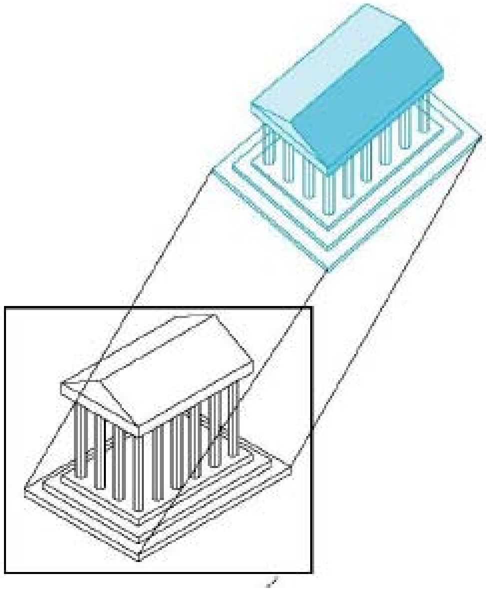
Računarska grafika
(2OER7O02)

Geometrijske projekcije

Predavanja

Geometrijske projekcije

- **Projekcije** preslikavaju tačku iz n-dimenzionalnog koordinatnog sistema (prostora) u koordinatni sistem (prostor) koji ima manje od n dimenzija.
- U računarskoj grafici se obično radi sa projekcijama koje preslikavaju objekte iz 3D prostora u 2D prostor.



Istorijski pregled

- Prvi crteži gde je korišćena projekcija 3D objekata na 2D zid pećine datiraju još od pre 15.000 godina.

Istorijski pregled

- Zatim se primena nastavlja u drevnom Egiptu...

Istorijski pregled

- Prve perspektivne projekcije datiraju iz vremena renesanse (Italija).
- Filippo Brunelleschi (1377–1446), Leono Battista Alberti (1404–1472), Piero della Francesca (1420–1492)

Geometrijske projekcije

- Ukoliko se radi o projekciji na ravan onda se radi o **planarnoj projekciji**.

- U računarskoj grafici se uglavnom radi sa planarnim projekcijama.

Osnovni parametri projekcije

- Centar projekcije (COP)
- Projekcijski zraci
- Projekciona ravan

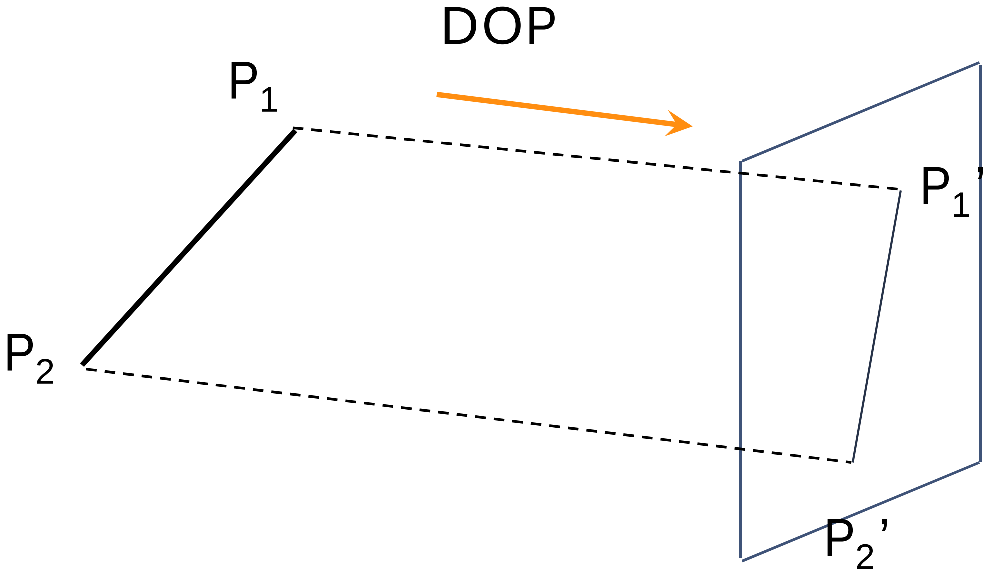
Projekcije

- Planarne geometrijske projekcije
  - Paralelne
    - Normalne (ortogonalne)
      - **Ortografske**
        - Gornja (plan)
        - Prednja (elevacija)
        - Bočna (elevacija)
      - Aksonometrijske
        - Izometrijske
        - Diametrijske
        - Triametrijske
    - Kose (klinogonalne)
      - *Cabinet*
      - *Cavalier*
      - Ostale
  - **Perspektivne**
    - Sa jednom tačkom
    - Sa dve tačke
    - Sa tri tačke

Paralelne projekcije

- Svi projekcioni zraci polaze iz jedne tačke koja predstavlja centar projekcije (COP) i ta tačka se nalazi u beskonačnosti.
- Posledica ovoga je da su svi projekcioni zraci paralelni.
- Karakteriše se projekcionom ravni i **pravcem projekcije** (DOP)

Paralelne projekcije



Ravan projekcije

Podela paralelnih projekcija

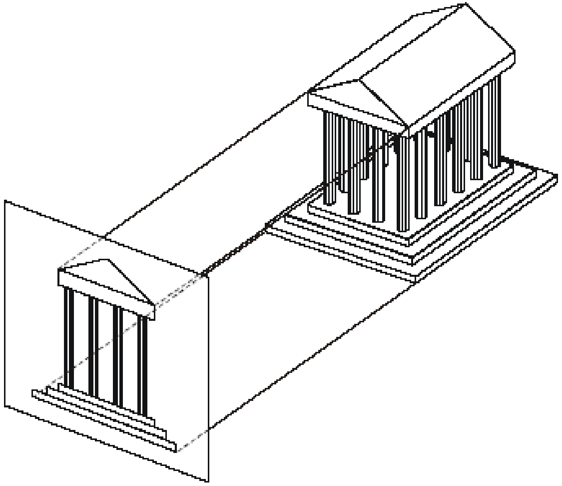
- **Normalna (ortogonalna)**: Projekcioni zraci su normalni na projekcionu ravan.

