

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΜΗΧΑΝΙΚΗΣ ΥΛΙΚΩΝ  
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

# Ηλεκτρισμός – Μαγνητισμός – Οπτική

Σημειώσεις και Ασκήσεις

ΣΤΑΜΑΤΗΣ ΣΤΑΜΑΤΙΑΔΗΣ

Copyright © 2021–2024 Σταμάτης Σταματιάδης, [stamatis@uoc.gr](mailto:stamatis@uoc.gr)

Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την άδεια “Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές” (CC-BY-NC-SA 4.0). Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε το <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.el>.

Επιλογή ασκήσεων: Αν. Καθηγητής Α. Λυμπεράτος.

Η στοιχειοθεσία έγινε από το συγγραφέα με τη χρήση του  $\text{\LaTeX}$ .

Τελευταία τροποποίηση του κειμένου έγινε στις 17 Νοεμβρίου 2024.

Η πιο πρόσφατη έκδοση βρίσκεται στο

<https://raw.githubusercontent.com/sstamat/mybooks/main/emo.pdf>

# Περιεχόμενα

<b>I</b>	<b>Εισαγωγικές γνώσεις</b>	<b>1</b>
<b>1</b>	<b>Μαθηματικές Γνώσεις: Διάνυσμα</b>	<b>3</b>
1.1	Εισαγωγή . . . . .	3
1.2	Συνιστώσες . . . . .	4
1.2.1	Παρατήρηση . . . . .	5
1.2.2	Διάνυσμα θέσης . . . . .	6
1.3	Πράξεις διανυσμάτων . . . . .	6
1.3.1	Ισότητα διανυσμάτων . . . . .	6
1.3.2	Ορισμοί θεμελιωδών πράξεων . . . . .	6
1.4	Ιδιότητες Πράξεων . . . . .	7
1.4.1	Πρόσθεση . . . . .	7
1.4.2	Πολλαπλασιασμός με αριθμό . . . . .	8
1.4.3	Μηδενικό και αντίθετο διάνυσμα . . . . .	9
1.4.4	Παράγωγες πράξεις . . . . .	9
1.4.5	Παρατήρηση . . . . .	10
1.5	Εσωτερικό γινόμενο . . . . .	11
1.5.1	Ιδιότητες . . . . .	12
1.6	Μέτρο διανύσματος . . . . .	12
1.7	Μοναδιαίο διάνυσμα . . . . .	12
1.8	Διανύσματα αξόνων καρτεσιανού συστήματος . . . . .	13
1.9	Γωνίες διεύθυνσης διανύσματος . . . . .	13
1.10	Εξωτερικό γινόμενο . . . . .	14
1.10.1	Ιδιότητες . . . . .	14
1.10.2	Εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων των καρτεσιανών αξόνων . . . . .	15
1.11	Βαθμωτό τριπλό γινόμενο . . . . .	16
1.11.1	Ιδιότητες . . . . .	17
1.12	Διανυσματικό τριπλό γινόμενο . . . . .	18
1.12.1	Ιδιότητες . . . . .	18
1.13	Ασκήσεις—Λύσεις . . . . .	19
<b>2</b>	<b>Διαφορικός λογισμός</b>	<b>25</b>
2.1	Διανυσματικός τελεστής $\nabla$ . . . . .	25
2.2	Πρώτες παράγωγοι . . . . .	25

2.3	Δεύτερες παράγωγοι . . . . .	27
2.4	Ιδιότητες . . . . .	28
2.4.1	Πρώτες παράγωγοι . . . . .	28
2.4.2	Δεύτερες παράγωγοι . . . . .	29
2.5	Ασκήσεις—Λύσεις . . . . .	30
<b>3</b>	<b>Συστήματα συντεταγμένων</b>	<b>37</b>
3.1	Πολικές συντεταγμένες . . . . .	37
3.2	Κυλινδρικές συντεταγμένες . . . . .	38
3.2.1	Τελεστής $\nabla$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες . . . . .	39
3.3	Σφαιρικές συντεταγμένες . . . . .	39
3.3.1	Τελεστής $\nabla$ σε σφαιρικές συντεταγμένες . . . . .	41
<b>4</b>	<b>Ολοκληρωτικός λογισμός</b>	<b>43</b>
4.1	Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα . . . . .	43
4.2	Επιφανειακό ολοκλήρωμα . . . . .	46
4.3	Ολοκλήρωμα όγκου . . . . .	49
4.4	Θεμελιώδη θεωρήματα . . . . .	49
4.4.1	Θεώρημα για την κλίση . . . . .	49
4.4.2	Θεώρημα για την απόκλιση . . . . .	51
4.4.3	Θεώρημα για το στροβιλισμό . . . . .	53
4.5	Ασκήσεις—Λύσεις . . . . .	56
<b>5</b>	<b>Γνώσεις Φυσικής</b>	<b>63</b>
5.1	Βασικά προθέματα συστήματος SI . . . . .	63
5.2	Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση . . . . .	63
<b>II</b>	<b>Ηλεκτρισμός</b>	<b>65</b>
<b>6</b>	<b>Ηλεκτρικό πεδίο</b>	<b>67</b>
6.1	Εισαγωγή . . . . .	67
6.2	Νόμος Coulomb . . . . .	68
6.2.1	Διανυσματική μορφή . . . . .	69
6.2.2	Ηλεκτρική δύναμη από μη σημειακή πηγή . . . . .	69
6.2.3	Πυκνότητα φορτίου . . . . .	73
6.3	Ηλεκτρικό Πεδίο . . . . .	73
6.3.1	Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου . . . . .	75
6.3.2	Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου . . . . .	75
6.3.3	Ηλεκτρικό πεδίο μη σημειακού φορτίου . . . . .	75
6.3.4	Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου . . . . .	78
6.4	Νόμος Gauss . . . . .	78
6.4.1	Συμμετρία . . . . .	79
6.4.2	Διαφορική μορφή νόμου Gauss . . . . .	79

6.5	Ηλεκτρικό Δυναμικό	80
6.5.1	Υπολογισμός ηλεκτρικού πεδίου από το δυναμικό	81
6.5.2	Δυναμικό διάφορων κατανομών φορτίου	81
6.5.3	Νόμος Gauss για το δυναμικό	82
6.5.4	Δυναμική Ενέργεια	82
6.6	Ασκήσεις—Λύσεις	84
6.6.1	Νόμος Coulomb	84
6.6.2	Ηλεκτρικό πεδίο	91
6.6.3	Νόμος Gauss	123
6.6.4	Ηλεκτρικό δυναμικό	151
6.6.5	Δυναμική ενέργεια	173
<b>7</b>	<b>Ηλεκτρικά στοιχεία – Ηλεκτρικά κυκλώματα</b>	<b>177</b>
7.1	Πυκνωτής	177
7.1.1	Χωρητικότητα πυκνωτή	177
7.1.2	Πυκνότητα ενέργειας πυκνωτή: Απόδειξη	177
7.2	Ηλεκτρικό ρεύμα – Αντίσταση	178
7.2.1	Επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος	178
7.2.2	Χωρική πυκνότητα ρεύματος	179
7.2.3	Νόμος Ohm	179
7.2.4	Κλασική ερμηνεία αγωγιμότητας: Μοντέλο Drude	180
7.3	Σύνδεση όμοιων στοιχείων	181
7.3.1	Χωρητικότητα συστήματος πυκνωτών	181
7.3.2	Αντίσταση συστήματος αντιστατών	181
7.4	Επίλυση κυκλώματος	182
7.4.1	Κανόνες Kirchhoff	182
7.5	Ασκήσεις—Λύσεις	184
7.5.1	Πυκνωτής	184
7.5.2	Ηλεκτρικό ρεύμα – Αντίσταση	190
7.5.3	Σύνδεση στοιχείων	202
7.5.4	Επίλυση κυκλώματος	212
<b>8</b>	<b>Υλικά σε ηλεκτρικό πεδίο</b>	<b>229</b>
8.1	Μικροσκοπικός μηχανισμός πόλωσης	229
8.2	Πόλωση υλικού	231
8.3	Ηλεκτρική μετατόπιση	232
8.4	Γραμμικά διηλεκτρικά	233
8.4.1	Ηλεκτρικό πεδίο σε χώρο με ομογενές διηλεκτρικό	234
8.4.2	Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου σε διηλεκτρικό	234
8.5	Ασκήσεις—Λύσεις	235
8.5.1	Δίπολο	235
8.5.2	Πόλωση υλικού	243

<b>III Μαγνητισμός</b>	<b>259</b>
<b>9 Μαγνητικό πεδίο</b>	<b>261</b>
9.1 Νόμος Biot–Savart . . . . .	261
9.2 Δύναμη Lorentz . . . . .	262
9.3 Μαγνητική δύναμη σε ρεύμα . . . . .	262
9.3.1 Εφαρμογή . . . . .	263
9.4 Νόμος Ampère . . . . .	263
9.4.1 Συμμετρία . . . . .	264
9.4.2 Διαφορική μορφή του νόμου Ampère . . . . .	265
9.5 Μαγνητικό δυναμικό . . . . .	265
9.6 Ροή μαγνητικού πεδίου . . . . .	266
9.7 Νόμος Gauss για το μαγνητισμό . . . . .	266
9.8 Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ) . . . . .	266
9.9 Νόμος Faraday . . . . .	267
9.9.1 Νόμος Lenz . . . . .	267
9.9.2 Διαφορική μορφή νόμου Faraday . . . . .	267
9.10 Επαγωγή . . . . .	268
9.10.1 Αυτεπαγωγή . . . . .	268
9.10.2 Αμοιβαία επαγωγή . . . . .	268
9.11 Ενέργεια μαγνητικού πεδίου . . . . .	269
9.12 Εξισώσεις Maxwell . . . . .	270
9.12.1 Οι εξισώσεις σε υλικό . . . . .	271
9.13 Εφαρμογές . . . . .	273
9.13.1 Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς . . . . .	273
9.13.2 Κυκλώμα RLC εναλλασσόμενου ρεύματος . . . . .	274
9.14 Ασκήσεις–Λύσεις . . . . .	279
9.14.1 Νόμος Biot–Savart . . . . .	279
9.14.2 Δύναμη Lorentz . . . . .	294
9.14.3 Μαγνητική δύναμη σε ρεύμα . . . . .	300
9.14.4 Νόμος Ampère . . . . .	305
9.14.5 Μαγνητικό δυναμικό . . . . .	321
9.14.6 Ροή μαγνητικού πεδίου . . . . .	322
9.14.7 Νόμος Faraday . . . . .	326
9.14.8 Επαγωγή . . . . .	341
9.14.9 Μαγνητική ενέργεια . . . . .	349
9.14.10 Εξισώσεις Maxwell . . . . .	353
9.14.11 Κυκλώματα . . . . .	355
9.14.12 Μετασχηματιστές . . . . .	367
<b>10 Υλικά σε μαγνητικό πεδίο</b>	<b>371</b>
10.1 Μαγνητική διπολική ροπή . . . . .	371
10.2 Μαγνήτιση . . . . .	371
10.2.1 Παραμαγνητισμός . . . . .	372

10.2.2 Διαμαγνητισμός . . . . .	372
10.2.3 Μαγνητικό πεδίο υλικού . . . . .	373
10.3 Μαγνητίζον πεδίο . . . . .	375
10.4 Γραμμικά μαγνητικά υλικά . . . . .	376
10.5 Ασκήσεις—Λύσεις . . . . .	377
10.5.1 Μαγνητική διπολική ροπή . . . . .	377
10.5.2 Μαγνήτιση . . . . .	380
<b>IV Ηλεκτρομαγνητικά κύματα</b>	<b>391</b>
<b>11 Νόμοι διατήρησης ηλεκτρομαγνητισμού</b>	<b>393</b>
11.1 Διατήρηση φορτίου . . . . .	393
11.2 Ενέργεια . . . . .	393
11.3 Ορμή . . . . .	394
11.4 Στροφορμή . . . . .	395
11.5 Ασκήσεις—Λύσεις . . . . .	396
<b>12 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα</b>	<b>399</b>
12.1 Εισαγωγή . . . . .	399
12.1.1 Ορολογία . . . . .	399
12.1.2 Μιγαδική αναπαράσταση . . . . .	400
12.1.3 Μετασχηματισμός Fourier . . . . .	401
12.2 Πρόσπτωση σε διεπιφάνεια . . . . .	401
12.3 Πόλωση κυμάτων . . . . .	402
12.4 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό . . . . .	403
12.4.1 Μονοχρωματικά επίπεδα κύματα . . . . .	403
12.4.2 Ενέργεια και ορμή . . . . .	405
12.5 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε μέσο . . . . .	406
12.6 Πρόσπτωση σε διεπιφάνεια . . . . .	407
12.6.1 Συνοριακές συνθήκες . . . . .	407
12.6.2 Κάθετη πρόσπτωση σε διεπιφάνεια . . . . .	407
12.6.3 Πλάγια πρόσπτωση σε διεπιφάνεια . . . . .	409
12.7 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε αγωγό . . . . .	411
12.7.1 Ανάκλαση σε αγωγή επιφάνεια . . . . .	413
12.7.2 Εξάρτηση από τη συχνότητα . . . . .	413
12.8 Ασκήσεις—Λύσεις . . . . .	415
<b>V Γεωμετρική Οπτική</b>	<b>425</b>
<b>13 Γεωμετρική Οπτική</b>	<b>427</b>
13.1 Διάδοση φωτός . . . . .	427
13.1.1 Ταχύτητα κύματος . . . . .	427

13.1.2	Δείκτης διάθλασης . . . . .	427
13.1.3	Νόμος ανάκλασης . . . . .	428
13.1.4	Νόμος διάθλασης Snell . . . . .	429
13.1.5	Ολική εσωτερική ανάκλαση . . . . .	430
13.2	Σφαιρικό κάτοπτρο . . . . .	430
13.2.1	Διάγραμμα ακτίνων . . . . .	433
13.3	Είδωλο από διάθλαση σε σφαιρική διεπιφάνεια . . . . .	433
13.3.1	Είδωλο από επίπεδη διεπιφάνεια . . . . .	434
13.4	Λεπτός φακός . . . . .	434
13.4.1	Διάγραμμα ακτίνων . . . . .	435
13.4.2	Συνδυασμός φακών . . . . .	435
13.5	Συμβολή κυμάτων . . . . .	435
13.6	Περίθλαση κύματος . . . . .	436
13.7	Ασκήσεις—Λύσεις . . . . .	438
13.7.1	Διάδοση φωτός . . . . .	438
13.7.2	Σφαιρικό Κάτοπτρο . . . . .	459
13.7.3	Σφαιρική διεπιφάνεια . . . . .	466
13.7.4	Λεπτός Φακός . . . . .	469
13.7.5	Συμβολή . . . . .	477
13.7.6	Περίθλαση . . . . .	479
<b>VI</b>	<b>Παραρτήματα</b>	<b>483</b>
<b>A'</b>	<b>Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων</b>	<b>485</b>



**Μέρος Ι**

**Εισαγωγικές γνώσεις**



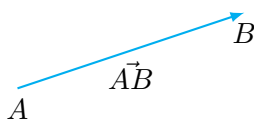
# Κεφάλαιο 1

## Μαθηματικές Γνώσεις: Διάνυσμα

### 1.1 Εισαγωγή

Πολλά μεγέθη στα Μαθηματικά, τη Φυσική αλλά και την καθημερινή μας ζωή, προσδιορίζονται πλήρως από ένα αριθμό. Τα μεγέθη αυτά μπορεί να είναι *αδιάστατα*, όπως ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του· όπως γνωρίζουμε έχει τιμή  $3.14159 \dots$ . Συχνά, ο αριθμός που εκφράζει ένα μέγεθος συνοδεύεται από κάποια μονάδα μέτρησης. Έτσι, η θερμοκρασία ενός τόπου μπορεί να είναι  $29^\circ\text{C}$  ή ο όγκος ενός μπουκαλιού νερού να είναι  $500\text{ mL}$ . Τέτοια μεγέθη, που χρειάζονται μόνο ένα αριθμό για να γνωρίζουμε πλήρως την κατάστασή τους, χαρακτηρίζονται ως *βαθμωτά* (scalar).

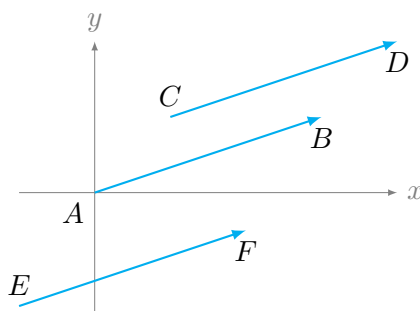
Πολλά άλλα μεγέθη προσδιορίζονται από μια αριθμητική τιμή (το *μέτρο* τους), μια ευθεία στο χώρο (τη *διεύθυνσή* τους), και την κατεύθυνσή τους πάνω στην ευθεία (τη *φορά* τους). Τα μεγέθη αυτά χαρακτηρίζονται ως *διανυσματικά* (vector) και αναπαριστώνται σχηματικά από βέλος (δηλαδή, κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα) συγκεκριμένου μήκους στο χώρο (Σχήμα 1.1). Το διάνυσμα που αναπαρίσταται στο Σχήμα 1.1 από το βέλος  $\vec{AB}$  έχει αρχικό σημείο το  $A$ , τελικό σημείο το  $B$  και το μήκος του συμβολίζεται με  $\|\vec{AB}\|$ .



Σχήμα 1.1: Το βέλος  $\vec{AB}$  αναπαριστά ένα διάνυσμα

Δύο βέλη με ίδιο μήκος, ίδια διεύθυνση και ίδια φορά (άλλα όχι απαραίτητα ίδιο αρχικό και τελικό σημείο), δηλαδή, μετατοπισμένα παράλληλα μεταξύ τους, αντιπροσωπεύουν το ίδιο, «ελεύθερο» όπως λέγεται, διάνυσμα (Σχήμα 1.2).

Παράδειγμα διανυσματικής ποσότητας είναι η επιτάχυνση που δέχεται ένα σώμα στο βαρυτικό πεδίο της Γης: λέμε ότι η τιμή της είναι περίπου  $9.81\text{ m/s}^2$ , η διεύθυνσή της είναι στην ευθεία που περνά από το σώμα και το κέντρο της Γης και η φορά



Σχήμα 1.2: Τα βέλη  $\vec{AB}$ ,  $\vec{CD}$ ,  $\vec{EF}$  είναι παράλληλα μεταξύ τους, με ίδια φορά και έχουν ίδιο μήκος. Αναπαριστούν το ίδιο διάνυσμα.

της είναι από το σώμα προς τη Γη. Η αναπαράστασή της στο χώρο είναι ένα βέλος κατακόρυφο, με μήκος την τιμή της επιτάχυνσης και κατεύθυνση προς το κέντρο της Γης.

Ένα διανυσματικό μέγεθος θα συμβολίζεται, σε έντυπο, με έντονα γράμματα στο συμβολικό όνομά του ή με  $\vec{\phantom{x}}$  πάνω από το όνομά του ή, σε χειρόγραφο, με  $\vec{\phantom{x}}$ . Έτσι, το διανυσματικό μέγεθος της δύναμης γράφεται  $\mathbf{F}$  ή  $\vec{F}$  ή σε χειρόγραφο  $\vec{F}$ .

## 1.2 Συνιστώσες

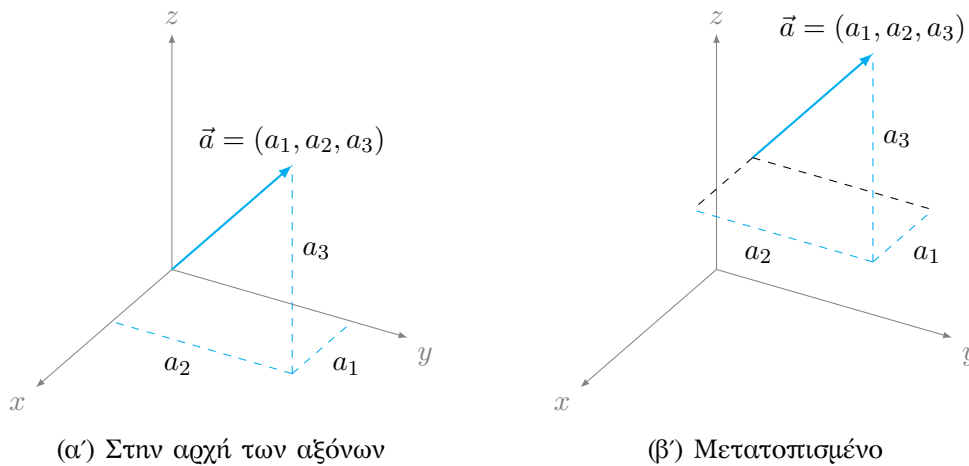
Η αναπαράσταση ενός διανύσματος ως βέλος στον χώρο είναι ανεξάρτητη από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων. Για να μπορέσουμε όμως να αναπτύξουμε τη μαθηματική περιγραφή του διανύσματος, πρέπει να το αναπαραστήσουμε με τις *συνιστώσες* του σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Από όλα τα παράλληλα βέλη που αντιπροσωπεύουν ένα διάνυσμα, επιλέγουμε αυτό που έχει ως αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων· οι συνιστώσες του διανύσματος είναι οι συντεταγμένες του τελικού σημείου του επιλεγμένου βέλους. Μπορούμε να συμβολίσουμε ένα διάνυσμα στον τριδιάστατο χώρο με τη διατεταγμένη παράθεση τριών πραγματικών αριθμών, των τριών συνιστωσών του σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων:

$$\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3) .$$

Γνωρίζουμε ότι ένα τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται από τρεις διαφορετικούς άξονες που τέμνονται σε ένα σημείο και είναι ανά δύο κάθετοι μεταξύ τους. Σε ένα τέτοιο σύστημα μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος χωρίς να είναι απαραίτητο να το φέρουμε στην αρχή των αξόνων. Οι συνιστώσες είναι τα μήκη των κάθετων προβολών του στους τρεις άξονες των συντεταγμένων (Σχήμα 1.3). Μια συνιστώσα μπορεί να είναι αρνητική αν η προβολή του διανύσματος έχει αντίθετη φορά από τον αντίστοιχο άξονα.

Στην περίπτωση που ο χώρος είναι διδιάστατος, ένα διάνυσμα σε αυτό το χώρο έχει δύο συνιστώσες:

$$\vec{a} \equiv (a_1, a_2) .$$



Σχήμα 1.3: Συνιστώσες διανύσματος σε τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων

Εύκολα γενικεύεται αυτή η περιγραφή σε χώρους  $n$ -διαστάσεων:

$$\vec{a} \equiv (a_1, a_2, \dots, a_n) .$$

### 1.2.1 Παρατήρηση

Έστω ένα διάνυσμα  $\vec{AB}$  με συνιστώσες  $(v_1, v_2, v_3)$  σε τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων. Αν το αρχικό του σημείο, το  $A$ , έχει συντεταγμένες  $(a_1, a_2, a_3)$  και το τελικό του σημείο, το  $B$ , έχει συντεταγμένες  $(b_1, b_2, b_3)$  τότε, όπως βλέπουμε στο Σχήμα 1.4 (σε δύο διαστάσεις για διευκόλυνση στην κατανόηση), ισχύει

$$b_1 = a_1 + v_1 , \quad b_2 = a_2 + v_2 , \quad b_3 = a_3 + v_3 .$$

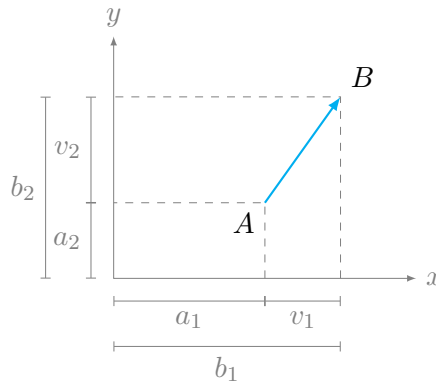
Επομένως, οι συνιστώσες του διανύσματος προκύπτουν από τις καρτεσιανές συντεταγμένες του αρχικού και του τελικού σημείου ως εξής

$$v_1 = b_1 - a_1 , \quad v_2 = b_2 - a_2 , \quad v_3 = b_3 - a_3 . \quad (1.1)$$

#### Παράδειγμα

Ας βρούμε τις συνιστώσες του διανύσματος με αρχικό σημείο το  $P(-3, 4, 1)$  και τελικό σημείο το  $Q(-5, 2, 2)$ . Οι συντεταγμένες των σημείων αναφέρονται σε καρτεσιανό σύστημα.

Το διάνυσμα  $\vec{PQ}$  έχει συνιστώσες  $v_1 = -5 - (-3) = -2$ ,  $v_2 = 2 - 4 = -2$ ,  $v_3 = 2 - 1 = 1$ . Άρα  $\vec{PQ} = (-2, -2, 1)$ .



Σχήμα 1.4: Συνιστώσες διανύσματος  $\vec{AB}$  από συντεταγμένες αρχικού,  $A$ , και τελικού σημείου,  $B$

### 1.2.2 Διάνυσμα θέσης

Η θέση ενός σημείου  $A$  στον τριδιάστατο χώρο μπορεί να προσδιοριστεί αν παραθέσουμε τις συντεταγμένες του σε καρτεσιανό σύστημα,  $(a_1, a_2, a_3)$ . Το διάνυσμα με τέλος εκείνο το σημείο και αρχή την αρχή των αξόνων λέγεται *διάνυσμα θέσης* του  $A$ .

## 1.3 Πράξεις διανυσμάτων

### 1.3.1 Ισότητα διανυσμάτων

Δύο διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  χαρακτηρίζονται ως *ίσα* όταν έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση και ίδια φορά. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες, οι συνιστώσες τους είναι ίσες:

$$\vec{a} = \vec{b} \Leftrightarrow a_1 = b_1, a_2 = b_2, a_3 = b_3.$$

### 1.3.2 Ορισμοί θεμελιωδών πράξεων

Δύο βασικές πράξεις στις οποίες μετέχουν διανύσματα είναι

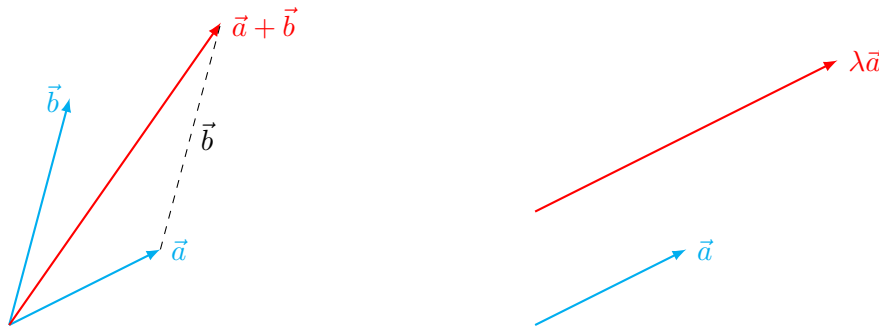
- η πρόσθεση δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , με την οποία προκύπτει το άθροισμά τους,  $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$ , και
- ο πολλαπλασιασμός ενός διανύσματος  $\vec{a}$  με ένα πραγματικό αριθμό  $\lambda$ , με την οποία προκύπτει το διάνυσμα  $\vec{b} = \lambda\vec{a}$ .

Οι πράξεις αυτές παρουσιάζονται σχηματικά στο Σχήμα 1.5.

Για την πρόσθεση των  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ , το διάνυσμα  $\vec{b}$  μετακινείται παράλληλα ώστε το αρχικό του σημείο να συμπίπτει με το τελικό σημείο του  $\vec{a}$ . Το διάνυσμα με αρχή το αρχικό σημείο του  $\vec{a}$  και τέλος το τελικό σημείο του μετατοπισμένου  $\vec{b}$  είναι το

άθροισμά τους. Αυτός είναι ο νόμος του παραλληλόγραμμου για την πρόσθεση· η διαγώνιος του παραλληλόγραμμου με πλευρές τα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  είναι το άθροισμα.

Για το γινόμενο του  $\vec{a}$  με τον αριθμό  $\lambda$ , το διάνυσμα που προκύπτει έχει μέτρο  $|\lambda|$  φορές το μέτρο του  $\vec{a}$ , ίδια διεύθυνση και ίδια ή αντίθετη φορά ανάλογα με το πρόσημο του  $\lambda$  (+ ή − αντίστοιχα).



(α') Πρόσθεση των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  (β') Πολλαπλασιασμός διανύσματος με αριθμό

Σχήμα 1.5: Θεμελιώδεις πράξεις διανυσμάτων

Οι πράξεις όπως ορίστηκαν σχηματικά παραπάνω, είναι ανεξάρτητες από την επιλογή συγκεκριμένου συστήματος συντεταγμένων. Χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες μπορούμε να εκφράσουμε και ποσοτικά τις πράξεις των διανυσμάτων. Σε καρτεσιανό σύστημα η πρόσθεση δύο διανυσμάτων δίνει διάνυσμα με συνιστώσες τα αθροίσματα των αντίστοιχων συνιστωσών των διανυσμάτων:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) . \quad (1.2)$$

Το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα σε καρτεσιανό σύστημα είναι διάνυσμα με συνιστώσες τις συνιστώσες του αρχικού, πολλαπλασιασμένες με τον αριθμό:

$$\lambda \vec{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) . \quad (1.3)$$

## 1.4 Ιδιότητες Πράξεων

### 1.4.1 Πρόσθεση

Για την πρόσθεση δύο διανυσμάτων ισχύουν τα εξής:

- Το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  είναι διάνυσμα  $\vec{c}$  που συμβολίζεται με

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

και που ανήκει στο ίδιο σύνολο διανυσμάτων στο οποίο ανήκουν τα  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$ . Αν π.χ. τα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  είναι διανύσματα σε επίπεδο (διδιάστατο χώρο), το άθροισμά τους είναι και αυτό στον ίδιο διδιάστατο χώρο. Όπως αλλιώς λέμε, το σύνολο των διανυσμάτων είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

- Η πρόσθεση έχει τη μεταθετική ιδιότητα: για οποιαδήποτε  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  ισχύει

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}.$$

- Η πρόσθεση έχει την προσεταιριστική ιδιότητα: για οποιαδήποτε  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  ισχύει

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}.$$

- Στο σύνολο των διανυσμάτων περιλαμβάνεται το (μοναδικό) ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, το διάνυσμα  $\vec{0}$ : για οποιοδήποτε  $\vec{a}$  ισχύει

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}.$$

- Στο σύνολο των διανυσμάτων περιλαμβάνεται το (μοναδικό) αντίθετο στοιχείο οποιουδήποτε διανύσματος  $\vec{a}$ . Συμβολίζεται με  $-\vec{a}$  και ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

### 1.4.2 Πολλαπλασιασμός με αριθμό

Για τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν τα ακόλουθα:

- Το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού  $\lambda$  με οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{a}$  είναι διάνυσμα  $\vec{b}$  που ανήκει στο ίδιο σύνολο με το  $\vec{a}$ . Συμβολίζεται με

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Το σύνολο διανυσμάτων είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα.

- Για οποιουδήποτε αριθμούς  $\lambda, \mu$  και διάνυσμα  $\vec{a}$  ισχύει

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu) \vec{a}.$$

- Υπάρχει και περιλαμβάνεται στο σύνολο των αριθμών το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Είναι μοναδικό και συμβολίζεται με το 1. Ο πολλαπλασιασμός του με οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{a}$  ικανοποιεί τη σχέση

$$1\vec{a} = \vec{a}.$$

- Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων: για οποιαδήποτε  $\lambda, \vec{a}$  και  $\vec{b}$  ισχύει

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

- Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση αριθμών: για οποιαδήποτε  $\lambda, \mu$  και  $\vec{a}$  ισχύει

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}. \quad (1.4)$$



### 1.4.3 Μηδενικό και αντίθετο διάνυσμα

Ας χρησιμοποιήσουμε τις παραπάνω ιδιότητες ώστε να εκφράσουμε το μηδενικό και το αντίθετο διάνυσμα.

Παρατηρήστε ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{a}$ ,

$$\vec{a} + 0\vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{a} = (1 + 0)\vec{a} = 1\vec{a} = \vec{a} .$$

Άρα το διάνυσμα  $0\vec{a}$  είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης:

$$\vec{0} \equiv 0\vec{a} ,$$

δηλαδή, το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό οποιουδήποτε διανύσματος με το 0. Οι συνιστώσες του σε τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων προκύπτουν ότι είναι  $(0, 0, 0)$ .

Αν θέσουμε  $\lambda = 1$ ,  $\mu = -1$  στην (1.4) έχουμε

$$(1 - 1)\vec{a} = 1\vec{a} + (-1)\vec{a} \Rightarrow \vec{0} = \vec{a} + (-1)\vec{a} .$$

Αλλά ισχύει  $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$ . Επομένως, για οποιοδήποτε διάνυσμα  $\vec{a}$  ισχύει

$$(-1)\vec{a} \equiv -\vec{a} .$$

Δηλαδή, το αντίθετο ενός διανύσματος προκύπτει από το διάνυσμα με πολλαπλασιασμό με το  $-1$ . Οι συνιστώσες του σε τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων είναι  $(-a_1 - a_2, -a_3)$ .

### 1.4.4 Παράγωγες πράξεις

Χρησιμοποιώντας την πράξη της πρόσθεσης μπορούμε να ορίσουμε την αφαίρεση ενός διανύσματος  $\vec{a}$  από κάποιο άλλο διάνυσμα  $\vec{b}$ :

$$\vec{b} - \vec{a} \equiv \vec{b} + (-\vec{a}) .$$

Η αφαίρεση του  $\vec{a}$  από το  $\vec{b}$  ορίζεται δηλαδή ως η πρόσθεση στο  $\vec{b}$  του αντίθετου διανύσματος του  $\vec{a}$ . Εύκολα δείχνεται ότι οι συνιστώσες της διαφοράς διανυσμάτων σε καρτεσιανό σύστημα είναι

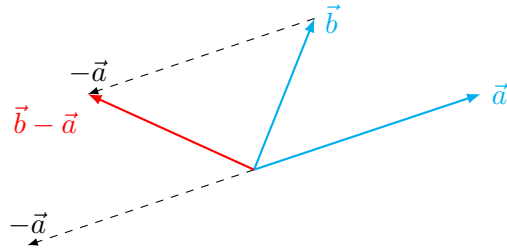
$$\vec{b} - \vec{a} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3) .$$

Ανάλογα, η πράξη της διαίρεσης διανύσματος με αριθμό διάφορο του μηδενός ορίζεται ως ο πολλαπλασιασμός του αντίστροφου του αριθμού με το διάνυσμα:

$$\vec{a}/\lambda \equiv (1/\lambda)\vec{a} .$$

Εύκολα προκύπτει ότι σε καρτεσιανό σύστημα έχουμε

$$\vec{a}/\lambda = (a_1/\lambda, a_2/\lambda, a_3/\lambda) .$$

Σχήμα 1.6: Αφαίρεση του διανύσματος  $\vec{a}$  από το διάνυσμα  $\vec{b}$ **Παράδειγμα**

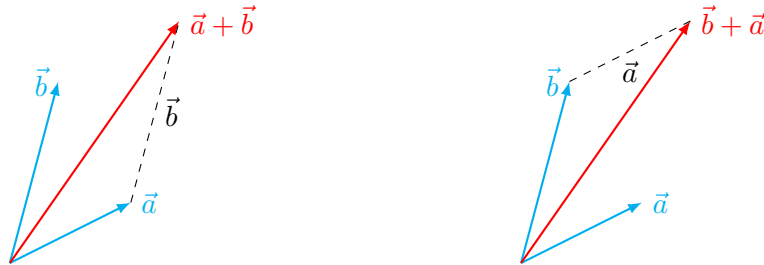
Έστω  $\vec{u} = (-1, 3, 1)$  και  $\vec{v} = (4, 7, 0)$ . Ας υπολογίσουμε τα διανύσματα  $2\vec{u} - 3\vec{v}$  και  $\vec{u} - \vec{v}$ :

$$2\vec{u} - 3\vec{v} = 2(-1, 3, 1) + 3(4, 7, 0) = (-2, 6, 2) + (12, 21, 0) = (10, 27, 2) .$$

$$\vec{u} - \vec{v} = (-1, 3, 1) - (4, 7, 0) = (-1 - 4, 3 - 7, 1 - 0) = (-5, -4, 1) .$$

**1.4.5 Παρατήρηση**

Μπορούμε να αντιληφθούμε σχετικά εύκολα ότι οι πράξεις που ορίσαμε στο Σχήμα 1.5 έχουν τις παραπάνω ιδιότητες. Ας δούμε σχηματικά την μεταθετική ιδιότητα. Στο Σχήμα 1.7 παρατηρούμε ότι τα  $\vec{a} + \vec{b}$  και  $\vec{b} + \vec{a}$  είναι ίδια.

(α') Πρόσθεση των διανυσμάτων  $\vec{a}$  και  $\vec{b}$  (β') Πρόσθεση των διανυσμάτων  $\vec{b}$  και  $\vec{a}$ 

Σχήμα 1.7: Αποτελέσματα της πρόσθεσης διανυσμάτων

Είναι απλό να επαληθεύσουμε τις συγκεκριμένες ιδιότητες των πράξεων αν χρησιμοποιήσουμε τους ορισμούς πρόσθεσης διανυσμάτων και πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα όπως εκφράζονται με τις καρτεσιανές συνιστώσες. Όλες οι ιδιότητες πράξεων με διανύσματα ανάγονται στις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών, π.χ.

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) ,$$

$$\vec{b} + \vec{a} = (b_1, b_2, b_3) + (a_1, a_2, a_3) = (b_1 + a_1, b_2 + a_2, b_3 + a_3) .$$

Καθώς ισχύει η μεταθετική ιδιότητα στην πρόσθεση πραγματικών, προκύπτει ότι πράγματι  $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ .

## 1.5 Εσωτερικό γινόμενο

Μια ακόμα πράξη που μπορούμε να ορίσουμε μεταξύ δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  είναι το *εσωτερικό (ή βαθμωτό) γινόμενο*. Η πράξη έχει αποτέλεσμα έναν πραγματικό αριθμό. Ο ορισμός που είναι ανεξάρτητος από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων είναι ο ακόλουθος:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta . \quad (1.5)$$

Με  $\theta$  συμβολίζουμε τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων, αρκεί να τοποθετηθούν έτσι ώστε να αρχίζουν από το ίδιο σημείο. Η γωνία  $\theta$  είναι μεταξύ  $0^\circ$  και  $180^\circ$ .

Αν χρησιμοποιήσουμε καρτεσιανές συνιστώσες για τα διανύσματα  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  και  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται από τη σχέση

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 . \quad (1.6)$$

### Παρατήρηση

Αν η γωνία μεταξύ δύο διανυσμάτων είναι  $90^\circ$ , το εσωτερικό γινόμενό τους προκύπτει από τον ορισμό ότι είναι 0. Ισχύει και το αντίστροφο: μη μηδενικά διανύσματα με εσωτερικό γινόμενο 0 είναι κάθετα μεταξύ τους και χαρακτηρίζονται ως *ορθογώνια*.

### Παράδειγμα

Ας εξετάσουμε αν τα διανύσματα  $\vec{a} = (3, -2, 0)$ ,  $\vec{b} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{c} = (0, 0, 2)$  είναι ανά δύο ορθογώνια μεταξύ τους.

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενό τους ανά δύο:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= 3 \times 2 + (-2) \times 1 + 0 \times (-2) = 4 , \\ \vec{a} \cdot \vec{c} &= 3 \times 0 + (-2) \times 0 + 0 \times 2 = 0 , \\ \vec{b} \cdot \vec{c} &= 2 \times 0 + 1 \times 0 + (-2) \times 2 = -4 . \end{aligned}$$

Επομένως, τα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  δεν είναι ορθογώνια μεταξύ τους, και ούτε τα  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Τα  $\vec{a}$ ,  $\vec{c}$  όμως είναι.

### 1.5.1 Ιδιότητες

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}, \quad (1.7\alpha')$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}. \quad (1.7\beta')$$

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b}) = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}), \quad (1.7\gamma')$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} > 0, \quad \text{αν } \vec{a} \neq \vec{0}, \quad (1.7\delta')$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = 0, \quad \text{αν } \vec{a} = \vec{0}, \quad (1.7\epsilon')$$

$$\vec{0} \cdot \vec{a} = 0, \quad (1.7\sigma')$$

για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  και οποιοδήποτε πραγματικό αριθμό  $\lambda$ .

Με κατάλληλο συνδυασμό της δεύτερης και της τρίτης ιδιότητας, καταλήγουμε ότι ισχύει η γενικότερη σχέση

$$\vec{a} \cdot (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \mu \vec{a} \cdot \vec{c},$$

για οποιουσδήποτε αριθμούς  $\lambda$ ,  $\mu$  και για οποιαδήποτε διανύσματα.

Όλες οι παραπάνω ιδιότητες εύκολα αποδεικνύονται αν χρησιμοποιήσουμε τις καρτεσιανές συνιστώσες των διανυσμάτων καθώς ανάγονται στις αντίστοιχες ιδιότητες των πραγματικών αριθμών.

## 1.6 Μέτρο διανύσματος

Παρατηρήστε ότι με τη χρήση του ορισμού του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να ορίσουμε ποσοτικά το μέτρο ενός μη μηδενικού διανύσματος:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{a}\|,$$

καθώς η γωνία ενός μη μηδενικού διανύσματος με τον εαυτό του είναι 0. Επομένως, το μέτρο ενός μη μηδενικού διανύσματος μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}.$$

Η σχέση ισχύει και για το μηδενικό διάνυσμα.

