고유값, 고유벡터 → (eigen vector)

↳ 선형변환. 방향 X, 크기만 변하는 벡터.

↳ 고유값이라 한다. (eigen value)

$Ax = \lambda x$ (λ는 상수)를 만족하는 0이 아닌 벡터 x가 존재할 때,

λ를 행렬의 고유값, x를 고유벡터라 한다.

(A는 정방행렬 $(N \times N)$)

A: 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\lambda}_{\text{고유값}} \overbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}}^{\text{고유벡터}}$$

ex) $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$, $\lambda = 7$, $x = \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$

$$Ax = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix} = 7 \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 28 \\ 35 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 28 \\ 35 \end{bmatrix} \longrightarrow Ax = 7x$$

$\therefore Ax = \lambda x$, $\lambda = 7$

↳ 7배.

크기만 변함.

$*$ 고유값 구하는 과정. ($A\vec{x} = \lambda\vec{x}$ (λ는 상수, $\vec{x} \neq \vec{0}$))

$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$, λ $\quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \lambda\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} - \lambda\right)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \cdots\cdots \longrightarrow I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

↳ λ에 행렬화.

$$\begin{bmatrix} 2-\lambda & 4 \\ 5 & 3-\lambda \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = 0$$

$(A-\lambda I)$ 역행렬이 X, $x = \vec{0}$ 모순.

1. $(A-\lambda I)$ 역행렬이 존재 X, $\det(A-\lambda I) = 0$.

↳ $ad - bc = 0$. → 역행렬이 존재 X.

$(2-\lambda)(3-\lambda) - 20 = 0$.

$\lambda = 7, -2$

① $\lambda = 7$, $\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ → $\begin{cases} -5x_1 + 4x_2 = 0 \\ 5x_1 - 4x_2 = 0. \end{cases}$ $\begin{pmatrix} x_1 = 4 \\ x_2 = 5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 = 8 \\ x_2 = 10 \end{pmatrix}$, ...

② $\lambda = -2$ $\begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ → $x_1 + x_2 = 0$, $x_1 = -x_2$ $\begin{pmatrix} x_1 = 1 \\ x_2 = -1 \end{pmatrix}$, ...