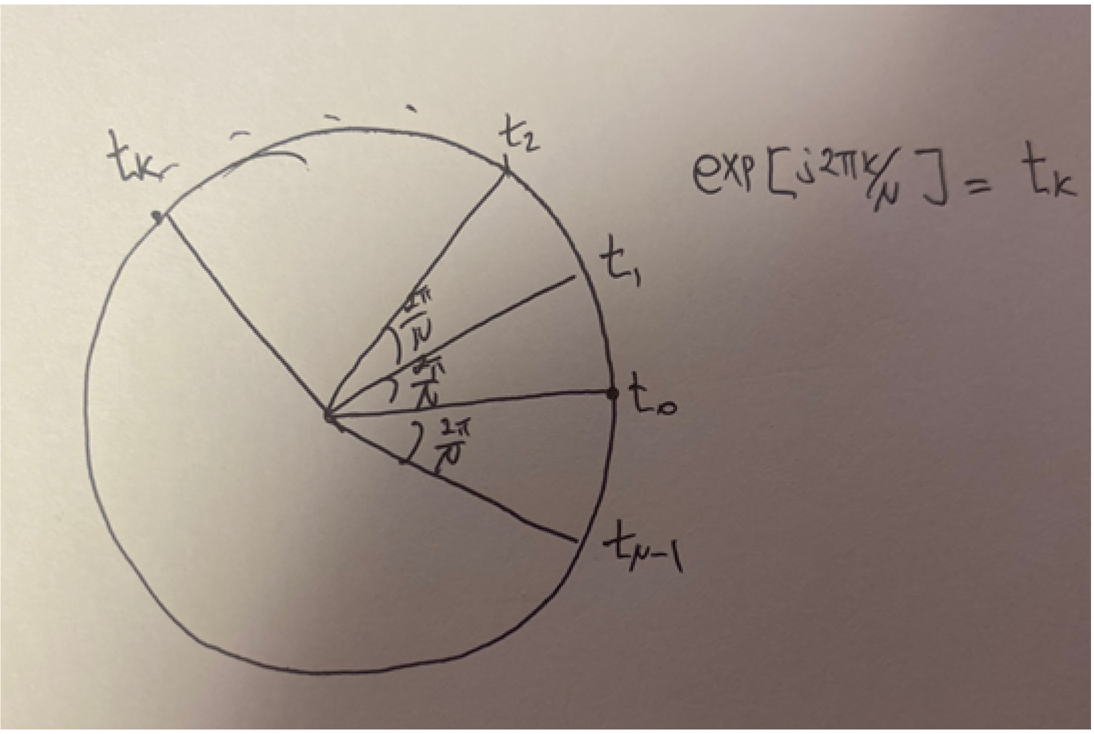
일반화된 상태로 설명을 우선 하도록 하겠다. $rexp[j\theta]$는 반지름이 r이고 각도가 θ인 원 위에 존재한다는 의미이다.

$rexp[j\theta]$의 각을 2배, 3배 씩 늘려보자.

$rexp[j2\theta], rexp[j3\theta]$가 된다. 이는 마찬가지로 반지름이 r이고 각도가 각각 $2\theta, 3\theta$ 위에 존재한다는 것을 확인할 수 있다. 즉 θ를 늘리면 똑같은 원 위에 존재한다는 것이다.

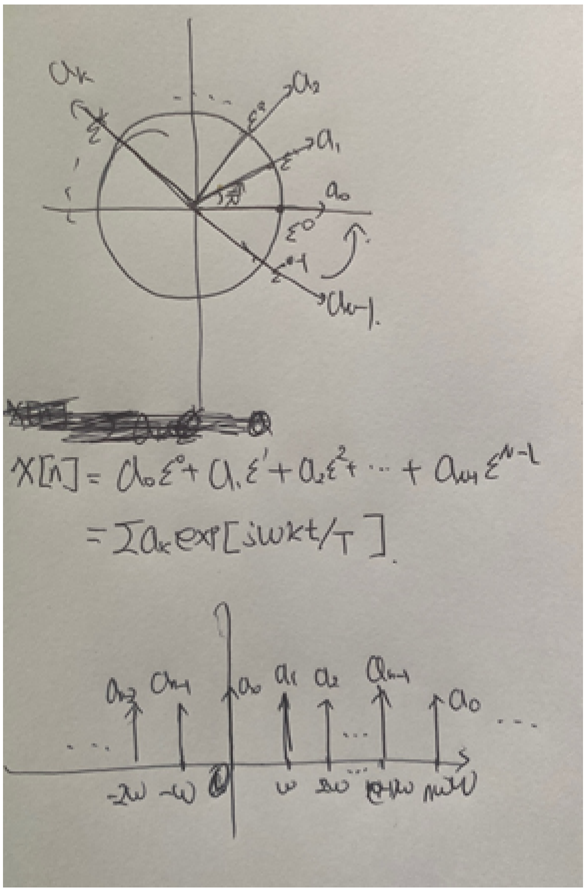
이제 $exp[j2\pi k/N]$가 어떠한 의미를 하는지 확인할 수 있다.