## 1.7 Μοναδιαίο διάνυσμα

Το μοναδιαίο διάνυσμα (ή κατεύθυνση) ενός μη μηδενικού διανύσματος  $\vec{a}$  συμβολίζεται με  $\hat{a}$ . Έχει ίδια διεύθυνση και φορά με το  $\vec{a}$  αλλά μέτρο 1. Μαθηματικά προκύπτει από τη σχέση

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|}.$$

## 1.8 Διανύσματα αξόνων καρτεσιανού συστήματος

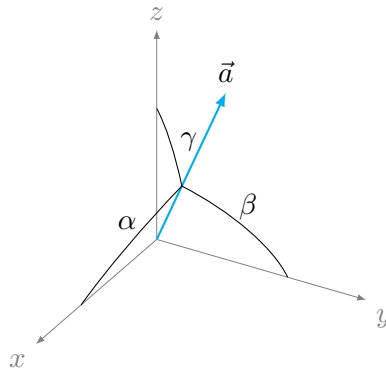
Για τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{i} = (1, 0, 0)$ ,  $\hat{j} = (0, 1, 0)$ ,  $\hat{k} = (0, 0, 1)$  των αξόνων σε καρτεσιανό σύστημα ισχύει

$$\begin{aligned}\hat{i} \cdot \hat{i} &= 1, & \hat{j} \cdot \hat{j} &= 1, & \hat{k} \cdot \hat{k} &= 1, \\ \hat{i} \cdot \hat{j} &= 0, & \hat{i} \cdot \hat{k} &= 0, & \hat{j} \cdot \hat{k} &= 0.\end{aligned}$$

Επακόλουθο των παραπάνω σχέσεων είναι οι τύποι υπολογισμού των συνιστωσών ενός διανύσματος σε καρτεσιανό σύστημα αξόνων: Αν  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$  τότε

$$a_1 = \vec{a} \cdot \hat{i}, \quad a_2 = \vec{a} \cdot \hat{j}, \quad a_3 = \vec{a} \cdot \hat{k}.$$

## 1.9 Γωνίες διεύθυνσης διανύσματος



Σχήμα 1.8: Γωνίες διεύθυνσης ενός διανύσματος

Οι γωνίες  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  μεταξύ ενός διανύσματος  $\vec{a}$  και των θετικών ημιαξόνων ενός καρτεσιανού συστήματος (δηλαδή, των διανυσμάτων  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$ ) λέγονται *γωνίες διεύθυνσης* (Σχήμα 1.8). Οι γωνίες αυτές παίρνουν τιμές στο διάστημα  $[0^\circ, 180^\circ]$  και οι εφαπτομένες τους είναι οι *συντελεστές διεύθυνσης*.

Εύκολα δείχνεται ότι

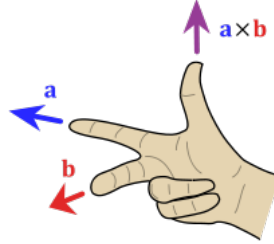
$$\cos \alpha = \hat{a} \cdot \hat{i} = \frac{a_1}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos \beta = \hat{a} \cdot \hat{j} = \frac{a_2}{\|\vec{a}\|}, \quad \cos \gamma = \hat{a} \cdot \hat{k} = \frac{a_3}{\|\vec{a}\|},$$

και

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \left( \frac{a_1}{\|\vec{a}\|} \right)^2 + \left( \frac{a_2}{\|\vec{a}\|} \right)^2 + \left( \frac{a_3}{\|\vec{a}\|} \right)^2 = 1.$$

## 1.10 Εξωτερικό γινόμενο

Το εξωτερικό (ή διανυσματικό) γινόμενο δύο διανυσμάτων  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  γράφεται ως  $\vec{a} \times \vec{b}$  και έχει ως αποτέλεσμα ένα διάνυσμα. Το μέτρο του είναι  $\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta$ , όπου  $\theta$  η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων αν τα φέρουμε στο ίδιο αρχικό σημείο (με  $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ ), και διεύθυνση κάθετη και στα δύο διανύσματα. Η φορά του προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού (Σχήμα 1.9).



Σχήμα 1.9: Κανόνας δεξιού χεριού για το εξωτερικό γινόμενο

Στην περίπτωση που τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  είναι παράλληλα, η διεύθυνση που είναι κάθετη σε αυτά δεν είναι μονοσήμαντη. Όμως τότε, η γωνία μεταξύ τους είναι 0 οπότε  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ . Το ίδιο συμβαίνει και όταν ένα τουλάχιστον από τα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  είναι το μηδενικό διάνυσμα. Αντίστροφα, εύκολα προκύπτει ότι αν το εξωτερικό γινόμενο δύο μη μηδενικών διανυσμάτων είναι  $\vec{0}$ , τα διανύσματα είναι παράλληλα.

Αν χρησιμοποιήσουμε τις καρτεσιανές συνιστώσες των διανυσμάτων Αν  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  και  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ , μπορούμε να ορίσουμε το εξωτερικό γινόμενο ως εξής

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}. \quad (1.8)$$

Η παραπάνω σχέση είναι δύσκολο να απομνημονευθεί. Θα δούμε παρακάτω δύο τρόπους ώστε να την κατασκευάζουμε.

### 1.10.1 Ιδιότητες

Για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  και οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\lambda$ ,  $\mu$  ισχύουν τα ακόλουθα:

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}, \quad (1.9\alpha')$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}. \quad (1.9\beta')$$

$$(\lambda \vec{a}) \times (\mu \vec{b}) = (\lambda \mu)(\vec{a} \times \vec{b}) \quad (1.9\gamma')$$

$$\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}, \quad (1.9\delta')$$

$$\vec{0} \times \vec{a} = \vec{0}. \quad (1.9\epsilon')$$

Με κατάλληλο συνδυασμό της δεύτερης και της τρίτης ιδιότητας καταλήγουμε ότι ισχύει η γενικότερη σχέση

$$(\kappa \vec{a}) \times (\lambda \vec{b} + \mu \vec{c}) = (\kappa \lambda) \vec{a} \times \vec{b} + (\kappa \mu) \vec{a} \times \vec{c},$$

για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  και οποιουδήποτε πραγματικούς αριθμούς  $\kappa$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$ .

Όλες οι παραπάνω σχέσεις αποδεικνύονται με εφαρμογή του ορισμού των εξωτερικού γινομένου ή, πιο εύκολα, με τη χρήση καρτεσιανών συνιστωσών. Έτσι, π.χ.

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_2 b_3 - a_3 b_2) \hat{i} + (a_3 b_1 - a_1 b_3) \hat{j} + (a_1 b_2 - a_2 b_1) \hat{k}, \\ \vec{b} \times \vec{a} &= (b_2 a_3 - b_3 a_2) \hat{i} + (b_3 a_1 - b_1 a_3) \hat{j} + (b_1 a_2 - b_2 a_1) \hat{k}.\end{aligned}$$

Η μεταθετική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και η αντιμεταθετική ιδιότητα της αφαίρεσης πραγματικών αριθμών μας δίνουν ότι  $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$ .

Παρατηρήστε, με εφαρμογή του ορισμού ή τη χρήση καρτεσιανών συνιστωσών, πως γενικά ισχύει ότι

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} \neq \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}),$$

δηλαδή, το εξωτερικό γινόμενο δεν έχει την προσεταιριστική ιδιότητα.

### 1.10.2 Εξωτερικά γινόμενα διανυσμάτων των καρτεσιανών αξόνων

Για τα μοναδιαία διανύσματα των αξόνων σε καρτεσιανό σύστημα εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε με εφαρμογή του ορισμού ότι ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\begin{aligned}\hat{i} \times \hat{i} &= \vec{0}, & \hat{i} \times \hat{j} &= \hat{k}, & \hat{i} \times \hat{k} &= -\hat{j}, \\ \hat{j} \times \hat{i} &= -\hat{k}, & \hat{j} \times \hat{j} &= \vec{0}, & \hat{j} \times \hat{k} &= \hat{i}, \\ \hat{k} \times \hat{i} &= \hat{j}, & \hat{k} \times \hat{j} &= -\hat{i}, & \hat{k} \times \hat{k} &= \vec{0}.\end{aligned}$$

Για να τις θυμόμαστε εύκολα, ας γράψουμε τα μοναδιαία διανύσματα στη σειρά, με κυκλική επανάληψη:

$$\hat{i} \quad \hat{j} \quad \hat{k} \quad \hat{i} \quad \hat{j}$$

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διαδοχικών διανυσμάτων δίνουν το επόμενο τους, αν πάμε από αριστερά προς τα δεξιά, ενώ δίνουν το αντίθετο του επόμενου τους αν πάμε από δεξιά προς τα αριστερά. Επιπλέον, κάθε διάνυσμα με τον εαυτό του έχει εξωτερικό γινόμενο το  $\vec{0}$ .

Λαμβάνοντας υπόψη τις παραπάνω σχέσεις, μπορούμε να εκφράσουμε το εξωτερικό γινόμενο ως συνάρτηση των καρτεσιανών συνιστωσών των διανυσμάτων. Αν

$\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$  και  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$  έχουμε

$$\begin{aligned}\vec{a} \times \vec{b} &= (a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) \times (b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}) \\ &= a_1b_1\hat{i} \times \hat{i} + a_1b_2\hat{i} \times \hat{j} + a_1b_3\hat{i} \times \hat{k} + \\ &\quad a_2b_1\hat{j} \times \hat{i} + a_2b_2\hat{j} \times \hat{j} + a_2b_3\hat{j} \times \hat{k} + \\ &\quad a_3b_1\hat{k} \times \hat{i} + a_3b_2\hat{k} \times \hat{j} + a_3b_3\hat{k} \times \hat{k} \\ &= a_1b_1\vec{0} + a_1b_2\hat{k} + a_1b_3(-\hat{j}) + \\ &\quad a_2b_1(-\hat{k}) + a_2b_2\vec{0} + a_2b_3\hat{i} + \\ &\quad a_3b_1\hat{j} + a_3b_2(-\hat{i}) + a_3b_3\vec{0} \\ &= (a_2b_3 - a_3b_2)\hat{i} + (a_3b_1 - a_1b_3)\hat{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\hat{k} .\end{aligned}$$

Επομένως, καταλήξαμε στη σχέση (1.8), εφαρμόζοντας τις ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου και τα εξωτερικά γινόμενα των μοναδιαίων καρτεσιανών διανυσμάτων.

### Μνημονικός κανόνας

Μπορούμε να καταλήξουμε στην προηγούμενη σχέση αν σχηματίσουμε ένα συμβολικό πίνακα  $3 \times 3$ , με πρώτη γραμμή τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ , με δεύτερη γραμμή τις συνιστώσες του πρώτου διανύσματος του εξωτερικού γινομένου,  $a_1, a_2, a_3$ , και με τρίτη γραμμή τις συνιστώσες του δεύτερου διανύσματος του εξωτερικού γινομένου,  $b_1, b_2, b_3$ :

$$\begin{bmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{bmatrix} .$$

Η ορίζουσα αυτού του πίνακα, με ανάπτυξη κατά την πρώτη γραμμή, είναι η σχέση (1.8). Έτσι έχουμε ένα μνημονικό κανόνα για τις συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου, αν δεν επιθυμούμε να καταλήξουμε σε αυτές με τις πράξεις που παρατέθηκαν παραπάνω.

## 1.11 Βαθμωτό τριπλό γινόμενο

Το γινόμενο  $\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  λέγεται *βαθμωτό τριπλό γινόμενο* (ή *μικτό γινόμενο*) των  $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$  (με αυτή τη σειρά). Το αποτέλεσμά του είναι πραγματικός αριθμός.

Αντικαθιστώντας τις καρτεσιανές συνιστώσες των  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ , έχουμε

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) + a_2(b_3c_1 - b_1c_3) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1) .$$

Παρατηρήστε ότι η σχέση στην οποία καταλήξαμε μπορεί να γραφτεί ως η ορίζουσα του πίνακα

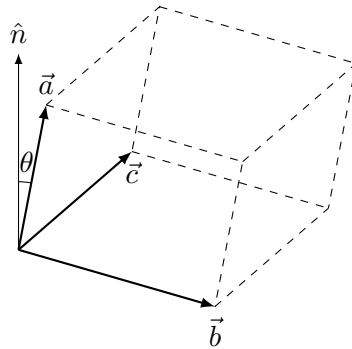
$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} .$$



Άρα, ένας μνημονικός κανόνας για να υπολογίζουμε το βαθμωτό τριπλό γινόμενο είναι

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Γεωμετρικά, το  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$  είναι ο όγκος παραλληλεπίπεδου με «πλευρές» τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , αφού το εμβαδόν της βάσης είναι  $\|\vec{b} \times \vec{c}\|$  και το  $\|\vec{a} \cos \theta\|$  είναι το ύψος.  $\theta$  είναι η γωνία του  $\vec{a}$  με το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο των  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  (δηλαδή με το εξωτερικό τους γινόμενο). Δείτε το Σχήμα 1.10.



Σχήμα 1.10: Παραλληλεπίπεδο που σχηματίζεται από τα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Ο όγκος του είναι  $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$

### 1.11.1 Ιδιότητες

- η κυκλική εναλλαγή των διανυσμάτων αφήνει αναλλοίωτη την τιμή του βαθμωτού τριπλού γινομένου

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}). \quad (1.10)$$

Αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας καρτεσιανές συνιστώσες (ή τις ιδιότητες της ορίζουσας).

- Η εναλλαγή των τελεστών δεν αλλάζει την τιμή του γινομένου

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}.$$

Αποδεικνύεται χρησιμοποιώντας την προηγούμενη ιδιότητα και τη μεταθετική ιδιότητα του εσωτερικού γινομένου.

- Αν δύο οποιαδήποτε διανύσματα στο τριπλό γινόμενο είναι ίδια, το αποτέλεσμα είναι 0.

- Αν το βαθμωτό τριπλό γινόμενο είναι 0 τα διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  είναι συνεπίπεδα (το  $\vec{a}$  είναι κάθετο στο  $\vec{b} \times \vec{c}$  όπως είναι και τα  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ).

Πολλές άλλες ιδιότητες βασίζονται στις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, του εξωτερικού γινομένου ή σε συνδυασμό τους. Π.χ.

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= (\vec{b} \times \vec{c}) \cdot \vec{a}, \\ \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \times \vec{b}),\end{aligned}$$

κλπ.

## 1.12 Διανυσματικό τριπλό γινόμενο

Το διανυσματικό τριπλό γινόμενο ορίζεται ως το εξωτερικό γινόμενο ενός διανύσματος με το εξωτερικό γινόμενο άλλων δύο διανυσμάτων:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}).$$

Παρατηρήστε ότι το διάνυσμα  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  είναι κάθετο στο  $\vec{b} \times \vec{c}$ . Σε αυτό το διάνυσμα είναι επίσης κάθετα τα  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ . Επομένως το διάνυσμα  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$  ανήκει στο επίπεδο που ορίζουν τα  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  και μπορεί να αναπτυχθεί ως ένας συγκεκριμένος γραμμικός συνδυασμός τους:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}.$$

Αν τα διανύσματα  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  είναι γραμμικώς εξαρτημένα τότε δεν ορίζουν ένα επίπεδο αλλά και πάλι η παραπάνω σχέση ισχύει (και τα δύο μέλη της είναι ίσα με 0).

### 1.12.1 Ιδιότητες

Με διαδοχική εφαρμογή του αναπτύγματος του διανυσματικού τριπλού γινομένου, μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0}.$$

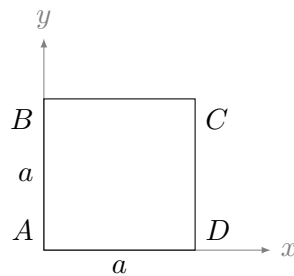
Αυτή η σχέση είναι η ταυτότητα Jacobi. Ο συνδυασμός αυτής της ταυτότητας και των ιδιοτήτων του εξωτερικού γινομένου μπορεί να δώσει άλλες ιδιότητες, π.χ.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) - \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{c}).$$

### 1.13 Ασκήσεις—Λύσεις

1. Ένα τετράγωνο πλευράς  $a$  έχει κορυφές τα σημεία  $A, B, C, D$ . Επιλέξτε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και βρείτε σε αυτό τις συνιστώσες των διανυσμάτων από τις κορυφές  $A, B, C$  προς την κορυφή  $D$ .

**ΛΥΣΗ**



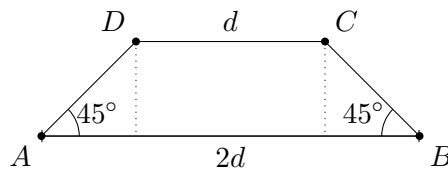
Επιλέγω το σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα: η αρχή είναι στο σημείο  $A$  του τετραγώνου και οι άξονες διέρχονται από τα σημεία  $B$  και  $D$ .

Στο συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων οι κορυφές του έχουν συντεταγμένες  $A(0,0)$ ,  $B(0,a)$ ,  $C(a,a)$ ,  $D(a,0)$ .

Τα διανύσματα από τα  $A, B, C$  προς το  $D$ , δηλαδή τα  $\vec{AD}$ ,  $\vec{BD}$ ,  $\vec{CD}$ , έχουν συνιστώσες

$$\begin{aligned}\vec{AD} &= (a, 0) - (0, 0) = a\hat{i}, \\ \vec{BD} &= (a, 0) - (0, a) = a\hat{i} - a\hat{j}, \\ \vec{CD} &= (a, 0) - (a, a) = -a\hat{j}.\end{aligned}$$

2. Στο Σχήμα 1.11 επιλέξτε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και βρείτε σε αυτό τις συνιστώσες των διανυσμάτων από τις κορυφές  $A, B, D$  προς την κορυφή  $C$  και τις συνιστώσες των διανυσμάτων από τις κορυφές  $B, C, D$  προς την κορυφή  $A$ .



Σχήμα 1.11: Άσκηση 2

**ΛΥΣΗ**

Επιλέγουμε ως αρχή του συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων το μέσο της βάσης του τραπεζίου. Ο άξονας  $x$  είναι παράλληλος στη βάση με κατεύθυνση προς τα δεξιά και κάθετα προς τα επάνω είναι ο άξονας  $y$ . Σε αυτό το σύστημα οι συντεταγμένες των σημείων  $A, B$  είναι  $A = (-d, 0)$  και  $B = (d, 0)$ . Το τρίγωνο που σχηματίζεται με κορυφές το  $C$ , το  $B$  και την προβολή του  $C$  στην κάτω βάση του τραπεζίου, έχει βάση με μήκος  $d/2$ . Το ίδιο ισχύει και για το «συμμετρικό» τρίγωνο, έτσι ώστε όλη η βάση να έχει μήκος  $2d$ . Το  $C$  (και το  $D$ ) απέχει απόσταση  $\ell$  από τη βάση που εύκολα φαίνεται από το τρίγωνο στο σχήμα ότι είναι  $\ell = (d/2) \tan(45^\circ) = d/2$ . Η προβολή του  $C$  στη βάση απέχει από την αρχή των αξόνων απόσταση  $d/2$  ενώ η προβολή του  $D$  έχει συντεταγμένη  $-d/2$ . Επομένως,  $C = (d/2, d/2)$ ,  $D = (-d/2, d/2)$ .

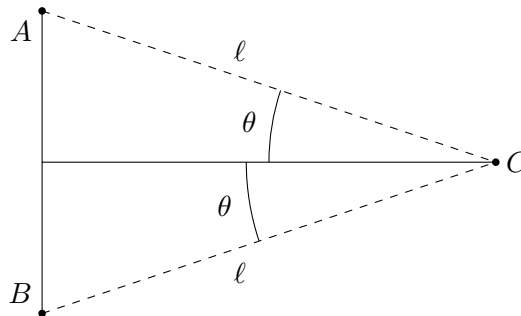
Τότε

$$\begin{aligned}\vec{AC} &= (x_C - x_A, y_C - y_A) = (3d/2, d/2), \\ \vec{BC} &= (x_C - x_B, y_C - y_B) = (-d/2, d/2), \\ \vec{DC} &= (x_C - x_D, y_C - y_D) = (d, 0)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\vec{BA} &= (x_A - x_B, y_A - y_B) = (-2d, 0), \\ \vec{CA} &= (x_A - x_C, y_A - y_C) = (-3d/2, -d/2), \\ \vec{DA} &= (x_A - x_D, y_A - y_D) = (3d/2, -d/2).\end{aligned}$$

3. Στο Σχήμα 1.12 επιλέξτε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων και υπολογίστε σε αυτό τις συνιστώσες των διανυσμάτων από τις κορυφές  $A, B$  προς την  $C$ .



Σχήμα 1.12: Άσκηση 3

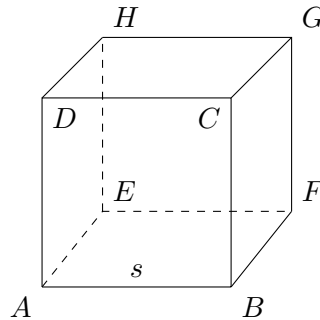
**ΛΥΣΗ**

Επιλέγουμε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων με αρχή το μέσο του τμήματος  $AB$ . Το διάνυσμα από εκεί μέχρι το  $C$  ορίζει τον άξονα  $x$  ενώ το τμήμα από το  $B$  στο  $A$  ορίζει τον άξονα  $y$ . Έστω ότι το σημείο  $A$  απέχει από την αρχή

απόσταση  $d$ . Εύκολα φαίνεται από το πάνω τρίγωνο ότι  $d = \ell \sin \theta$ . Αντίστοιχα ισχύουν για το  $B$ . Επομένως, το σημείο  $A$  έχει συντεταγμένες  $(0, \ell \sin \theta)$  ενώ το σημείο  $B$  έχει συντεταγμένες  $(0, -\ell \sin \theta)$ . Το σημείο  $C$  έχει συντεταγμένες  $(\ell \cos \theta, 0)$ .

Το διάνυσμα  $\vec{AC}$  έχει συνιστώσες  $(x_C - x_A, y_C - y_A) = (\ell \cos \theta, -\ell \sin \theta)$ . Το διάνυσμα  $\vec{BC}$  έχει συνιστώσες  $(x_C - x_B, y_C - y_B) = (\ell \cos \theta, \ell \sin \theta)$ .

4. Στον κύβο με ακμή  $s$  του Σχήματος 1.13 υπολογίστε τη γωνία που σχηματίζουν τα διανύσματα α)  $\vec{ED}$ ,  $\vec{EC}$  και β)  $\vec{ED}$ ,  $\vec{EG}$ .



Σχήμα 1.13: Άσκηση 4

#### ΛΥΣΗ

Τις γωνίες που ψάχνουμε μπορούμε να τις υπολογίσουμε μέσω των συνημιτόνων τους που εμφανίζονται στον τύπο ορισμού του εσωτερικού γινομένου. Θα χρειαστούμε τα μέτρα των διανυσμάτων.

Ορίζουμε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με αρχή το σημείο  $E$  και με άξονες  $x, y, z$  τα διανύσματα  $\vec{EA}$ ,  $\vec{EF}$ ,  $\vec{EH}$  αντίστοιχα. Σε αυτό το σύστημα οι συντεταγμένες του  $E$  είναι  $(0, 0, 0)$ , του  $C$   $(s, s, s)$ , του  $D$   $(s, 0, s)$  και του  $G$   $(0, s, s)$ . Τα διανύσματα  $\vec{ED}$ ,  $\vec{EC}$  και  $\vec{EG}$  έχουν συνιστώσες  $(s, 0, s)$ ,  $(s, s, s)$  και  $(0, s, s)$  αντίστοιχα. Τα μέτρα τους είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned} \|\vec{ED}\| &= \sqrt{\vec{ED} \cdot \vec{ED}} = \sqrt{s^2 + 0^2 + s^2} = s\sqrt{2}, \\ \|\vec{EC}\| &= \sqrt{\vec{EC} \cdot \vec{EC}} = \sqrt{s^2 + s^2 + s^2} = s\sqrt{3}, \\ \|\vec{EG}\| &= \sqrt{\vec{EG} \cdot \vec{EG}} = \sqrt{0^2 + s^2 + s^2} = s\sqrt{2}. \end{aligned}$$

Για τα διανύσματα  $\vec{ED}$ ,  $\vec{EC}$ :

Το εσωτερικό γινόμενο είναι  $\vec{ED} \cdot \vec{EC} = s \times s + 0 \times s + s \times s = 2s^2$ . Για τη γωνία  $\theta$  μεταξύ τους έχουμε

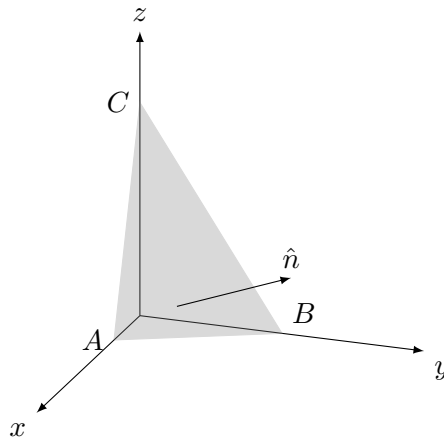
$$\vec{ED} \cdot \vec{EC} = \|\vec{ED}\| \|\vec{EC}\| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{2s^2}{s^2 \sqrt{2} \sqrt{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow \theta \approx 0.62 \text{ rad}.$$

Για τα διανύσματα  $\vec{ED}$ ,  $\vec{EG}$ :

Το εσωτερικό γινόμενο είναι  $\vec{ED} \cdot \vec{EG} = s \times 0 + 0 \times s + s \times s = s^2$ . Για τη γωνία  $\theta$  μεταξύ τους έχουμε

$$\vec{ED} \cdot \vec{EG} = \|\vec{ED}\| \|\vec{EG}\| \cos \theta \Rightarrow \cos \theta = \frac{s^2}{s^2 \sqrt{2} \sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = 60^\circ.$$

5. Βρείτε τις συνιστώσες του μοναδιαίου διανύσματος  $\hat{n}$  που είναι κάθετο στη σκιασμένη επιφάνεια του Σχήματος 1.14, συναρτήσει των συντεταγμένων των σημείων  $A$ ,  $B$ ,  $C$ .



Σχήμα 1.14: Άσκηση 5

### ΛΥΣΗ

Το διάνυσμα  $\hat{n}$  είναι κάθετο στα διανύσματα  $\vec{AB}$  και  $\vec{AC}$  και έχει μέτρο 1, δηλαδή είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του εξωτερικού γινομένου  $\vec{AB} \times \vec{AC}$ . Η σειρά των διανυσμάτων στο εξωτερικό γινόμενο είναι αυτή που με τον κανόνα του δεξιού χεριού θα μας δώσει το ζητούμενο  $\hat{n}$ .

Έστω ότι τα σημεία  $A$ ,  $B$ ,  $C$  έχουν συντεταγμένες  $(a_1, 0, 0)$ ,  $(0, b_2, 0)$ ,  $(0, 0, c_3)$  αντίστοιχα. Το διάνυσμα  $\vec{AB}$  έχει συνιστώσες  $(-a_1, b_2, 0)$  ενώ το  $\vec{AC}$  έχει συνιστώσες  $(-a_1, 0, c_3)$ . Συνεπώς

$$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC} = (-a_1 \hat{i} + b_2 \hat{j}) \times (-a_1 \hat{i} + c_3 \hat{k}) = a_1 c_3 \hat{j} + a_1 b_2 \hat{k} + b_2 c_3 \hat{i}.$$

Το μέτρο τού  $\vec{n}$  είναι

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{\vec{n} \cdot \vec{n}} = \sqrt{(b_2 c_3)^2 + (a_1 c_3)^2 + (a_1 b_2)^2}.$$

Επομένως

$$\begin{aligned}\hat{n} \equiv \frac{\vec{n}}{\|\vec{n}\|} &= \frac{b_2 c_3}{\sqrt{b_2^2 c_3^2 + a_1^2 c_3^2 + a_1^2 b_2^2}} \hat{i} \\ &+ \frac{a_1 c_3}{\sqrt{b_2^2 c_3^2 + a_1^2 c_3^2 + a_1^2 b_2^2}} \hat{j} \\ &+ \frac{a_1 b_2}{\sqrt{b_2^2 c_3^2 + a_1^2 c_3^2 + a_1^2 b_2^2}} \hat{k} .\end{aligned}$$

6. Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  ισχύει

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) .$$

### ΛΥΣΗ

Θα αποδείξουμε την πρώτη ισότητα. Η δεύτερη προκύπτει από την πρώτη με αλλαγή ονομασίας των  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  σε  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ ,  $\vec{a}$ .

Για να δείξουμε ότι

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

χρησιμοποιούμε καρτεσιανές συντεταγμένες. Αν  $\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3)$ ,  $\vec{b} \equiv (b_1, b_2, b_3)$ ,  $\vec{c} \equiv (c_1, c_2, c_3)$ , έχουμε για το αριστερό μέλος

$$\vec{b} \times \vec{c} = (b_2 c_3 - b_3 c_2, b_3 c_1 - b_1 c_3, b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

και

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) &= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) + a_2(b_3 c_1 - b_1 c_3) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1) \\ &= a_1 b_2 c_3 - a_1 b_3 c_2 + a_2 b_3 c_1 - a_2 b_1 c_3 + a_3 b_1 c_2 - a_3 b_2 c_1 .\end{aligned}$$

Στο δεξί μέλος έχουμε

$$\vec{c} \times \vec{a} = (a_3 c_2 - a_2 c_3, a_1 c_3 - a_3 c_1, a_2 c_1 - a_1 c_2)$$

και

$$\begin{aligned}\vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) &= b_1(a_3 c_2 - a_2 c_3) + b_2(a_1 c_3 - a_3 c_1) + b_3(a_2 c_1 - a_1 c_2) \\ &= a_3 b_1 c_2 - a_2 b_1 c_3 + a_1 b_2 c_3 - a_3 b_2 c_1 + a_2 b_3 c_1 - a_1 b_3 c_2 .\end{aligned}$$

Επομένως, τα δύο μέλη είναι ίσα.

7. Αποδείξτε ότι για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  ισχύει

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) + \vec{b} \times (\vec{c} \times \vec{a}) + \vec{c} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{0} .$$

Πότε ισχύει  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$ ;





## Κεφάλαιο 2

# Διαφορικός λογισμός

### 2.1 Διανυσματικός τελεστής $\nabla$

Η συμβολική έκφραση

$$\hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

αποτελεί ένα διανυσματικό τελεστή. Παρατηρήστε ότι οι μερικές παράγωγοι είναι απλά σύμβολα, δεν δρουν κάπου. Η έκφραση έχει νόημα μόνο όταν δρα σε μια συνάρτηση τριών μεταβλητών, βαθμωτή ή διανυσματική. Συμβολίζεται με το  $\nabla$ :

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} . \quad (2.1)$$

### 2.2 Πρώτες παράγωγοι

Ο τελεστής  $\nabla$  συμπεριφέρεται ως διάνυσμα που όταν δρα

- σε βαθμωτή συνάρτηση  $f(x, y, z)$  δίνει ως αποτέλεσμα διάνυσμα:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} . \quad (2.2)$$

Η έκφραση αυτή αποτελεί την κλίση (gradient) της συνάρτησης  $f$ .

- σε διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  με εσωτερικό γινόμενο δίνει ως αποτέλεσμα βαθμωτή συνάρτηση:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} . \quad (2.3)$$

Η έκφραση αυτή αποτελεί την απόκλιση (divergence) της διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{v}$ .

- σε διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$  με εξωτερικό γινόμενο δίνει ως αποτέλεσμα διανυσματική συνάρτηση:

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \hat{i} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right). \quad (2.4)$$

Η έκφραση αυτή αποτελεί το *στροβιλισμό* (curl) της διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{v}$ .

### Παρατήρηση

Γνωρίζουμε ότι σε μέγιστο, ελάχιστο ή σαγματικό σημείο οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης  $f(x, y, z)$  είναι 0. Η απαίτηση αυτή μπορεί να γραφεί συνοπτικά ως  $\nabla f = \vec{0}$ .

### Παράδειγμα

Ας βρούμε την κλίση της συνάρτησης  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Η συνάρτηση είναι προφανώς το μέτρο του διανύσματος θέσης ενός σημείου με συντεταγμένες  $(x, y, z)$ .

$$\begin{aligned} \nabla r &= \frac{\partial r}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial r}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial r}{\partial z} \hat{k} \\ &= \frac{1}{2} \frac{2x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{i} + \frac{1}{2} \frac{2y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{j} + \frac{1}{2} \frac{2z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \hat{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) = \frac{1}{r} \vec{r} = \hat{r}. \end{aligned}$$

### Παράδειγμα

Ας βρούμε τις αποκλίσεις των συναρτήσεων

- $\vec{a} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ ,
- $\vec{b} = \hat{k}$ ,
- $\vec{c} = z\hat{k}$ .

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \vec{a} &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 + 1 + 1 = 3 . \\ \nabla \cdot \vec{b} &= \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(1) = 0 . \\ \nabla \cdot \vec{c} &= \frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z}(z) = 1 .\end{aligned}$$

**Παράδειγμα**

Ας βρούμε τις στροφές των συναρτήσεων  $\vec{a} = -y\hat{i} + x\hat{j}$  και  $\vec{b} = x\hat{j}$ .

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{a} &= \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (-y\hat{i} + x\hat{j}) = \frac{\partial x}{\partial x} \hat{k} + \frac{\partial y}{\partial y} \hat{k} - \frac{\partial y}{\partial z} \hat{j} - \frac{\partial x}{\partial z} \hat{i} = 2\hat{k} . \\ \nabla \times \vec{b} &= \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (x\hat{j}) = \frac{\partial x}{\partial x} \hat{k} - \frac{\partial x}{\partial z} \hat{i} = \hat{k} .\end{aligned}$$

**2.3 Δεύτερες παράγωγοι**

Παρατηρήστε ότι, αν  $f$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, το  $\nabla f$  είναι διανυσματική συνάρτηση. Μπορούμε να δράσουμε σε αυτή τον τελεστή  $\nabla$  με εσωτερικό ή εξωτερικό γινόμενο, να πάρουμε δηλαδή την απόκλιση ή το στροβιλισμό της:  $\nabla \cdot (\nabla f)$  ή  $\nabla \times (\nabla f)$ .

Αντίστοιχα, αν  $\vec{v}$  είναι μια διανυσματική συνάρτηση, το  $\nabla \cdot \vec{v}$  είναι βαθμωτή, οπότε μπορούμε να δράσουμε σε αυτή το  $\nabla$  και να πάρουμε την κλίση της,  $\nabla(\nabla \cdot \vec{v})$ .

Το  $\nabla \times \vec{v}$  είναι και αυτό διανυσματική συνάρτηση οπότε μπορούμε να υπολογίσουμε την απόκλιση ή το στροβιλισμό της:  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v})$  ή  $\nabla \times (\nabla \times \vec{v})$ .

Επομένως

$$\nabla \cdot (\nabla f) = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \left( \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

Αυτό το άθροισμα των δεύτερων παραγώγων της  $f$  ονομάζεται *λαπλασιανή* της  $f$  και συμβολίζεται με  $\nabla^2$ :

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} .$$

Παρατηρούμε ότι η λαπλασιανή βαθμωτής ποσότητας είναι βαθμωτή συνάρτηση.

Μπορούμε να δράσουμε τον τελεστή  $\nabla^2$  σε διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z) = v_x \hat{i} + v_y \hat{j} + v_z \hat{k}$ . Το αποτέλεσμα της δράσης του είναι διάνυσμα με συνιστώσες τις λαπλασιανές των συνιστωσών του διανύσματος:

$$\nabla^2 \vec{v} = \hat{i} \nabla^2 v_x + \hat{j} \nabla^2 v_y + \hat{k} \nabla^2 v_z .$$

## 2.4 Ιδιότητες

### 2.4.1 Πρώτες παράγωγοι

Οι ιδιότητες που γνωρίζουμε για την πρώτη παράγωγο αθροίσματος ισχύουν και για τον τελεστή  $\nabla$  καθώς είναι γραμμικός συνδυασμός πρώτων παραγώγων. Έτσι, για οποιεσδήποτε βαθμωτές συναρτήσεις τριών μεταβλητών  $f, g$ , οποιεσδήποτε διανυσματικές συναρτήσεις  $\vec{a}, \vec{b}$  και οποιονδήποτε πραγματικό αριθμό  $k$  ισχύει

- η επιμεριστική ιδιότητα στη δράση του τελεστή:

$$\begin{aligned}\nabla(f + g) &= \nabla f + \nabla g . \\ \nabla \cdot (\vec{a} + \vec{b}) &= \nabla \cdot \vec{a} + \nabla \cdot \vec{b} . \\ \nabla \times (\vec{a} + \vec{b}) &= \nabla \times \vec{a} + \nabla \times \vec{b} .\end{aligned}$$

- οι σχέσεις

$$\begin{aligned}\nabla(kf) &= k\nabla f . \\ \nabla \cdot (k\vec{a}) &= k\nabla \cdot \vec{a} . \\ \nabla \times (k\vec{a}) &= k\nabla \times \vec{a} .\end{aligned}$$

Για τα γινόμενα συναρτήσεων, βαθμωτών ή διανυσματικών, έχουμε

- 

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g .$$

- 

$$\nabla(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \times (\nabla \times \vec{b}) + \vec{b} \times (\nabla \times \vec{a}) + (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} .$$

- 

$$\nabla \cdot (f\vec{a}) = f(\nabla \cdot \vec{a}) + \vec{a} \cdot (\nabla f) .$$

- 

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) .$$

- 

$$\nabla \times (f\vec{a}) = f(\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \times (\nabla f) .$$

- 

$$\nabla \times (\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \cdot \nabla)\vec{a} - (\vec{a} \cdot \nabla)\vec{b} + \vec{a}(\nabla \cdot \vec{b}) - \vec{b}(\nabla \cdot \vec{a}) .$$

Στην περίπτωση που θέλουμε να υπολογίσουμε κλίση, απόκλιση ή στροβιλισμό λόγου συναρτήσεων ( $f/g$  ή  $\vec{a}/g$ ) θα εφαρμόσουμε τις παραπάνω ιδιότητες στο γινόμενο της  $f$  ή της  $\vec{a}$  με την  $1/g$ . Έτσι π.χ.

$$\nabla \left( \frac{f}{g} \right) = \nabla \left( f \frac{1}{g} \right) = f \nabla \left( \frac{1}{g} \right) + \frac{1}{g} \nabla f = -f \frac{1}{g^2} \nabla g + \frac{1}{g} \nabla f = \frac{g \nabla f - f \nabla g}{g^2} ,$$

ή

$$\nabla \times \left( \frac{\vec{a}}{g} \right) = \nabla \times \left( \frac{1}{g} \vec{a} \right) = \frac{1}{g} \nabla \times \vec{a} - \vec{a} \times \nabla \left( \frac{1}{g} \right) = \frac{1}{g} \nabla \times \vec{a} + \frac{1}{g^2} \vec{a} \times \nabla g = \frac{g \nabla \times \vec{a} + \vec{a} \times \nabla g}{g^2} .$$

### 2.4.2 Δεύτερες παράγωγοι

Για τις δεύτερες παραγώγους εύκολα δείχνεται ότι

•

$$\nabla \times (\nabla f) = \vec{0} ,$$

για οποιαδήποτε πραγματική βαθμωτή παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f$ :

$$\begin{aligned} \nabla \times (\nabla f) &= \nabla \times \left( \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{k} \right) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\ &= \hat{i} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \\ &= \vec{0} . \end{aligned}$$

•

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0 ,$$

για οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) &= \nabla \cdot \left( \hat{i} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \\ &= \frac{\partial^2 v_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 v_y}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 v_z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 v_x}{\partial z \partial y} \\ &= 0 . \end{aligned}$$

## 2.5 Ασκήσεις–Λύσεις

1. Βρείτε τις κλίσεις των ακόλουθων συναρτήσεων:

$$(\alpha') \quad f(x, y, z) = x^2 + y^3 + z^4.$$

$$(\beta') \quad g(x, y, z) = x^2 y^3 z^4.$$

$$(\gamma') \quad h(x, y, z) = e^x \sin(y) \ln(z).$$

### ΛΥΣΗ

Η κλίση της  $f$  είναι

$$\nabla f = \hat{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial f}{\partial z} = 2x\hat{i} + 3y^2\hat{j} + 4z^3\hat{k}.$$

Η κλίση της  $g$  είναι

$$\nabla g = \hat{i} \frac{\partial g}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial g}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial g}{\partial z} = 2xy^3z^4\hat{i} + 3x^2y^2z^4\hat{j} + 4x^3y^3z^3\hat{k}.$$

Η κλίση της  $h$  είναι

$$\nabla h = \hat{i} \frac{\partial h}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial h}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial h}{\partial z} = e^x \sin(y) \ln(z)\hat{i} + e^x \cos(y) \ln(z)\hat{j} + e^x \sin(y) \frac{1}{z}\hat{k}.$$

2. Έστω  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα με αρχή ένα σημείο  $(x', y', z')$  και τέλος το σημείο με συντεταγμένες  $(x, y, z)$ , και  $r$  το μέτρο του. Δείξτε ότι

$$(\alpha') \quad \nabla(r^2) = 2\vec{r}.$$

$$(\beta') \quad \nabla(1/r) = -\hat{r}/r^2.$$

(γ') Ποιος είναι ο γενικός τύπος για το διάνυσμα  $\nabla(r^n)$ ;

### ΛΥΣΗ

Το διάνυσμα  $\vec{r}$  είναι  $\vec{r} = (x, y, z) - (x', y', z') = (x - x', y - y', z - z')$ . Το μέτρο του είναι  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$ .

Η κλίση του  $r^2$  είναι

$$\nabla r^2 = \hat{i} \frac{\partial r^2}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial r^2}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial r^2}{\partial z} = 2(x - x')\hat{i} + 2(y - y')\hat{j} + 2(z - z')\hat{k} = 2\vec{r}.$$

Η κλίση του  $1/r$  είναι

$$\begin{aligned}
 \nabla \left( \frac{1}{r} \right) &= \nabla \left( \frac{1}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \right) \\
 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} 2(x-x')\hat{i} \\
 &\quad -\frac{1}{2} \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} 2(y-y')\hat{j} \\
 &\quad -\frac{1}{2} \frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} 2(z-z')\hat{k} \\
 &= -\frac{1}{((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{3/2}} \vec{r} \\
 &= -\frac{1}{r^3} \vec{r} = -\frac{1}{r^2} \hat{r} .
 \end{aligned}$$

Η κλίση του  $r^n$  με  $n \neq 0$  είναι

$$\begin{aligned}
 \nabla r^n &= \nabla ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{n/2} \\
 &= \frac{n}{2} ((x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2)^{n/2-1} (2(x-x')\hat{i} + 2(y-y')\hat{j} + 2(z-z')\hat{k}) \\
 &= n (r^2)^{n/2-1} \vec{r} = nr^{n-2} \vec{r} = nr^{n-1} \hat{r} .
 \end{aligned}$$

Ο τύπος ισχύει και για  $n = 0$  (καθώς τότε τα δύο μέλη είναι 0).