- **Kosa (klinogonalna)**: Projekcioni zraci su kosi u odnosu na projekcionu ravan.

Normalna projekcija

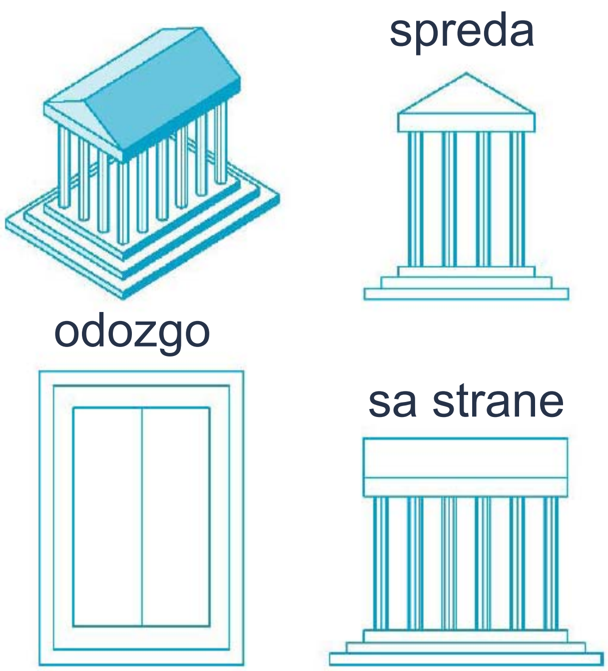
- **Ortografska**: Projekciona ravan je normalna na neku od koordinatnih osa.

- **Aksonometrijska**: Projekciona ravan zaklapa proizvoljni ugao sa koordinatnim osama.



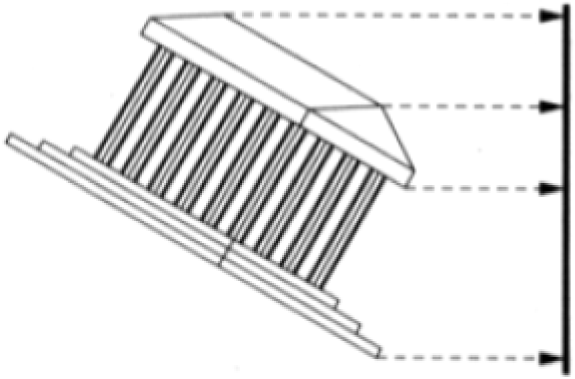
Ortografska projekcija

- Postoje tri ovakve projekcije:
  - Pogled odozgo
  - Pogled spreda
  - Pogled sa strane

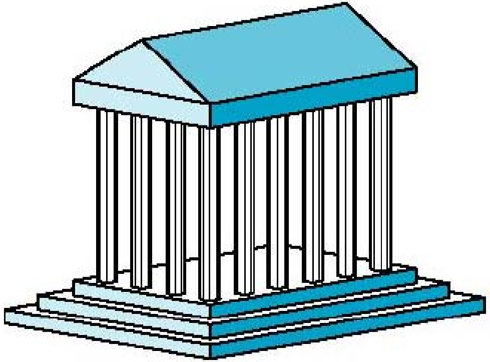


Aksonometrijska projekcija

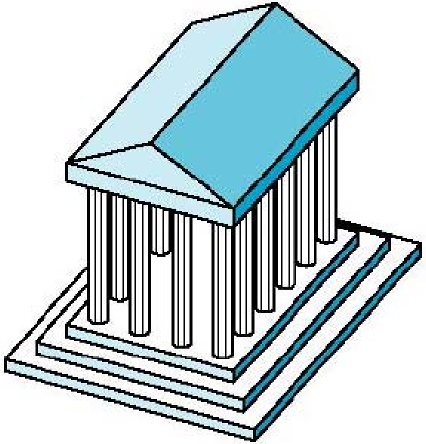
- Postoje tri ovakve projekcije:
  - **Izometrijska** (projekciona ravan zaklapa isti ugao sa svim koordinatnim osama)
  - **Dimetrijska** (projekciona ravan zaklapa isti ugao sa dve koordinatne ose)
  - **Trimetrijska** (projekciona ravan zaklapa različite uglove sa koordinatnim osama)



