

# Лабораторная работа №2.

## Численное решение задачи Коши для уравнения высшего порядка

### §1. Условие задачи

Напишите программу для численного решения задачи

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad x \in [x_0, b]$$

методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Интегрирование проводить с постоянным шагом  $h = \frac{b-x_0}{n}$ , где  $n \in \mathbb{N}$ . Параметры  $b$  и  $n$  выбираются самостоятельно.

Найдите решение  $\varphi$  поставленной задачи аналитически.

Найдите абсолютные и относительные погрешности

$$\Delta = \max_{k \in [1:n]} |\varphi(x_k) - \tilde{\varphi}(x_k)|, \quad \delta = \max_{k \in [1:n]} \frac{|\varphi(x_k) - \tilde{\varphi}(x_k)|}{|\tilde{\varphi}(x_k)|},$$

где  $x_k = x_0 + kh$ ,  $\tilde{\varphi}$  — приближённое решение задачи.

Постройте графики функций  $\varphi$  и  $\tilde{\varphi}$  в одной системе координат.

Отчёт по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Постановка задачи (в частности, конкретное уравнение, начальные данные, выбранные значения параметров  $b$  и  $n$ ).
2. Листинги программ для численного решения задачи.
3. Аналитическое решение задачи.
4. Графики решений.
5. Таблицы погрешностей.

### §2. Варианты заданий

1.  $2y^2y'' \sin x - 2y^2y' \cos x + (y')^3 - 2y(y')^2 \sin x = 0, y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1.$
2.  $4yy'' + (4y^2 - 1)(y')^6 + (y')^2 = 0, y(2) = 1, y'(2) = -1.$
3.  $2y^2y'' \cos x + 2y^2y' \sin x + (y')^3 - 2y(y')^2 \cos x = 0, y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1, y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}.$
4.  $4yy'' + (y^2 - 9)(y')^6 + (y')^2 = 0, y(0) = 1, y'(0) = -\frac{1}{2}.$
5.  $yy' + 2x(y')^2 = xyy'', y(1) = 1, y'(1) = -1.$
6.  $3yy'' - 3(y')^2 = 4y(y')^5, y(0) = 1, y'(0) = -1.$
7.  $yy' - xyy'' + x(y')^2 = 2x(y')^2 \ln x, y(1) = 1, y'(1) = -2.$

8.  $y''(y-1)^2 + (y')^2(y-1) = (y')^3$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = 2$ .
9.  $2x \left( y^2 y'' + (y')^3 \right) = y' y^2 + 2xy (y')^2$ ,  $y(1) = y'(1) = 1$ .
10.  $y''(y-1) + y'(y-1)^2 = (y')^2$ ,  $y(0) = 2$ ,  $y'(0) = -2$ .
11.  $x y y'' = y y' + x (y')^2 + 4x^5 y^2$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = 1$ .
12.  $2y y'' \ln y = (y')^2 (1 + 2 \ln y)$ ,  $y(0) = e$ ,  $y'(0) = e$ .
13.  $y y'' = (y')^2 (y^2 y' + 1)$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = -3$ .
14.  $y'' y^2 x^2 - x y^2 y' - x^2 (y')^2 y - \frac{e^{-x}}{2} (y')^3 = 0$ ,  $y(2) = 1$ ,  $y'(2) = -2e$ .
15.  $y' y'' - (y')^3 \operatorname{ctg} y + \cos^2 y \sin^4 y = 0$ ,  $y(0) = \frac{\pi}{4}$ ,  $y'(0) = \frac{1}{2}$ .
16.  $y y'' - y y' - (y')^2 (e^x + 1) = 0$ ,  $y(1) = \operatorname{sh} 1$ ,  $y'(1) = -1$ .
17.  $x^2 y y'' - 2x^2 (y')^2 + x y y' = 0$ ,  $y(e) = 1$ ,  $y'(e) = -\frac{1}{e}$ .
18.  $x y y'' - 2x (y')^2 + y y' = 0$ ,  $y(1) = y'(1) = 1$ .
19.  $y^2 y'' - y (y')^2 - y^3 = 0$ ,  $y(0) = 1$ ,  $y'(0) = 1$ .
20.  $x y y'' + x (y')^2 - y y' = 0$ ,  $y(1) = 4$ ,  $y'(1) = 1$ .
21.  $3y^2 y' y'' + 2y (y')^3 = 4y^3$ ,  $y(1) = -1$ ,  $y'(1) = 1$ .
22.  $4y y'' + (y')^2 + y (y')^4 = 0$ ,  $y(1) = 1$ ,  $y'(1) = -1$ .
23.  $2(y+1) y'' + (y')^2 = 2(y+1)$ ,  $y(2) = 0$ ,  $y'(2) = -1$ .
24.  $y y'' + 3 (y')^2 = y^2 (y')^3$ ,  $y(4) = 2$ ,  $y'(4) = \frac{1}{4}$ .
25.  $x y y'' + 2x^3 (y')^2 - y y' = 0$ ,  $y(1) = y'(1) = 1$ .