3. Βρείτε τις αποκλίσεις των συναρτήσεων

- $\vec{v} = x^2\hat{i} + 3xz^2\hat{j} - 2xz\hat{k}$ ,
- $\vec{u} = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3xz\hat{k}$ ,
- $\vec{w} = y^2\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + 2xz\hat{k}$ .

#### ΛΥΣΗ

Η απόκλιση της  $\vec{v}$  είναι

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 2x + 0 - 2x = 0 .$$

Η απόκλιση της  $\vec{u}$  είναι

$$\nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = y + 2z + 3z = y + 5z .$$

Η απόκλιση της  $\vec{w}$  είναι

$$\nabla \cdot \vec{w} = \frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} + \frac{\partial w_z}{\partial z} = 0 + 2x + 2x = 4x .$$

4. Βρείτε τους στροβιλισμούς των συναρτήσεων

- $\vec{v} = x^2\hat{i} + 3xz^2\hat{j} - 2xz\hat{k}$ ,
- $\vec{u} = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3xz\hat{k}$ ,
- $\vec{w} = y^2\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + 2xz\hat{k}$ .

### ΛΥΣΗ

Ο στροβιλισμός της  $\vec{v}$  είναι

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{v} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & 3xz^2 & -2xz \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0 - 6xz) + \hat{j}(0 + 2z) + \hat{k}(3z^2 - 0) = -6xz\hat{i} + 2z\hat{j} + 3z^2\hat{k} .\end{aligned}$$

Ο στροβιλισμός της  $\vec{u}$  είναι

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{u} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u_x & u_y & u_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy & 2yz & 3xz \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0 - 2y) + \hat{j}(0 - 3z) + \hat{k}(0 - x) = -2y\hat{i} - 3z\hat{j} - x\hat{k} .\end{aligned}$$

Ο στροβιλισμός της  $\vec{w}$  είναι

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{w} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & 2xy + z^2 & 2xz \end{vmatrix} \\ &= \hat{i}(0 - 2z) + \hat{j}(0 - 2z) + \hat{k}(2y - 2y) = -2x\hat{i} - 2z\hat{j} .\end{aligned}$$

5. Έστω  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα με αρχή ένα σημείο  $(x', y', z')$  και τέλος το σημείο με συντεταγμένες  $(x, y, z)$ , και  $r$  το μέτρο του. Βρείτε το στροβιλισμό της συνάρτησης

$$\vec{f} = \frac{1}{r^3} \vec{r} .$$



**ΛΥΣΗ**

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned}\vec{f} &= \frac{x - x'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{i} \\ &+ \frac{y - y'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{j} \\ &+ \frac{z - z'}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \hat{k} .\end{aligned}$$

Τότε

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_y}{\partial x} &= -3 \frac{(y - y')(x - x')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} , \\ \frac{\partial f_z}{\partial x} &= -3 \frac{(z - z')(x - x')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} , \\ \frac{\partial f_x}{\partial y} &= -3 \frac{(y - y')(x - x')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} = \frac{\partial f_y}{\partial x} , \\ \frac{\partial f_z}{\partial y} &= -3 \frac{(z - z')(y - y')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} = \frac{\partial f_y}{\partial z} , \\ \frac{\partial f_x}{\partial z} &= -3 \frac{(z - z')(x - x')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} = \frac{\partial f_z}{\partial x} , \\ \frac{\partial f_y}{\partial z} &= -3 \frac{(z - z')(y - y')}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{5/2}} = \frac{\partial f_z}{\partial y} .\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\nabla \times \vec{f} = \hat{i} \left( \frac{\partial f_z}{\partial y} - \frac{\partial f_y}{\partial z} \right) + \hat{j} \left( \frac{\partial f_x}{\partial z} - \frac{\partial f_z}{\partial x} \right) + \hat{k} \left( \frac{\partial f_y}{\partial x} - \frac{\partial f_x}{\partial y} \right) = \vec{0} .$$

6. Αποδείξτε τις σχέσεις

•

$$\nabla(fg) = g\nabla f + f\nabla g .$$

•

$$\nabla \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \cdot (\nabla \times \vec{b}) .$$

•

$$\nabla \times (f\vec{a}) = f(\nabla \times \vec{a}) - \vec{a} \times (\nabla f) .$$

7. Βρείτε τις καρτεσιανές συνιστώσες του διανύσματος  $(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b}$  συναρτήσει των συνιστωσών των  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ .

**ΛΥΣΗ**

Καθώς

$$\vec{a} \cdot \nabla = a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z},$$

προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} (\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} &= \left( a_1 \frac{\partial}{\partial x} + a_2 \frac{\partial}{\partial y} + a_3 \frac{\partial}{\partial z} \right) (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k}) \\ &= \left( a_1 \frac{\partial b_1}{\partial x} + a_2 \frac{\partial b_1}{\partial y} + a_3 \frac{\partial b_1}{\partial z} \right) \hat{i} + \left( a_1 \frac{\partial b_2}{\partial x} + a_2 \frac{\partial b_2}{\partial y} + a_3 \frac{\partial b_2}{\partial z} \right) \hat{j} \\ &\quad + \left( a_1 \frac{\partial b_3}{\partial x} + a_2 \frac{\partial b_3}{\partial y} + a_3 \frac{\partial b_3}{\partial z} \right) \hat{k} \\ &= (\vec{a} \cdot \nabla b_1) \hat{i} + (\vec{a} \cdot \nabla b_2) \hat{j} + (\vec{a} \cdot \nabla b_3) \hat{k}. \end{aligned}$$

8. Αν  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  βρείτε τις κλίσεις των συναρτήσεων  $x/r$ ,  $y/r$ ,  $z/r$ .

**ΛΥΣΗ**

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{x}{r} \right) &= \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{x}{r} \right) + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{x}{r} \right) + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{x}{r} \right) \\ &= \hat{i} \frac{r - x^2/r}{r^2} + \hat{j} \frac{-xy/r}{r^2} + \hat{k} \frac{-xz/r}{r^2} = \frac{1}{r} \hat{i} - \frac{x}{r^3} \vec{r}. \end{aligned}$$

Αντίστοιχα,

$$\nabla \left( \frac{y}{r} \right) = \frac{1}{r} \hat{j} - \frac{y}{r^3} \vec{r}$$

και

$$\nabla \left( \frac{z}{r} \right) = \frac{1}{r} \hat{k} - \frac{z}{r^3} \vec{r}.$$

9. Αν  $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$ , υπολογίστε το διάνυσμα  $(\hat{r} \cdot \nabla) \hat{r}$ .

**ΛΥΣΗ**

Οι καρτεσιανές συνιστώσες του  $\hat{r}$  είναι  $(x/r, y/r, z/r)$  όπου  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Ξέρουμε από προηγούμενη άσκηση ότι

$$(\vec{a} \cdot \nabla) \vec{b} = (\vec{a} \cdot \nabla b_1) \hat{i} + (\vec{a} \cdot \nabla b_2) \hat{j} + (\vec{a} \cdot \nabla b_3) \hat{k}.$$

Επιπλέον, δείξαμε σε προηγούμενη άσκηση ότι

$$\begin{aligned} \nabla \left( \frac{x}{r} \right) &= \frac{1}{r} \hat{i} - \frac{x}{r^2} \hat{r} \\ \nabla \left( \frac{y}{r} \right) &= \frac{1}{r} \hat{j} - \frac{y}{r^2} \hat{r} \\ \nabla \left( \frac{z}{r} \right) &= \frac{1}{r} \hat{k} - \frac{z}{r^2} \hat{r} \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
 (\hat{r} \cdot \nabla) \hat{r} &= \left( \hat{r} \cdot \nabla \left( \frac{x}{r} \right) \right) \hat{i} + \left( \hat{r} \cdot \nabla \left( \frac{y}{r} \right) \right) \hat{j} + \left( \hat{r} \cdot \nabla \left( \frac{z}{r} \right) \right) \hat{k} \\
 &= \left( \hat{r} \cdot \left( \frac{1}{r} \hat{i} - \frac{x}{r^2} \hat{r} \right) \right) \hat{i} + \left( \hat{r} \cdot \left( \frac{1}{r} \hat{j} - \frac{y}{r^2} \hat{r} \right) \right) \hat{j} + \left( \hat{r} \cdot \left( \frac{1}{r} \hat{k} - \frac{z}{r^2} \hat{r} \right) \right) \hat{k} \\
 &= \left( \frac{x}{r^2} - \frac{x}{r^2} \right) \hat{i} + \left( \frac{y}{r^2} - \frac{y}{r^2} \right) \hat{j} + \left( \frac{z}{r^2} - \frac{z}{r^2} \right) \hat{k} \\
 &= \vec{0}.
 \end{aligned}$$

10. Αν  $\vec{v}_a = x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}$  και  $\vec{v}_b = xy \hat{i} + 2yz \hat{j} + 3xz \hat{k}$ , υπολογίστε το  $(\vec{v}_a \cdot \nabla) \vec{v}_b$ .

**ΛΥΣΗ**

Ξέρουμε από προηγούμενη άσκηση ότι

$$(\vec{v}_a \cdot \nabla) \vec{v}_b = (\vec{v}_a \cdot \nabla v_{b,1}) \hat{i} + (\vec{v}_a \cdot \nabla v_{b,2}) \hat{j} + (\vec{v}_a \cdot \nabla v_{b,3}) \hat{k}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_a \cdot \nabla v_{b,1} &= (x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}) \cdot \nabla(xy) \\
 &= x^2 \frac{\partial(xy)}{\partial x} + 3xz^2 \frac{\partial(xy)}{\partial y} - 2xz \frac{\partial(xy)}{\partial z} \\
 &= x^2 y + 3x^2 z^2.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_a \cdot \nabla v_{b,2} &= (x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}) \cdot \nabla(2yz) \\
 &= x^2 \frac{\partial(2yz)}{\partial x} + 3xz^2 \frac{\partial(2yz)}{\partial y} - 2xz \frac{\partial(2yz)}{\partial z} \\
 &= 6xz^3 - 4xyz.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \vec{v}_a \cdot \nabla v_{b,3} &= (x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}) \cdot \nabla(3xz) \\
 &= x^2 \frac{\partial(3xz)}{\partial x} + 3xz^2 \frac{\partial(3xz)}{\partial y} - 2xz \frac{\partial(3xz)}{\partial z} \\
 &= 3x^2 z - 6x^2 z = -3x^2 z.
 \end{aligned}$$

Επομένως,

$$(\vec{v}_a \cdot \nabla) \vec{v}_b = (x^2 y + 3x^2 z^2) \hat{i} + (6xz^3 - 4xyz) \hat{j} - 3x^2 z \hat{k}.$$

11. Υπολογίστε τις λαπλασιανές των ακόλουθων συναρτήσεων:

- $f = x^2 + 2xy + 3z + 4$ .
- $g = \sin x \sin y \sin z$ .
- $h = e^{-5x} \sin(4y) \cos(3z)$ .
- $v = x^2 \hat{i} + 3xz^2 \hat{j} - 2xz \hat{k}$ .

## ΛΥΣΗ

•

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 2 + 0 + 0 = 2 .$$

•

$$\begin{aligned} \nabla^2 g &= \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2} \\ &= -\sin x \sin y \sin z - \sin x \sin y \sin z - \sin x \sin y \sin z = -3g . \end{aligned}$$

•

$$\begin{aligned} \nabla^2 h &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \\ &= 25e^{-5x} \sin(4y) \cos(3z) - 16e^{-5x} \sin(4y) \cos(3z) \\ &\quad - 9e^{-5x} \sin(4y) \cos(3z) = 0 . \end{aligned}$$

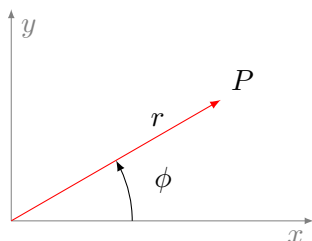
•

$$\begin{aligned} \nabla^2 \vec{v} &= \hat{i} \nabla^2 v_x + \hat{j} \nabla^2 v_y + \hat{k} \nabla^2 v_z \\ &= \hat{i} \nabla^2 (x^2) + \hat{j} \nabla^2 (3xz^2) + \hat{k} \nabla^2 (-2xz) = 2\hat{i} + 6x\hat{j} + 0\hat{k} . \end{aligned}$$

## Κεφάλαιο 3

# Συστήματα συντεταγμένων

### 3.1 Πολικές συντεταγμένες



Σχήμα 3.1: Πολικές συντεταγμένες

Ένα φυσικό σύστημα στο επίπεδο μπορεί φυσικά να αντιμετωπιστεί μαθηματικά με ένα καρτεσιανό σύστημα δύο διαστάσεων,  $x - y$ . Εάν έχει κυκλική συμμετρία, όμως, διευκολύνει η επιλογή του πολικού συστήματος συντεταγμένων,  $r, \phi$  (Σχήμα 3.1).

Ένα σημείο  $P$  του επιπέδου με συντεταγμένες  $x, y$  στο καρτεσιανό σύστημα, έχει πολικές συντεταγμένες που δίνονται από τις σχέσεις

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x},$$

με  $r \geq 0$  και  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Αντίστροφα:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi.$$

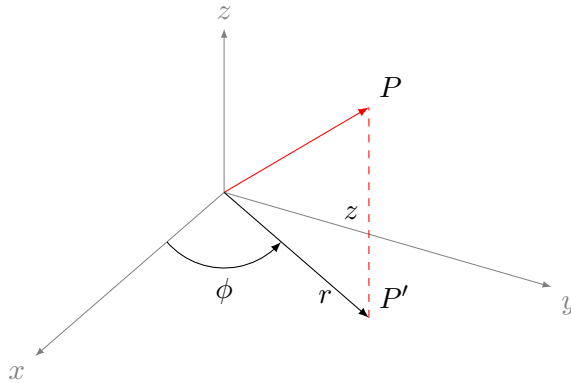
Το  $r$  είναι η απόσταση του σημείου  $P$  από την αρχή των αξόνων και το  $\phi$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{r}$  με τον άξονα  $x$ .

Τα μοναδιαία διανύσματα του πολικού συστήματος είναι το  $\hat{r}$ , από την αρχή του συστήματος προς το  $P$ , και το  $\hat{\phi}$ , που εφάπτεται στο  $P$ , με φορά προς μεγαλύτερα  $\phi$ .

Το μήκος  $ds$  ενός στοιχειώδους τμήματος κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων, ακτίνα  $R$  και τόξο  $d\phi$  είναι  $ds = R d\phi$ .

Το στοιχειώδες εμβαδό  $dA$  ενός τμήματος σε απόσταση  $r$  από την αρχή των αξόνων είναι  $dA = dx dy = r dr d\phi$ .

### 3.2 Κυλινδρικές συντεταγμένες



Σχήμα 3.2: Κυλινδρικές συντεταγμένες

Τη μελέτη φυσικών συστημάτων με κυλινδρική συμμετρία διευκολύνουν πολύ οι *κυλινδρικές συντεταγμένες*,  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$  (Σχήμα 3.2). Ένα σημείο  $P$  του χώρου με συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  στο καρτεσιανό σύστημα, έχει κυλινδρικές συντεταγμένες που δίνονται από τις σχέσεις

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x}, \quad z = z,$$

με  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$  και  $-\infty < z < \infty$ . Αντίστροφα:

$$x = r \cos \phi, \quad y = r \sin \phi, \quad z = z.$$

Το  $r$  είναι η απόσταση του σημείου  $P$  από την αρχή των αξόνων, το  $\phi$  είναι η γωνία που σχηματίζει η προβολή του διανύσματος  $\vec{r}$  στο επίπεδο  $x - y$  με τον άξονα  $x$ , και  $z$  είναι η (εμπρόσμη) απόσταση του  $P$  από το επίπεδο  $x - y$ .

Τα μοναδιαία διανύσματα του κυλινδρικού συστήματος είναι το  $\hat{r}$ , από την αρχή του συστήματος προς την προβολή  $P'$  του  $P$  στο επίπεδο  $x - y$ , το  $\hat{\phi}$ , που είναι στο επίπεδο  $x - y$ , εφαπτόμενο στο σημείο  $P'$  και με φορά προς μεγαλύτερα  $\phi$ , και το  $\hat{k}$  που είναι κάθετο στο επίπεδο  $x - y$ , με τη φορά του άξονα  $z$ . Τα διανύσματα αυτά αποτελούν βάση του χώρου των διανυσμάτων στις τρεις διαστάσεις. Η σχέση

τους με τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος είναι

$$\hat{r} = \cos \phi \hat{i} + \sin \phi \hat{j}, \quad (3.1\alpha')$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}, \quad (3.1\beta')$$

$$\hat{k} = \hat{k}. \quad (3.1\gamma')$$

Παρατηρήστε ότι τα μοναδιαία διανύσματα  $\hat{r}$ ,  $\hat{\phi}$  μεταβάλλονται με την αλλαγή της συντεταγμένης  $\phi$ .

Το στοιχείο όγκου  $d\tau$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι  $d\tau = r dr d\phi dz$ .

Το στοιχείο επιφάνειας πάνω σε επιφάνεια σταθερής ακτίνας  $\rho$  είναι  $dA = \rho d\phi dz$ .

Το στοιχειώδες μήκος σε κάποιο σημείο  $(r, \phi, z)$  είναι  $d\vec{s} = dr \hat{r} + r d\phi \hat{\phi} + dz \hat{k}$ .

### 3.2.1 Τελεστής $\nabla$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

Αν  $f(x, y, z)$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, ξέρουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Αντίστοιχη σχέση ισχύει για το  $\frac{\partial f}{\partial y}$ . Η αντικατάσταση αυτών των σχέσεων και των τύπων 3.1 στην εξίσωση 2.2 δίνει την κλίση μιας συνάρτησης σε κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{z}.$$

Ανάλογα μπορούν να προκύψουν οι σχέσεις για την απόκλιση και το στροβιλισμό μιας διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{v}(r, \phi, z)$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial v_z}{\partial z},$$

και

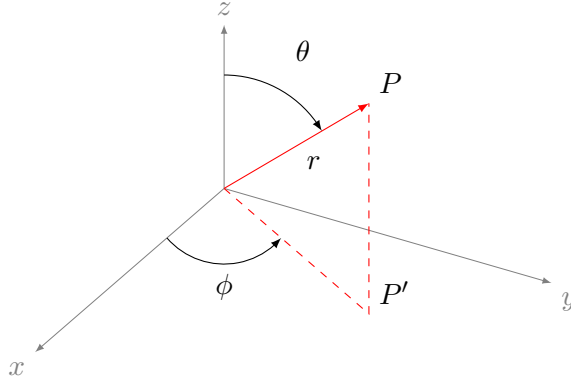
$$\nabla \times \vec{v} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \phi} - \frac{\partial v_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (rv_\phi) - \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) \hat{z},$$

καθώς και η σχέση για τη λαπλασιανή βαθμωτής συνάρτησης  $f(r, \phi, z)$

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

## 3.3 Σφαιρικές συντεταγμένες

Τη μελέτη φυσικών συστημάτων με σφαιρική συμμετρία διευκολύνουν πολύ οι σφαιρικές συντεταγμένες,  $r$ ,  $\theta$ ,  $\phi$  (Σχήμα 3.3). Ένα σημείο  $P$  του χώρου με συντεταγμένες  $x$ ,  $y$ ,  $z$  στο καρτεσιανό σύστημα, έχει σφαιρικές συντεταγμένες που



Σχήμα 3.3: Σφαιρικές συντεταγμένες

δίνονται από τις σχέσεις

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad \theta = \tan^{-1} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z}, \quad \phi = \tan^{-1} \frac{y}{x},$$

με  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ . Αντίστροφα:

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \theta.$$

Το  $r$  είναι η απόσταση του σημείου  $P$  από την αρχή των αξόνων, το  $\phi$  είναι η γωνία που σχηματίζει η προβολή του διανύσματος  $\vec{r}$  στο επίπεδο  $x - y$  με τον άξονα  $x$ , και το  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα  $\vec{r}$  με τον άξονα  $z$ .

Τα μοναδιαία διανύσματα του συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων είναι το  $\hat{r}$ , από την αρχή του συστήματος προς το  $P$ , το  $\hat{\phi}$ , που είναι στο επίπεδο  $x - y$ , εφαπτόμενο στην προβολή του  $P$  και με φορά προς μεγαλύτερα  $\phi$ , και το  $\hat{\theta}$  που είναι στο επίπεδο του διανύσματος  $\vec{r}$  και του  $\hat{k}$ , εφαπτόμενο στο  $P$ , με φορά προς μεγαλύτερα  $\theta$ . Τα διανύσματα αυτά αποτελούν βάση του χώρου των διανυσμάτων στις τρεις διαστάσεις. Η σχέση τους με τα μοναδιαία διανύσματα του καρτεσιανού συστήματος είναι

$$\hat{r} = \sin \theta \cos \phi \hat{i} + \sin \theta \sin \phi \hat{j} + \cos \theta \hat{k}, \quad (3.2\alpha')$$

$$\hat{\theta} = \cos \theta \cos \phi \hat{i} + \cos \theta \sin \phi \hat{j} - \sin \theta \hat{k}, \quad (3.2\beta')$$

$$\hat{\phi} = -\sin \phi \hat{i} + \cos \phi \hat{j}. \quad (3.2\gamma')$$

Παρατηρήστε ότι τα μοναδιαία διανύσματα μεταβάλλονται με την αλλαγή των συντεταγμένων  $\theta$  και  $\phi$ .

Το στοιχείο όγκου  $d\tau$  σε σφαιρικές συντεταγμένες είναι  $d\tau = r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi$ .

Το στοιχείο επιφάνειας πάνω σε επιφάνεια σταθερής ακτίνας  $\rho$  είναι  $d\vec{A} = \rho^2 \sin \theta \, d\theta \, d\phi \, \hat{r}$ .

Το στοιχειώδες μήκος σε κάποιο σημείο  $(r, \theta, \phi)$  είναι  $d\vec{s} = dr \hat{r} + r d\theta \hat{\theta} + r \sin \phi d\phi \hat{\phi}$ .



3.3.1 Τελεστής  $\nabla$  σε σφαιρικές συντεταγμένες

Αν  $f(x, y, z)$  είναι μια βαθμωτή συνάρτηση, ξέρουμε ότι

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}.$$

Αντίστοιχες σχέσεις ισχύουν για τα  $\frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z}$ . Η αντικατάσταση αυτών των σχέσεων και των τύπων 3.2 στην εξίσωση 2.2 δίνει την κλίση μιας συνάρτησης σε σφαιρικές συντεταγμένες

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\phi}.$$

Ανάλογα μπορούν να προκύψουν οι σχέσεις για την απόκλιση και το στροβιλισμό μιας διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{v}(r, \theta, \phi)$

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi},$$

και

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{v} &= \frac{1}{r \sin \theta} \begin{vmatrix} \hat{r} & r\hat{\theta} & r \sin \theta \hat{\phi} \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial \phi} \\ v_r & r v_\theta & r \sin \theta v_\phi \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\phi) - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r v_\phi) \right] \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r v_\theta) - \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi}, \end{aligned}$$

καθώς και η σχέση για τη λαπλασιανή βαθμωτής συνάρτησης  $f(r, \theta, \phi)$

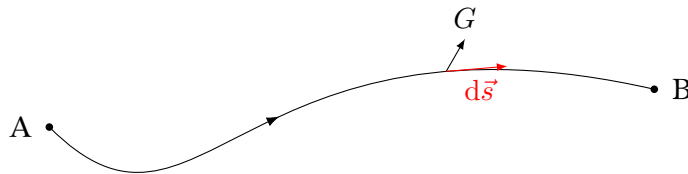
$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial f}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2}.$$



## Κεφάλαιο 4

# Ολοκληρωτικός λογισμός

### 4.1 Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα



Σχήμα 4.1: Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα διανυσματικού πεδίου

Μια καμπύλη  $C$  στο χώρο, που ξεκινά από το σημείο  $A$  και καταλήγει στο σημείο  $B$ , μπορεί να χωριστεί σε στοιχειώδη τμήματα μήκους  $ds$ . Σε κάθε τέτοιο τμήμα μπορούμε να ορίσουμε ένα στοιχειώδες διάνυσμα μήκους,  $d\vec{s}$ . Το διάνυσμα αυτό θα έχει μέτρο το στοιχειώδες μήκος  $ds$ , διεύθυνση *εφαπτόμενη* στο στοιχειώδες τμήμα και φορά τη φορά διαγραφής της καμπύλης.

Αν η καμπύλη  $C$  βρίσκεται (Σχήμα 4.1) σε *διανυσματικό πεδίο* (χώρος στον οποίο σε κάθε σημείο ορίζεται ένα διανυσματικό μέγεθος)  $\vec{G}$ , μπορούμε να ορίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\vec{G}$  πάνω στην καμπύλη ως εξής

$$I = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{G} \cdot d\vec{s}.$$

Υπολογίζουμε δηλαδή σε κάθε σημείο της καμπύλης το εσωτερικό γινόμενο των  $\vec{G}$  και  $d\vec{s}$  και τους αριθμούς που προκύπτουν τους αθροίζουμε για όλη την καμπύλη. Το ολοκλήρωμα στο οποίο καταλήγουμε είναι *απλό* και είναι βαθμωτό μέγεθος. Γενικά, η τιμή του εξαρτάται από την καμπύλη  $C$ .

Αν η καμπύλη  $C$  είναι κλειστή και έχουμε ορίσει συγκεκριμένη φορά διαγραφής,

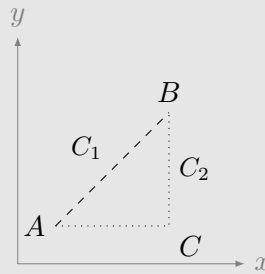
το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\Gamma = \oint_C \vec{G} \cdot d\vec{s}.$$

Η βαθμωτή ποσότητα  $\Gamma$  λέγεται τότε *κυκλοφορία* του  $\vec{G}$  πάνω στη  $C$ .

### Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{v}(x, y, z) = y^2\hat{i} + 2x(y+1)\hat{j}$  από το σημείο  $A = (0.5, 0.5, 0)$  στο σημείο  $B = (2, 2, 0)$  κατά μήκος των δύο καμπυλών που εμφανίζονται στο Σχήμα.



**Α' τρόπος** Η καμπύλη  $C_1$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το  $A$  στο  $B$ . Γενικά ισχύει  $d\vec{s} = dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ . Για την καμπύλη  $C_1$  έχουμε  $x = y$ ,  $dz = 0$  ενώ η κλίση της είναι

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = 1.$$

Επομένως,  $dy = dx$ .

Από τα παραπάνω, το  $d\vec{s}$  της συγκεκριμένης καμπύλης είναι

$$d\vec{s} = dx\hat{i} + dx\hat{j}.$$

Για το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{v} \cdot d\vec{s}$  έχουμε

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = (y^2\hat{i} + 2x(y+1)\hat{j}) \cdot (dx\hat{i} + dx\hat{j}) = (y^2 + 2x(y+1))dx \stackrel{x=y}{=} (3x^2 + 2x)dx.$$

Επομένως, καθώς το  $x$  στην καμπύλη μεταβάλλεται από  $x_A = 0.5$  έως το  $x_B = 2$  έχουμε

$$I = \int_{C_{1A \rightarrow B}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{0.5}^2 dx(3x^2 + 2x) = (x^3 + x^2) \Big|_{0.5}^2 = \frac{93}{8}.$$

Η καμπύλη  $C_2$  αποτελείται από το οριζόντιο τμήμα μεταξύ του σημείου  $A$  και του  $C = (2, 0.5, 0)$  και από το κατακόρυφο τμήμα μεταξύ του σημείου  $C$  και του  $B$ .

Στο πρώτο τμήμα έχουμε  $dy = dz = 0$  και  $y = y_A = 0.5$ , ενώ το  $x$  μεταβάλλεται μεταξύ  $x_A = 0.5$  και  $x_C = 2$ . Επομένως,  $D\vec{s} = dx\hat{i}$ ,  $\vec{v} = y_A^2\hat{i} + 2x(y_A + 1)\hat{j}$ , και

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = (y_A^2\hat{i} + 2x(y_A + 1)\hat{j}) \cdot (dx\hat{i}) = y_A^2 dx.$$

Στο δεύτερο τμήμα έχουμε  $dx = dz = 0$  και  $x = x_B = 2$ , ενώ το  $y$  μεταβάλλεται μεταξύ  $y_C = 0.5$  και  $y_B = 2$ . Επομένως,  $D\vec{s} = dy\hat{j}$ ,  $\vec{v} = y^2\hat{i} + 2x_B(y + 1)\hat{j}$ , και

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = (y^2\hat{i} + 2x_B(y + 1)\hat{j}) \cdot (dy\hat{j}) = 2x_B(y + 1) dy.$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_{1A \rightarrow B}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{C_{2A \rightarrow C}} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{C_{2C \rightarrow B}} \vec{v} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_{0.5}^2 dx 0.5^2 + \int_{0.5}^2 dy 2 \times 2(y + 1) = \frac{111}{8}. \end{aligned}$$

**Β' τρόπος, γενικός** Η καμπύλη  $C_1$  είναι το ευθύγραμμο τμήμα από το  $A$  στο  $B$ . Η παραμετρική εξίσωσή της είναι

$$\begin{aligned} \vec{r}_1(\tau) &= \vec{r}_A + \tau(\vec{r}_B - \vec{r}_A) = (0.5, 0.5, 0) + \tau((2, 2, 0) - (0.5, 0.5, 0)) \\ &= (0.5 + 1.5\tau, 0.5 + 1.5\tau, 0) = (0.5 + 1.5\tau)(\hat{i} + \hat{j}), \end{aligned}$$

με  $\tau \in [0, 1]$ : όταν  $\tau = 0$ ,  $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_A$  και όταν  $\tau = 1$ ,  $\vec{r}_1 \equiv \vec{r}_B$ .

Ένα στοιχειώδες τμήμα αυτής της καμπύλης έχει  $d\vec{s} = d\vec{r}_1 = 1.5 d\tau(\hat{i} + \hat{j})$ .

Στα σημεία της καμπύλης  $C_1$  το  $\vec{v}$  παίρνει τιμές

$$\begin{aligned} \vec{v}(\tau) &= (0.5 + 1.5\tau)^2\hat{i} + 2(0.5 + 1.5\tau)(0.5 + 1.5\tau + 1)\hat{j} \\ &= \frac{1}{4}((1 + 6\tau + 9\tau^2)\hat{i} + 6(1 + 4\tau + 3\tau^2)\hat{j}). \end{aligned}$$

Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{v} \cdot d\vec{s}$  είναι

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = 1.5 d\tau \frac{1}{4}((1 + 6\tau + 9\tau^2) + 6(1 + 4\tau + 3\tau^2)) = d\tau \frac{3}{8}(7 + 30\tau + 27\tau^2).$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $\vec{v}$  γίνεται

$$I = \int_{C_{1A \rightarrow B}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 d\tau \frac{3}{8}(7 + 30\tau + 27\tau^2) = \frac{93}{8}.$$

Η καμπύλη  $C_2$  αποτελείται από το οριζόντιο τμήμα μεταξύ του σημείου  $A$  και του  $C = (2, 0.5, 0)$  και από το κατακόρυφο τμήμα μεταξύ του σημείου  $C$  και του  $B$ .

Το πρώτο τμήμα έχει παραμετρική καμπύλη

$$\vec{r}_{2,AC}(t) = \vec{r}_A + \tau(\vec{r}_C - \vec{r}_A) = (0.5, 0.5, 0) + \tau((2, 0.5, 0) - (0.5, 0.5, 0)) = (0.5 + 1.5\tau, 0.5, 0),$$

με  $\tau \in [0, 1]$ : όταν  $\tau = 0$ ,  $\vec{r}_{2,AC} \equiv \vec{r}_A$  και όταν  $\tau = 1$ ,  $\vec{r}_{2,AC} \equiv \vec{r}_C$ .

Ένα στοιχειώδες τμήμα αυτού του τμήματος της καμπύλης έχει  $d\vec{s} = d\vec{r}_{2,AC} = 1.5 d\tau \hat{i}$ .

Στα σημεία της καμπύλης  $C_{2,AC}$  το  $\vec{v}$  παίρνει τιμές

$$\vec{v}(\tau) = 0.5^2 \hat{i} + 2(0.5 + 1.5\tau)(0.5 + 1)\hat{j} = 0.25\hat{i} + (1.5 + 4.5\tau)\hat{j}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{v} \cdot d\vec{s}$  είναι

$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = (0.25\hat{i} + (1.5 + 4.5\tau)\hat{j}) \cdot (1.5 d\tau)\hat{i} = \frac{3}{8} d\tau.$$

Το δεύτερο τμήμα έχει παραμετρική καμπύλη

$$\vec{r}_{2,CB}(t) = \vec{r}_C + \tau(\vec{r}_B - \vec{r}_C) = (2, 0.5, 0) + \tau(2, 2, 0) - ((2, 0.5, 0)) = (2, 0.5 + 1.5\tau, 0)$$

με  $\tau \in [0, 1]$ : όταν  $\tau = 0$ ,  $\vec{r}_{2,CB} \equiv \vec{r}_C$  και όταν  $\tau = 1$ ,  $\vec{r}_{2,CB} \equiv \vec{r}_B$ .

Ένα στοιχειώδες τμήμα αυτού του τμήματος της καμπύλης έχει  $d\vec{s} = d\vec{r}_{2,BC} = 1.5 d\tau \hat{j}$ .

Στα σημεία της καμπύλης  $C_{2,BC}$  το  $\vec{v}$  παίρνει τιμές

$$\vec{v}(\tau) = (0.5 + 1.5\tau)^2 \hat{i} + 2 \times 2 \times (0.5 + 1.5\tau + 1)\hat{j} = (1 + 6\tau + 9\tau^2)/4 \hat{i} + 6(1 + \tau)\hat{j}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{v} \cdot d\vec{s}$  είναι

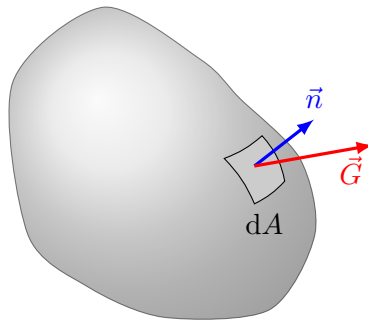
$$\vec{v} \cdot d\vec{s} = ((1 + 6\tau + 9\tau^2)/4 \hat{i} + 6(1 + \tau)\hat{j}) \cdot (1.5 d\tau)\hat{j} = 9(1 + \tau) d\tau.$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_{1A \rightarrow B}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_{C_{2A \rightarrow C}} \vec{v} \cdot d\vec{s} + \int_{C_{2C \rightarrow B}} \vec{v} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^1 \frac{3}{8} d\tau + \int_0^1 9(1 + \tau) d\tau = \frac{111}{8}. \end{aligned}$$

## 4.2 Επιφανειακό ολοκλήρωμα

Μια επιφάνεια  $S$  στο χώρο μπορεί να χωριστεί σε στοιχειώδη τμήματα εμβαδού  $dA$ . Σε κάθε τέτοιο τμήμα μπορούμε να ορίσουμε ένα στοιχειώδες διάνυσμα επιφάνειας,  $d\vec{A}$ . Θα έχει μέτρο το στοιχειώδες εμβαδό  $dA$ , διεύθυνση *κάθετη* στο στοιχειώδες τμήμα και φορά προς τα «έξω» (όποια ορίσουμε ως «έξω»). Αν με  $\hat{n}$  συμβολίσουμε το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο τμήμα της επιφάνειας



Σχήμα 4.2: Υπολογισμός ροής διανυσματικού πεδίου από επιφάνεια

και έχει φορά προς τα «έξω», τότε

$$d\vec{A} = dA\hat{n}.$$

Αν η επιφάνεια  $S$  βρίσκεται (Σχήμα 4.2) σε διανυσματικό πεδίο (χώρος στον οποίο σε κάθε σημείο ορίζεται ένα διανυσματικό μέγεθος)  $\vec{G}$  τότε η ροή  $\Phi$  του πεδίου  $\vec{G}$  από την  $S$  δίνεται από τη σχέση

$$\Phi = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{A}. \quad (4.1)$$

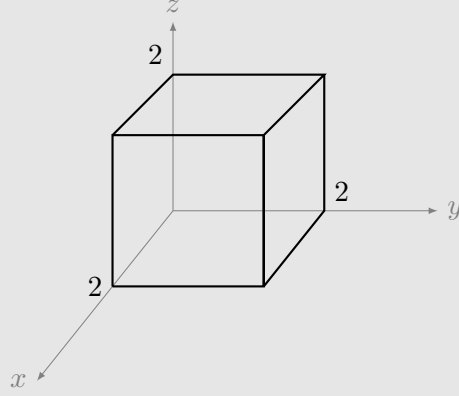
Το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται είναι *επιφανειακό*, δηλαδή σε κάθε σημείο της επιφάνειας υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των  $\vec{G}$  και  $d\vec{A}$  και τους αριθμούς που προκύπτουν τους αθροίζουμε για όλη την επιφάνεια. Το ολοκλήρωμα στο οποίο καταλήγουμε είναι *διπλό*. Γενικά, η τιμή του εξαρτάται από την επιφάνεια  $S$ . Η ροή είναι βαθμωτό μέγεθος.

Αν η επιφάνεια  $S$  είναι κλειστή, το ολοκλήρωμα γράφεται

$$\Phi = \oint_S \vec{G} \cdot d\vec{A}. \quad (4.2)$$

### Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε τη ροή της διανυσματικής συνάρτησης  $\vec{v}(x, y, z) = 2xz\hat{i} + (x + 2)y\hat{j} + y(z^2 - 3)\hat{k}$  από τις πέντε έδρες του κύβου, εκτός από τη βάση του, που εμφανίζεται στο Σχήμα.



Η επάνω έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(i)$ , έχει  $z = 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{k}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx dy$ . Επομένως,

$$\Phi_{(i)} = \int_{(i)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^2 \vec{v}(x, y, 2) \cdot \hat{k} dx dy = \int_0^2 \int_0^2 y(2^2 - 3) dx dy = 4 .$$

Η αριστερή έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(ii)$ , έχει  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $-\hat{j}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(ii)} = \int_{(ii)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_0^2 \int_0^2 \vec{v}(x, 0, z) \cdot \hat{j} dx dz = - \int_0^2 \int_0^2 (x + 2) dx dz = -12 .$$

Η δεξιά έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(iii)$ , έχει  $y = 2$ ,  $0 \leq x \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{j}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(iii)} = \int_{(iii)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^2 \vec{v}(x, 2, z) \cdot \hat{j} dx dz = \int_0^2 \int_0^2 (x + 2) dx dz = 12 .$$

Η εμπρός έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(iv)$ , έχει  $x = 2$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{i}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dy dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(iv)} = \int_{(iv)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^2 \int_0^2 \vec{v}(2, y, z) \cdot \hat{i} dy dz = \int_0^2 \int_0^2 2 \times 2 \times z dy dz = 16 .$$



Η πίσω έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(v)$ , έχει  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 2$ ,  $0 \leq z \leq 2$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $-\hat{i}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dy \, dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(v)} = \int_{(v)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_0^2 \int_0^2 \vec{v}(0, y, z) \cdot \hat{i} \, dy \, dz = - \int_0^2 \int_0^2 2 \times 0 \times z \, dy \, dz = 0 .$$

Η συνολική ροή είναι το αλγεβρικό άθροισμα των παραπάνω:  $\Phi = 20$ .

### 4.3 Ολοκλήρωμα όγκου

Ένα στερεό στον τριδιάστατο χώρο μπορεί να χωριστεί σε στοιχειώδη τμήματα με όγκο  $d\tau$ . Σε καρτεσιανές συντεταγμένες,  $d\tau = dx \, dy \, dz$ . Μπορούμε να υπολογίσουμε σε όλο τον όγκο του στερεού το *τριπλό ολοκλήρωμα όγκου* μιας βαθμωτής συνάρτησης  $f(x, y, z)$ , ως εξής

$$I = \iiint_V f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz .$$

Αν έχουμε διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z)$  τότε

$$\begin{aligned} I &= \iiint_V \vec{v}(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_V (v_1 \hat{i} + v_2 \hat{j} + v_3 \hat{k}) \, dx \, dy \, dz \\ &= \hat{i} \iiint_V v_1 \, dx \, dy \, dz + \hat{j} \iiint_V v_2 \, dx \, dy \, dz + \hat{k} \iiint_V v_3 \, dx \, dy \, dz . \end{aligned}$$

### 4.4 Θεμελιώδη θεωρήματα

#### 4.4.1 Θεώρημα για την κλίση

Έστω μια βαθμωτή συνάρτηση  $f(x, y, z)$ . Η κλίση της,  $\nabla f$ , είναι διανυσματική συνάρτηση. Για το επικαμπύλιο ολοκλήρωμά της σε μια διαδρομή  $C$ , από το σημείο  $A$  στο σημείο  $B$ ,

$$\int_{C_{A \rightarrow B}} (\nabla f) \cdot d\vec{s} ,$$

μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύει

$$\int_{C_{A \rightarrow B}} (\nabla f) \cdot d\vec{s} = f(B) - f(A) . \quad (4.3)$$

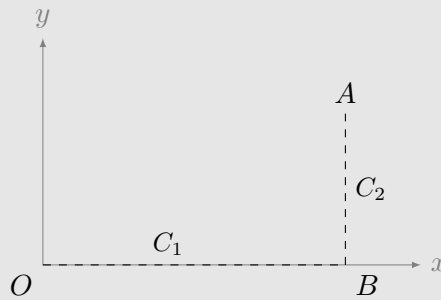
Το ολοκλήρωμα της κλίσης της  $f$  είναι *ανεξάρτητο* από την επιλογή της διαδρομής  $C$ : εξαρτάται μόνο από τις τιμές της συνάρτησης στο αρχικό και στο τελικό σημείο. Συνέπεια αυτού του θεωρήματος είναι ότι η κυκλοφορία της κλίσης της συνάρτησης  $f$  σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή  $C$  είναι 0 (καθώς το αρχικό και τελικό σημείο που θα επιλέξουμε ταυτίζονται):

$$\oint_C (\nabla f) \cdot d\vec{s} = 0.$$

### Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της κλίσης της  $f(x, y, z) = xy^2$  σε καμπύλη της επιλογής μας μεταξύ των σημείων  $O(0, 0, 0)$  και  $A(2, 1, 0)$ .