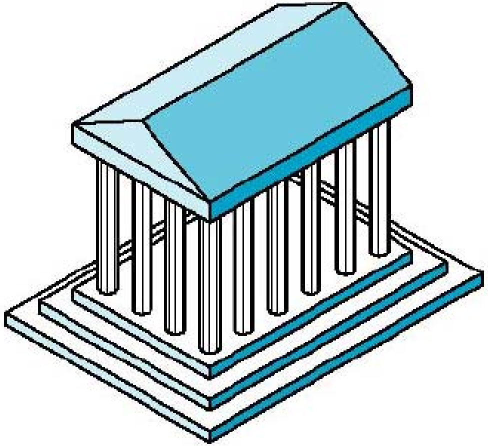
Aksonometrijska projekcija



dimetrijska



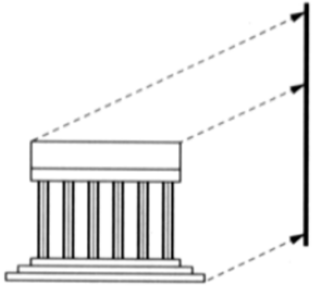
trimetrijska

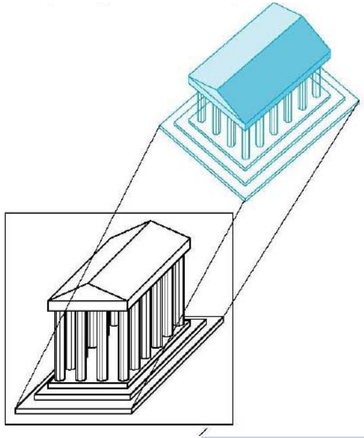


izometrijska

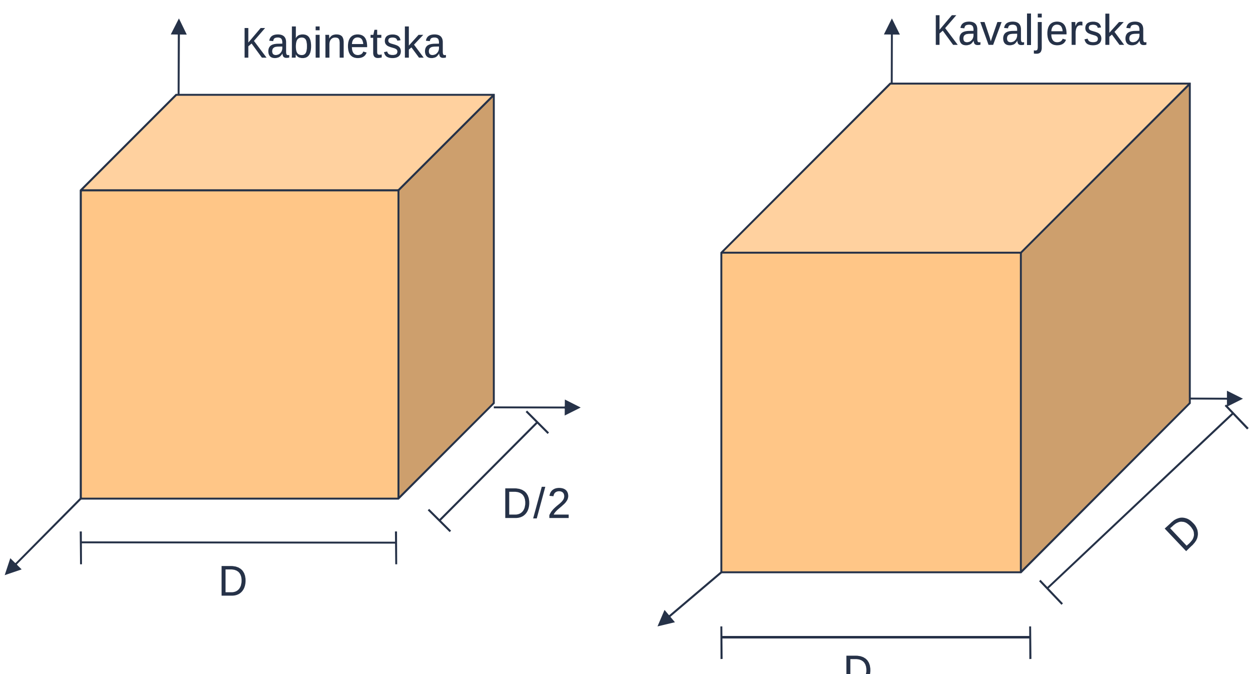
Kosa projekcija

- **Kavaljerska**: Projekcioni zraci zaklapaju ugao od 45° sa projekcionom ravni.
- **Kabinetska**: Projekcioni zraci zaklapaju ugao od arctg(2) sa projekcionom ravni.
- **Ostale**: Projekcioni zraci zaklapaju proizvoljni ugao sa projekcionom ravni.