$exp[j2\pi k/N]$는 단위 원을 N등분한 점들 중 (1,0)을 기준으로 k번 이동한 점을 의미한다는 것을 확인할 수 있다.



이를 바탕으로 이제 본론으로 들어간다.

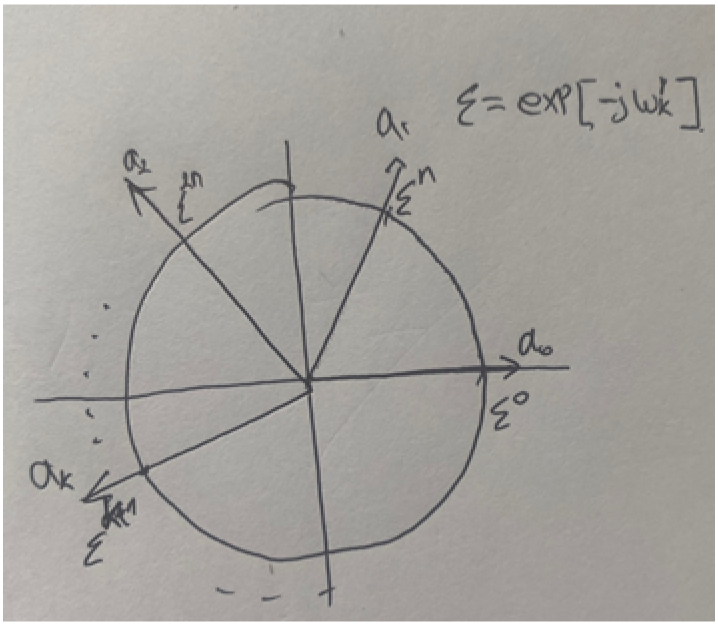
앞에서 말했듯이 $exp[j\omega_k]$는 복소평면상 단위 원 위에 N등분 한 점들 중에서 k번째 점을 의미한다.



그럼 각 $exp[jw_k]$에 대응하는 Magnitude들이 벡터 형태로 표현되는 것을 확인할 수 있다.

$x[n]$은 이 선형 결합을 n배만큼 shifting을 시키는 것을 의미한다. 각속도를 n배 한거라 생각하면 된다.

다음과 같은 그림으로 설명할 수 있다.



k가 N보다 커지게 되면 단위 원을 기준으로 한 바퀴를 다 돌게 되므로 다시 a0로 돌아오는 것을 확인할 수 있다.

이를 통해 주기가 N임을 확인할 수 있다.

수식적으로도 k가 N이상일 때 magnitude는 다음과 같은 성질을 띈다.

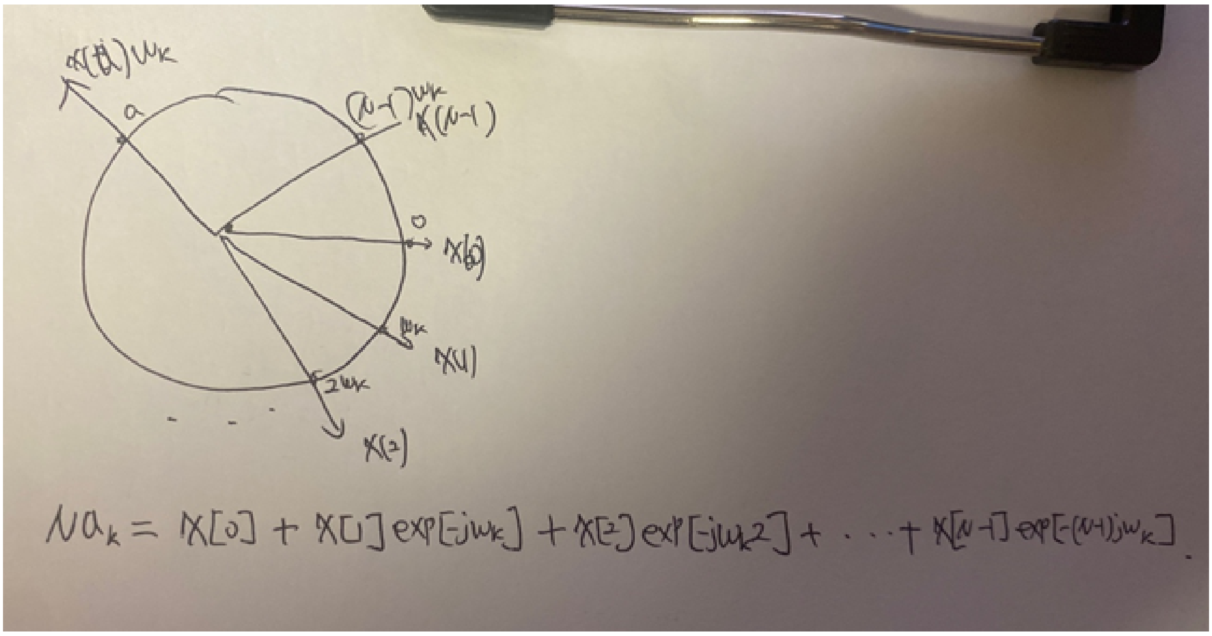
$a_k = a_j$ (j = k +N)