Η κλίση είναι  $\nabla f = y^2\hat{i} + 2xy\hat{j}$ . Ας πάρουμε τη διαδρομή στο επίπεδο  $x - y$  που ξεκινά από το  $O$ , προχωρά παράλληλα στον άξονα  $x$  μέχρι το σημείο  $B(2, 0, 0)$  (τμήμα  $C_1$ ) και μετά από το  $B$  προχωρά παράλληλα στον άξονα  $y$  μέχρι το σημείο  $A$  (τμήμα  $C_2$ ).



Για το πρώτο τμήμα: η παραμετρική του καμπύλη είναι  $\vec{r}(\tau) = 2\tau\hat{i}$  με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή, η κλίση της  $f$  παίρνει τιμές  $\nabla f = \vec{0}$ . Η στοιχειώδης διαδρομή είναι  $d\vec{s} = (2\hat{i} + \hat{j}) d\tau$ . Επομένως,

$$\int_{C_1} (\nabla f) \cdot d\vec{s} = 0.$$

Για το δεύτερο τμήμα: η παραμετρική του καμπύλη είναι  $\vec{r}(\tau) = (2, 0, 0) + \tau((2, 1, 0) - (2, 0, 0)) = (2, \tau, 0)$  με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή, η κλίση της  $f$  παίρνει τιμές  $\nabla f = \tau^2\hat{i} + 4\tau\hat{j}$ . Η στοιχειώδης διαδρομή είναι  $d\vec{s} = d\tau\hat{j}$ . Επομένως,

$$\int_{C_2} (\nabla f) \cdot d\vec{s} = \int_0^1 4\tau d\tau = 2.$$

Συνολικά

$$\int_{C_1+C_2} (\nabla f) \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} (\nabla f) \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} (\nabla f) \cdot d\vec{s} = 2.$$

Σύμφωνα με την εξίσωση 4.3 πρέπει να είναι ίσο με  $f(A) - f(O) = 2 \times 1^2 - 0$ , όπως και είναι.

#### 4.4.2 Θεώρημα για την απόκλιση

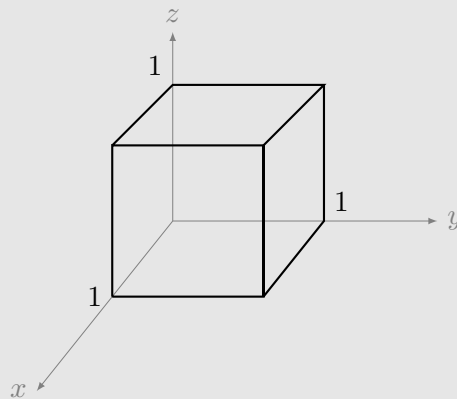
Έστω μια διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z)$ . Η απόκλισή της,  $\nabla \cdot \vec{v}$ , είναι βαθμωτή συνάρτηση. Το ολοκλήρωμά της σε κάποιο όγκο  $V$  μπορεί ναδειχθεί ότι είναι ίσο με τη ροή της συνάρτησης  $\vec{v}$  από τη συνοριακή επιφάνεια  $S$  του όγκου:

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{v}) d\tau = \oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A}. \quad (4.4)$$

Το θεώρημα αυτό είναι το *θεώρημα Green* ή *θεώρημα της απόκλισης*.

##### Παράδειγμα

Ας ελέγξουμε το θεώρημα απόκλισης για τη συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z) = y^2\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k}$  στο κύβο του Σχήματος.



Η απόκλιση της  $\vec{v}$  είναι  $\nabla \cdot \vec{v} = 2x + 2y$ . Το ολοκλήρωμα στον όγκο  $V$  του κύβου είναι

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{v}) dx dy dz = 2 \int_0^1 dx \int_0^1 dy \int_0^1 dz (x + y) = \int_0^1 dx (2x + 1) = 2.$$

Ας υπολογίσουμε τη ροή της  $\vec{v}$  από τις έδρες του κύβου:

Η επάνω έδρα του κύβου, ως την αριθμήσουμε με  $(i)$ , έχει  $z = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{k}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx dy$ . Επομένως,

$$\Phi_{(i)} = \int_{(i)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \vec{v}(x, y, 1) \cdot \hat{k} dx dy = \int_0^1 \int_0^1 2y dx dy = 1.$$

Η αριστερή έδρα του κύβου, ως την αριθμήσουμε με  $(ii)$ , έχει  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $-\hat{j}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(ii)} = \int_{(ii)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_0^1 \int_0^1 \vec{v}(x, 0, z) \cdot \hat{j} dx dz = - \int_0^1 \int_0^1 z^2 dx dz = -\frac{1}{3}.$$

Η δεξιά έδρα του κύβου, ως την αριθμήσουμε με  $(iii)$ , έχει  $y = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{j}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(iii)} = \int_{(iii)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \vec{v}(x, 1, z) \cdot \hat{j} dx dz = \int_0^1 \int_0^1 (2x + z^2) dx dz = \frac{4}{3}.$$

Η εμπρός έδρα του κύβου, ως την αριθμήσουμε με  $(iv)$ , έχει  $x = 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{i}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dy dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(iv)} = \int_{(iv)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \vec{v}(1, y, z) \cdot \hat{i} dy dz = \int_0^1 \int_0^1 y^2 dy dz = \frac{1}{3}.$$

Η πίσω έδρα του κύβου, ως την αριθμήσουμε με  $(v)$ , έχει  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $-\hat{i}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dy dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(v)} = \int_{(v)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_0^1 \int_0^1 \vec{v}(0, y, z) \cdot \hat{i} dy dz = - \int_0^1 \int_0^1 y^2 dy dz = -\frac{1}{3}.$$

Η κάτω έδρα του κύβου, που θα την αριθμήσουμε με  $(vi)$ , έχει  $z = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς

τα έξω, είναι το  $-\hat{k}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx dy$ . Επομένως,

$$\Phi_{(vi)} \int_{(vi)} \vec{v} \cdot d\vec{A} = - \int_0^1 \int_0^1 \vec{v}(x, y, 0) \cdot \hat{k} dx dy = - \int_0^1 \int_0^1 2y \times 0 dx dy = 0 .$$

Η συνολική ροή είναι το αλγεβρικό άθροισμα των παραπάνω,  $\Phi = 2$ , όσο ακριβώς προβλέπει το θεώρημα της απόκλισης.

#### 4.4.3 Θεώρημα για το στροβιλισμό

Έστω μια διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z)$ . Ο στροβιλισμός της,  $\nabla \times \vec{v}$ , είναι άλλη διανυσματική συνάρτηση. Η ροή του στροβιλισμού από μια επιφάνεια  $S$  μπορεί ναδειχθεί ότι είναι ίση με την κυκλοφορία της  $\vec{v}$  στη συνοριακή καμπύλη της επιφάνειας,  $C$ :

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} . \quad (4.5)$$

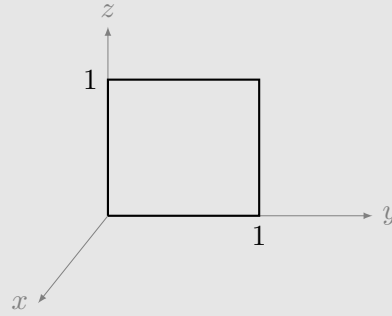
Το θεώρημα αυτό είναι το *θεώρημα Stokes*.

Παρατηρήστε ότι η φορά διαγραφής της καμπύλης  $C$ , δηλαδή η φορά του  $d\vec{s}$ , και η φορά του  $d\vec{A}$  προς το «εξωτερικό» μέρος της επιφάνειας  $S$ , είναι αυθαίρετα. Για να ισχύει το θεώρημα, εφαρμόζουμε τον κανόνα του δεξιού χεριού για να προσδιορίσουμε τις συμβατές φορές διαγραφής: αν τα δάχτυλα του δεξιού χεριού κάμπτονται στη φορά διαγραφής της  $C$ , ο αντίχειρας δείχνει τη συμβατή φορά του  $d\vec{A}$ .

Σύμφωνα με το θεώρημα Stokes, η ροή της  $\nabla \times \vec{v}$  από κάθε ανοιχτή επιφάνεια που έχει την ίδια συνοριακή καμπύλη  $C$  είναι ίδια. Για κλειστή επιφάνεια (που το «σύνορό» της είναι ένα οποιοδήποτε σημείο της) το θεώρημα Stokes προβλέπει ότι η ροή της  $\nabla \times \vec{v}$  είναι 0 (το δεξί μέλος της εξίσωσης 4.5 γίνεται 0).

#### Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση  $\vec{v}(x, y, z) = (2xz + 3y^2)\hat{j} + 4yz^2\hat{k}$ . Ας επιβεβαιώσουμε ότι ισχύει το θεώρημα Stokes για το τετράγωνο στο Σχήμα.



Ο στροβιλισμός της  $\vec{v}$  είναι

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 2xz + 3y^2 & 4yz^2 \end{vmatrix} = (4z^2 - 2x)\hat{i} + 2z\hat{k}.$$

Στο τετράγωνο με  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  ο στροβιλισμός παίρνει τιμές

$$\nabla \times \vec{v} = 4z^2\hat{i} + 2z\hat{k}.$$

Ας θεωρήσουμε ότι η φορά προς τα «έξω» της κάθετης στο τετράγωνο είναι παράλληλη στο διάνυσμα  $\hat{i}$ . Η φορά διαγραφής της συνοριακής καμπύλης θα είναι, σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού. Η στοιχειώδης επιφάνεια στο τετράγωνο έχει εμβαδό  $dA = dy dz$ . Επομένως,

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 (4z^2\hat{i} + 2z\hat{k}) \cdot \hat{i} dy dz = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dy dz = \frac{4}{3}.$$

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $\vec{v}$  στις πλευρές του τετράγωνου είναι (δε-

ξίστροφα, ξεκινώντας από την κάτω)

$$\begin{aligned}
 \oint_C \vec{v} \cdot d\vec{s} &= \int_0^1 \left( (2xz + 3y^2)\hat{j} + 4yz^2\hat{k} \right) \Big|_{x=0, z=0} \cdot (dy\hat{j}) \\
 &\quad + \int_0^1 \left( (2xz + 3y^2)\hat{j} + 4yz^2\hat{k} \right) \Big|_{x=0, y=1} \cdot (dz\hat{k}) \\
 &\quad + \int_0^1 \left( (2xz + 3y^2)\hat{j} + 4yz^2\hat{k} \right) \Big|_{x=0, z=1} \cdot (-dy\hat{j}) \\
 &\quad + \int_0^1 \left( (2xz + 3y^2)\hat{j} + 4yz^2\hat{k} \right) \Big|_{x=0, y=0} \cdot (-dz\hat{k}) \\
 &= \int_0^1 3y^2 dy + \int_0^1 4z^2 dz - \int_0^1 3y^2 dy - \int_0^1 0 dz = \frac{4}{3}.
 \end{aligned}$$

Επομένως, επαληθεύεται το θεώρημα Stokes.

## 4.5 Ασκήσεις–Λύσεις

1. Ένα διανυσματικό μέγεθος  $\vec{G}$  δίνεται από τη σχέση

$$\vec{G} = \frac{D}{r^2} \hat{r}$$

σε σφαιρικές συντεταγμένες, όπου  $D$  σταθερή ποσότητα.

- Έστω  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα με αρχή ένα σημείο  $A$  με συντεταγμένες  $(3, \pi/4, \pi/4)$  και τέλος ένα σημείο  $B$  με συντεταγμένες  $(8, \pi/4, \pi/4)$ . Οι συντεταγμένες των σημείων δίνονται σε σφαιρικό σύστημα  $(r, \phi, \theta)$ . Υπολογίστε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{G} \cdot d\vec{s}.$$

- Υπολογίστε τη ροή του  $\vec{G}$  από σφαιρική επιφάνεια  $S$  με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $R$ .

### ΛΥΣΗ

Κάθε στοιχειώδες τμήμα της καμπύλης  $C$  έχει διάνυσμα  $d\vec{s}$  που είναι παράλληλο στο  $\hat{r}$  των σφαιρικών συντεταγμένων, και μέτρο  $dr$ :  $d\vec{s} = dr\hat{r}$ . Επομένως,

$$\vec{G} \cdot d\vec{s} = \frac{D}{r^2} \hat{r} \cdot (dr\hat{r}) = \frac{D}{r^2} dr.$$

Το διάστημα στο οποίο μεταβάλλεται το  $r$  είναι το  $[3, 8]$ . Άρα

$$I = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{G} \cdot d\vec{s} = \int_3^8 \frac{D}{r^2} dr = D \left. \frac{-1}{r} \right|_3^8 = D \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{8} \right) = \frac{5D}{24}.$$

Κάθε στοιχειώδες τμήμα της σφαιρικής επιφάνειας με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα  $R$ , στη θέση με γωνίες  $\phi, \theta$ , έχει διάνυσμα επιφάνειας  $d\vec{A}$  που είναι παράλληλο στο  $\hat{r}$ , με μέτρο  $dA = R^2 \sin \theta d\theta d\phi$ . Επομένως, η ροή του  $\vec{G}$  από τη στοιχειώδη επιφάνεια σε θέση  $(R, \phi, \theta)$  είναι

$$d\Phi = \vec{G} \cdot d\vec{A} = \frac{D}{R^2} \hat{r} \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}) = D \sin \theta d\theta d\phi.$$

Η ροή στη σφαιρική επιφάνεια  $S$  συνολικά είναι το ολοκλήρωμα της στοιχειώδους ροής για γωνία  $\theta$  στο διάστημα  $[0, \pi]$  και  $\phi$  στο  $[0, 2\pi]$ :

$$\Phi = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi d\theta D \sin \theta = D 2\pi (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 4\pi D.$$



2. Ένα διανυσματικό μέγεθος  $\vec{G}$  δίνεται από τη σχέση

$$\vec{G} = \frac{D}{r^2} \hat{r}$$

σε κυλινδρικές συντεταγμένες, όπου  $D$  σταθερή ποσότητα.

Υπολογίστε τη ροή του  $\vec{G}$  από την επιφάνεια  $S$  κυλίνδρου με ακτίνα  $R$ , ύψος  $h$  και άξονα τον άξονα  $z$ .

#### ΛΥΣΗ

Κάθε στοιχειώδες τμήμα της κυλινδρικής επιφάνειας με ακτίνα  $R$ , ύψος  $h$  και άξονα τον άξονα  $z$  έχει διάνυσμα επιφάνειας που είναι παράλληλο στο  $\hat{r}$  και μέτρο  $dA = R d\phi dz$ . Επομένως, η ροή του  $\vec{G}$  από τη στοιχειώδη επιφάνεια σε θέση  $(R, \phi, z)$  είναι

$$d\Phi = \vec{G} \cdot d\vec{A} = \frac{D}{R^2} \hat{r} \cdot (R d\phi dz \hat{r}) = \frac{D}{R} d\phi dz .$$

Η ροή στην κυλινδρική επιφάνεια  $S$  συνολικά είναι το ολοκλήρωμα της στοιχειώδους ροής για γωνία  $\phi$  στο διάστημα  $[0, 2\pi]$  και μεταβλητή  $z$  στο διάστημα  $[0, h]$ :

$$\Phi = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \frac{D}{R} = \frac{D}{R} 2\pi h .$$

3. Ανομοιογενές διανυσματικό μέγεθος δίνεται από την έκφραση  $\vec{G} = ay\hat{i} + bz\hat{j} + cx\hat{k}$ , όπου  $a, b, c$  σταθερές. Βρείτε την ροή του  $\vec{G}$  από την ορθογώνια επιφάνεια στο επίπεδο  $x - y$ , που εκτείνεται από  $x = 0$  μέχρι  $x = w$  και από  $y = 0$  μέχρι  $y = h$ .

#### ΛΥΣΗ

Ορίζω μια στοιχειώδη επιφάνεια στο σημείο  $(x, y, 0)$  με εμβαδόν  $dx dy$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας είναι το  $\hat{k}$ . Άρα  $d\vec{A} = dx dy \hat{k}$ . Η ροή του πεδίου από αυτή είναι  $\vec{G} \cdot d\vec{A}$ . Η συνολική ροή από την επιφάνεια  $S$  με  $0 \leq x \leq w$  και  $0 \leq y \leq h$  είναι

$$\Phi = \int_S \vec{G} \cdot d\vec{A} = \int_0^w dx \int_0^h dy \vec{G} \cdot \hat{k} = \int_0^w dx \int_0^h dy G_z .$$

Για το συγκεκριμένο πεδίο,  $G_z = cx$ . Συνεπώς

$$\Phi = \int_0^w dx \int_0^h dy cx = \int_0^w chx dx = ch \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^w = \frac{chw^2}{2} .$$

4. Υπολογίστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της συνάρτησης  $\vec{v} = x^2\hat{i} + 2yz\hat{j} + y^2\hat{k}$  από την αρχή των αξόνων  $(0, 0, 0)$  έως το σημείο  $(1, 1, 1)$  ακολουθώντας τρεις διαφορετικές διαδρομές

(α') το ευθύγραμμο τμήμα μεταξύ των σημείων,

(β')  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$ ,

(γ')  $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$ .

Πόσο είναι το ολοκλήρωμα (κυκλοφορία) όταν ακολουθούμε την κλειστή διαδρομή  $(2 + 3)$  δηλαδή  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1) \rightarrow (0, 1, 1) \rightarrow (0, 0, 1) \rightarrow (0, 0, 0)$ ;

### ΛΥΣΗ

- (α') Η ευθεία μεταξύ των δύο δεδομένων σημείων έχει παραμετρική εξίσωση  $\vec{r}(\tau) = (0, 0, 0) + \tau((1, 1, 1) - (0, 0, 0)) = (\tau, \tau, \tau)$ , με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή την καμπύλη η  $\vec{v}(x, y, z)$  παίρνει τιμές  $\vec{v}(\tau) = \tau^2\hat{i} + 2\tau^2\hat{j} + \tau^2\hat{k}$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = (\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}) d\tau$ . Επομένως

$$I' = \int_{C_{(0,0,0) \rightarrow (1,1,1)}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 (\tau^2 + 2\tau^2 + \tau^2) d\tau = \frac{4}{3}.$$

- (β') Για τη δεύτερη διαδρομή: το τμήμα  $(0, 0, 0) \rightarrow (1, 0, 0)$  έχει παραμετρική εξίσωση  $\vec{r}(\tau) = (0, 0, 0) + \tau((1, 0, 0) - (0, 0, 0)) = (\tau, 0, 0)$ , με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή την καμπύλη η  $\vec{v}(x, y, z)$  παίρνει τιμές  $\vec{v}(\tau) = \tau^2\hat{i}$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = d\tau\hat{i}$ . Επομένως

$$I_1 = \int_{C_{(0,0,0) \rightarrow (1,0,0)}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{1}{3}.$$

Το τμήμα  $(1, 0, 0) \rightarrow (1, 1, 0)$  έχει παραμετρική εξίσωση  $\vec{r}(\tau) = (1, 0, 0) + \tau((1, 1, 0) - (1, 0, 0)) = (1, \tau, 0)$ , με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή την καμπύλη η  $\vec{v}(x, y, z)$  παίρνει τιμές  $\vec{v}(\tau) = 1^2\hat{i} + \tau^2\hat{k}$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = d\tau\hat{j}$ . Επομένως

$$I_2 = \int_{C_{(1,0,0) \rightarrow (1,1,0)}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Το τμήμα  $(1, 1, 0) \rightarrow (1, 1, 1)$  έχει παραμετρική εξίσωση  $\vec{r}(\tau) = (1, 1, 0) + \tau((1, 1, 1) - (1, 1, 0)) = (1, 1, \tau)$ , με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή την καμπύλη η

$\vec{v}(x, y, z)$  παίρνει τιμές  $\vec{v}(\tau) = 1^2\hat{i} + 2\tau\hat{j} + 1^2\hat{k}$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = d\tau\hat{k}$ . Επομένως

$$I_3 = \int_{C_{(1,1,0) \rightarrow (1,1,1)}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 d\tau = 1.$$

Συνολικά το ολοκλήρωμα στην δεύτερη διαδρομή έχει τιμή  $I'' = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{3}$ .

(γ') Για την τρίτη διαδρομή: το τμήμα  $(0, 0, 0) \rightarrow (0, 0, 1)$  έχει παραμετρική εξίσωση  $\vec{r}(\tau) = (0, 0, 0) + \tau((0, 0, 1) - (0, 0, 0)) = (0, 0, \tau)$ , με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή την καμπύλη η  $\vec{v}(x, y, z)$  παίρνει τιμές  $\vec{v}(\tau) = \vec{0}$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = d\tau\hat{k}$ . Επομένως

$$I_1 = \int_{C_{(0,0,0) \rightarrow (0,0,1)}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = 0.$$

Το τμήμα  $(0, 0, 1) \rightarrow (0, 1, 1)$  έχει παραμετρική εξίσωση  $\vec{r}(\tau) = (0, 0, 1) + \tau((0, 1, 1) - (0, 0, 1)) = (0, \tau, 1)$ , με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή την καμπύλη η  $\vec{v}(x, y, z)$  παίρνει τιμές  $\vec{v}(\tau) = 2\tau\hat{j} + \tau^2\hat{k}$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = d\tau\hat{j}$ . Επομένως

$$I_2 = \int_{C_{(0,0,1) \rightarrow (0,1,1)}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 2\tau d\tau = 1.$$

Το τμήμα  $(0, 1, 1) \rightarrow (1, 1, 1)$  έχει παραμετρική εξίσωση  $\vec{r}(\tau) = (0, 1, 1) + \tau((1, 1, 1) - (0, 1, 1)) = (\tau, 1, 1)$ , με  $0 \leq \tau \leq 1$ . Σε αυτή την καμπύλη η  $\vec{v}(x, y, z)$  παίρνει τιμές  $\vec{v}(\tau) = \tau^2\hat{i} + 2\hat{j} + 1^2\hat{k}$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = d\tau\hat{i}$ . Επομένως

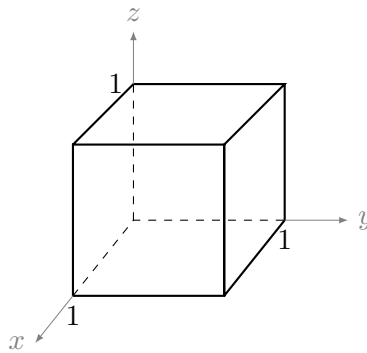
$$I_3 = \int_{C_{(0,1,1) \rightarrow (1,1,1)}} \vec{v} \cdot d\vec{s} = \int_0^1 \tau^2 d\tau = \frac{1}{3}.$$

Συνολικά το ολοκλήρωμα στην τρίτη διαδρομή έχει τιμή  $I''' = I_1 + I_2 + I_3 = \frac{4}{3}$ .

Αν ακολουθήσουμε την δεύτερη διαδρομή και μετά συνεχίσουμε *αντίστροφα* στην τρίτη διαδρομή, το ολοκλήρωμα της τρίτης διαδρομής θα αλλάξει πρόσημο (αλλάζει το  $d\vec{s}$ ). Το αλγεβρικό άθροισμα των δύο επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων δίνει 0.

5. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα όγκου της συνάρτησης  $f(x, y, z) = z^2$  στο τετράεδρο με γωνίες στα σημεία  $(0, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(0, 1, 0)$  και  $(0, 0, 1)$ .

6. Ελέγξτε το θεώρημα της απόκλισης για τη συνάρτηση  $\vec{v} = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3xz\hat{k}$  σε κύβο με κορυφές τα σημεία  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 2)$ ,  $(0, 2, 2)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(2, 0, 0)$ ,  $(2, 0, 2)$ ,  $(2, 2, 2)$ ,  $(2, 2, 0)$ .
7. Ελέγξτε το θεώρημα Stokes για τη συνάρτηση  $\vec{v} = xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3xz\hat{k}$  σε τρίγωνο με κορυφές τα σημεία  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 2, 0)$ ,  $(0, 2, 2)$ .
8. Υπολογίστε τη ροή του στροβιλισμού της συνάρτησης  $\vec{v}(x, y, z) = (2xz + 3y^2)\hat{j} + 4yz^2\hat{k}$  από μια ανοικτή κυβική επιφάνεια με κορυφές τα σημεία  $(0, 0, 0)$ ,  $(0, 0, 1)$ ,  $(0, 1, 1)$ ,  $(0, 1, 0)$ ,  $(1, 0, 0)$ ,  $(1, 0, 1)$ ,  $(1, 1, 1)$ ,  $(1, 1, 0)$ . Η πίσω έδρα λείπει. Κάνετε τον ίδιο υπολογισμό για την έδρα που λείπει. Εφόσον έχουν το ίδιο σύνορο, πρέπει να προκύψει το ίδιο αποτέλεσμα.

**ΛΥΣΗ**

Ο στροβιλισμός της  $\vec{v}$  είναι

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 2xz + 3y^2 & 4yz^2 \end{vmatrix} = (4z^2 - 2x)\hat{i} + 2z\hat{k}.$$

Στην έδρα με  $x = 0$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$  ο στροβιλισμός παίρνει τιμές  $\vec{g} = \nabla \times \vec{v} = 4z^2\hat{i} + 2z\hat{k}$ . Αν δεχθούμε τη δεξιόστροφη φορά διαγραφής του συνόρου της έδρας, το κάθετο διάνυσμα στην έδρα με φορά προς τα «έξω» είναι το  $\hat{i}$ . Η στοιχειώδης επιφάνεια έχει εμβαδό  $dA = dy dz$ . Η ροή του στροβιλισμού είναι

$$\int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot dA = \int_0^1 \int_0^1 (4z^2\hat{i} + 2z\hat{k}) \cdot (\hat{i} dy dz) = \int_0^1 \int_0^1 4z^2 dy dz = \frac{4}{3}.$$

Ας υπολογίσουμε τη ροή της  $\nabla \times \vec{v}$  από τις έδρες του κύβου:

Η επάνω έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(i)$ , έχει  $z = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω όπως ορίστηκε πριν, είναι το  $\hat{k}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx \, dy$ . Επομένως,

$$\Phi_{(i)} = \int_{(i)} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \vec{g}(x, y, 1) \cdot \hat{k} \, dx \, dy = \int_0^1 \int_0^1 2 \, dx \, dy = 2.$$

Η αριστερή έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(ii)$ , έχει  $y = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $-\hat{j}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx \, dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(ii)} = \int_{(ii)} \vec{g} \cdot d\vec{A} = - \int_0^1 \int_0^1 \vec{g}(x, 0, z) \cdot \hat{j} \, dx \, dz = - \int_0^1 \int_0^1 0 \, dx \, dz = 0.$$

Η δεξιά έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(iii)$ , έχει  $y = 1$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{j}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx \, dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(iii)} = \int_{(iii)} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \vec{g}(x, 1, z) \cdot \hat{j} \, dx \, dz = \int_0^1 \int_0^1 0 \, dx \, dz = 0.$$

Η εμπρός έδρα του κύβου, ας την αριθμήσουμε με  $(iv)$ , έχει  $x = 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $\hat{i}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dy \, dz$ . Επομένως,

$$\Phi_{(iv)} = \int_{(iv)} \vec{g} \cdot d\vec{A} = \int_0^1 \int_0^1 \vec{g}(1, y, z) \cdot \hat{i} \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 (4z^2 - 2) \, dy \, dz = -\frac{2}{3}.$$

Η κάτω έδρα του κύβου, που θα την αριθμήσουμε με  $(v)$ , έχει  $z = 0$ ,  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq 1$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο σε αυτή, προς τα έξω, είναι το  $-\hat{k}$ . Η στοιχειώδης επιφάνειά της έχει εμβαδό  $dA = dx \, dy$ . Επομένως,

$$\Phi_{(v)} = \int_{(v)} \vec{g} \cdot d\vec{A} = - \int_0^1 \int_0^1 \vec{g}(x, y, 0) \cdot \hat{k} \, dx \, dy = - \int_0^1 \int_0^1 2 \times 0 \, dx \, dy = 0.$$

Το άθροισμα των ροών από τις πέντε έδρες είναι  $2 + 0 + 0 - \frac{2}{3} + 0 = \frac{4}{3}$ , όσο βρήκαμε στην πίσω έδρα.

9. Επαληθεύστε το θεώρημα της απόκλισης για τη συνάρτηση  $\vec{v} = r^2 \hat{r}$  στη σφαίρα με ακτίνα  $R$  και κέντρο την αρχή των αξόνων.

**ΛΥΣΗ**

Η απόκλιση της  $\vec{v}$  είναι

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r^2) = 4r .$$

Το ολοκλήρωμα όγκου της απόκλισης στη σφαίρα είναι

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{v}) dV = \int_0^R \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 4r r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = \int_0^R 4r^3 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^4 .$$

Η ροή της  $\vec{v}$  από τη σφαιρική επιφάνεια είναι

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} R^2 \hat{r} \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}) = R^4 \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi R^4 .$$

10. Ελέγξτε το θεώρημα της απόκλισης για τη συνάρτηση  $\vec{v} = \frac{1}{r^2} \hat{r}$  στη σφαίρα με ακτίνα  $R$  και κέντρο την αρχή των αξόνων.

**ΛΥΣΗ**

Η απόκλιση της  $\vec{v}$  είναι

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 r^{-2}) = 4\pi \delta(\vec{r})$$

Το ολοκλήρωμα όγκου της απόκλισης στη σφαίρα είναι

$$\iiint_V (\nabla \cdot \vec{v}) dV = 4\pi \iiint_V \delta(\vec{r}) dV = 4\pi .$$

Η ροή της  $\vec{v}$  από τη σφαιρική επιφάνεια είναι

$$\oint_S \vec{v} \cdot d\vec{A} = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{R^2} \hat{r} \cdot (R^2 \sin \theta d\theta d\phi \hat{r}) = \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi .$$

## Κεφάλαιο 5

# Γνώσεις Φυσικής

### 5.1 Βασικά προθέματα συστήματος SI

Δύναμη	Πρόθεμα	Σύμβολο	Δύναμη	Πρόθεμα	Σύμβολο
$10^{-15}$	femto-	f	$10^{-2}$	centi-	c
$10^{-12}$	pico-	p	$10^3$	kilo-	k
$10^{-9}$	nano-	n	$10^6$	mega-	M
$10^{-6}$	micro-	$\mu$	$10^9$	giga-	G
$10^{-3}$	milli-	m	$10^{12}$	tera-	T

### 5.2 Ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση

Αν ασκηθεί δύναμη  $\vec{F}$ , οποιασδήποτε προέλευσης, σε σωματίδιο μάζας  $m$ , τότε η ταχύτητα του σωματιδίου αλλάζει (β' νόμος Newton). Η επιτάχυνσή του (η αλλαγή του διανύσματος της ταχύτητας με το χρόνο),  $\vec{a}$ , δίνεται από τη σχέση

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} .$$

Σε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (δηλαδή με  $\vec{a}$  σταθερό), η ταχύτητα  $\vec{v}(t)$  και η θέση  $\vec{r}(t)$  του σωματιδίου είναι

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= (t - t_0)\vec{a} + \vec{v}(t_0) , \\ \vec{r}(t) &= \frac{1}{2}(t - t_0)^2\vec{a} + (t - t_0)\vec{v}(t_0) + \vec{r}(t_0) .\end{aligned}$$

Τα  $\vec{v}(t_0)$ ,  $\vec{r}(t_0)$  είναι η ταχύτητα και η θέση κάποια χρονική στιγμή  $t_0$ .





# **Μέρος II**

## **Ηλεκτρισμός**



## Κεφάλαιο 6

# Ηλεκτρικό πεδίο

### 6.1 Εισαγωγή

Στην καθημερινή μας ζωή μπορούμε εύκολα να παρατηρήσουμε διάφορα απρόσμενα φαινόμενα:



Σχήμα 6.1: Φαινόμενα που οφείλονται στο στατικό ηλεκτρισμό

- μια πλαστική χτένα μπορεί, αφού χτενιστούμε με αυτή, να κάμψει την πορεία λεπτής ροής νερού.
- Μπαλόνια με αέρα, που έχουν τριφτεί σε μάλλινο ύφασμα, μπορούν να σταθούν ακίνητα στον τοίχο ή στο ταβάνι.
- Ένας πλαστικός σωλήνας (π.χ. στυλό) μπορεί, αφού τριφτεί σε μάλλινο ύφασμα, να σπρώξει από το τραπέζι μικρά κομμάτια χαρτιού.

Τέτοια φαινόμενα αποδίδονται στην *ηλεκτρική δύναμη*. Η ηλεκτρική δύναμη δρα μεταξύ αντικειμένων που έχουν *ηλεκτρικό φορτίο*.

Έχει παρατηρηθεί πειραματικά ότι υπάρχουν δύο είδη ηλεκτρικού φορτίου, το *θετικό* και *αρνητικό*, όπως ονομάστηκαν. Πειράματα έδειξαν επίσης ότι *φορτία ομόσημα* (με ίδιο πρόσημο δηλαδή) *απωθούνται μεταξύ τους* ενώ *φορτία ετερόσημα έλκονται μεταξύ τους*. Επιπλέον, παρατηρήθηκε ότι σε ένα απομονωμένο σύστημα, το *συνολικό ηλεκτρικό φορτίο διατηρείται πάντα*. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα αφορτιστο σύστημα δύο αντικειμένων, μπορούμε να τα φορτίσουμε ηλεκτρικά

μεταφέροντας ηλεκτρικό φορτίο από το ένα στο άλλο. Το ένα θα είναι θετικά φορτισμένο και το άλλο θα έχει ίσο αρνητικό φορτίο. Αυτό συμβαίνει γιατί τα άτομα στην ύλη μπορούν να διαχωριστούν σε ηλεκτρόνια (που είναι αρνητικά φορτισμένα) και σε ίσου φορτίου θετικά ιόντα. Μια τελευταία πειραματική παρατήρηση που θα αναφέρουμε είναι ότι το ηλεκτρικό φορτίο είναι *κβαντισμένο*, δηλαδή, ακέραιο πολλαπλάσιο μιας ποσότητας που τη συμβολίζουμε με  $e$ . Τα πρωτόνια στον πυρήνα των ατόμων είναι θετικά φορτισμένα με φορτίο  $+e$  ενώ τα ηλεκτρόνια έχουν αρνητικό φορτίο  $-e$ .

Το ηλεκτρικό φορτίο μετριέται στο Διεθνές Σύστημα Μονάδων Μέτρησης (SI) σε C (Coulomb). Σε αυτό το σύστημα το στοιχειώδες ηλεκτρικό φορτίο  $e$  είναι ακριβώς ίσο με  $1.602\,176\,634 \times 10^{-19}$  C.

## 6.2 Νόμος Coulomb

Ο Γάλλος επιστήμονας Charles Coulomb, στα τέλη του 18ου αιώνα, μέτρησε την ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δύο μικρών, φορτισμένων σφαιρών. Τα συμπεράσματά του για την εξάρτηση της δύναμης από τα φορτία και την απόστασή τους εκφράζονται μαθηματικά με τον *νόμο Coulomb*. Αυτός ο νόμος της φυσικής συνδέει το μέτρο της δύναμης μεταξύ ακίνητων, σημειακών (δηλαδή συγκεντρωμένων σε ένα σημείο), φορτισμένων αντικειμένων, με τα φορτία τους και την απόστασή τους. Σύμφωνα με αυτόν, η δύναμη μεταξύ δύο ακίνητων, σημειακών ηλεκτρικών φορτίων  $Q$  και  $q$  σε απόσταση  $r$  μεταξύ τους, έχει μέτρο  $F$  ανάλογο των φορτίων και αντιστρόφως ανάλογο του τετραγώνου της απόστασης. Μαθηματικά εκφράζεται από τη σχέση

$$F = k_e \frac{|Q||q|}{r^2}.$$

Η ποσότητα  $k_e$  είναι η σταθερά Coulomb. Στο SI η σταθερά αυτή έχει προσεγγιστικά την τιμή  $c^2/10^7$  (μονάδες SI), περίπου  $9 \times 10^9 \text{ NC}^{-2}\text{m}^2$ . Συνδέεται με την διαπερατότητα του κενού  $\epsilon_0$  με τη σχέση

$$k_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}.$$

Η δύναμη μετριέται στο SI σε N (Newton).

### Παράδειγμα

Το άτομο του Υδρογόνου αποτελείται από ένα πρωτόνιο και ένα ηλεκτρόνιο. Στο πρότυπο του Bohr, το ηλεκτρόνιο περιστρέφεται κυκλικά γύρω από το πρωτόνιο, σε απόσταση  $a_0 \approx 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ . Τα σωματίδια σε τέτοια απόσταση μεταξύ τους μπορούν να θεωρηθούν σημειακά. Τα ηλεκτρικά φορτία τους είναι, όπως αναφέραμε,  $q_p = +e$  και  $q_e = -e$  για το πρωτόνιο και το ηλεκτρόνιο αντίστοιχα. Οι μάζες τους είναι περίπου  $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$  και  $m_e \approx 9.11 \times 10^{-31} \text{ kg}$  αντίστοιχα. Λόγω των ηλεκτρικών φορτίων εμφανίζεται μεταξύ τους

ηλεκτρική δύναμη,  $F_e$ . Λόγω των μαζών τους εμφανίζεται και βαρυτική δύναμη,  $F_g$ .

Η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ τους, αν αγνοήσουμε την κίνησή τους, έχει μέτρο

$$F_e = k_e \frac{|q_p||q_e|}{a_0^2} \approx 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

και είναι ελκτική.

Η (πάντα ελκτική) βαρυτική δύναμη μεταξύ τους έχει μέτρο

$$F_g = G \frac{m_p m_e}{a_0^2} \approx 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}.$$

Η ηλεκτρική δύναμη υπερσχύει σαφώς και είναι αυτή που δρα ως κεντρομόλος δύναμη.

### 6.2.1 Διανυσματική μορφή

Η ηλεκτρική δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος. Για να την προσδιορίσουμε πλήρως πρέπει, εκτός από το μέτρο της, να δηλώσουμε τη διεύθυνση και τη φορά της: η ηλεκτρική δύναμη ασκείται κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα δύο σημειακά φορτία και, όπως αναφέραμε, είναι ελκτική όταν τα φορτία είναι ετερόσημα ενώ είναι απωστική όταν τα φορτία είναι ομόσημα.

Από τα παραπάνω μπορούμε να γράψουμε σε διανυσματική μορφή το νόμο Coulomb για την ηλεκτρική δύναμη  $\vec{F}$  που ασκείται σε ένα φορτίο  $q$  και οφείλεται σε ένα ακίνητο φορτίο  $Q$  (την “πηγή”) ως εξής:

$$\vec{F} = k_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r}. \quad (6.1)$$

$Q$ ,  $q$  είναι τα δύο σημειακά φορτία, με το πρόσημό τους.  $r$  είναι η απόσταση των φορτίων, δηλαδή το μέτρο του διανύσματος  $\vec{r}$  που συνδέει τα δύο φορτία, με φορά από την πηγή ( $Q$ ) προς στο φορτίο  $q$ .  $\hat{r}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του  $\vec{r}$ .

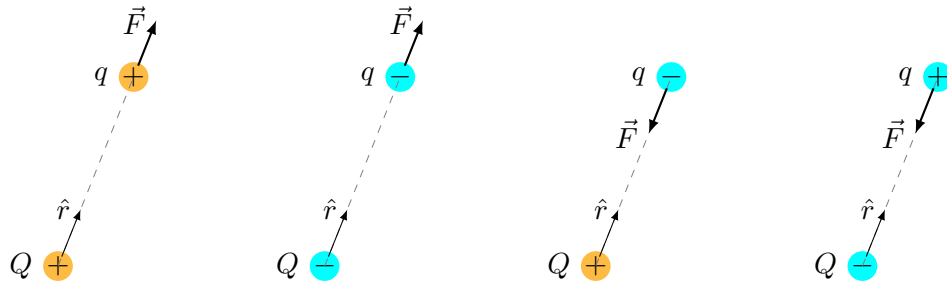
Δείτε (και επαληθεύστε!) στο Σχήμα 6.2 τις διευθύνσεις του  $\vec{r}$  και της δύναμης  $\vec{F}$  στο φορτίο  $q$  εξαιτίας του φορτίου  $Q$ .

Ίσου μέτρου, ίδιας διεύθυνσης αλλά αντίθετης φοράς είναι η δύναμη που ασκείται στο φορτίο  $Q$  εξαιτίας του φορτίου  $q$  (γ’ νόμος Newton). Επιπλέον, όπως αναμένουμε, ένα ηλεκτρικό φορτίο με μάζα  $m$ , που δέχεται ηλεκτρική δύναμη  $\vec{F}$ , αποκτά επιτάχυνση  $\vec{a}$  που δίνεται από τη σχέση (β’ νόμος Newton)

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}.$$

### 6.2.2 Ηλεκτρική δύναμη από μη σημειακή πηγή

Ο τύπος (6.1) υπολογίζει τη δύναμη σε σημειακό φορτίο  $q$  από ένα άλλο σημειακό φορτίο  $Q$ .

Σχήμα 6.2: Ηλεκτρική δύναμη σε φορτίο  $q$  από φορτίο  $Q$ 

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη δύναμη σε σημειακό φορτίο  $q$  από

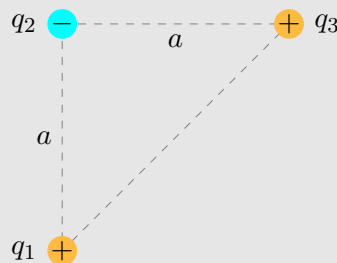
**πολλά διακριτά σημειακά φορτία**, εφαρμόζουμε το νόμο Coulomb έχοντας ως πηγή κάθε ένα από τα διακριτά σημειακά φορτία. Κατόπιν, υπολογίζουμε το **διανυσματικό άθροισμα** των δυνάμεων που προκύπτουν.