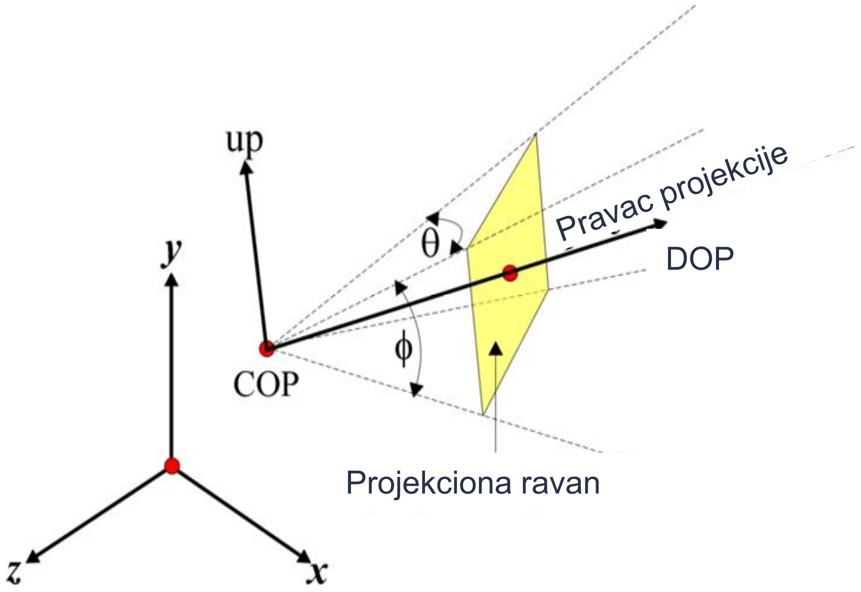


Kose projekcije

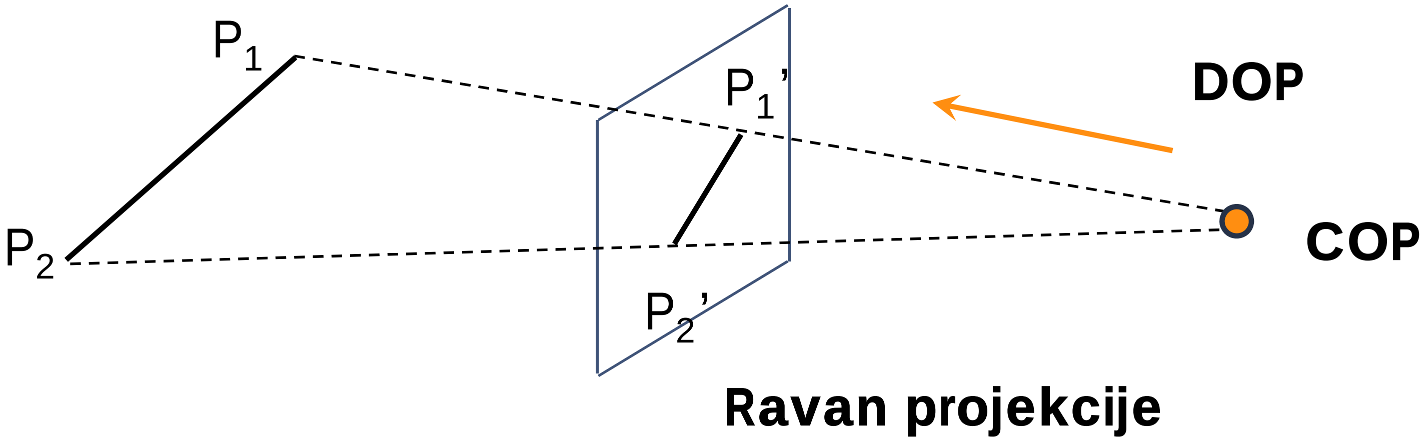


Perspektivne (centralne) projekcije

- Svi projekcioni zraci polaze iz jedne tačke koja predstavlja centar projekcije (COP) i ta tačka se ne nalazi u oku posmatrača.
- Karakteriše se projekcionom ravni, pravcem projekcije (DOP) i centrom projekcije (COP).

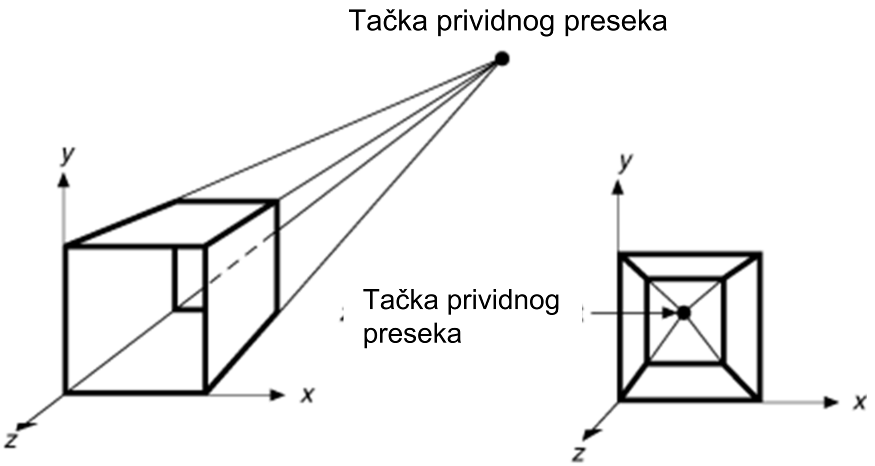


Perspektivne projekcije



Karakteristike perspektivne projekcije

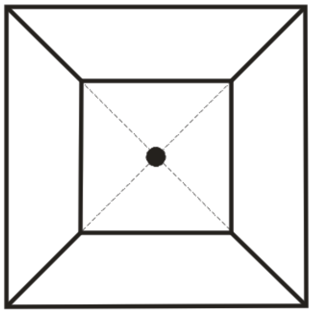
- **Perspektivno skraćenje** – iluzija da su nam objekti i njihove dimenzije manji što je njihovo rastojanje od COP veće.
- Iluzija da se skupovi paralelnih linija dodiruju u nekoj tački (tačka prividnog preseka).
- Realističnije su od paralelnih projekcija.



