Convolution

Convolution이란 LTI System에 대한 Response을 표현할 때 사용된다.

입력 신호를 x(t)라고 하고, impulse response를 h(t)라 할 때,

출력 y(t)는 다음과 같다.

$$y(t) = \int x(\tau)h(t-\tau)d\tau$$

이를 Discrete Signal에서는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y[n] = \sum x[k]h[n-k]$$

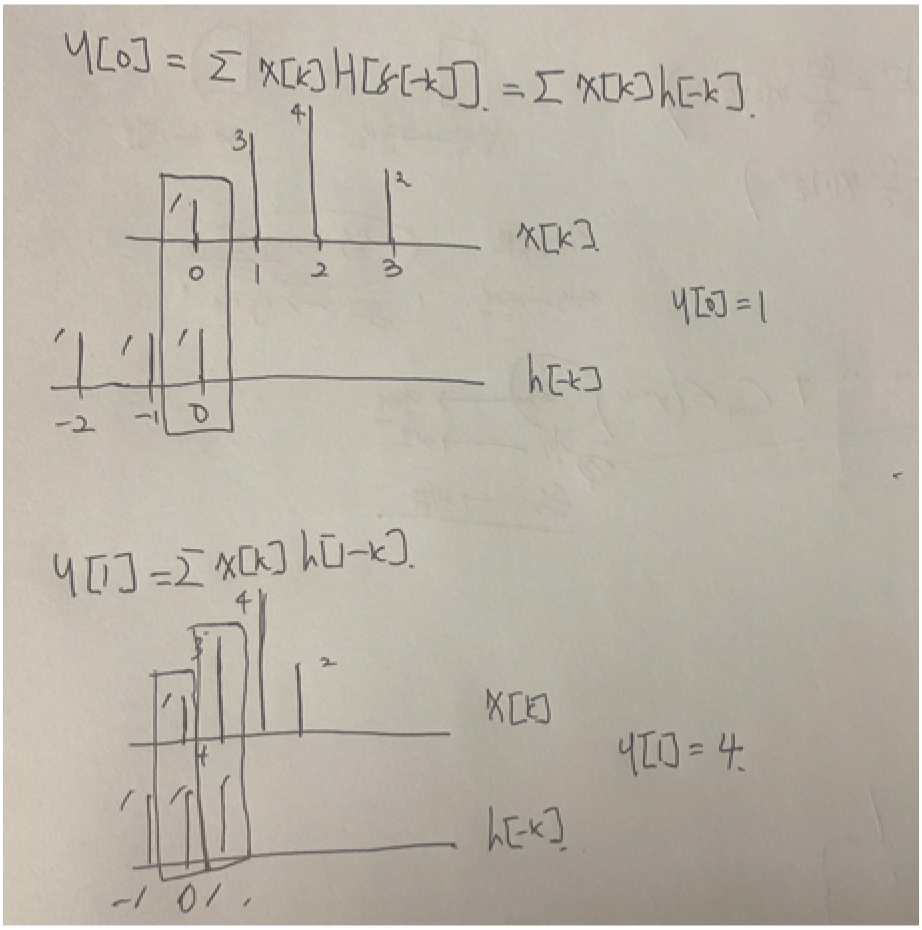
어떠한 의미가 담겨있는지 한번 이해 해보고자 한다.

LTI System을 H라고 표현할 때 다음과 같이 $y[n]$은 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$y[n] = H[x[n]] = \sum x[k] H[\delta[n-k]]$$