**συνεχή κατανομή φορτίου**, χωρίζουμε την κατανομή σε στοιχειώδη τμήματα (στοιχειώδη μήκη αν είναι σε καμπύλη, στοιχειώδη εμβαδά αν είναι σε επιφάνεια, στοιχειώδεις όγκους αν είναι σε όγκο) και εφαρμόζουμε το νόμο Coulomb έχοντας ως πηγή το φορτίο από κάθε τέτοιο τμήμα. Κατόπιν, υπολογίζουμε το **διανυσματικό «άθροισμα»** των δυνάμεων που προκύπτουν. Το «άθροισμα» υπολογίζεται με ολοκλήρωμα (επικαμπύλιο, επιφανειακό ή τριπλό αντίστοιχα).

**διακριτά φορτία και σε συνεχή κατανομή**, υπολογίζουμε το **διανυσματικό άθροισμα** των δυνάμεων από τα διακριτά φορτία και τη συνεχή κατανομή.

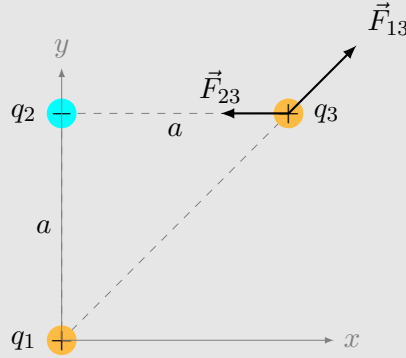
### Παράδειγμα

Τρία σημειακά φορτία  $q_1 = 5\mu\text{C}$ ,  $q_2 = -2\mu\text{C}$ ,  $q_3 = 5\mu\text{C}$  είναι τοποθετημένα στις κορυφές ορθογώνιου ισοσκελούς τριγώνου, όπως στο σχήμα. Οι κάθετες πλευρές του τριγώνου έχουν μήκος  $a = 10\text{ cm}$ . Ας υπολογίσουμε τη δύναμη στο φορτίο  $q_3$ .



Η δύναμη στο φορτίο  $q_3$  είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο φορτίο από τα  $q_1$  και  $q_2$ . Σύμφωνα με το νόμο Coulomb στη διανυσματική του μορφή (6.1), χρειαζόμαστε το μέτρο και το μοναδιαίο διάνυσμα από τα διανύσματα  $\vec{r}_{13}$  (από το  $q_1$  στο  $q_3$ ) και  $\vec{r}_{23}$  (από το  $q_2$  στο  $q_3$ ).

Ορίζω το σύστημα συντεταγμένων όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το  $\vec{r}_{13}$  μπορεί να βρεθεί ως εξής: Σύμφωνα με την παράγραφο 1.2.1, για το διάνυσμα  $\vec{r}_{13}$  ισχύει  $\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1$ , όπου  $\vec{r}_1$ ,  $\vec{r}_3$  τα διανύσματα θέσης των φορτίων  $q_1$ ,  $q_3$  αντίστοιχα. Το φορτίο  $q_1$  είναι στην αρχή των αξόνων, άρα  $\vec{r}_1 = 0$ , και το φορτίο  $q_3$  είναι σε θέση με συντεταγμένες  $(a, a)$ , άρα  $\vec{r}_3 = a\hat{i} + a\hat{j}$ . Επομένως

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = a\hat{i} + a\hat{j}.$$

Το μέτρο του διανύσματος  $\vec{r}_{13}$  είναι, από τον ορισμό,  $r_{13} = \sqrt{\vec{r}_{13} \cdot \vec{r}_{13}} = \sqrt{2a^2} = a\sqrt{2}$  και το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι  $\hat{r}_{13} = \vec{r}_{13}/r_{13} = (\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ .

Το  $\vec{r}_{23}$  μπορεί να βρεθεί ως εξής: Σύμφωνα με την παράγραφο 1.2.1, για το διάνυσμα  $\vec{r}_{23}$  ισχύει  $\vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2$ , όπου  $\vec{r}_2$ ,  $\vec{r}_3$  τα διανύσματα θέσης των φορτίων  $q_2$ ,  $q_3$  αντίστοιχα. Το φορτίο  $q_2$  είναι σε θέση με συντεταγμένες  $(0, a)$  άρα  $\vec{r}_2 = a\hat{j}$  και το φορτίο  $q_3$  είναι σε θέση με συντεταγμένες  $(a, a)$ , άρα  $\vec{r}_3 = a\hat{i} + a\hat{j}$ . Επομένως

$$\vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = a\hat{i}.$$

Το μέτρο του διανύσματος  $\vec{r}_{23}$  είναι, από τον ορισμό,  $r_{23} = \sqrt{\vec{r}_{23} \cdot \vec{r}_{23}} = a$  και το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι  $\hat{r}_{23} = \vec{r}_{23}/r_{23} = \hat{i}$ .

Με αντικατάσταση στη σχέση 6.1 έχουμε

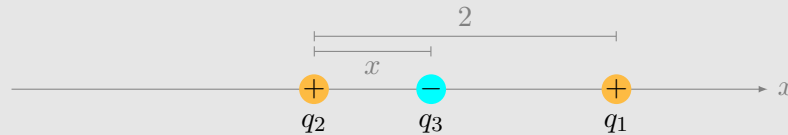
$$\begin{aligned}\vec{F}_{13} &= k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} = k_e \frac{q_1 q_3}{2a^2} \frac{\hat{i} + \hat{j}}{\sqrt{2}} \approx 7.95(\hat{i} + \hat{j}) \text{ N}, \\ \vec{F}_{23} &= k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} = k_e \frac{q_2 q_3}{a^2} \hat{i} \approx -9\hat{i} \text{ N}.\end{aligned}$$

Η συνολική δύναμη είναι

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = k_e \frac{q_3}{2\sqrt{2}a^2} \left( (q_1 + 2\sqrt{2}q_2) \hat{i} + q_1 \hat{j} \right) \approx (-1.05\hat{i} + 7.95\hat{j}) \text{ N} .$$

### Παράδειγμα

Τρία σημειακά φορτία βρίσκονται κατά μήκος του άξονα  $x$ , όπως φαίνεται στο σχήμα.



Το φορτίο  $q_1 = 15 \mu\text{C}$  βρίσκεται στο  $x = 2 \text{ m}$ , Το φορτίο  $q_2 = 6 \mu\text{C}$  βρίσκεται στην αρχή του άξονα και η συνολική δύναμη που ασκείται στο  $q_3$  είναι 0. Ας βρούμε τη θέση του  $q_3$ .

Η δύναμη στο φορτίο  $q_3$  είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων που ασκούνται στο φορτίο από τα  $q_1$  και  $q_2$ . Το  $q_3$  έλκεται από τα άλλα με δυνάμεις που είναι αντίθετης φοράς. Αν η απόσταση  $x$  είναι κατάλληλη, οι δυνάμεις εξουδετερώνονται.

Σύμφωνα με το νόμο Coulomb στη διανυσματική του μορφή (6.1), χρειαζόμαστε το μέτρο και το μοναδιαίο διάνυσμα από τα διανύσματα  $\vec{r}_{13}$  (από το  $q_1$  στο  $q_3$ ) και  $\vec{r}_{23}$  (από το  $q_2$  στο  $q_3$ ).

Το φορτίο  $q_1$  είναι στη θέση  $x = 2$ . Το φορτίο  $q_3$  είναι σε άγνωστη θέση  $x$ . Το διάνυσμα  $\vec{r}_{13}$  είναι  $\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (x-2)\hat{i}$ . Το μέτρο του είναι  $r_{13} = |x-2| = 2-x$  (καθώς  $0 < x < 2$ ) και το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r}_{13} = -\hat{i}$ .

Το φορτίο  $q_2$  είναι στη θέση  $x = 0$ . Το διάνυσμα  $\vec{r}_{23}$  είναι  $\vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = x\hat{i}$ . Το μέτρο του είναι  $r_{23} = |x| = x$  και το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r}_{23} = \hat{i}$ .

Με αντικατάσταση στη σχέση 6.1 έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{F}_{13} &= k_e \frac{q_1 q_3}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} = -k_e \frac{q_1 q_3}{(2-x)^2} \hat{i} , \\ \vec{F}_{23} &= k_e \frac{q_2 q_3}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} = k_e \frac{q_2 q_3}{x^2} \hat{i} . \end{aligned}$$

Συνολικά,

$$\vec{F}_3 = \vec{F}_{13} + \vec{F}_{23} = k_e q_3 \left( -\frac{q_1}{(2-x)^2} + \frac{q_2}{x^2} \right) \hat{i} .$$

Καθώς  $q_3 \neq 0$ , για να έχουμε μηδενική δύναμη  $\vec{F}_3$  πρέπει

$$\frac{q_2}{x^2} - \frac{q_1}{(2-x)^2} = 0 \Rightarrow q_2(x^2 - 4x + 4) = q_1 x^2 \Rightarrow (q_2 - q_1)x^2 - 4q_2 x + 4q_2 = 0 .$$



Άρα

$$x = \frac{2q_2 \pm \sqrt{4q_2^2 - 4q_2(q_2 - q_1)}}{q_2 - q_1} = \frac{-4 \pm 2\sqrt{10}}{3} \approx -3.44 \text{ m ή } 0.775 \text{ m} .$$

Η πρώτη τιμή του  $x$  απορρίπτεται καθώς το  $q_3$  πρέπει να είναι μεταξύ του  $q_1$  και του  $q_2$  (δηλαδή  $0 < x < 2$ ). Άρα το  $q_3$  βρίσκεται σε απόσταση  $x \approx 0.775 \text{ m}$  από την αρχή.

### 6.2.3 Πυκνότητα φορτίου

#### Γραμμική

Η γραμμική πυκνότητα φορτίου συμβολίζεται συχνά με  $\lambda$  και είναι το φορτίο ανά μονάδα μήκους:

$$\lambda = \frac{dQ}{ds} \Rightarrow dQ = \lambda ds .$$

Έχει εφαρμογή όταν έχουμε κατανομή φορτίου σε καμπύλη.

#### Επιφανειακή

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου συμβολίζεται συχνά με  $\sigma$  και είναι το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας:

$$\sigma = \frac{dQ}{dA} \Rightarrow dQ = \sigma dA .$$

Έχει εφαρμογή όταν έχουμε κατανομή φορτίου σε επιφάνεια.

#### Χωρική

Η χωρική πυκνότητα φορτίου συμβολίζεται συχνά με  $\rho$  και είναι το φορτίο ανά μονάδα όγκου:

$$\rho = \frac{dQ}{d\tau} \Rightarrow dQ = \rho d\tau .$$

Έχει εφαρμογή όταν έχουμε κατανομή φορτίου σε όγκο.

## 6.3 Ηλεκτρικό Πεδίο

Η ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δύο φορτίων εμφανίζεται ανεξάρτητα από την ύπαρξη ή μη κάποιου υλικού μέσου μεταξύ των φορτίων. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η εμφάνιση ηλεκτρικής δύναμης γίνεται σε δύο στάδια: Ένα ηλεκτρικό φορτίο παράγει ακαριαία στο χώρο γύρω του, μέχρι το άπειρο, ένα *ηλεκτρικό πεδίο*. Κατόπιν, το ηλεκτρικό πεδίο επιδρά σε οποιοδήποτε ηλεκτρικό φορτίο βρεθεί

στο συγκεκριμένο χώρο και ασκεί δύναμη σε αυτό. Η έννοια του πεδίου αναπτύχθηκε από τον Michael Faraday το 19ο αιώνα και διευκολύνει πολύ τη μελέτη των φαινομένων του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού.

Μπορούμε να ορίσουμε μαθηματικά το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε μια κατανομή φορτίου, ως το λόγο της δύναμης  $\vec{F}$  η οποία θα ασκηθεί σε ένα σημειακό φορτίο  $q$  που θα βρεθεί μέσα στο πεδίο, προς το φορτίο  $q$ . Το ηλεκτρικό πεδίο είναι διανυσματικό μέγεθος και συμβολίζεται με  $\vec{E}$ :

$$\vec{E} \equiv \frac{\vec{F}}{q} . \quad (6.2)$$

Θεωρούμε ότι το δοκιμαστικό φορτίο  $q$  που εισάγεται στο ηλεκτρικό πεδίο είναι απειροστό μικρό ώστε να μην επηρεάσει την κατανομή φορτίου που παράγει το πεδίο, καθώς και αυτό ασκεί δυνάμεις στα φορτία γύρω του. Παρατηρούμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στη δύναμη που ασκείται σε θετικό δοκιμαστικό φορτίο και αντιπαράλληλο στη δύναμη που δέχεται ένα αρνητικό φορτίο. Τονίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο εμφανίζεται στο χώρο γύρω από ένα ηλεκτρικό φορτίο, ανεξάρτητα από την ύπαρξη άλλων φορτίων, δεν χρειάζεται δηλαδή το δοκιμαστικό φορτίο για να παρουσιαστεί το ηλεκτρικό πεδίο. Η ηλεκτρική δύναμη βέβαια, απαιτεί να υπάρχει άλλο φορτίο ώστε να ασκηθεί σε αυτό.

Το ηλεκτρικό πεδίο μετράται στο SI σε N/C (Newton ανά Coulomb) ή στην ισοδύναμη μονάδα μέτρησης V/m (Volt ανά μέτρο).

Αν γνωρίζουμε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  σε κάθε σημείο του χώρου γύρω από μια κατανομή φορτίου, μπορούμε να υπολογίσουμε τη δύναμη  $\vec{F}$  την οποία θα δεχθεί ένα σημειακό φορτίο  $q$  που θα βρεθεί σε αυτό το χώρο, από τη σχέση

$$\vec{F} = q\vec{E} .$$

Επομένως, ηλεκτρικό φορτίο που βρίσκεται μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο, δέχεται ηλεκτρική δύναμη (πέρα από άλλες δυνάμεις που μπορεί να ασκούνται πάνω του).

### Παράδειγμα

Ένα φορτισμένο σωματίδιο με μάζα  $m = 3 \times 10^{-12}$  kg βρίσκεται σε σημείο του χώρου με βαρυτικό και ηλεκτρικό πεδίο. Το βαρυτικό πεδίο έχει μέτρο  $g \approx 9.81 \text{ m/s}^2$ , διεύθυνση κατακόρυφη και φορά προς τα κάτω. Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο  $E = 6 \times 10^3 \text{ N/C}$  και είναι παράλληλο στο βαρυτικό πεδίο. Το σωματίδιο αφήνεται ελεύθερο και παρατηρούμε ότι παραμένει ακίνητο. Ας υπολογίσουμε το φορτίο του,  $q$ .

Έστω ότι η κατακόρυφη διεύθυνση με φορά προς τα επάνω αποτελεί τον άξονα  $z$ , με μοναδιαίο διάνυσμα το  $\hat{k}$ . Το βαρυτικό και το ηλεκτρικό πεδίο είναι αντιπαράλληλα στο  $\hat{k}$ , με το συγκεκριμένο ορισμό.

Στο σωματίδιο ασκούνται δύο δυνάμεις: η βαρυτική,  $\vec{F}_g = -mg\hat{k}$ , και η ηλεκτρική,  $\vec{F}_e = -qE\hat{k}$ . Η συνολική δύναμη είναι το διανυσματικό άθροισμα

αυτών:  $\vec{F} = \vec{F}_g + \vec{F}_e = -(mg + qE)\hat{k}$ . Για να μην αλλάξει η κινητική κατάσταση του σωματιδίου πρέπει η συνολική δύναμη που ασκείται σε αυτό να είναι 0. Επομένως,  $mg + qE = 0 \Rightarrow q = -mg/E \approx -4.905 \times 10^{-15} \text{ C}$ .

### 6.3.1 Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου

Μπορούμε να αναπαραστήσουμε σχηματικά το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποιο χώρο με ένα σύνολο κατάλληλα σχεδιασμένων καμπυλών, των *γραμμών του πεδίου*, ως εξής:

- Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου είναι εφαπτόμενο σε κάθε σημείο αυτών των καμπυλών. Οι γραμμές έχουν συγκεκριμένη κατεύθυνση, που υποδηλώνεται με βέλος: είναι ίδια με τη φορά που έχει το διάνυσμα του πεδίου. Ισοδύναμα, κάθε γραμμή του πεδίου που περνά από ένα σημείο εφάπτεται στη δύναμη που δέχεται ένα θετικά φορτισμένο σωματίδιο σε αυτό το σημείο.
- Η πυκνότητα των γραμμών σε μια περιοχή του χώρου, δηλαδή το πλήθος τους ανά μονάδα επιφάνειας κάθετης στις γραμμές, είναι ανάλογη του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου στη συγκεκριμένη περιοχή του χώρου. Δηλαδή, οι γραμμές του πεδίου είναι κοντά μεταξύ τους σε περιχές με ισχυρό ηλεκτρικό πεδίο ενώ είναι αραιές σε περιοχή με ασθενές πεδίο.

### 6.3.2 Ηλεκτρικό πεδίο σημειακού φορτίου

Ας υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από ένα σημειακό φορτίο  $Q$ . Τοποθετούμε σε απόσταση  $r$  από το φορτίο  $Q$  ένα σημειακό φορτίο  $q$ . Η δύναμη που θα ασκηθεί σε αυτό δίνεται από το νόμο Coulomb (6.1):

$$\vec{F} = k_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r}.$$

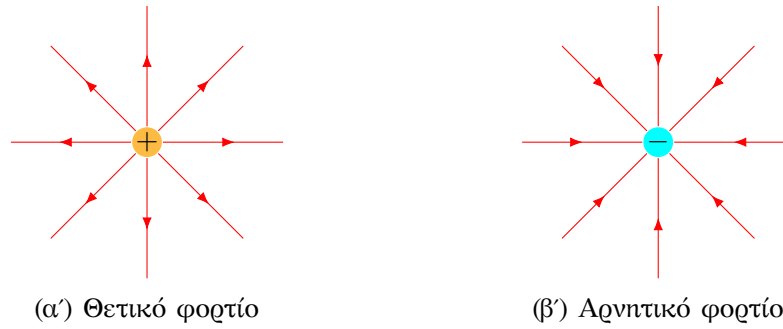
Από τον ορισμό του ηλεκτρικού πεδίου (6.2) προκύπτει ότι

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r}.$$

Στον τύπο εμφανίζονται το μέτρο και το μοναδιαίο διάνυσμα του  $\vec{r}$  που είναι το διάνυσμα με αρχή το φορτίο  $Q$  και τέλος ένα σημείο του χώρου γύρω από το  $Q$  (στο οποίο σημείο αν τοποθετήσουμε ένα φορτίο θα του ασκηθεί δύναμη). Το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου μεταβάλλεται ανάλογα με το σημείο  $\vec{r}$ , άρα  $\vec{E} \equiv \vec{E}(\vec{r})$ .

### 6.3.3 Ηλεκτρικό πεδίο μη σημειακού φορτίου

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μιας διακριτής κατανομής υπολογίζουμε πρώτα το ηλεκτρικό πεδίο από κάθε διακριτό σημειακό φορτίο. Κατόπιν, *αθροίζουμε διανυσματικά* τα ηλεκτρικά πεδία. Η διαδικασία αυτή είναι ισοδύναμη



Σχήμα 6.3: Γραμμές ηλεκτρικού πεδίου από σημειακό φορτίο

με το να βρούμε τη συνολική ηλεκτρική δύναμη σε ένα φορτίο  $q$  και μετά να διαιρέσουμε με το  $q$ . Έτσι, αν έχουμε  $n$  σημειακά φορτία  $q_i$  με  $i = 1, \dots, n$ , σε θέσεις με διανύσματα  $\vec{r}_i$ , και θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο σε σημείο  $P$  που έχει διάνυσμα  $\vec{r}_P$ , θα πρέπει να υπολογίσουμε τα  $n$  διανύσματα  $\vec{r}_{iP} = \vec{r}_P - \vec{r}_i$  και να εφαρμόσουμε τον τύπο

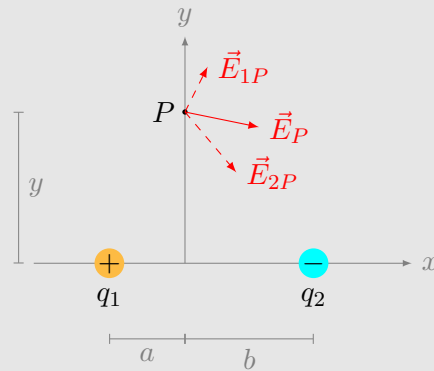
$$\vec{E} = \sum_{i=1}^n k_e \frac{q_i}{|\vec{r}_{iP}|^2} \hat{r}_{iP}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μιας συνεχούς κατανομής φορτίου είναι το *διανυσματικό «άθροισμα»* των ηλεκτρικών πεδίων από κάθε (σημειακό) στοιχειώδες τμήμα της κατανομής. Καθώς η κατανομή είναι συνεχής, το «άθροισμα» υπολογίζεται με ολοκλήρωμα (επικαμπύλιο, επιφανειακό ή τριπλό).

Στην περίπτωση που έχουμε μικτή κατανομή, δηλαδή και διακριτά φορτία και συνεχή κατανομή, υπολογίζουμε το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από κάθε φορτίο και την κατανομή.

### Παράδειγμα

Δύο φορτία  $q_1$  και  $q_2$  βρίσκονται στον άξονα  $x$ , σε αποστάσεις  $a$  και  $b$  εκατέρωθεν της αρχής του άξονα (Σχήμα 6.3.3). Ας βρούμε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο  $P$  που βρίσκεται πάνω στον άξονα  $y$ , σε απόσταση  $y$  από την αρχή.



- Το πρώτο φορτίο βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_1 = -a\hat{i} + 0\hat{j}$ .
- Το δεύτερο φορτίο βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_2 = b\hat{i} + 0\hat{j}$ .
- Το σημείο  $P$  βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_P = 0\hat{i} + y\hat{j}$ .
- Το διάνυσμα από το πρώτο φορτίο προς το  $P$  είναι το  $\vec{r}_{1P} = \vec{r}_P - \vec{r}_1 = a\hat{i} + y\hat{j}$ . Το μέτρο του είναι  $r_{1P} = \sqrt{\vec{r}_{1P} \cdot \vec{r}_{1P}} = \sqrt{a^2 + y^2}$  και το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το

$$\hat{r}_{1P} = \frac{1}{\sqrt{a^2 + y^2}} (a\hat{i} + y\hat{j}) .$$

- Το διάνυσμα από το δεύτερο φορτίο προς το  $P$  είναι  $\vec{r}_{2P} = \vec{r}_P - \vec{r}_2 = -b\hat{i} + y\hat{j}$ . Το μέτρο του είναι  $r_{2P} = \sqrt{\vec{r}_{2P} \cdot \vec{r}_{2P}} = \sqrt{b^2 + y^2}$  και το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το

$$\hat{r}_{2P} = \frac{1}{\sqrt{b^2 + y^2}} (-b\hat{i} + y\hat{j}) .$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στο  $P$  από το πρώτο φορτίο είναι

$$\vec{E}_{1P} = k_e \frac{q_1}{r_{1P}^2} \hat{r}_{1P} = k_e \frac{q_1}{(a^2 + y^2)^{3/2}} (a\hat{i} + y\hat{j}) .$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στο  $P$  από το δεύτερο φορτίο είναι

$$\vec{E}_{2P} = k_e \frac{q_2}{r_{2P}^2} \hat{r}_{2P} = k_e \frac{q_2}{(b^2 + y^2)^{3/2}} (-b\hat{i} + y\hat{j}) .$$

Το συνολικό πεδίο είναι

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{1P} + \vec{E}_{2P} = k_e \frac{q_1}{(a^2 + y^2)^{3/2}} (a\hat{i} + y\hat{j}) + k_e \frac{q_2}{(b^2 + y^2)^{3/2}} (-b\hat{i} + y\hat{j}) .$$

Αν τα φορτία είναι ίσα και αντίθετα και οι αποστάσεις  $a, b$  ίσες, αν δηλαδή έχουμε ένα δίπολο και θέλουμε το πεδίο στη μεσοκάθετο, τότε

$$\vec{E}_P = k_e \frac{2aq_1}{(a^2 + y^2)^{3/2}} \hat{i}.$$

Στην περίπτωση που το σημείο  $P$  στη μεσοκάθετο είναι πολύ μακριά από το δίπολο, δηλαδή η απόσταση  $2a$  των φορτίων του διπόλου είναι πολύ μικρότερη από το  $y$  του  $P$ , θα έχουμε  $a^2 + y^2 \approx y^2$  και συνεπώς

$$\vec{E}_P \approx k_e \frac{2aq_1}{y^3} \hat{i}.$$

### 6.3.4 Πυκνότητα ενέργειας ηλεκτρικού πεδίου

Η χωρική πυκνότητα ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα όγκου) που είναι αποθηκευμένη σε ένα ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$u = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 E^2,$$

όπου  $\kappa$  είναι η σχετική διαπερατότητα (διηλεκτρική σταθερά) του υλικού στο χώρο του ηλεκτρικού πεδίου. Το  $\kappa$  είναι αδιάστατο μέγεθος και για το κενό έχει τιμή  $\kappa = 1$ .

Η συνολική αποθηκευμένη ενέργεια  $U$  του ηλεκτρικού πεδίου σε ένα όγκο  $V$  είναι επομένως

$$U = \int_V u \, d\tau = \frac{1}{2} \kappa \epsilon_0 \int_V E^2(\vec{r}) \, d\tau.$$

## 6.4 Νόμος Gauss

Ο νόμος του Gauss για το ηλεκτρικό πεδίο, στην ολοκληρωτική του μορφή, συνδέει τη ροή ηλεκτρικού πεδίου,

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A},$$

από μια κλειστή επιφάνεια (που λέγεται επιφάνεια Gauss) με το συνολικό ηλεκτρικό φορτίο  $Q$  που περικλείει αυτή:

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Ισχύει φυσικά πάντα αλλά μπορεί να εφαρμοστεί σε ειδικές περιπτώσεις, μόνο όταν το πρόβλημα έχει μεγάλη συμμετρία. Για να τον εφαρμόσουμε και να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο, πρέπει να βρούμε κλειστή επιφάνεια τέτοια ώστε σε αυτή το πεδίο, έστω κατά τμήματά της,

- να είναι παντού κάθετο, ή παράλληλο, ή γενικότερα, με σταθερή γωνία  $\theta$ . Τότε, η στοιχειώδης ροή του από αυτή,  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ , γίνεται γινόμενο των μέτρων  $E dA$ , ή 0, ή γενικότερα,  $E dA \cos \theta$ .
- να έχει ίδιο μέτρο. Τότε το μέτρο του πεδίου βγαίνει από το ολοκλήρωμα και αυτό που απομένει σχετίζεται με το εμβαδόν της κλειστής επιφάνειας (ή τμήματός της).

Η συμμετρία του προβλήματος μάς βοηθά να βρούμε τέτοια επιφάνεια. Αν η κατανομή φορτίου είναι αναλλοίωτη π.χ. σε περιστροφή γύρω από κάποιον άξονα ή σε κατοπτρισμό ως προς κάποιο επίπεδο, το ηλεκτρικό πεδίο (και οποιοδήποτε άλλο φυσικό μέγεθος) της κατανομής θα είναι και αυτό αναλλοίωτο στην περιστροφή ή στον κατοπτρισμό. Θα γνωρίζουμε επομένως διεύθυνση του διανύσματος και την εξάρτηση του μέτρου από τις συντεταγμένες.

Προσέξτε ότι η επιφάνεια Gauss είναι μια μαθηματική κατασκευή, δεν αντιστοιχεί υποχρεωτικά σε πραγματική επιφάνεια στο πρόβλημά μας. Αν η κατανομή φορτίου στο πρόβλημά μας δεν έχει τη συμμετρία που χρειάζεται ώστε να μπορούμε να βρούμε αυτή την επιφάνεια, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον νόμο Gauss στην ολοκληρωτική του μορφή.

### 6.4.1 Συμμετρία

Αν η κατανομή του φορτίου είναι αναλλοίωτη σε

- περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα,
- μετατόπιση,
- κατοπτρισμό ως προς επίπεδο,
- αναστροφή ως προς σημείο,

τότε και το ηλεκτρικό πεδίο είναι αναλλοίωτο σε αυτούς τους μετασχηματισμούς.

### 6.4.2 Διαφορική μορφή νόμου Gauss

Η εφαρμογή του θεωρήματος της απόκλισης για το διανυσματικό πεδίο  $\vec{E}$  δίνει

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Το  $S$  είναι η επιφάνεια Gauss και το  $V$  είναι ο όγκος που περικλείει αυτή.

Ο τύπος του Gauss γίνεται

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) d\tau = \frac{Q}{\epsilon_0}.$$

Αλλά μέσα στον όγκο  $V$  υπάρχει κάποια κατανομή φορτίου με χωρική πυκνότητα  $\rho$ . Το συνολικό φορτίο στο  $V$  είναι

$$Q = \int_V \rho \, d\tau.$$

Άρα

$$\int_V (\nabla \cdot \vec{E}) \, d\tau = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho \, d\tau$$

και καθώς ο όγκος  $V$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε, πρέπει να ισχύει

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}. \quad (6.3)$$

Αυτή είναι η διαφορική μορφή του νόμου Gauss και συνδέει την πυκνότητα φορτίου σε κάθε σημείο του χώρου με την απόκλιση του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτό το σημείο.

## 6.5 Ηλεκτρικό Δυναμικό

Η *διαφορά (ηλεκτρικού) δυναμικού* μεταξύ δύο σημείων  $A$  και  $B$  σε ηλεκτρικό πεδίο ορίζεται ως

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

όπου  $C$  μια οποιαδήποτε διαδρομή μεταξύ των  $A$ ,  $B$ , με κατεύθυνση από το  $A$  στο  $B$ . Το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  είναι *συντηρητικό* καθώς το συγκεκριμένο επικαμπύλιο ολοκλήρωμά του είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που θα επιλέξουμε μεταξύ των δύο σημείων.



Διευκολύνει πολύ τους υπολογισμούς να επιλέγουμε καμπύλη που είναι παράλληλη ή κάθετη στο ηλεκτρικό πεδίο ώστε το  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  να γίνεται γινόμενο μέτρων (ή 0).

Κατά σύμβαση ορίζουμε  $V_\infty = 0$ , αρκεί να μην υπάρχουν ηλεκτρικά φορτία στο άπειρο.

Το δυναμικό υπακούει στην αρχή της επαλληλίας, όπως και το ηλεκτρικό πεδίο αφού η σχέση μεταξύ τους είναι γραμμική. Αν έχουμε ηλεκτρικά πεδία  $\vec{E}_1$ ,  $\vec{E}_2$ , ...,



από διάφορες πηγές, το συνολικό πεδίο είναι  $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \dots$  και η συνολική διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων είναι

$$\Delta V = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E}_1 \cdot d\vec{s} + \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E}_2 \cdot d\vec{s} + \dots = \Delta V_1 + \Delta V_2 + \dots$$

Το δυναμικό είναι βαθμωτό μέγεθος. Μετρείται σε μονάδες ενέργειας ανά φορτίο. Στο SI η μονάδα μέτρησης είναι J/C ή πιο απλά, Volt (V).

### 6.5.1 Υπολογισμός ηλεκτρικού πεδίου από το δυναμικό

Αν γνωρίζουμε το δυναμικό παντού στο χώρο,  $V(x, y, z)$ , τότε το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}.$$

Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο είναι η κλίση μιας συνάρτησης (του  $V$ ). Αυτό αποτελεί εναλλακτικό ορισμό του συντηρητικού πεδίου.

### 6.5.2 Δυναμικό διαφορών κατανομών φορτίου

Το ηλεκτρικό δυναμικό σε σημείο με απόσταση  $r$  από ένα σημειακό φορτίο  $q$  είναι (με  $V_\infty = 0$ )

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r},$$

αφού

$$-\nabla V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}.$$

Δηλαδή, το συγκεκριμένο δυναμικό παράγει το ηλεκτρικό πεδίο του σημειακού φορτίου. Κατάλληλο άθροισμα τέτοιων δυναμικών παράγει το δυναμικό οποιασδήποτε κατανομής φορτίου. Έτσι, αν έχουμε  $n$  διακριτά σημειακά φορτία  $q_i$  σε θέσεις  $\vec{r}_i$  με  $i = 1, \dots, n$ , το δυναμικό σε θέση  $\vec{r}$  είναι

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\vec{r} - \vec{r}_i|},$$

Αν έχουμε συνεχή κατανομή φορτίου το δυναμικό είναι

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{dq}{r},$$

όπου  $r$  η απόσταση από κάθε στοιχειώδες φορτίο της κατανομής προς το σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό. Το ολοκλήρωμα είναι επικαμπύλιο, επιφανειακό ή όγκου ανάλογα με την κατανομή. Το  $dq$  αντικαθίσταται με  $\lambda ds$ ,  $\sigma dA$ ,  $\rho d\tau$  αντίστοιχα.

### 6.5.3 Νόμος Gauss για το δυναμικό

Η διαφορική μορφή του νόμου Gauss στον ηλεκτρισμό γνωρίζουμε ότι είναι

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0},$$

όπου  $\rho$  η χωρική πυκνότητα ηλεκτρικών φορτίων.

Καθώς  $\vec{E} = -\nabla V$  έχουμε

$$\nabla \cdot (\nabla V) = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}.$$

Η εξίσωση αυτή για το δυναμικό είναι η *εξίσωση Poisson*.

### 6.5.4 Δυναμική Ενέργεια

Ένα φορτίο  $q$  μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  δέχεται δύναμη  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Το έργο  $W$  για να μετακινήσουμε το φορτίο μεταξύ δύο σημείων  $A, B$ , κατά μήκος μιας καμπύλης  $C$ , σε χώρο που υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$W = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{F} \cdot d\vec{s} = q \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = q(V_A - V_B).$$

Το έργο είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή.

Μπορούμε να ορίσουμε τη *δυναμική ενέργεια* του συστήματος «ηλεκτρικό πεδίο–ηλεκτρικό φορτίο». Το φορτίο  $q$  στη θέση  $A$  έχει δυναμική ενέργεια

$$U_A = qV_A.$$

Η δυναμική ενέργεια είναι βαθμωτό μέγεθος και μετριέται σε μονάδες ενέργειας. Η μονάδα ενέργειας στο SI είναι το Joule (J).

### Υπολογισμός της Δυναμικής Ενέργειας

Αν ορίσουμε ότι το δυναμικό (και η δυναμική ενέργεια) στο άπειρο είναι 0, το έργο για να μεταφέρουμε ένα φορτίο  $q$  σε θέση  $A$  είναι η δυναμική ενέργεια του συστήματος. Επομένως, η δυναμική ενέργεια οποιασδήποτε κατανομής φορτίου είναι το έργο για να μεταφερθούν από το άπειρο στην τελική τους θέση τα φορτία της κατανομής.

Έστω ότι έχουμε διακριτά σημειακά φορτία. Το πρώτο φορτίο για να έρθει από το άπειρο χρειάζεται μηδενικό έργο καθώς δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο. Το δεύτερο φορτίο «βλέπει» το δυναμικό του πρώτου φορτίου. Το τρίτο φορτίο δέχεται δυνάμεις από το πρώτο και το δεύτερο φορτίο κ.ο.κ. Συνολικά για να τοποθετήσουμε  $n$  φορτία  $q_i$  σε θέσεις  $\vec{r}_i$ , με  $i = 1, \dots, n$ , χρειάζεται έργο

$$W = q_2 V_{12} + q_3 (V_{13} + V_{23}) + q_4 (V_{14} + V_{24} + V_{34}) + \dots$$

όπου  $V_{ij}$  το δυναμικό από το φορτίο  $i$  στη θέση του φορτίου  $j$ .

Εύκολα δείχνεται ότι

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( q_2 \frac{q_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + q_3 \left( \frac{q_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} \right) + \dots \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{q_1 q_2}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|} + \frac{q_1 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|} + \frac{q_2 q_3}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|} + \dots \right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το άθροισμα των όρων που εμφανίζονται στο δεξί μέλος μπορεί να γραφτεί με δύο γενικούς τύπους:

$$\begin{aligned} W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=i+1}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|} \text{ και} \\ W &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{i-1} \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}. \end{aligned}$$

Το ημίάθροισμά τους είναι ένας τρίτος, πιο εύχρηστος, τύπος για το  $W$ :

$$W = \frac{1}{2} \times \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_i q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}.$$

Η ποσότητα

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{q_j}{|\vec{r}_j - \vec{r}_i|}$$

είναι το δυναμικό στη θέση  $\vec{r}_i$  όλου του συστήματος. Επομένως

$$W = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n q_i V(\vec{r}_i).$$

Στην περίπτωση που έχουμε συνεχή κατανομή φορτίου (σε καμπύλη, επιφάνεια ή όγκο) η προηγούμενη σχέση γενικεύεται εύκολα στην

$$W = \frac{1}{2} \int dq V(\vec{r}).$$

Το ολοκλήρωμα είναι επικαμπύλιο, επιφανειακό ή όγκου ανάλογα με την κατανομή. Το  $dq$  αντικαθίσταται με  $\lambda ds$ ,  $\sigma dA$ ,  $\rho d\tau$  αντίστοιχα.

## 6.6 Ασκήσεις–Λύσεις

### 6.6.1 Νόμος Coulomb

1. Δώδεκα ίσα φορτία,  $q$ , τοποθετούνται σε ένα κύκλο με ίσα τόξα μεταξύ τους (π.χ. σε κάθε αριθμό ενός δίσκου ρολογιού). Τοποθετούμε ένα φορτίο  $Q$  στο κέντρο.
  - Πόση είναι η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται πάνω του;
  - Αν αφαιρέσουμε ένα φορτίο  $q$  (π.χ. το  $q_6$ ), πόση είναι η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο  $Q$ ;
  - Αν τα φορτία είναι 13 και ισαπέχουν πάνω στον κύκλο, πόση είναι η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται στο  $Q$ ;

### ΛΥΣΗ

#### Α' τρόπος

Έστω ότι έχουμε συνολικά  $n > 1$  ίσα φορτία, τοποθετημένα σε ίσες αποστάσεις πάνω σε κύκλο.

Η κατανομή των φορτίων είναι συμμετρική σε κατοπτρισμό ως προς το επίπεδο του κύκλου, επομένως το διάνυσμα της δύναμης που παράγει αυτή η κατανομή έχει την ίδια συμμετρία (παραμένει ίδιο στον κατοπτρισμό). Η δύναμη δεν μπορεί να έχει συνιστώσα κάθετη στον κύκλο: αν υπήρχε αυτή η συνιστώσα, στον κατοπτρισμό θα άλλαζε πρόσημο· για να είναι ίδια με πριν τον κατοπτρισμό πρέπει να είναι 0 (ο μοναδικός αριθμός που είναι ίσος με τον αντίθετό του). Επομένως, η δύναμη είναι στο επίπεδο του κύκλου.

Επίσης, η κατανομή των φορτίων είναι συμμετρική σε στροφή γύρω από τον άξονα του κύκλου κατά πολλαπλάσιο του  $2\pi/n$ . Σε τέτοιο μετασχηματισμό η δύναμη στρέφεται και αυτή κατά το ίδιο πολλαπλάσιο του  $2\pi/n$ . Πρέπει όμως να παραμένει ίδια καθώς η κατανομή δεν αλλάζει. Για να είναι ίσα δύο διανύσματα που σχηματίζουν μη μηδενική γωνία (γι' αυτό  $n > 1$ ) πρέπει υποχρεωτικά να έχουν μέτρο 0.

Παρατηρούμε ότι η αφαίρεση ενός φορτίου από τη θέση του ισοδυναμεί με την τοποθέτηση εκεί ενός ίσου και αντίθετου φορτίου στο αρχικό σύνολο φορτίων. Η επαλληλία της αρχικής κατανομής φορτίου και του  $-q$  ασκεί δύναμη στο φορτίο  $Q$  που είναι διανυσματικό άθροισμα της δύναμης από τη συμμετρική κατανομή (δηλαδή 0) και της δύναμης από το φορτίο  $-q$ . Έτσι

$$\vec{F} = \vec{F}_{-q} = -k_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r},$$

όπου  $r = R$  η ακτίνα του κύκλου και  $\hat{r}$  το μοναδιαίο διάνυσμα από το φορτίο  $-q$  προς το κέντρο.

### Β' τρόπος

Σύμφωνα με το νόμο Coulomb, η δύναμη που δέχεται το φορτίο  $Q$  από το φορτίο  $q_i$ , με  $i = 1, \dots, 12$ , είναι

$$\vec{F}_i = k_e \frac{Qq_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad i = 1, \dots, 12 .$$

Το  $\vec{r}_i$  είναι το διάνυσμα από το φορτίο  $q_i$  προς τη θέση του φορτίου  $Q$ , δηλαδή το κέντρο. Η συνολική δύναμη που δέχεται το  $Q$  είναι το διανυσματικό άθροισμα των  $\vec{F}_i$ .

Τα φορτία είναι συμμετρικά τοποθετημένα έτσι ώστε για κάθε φορτίο να υπάρχει σε αντιδιαμετρική θέση ένα ίσο φορτίο, σε ίδια απόσταση. Τέτοια ζεύγη φορτίων είναι τα  $(q_1, q_7)$ ,  $(q_2, q_8)$ , ..., δηλαδή τα  $(q_j, q_{j+6})$  με  $j = 1, \dots, 6$ . Εύκολα διαπιστώνουμε ότι τα διανύσματα  $\vec{r}_j$ ,  $\vec{r}_{j+6}$  (και συνεπώς τα μοναδιαία τους) είναι αντίθετα διανύσματα: έχουν ίδιο μέτρο, ίδια διεύθυνση, αντίθετη φορά. Επομένως, οι δυνάμεις  $\vec{F}_j$  και  $\vec{F}_{j+6}$  προκύπτουν ίσες και αντίθετες και έχουν διανυσματικό άθροισμα  $\vec{0}$ .

Συνολικά, η ολική δύναμη είναι  $\vec{0}$ .

Αν αφαιρέσουμε το φορτίο  $q_6$ , η δύναμη από το φορτίο  $q_{12}$  δεν αντισταθμίζεται και είναι η μόνη που παραμένει στο άθροισμα όλων των δυνάμεων. Αυτή είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_{12} = k_e \frac{Qq}{r^2} \hat{r} ,$$

όπου  $r = R$  η ακτίνα του κύκλου και  $\hat{r}$  το μοναδιαίο διάνυσμα από το φορτίο  $q_{12}$  προς το κέντρο.

Αν τα φορτία είναι 13 και έχουν μεταξύ τους ίσα τόξα σημαίνει ότι τα διανύσματα θέσης τους ως προς το κέντρο είναι (σε πολικές συντεταγμένες)  $(R, \phi_i)$  με  $\phi_i = i 2\pi/13$ ,  $i = 1, \dots, 13$ .  $R$  είναι η ακτίνα του κύκλου.