즉 magnitude란 $exp[j2\pi k/N]$에 대한 성분의 크기를 의미하고 이에 해당하는 각을 Phase라고 정의할 수 있다.

3장 Continuous Time Domain에서의 Fourier Series에서 부터 시작된 Magnitude와 Phase의 개념과 유사하다는 것을 확인할 수 있다.

또한 주기성을 지니므로 유한 개의 k에 대해서 더하기만 하면 되므로 급수는 항상 수렴한다.

그럼 역은 어떻게 될지 생각해보고자 한다. 위 사진과는 반대로 x[n]의 성분이 시계 방향으로 움직인다는 것을 확인할 수 있다.



 k(n)의 값에 따라 회전 각이 서로 다르다는 것을 확인할 수 있다. 또한 각각의 주파수 성분들이 모두 discrete하다는 것을 확인할 수 있다.

만약에 N을 무한대로 보내면 어떻게 될까? N이 무한대로 간다면 단위 원의 각을 잘게 쪼개어 이에 대응되는 x[n]이 많이 분포하게 될 것이다.

계속 증가하게 되면 결국은 등분된 각에 대응되는 Coefficient들이 0~2π사이에 무한히 분포하게 될 것이다. 이는 결국 0~2π까지 선형 결합이 Continuous하게 분포한다고 생각할 수 있다.

이러한 관점으로 형성된 것이 DTFT(Discrete Time Fourier Transform)이다.

이제는 k에 값을 0부터 n-1까지 넣어보도록 하겠다.

$$N a_k = x[0] + x[1]\exp[-j\omega_k] + x[2]\exp[-j\omega_k 2] + \cdots + x[N-1]\exp[-(N-1)j\omega_k]$$

$$X_0 = N a_0 = x[0] + x[1] + x[2] + \cdots + x[N-1]$$

$$X_1 = N a_1 = x[0] + x[1]\exp\left[-j\frac{2\pi}{N}\right] + x[2]\exp\left[-j\frac{4\pi}{N}\right] + \cdots + x[N-1]\exp\left[-j\frac{2(N-1)\pi}{N}\right]$$

$$X_2 = N a_2 = x[0] + x[1]\exp\left[-j\frac{4\pi}{N}\right] + x[2]\exp\left[-j\frac{8\pi}{N}\right] + \cdots + x[N-1]\exp\left[-j\frac{4(N-1)\pi}{N}\right]$$

$$\vdots$$

$$X_{N-1} = N a_{N-1} = x[0] + x[1]\exp\left[-j\frac{2(N-1)\pi}{N}\right] + x[2]\exp\left[-j\frac{4(N-1)\pi}{N}\right] + \cdots + x[N-1]\exp\left[-j\frac{2(N-1)^2\pi}{N}\right]$$

각 값에 대응하는 주파수 도메인이 Discrete 하다는 것을 확인할 수 있다.

이렇게 주파수 도메인이 Discrete하게 Sampling 된 것을 DFT(Discrete Fourier Transform)이라고 정의한다.

Discrete Time Fourier Series를 통해 얻어가는 것들이 있다.

- Sampling을 하여 얻어진 선형 결합을 무한대로 보내면 DTFT가 된다.
- Sampling 값을 단순히 나열하게 된다면 DFT가 된다.

추가로 입력 신호가 특이할 때 impulse response의 Fourier Transform이 Transfer Function으로 작용할 때에도 있다.

입력이 $a_k exp[j(2\pi/N)kn]$ 일 때 LTI시스템에 대한 출력은 다음과 같다.

$$y_k(n) = a_k H(2\pi k/N) exp[j(2\pi/N)kn]$$

이 때 H는 impulse response를 Fourier Transform(DTFT)한 형태로, Transfer Function의 역할을 한다.