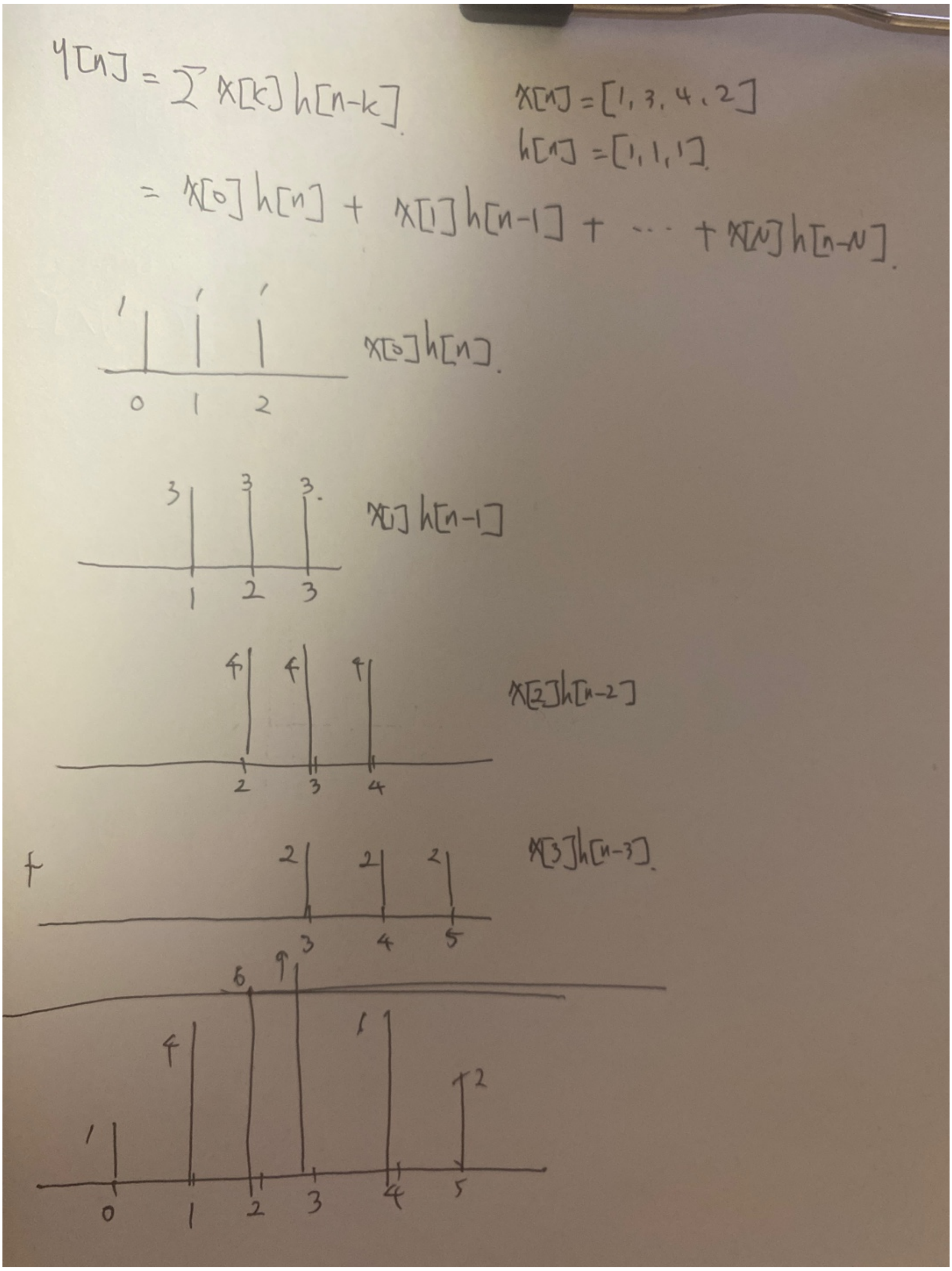
이는 $H[\delta[n-k]]$에 대한 Super position으로 해석해도 무방하다. 이 때 k의 범위는 $-\infty$ ~ ∞으로 설정한다. 수식적으로 이해하는 것도 좋지만 어떠한 식으로 출력이 형성되는지 알아보고자 한다.

> $x[n] = [1, 3, 4, 2] \qquad h[n] = [1, 1, 1]$이라고 하자. index는 LSB부터 0이라고 설정하겠다.



Time domain에서 공통적인 적분구간에서 곱하는 것과 동일하게, Discrete Convolution도 공통적인 k에 대하여 성분끼리 서로 곱해주고 그 곱한 값끼리 더해준다고 생각하면 된다.

더욱 의미를 확장하고자 한다.



이는 Super Position을 활용한 방법이다. Input의 원소를 하나 씩 넣었을 때 shifting된 h[n] 성분들을 곱해주고 이를 다 더하면 y[n]을 얻을 수 있다.

Periodic Signal

만약 입력 신호가 주기 함수라면 출력 함수도 주기 함수임을 확인할 수 있다.

$$x[n+N] = x[n]$$

$$y[a] = \sum x[a-k]\,h[k]$$

$$y[a+N] = \sum x[a+N-k]\,h[k] = \sum x[a-k]\,h[k] = y[a]$$

가끔 y[0]에서 Periodic 하지 않은 형태가 존재하는 것을 확인할 수 있다. 이는 x[n]이 n<0일 때 zero pedding 하였기 때문이다.

그런데 만약에 x[n], h[n]이 N을 주기로 진행되는 Discrete Signal이면 y[n]은 다음과 같이 구할 수 있다.

- x[n]과 h[n]의 한 주기를 기준으로 Convolution을 실행한다.
- 구해진 y[n]을 기준으로 마지막 부분에 0을 padding한다.
- 절반으로 나눠서 element wise하게 더해준다.

이 외에도 Circular Convolution, 행렬 곱이 있지만, 공통적으로 한 주기만큼 잘라서 Rotation 시키면서 더해주면 된다.

Z Transformation