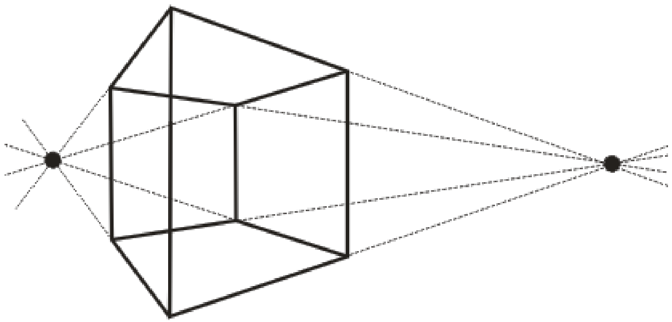
Podela perspektivnih projekcija

- Sa jednom tačkom
- Sa dve tačke
- Sa tri tačke

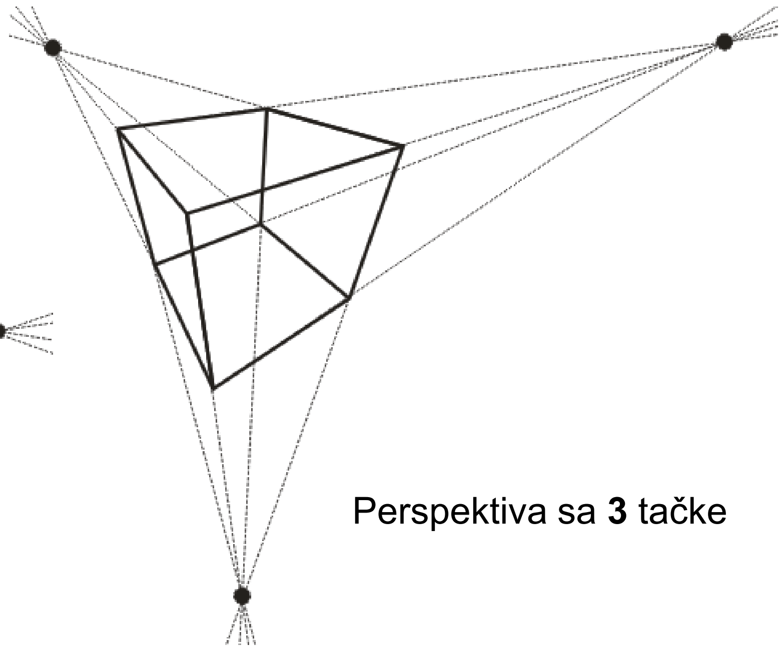
Podela perspektivnih projekcija



Perspektiva sa **1** tačkom



Perspektiva sa **2** tačke



Perspektiva sa **3** tačke

Perspektiva sa jednom tačkom

Trinity with the Virgin, St John and Donors, (Mastaccio,1427)

Perspektiva sa dve tačke

Edward Hopper: *Lighthouse at Two Lights*

Poređenje perspektiva

Poređenje paralelne i perspektivne projekcije

perspektivna

paralelna

Matrična reprezentacija

- Kao i sve druge geometrijske transformacije, i projekcija se može svesti na množenje matrica.

$$[x' \quad y' \quad z' \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot M$$

