

Лабораторная работа №2.

Численное решение задачи Коши для уравнения высшего порядка

§1. Условие задачи

Напишите программу для численного решения задачи

$$F(x, y, y', y'') = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y'_0, \quad x \in [x_0, b]$$

методом Рунге-Кутты 4-го порядка.

Интегрирование проводить с постоянным шагом $h = \frac{b-x_0}{n}$, где $n \in \mathbb{N}$. Параметры b и n выбираются самостоятельно.

Найдите решение φ поставленной задачи аналитически.

Найдите абсолютные и относительные погрешности

$$\Delta = \max_{k \in [1:n]} |\varphi(x_k) - \tilde{\varphi}(x_k)|, \quad \delta = \max_{k \in [1:n]} \frac{|\varphi(x_k) - \tilde{\varphi}(x_k)|}{|\tilde{\varphi}(x_k)|},$$

где $x_k = x_0 + kh$, $\tilde{\varphi}$ — приближённое решение задачи.

Постройте графики функций φ и $\tilde{\varphi}$ в одной системе координат.

Отчёт по лабораторной работе должен содержать следующие разделы:

1. Постановка задачи (в частности, конкретное уравнение, начальные данные, выбранные значения параметров b и n).
2. Листинги программ для численного решения задачи.
3. Аналитическое решение задачи.
4. Графики решений.
5. Таблицы погрешностей.

§2. Варианты заданий

1. $2y^2y'' \sin x - 2y^2y' \cos x + (y')^3 - 2y(y')^2 \sin x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = -1$.
2. $4yy'' + (4y^2 - 1)(y')^6 + (y')^2 = 0$, $y(2) = 1$, $y'(2) = -1$.
3. $2y^2y'' \cos x + 2y^2y' \sin x + (y')^3 - 2y(y')^2 \cos x = 0$, $y\left(\frac{\pi}{6}\right) = 1$, $y'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{\frac{3}{2}}$.
4. $4yy'' + (y^2 - 9)(y')^6 + (y')^2 = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -\frac{1}{2}$.
5. $yy' + 2x(y')^2 = xy y''$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -1$.
6. $3yy'' - 3(y')^2 = 4y(y')^5$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$.
7. $yy' - xy y'' + x(y')^2 = 2x(y')^2 \ln x$, $y(1) = 1$, $y'(1) = -2$.

8. $y'' (y - 1)^2 + (y')^2 (y - 1) = (y')^3, y(0) = 2, y'(0) = 2.$
9. $2x \left(y^2 y'' + (y')^3 \right) = y' y^2 + 2xy (y')^2, y(1) = y'(1) = 1.$
10. $y'' (y - 1) + y' (y - 1)^2 = (y')^2, y(0) = 2, y'(0) = -2.$
11. $xyy'' = yy' + x (y')^2 + 4x^5 y^2, y(1) = 1, y'(1) = 1.$
12. $2yy'' \ln y = (y')^2 (1 + 2 \ln y), y(0) = e, y'(0) = e.$
13. $yy'' = (y')^2 (y^2 y' + 1), y(0) = 1, y'(0) = -3.$
14. $y'' y^2 x^2 - xy^2 y' - x^2 (y')^2 y - \frac{e^{-x}}{2} (y')^3 = 0, y(2) = 1, y'(2) = -2e.$
15. $y' y'' - (y')^3 \operatorname{ctg} y + \cos^2 y \sin^4 y = 0, y(0) = \frac{\pi}{4}, y'(0) = \frac{1}{2}.$
16. $yy'' - yy' - (y')^2 (e^x + 1) = 0, y(1) = \operatorname{sh} 1, y'(1) = -1.$
17. $x^2 yy'' - 2x^2 (y')^2 + xyy' = 0, y(e) = 1, y'(e) = -\frac{1}{e}.$
18. $xyy'' - 2x (y')^2 + yy' = 0, y(1) = y'(1) = 1.$
19. $y^2 y'' - y (y')^2 - y^3 = 0, y(0) = 1, y'(0) = 1.$
20. $xyy'' + x (y')^2 - yy' = 0, y(1) = 4, y'(1) = 1.$
21. $3y^2 y' y'' + 2y (y')^3 = 4y^3, y(1) = -1, y'(1) = 1.$
22. $4yy'' + (y')^2 + y (y')^4 = 0, y(1) = 1, y'(1) = -1.$
23. $2 (y + 1) y'' + (y')^2 = 2 (y + 1), y(2) = 0, y'(2) = -1.$
24. $yy'' + 3 (y')^2 = y^2 (y')^3, y(4) = 2, y'(4) = \frac{1}{4}.$
25. $xyy'' + 2x^3 (y')^2 - yy' = 0, y(1) = y'(1) = 1.$