Τα διανύσματα  $\vec{r}_i$  στον τύπο Coulomb είναι αντίθετα από τα διανύσματα θέσης. Έχουν επομένως μέτρο  $r_i = R$  και  $\hat{r}_i = -\cos \phi_i \hat{i} - \sin \phi_i \hat{j}$ . Η συνολική δύναμη είναι

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^{13} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{13} k_e \frac{Qq_i}{r_i^2} \hat{r}_i = -k_e \frac{Qq}{R^2} \sum_{i=1}^{13} (\cos \phi_i \hat{i} + \sin \phi_i \hat{j}) .$$

Μπορεί ναδειχθεί γενικά ότι αν  $n > 1$

$$\sum_{i=1}^n \cos \left( 2\pi \frac{i}{n} \right) = \sum_{i=1}^n \sin \left( 2\pi \frac{i}{n} \right) = 0 .$$

Επομένως, η συνολική δύναμη είναι  $\vec{0}$ .

2. Δύο σωματίδια με ίσα φορτία συγκρατούνται σε απόσταση  $3.2 \times 10^{-3} \text{ m}$  μεταξύ τους και στη συνέχεια αφήνονται ελεύθερα από την ηρεμία. Η αρχική επιτάχυνση του πρώτου σωματιδίου παρατηρείται ότι είναι  $7 \text{ m/s}^2$  και αυτή του δεύτερου  $9 \text{ m/s}^2$ . Αν η μάζα του πρώτου σωματιδίου είναι  $6.3 \times 10^{-7} \text{ kg}$  (α') πόση είναι η μάζα του δεύτερου σωματιδίου, (β') ποιο είναι το φορτίο κάθε σωματιδίου.

### ΛΥΣΗ

Το μέτρο της δύναμης που ασκείται σε κάθε φορτίο είναι ίδιο:

$$F_1 = F_2 = k_e \frac{Q^2}{r^2},$$

όπου  $r$  η αρχική τους απόσταση και  $Q$  το φορτίο κάθε σωματιδίου (ίδιο και για τα δύο).

Όταν αφήνονται ελεύθερα αποκτούν επιτάχυνση  $a_1$  και  $a_2$  αντίστοιχα, με μέτρο  $a_i = F/m_i$ .  $m_i$  είναι η μάζα του σωματιδίου  $i$ . Επομένως

$$F_1 = F_2 \Rightarrow m_1 a_1 = m_2 a_2 \Rightarrow m_2 = m_1 \frac{a_1}{a_2}.$$

Το κοινό φορτίο,  $Q$ , είναι

$$F_1 = m_1 a_1 \Rightarrow Q = \sqrt{\frac{m_1 a_1 r^2}{k_e}}.$$

Με αντικατάσταση,  $m_2 = 4.9 \times 10^{-7} \text{ kg}$  και  $Q \approx 7.084 \times 10^{-11} \text{ C}$ .

3. Από το φορτίο  $Q$  που έχει αρχικά μια μικροσκοπική σφαίρα, ένα φορτίο  $q$  πρόκειται να μεταφερθεί σε μια δεύτερη, κοντινή σφαίρα. Και οι δύο σφαίρες μπορούν να θεωρηθούν ως σωματίδια. Για ποια τιμή του  $q$  θα μεγιστοποιηθεί η ηλεκτροστατική δύναμη μεταξύ των δύο σφαιρών;

### ΛΥΣΗ

Μετά τη μεταφορά φορτίου, η πρώτη σφαίρα έχει φορτίο  $Q - q$  και η δεύτερη έχει φορτίο  $q$ . Το μέτρο της δύναμης μεταξύ τους είναι

$$F = k_e \frac{(Q - q)q}{r^2},$$

όπου  $r$  η απόστασή τους.

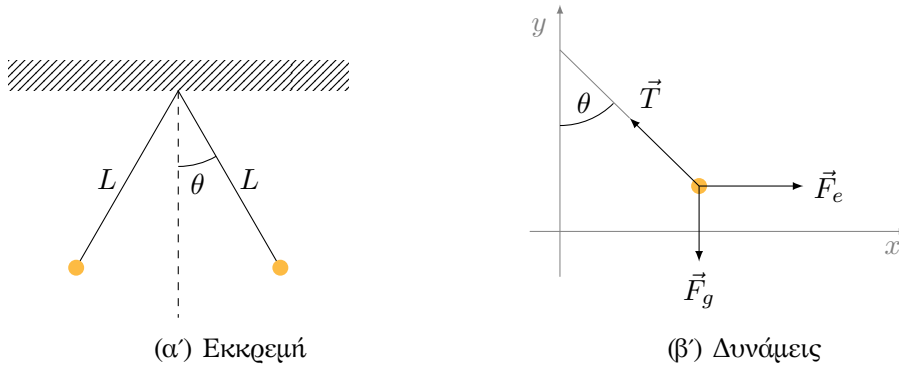
Η συνάρτηση  $F(q)$  έχει ακρότατο όταν  $F'(q) = 0$ . Επομένως,

$$F'(q) = k_e \frac{Q - 2q}{r^2} = 0 \Rightarrow q = Q/2.$$

Το ακρότατο στο  $q = Q/2$  είναι μέγιστο καθώς

$$F''(Q/2) = -k_e \frac{2}{r^2} < 0 .$$

4. Δύο μικρές μεταλλικές σφαίρες, κάθε μια με μάζα  $m = 0.2 \text{ g}$ , αιωρούνται ως εκκρεμή από αβαρή νήματα μήκους  $L$ , Σχήμα 6.4α'. Στις σφαίρες δίνεται το ίδιο ηλεκτρικό φορτίο  $q = 7.2 \text{ nC}$  και ισορροπούν όταν κάθε νήμα σχηματίζει γωνία  $\theta = 5^\circ$  με την κατακόρυφο. Πόσο μακριά είναι τα νήματα; Δίνονται



Σχήμα 6.4: Άσκηση 4

$$k_e = 9 \times 10^9 \text{ NC}^{-2}\text{m}^2, \quad g = 9.81 \text{ m/s}^2.$$

#### ΛΥΣΗ

Η συνολική δύναμη  $\vec{F}$  που ασκείται σε κάθε φορτίο είναι το διανυσματικό άθροισμα της ηλεκτρικής δύναμης  $\vec{F}_e$  από το άλλο φορτίο, της βαρυτικής δύναμης  $\vec{F}_g$  και της τάσης του νήματος  $\vec{T}$ , Σχήμα 6.4β'.

Η απόσταση των δύο φορτίων είναι  $2(L \sin \theta)$ , όπου  $L$  το μήκος του κάθε εκκρεμούς. Η ηλεκτρική δύναμη από το άλλο φορτίο είναι

$$\vec{F}_e = k_e \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2} \hat{i} .$$

Η βαρυτική δύναμη είναι

$$\vec{F}_g = m\vec{g} = -mg\hat{j} .$$

Επομένως

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_g + \vec{T} = k_e \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2} \hat{i} - mg\hat{j} + \vec{T} .$$

Αναλύουμε τη συνολική δύναμη σε συνιστώσες στους άξονες  $x$  και  $y$ :

$$\vec{F} = \left( k_e \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2} - T \sin \theta \right) \hat{i} + (-mg + T \cos \theta) \hat{j} .$$

Το φορτίο ισορροπεί όταν  $\vec{F} = 0$ . Τότε

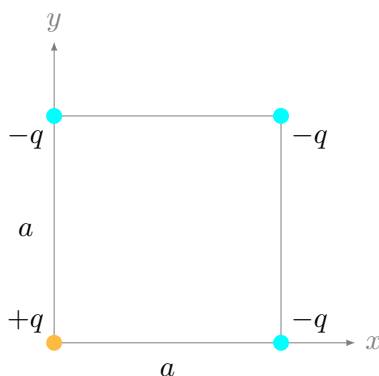
$$\begin{aligned} k_e \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2} &= T \sin \theta , \\ mg &= T \cos \theta . \end{aligned}$$

Άρα

$$k_e \frac{q^2}{(2L \sin \theta)^2} = mg \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \Rightarrow L = \frac{q}{2 \sin \theta} \sqrt{\frac{k_e}{mg \tan \theta}} .$$

Με αντικατάσταση,  $L \approx 0.3 \text{ m}$ .

5. Τέσσερα σημειακά φορτία βρίσκονται στις κορυφές ενός τετραγώνου πλευράς  $a$ . Βρείτε τη συνισταμένη δύναμη επί του θετικού φορτίου  $q$ .



### ΛΥΣΗ

Η δύναμη πάνω στο φορτίο στη θέση  $(0,0)$  από το φορτίο στη θέση  $(0,a)$  είναι

$$\vec{F}_1 = -\hat{j} k_e \frac{(-q)q}{a^2} .$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα υπολογίζεται από το  $(0,a)$  προς το  $(0,0)$  και είναι αντίθετο από το  $\hat{j}$ .

Η δύναμη πάνω στο φορτίο στη θέση  $(0,0)$  από το φορτίο στη θέση  $(a,0)$  είναι

$$\vec{F}_2 = -\hat{i} k_e \frac{(-q)q}{a^2} .$$

Το διάνυσμα από το  $(a,a)$  προς το  $(0,0)$  είναι  $\vec{r} = -a\hat{i} - a\hat{j}$ . Το μέτρο του είναι  $r = a\sqrt{2}$  και το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r} = -(\hat{i} + \hat{j})/\sqrt{2}$ .

Η δύναμη από το φορτίο στο  $(a,a)$  προς το φορτίο στο  $(0,0)$  είναι

$$\vec{F}_3 = \hat{r} k_e \frac{(-q)q}{2a^2} .$$



Η συνολική δύναμη είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = k_e \frac{q^2}{a^2} \left( 1 + \frac{1}{2\sqrt{2}} \right) (\hat{i} + \hat{j}) .$$

6. Δυο φορτία  $q_1$  και  $q_2$  έχουν μεταξύ τους απόσταση  $\ell$ . Τα φορτία είναι ελεύθερα να κινηθούν αλλά δεν κινούνται λόγω ενός τρίτου φορτίου στο γύρω χώρο. Πόσο πρέπει να είναι το άγνωστο φορτίο και ποια η θέση του ώστε να συμβαίνει αυτό;

#### ΛΥΣΗ

Η δύναμη που δέχεται το κάθε γνωστό φορτίο από το άλλο γνωστό φορτίο είναι παράλληλη στην ευθεία που περνά από τα δύο φορτία. Το τρίτο φορτίο πρέπει να βρίσκεται σε αυτή την ευθεία γιατί αλλιώς η δύναμη που θα ασκήσει στα γνωστά φορτία δεν θα μπορεί να αντισταθμίσει τη δύναμη μεταξύ των γνωστών φορτίων.

Ορίζουμε την ευθεία που περνά από τα φορτία να είναι ο άξονας  $x$ , με φορά από το  $q_1$  στο  $q_2$ . Αρχή του θα είναι η θέση του φορτίου  $q_1$ . Το  $q_2$  βρίσκεται στη θέση με  $x = \ell$ . Έστω ακόμα ότι το άγνωστο φορτίο  $q_3$  έχει συντεταγμένη  $x = a$ .

Η δύναμη που δέχεται το φορτίο  $q_1$  από το  $q_2$  είναι

$$\vec{F}_{12} = k_e \frac{q_1 q_2}{\ell^2} (-\hat{i}) .$$

Για τη δύναμη που δέχεται το φορτίο  $q_1$  από το  $q_3$  έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \vec{F}_{13} &= -k_e \frac{q_1 q_3}{a^2} \hat{i} & \text{αν } a > 0 , \\ \vec{F}_{13} &= k_e \frac{q_1 q_3}{a^2} \hat{i} & \text{αν } a < 0 . \end{aligned}$$

Η συνολική δύναμη που δέχεται το  $q_1$  είναι  $\vec{F}_1 = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13}$  και είναι 0 ώστε να μην επιταχύνεται. Άρα

$$\begin{aligned} \vec{F}_1 &= -k_e q_1 \left( \frac{q_2}{\ell^2} + \frac{q_3}{a^2} \right) \hat{i} & \text{αν } a > 0 , \\ \vec{F}_1 &= -k_e q_1 \left( \frac{q_2}{\ell^2} - \frac{q_3}{a^2} \right) \hat{i} & \text{αν } a < 0 . \end{aligned}$$

Για να είναι 0 αυτή η δύναμη πρέπει

$$\frac{q_2}{\ell^2} = -\frac{q_3}{a^2} \quad \text{αν } a > 0 , \quad (6.4\alpha')$$

$$\frac{q_2}{\ell^2} = \frac{q_3}{a^2} \quad \text{αν } a < 0 . \quad (6.4\beta')$$

Ας υπολογίσουμε τα ίδια για το φορτίο  $q_2$ .

Η δύναμη που δέχεται το φορτίο  $q_2$  από το  $q_1$  είναι

$$\vec{F}_{21} = k_e \frac{q_1 q_2}{\ell^2} \hat{i} .$$

Για τη δύναμη που δέχεται το φορτίο  $q_2$  από το  $q_3$  έχουμε τα εξής

$$\begin{aligned} \vec{F}_{23} &= k_e \frac{q_2 q_3}{(\ell - a)^2} \hat{i} & \text{αν } a < \ell , \\ \vec{F}_{23} &= -k_e \frac{q_2 q_3}{(\ell - a)^2} \hat{i} & \text{αν } a > \ell . \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι και αρνητικό να είναι το  $a$ , η απόσταση των φορτίων είναι  $\ell + |a| = \ell - a$ .

Η συνολική δύναμη που δέχεται το  $q_2$  είναι  $\vec{F}_2 = \vec{F}_{21} + \vec{F}_{23}$  και είναι 0 ώστε να μην επιταχύνεται. Άρα

$$\begin{aligned} \vec{F}_2 &= k_e q_2 \left( \frac{q_1}{\ell^2} + \frac{q_3}{(\ell - a)^2} \right) \hat{i} & \text{αν } a < \ell , \\ \vec{F}_2 &= k_e q_2 \left( \frac{q_1}{\ell^2} - \frac{q_3}{(\ell - a)^2} \right) \hat{i} & \text{αν } a > \ell . \end{aligned}$$

Για να είναι 0 αυτή η δύναμη πρέπει

$$\frac{q_1}{\ell^2} = -\frac{q_3}{(\ell - a)^2} \quad \text{αν } a < \ell , \quad (6.5\alpha')$$

$$\frac{q_1}{\ell^2} = \frac{q_3}{(\ell - a)^2} \quad \text{αν } a > \ell . \quad (6.5\beta')$$

Συνδυάζοντας τις εξισώσεις 6.4, 6.5 έχουμε

**αν**  $a > \ell$

$$\frac{q_2}{\ell^2} = -\frac{q_3}{a^2} , \quad \frac{q_1}{\ell^2} = \frac{q_3}{(\ell - a)^2} .$$

**αν**  $0 < a < \ell$

$$\frac{q_2}{\ell^2} = -\frac{q_3}{a^2} , \quad \frac{q_1}{\ell^2} = -\frac{q_3}{(\ell - a)^2} .$$

**αν**  $a < 0$

$$\frac{q_2}{\ell^2} = \frac{q_3}{a^2} , \quad \frac{q_1}{\ell^2} = -\frac{q_3}{(\ell - a)^2} .$$

Συμπεπώς,

αν  $a > \ell$

$$q_1(\ell - a)^2 = -q_2 a^2, \quad q_3 = -q_2 \frac{a^2}{\ell^2}.$$

Αν τα  $q_1, q_2$  είναι ομόσημα η πρώτη εξίσωση δεν έχει λύση. Αν είναι ετερόσημα, θέτουμε  $\beta = \sqrt{-q_2/q_1}$ . Τότε (αφού  $a > \ell$  και  $a > 0$ )  $|\ell - a| = \beta|a| \Rightarrow a - \ell = \beta a \Rightarrow a = \ell/(1 - \beta)$ . Για να έχουμε  $a > \ell$  και  $a > 0$  πρέπει  $0 < 1 - \beta < 1 \Rightarrow \beta < 1 \Rightarrow |q_2| < |q_1|$ . Επομένως, αν τα  $q_1, q_2$  είναι ετερόσημα και ισχύει  $|q_2| < |q_1|$ , προκύπτει ότι

$$a = \frac{\ell}{1 - \sqrt{-q_2/q_1}}, \quad q_3 = -q_2 \frac{1}{(1 - \sqrt{-q_2/q_1})^2}.$$

αν  $0 < a < \ell$

$$q_1(\ell - a)^2 = q_2 a^2, \quad q_3 = -q_2 \frac{a^2}{\ell^2}.$$

Αν τα  $q_1, q_2$  είναι ετερόσημα η πρώτη εξίσωση δεν έχει λύση. Αν είναι ομοσημα, θέτουμε  $\beta = \sqrt{q_2/q_1}$ . Τότε (αφού  $0 < a < \ell$ )  $|\ell - a| = \beta|a| \Rightarrow |\ell - a| = \beta a \Rightarrow a = \ell/(1 + \beta)$ . Για να έχουμε  $0 < a < \ell$  πρέπει  $1 < 1 + \beta$ . Ισχύει για οποιεσδήποτε ομόσημες τιμές των  $q_1, q_2$ . Τότε

$$a = \frac{\ell}{1 + \sqrt{q_2/q_1}}, \quad q_3 = -q_2 \frac{1}{(1 + \sqrt{q_2/q_1})^2}.$$

αν  $a < 0$

$$q_1(\ell - a)^2 = -q_2 a^2, \quad q_3 = q_2 \frac{a^2}{\ell^2}.$$

Αν τα  $q_1, q_2$  είναι ομόσημα η πρώτη εξίσωση δεν έχει λύση. Αν είναι ετερόσημα, θέτουμε  $\beta = \sqrt{-q_2/q_1}$ . Τότε (αφού  $a < 0$ )  $|\ell - a| = \beta|a| \Rightarrow \ell - a = -\beta a \Rightarrow a = \ell/(1 - \beta)$ . Για να έχουμε  $a < 0$  πρέπει  $1 - \beta < 0 \Rightarrow \beta > 1 \Rightarrow |q_2| > |q_1|$ . Επομένως, αν τα  $q_1, q_2$  είναι ετερόσημα και ισχύει  $|q_2| > |q_1|$ , προκύπτει ότι

$$a = \frac{\ell}{1 - \sqrt{-q_2/q_1}}, \quad q_3 = q_2 \frac{1}{(1 - \sqrt{-q_2/q_1})^2}.$$

## 6.6.2 Ηλεκτρικό πεδίο

### Κίνηση φορτίων σε ηλεκτρικό πεδίο

- Ένα ηλεκτρόνιο με αρχική ταχύτητα  $\vec{v}_0 = i8 \times 10^4 \text{ m/s}$  εισέρχεται σε μια περιοχή όπου  $\vec{E} = (2\hat{i} + 8\hat{j}) \times 10^4 \text{ N/C}$ .

- Προσδιορίστε το διάνυσμα της επιτάχυνσης του ηλεκτρονίου.
- Σε ποια γωνία  $\theta$  κινείται (ως προς την αρχική του κατεύθυνση) σε  $t = 1 \text{ ns}$ ;

Δίνονται: μάζα ηλεκτρονίου  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

**ΛΥΣΗ**

Το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση

$$\vec{a} = \frac{1}{m_e} \vec{F} = \frac{-e}{m_e} \vec{E}.$$

Με αντικατάσταση,

$$\vec{a} \approx -3.5 \times 10^{15} (\hat{i} + 4\hat{j}) \text{ m/s}^2.$$

Το διάνυσμα της ταχύτητας του ηλεκτρονίου οποιαδήποτε στιγμή  $t$  είναι

$$\vec{v}(t) = \vec{a}t + \vec{v}_0.$$

Σε χρόνο  $t = 1 \text{ ns}$  είναι περίπου

$$\vec{v}_1 = -3.5 \times 10^6 (\hat{i} + 4\hat{j}) + 8 \times 10^4 \hat{i} = -3.42 \times 10^6 \hat{i} - 14 \times 10^6 \hat{j} \text{ m/s}.$$

Η γωνία που σχηματίζει το  $\vec{v}_1$  με την αρχική διεύθυνση της ταχύτητας (το διάνυσμα  $\hat{i}$ ) έχει συνημίτονο

$$\cos \theta = \frac{\vec{v}_1 \cdot \hat{i}}{\|\vec{v}_1\|} = \frac{-3.42}{\sqrt{3.42^2 + 14^2}} \approx -0.2373 \Rightarrow \theta = 1.810 \text{ rad}.$$

2. Ένα πρωτόνιο (με φορτίο  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  και μάζα  $m = 1.67 \times 10^{-27} \text{ kg}$ ) επιταχύνεται από κατάσταση ηρεμίας και κινείται μέσα σε ένα ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $E = 640 \text{ N/C}$ . Λίγο αργότερα, το μέτρο της ταχύτητάς του είναι  $1.2 \times 10^6 \text{ m/s}$ .

(α') Βρείτε την επιτάχυνση του πρωτονίου.

(β') Σε πόσο χρονικό διάστημα φθάνει αυτή την ταχύτητα;

(γ') Τι απόσταση διανύει αυτό το χρονικό διάστημα;

(δ') Ποια είναι η κινητική του ενέργεια στο τέλος αυτού του χρονικού διαστήματος;

**ΛΥΣΗ**

Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο  $q$  σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  είναι  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Στην περίπτωση του πρωτονίου, το  $q$  είναι θετικό οπότε η δύναμη είναι παράλληλη στο πεδίο και για το μέτρο της ισχύει  $F = qE$ .

Η επιτάχυνση του σωματιδίου με μάζα  $m$  έχει μέτρο

$$a = \frac{F}{m} = \frac{q}{m} E$$

και είναι και αυτή παράλληλη στο ηλεκτρικό πεδίο.

Καθώς το πρωτόνιο ξεκινά από ηρεμία για  $t = 0$ , γνωρίζουμε ότι η ταχύτητα είναι παράλληλη στην επιτάχυνση. Το μέτρο της είναι  $v(t) = at$ . Θα γίνει  $v_1$  όταν

$$t_1 = \frac{v_1}{a} = \frac{mv_1}{qE}.$$

Για την απόσταση που διανύει σε ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, ξεκινώντας από την ηρεμία, γνωρίζουμε ότι

$$s = \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}vt.$$

Επομένως, σε χρόνο  $t_1$  έχει διανύσει

$$s_1 = \frac{1}{2}v_1t_1 = \frac{mv_1^2}{2qE}.$$

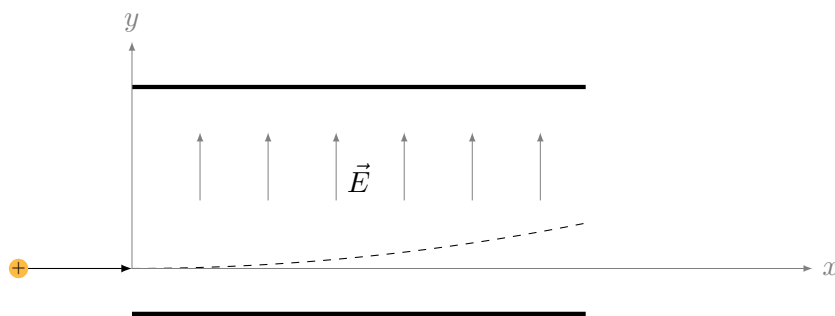
Η κινητική ενέργεια σε χρόνο  $t_1$  είναι

$$K_1 = \frac{1}{2}mv_1^2.$$

Με αντικατάσταση,  $a \approx 613 \times 10^8 \text{ m/s}^2$ ,  $t_1 \approx 1.96 \times 10^{-5} \text{ s}$ ,  $s_1 \approx 11.74 \text{ m}$ ,  $K_1 \approx 1.2 \times 10^{-15} \text{ J}$ .

3. Ένα πρωτόνιο έχει αρχική ταχύτητα  $v_0 = 4.5 \times 10^5 \text{ m/s}$  με οριζόντια διεύθυνση. Στη συνέχεια εισέρχεται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $E = 9.6 \times 10^3 \text{ N/C}$  με διεύθυνση κατακόρυφη. Αγνοήστε κάθε βαρυτική επίδραση. Βρείτε το χρόνο  $t_0$  που απαιτείται ώστε το πρωτόνιο να διανύσει απόσταση  $\ell = 5 \text{ cm}$  οριζόντια. Όταν  $t = t_0$  βρείτε (α') την κατακόρυφη μετατόπιση, (β') την οριζόντια και κατακόρυφη συνιστώσα της ταχύτητας.

### ΛΥΣΗ



Σχήμα 6.5: Άσκηση 3

Ορίζω σύστημα αξόνων με τον  $x$  παράλληλα στις πλάκες και τον  $y$  κάθετα σε αυτές, παράλληλα στον ηλεκτρικό πεδίο. Η αρχή των αξόνων είναι στο σημείο εισόδου.

Κατά τον άξονα  $x$  δεν ασκούνται δυνάμεις στο πρωτόνιο. Το φορτισμένο σωματίδιο διατηρεί την ταχύτητά του σε αυτόν. Για να διανύσει απόσταση  $\ell$  στον άξονα  $x$  χρειάζεται χρονικό διάστημα

$$t_0 = \frac{\ell}{v_0} = \frac{5 \cdot 10^{-2}}{4.5 \cdot 10^5} \approx 1.11 \times 10^{-7} \text{ s} .$$

Στον άξονα  $y$  του ασκείται σταθερή δύναμη  $\vec{F} = qE\hat{j}$ . Το πρωτόνιο έχει σταθερή επιτάχυνση

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m} = \frac{qE}{m}\hat{j} .$$

Η θέση και η ταχύτητα του πρωτονίου κατά τον άξονα  $y$  ήταν αρχικά (για  $t = 0$ ) 0. Επομένως η απομάκρυνση στον άξονα  $y$  με το χρόνο είναι

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 .$$

Σε χρόνο  $t_0 = \ell/v_0$  βρίσκεται στο

$$y(t_0) = \frac{qE\ell^2}{2mv_0^2} .$$

Με αντικατάσταση, η απομάκρυνση στον άξονα  $y$  είναι  $y(t_0) = 5.56 \times 10^{-3} \text{ m}$ .

Η οριζόντια ταχύτητα είναι σταθερή από την αρχή,  $v_x(t_0) = v_0$ .

Η κατακόρυφη ταχύτητα είναι

$$v_y(t_0) = at_0 = \frac{qE\ell}{mv_0} .$$

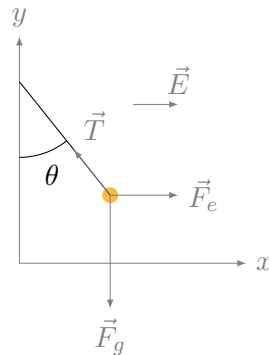
Με αντικατάσταση,  $v_y(t_0) \approx 10^5 \text{ m/s}$ .

4. Ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = i200 \text{ N/C}$  αναγκάζει την μπάλα ενός εκκρεμούς να αποκλίνει. Υπολογίστε τη γωνία της απόκλισης,  $\theta$ , όταν η μάζα της μπάλας είναι  $m = 2 \text{ kg}$  και το ηλεκτρικό φορτίο της μπάλας  $q = 25 \text{ nC}$ .

### ΛΥΣΗ

Η συνολική δύναμη  $\vec{F}$  που ασκείται στην μπάλα είναι το διανυσματικό άθροισμα της ηλεκτρικής δύναμης  $\vec{F}_e$ , της βαρυτικής δύναμης  $\vec{F}_g$  και της τάσης του νήματος  $\vec{T}$

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_g + \vec{T} = q\vec{E} + m\vec{g} + \vec{T} = qE\hat{i} - mg\hat{j} + (-T \sin \theta \hat{i} + T \cos \theta \hat{j}) .$$



Σχήμα 6.6: Άσκηση 4

Άρα

$$\vec{F} = (qE - T \sin \theta)\hat{i} + (-mg + T \cos \theta)\hat{j}.$$

Η μπάλα ισορροπεί όταν  $\vec{F} = 0$ . Τότε

$$\begin{aligned} qE &= T \sin \theta, \\ mg &= T \cos \theta. \end{aligned}$$

Άρα

$$\frac{qE}{mg} = \frac{T \sin \theta}{T \cos \theta} \Rightarrow \tan \theta = \frac{qE}{mg} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left( \frac{qE}{mg} \right).$$

Με αντικατάσταση,

$$\begin{aligned} \theta &= \tan^{-1} \left( \frac{25 \cdot 10^{-9} \cdot 200}{2 \cdot 10} \right) = \tan^{-1}(25 \cdot 10^{-8}) \\ &\approx 25 \times 10^{-8} \text{ rad} \approx 1.43 \times 10^{-5} \text{ μοίρες}. \end{aligned}$$

5. Σε μια περιοχή ανάμεσα σε δύο αντίθετα φορτισμένες πλάκες υπάρχει ομογενές ηλεκτρικό πεδίο. Ένα ηλεκτρόνιο αφήνεται από την ηρεμία, στην επιφάνεια της αρνητικά φορτισμένης πλάκας και χτυπά την επιφάνεια της απέναντι πλάκας, 2 cm μακριά, σε χρόνο  $1.5 \times 10^{-8}$  s. (α') Ποιο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$ ; (β') Ποια είναι η ταχύτητα του ηλεκτρονίου τη στιγμή που χτυπά τη δεύτερη πλάκα;

Δίνονται: μάζα ηλεκτρονίου  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg, φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19}$  C.

### ΛΥΣΗ

Το ηλεκτρόνιο εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση, με επιτάχυνση

$$\vec{a} = \frac{1}{m_e} \vec{F} = \frac{-e}{m_e} \vec{E}.$$

Το μέτρο της είναι  $a = (e/m_e)E$ . Το ηλεκτρικό πεδίο έχει φορά από τη θετική πλάκα προς την αρνητική και είναι κάθετο σε αυτές.

Το ηλεκτρόνιο ξεκινά τη χρονική στιγμή  $t_0 = 0$  από την αρνητική πλάκα, με αρχική θέση  $\vec{r}_0 = 0$  και αρχική ταχύτητα  $\vec{v}_0 = 0$  και διανύει την απόσταση  $d$  μέχρι τη θετική πλάκα σε χρόνο  $\tau$ . Ισχύει

$$d = \frac{1}{2}\tau^2 a + \tau v_0 + r_0 \Rightarrow a = 2d/\tau^2 \Rightarrow E = \frac{2dm_e}{e\tau^2}.$$

Για την τελική ταχύτητα έχουμε

$$\vec{v}(\tau) = \tau \vec{a} + \vec{v}_0 \Rightarrow v(\tau) = \tau \frac{2d}{\tau^2} = \frac{2d}{\tau}.$$

Με αντικατάσταση των  $d = 0.02 \text{ m}$ ,  $\tau = 1.5 \times 10^{-8} \text{ s}$  έχουμε  $E \approx 1011 \text{ N/C}$  και  $v(\tau) \approx 2.666 \times 10^6 \text{ m/s}$ .

6. Έστω σταθερό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = (200\hat{i} + 400\hat{j})\text{N/C}$ . Ποια είναι η δύναμη που ασκείται σε ένα (α') πρωτόνιο, (β') ηλεκτρόνιο. Ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης σε κάθε περίπτωση;

Δίνονται: μάζα ηλεκτρονίου  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , μάζα πρωτονίου  $m_p = 1.7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ , φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ , φορτίο πρωτονίου  $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

#### ΛΥΣΗ

Η ηλεκτρική δύναμη που ασκείται σε ένα φορτίο  $q$  σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  είναι  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Η δύναμη που ασκείται στο πρωτόνιο από ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = 200\hat{i} + 400\hat{j}\text{N/C}$  είναι:  $\vec{F} = q\vec{E} = 1.6 \cdot 10^{-19}(200\hat{i} + 400\hat{j}) = 320 \cdot 10^{-19}\hat{i} + 640 \cdot 10^{-19}\hat{j} \text{ N}$ . Η επιτάχυνση του πρωτονίου έχει μέτρο

$$\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{F}\|}{m_p} = \frac{e}{m_p} \|\vec{E}\| = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{1.7 \cdot 10^{-27}} \sqrt{200^2 + 400^2} \approx 4.21 \times 10^{10} \text{ m/s}^2.$$

Η δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο από ένα σταθερό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E} = (200\hat{i} + 400\hat{j})\text{N/C}$  είναι:  $\vec{F} = q\vec{E} = -1.6 \cdot 10^{-19}(200\hat{i} + 400\hat{j}) = -320 \cdot 10^{-19}\hat{i} - 640 \cdot 10^{-19}\hat{j} \text{ N}$ .

Η επιτάχυνση του ηλεκτρονίου έχει μέτρο

$$\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{F}\|}{m_e} = \frac{e}{m_e} \|\vec{E}\| = \frac{1.6 \cdot 10^{-19}}{9.1 \cdot 10^{-31}} \sqrt{200^2 + 400^2} \approx 7.86 \times 10^{13} \text{ m/s}^2.$$

Οι δυνάμεις είναι ίσου μέτρου και αντίθετες.

7. Καθένα από τα ηλεκτρόνια μιας δέσμης σωματιδίων έχει κινητική ενέργεια  $K$ . Ποια είναι το μέτρο και η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου το οποίο θα σταματήσει τα ηλεκτρόνια σε απόσταση  $d$ ;



## ΛΥΣΗ

## Α' Τρόπος

Ας ορίσουμε τον άξονα της δέσμης ως τον άξονα  $x$ . Τότε η αρχική ταχύτητα των φορτίων είναι  $\vec{v}_0 = v_0 \hat{i}$ .

Μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  ένα φορτίο  $q$  δέχεται δύναμη  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Αν η μάζα του είναι  $m$ , αποκτά (σταθερή) επιτάχυνση  $\vec{a} = \vec{F}/m = (q/m)\vec{E}$ . Η ταχύτητα και η θέση του κάθε χρονική στιγμή  $t$  μετά την είσοδο στο πεδίο είναι

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= t\vec{a} + \vec{v}_0, \\ \vec{r}(t) &= \frac{1}{2}t^2\vec{a} + t\vec{v}_0 + \vec{r}_0.\end{aligned}$$

Η ταχύτητα θα γίνει 0 τη χρονική στιγμή  $\bar{t}$  για την οποία ισχύει

$$\bar{t}\vec{a} = -\vec{v}_0.$$

Επομένως, πρέπει η (σταθερή) επιτάχυνση να είναι παράλληλη στο  $\vec{v}_0$ , δηλαδή στον άξονα  $x$ , και με αντίθετη φορά, καθώς  $\bar{t} > 0$ . Καθώς  $q < 0$ , το ηλεκτρικό πεδίο είναι και αυτό παράλληλο στον  $x$  με τη φορά της αρχικής ταχύτητας.

Για τα μέτρα ισχύει

$$\begin{aligned}v(t) &= -at + v_0, \\ x(t) &= -\frac{1}{2}t^2a + tv_0 + x_0.\end{aligned}$$

Τη χρονική στιγμή  $\bar{t} = v_0/a$ , το μήκος  $d = x(\bar{t}) - x_0$  που έχει διανύσει ένα φορτίο είναι

$$d = -\frac{1}{2}a\bar{t}^2 + \bar{t}v_0 = -\frac{v_0^2}{2a} + \frac{v_0^2}{a} = \frac{v_0^2}{2a}.$$

Άρα

$$a = \frac{v_0^2}{2d} \Rightarrow \frac{|q|}{m}E = \frac{v_0^2}{2d} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv_0^2 \frac{1}{|q|d} = \frac{K}{|q|d}.$$

## Β' Τρόπος

Μέσα σε σταθερό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  ένα φορτίο  $q$  δέχεται (σταθερή) δύναμη  $\vec{F} = q\vec{E}$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό (διατηρεί τη συνολική ενέργεια). Άρα  $K_{\text{αρχική}} + U_{\text{αρχική}} = 0 + U_{\text{τελική}}$ . Η διαφορά δυναμικής ενέργειας μεταξύ τελικής και αρχικής θέσης είναι το έργο της δύναμης,  $Fd$ , όπου  $d$  η απόσταση κατά μήκος του ηλεκτρικού πεδίου. Άρα

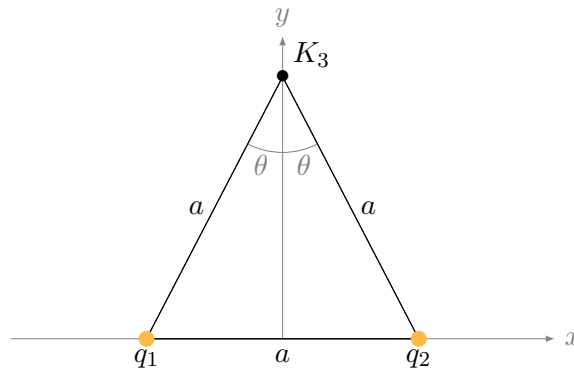
$$K = Fd = |q|Ed \Rightarrow E = \frac{K}{|q|d}.$$

**Διακριτή κατανομή φορτίων**

1. Δυο σωματίδια, το καθένα με φορτίο  $12 \text{ nC}$ , βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου με πλευρά μήκους  $2 \text{ m}$ . Ποιο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στην τρίτη κορυφή αν (α') και τα δυο φορτία είναι θετικά, (β') αν το ένα είναι θετικό και το άλλο αρνητικό. Δίνεται  $k_e = 9 \times 10^9 \text{ NC}^{-2}\text{m}^2$ .

**ΛΥΣΗ**

Ορίζουμε σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων ώστε ο άξονας  $x$  να περνά από τα δύο φορτία  $q_1, q_2$  και ο άξονας  $y$  να είναι στη μεσοκάθετο και να περνά από την τρίτη κορυφή.



Α' τρόπος, με διανύσματα.

Τα φορτία έχουν συντεταγμένες  $(-a/2, 0)$  (φορτίο 1) και  $(a/2, 0)$  (φορτίο 2). Η τρίτη κορυφή έχει συντεταγμένες  $(0, a\sqrt{3}/2)$ . Το διάνυσμα από την πρώτη στην τρίτη κορυφή είναι

$$\vec{r}_{13} = \vec{r}_3 - \vec{r}_1 = (a/2, a\sqrt{3}/2) .$$

Το μέτρο του είναι  $r_{13} = a$  και το μοναδιαίο  $\hat{r}_{13} = (1/2, \sqrt{3}/2)$ . Το ηλεκτρικό πεδίο στην τρίτη κορυφή που οφείλεται στο  $q_1$  είναι

$$\vec{E}_{13} = k_e \frac{q_1}{r_{13}^2} \hat{r}_{13} = k_e \frac{q_1}{2a^2} (\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j}) .$$

Το διάνυσμα από τη δεύτερη στην τρίτη κορυφή είναι

$$\vec{r}_{23} = \vec{r}_3 - \vec{r}_2 = (-a/2, a\sqrt{3}/2) .$$

Το μέτρο του είναι  $r_{23} = a$  και το μοναδιαίο  $\hat{r}_{23} = (-1/2, \sqrt{3}/2)$ . Το ηλεκτρικό πεδίο στην τρίτη κορυφή που οφείλεται στο  $q_2$  είναι

$$\vec{E}_{23} = k_e \frac{q_2}{r_{23}^2} \hat{r}_{23} = k_e \frac{q_2}{2a^2} (-\hat{i} + \sqrt{3}\hat{j}) .$$

Β' τρόπος

Το φορτίο  $q_1$  απέχει από την κορυφή 3 απόσταση  $a$ . Παράγει ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο

$$E_{13} = k_e \frac{|q_1|}{a^2}$$

και διεύθυνση την ευθεία που περνά από τις κορυφές 1, 3. Έστω ότι το  $q_1$  είναι θετικό: Η συνιστώσα στον άξονα  $x$  είναι

$$E_{13,x} = E_{13} \sin \theta = k_e \frac{q_1}{a^2} \frac{1}{2}$$

και στον άξονα  $y$

$$E_{13,y} = E_{13} \cos \theta = k_e \frac{q_1}{a^2} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Η γωνία  $\theta$  είναι η μισή της γωνίας στην κορυφή 3. Στο ισόπλευρο τρίγωνο αυτή είναι  $60^\circ$  άρα  $\theta = 30^\circ$ .

Αντίστοιχα για το  $q_2$ . Το πεδίο που παράγει στην κορυφή 3 έχει μέτρο

$$E_{23} = k_e \frac{|q_2|}{a^2}.$$

Αν το  $q_2$  είναι θετικό, το ηλεκτρικό πεδίο είναι απωστικό και οι συνιστώσες του στους άξονες είναι

$$E_{23,x} = -E_{23} \sin \theta = -k_e \frac{q_2}{a^2} \frac{1}{2}$$

και

$$E_{23,y} = E_{23} \cos \theta = k_e \frac{q_2}{a^2} \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Αν το  $q_2$  είναι αρνητικό, το πεδίο είναι ελκτικό με συνιστώσες

$$\begin{aligned} E_{23,x} &= E_{23} \sin \theta = k_e \frac{|q_2|}{a^2} \frac{1}{2} = -k_e \frac{q_2}{a^2} \frac{1}{2}, \\ E_{23,y} &= -E_{23} \cos \theta = -k_e \frac{|q_2|}{a^2} \frac{\sqrt{3}}{2} = k_e \frac{q_2}{a^2} \frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Συνολικά, το πεδίο από τα δύο φορτία στην κορυφή 3 είναι

$$\vec{E}_3 = \vec{E}_{13} + \vec{E}_{23} = \frac{k_e}{2a^2} ((q_1 - q_2)\hat{i} + \sqrt{3}(q_1 + q_2)\hat{j}).$$

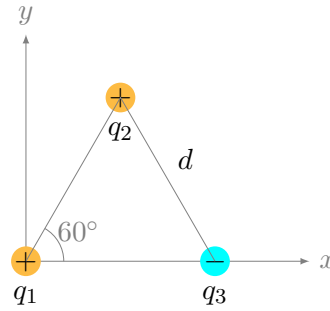
Αν  $q_1 = q_2 = q > 0$ ,

$$\vec{E}_3 = \frac{\sqrt{3}qk_e}{a^2} \hat{j}.$$

Το μέτρο είναι  $\sqrt{3}qk_e/a^2$ . Με αντικατάσταση των  $q = 12 \times 10^{-9} \text{ C}$ ,  $a = 2 \text{ m}$  προκύπτει  $E \approx 46.77 \text{ N/C}$ . Αν  $q_1 = q > 0$ ,  $q_2 = -q$ ,

$$\vec{E}_3 = \frac{qk_e}{a^2} \hat{i}.$$

Το μέτρο είναι  $qk_e/a^2$ . Με αντικατάσταση προκύπτει  $E \approx 27 \text{ N/C}$ .



