# Difference Equation in Discrete Time domain

Continuous Time domain 에서의 Difference Equation은 다음과 같은 방법으로 해결하였다.

1. Homogeneous Equation으로 native solution을 구한다.

2. Particular Equation을 통해 미분 방정식을 해결한다.

→ 미분 방정식 해결하는 과정에서 2 이상의 자연수 n차 방정식일 경우 Second Canonical Form을 이용하여 행렬과 Eigen Value를 이용하여 State Equation을 통해 구할 수 있다.

Discrete Difference Equation도 이와 비슷하게 전개된다. 우선 우리가 해결하고자 하는 Difference Equation은 다음과 같은 형태를 가진다.

$$\sum_0^N a_k y(n-k) = \sum_0^M b_k x(n-k)$$

이 때 n-k는 k만큼 Delay됐다는 의미를 나타내어 다음과 같이 표기하기도 한다.

$$D^k y(n) = y(n-k)$$

위 방정식을 해결하는 방법은 마찬가지로 Homogeneous Solution과 Particular Solution을 각각 구하는 것이다.

- Homogeneous Solution

$\sum_0^N a_k y(n-k) = 0$의 식을 만족하는 y(n)을 구한다. 이 때 특성 방정식 y(n) = A$\alpha^n$으로 두고 문제를 해결하면 된다.

- Particular Solution

Particular Solution을 $y_p(n)$이라고 하자. 해를 구할 때에는 한번에 구하기 힘들기 때문에 Super position을 이용하고자 한다.

Super position을 이용하기 위해선 다음 식을 만족하는  y(n)을 구하여야 한다.

$\sum_0^N a_k y_1(n-k) = x(n)$

위 식에서 $y_1$은 Particular Solution의 일부분이고 $y_1(n)$이 구해지게 된다면 Super position을 이용하여 $y_p(n)$을 구할 수 있다.

$y_p(n) = \sum_0^M b_k y_1(n-k)$

일단 다음 예시 문제를 이해해보자.

다음의 차분 방정식을 생각하자.

$$y(n) - \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{1}{8}y(n-2) = x(n) + \frac{1}{2}x(n-1)$$

입력 $x(n)$은

$$x(n) = 2\sin\frac{n\pi}{2}$$

1. 좌변 = 0 을 만족하는 Homogeneous Solution을 구한다.
2. 좌변 = x(n)을 만족하는 $y_1(n)$을 구한다.
3. Super position을 통해 $y_p(n) = \sum b_k y_1(n-k)$ 를 구한다.
4. 구해진 $y_h(n), y_p(n)$을 더하여 y(n)을 구한다.

Impulse Response를 구하기 위해선 Input x(n)이 delta function이어야 한다. 앞에서 정의한 방정식을 다시 수정해보기로 한다. ( 이 때 초기 조건은 0이라고 가정하고 시작한다.)

$$\sum_0^N a_k y(n-k) = \sum_0^M b_k \delta(n-k)$$

n>M인 경우를 생각해보자. 이 때는 n-k가 항상 양수가 되어 우변이 0이 된다.  이는 즉, Homogeneous Solution을 구하는 것과 동일해진다.

하지만, n≤M이면 n-k =0이 되는 k가 존재한다. 이 때의 k값을 j라고 하면 다음과 같이 정의할 수 있다. (n은 1~M까지 움직인다고 생각하면 된다.)

$$\sum_0^j a_k y(n-k) = b_j$$

그러면 초기 값들을 모두 구할 수 있어 Impulse Response의 식을 세울 수 있다.

이 식에서 Impulse Response가 n에 따라 magnitude가 무한히 달라지면 IIR, Impulse Response의 magnitude가 제한적이라면 FIR 이라고 한다