$$\boxed{P' = P \cdot M}$$

Matrica projekcije

Ortografska projekcija

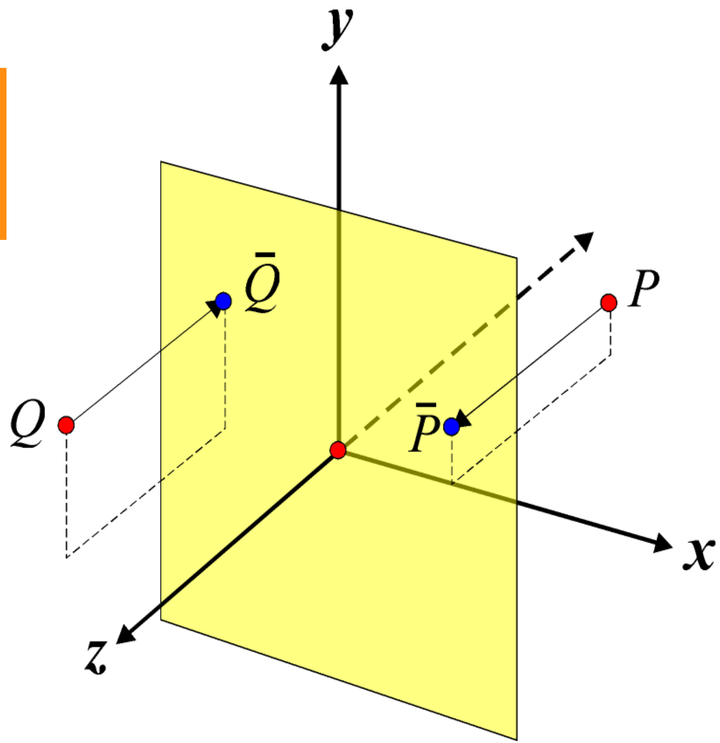
$x_p = x$

$y_p = y$

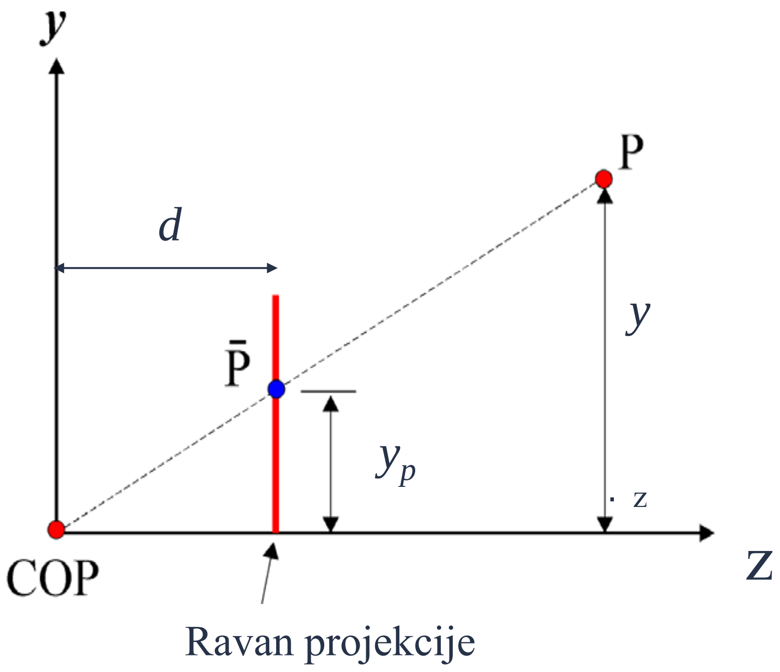
$z_p = 0$

$$\boxed{P' = P \cdot M_{ort}}$$

$$M_{ort} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Perspektivna projekcija



$$\frac{y}{z} = \frac{y_P}{d} \Rightarrow y_P = \frac{y}{z/d} = \frac{y \cdot d}{z}$$

$$\frac{x}{z} = \frac{x_P}{d} \Rightarrow x_P = \frac{x}{z/d} = \frac{x \cdot d}{z}$$

$$z_P = d$$

$$M'_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Perspektivna projekcija

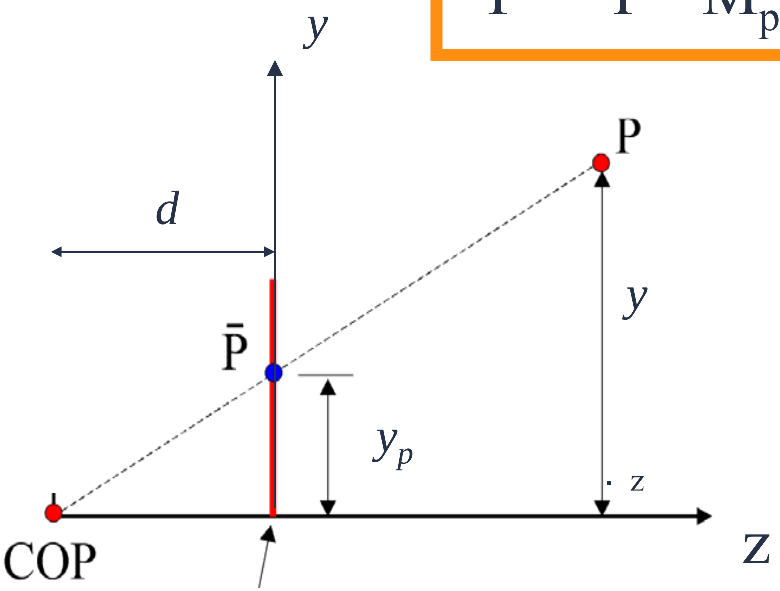
$$[x_p \quad y_p \quad z_p \quad 1] = [x \quad y \quad z \quad 1] \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [x \quad y \quad z \quad z/d] =$$

$$= [x \cdot d/z \quad y \cdot d/z \quad d \quad 1]$$

$$\boxed{P' = P \cdot M'_{per}}$$

Perspektivna projekcija

$$\boxed{P' = P \cdot M_{per}}$$



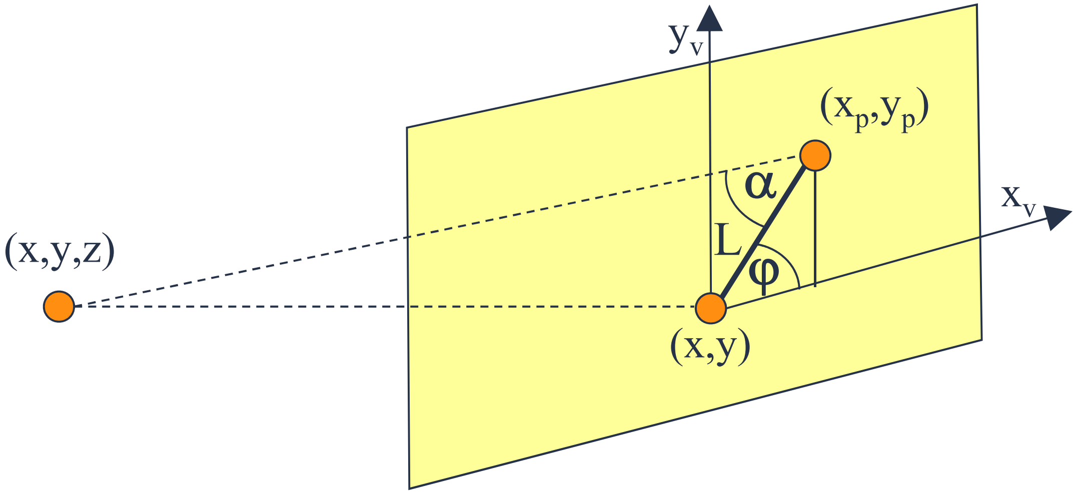
$$\frac{y}{z+d} = \frac{y_P}{d} \Rightarrow y_P = \frac{y \cdot d}{z+d}$$

$$\frac{x}{z+d} = \frac{x_P}{d} \Rightarrow x_P = \frac{x \cdot d}{z+d}$$

$$z_P = 0$$

$$M_{per} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Kosa projekcija



α – ugao projekcionog zraka (45° za kavaljersku i 63.4°, tj. atan(2) za kabinet)