Σχήμα 6.7: Άσκηση 2

2. Τρία φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται στις κορυφές ενός ισόπλευρου τριγώνου πλευράς  $d = 0.5 \text{ m}$  (Σχήμα 6.7). Τα φορτία τους είναι  $q_1 = 2 \mu\text{C}$ ,  $q_2 = 7 \mu\text{C}$ ,  $q_3 = -4 \mu\text{C}$ .

- Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο στη θέση του φορτίου  $q_1$  από τα δύο άλλα φορτία.
- Υπολογίστε τη δύναμη επί του φορτίου  $q_1$ .

### ΛΥΣΗ

Το φορτίο  $q_1$  βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_1 = (0, 0)$ . Το φορτίο  $q_2$  βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_2 = (d \cos(60^\circ), d \sin(60^\circ)) = (d/2, d\sqrt{3}/2)$ . Το φορτίο  $q_3$  βρίσκεται στη θέση  $\vec{r}_3 = (d, 0)$ .

Το διάνυσμα  $\vec{r}_{21}$  από το  $q_2$  στο  $q_1$  είναι  $\vec{r}_{21} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = -(d/2, d\sqrt{3}/2)$ . Το διάνυσμα  $\vec{r}_{31}$  από το  $q_3$  στο  $q_1$  είναι  $\vec{r}_{31} = \vec{r}_1 - \vec{r}_3 = -(d, 0)$ .

Τα μέτρα του  $\vec{r}_{21}$  και του  $\vec{r}_{31}$  είναι  $r_{21} = r_{31} = d$ .

Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r}_{21}$  είναι  $\hat{r}_{21} = -(1/2, \sqrt{3}/2)$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r}_{31}$  είναι  $\hat{r}_{31} = -(1, 0)$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο του δεύτερου φορτίου στη θέση του πρώτου φορτίου είναι

$$\vec{E}_{21} = k_e \frac{q_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21} = -k_e \frac{q_2}{2d^2} (1, \sqrt{3}) .$$

Το ηλεκτρικό πεδίο του τρίτου φορτίου στη θέση του πρώτου φορτίου είναι

$$\vec{E}_{31} = k_e \frac{q_3}{r_{31}^2} \hat{r}_{31} = -k_e \frac{q_3}{d^2} (1, 0) .$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στη θέση του πρώτου φορτίου είναι

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{21} + \vec{E}_{31} = -\frac{k_e}{d^2} \left( \frac{q_2}{2} (1, \sqrt{3}) + q_3 (1, 0) \right) .$$

Η δύναμη στο πρώτο φορτίο είναι

$$\vec{F}_1 = q_1 \vec{E}_1 = -q_1 \frac{k_e}{d^2} \left( \frac{q_2}{2}(1, \sqrt{3}) + q_3(1, 0) \right) .$$

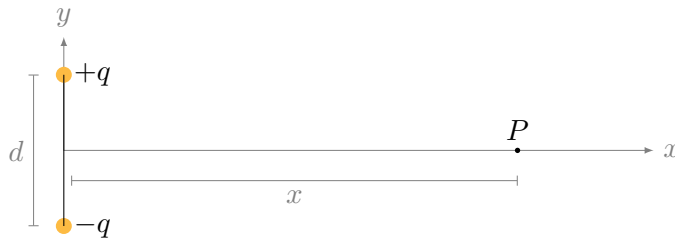
Με αντικατάσταση,

$$\vec{E}_1 = 2k_e(1, -7\sqrt{3}) \times 10^{-6} \approx 18000(\hat{i} - 12.1\hat{j}) \text{ N/C}$$

και

$$\vec{F}_1 \approx 0.036(\hat{i} - 12.1\hat{j}) \text{ N} .$$

3. Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο  $P$ , σε απόσταση  $x$  στη μεσοκάθετο του ηλεκτρικού διπόλου του σχήματος 6.8.



Σχήμα 6.8: Άσκηση 3

### ΛΥΣΗ

Το ηλεκτρικό πεδίο στη μεσοκάθετο διπόλου, σε απόσταση  $x$  από το μέσο του διπόλου, είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από τα δύο φορτία.

Θα συμβολίσουμε το διάνυσμα θέσης του σημείου  $P$  με το  $\vec{r} \equiv (x, 0)$ , το διάνυσμα θέσης του θετικού φορτίου με το  $\vec{r}_+ \equiv (0, d/2)$  και του αρνητικού με το  $\vec{r}_- \equiv (0, -d/2)$ .

Το διάνυσμα από το θετικό φορτίο προς το σημείο  $P$  είναι το  $\vec{r} - \vec{r}_+ = (x, 0) - (0, d/2) = (x, -d/2)$ . Έχει μέτρο  $\|\vec{r} - \vec{r}_+\| = \sqrt{x^2 + (d/2)^2}$  και το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το  $(x, -d/2)/\sqrt{x^2 + (d/2)^2}$ . Το ηλεκτρικό πεδίο του θετικού φορτίου επομένως είναι

$$\vec{E}_+(x) = k_e \frac{+q}{((d/2)^2 + x^2)^{3/2}} (x\hat{i} - (d/2)\hat{j}) .$$

Το διάνυσμα από το αρνητικό φορτίο προς το σημείο  $P$  είναι το  $\vec{r} - \vec{r}_- = (x, 0) - (0, -d/2) = (x, d/2)$ . Έχει μέτρο  $\|\vec{r} - \vec{r}_-\| = \sqrt{x^2 + (d/2)^2}$  και το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι το  $(x, d/2)/\sqrt{x^2 + (d/2)^2}$ . Το ηλεκτρικό πεδίο του αρνητικού φορτίου επομένως είναι

$$\vec{E}_-(x) = k_e \frac{-q}{((d/2)^2 + x^2)^{3/2}} (x\hat{i} + (d/2)\hat{j}) .$$

Το άθροισμά τους είναι

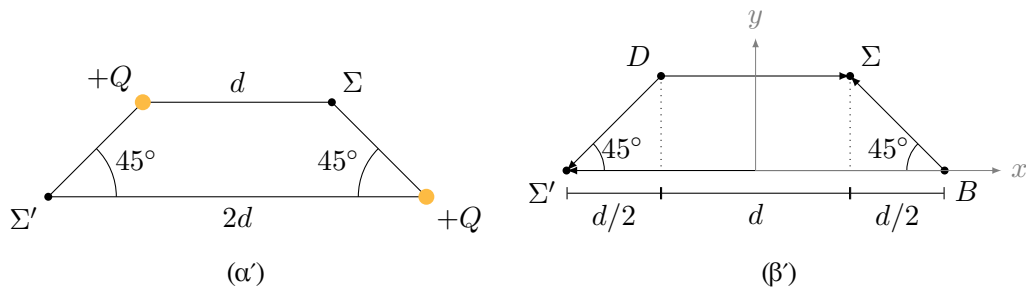
$$\begin{aligned}\vec{E}(x) &= \vec{E}_+(x) + \vec{E}_-(x) \\ &= k_e \frac{q}{((d/2)^2 + x^2)^{3/2}} ((x\hat{i} - (d/2)\hat{j}) - (x\hat{i} + (d/2)\hat{j})) \\ &= k_e \frac{q}{((d/2)^2 + x^2)^{3/2}} (-d)\hat{j}.\end{aligned}$$

Επομένως, το μέτρο  $E(x)$  του διανύσματος του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E(x) = \frac{k_e q d}{((d/2)^2 + x^2)^{3/2}},$$

η διεύθυνσή του είναι η ευθεία που ενώνει τα δύο φορτία και η κατεύθυνση προς τα αρνητικά του άξονα  $y$ .

4. Δύο ίσα θετικά φορτισμένα σωματίδια βρίσκονται σε απέναντι κορυφές ενός τραπεζίου, Σχήμα 6.9α'. Βρείτε τις σχέσεις που εκφράζουν το συνιστάμενο ηλεκτρικό πεδίο (α') στο σημείο  $\Sigma$ , (β') στο σημείο  $\Sigma'$ .



Σχήμα 6.9: Άσκηση 4

### ΛΥΣΗ

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 6.9β', το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $\Sigma$  ή  $\Sigma'$  είναι το διανυσματικό άθροισμα του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει στο συγκεκριμένο σημείο το φορτίο του σημείου  $D$  και του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει στο ίδιο σημείο το φορτίο του σημείου  $B$ .

Ορίζω σύστημα καρτεσιανών αξόνων: ο άξονας  $x$  είναι στη μεγάλη βάση του τραπεζίου με φορά από το  $\Sigma'$  στο  $B$  και ο άξονας  $y$  είναι κάθετος με φορά προς τα επάνω. Η αρχή των αξόνων είναι στο μέσο της μεγάλης βάσης.

### Για το σημείο $\Sigma$

Όπως βλέπουμε στο Σχήμα 6.9β', το ηλεκτρικό πεδίο στο σημείο  $\Sigma$  είναι το διανυσματικό άθροισμα του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει στο σημείο  $\Sigma$  το

φορτίο του σημείου  $D$  και του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει στο σημείο  $\Sigma$  το φορτίο του σημείου  $B$ .

Το διάνυσμα από το  $D$  στο  $\Sigma$  είναι παράλληλο στο  $\hat{i}$  και έχει μέτρο  $d$ . Το ηλεκτρικό πεδίο από το φορτίο  $Q$  του  $D$  στο σημείο  $\Sigma$  είναι

$$\vec{E}_{D\Sigma} = k_e \frac{Q}{d^2} \hat{i}.$$

Το διάνυσμα από το  $B$  στο  $\Sigma$  βρίσκεται ως εξής: από το σχήμα προκύπτει ότι στο τρίγωνο που σχηματίζεται με τη διακεκομμένη γραμμή, η υποτείνουσα  $B\Sigma$  έχει μήκος

$$\ell = \frac{d/2}{\cos(45^\circ)} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Η προβολή του στον άξονα  $y$ , η διακεκομμένη γραμμή, έχει μήκος  $\tan(45^\circ) \times d/2 = d/2$ . Η προβολή του διανύσματος στον άξονα  $x$  έχει μήκος  $d/2$  και αντίθετη φορά από το  $\hat{i}$ . Επομένως, το διάνυσμα  $B\Sigma$  είναι

$$\vec{B\Sigma} = -\frac{d}{2}\hat{i} + \frac{d}{2}\hat{j}.$$

Το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι

$$\widehat{B\Sigma} = \frac{1}{\ell} \vec{B\Sigma} = \frac{1}{\sqrt{2}}(-\hat{i} + \hat{j}).$$

Το ηλεκτρικό πεδίο από το φορτίο  $Q$  του  $B$  στο σημείο  $\Sigma$  είναι

$$\vec{E}_{B\Sigma} = k_e \frac{Q}{\ell^2} \widehat{B\Sigma} = k_e \frac{\sqrt{2}Q}{d^2}(-\hat{i} + \hat{j}).$$

Συνολικά,

$$\begin{aligned} \vec{E}_\Sigma &= \vec{E}_{D\Sigma} + \vec{E}_{B\Sigma} = k_e \frac{Q}{d^2} \hat{i} + k_e \frac{\sqrt{2}Q}{d^2}(-\hat{i} + \hat{j}) \\ &= k_e \frac{Q}{d^2} \left( (1 - \sqrt{2})\hat{i} + \sqrt{2}\hat{j} \right). \end{aligned}$$

**Για το σημείο  $\Sigma'$**

Το διάνυσμα από το  $B$  στο  $\Sigma'$  είναι αντιπαράλληλο στο  $\hat{i}$  και έχει μέτρο  $2d$ . Το ηλεκτρικό πεδίο από το φορτίο  $Q$  του  $B$  στο σημείο  $\Sigma'$  είναι

$$\vec{E}_{B\Sigma'} = -k_e \frac{Q}{(2d)^2} \hat{i}.$$

Το διάνυσμα από το  $D$  στο  $\Sigma'$  βρίσκεται ως εξής: από το σχήμα προκύπτει ότι στο τρίγωνο που σχηματίζεται με τη διακεκομμένη γραμμή, η υποτείνουσα  $D\Sigma'$  έχει μήκος

$$\ell = \frac{d/2}{\cos(45^\circ)} = \frac{d}{\sqrt{2}}.$$

Η διακεκομμένη γραμμή έχει μήκος  $\tan(45^\circ) \times d/2 = d/2$ . Επομένως, το διάνυσμα  $\vec{D\Sigma'}$  είναι

$$\vec{D\Sigma'} = -\frac{d}{2}\hat{i} - \frac{d}{2}\hat{j}.$$

Το μοναδιαίο του διάνυσμα είναι

$$\widehat{D\Sigma'} = \frac{1}{\ell} \vec{D\Sigma'} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{i} + \hat{j}).$$

Το ηλεκτρικό πεδίο από το φορτίο  $Q$  του  $D$  στο σημείο  $\Sigma'$  είναι

$$\vec{E}_{D\Sigma'} = k_e \frac{Q}{\ell^2} \widehat{D\Sigma'} = -k_e \frac{\sqrt{2}Q}{d^2}(\hat{i} + \hat{j}).$$

Συνολικά,

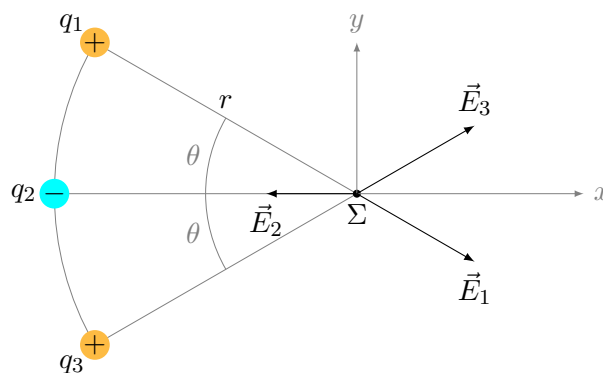
$$\begin{aligned} \vec{E}_{\Sigma'} &= \vec{E}_{B\Sigma'} + \vec{E}_{D\Sigma'} = -k_e \frac{Q}{4d^2} \hat{i} - k_e \frac{\sqrt{2}Q}{d^2}(\hat{i} + \hat{j}) \\ &= -k_e \frac{Q}{d^2} \left( \left( \frac{1}{4} + \sqrt{2} \right) \hat{i} + \sqrt{2} \hat{j} \right). \end{aligned}$$

5. Τρία σημειακά φορτία βρίσκονται σε τόξο κύκλου (Σχήμα 6.10).

(α') Ποιο είναι το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο  $\Sigma$  του κύκλου;

(β') Βρείτε την ηλεκτρική δύναμη που θα δεχόταν ένα σημειακό φορτίο  $-5 \text{ nC}$  στο σημείο  $\Sigma$ .

Δίνονται  $k_e = 9 \times 10^9 \text{ NC}^{-2}\text{m}^2$ ,  $r = 4 \text{ cm}$ ,  $\theta = 30^\circ$ ,  $q_1 = 3 \text{ nC}$ ,  $q_2 = -2 \text{ nC}$ ,  $q_3 = 3 \text{ nC}$ .



Σχήμα 6.10: Άσκηση 5



**ΛΥΣΗ**

Το ηλεκτρικό πεδίο στο  $\Sigma$  είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων κάθε φορτίου χωριστά. Ορίζω σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων με άξονα  $x$  την ευθεία που περνά από το φορτίο  $q_2$  και το σημείο  $\Sigma$ . Η κάθετη διεύθυνση στο σημείο  $\Sigma$  με φορά προς τα επάνω είναι ο άξονας  $y$ .

Το πεδίο από το πρώτο φορτίο,  $\vec{E}_1$ , έχει μέτρο  $E_1 = k_e |q_1|/r^2$  και είναι απωστικό καθώς το  $q_1$  είναι θετικό. Η συνιστώσα του στον άξονα  $x$  είναι  $E_{1x} = E_1 \cos \theta$ . Η συνιστώσα του στον άξονα  $y$  είναι  $E_{1y} = -E_1 \sin \theta$ . Άρα  $\vec{E}_1 = E_1(\cos \theta \hat{i} - \sin \theta \hat{j})$ .

Το πεδίο από το δεύτερο φορτίο,  $\vec{E}_2$ , έχει μέτρο  $E_2 = k_e |q_2|/r^2$  και είναι ελκτικό καθώς το  $q_2$  είναι αρνητικό. Έχει συνιστώσα μόνο στον άξονα  $x$ . Άρα  $\vec{E}_2 = -E_2 \hat{i}$ .

Το πεδίο από το τρίτο φορτίο,  $\vec{E}_3$ , έχει μέτρο  $E_3 = k_e |q_3|/r^2$  και είναι απωστικό καθώς το  $q_3$  είναι θετικό. Η συνιστώσα του στον άξονα  $x$  είναι  $E_{3x} = E_3 \cos \theta$ . Η συνιστώσα του στον άξονα  $y$  είναι  $E_{3y} = E_3 \sin \theta$ . Άρα  $\vec{E}_3 = E_3(\cos \theta \hat{i} + \sin \theta \hat{j})$ .

Συνολικά:

$$\begin{aligned} \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2 + \vec{E}_3 &= ((E_1 + E_3) \cos \theta - E_2) \hat{i} + (E_1 - E_3) \sin \theta \hat{j} \\ &= \frac{k_e}{r^2} (((|q_1| + |q_3|) \cos \theta - |q_2|) \hat{i} + (|q_1| - |q_3|) \sin \theta \hat{j}). \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση

$$\vec{E} \approx \hat{i} 17\,978 \text{ N/C}.$$

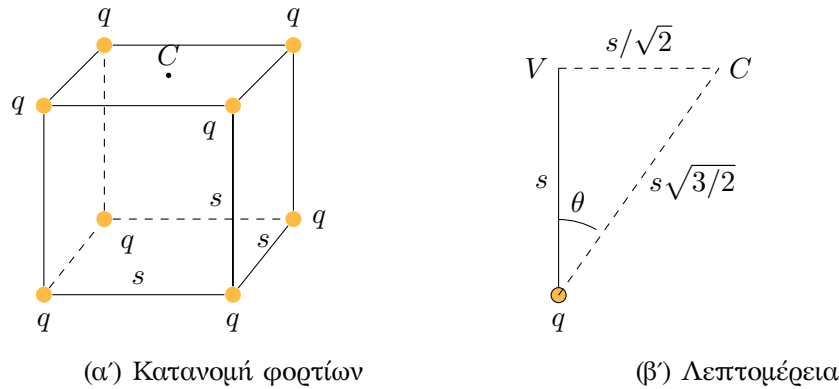
Η δύναμη που ασκείται σε φορτίο  $q = -5 \text{ nC}$  στο  $\Sigma$  από το συγκεκριμένο ηλεκτρικό πεδίο είναι  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Με αντικατάσταση,  $\vec{F} \approx -\hat{i} 9 \times 10^{-5} \text{ N}$ .

6. Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο οποιασδήποτε έδρας του κύβου στο Σχήμα 6.11α' έχει τιμή ίση προς  $2.18k_e q/s^2$ .

**ΛΥΣΗ**

Ας υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της επάνω έδρας. Οι ευθείες που περνούν από τα κέντρα απέναντι εδρών αποτελούν κάποιους από τους άξονες συμμετρίας για τον κύβο. Η περιστροφή κατά  $90^\circ$  γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο της επάνω έδρας αφήνει αμετάβλητη την κατανομή των φορτίων. Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγουν τα φορτία στα σημεία του άξονα πρέπει να έχει την ίδια συμμετρία. Επομένως, έχει συνιστώσα μόνο παράλληλα στον άξονα. Οποιαδήποτε συνιστώσα εκτός του άξονα θα πρέπει να είναι 0, αλλιώς δε θα παρέμενε η ίδια μετά την περιστροφή.

Τα φορτία στις κορυφές της επάνω έδρας παράγουν πεδίο στο κέντρο της συγκεκριμένης έδρας μόνο στο επίπεδο της έδρας. Το συνολικό τους πεδίο



Σχήμα 6.11: Άσκηση 6

λόγω συμμετρίας πρέπει να είναι υποχρεωτικά 0. Αν δεν ήταν, η στροφή κατά  $90^\circ$  γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο της έδρας, θα άλλαζε το ηλεκτρικό πεδίο χωρίς να αλλάζει την κατανομή των φορτίων. Ακόμα και χωρίς να λάβουμε υπόψη τη συμμετρία, εύκολα δείχνεται ότι ανά δύο τα φορτία έχουν αντίθετα πεδία.

Συνεισφορά στο ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο της έδρας,  $C$ , έχουμε μόνο από τα φορτία της απέναντι έδρας. Οι συνιστώσες των πεδίων που είναι παράλληλες στον άξονα είναι, λόγω συμμετρίας, ίδιες. Ας υπολογίσουμε την παράλληλη στο άξονα συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου από ένα μόνο φορτίο  $q$ . Στο Σχήμα 6.11β' έχουμε μία ακμή του κύβου, από το φορτίο  $q$  ως την κορυφή  $V$  που βρίσκεται από πάνω του, και το κέντρο της επάνω έδρας,  $C$ .

Η απόσταση  $V-C$  από την κορυφή  $V$  έως το  $C$  είναι  $\sqrt{s^2 + s^2}/2$ . Η απόσταση  $q-C$  από το φορτίο  $q$  έως το  $C$  είναι  $\sqrt{s^2 + s^2}/2$ . Το ηλεκτρικό πεδίο από το  $q$  στο  $C$  έχει μέτρο

$$E = k_e \frac{q}{(3/2)s^2}.$$

Η συνιστώσα του  $\vec{E}$  στον άξονα  $V-q$  είναι

$$E_x = E \cos \theta = E \frac{s}{s\sqrt{3}/\sqrt{2}} = k_e \frac{2\sqrt{2}q}{3\sqrt{3}s^2}.$$

Η συνεισφορά στο συνολικό πεδίο από τα τέσσερα φορτία της κάτω έδρας είναι

$$E_x^{\text{ολικό}} = 4E_x = \frac{8\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} \frac{k_e q}{s^2} \approx 2.177 \frac{k_e q}{s^2}.$$

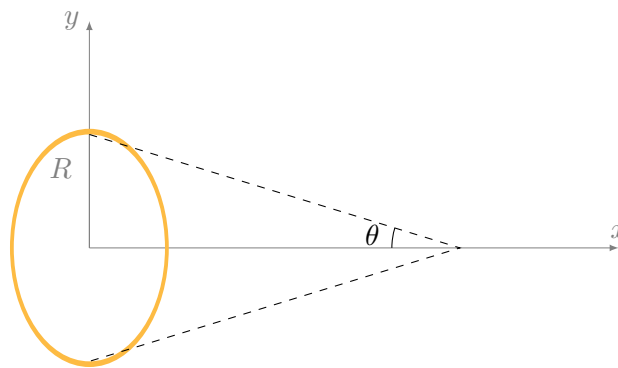
Για λόγους συμμετρίας, το ίδιο μέτρο έχει το ηλεκτρικό πεδίο στο κέντρο κάθε άλλης έδρας.

**Συνεχής κατανομή φορτίων**

1. Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος ακτίνας  $R = 10\text{ cm}$  έχει ολικό φορτίο  $Q = 75\text{ }\mu\text{C}$ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα του δακτυλίου και σε απόσταση  $5\text{ cm}$  από το κέντρο του δακτυλίου.

**ΛΥΣΗ**

Από τη συμμετρία του προβλήματος προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του άξονα της κατανομής είναι παράλληλο σε αυτόν: η κατανομή είναι συμμετρική σε περιστροφή γύρω από τον άξονά της, άρα και κάθε φυσικό μέγεθος που παράγεται από αυτή πρέπει να είναι αναλλοίωτο σε τέτοια περιστροφή. Οποιαδήποτε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία του άξονα, που δεν είναι παράλληλη σε αυτόν, είναι υποχρεωτικά 0.



Σχήμα 6.12: Άσκηση 1

Μπορούμε να το καταλάβουμε και γραφικά: Έστω  $x$  ο άξονας της κατανομής. Ένα στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου απέχει από το σημείο  $(x, 0, 0)$  απόσταση  $\sqrt{x^2 + R^2}$ . Έχει φορτίο  $dq$  και παράγει στο  $(x, 0, 0)$  ένα ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2}$$

και διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το στοιχειώδες τμήμα με το σημείο του άξονα. Η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα γωνία  $\theta$ . Η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου από το στοιχειώδες τμήμα, που είναι παράλληλη στον άξονα έχει μέτρο  $dE \cos \theta$ . Η συνιστώσα που είναι κάθετη στον άξονα έχει μέτρο  $dE \sin \theta$ . Το αντιδιαμετρικό στοιχειώδες τμήμα παράγει ηλεκτρικό πεδίο στο  $(x, 0, 0)$  με το ίδιο μέτρο. Η κάθετη στον άξονα συνιστώσα είναι ίση και αντίθετη με αυτή του πρώτου τμήματος ενώ η παράλληλη συνιστώσα είναι πάλι  $dE \cos \theta$ . Συνεπώς, το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από όλο το δακτύλιο θα έχει μόνο συνιστώσα παράλληλη στον άξονα.

Από κάθε στοιχειώδες τμήμα του δακτύλιου η συνεισφορά στο μέτρο της συνιστώσας στον  $x$ ,  $dE_x$ , θα είναι

$$dE_x = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2} \cos \theta = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} .$$

Η ποσότητα  $\frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}}$  είναι σταθερή για κάθε στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου, άρα

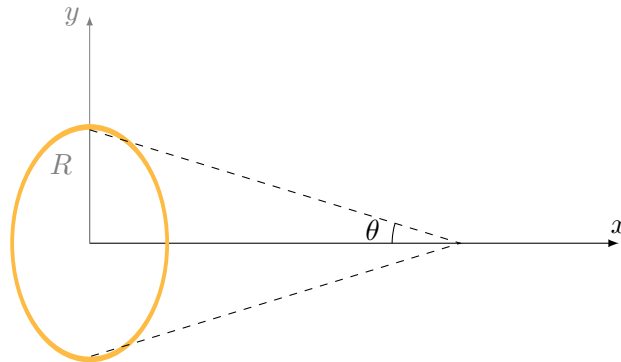
$$\vec{E} = \hat{i} \sum dE_x = \hat{i} k_e \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int dq = \hat{i} k_e \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} Q .$$

Με αντικατάσταση έχουμε  $E \approx 24.14 \times 10^6 \text{ N/C}$ .

2. Δακτύλιος ακτίνας  $R$  είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με συνολικό φορτίο  $Q$ . Ποιο είναι το μέγιστο μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου επί του άξονα του δακτυλίου;

### ΛΥΣΗ

Από τη συμμετρία του προβλήματος προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του άξονα της κατανομής είναι παράλληλο σε αυτόν: η κατανομή είναι συμμετρική σε περιστροφή γύρω από τον άξονά της, άρα και κάθε φυσικό μέγεθος που παράγεται από αυτή πρέπει να είναι αναλλοίωτο σε τέτοια περιστροφή. Οποιαδήποτε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία του άξονα, που δεν είναι παράλληλη σε αυτόν, είναι υποχρεωτικά 0.



Σχήμα 6.13: Άσκηση 2

Μπορούμε να το καταλάβουμε και γραφικά: Έστω  $x$  ο άξονας της κατανομής. Ένα στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου απέχει από το σημείο  $(x, 0, 0)$  απόσταση  $\sqrt{x^2 + R^2}$ . Έχει φορτίο  $dq$  και παράγει στο  $(x, 0, 0)$  ένα ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2}$$

και διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το στοιχειώδες τμήμα με το σημείο του άξονα. Η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα γωνία  $\theta$ . Η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου από το στοιχειώδες τμήμα, που είναι παράλληλη στον άξονα έχει μέτρο  $dE \cos \theta$ . Η συνιστώσα που είναι κάθετη στον άξονα έχει μέτρο  $dE \sin \theta$ . Το αντιδιαμετρικό στοιχειώδες τμήμα παράγει ηλεκτρικό πεδίο στο  $(x, 0, 0)$  με το ίδιο μέτρο. Η κάθετη στον άξονα συνιστώσα είναι ίση και αντίθετη με αυτή του πρώτου τμήματος ενώ η παράλληλη συνιστώσα είναι πάλι  $dE \cos \theta$ . Συνεπώς, το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από όλο το δακτύλιο θα έχει μόνο συνιστώσα παράλληλη στον άξονα. Από κάθε τμήμα του η συνεισφορά στο μέτρο της θα είναι

$$dE_x = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2} \cos \theta = k_e \frac{dq}{x^2 + R^2} \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} .$$

Η ποσότητα  $x/(x^2 + R^2)^{3/2}$  είναι σταθερή για κάθε στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου, άρα

$$\vec{E} = \hat{i} \sum dE_x = \hat{i} k_e \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \int dq = \hat{i} k_e \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} Q .$$

Το μέτρο του  $\vec{E}$  σε απόσταση  $x$  είναι

$$E = k_e \frac{|x|}{(x^2 + R^2)^{3/2}} |Q| .$$

Είναι συμμετρικό για θετικά και αρνητικά  $x$ . Έστω ότι το  $x$  είναι θετικό. Το  $E$  αποκτά ακρότατη τιμή όταν

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) &= 0 \Rightarrow \\ \frac{(x^2 + R^2)^{3/2} - 3x^2 (x^2 + R^2)^{1/2}}{(x^2 + R^2)^3} &= 0 \Rightarrow \\ \frac{R^2 - 2x^2}{(x^2 + R^2)^{5/2}} &= 0 \Rightarrow x = R/\sqrt{2} . \end{aligned}$$

Η δεύτερη παράγωγος,

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} \right) &= \frac{-4x (x^2 + R^2)^{5/2} - 5x (R^2 - 2x^2) (x^2 + R^2)^{3/2}}{(x^2 + R^2)^5} \\ &= 3x \frac{2x^2 - 3R^2}{(x^2 + R^2)^{7/2}} , \end{aligned}$$

έχει τιμή στο  $x = R/\sqrt{2}$

$$\frac{-16}{9\sqrt{3}R^4} < 0 ,$$

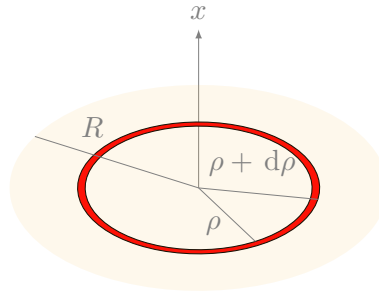
άρα στα  $x = \pm R/\sqrt{2}$  το μέτρο του  $\vec{E}$  γίνεται μέγιστο:

$$E_{\max} = k_e \frac{2}{3\sqrt{3}R^2} |Q| .$$

3. Ένας ομοιόμορφα φορτισμένος δίσκος ακτίνας  $R = 10 \text{ cm}$  έχει ολικό φορτίο  $Q = 75 \mu\text{C}$ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα του δίσκου και σε απόσταση  $5 \text{ cm}$  από το κέντρο του δίσκου.

### ΛΥΣΗ

Από τη συμμετρία του προβλήματος προκύπτει ότι το ηλεκτρικό πεδίο στα σημεία του άξονα της κατανομής είναι παράλληλο σε αυτόν: η κατανομή είναι συμμετρική σε περιστροφή γύρω από τον άξονά της, άρα και κάθε φυσικό μέγεθος που παράγεται από αυτή πρέπει να είναι αναλλοίωτο σε τέτοια περιστροφή. Οποιαδήποτε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στα σημεία του άξονα, που δεν είναι παράλληλη σε αυτόν, είναι υποχρεωτικά 0.



Σχήμα 6.14: Άσκηση 3

Μπορούμε να το καταλάβουμε και γραφικά: Έστω  $x$  ο άξονας της κατανομής. Ένα στοιχειώδες τμήμα του δίσκου στο σημείο  $(0, y, z)$  απέχει από το σημείο  $(x, 0, 0)$  απόσταση  $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Έχει φορτίο  $dq$  και παράγει στο  $(x, 0, 0)$  ένα ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο

$$dE = k_e \frac{dq}{x^2 + y^2 + z^2}$$

και διεύθυνση την ευθεία που ενώνει το στοιχειώδες τμήμα με το σημείο του άξονα. Η ευθεία αυτή σχηματίζει με τον άξονα γωνία  $\theta$ . Η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου από το στοιχειώδες τμήμα, που είναι παράλληλη στον άξονα έχει μέτρο  $dE \cos \theta$ . Η συνιστώσα που είναι κάθετη στον άξονα έχει

μέτρο  $dE \sin \theta$ . Το αντιδιαμετρικό στοιχειώδες τμήμα παράγει ηλεκτρικό πεδίο στο  $(x, 0, 0)$  με το ίδιο μέτρο. Η κάθετη στον άξονα συνιστώσα είναι ίση και αντίθετη με αυτή του πρώτου τμήματος ενώ η παράλληλη συνιστώσα είναι πάλι  $dE \cos \theta$ . Συνεπώς, το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από όλο το δίσκο θα έχει μόνο συνιστώσα παράλληλη στον άξονα.

*Α' Λύση, χωρίς χρήση έτοιμου αποτελέσματος.*

Έστω  $\hat{i}$  ο άξονας της κατανομής. Το στοιχειώδες φορτίο  $dq$  στο σημείο  $(0, y, z)$  προκαλεί στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο  $d\vec{E}$  στο  $(x, 0, 0)$ . Το διάνυσμα με αρχή το  $(0, y, z)$  και τέλος το  $(x, 0, 0)$  είναι το  $\vec{R} = (x, -y, -z)$ . Το μοναδιαίο είναι το  $\hat{R} = (x, -y, -z)/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ . Το  $d\vec{E}$  δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i} - y\hat{j} - z\hat{k}).$$

Λόγω συμμετρίας, το άθροισμα όλων των  $d\vec{E}$  έχει μη μηδενική συνιστώσα μόνο στον άξονα  $x$ . Άρα

$$\vec{E} = \sum d\vec{E} = \hat{i} \int k_e \frac{x dq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}.$$

Ο δίσκος έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma = Q/(\pi R^2)$ . Θέτω  $y^2 + z^2 = \rho^2$  όπου  $\rho$  η απόσταση από το κέντρο μιας επιφάνειας  $dy dz$  σε γωνία  $\phi$  ως προς τον άξονα των  $y$ . Το στοιχειώδες φορτίο σε αυτή είναι  $dq = \sigma \rho d\rho d\phi$ . Από όλο το δίσκο το πεδίο είναι

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \hat{i} \int_0^R \int_0^{2\pi} k_e \frac{x\sigma}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} \rho d\rho d\phi = i2\pi\sigma x k_e \int_0^R \frac{\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \\ &= i\pi\sigma x k_e \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{1}{w^{3/2}} dw = -i2\pi\sigma x k_e \frac{1}{\sqrt{w}} \Big|_{x^2}^{x^2+R^2} \\ &= i2\pi\sigma x k_e \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = i \frac{2k_e Q}{R^2} \left( \frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

*Β' Λύση, με χρήση ηλεκτρικού πεδίου δακτυλίου.*

Έστω  $\hat{i}$  ο άξονας του κυκλικού δίσκου. Το ηλεκτρικό πεδίο στον άξονα ενός δακτυλίου με ακτίνα  $\rho$ , συνολικού φορτίου  $Q$  είναι

$$\vec{E} = i k_e \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} \int dq = i k_e \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} Q,$$

όπου  $x$  η απόσταση από το κέντρο του.

Αν το  $x$  είναι αρνητικό, το  $\vec{E}_\rho(x)$  θετικά φορτισμένου δακτύλιου είναι αντιπαράλληλο στο  $\hat{i}$ , δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο για οποιοδήποτε  $x$

“απομακρύνεται” από το θετικά φορτισμένο δακτύλιο. Η φορά είναι προφανώς αντίθετη αν το φορτίο του δακτύλιου είναι αρνητικό. Επομένως, η παραπάνω σχέση ισχύει και για δακτύλιο με αρνητικό φορτίο αν θεωρήσουμε ότι το  $dq$  έχει πρόσημο και για οποιαδήποτε θέση, με θετικά ή αρνητικά  $x$ .

Ο δίσκος που εξετάζουμε έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma = Q/(\pi R^2)$ . Αν ένας στοιχειώδης δακτύλιος έχει πάχος  $d\rho$ , είναι δηλαδή στον κυκλικό δίσκο στο τμήμα με ακτίνες από  $\rho$  έως  $\rho + d\rho$ , έχει εμβαδόν  $dA = \pi(\rho + d\rho)^2 - \pi\rho^2 = 2\pi\rho d\rho$ . Ο όρος που είναι ανάλογος του  $(d\rho)^2$  έχει αμελητέα (και τελικά μηδενική) συνεισφορά ως προς τον όρο που είναι ανάλογος του  $d\rho$ , καθώς  $d\rho \rightarrow 0$ . Το φορτίο του δακτύλιου είναι  $dQ = \sigma dA = \sigma 2\pi\rho d\rho$ .

Το στοιχειώδες πεδίο από αυτόν σε θέση  $x$  στον άξονά του είναι

$$d\vec{E} = \hat{k}_e \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} \sigma 2\pi\rho d\rho.$$

Η συνεισφορά από όλους τους δακτυλίους με ακτίνα  $\rho$  από 0 έως  $R$  είναι

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \int d\vec{E} = \hat{k}_e 2\pi\sigma k_e \int_0^R \frac{x\rho}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} d\rho \\ &= \hat{k}_e 2\pi\sigma k_e \int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{1}{w^{3/2}} dw = -\hat{k}_e 2\pi\sigma k_e \frac{1}{\sqrt{w}} \Big|_{x^2}^{x^2+R^2} \\ &= \hat{k}_e 2\pi\sigma k_e \left( \frac{1}{\sqrt{x^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right) = \hat{k}_e \frac{2k_e Q}{R^2} \left( \frac{x}{|x|} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση έχουμε  $E \approx 7.46 \times 10^7 \text{ N/C}$ .

4. Σε πόση απόσταση πάνω στο κεντρικό άξονα ενός ομοιόμορφα φορτισμένου δίσκου, ακτίνας  $R = 0.6 \text{ m}$ , το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι ίσο με το μισό του μέτρου του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο της επιφάνειας του δίσκου;

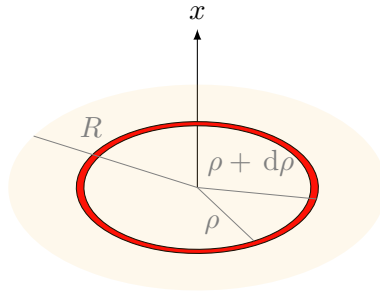
*Υπόδειξη:* Αποδείξτε πρώτα τη σχέση για το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου επί του άξονα.

### ΛΥΣΗ

Θα αντιμετωπίσουμε το φορτισμένο δίσκο ως άθροισμα ομόκεντρων δακτυλίων με διαφορες ακτίνες μεταξύ 0 και  $R$  και στοιχειώδες “πάχος”.

Ένα τμήμα του φορτισμένου δίσκου σε απόσταση από το κέντρο μεταξύ  $\rho$  και  $\rho + d\rho$ , ένας τέτοιος δακτύλιος δηλαδή, έχει φορτίο  $dq$  που υπολογίζεται ως εξής:





Σχήμα 6.15: Άσκηση 4

Ο δίσκος έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma = Q/(\pi R^2)$ , όπου  $Q$  το συνολικό του φορτίο. Ο δακτύλιος μεταξύ  $\rho$  και  $\rho + d\rho$  έχει εμβαδόν  $dA = \pi(\rho + d\rho)^2 - \pi\rho^2$ , δηλαδή,  $dA = 2\pi\rho d\rho$ . Ο όρος που είναι ανάλογος του  $(d\rho)^2$  έχει αμελητέα (και τελικά μηδενική) συνεισφορά ως προς τον όρο που είναι ανάλογος του  $d\rho$ , καθώς  $d\rho \rightarrow 0$ . Επομένως, το φορτίο του,  $dq$ , είναι

$$dq = \sigma dA = \frac{2Q\rho}{R^2} d\rho.$$

Έστω  $\hat{i}$  ο άξονας της κατανομής (κάθετος στον δίσκο, προς τα έξω). Γνωρίζουμε ότι ένας θετικά και ομοιόμορφα φορτισμένος δακτύλιος με ακτίνα  $\rho$  προκαλεί ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $x$  πάνω στον άξονά του που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{E}_\rho(x) = k_e \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} dq \hat{i}.$$

Αν το  $x$  είναι αρνητικό, το  $\vec{E}_\rho(x)$  θετικά φορτισμένου δακτύλιου είναι αντιπαράλληλο στο  $\hat{i}$ , δηλαδή, το ηλεκτρικό πεδίο για οποιοδήποτε  $x$  “απομακρύνεται” από το θετικά φορτισμένο δακτύλιο. Η φορά είναι προφανώς αντίθετη αν το φορτίο του δακτύλιου είναι αρνητικό. Επομένως, η παραπάνω σχέση ισχύει και για δακτύλιο με αρνητικό φορτίο αν θεωρήσουμε ότι το  $Q$  έχει πρόσημο και για οποιαδήποτε θέση, με θετικά ή αρνητικά  $x$ .