φ – ugao koji u projekciji zaklapaju stranice upravne na ravan projekcije sa X osom (30° ili 45°)

L – rastojanje projekcije od upravnog položaja

$$x_p = x + L \cos \varphi$$
$$y_p = y + L \sin \varphi$$
$$\mathrm{tg}\, \alpha = z / L \Rightarrow L = z / \mathrm{tg}\, \alpha$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_p &= x + z \cos \varphi / \mathrm{tg}\, \alpha \\ y_p &= y + z \sin \varphi / \mathrm{tg}\, \alpha \end{aligned}}$$

Kosa projekcija

$$x_p = x + z \cos \varphi / \operatorname{tg} \alpha$$
$$y_p = y + z \sin \varphi / \operatorname{tg} \alpha$$

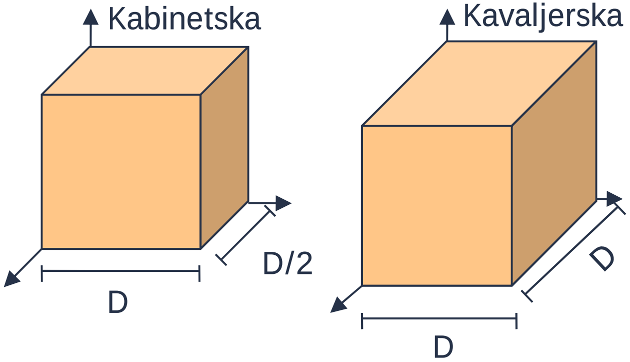
$$\Rightarrow$$

$$M_{kos} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \cos\varphi / tg\alpha & \sin\varphi / tg\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boxed{P' = P \cdot M_{kos}}$$

Kosa projekcija

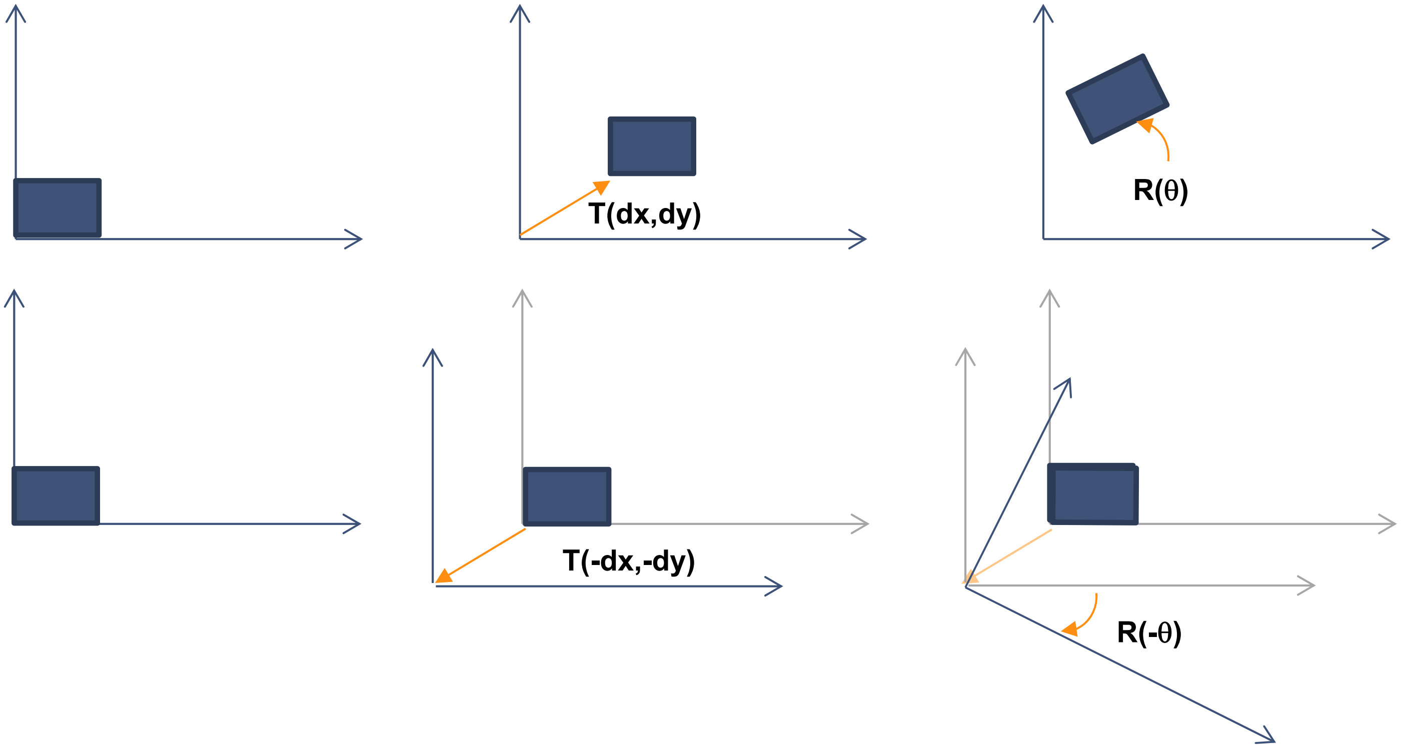
- Za $\alpha = 45°$ $(1/tg\alpha = 1)$ → Kavaljerska projekcija
- Za $\alpha = arctg(2)$ $(1/tg\alpha = 1/2)$ → Kabinetska projekcija



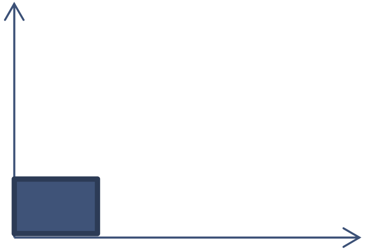
Transformacije koordinatnih sistema

- Isti efekti koji se postižu translacijom, skaliranjem i rotacijom objekata, mogu se ostvariti i ako se objekat ne pomera, već se pomera i menja koordinatni sistem, odnosno mesto posmatranja objekta.
- U tom slučaju se menja znak parametrima dx, dy, dz, θ, odnosno, uzima se recipročna vrednost za Sx, Sy, Sz.

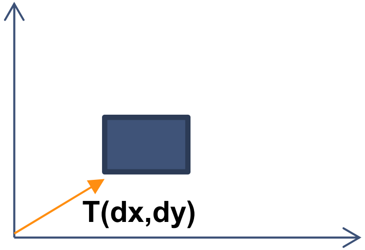
Transformacije koordinatnih sistema



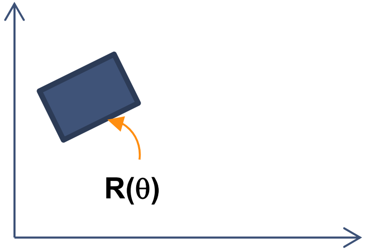
Transformacije u globalnom i lokalnom koordinatnatnom sitemu



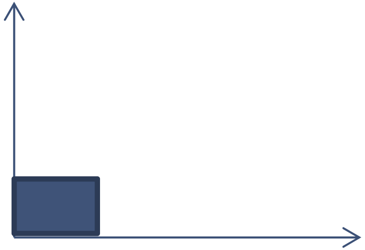
v’ = v



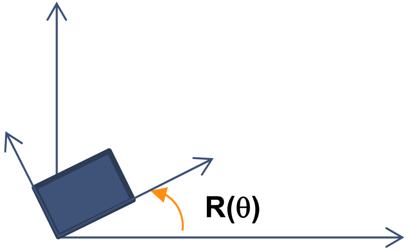
v’ = v · **T**



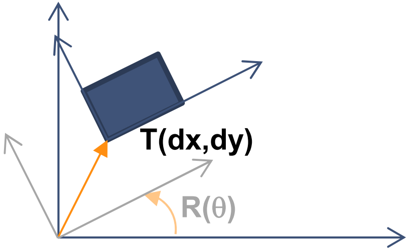
v’ = v · T · **R**



v’ = v



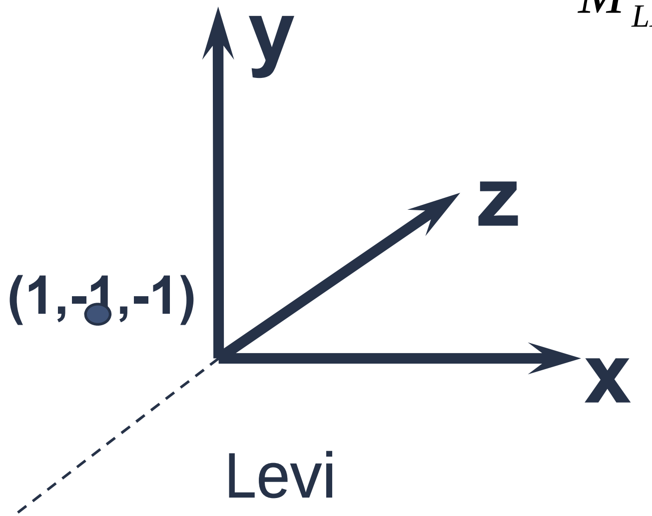
v’ = v · **R**

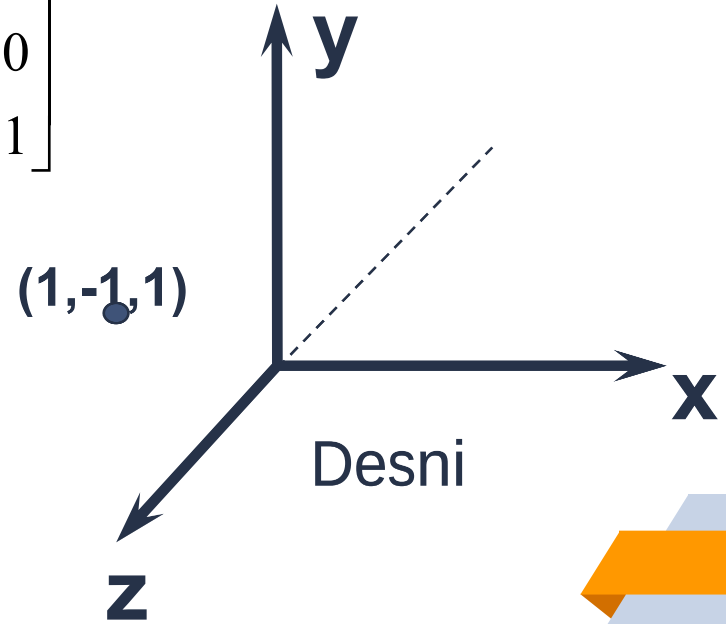


v’ = v · **T** · R

Transformacija levog u desni koordinatni sistem

$$M_{LD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$





PITANJA