Για να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο του δίσκου στο σημείο  $x$  πάνω στον άξονα, πρέπει να αθροίσουμε διανυσματικά τα ηλεκτρικά πεδία όλων των δακτυλίων με ακτίνα  $\rho$  μεταξύ 0 και  $R$ . Άρα

$$\begin{aligned} \vec{E}(x) &= \sum_{\rho} d\vec{E}_\rho(x) = \int_0^R k_e \frac{x}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} \frac{2Q\rho}{R^2} d\rho \hat{i}, \\ &= \hat{i} \frac{k_e Q x}{R^2} \int_0^R \frac{1}{(x^2 + \rho^2)^{3/2}} 2\rho d\rho. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε  $w = \rho^2 + x^2$ , έχουμε  $dw = 2\rho d\rho$  και το ολοκλήρωμα στην προη-

γούμενη σχέση γίνεται

$$\int_{x^2}^{x^2+R^2} \frac{1}{w^{3/2}} dw = - \frac{2}{\sqrt{w}} \Big|_{x^2}^{x^2+R^2} = \frac{2}{|x|} - \frac{2}{\sqrt{x^2+R^2}}.$$

Συνολικά έχουμε

$$\vec{E}(x) = i \frac{2k_e Q x}{R^2} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right).$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$E(x) = \frac{2k_e |Q| |x|}{R^2} \left( \frac{1}{|x|} - \frac{1}{\sqrt{x^2+R^2}} \right) = \frac{2k_e |Q|}{R^2} \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}} \right).$$

Στο κέντρο του κυκλικού δίσκου έχουμε  $x = 0$ . Τότε

$$E(x=0) = \frac{2k_e |Q|}{R^2}.$$

Επομένως,

$$E(x) = E(0) \left( 1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}} \right).$$

Το  $E(x)$  γίνεται μισό του  $E(0)$  όταν

$$1 - \frac{|x|}{\sqrt{x^2+R^2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow x = \pm \frac{R}{\sqrt{3}} \approx \pm 0.346 \text{ m}.$$

5. Μια ράβδος μήκους  $d = 10 \text{ cm}$  είναι ομοιόμορφα φορτισμένη και έχει ολικό φορτίο  $Q = -10 \mu\text{C}$ . Προσδιορίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου κατά μήκος του άξονα της ράβδου, σε ένα σημείο  $\ell = 20 \text{ cm}$  από το μέσο της.

### ΛΥΣΗ

Ορίζω ως άξονα των  $x$  τον άξονα της ράβδου, με αρχή την αριστερή άκρη της (Σχήμα 6.16).



Σχήμα 6.16: Άσκηση 5

Η ράβδος εκτείνεται από  $x = 0$  έως  $x = d$  και έχει γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda = Q/d$ .

Το σημείο στο οποίο θέλουμε να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο βρίσκεται στο  $x_0 = \ell + d/2$ .

Ένα στοιχειώδες τμήμα της ράβδου, μήκους  $dx$  στη θέση  $x$ , στο διάστημα  $[0, d]$  έχει φορτίο  $dq = \lambda dx$ . Απέχει από το σημείο  $x_0$  μια απόσταση  $x_0 - x = \ell + d/2 - x$ . Παράγει στο σημείο που ενδιαφερόμαστε, ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = \hat{i} \frac{k_e dq}{(\ell + d/2 - x)^2}.$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα από το στοιχειώδες τμήμα της ράβδου προς το σημείο είναι το  $\hat{i}$ .

Το πεδίο από όλα τα τμήματα της ράβδου είναι

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \hat{i} k_e \lambda \int_0^d \frac{dx}{(\ell + d/2 - x)^2}.$$

Αλλά

$$\int_0^d \frac{dx}{(\ell + d/2 - x)^2} \stackrel{w=x-\ell-d/2}{=} \int_{-\ell-d/2}^{-\ell+d/2} \frac{dw}{w^2} = \left( -\frac{1}{w} \right) \Big|_{-\ell-d/2}^{-\ell+d/2} = \frac{d}{\ell^2 - (d/2)^2}.$$

Επομένως,

$$\vec{E} = \hat{i} k_e \lambda \frac{d}{\ell^2 - (d/2)^2} = \hat{i} \frac{4k_e Q}{4\ell^2 - d^2}.$$

Με αντικατάσταση έχουμε

$$\vec{E} \approx -\hat{i} 2.4 \times 10^6 \text{ N/C}.$$

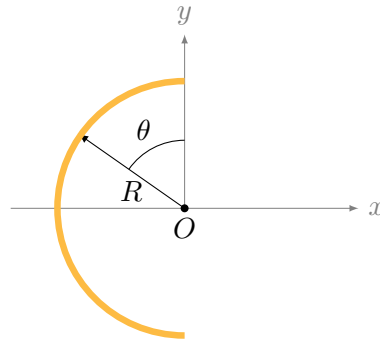
6. Μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος από μονωτικό υλικό, μήκους 14 cm, κάμπτεται σε σχήμα ημικύκλιου. Αν η ράβδος έχει ολικό φορτίο  $-7.5 \mu\text{C}$ , βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο  $O$  που είναι το κέντρο του ημικύκλιου (Σχήμα 6.17).

#### ΛΥΣΗ

Η κατανομή είναι συμμετρική σε περιστροφή  $180^\circ$  γύρω από την κάθετη στη χορδή της. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να έχει την ίδια συμμετρία. Επομένως, αναμένουμε το πεδίο να είναι κάθετο στη χορδή και πάνω στο επίπεδο της κατανομής. Έστω ότι η διεύθυνσή του είναι ο άξονας  $x$ .

Παίρνουμε ένα στοιχειώδες τμήμα της κατανομής με γωνία  $d\theta$ , στη θέση  $(R, \theta)$ , με οποιοδήποτε  $\theta$  στο  $[0, \pi]$ . Αυτό έχει στοιχειώδες φορτίο

$$dq = \frac{Q}{\pi} d\theta.$$



Σχήμα 6.17: Άσκηση 6

[Αφού σε γωνία  $\pi$  έχω ομοιόμορφα κατανεμημένο φορτίο  $Q$ , στο  $d\theta$  έχω το παραπάνω  $dq$ .]

Το στοιχειώδες τμήμα προκαλεί στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο  $d\vec{E}$  στο  $O$  που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{R^2} (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) .$$

[Το μοναδιαίο διάνυσμα  $(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j})$ , έχει κατεύθυνση από το φορτίο προς το  $O$ .]

Το συνολικό πεδίο από όλα τα τμήματα είναι

$$\vec{E} = \sum d\vec{E} = \int_0^\pi k_e \frac{Q/\pi d\theta}{R^2} (\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{j}) = 2k_e \frac{Q}{\pi R^2} \hat{i} .$$

Η ακτίνα  $R$  σχετίζεται με το μήκος  $\ell$  του ημικύκλιου:  $\ell = \pi R \Rightarrow R = \ell/\pi$ , άρα

$$\vec{E} = 2\pi k_e \frac{Q}{\ell^2} \hat{i} .$$

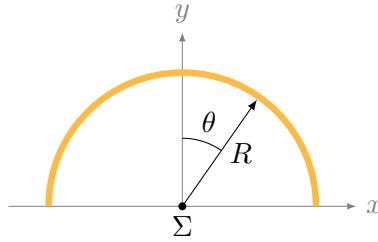
Με αντικατάσταση έχουμε  $\vec{E} \approx -\hat{i} 2.164 \times 10^7 \text{ N/C}$ .

7. Μια ευθεία με θετικά φορτία κάμπτεται ώστε να σχηματίσει ημικύκλιο ακτίνας  $R$ , (Σχήμα 6.18). Το φορτίο ανά μονάδα μήκους του ημικύκλιου δίνεται από τη σχέση  $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$ . Το συνολικό φορτίο στο ημικύκλιο είναι  $Q$ . Υπολογίστε τη συνολική δύναμη που δέχεται ένα φορτίο  $q$  στο κέντρο καμπυλότητας  $\Sigma$ .

### ΛΥΣΗ

Θα βρούμε αρχικά το ηλεκτρικό πεδίο στο  $\Sigma$ . Το γινόμενο του με το  $q$  θα μας δώσει τη ζητούμενη δύναμη.

Η κατανομή του φορτίου είναι συμμετρική σε περιστροφή  $180^\circ$  γύρω από τον άξονα  $y$ . Αυτό ισχύει καθώς σε ίδιες γωνίες ως προς τον  $y$  η κατανομή φορτίου



Σχήμα 6.18: Άσκηση 7

είναι ίδια ( $\cos \theta = \cos(-\theta)$ ). Το ηλεκτρικό πεδίο από την κατανομή πρέπει να έχει την ίδια συμμετρία. Επομένως, το πεδίο δεν έχει άλλες συνιστώσες παρά μόνο στον άξονα  $y$  (αν είχε, θα άλλαζαν με την περιστροφή).

Στοιχειώδες φορτίο  $dq$  στην κατανομή φορτίου, σε απόσταση  $R$  από το  $\Sigma$  και σε γωνία  $\theta$ , προκαλεί στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο  $d\vec{E}$  στο  $\Sigma$  που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{R^2} (-\hat{R}) .$$

Συμβολίσαμε το διάνυσμα από το κέντρο προς το σημείο με φορτίο  $dq$  με  $\vec{R}$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα του  $d\vec{E}$  είναι αντίθετο από το διάνυσμα  $\hat{R}$ .

Το  $\hat{R}$  αναλύεται στους άξονες  $x$  και  $y$  ως εξής:

$$\hat{R} = \sin \theta \hat{i} + \cos \theta \hat{j} .$$

Η συνιστώσα του  $d\vec{E}$  στον άξονα  $y$ , η μόνη που μας ενδιαφέρει τελικά, είναι

$$dE_y = -k_e \frac{dq}{R^2} R_y = -k_e \frac{dq}{R^2} \cos \theta .$$

Γνωρίζουμε ότι ένα στοιχειώδες τόξο  $d\theta$  του κύκλου με ακτίνα  $R$  έχει μήκος  $ds = R d\theta$ . Επομένως,

$$\lambda = \frac{dq}{ds} = \frac{dq}{R d\theta} \Rightarrow dq = \lambda R d\theta = \lambda_0 R \cos \theta d\theta .$$

Άρα

$$dE_y = -k_e \frac{\lambda_0}{R} \cos^2 \theta d\theta .$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο  $\Sigma$ , ή αλλιώς, η συνιστώσα του πεδίου στον  $y$ , προκύπτει από το αλγεβρικό άθροισμα των συνιστωσών  $dE_y$  κάθε στοιχειώδους τμήματος. Επομένως

$$E_y = \sum dE_y = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left( -\frac{k_e \lambda_0}{R} \cos^2 \theta d\theta \right) = -\frac{k_e \lambda_0}{R} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta = -\frac{k_e \lambda_0}{R} \frac{\pi}{2} .$$

Μπορούμε να απαλείψουμε το  $\lambda_0$ : Καθώς  $\lambda = \lambda_0 \cos \theta$ , έχουμε για το συνολικό φορτίο του ημικύκλιου:

$$Q = \sum dq = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \lambda_0 R \cos \theta d\theta = 2\lambda_0 R \Rightarrow \lambda_0 = \frac{Q}{2R}.$$

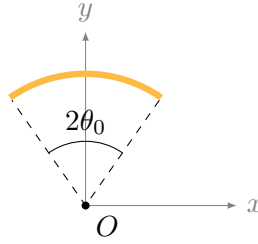
Επομένως,

$$E_y = -\frac{k_e Q \pi}{2R^2 2}.$$

Για τη ζητούμενη δύναμη έχουμε

$$\vec{F} = qE_y \hat{j} = -\frac{\pi k_e Q q}{4 R^2} \hat{j}.$$

8. Μια ομοιόμορφα φορτισμένη ράβδος με φορτίο ανά μονάδα μήκους  $\lambda$ , κάμπτεται σε σχήμα κυκλικού τόξου ακτίνας  $R$  (Σχήμα 6.19). Το τόξο σχηματίζει επίκεντρη γωνία ίση με  $2\theta_0$ . Βρείτε τη διεύθυνση και το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο κέντρο  $O$  του κύκλου.



Σχήμα 6.19: Άσκηση 8

### ΛΥΣΗ

Ένα στοιχειώδες τόξο  $d\theta$  στη ράβδο έχει μήκος  $ds = R d\theta$  και φορτίο  $dq = \lambda ds = \lambda R d\theta$ . Παράγει στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο στο  $O$  που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = k_e \frac{\lambda R d\theta}{R^2} (-\hat{r}).$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα του  $d\vec{E}$  είναι αντίθετο στο διάνυσμα  $\hat{r}$  των πολικών συντεταγμένων.

Η κατανομή του φορτίου είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή κατά  $180^\circ$  γύρω από τον άξονα  $y$  του σχήματος. Την ίδια ιδιότητα πρέπει να έχει και το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να έχει μόνο συνιστώσα στον άξονα  $y$ . Η συνιστώσα του  $d\vec{E}$  στο  $y$  είναι

$$dE_y = d\vec{E} \cdot \hat{j} = -k_e \frac{\lambda d\theta}{R} (\hat{r} \cdot \hat{j}) = -k_e \frac{\lambda d\theta}{R} \cos \theta.$$

Η συνιστώσα  $E_y$  του συνολικού πεδίου στο  $O$  είναι

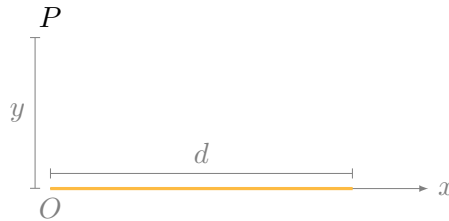
$$E_y = \int dE_y = \int_{-\theta_0}^{+\theta_0} \left( -k_e \frac{\lambda}{R} \cos \theta \right) d\theta = 2k_e \frac{\lambda}{R} \sin \theta_0 .$$

Επομένως,

$$\vec{E} = \frac{2k_e \lambda}{R} \sin \theta_0 \hat{j} .$$

9. Μια ράβδος μήκους  $d$  είναι ομοιόμορφα φορτισμένη και έχει ολικό φορτίο  $Q$ . Προσδιορίστε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση  $y$  κατακόρυφα επάνω από το ένα άκρο της.

### ΛΥΣΗ



Σχήμα 6.20: Άσκηση 9

Ορίζω ως άξονα των  $x$  τον άξονα της ράβδου, με αρχή την αριστερή άκρη της (Σχήμα 6.20).

Ορίζω ως άξονα των  $y$  την ευθεία που περνά από το σημείο  $P$  στο οποίο ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο, με αρχή την αριστερή άκρη της ράβδου.

Η ράβδος εκτείνεται από  $x = 0$  έως  $x = d$  και έχει ομοιόμορφη γραμμική πυκνότητα φορτίου  $\lambda = Q/d$ .

Το σημείο  $P$  βρίσκεται στη θέση  $(0, y)$ .

Ένα στοιχειώδες τμήμα τής ράβδου, μήκους  $dx$ , στη θέση  $(x, 0)$  με  $0 \leq x \leq d$ , έχει φορτίο  $dq = \lambda dx$ . Το διάνυσμα από αυτό το τμήμα προς το σημείο  $P$  είναι  $\vec{r} = (0, y) - (x, 0) = (-x, y)$ . Έχει μέτρο  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  και μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r} = (-x, y)/r$ .

Το φορτίο  $dq$  του στοιχειώδους τμήματος της ράβδου παράγει στο σημείο  $P$  ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2} \hat{r} = k_e \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (-x\hat{i} + y\hat{j}) .$$

Το πεδίο από όλα τα τμήματα της ράβδου είναι

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = k_e \lambda \left( -\hat{i} \int_0^d \frac{x \, dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \hat{j} y \int_0^d \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right).$$

Αλλά δείχνεται στο Παράρτημα Α' ότι

$$\int_0^d \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{d}{y^2 \sqrt{y^2 + d^2}}$$

και

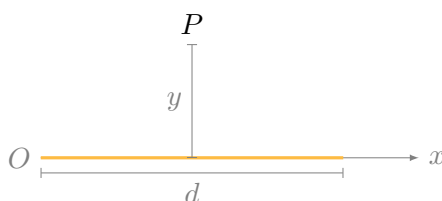
$$\int_0^d \frac{x \, dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{|y|} - \frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2}}.$$

Επομένως (αφού  $y > 0$ )

$$\vec{E} = k_e \lambda \left( \hat{i} \left( \frac{1}{\sqrt{d^2 + y^2}} - \frac{1}{y} \right) + \hat{j} \frac{d}{y \sqrt{y^2 + d^2}} \right).$$

10. Μια ράβδος μήκους  $d$  είναι ομοιόμορφα φορτισμένη με γραμμική πυκνότητα  $\lambda$ . Προσδιορίστε το διάνυσμα του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση  $y$  κατακόρυφα επάνω από το κέντρο της.

### ΛΥΣΗ



Σχήμα 6.21: Άσκηση 10

Ορίζω ως άξονα των  $x$  τον άξονα της ράβδου, με αρχή το μέσο της (Σχήμα 6.21). Η ράβδος εκτείνεται από  $x = -d/2$  έως  $x = d/2$ .

Ορίζω ως άξονα των  $y$  την ευθεία που περνά από το σημείο  $P$  στο οποίο ενδιαφερόμαστε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο. Το σημείο  $P$  βρίσκεται στη θέση  $(0, y)$ .

Ένα στοιχειώδες τμήμα της ράβδου, μήκους  $dx$ , στη θέση  $(x, 0)$  με  $-d/2 \leq x \leq d/2$ , έχει φορτίο  $dq = \lambda \, dx$ . Το διάνυσμα από αυτό το τμήμα προς το σημείο  $P$  είναι  $\vec{r} = (0, y) - (x, 0) = (-x, y)$ . Έχει μέτρο  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  και μοναδιαίο διάνυσμα  $\hat{r} = (-x, y)/r$ .



Το φορτίο  $dq$  του στοιχειώδους τμήματος της ράβδου παράγει στο σημείο  $P$  ένα στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2} \hat{r} = k_e \frac{\lambda dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} (-x\hat{i} + y\hat{j}) .$$

Το πεδίο από όλα τα τμήματα της ράβδου είναι

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = k_e \lambda \left( -\hat{i} \int_{-d/2}^{d/2} \frac{x dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} + \hat{j} y \int_{-d/2}^{d/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \right) .$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι 0 καθώς ολοκληρώνεται αντισυμμετρική συνάρτηση σε συμμετρικό διάστημα. Εάν κάνουμε τις πράξεις θα το επιβεβαιώσουμε. Εξάλλου, από τη συμμετρία του προβλήματος αναμένουμε να μην έχει το ηλεκτρικό πεδίο συνιστώσα στον άξονα  $x$ .

Στο Παράρτημα **A'** δείχνεται ότι

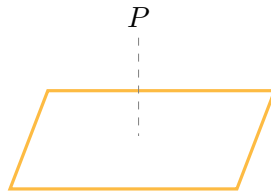
$$\int_{-d/2}^{d/2} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2(d/2)}{y^2 \sqrt{y^2 + (d/2)^2}} .$$

Επομένως (αφού  $y > 0$ )

$$\vec{E} = \hat{j} k_e \frac{2\lambda d}{y \sqrt{4y^2 + d^2}} .$$

11. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $z$  πάνω από το κέντρο ενός τετραγώνου βρόχου με πλευρά  $a$  που έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με πυκνότητα  $\lambda$ .

#### ΛΥΣΗ



Το ηλεκτρικό πεδίο που θέλουμε να υπολογίσουμε είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από κάθε πλευρά.

Βρήκαμε σε προηγούμενη άσκηση ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός φορτισμένου ευθύγραμμου τμήματος μήκους  $d$ , σε απόσταση  $y$  πάνω από το μέσο του είναι

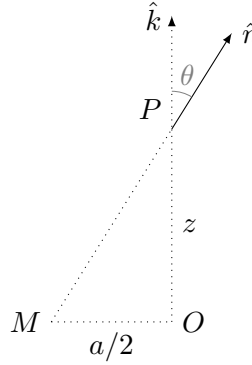
$$\vec{E} = \hat{n} k_e \frac{2\lambda d}{y \sqrt{4y^2 + d^2}} .$$

Το  $\hat{n}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο ευθύγραμμο τμήμα.

Στη συγκεκριμένη άσκηση η απόσταση του σημείου  $P$  από τα μέσα κάθε πλευράς είναι  $y = \sqrt{(a/2)^2 + z^2}$ . Το  $d$  είναι  $a$  και έτσι το μέτρο του πεδίου από κάθε πλευρά γίνεται

$$E = k_e \frac{2\lambda a}{\sqrt{((a/2)^2 + z^2)(2a^2 + 4z^2)}} = k_e \frac{2\sqrt{2}\lambda a}{\sqrt{(a^2 + 4z^2)(a^2 + 2z^2)}}.$$

Έστω ότι ο άξονας  $z$  είναι κάθετος στο βρόχο και περνά από το σημείο  $P$ . Κάθε διάνυσμα  $\hat{n}$  από τις πλευρές του βρόχου μπορεί να αναλυθεί σε μία συνιστώσα παράλληλη στον άξονα  $z$  και σε μία κάθετη. Οι κάθετες συνιστώσες των διανυσμάτων  $\hat{n}$  αλληλοαναιρούνται: ανά δύο οι απέναντι πλευρές του τετραγώνου έχουν αντίθετες τις κάθετες συνιστώσες των διανυσμάτων  $\hat{n}$ . Όλες οι πλευρές έχουν ίδια συνιστώσα των  $\hat{n}$  στον άξονα  $z$ .



Σχήμα 6.22: Βοηθητικό σχήμα για την ανάλυση του  $\hat{n}$ . Το  $M$  είναι το μέσο κάποιας πλευράς και το  $O$  η αρχή των αξόνων

Αυτή εύκολα δείχνεται (δείτε το Σχήμα 6.22) ότι είναι  $\hat{n} \cdot \hat{k} = \cos \theta$  όπου  $\theta$  η γωνία με εφαπτομένη το  $(a/2)/z$ . Επομένως (καθώς  $\theta \in [0, \pi]$ )

$$\hat{n} \cdot \hat{k} = \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{2z}{\sqrt{4z^2 + a^2}}.$$

Συνολικά από τις τέσσερις πλευρές έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{E}_{\text{total}} &= \hat{k} 4E(\hat{n} \cdot \hat{k}) = \hat{k} 4k_e \frac{2\sqrt{2}\lambda a}{\sqrt{(a^2 + 4z^2)(a^2 + 2z^2)}} \frac{2z}{\sqrt{4z^2 + a^2}} \\ &= \hat{k} k_e \frac{16\sqrt{2}\lambda a z}{(a^2 + 4z^2)\sqrt{a^2 + 2z^2}} \end{aligned}$$

### 6.6.3 Νόμος Gauss

1. Ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από την έκφραση  $\vec{E} = ay\hat{i} + bz\hat{j} + cx\hat{k}$ , όπου  $a, b, c$  σταθερές. Βρείτε τη ροή ηλεκτρικού πεδίου μέσω ορθογώνιας επιφάνειας στο επίπεδο  $x - y$ , που εκτείνεται από  $x = 0$  μέχρι  $x = w$  και από  $y = 0$  μέχρι  $y = h$ .

#### ΛΥΣΗ

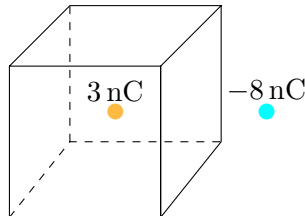
Ορίζω μια στοιχειώδη επιφάνεια στο σημείο  $(x, y, 0)$  με εμβαδόν  $dx dy$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα της επιφάνειας είναι το  $\hat{k}$ . Άρα  $d\vec{A} = dx dy \hat{k}$ . Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από αυτή είναι  $\vec{E} \cdot d\vec{A}$ . Η συνολική ροή από την επιφάνεια  $S$  με  $0 \leq x \leq w$  και  $0 \leq y \leq h$  είναι

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^w dx \int_0^h dy \vec{E} \cdot \hat{k} = \int_0^w dx \int_0^h dy E_z.$$

Για το συγκεκριμένο ηλεκτρικό πεδίο,  $E_z = cx$ . Συνεπώς

$$\Phi_E = \int_0^w dx \int_0^h dy cx = \int_0^w chx dx = ch \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^w = \frac{chw^2}{2}.$$

2. Βρείτε τη συνολική ηλεκτρική ροή που διέρχεται από τον κύβο του Σχήματος 6.23. Μπορείτε να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια του κύβου με το νόμο του Gauss;



Σχήμα 6.23: Άσκηση 2

#### ΛΥΣΗ

Από το νόμο του Gauss, η συνολική ηλεκτρική ροή από τον κύβο είναι  $\Phi_E = Q/\epsilon_0$ , όπου  $Q$  το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείει ο κύβος. Άρα,  $\Phi_E \approx 339 \text{ Nm}^2/\text{C}$ .

Ο κύβος δεν έχει την κατάλληλη συμμετρία ώστε, με τη δεδομένη κατανομή φορτίου, να περνά από σημεία με ίδιο μέτρο ηλεκτρικού πεδίου. Δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το νόμο Gauss για να βρούμε το ηλεκτρικό πεδίο.

3. Μπορεί το πρόβλημα 5 της §6.6.2 να λυθεί με το νόμο του Gauss και γιατί;

**ΛΥΣΗ**

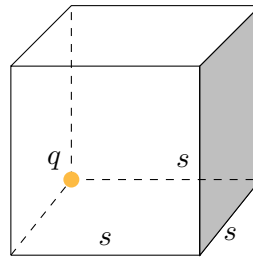
Η κατανομή φορτίου στο πρόβλημα δεν έχει τη συμμετρία που χρειάζεται ώστε να μπορούμε να βρούμε κατάλληλη επιφάνεια Gauss (χωρίς να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο).

4. Μπορεί το πρόβλημα 6 της §6.6.2 να λυθεί με το νόμο του Gauss και γιατί;

**ΛΥΣΗ**

Η κατανομή φορτίου στο πρόβλημα δεν έχει τη συμμετρία που χρειάζεται ώστε να μπορούμε να βρούμε κατάλληλη επιφάνεια Gauss (χωρίς να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο).

5. Σε κύβο ακμής  $s$  υπάρχει σημειακό φορτίο  $q$  σε μια κορυφή του. Ποια είναι η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από τη σκιασμένη πλευρά;



Σχήμα 6.24: Άσκηση 5

**ΛΥΣΗ****Α' τρόπος, νόμος Coulomb**

Έστω ότι η αρχή ενός συστήματος καρτεσιανών συντεταγμένων είναι στο φορτίο  $q$ , και οι ακμές του κύβου ορίζουν τους άξονες  $x, y, z$ . Η σκιασμένη επιφάνεια έχει  $y = s$  και αποτελείται από τα σημεία  $(x, s, z)$  με  $0 \leq x \leq s$ ,  $0 \leq z \leq s$ .

Η ροή από τη σκιασμένη πλευρά  $S$ , του ηλεκτρικού πεδίου που παράγει το  $q$  είναι

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \vec{r}.$$

Το στοιχειώδες διάνυσμα στη σκιασμένη επιφάνεια είναι  $d\vec{A} = dA\hat{j} = dx\,dz\hat{j}$ . Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από το  $q$  προς το σημείο  $(x, s, z)$  της επιφάνειας έχει συνιστώσες  $(x, s, z)$ . Το μέτρο του είναι  $r = \sqrt{x^2 + s^2 + z^2}$ .

Παρατηρούμε ότι  $\vec{r} \cdot d\vec{A} = s\,dx\,dz$ . Άρα

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_0^s \int_0^s \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qs}{(x^2 + s^2 + z^2)^{3/2}} dx\,dz.$$

Αν θέσουμε όπου  $x$  το  $x \times s$  και όπου  $z$  το  $z \times s$  έχουμε

$$\Phi_E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^1 \int_0^1 \frac{1}{(1 + x^2 + z^2)^{3/2}} dx\,dz.$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα που εμφανίζεται έχει τιμή  $\pi/6$ . Επομένως

$$\Phi_E = \frac{q}{24\epsilon_0}.$$

### Β' τρόπος, νόμος Gauss

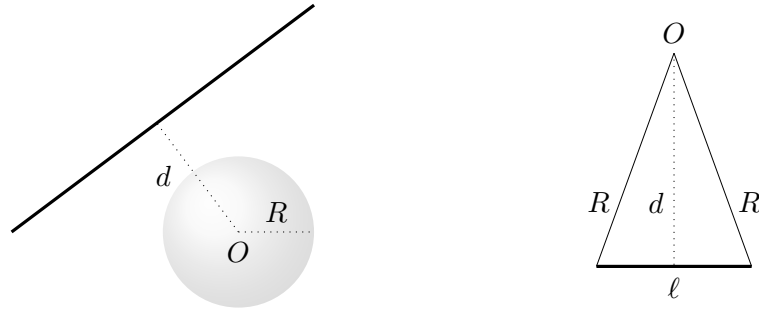
Ας σκεφτούμε ένα μεγάλο κύβο με ακμή  $2s$  που έχει στο κέντρο του το φορτίο. Ο κύβος της άσκησης είναι ένα μέρος αυτού του κύβου. Η σκιασμένη πλευρά είναι το  $1/4$  της πλευράς του μεγάλου κύβου. Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, η ροή από τη σκιασμένη πλευρά είναι το  $1/4$  της ροής από την πλευρά του μεγάλου κύβου. Επίσης λόγω συμμετρίας, η ροή από οποιαδήποτε πλευρά από τις έξι του μεγάλου κύβου είναι η ίδια. Επομένως, η ροή από τη σκιασμένη επιφάνεια είναι το  $(1/4) \times (1/6)$  της ροής από την κλειστή επιφάνεια που αποτελεί το σύνολο του μεγάλου κύβου. Σύμφωνα με το νόμο Gauss, η ροή από την κλειστή επιφάνεια είναι  $q/\epsilon_0$  και συνεπώς, η ροή από τη σκιασμένη επιφάνεια είναι  $\Phi_E = (1/24)q/\epsilon_0$ .

6. Μια φορτισμένη ευθεία άπειρου μήκους έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου με γραμμική πυκνότητα  $\lambda$ , και απέχει  $d$  από το σημείο  $O$ , Σχήμα 6.25. Βρείτε τη συνολική ηλεκτρική ροή μέσω της επιφάνειας σφαίρας με ακτίνα  $R$  και κέντρο το σημείο  $O$ . Εξετάστε τις περιπτώσεις (α')  $R < d$  και (β')  $R > d$ .

### ΛΥΣΗ

Αν η φορτισμένη ευθεία είναι εκτός της σφαίρας, δηλαδή όταν  $R < d$ , η σφαίρα δεν περικλείει φορτίο. Σύμφωνα με το νόμο του Gauss, η συνολική ηλεκτρική ροή μέσω αυτής είναι 0.

Αν  $R > d$ , το τμήμα της φορτισμένης ράβδου που βρίσκεται μέσα στη σφαιρική επιφάνεια (Σχήμα 6.25β') είναι η βάση ισοσκελούς τριγώνου με ύψος  $d$  και δυο άλλες πλευρές μήκους  $R$ . Το μήκος του είναι  $\ell = 2\sqrt{R^2 - d^2}$ . Το φορτίο αυτού



- (α') Φορτισμένη ευθεία και σφαιρική επιφάνεια  
 (β') Τμήμα φορτισμένης ράβδου (η βάση του τριγώνου) στο εσωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας

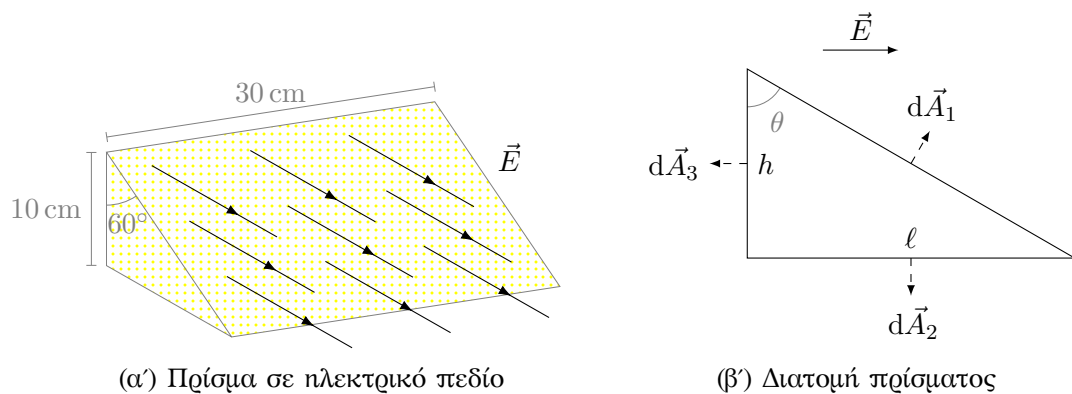
Σχήμα 6.25: Άσκηση 6

του τμήματος είναι  $q = \int_0^\ell \lambda ds = \lambda \ell$ . Σύμφωνα με το νόμο του Gauss, η συνολική ηλεκτρική ροή από τη σφαιρική επιφάνεια είναι

$$\Phi_E = \frac{q}{\epsilon_0} = \frac{2\lambda\sqrt{R^2 - d^2}}{\epsilon_0}.$$

7. Τριγωνικό πρίσμα (Σχήμα 6.26α') βρίσκεται μέσα σε οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο μέτρου  $E = 2 \times 10^4 \text{ N/C}$ . Υπολογίστε την ηλεκτρική ροή που διέρχεται από

- (α') την κατακόρυφη ορθογώνια επιφάνεια,  
 (β') την πλάγια επιφάνεια,  
 (γ') ολόκληρη την επιφάνεια του πρίσματος.



(α') Πρίσμα σε ηλεκτρικό πεδίο

(β') Διατομή πρίσματος

Σχήμα 6.26: Άσκηση 7

**ΛΥΣΗ**

Στο Σχήμα 6.26β' βλέπουμε μια τομή του πρίσματος. Το ύψος συμβολίζεται με  $h$ , το πλάτος με  $\ell$  ενώ στην τρίτη διάσταση έχει βάθος  $d$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο διάνυσμα της κάτω επιφάνειας,  $d\vec{A}_2$ . Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι 0 σε όλη την κάτω επιφάνεια και συνεπώς η ροή του ηλεκτρικού πεδίου είναι  $\Phi_E^{(2)} = 0$ . Το ίδιο ισχύει και για τις πλαϊνές τριγωνικές επιφάνειες άρα  $\Phi_E^{(4)} = 0$ ,  $\Phi_E^{(5)} = 0$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι αντιπαράλληλο στο διάνυσμα της κατακόρυφης επιφάνειας,  $d\vec{A}_3$ . Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι  $\vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = -E dA_3$  σε όλη την επιφάνεια. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$\Phi_E^{(3)} = \int_{S_3} \vec{E} \cdot d\vec{A}_3 = - \int_{S_3} E dA_3 = -E \int_{S_3} dA_3 = -Ehd.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το διάνυσμα της πλάγιας επιφάνειας,  $d\vec{A}_1$ . Το εσωτερικό τους γινόμενο είναι  $\vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = E dA_1 \cos \theta$  σε όλη την επιφάνεια. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου είναι

$$\Phi_E^{(1)} = \int_{S_1} \vec{E} \cdot d\vec{A}_1 = \int_{S_1} E \cos \theta dA_1 = E \cos \theta \int_{S_1} dA_1 = E \cos \theta d\sqrt{h^2 + \ell^2}.$$

Καθώς

$$\cos \theta = \frac{h}{\sqrt{h^2 + \ell^2}},$$

προκύπτει ότι  $\Phi_E^{(1)} = Ehd$ .

Η συνολική ροή από την επιφάνεια είναι

$$\Phi_E = \Phi_E^{(1)} + \Phi_E^{(2)} + \Phi_E^{(3)} + \Phi_E^{(4)} + \Phi_E^{(5)} = 0.$$

Το αποτέλεσμα είναι το αναμενόμενο από την εφαρμογή του νόμου Gauss καθώς το πρίσμα δεν περικλείει φορτίο.

8. Το φορτίο που φέρει επίμηκες ευθύ νήμα ανά μονάδα μήκους είναι  $\lambda = -100 \mu\text{C}/\text{m}$ . Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $a = 10 \text{ cm}$  κάθετα στο μήκος του νήματος.

**ΛΥΣΗ**

**A' τρόπος: Νόμος Coulomb**

Έστω ότι το ευθύγραμμο νήμα ορίζει τον άξονα  $x$ . Η αρχή του άξονα είναι οποιαδήποτε. Θα υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο πάνω στον άξονα  $y$ , σε απόσταση  $a$  από την αρχή.

Ένα στοιχειώδες τμήμα του νήματος στη θέση  $(x, 0)$ , με μήκος  $dx$  και φορτίο  $dq = \lambda dx$  προκαλεί στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο στη θέση  $(0, a)$  που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

Το διάνυσμα  $\vec{r}$  είναι  $\vec{r} = (0, a) - (x, 0) = (-x, a)$ . Το μέτρο του είναι  $r = \sqrt{x^2 + a^2}$  και το μοναδιαίο διάνυσμα

$$\hat{r} = \frac{1}{r} \vec{r} = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} \hat{i} + \frac{a}{\sqrt{x^2 + a^2}} \hat{j}.$$

Επομένως

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} (-x\hat{i} + a\hat{j}).$$

Το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο από όλα τα στοιχειώδη τμήματα στο διάστημα  $(-\infty, \infty)$  είναι

$$\vec{E} = \int d\vec{E} = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0} \left( -\hat{i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} + \hat{j} a \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \right).$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι 0 καθώς ολοκληρώνεται αντισυμμετρική συνάρτηση σε συμμετρικό διάστημα. Εάν κάνουμε τις πράξεις θα το επιβεβαιώσουμε. Εξάλλου, από τη συμμετρία του προβλήματος αναμένουμε να μην έχει το ηλεκτρικό πεδίο συνιστώσα στον άξονα  $x$ .

Στο Παράρτημα A' δείχνεται ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{2}{y^2}.$$

Επομένως

$$\vec{E} = \hat{j} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\lambda}{a}.$$

**B' τρόπος: Νόμος Gauss**

Η ομοιόμορφη κατανομή του ηλεκτρικού φορτίου είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή κατά  $180^\circ$  γύρω από οποιοδήποτε άξονα που είναι κάθετος σε αυτή.



Κάθε φυσικό μέγεθος που παράγεται από αυτή, άρα και το ηλεκτρικό πεδίο, πρέπει να είναι αναλλοίωτο στην ίδια περιστροφή. Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στην κατανομή (αν δεν ήταν, θα άλλαζε κατά την περιστροφή γύρω από ευθεία κάθετη στην κατανομή, που περνά από το σημείο υπολογισμού του πεδίου).

Επιπλέον, η κατανομή δεν αλλάζει αν μετατοπιστεί κατά μήκος του εαυτού της ή αν περιστραφεί γύρω από αυτόν. Αυτό σημαίνει ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε κάποιο σημείο εξαρτάται μόνο από την απόσταση αυτού του σημείου από την ευθεία και όχι από άλλες συντεταγμένες.

Συνεπώς, λόγω της συμμετρίας και της ομοιομορφίας στην κατανομή του φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο κάθετη στην ευθεία συνιστώσα, (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από την ευθεία. Επομένως, αν  $r$  είναι η κάθετη απόσταση από την ευθύγραμμη κατανομή, και  $\hat{r}$  το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, ισχύει  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Με βάση αυτό το αποτέλεσμα της συμμετρίας, μπορώ να εφαρμόσω το νόμο Gauss. Ορίζω ως επιφάνεια Gauss μια κυλινδρική επιφάνεια με άξονα τη φορτισμένη ευθεία, ακτίνα  $a$  και ύψος  $h$ . Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια  $S$  είναι μη μηδενική μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια. Από τις βάσεις του κυλίνδρου είναι 0 καθώς  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  είναι κάθετα διανύσματα. Επομένως, η ροή ηλεκτρικού πεδίου έχει συνεισφορά μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου,  $S'$ , η οποία έχει εμβαδόν  $2\pi ah$ . Σε αυτή το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό. Η ροή είναι

$$\Phi_E = \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(a) \int_{S'} dA = E(a)2\pi ah.$$

Το φορτίο που περικλείει η κυλινδρική επιφάνεια Gauss είναι  $Q = \lambda h$ , όπου  $\lambda$  η γραμμική πυκνότητα φορτίου. Σύμφωνα με το νόμο Gauss,

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(a)2\pi ah = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(a) = \frac{2k_e\lambda}{a}.$$

Με αντικατάσταση,  $E(a) = -18 \times 10^6 \text{ N/C}$ .

9. Μια άπειρη ευθεία φορτίου παράγει πεδίο μέτρου  $4.5 \times 10^4 \text{ N/C}$  σε απόσταση  $a = 2 \text{ m}$ . Να υπολογίσετε τη γραμμική πυκνότητα φορτίου.

Δίνεται  $k_e = 9 \times 10^9 \text{ NC}^{-2}\text{m}^2$ .

### ΛΥΣΗ

Λόγω της συμμετρίας και της ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο κάθετη στην ευθεία συνιστώσα, (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από την ευθεία. Επομένως, αν  $r$  είναι η

κάθετη απόσταση από την ευθύγραμμη κατανομή, και  $\hat{r}$  το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, ισχύει  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Ορίζω μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss με άξονα τη φορτισμένη ευθεία, ακτίνα  $a$  και ύψος  $h$ . Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια  $S$  είναι μη μηδενική μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια. Από τις βάσεις του κυλίνδρου είναι 0 καθώς  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  είναι κάθετα διανύσματα. Επομένως, η ροή ηλεκτρικού πεδίου έχει συνεισφορά μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια  $S'$ , η οποία έχει εμβαδόν  $2\pi ah$ . Σε αυτή το ηλεκτρικό πεδίο είναι σταθερό. Η ροή είναι

$$\Phi_E = \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(a) \int_{S'} dA = E(a)2\pi ah.$$

Το φορτίο που περικλείει η κυλινδρική επιφάνεια Gauss είναι  $\lambda h$ , όπου  $\lambda$  η (άγνωστη) γραμμική πυκνότητα φορτίου. Σύμφωνα με το νόμο Gauss,

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(a)2\pi ah = \frac{\lambda h}{\epsilon_0} \Rightarrow \lambda = \frac{E(a)a}{2k_e}.$$

Με αντικατάσταση,  $\lambda = 5 \mu\text{C}/\text{m}$ .

10. Ένας μη αγωγίμος τοίχος φέρει φορτίο με ομοιόμορφη πυκνότητα  $\sigma = 10 \mu\text{C}/\text{cm}^2$ .

- Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο 7 cm μπροστά από τον τοίχο;
- Το αποτέλεσμα αλλάζει όταν μεταβάλλεται η απόσταση από τον τοίχο;

### ΛΥΣΗ

Από τη συμμετρία του προβλήματος το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στον τοίχο: το ομοιόμορφα φορτισμένο, άπειρο επίπεδο είναι συμμετρικό σε περιστροφή γύρω από τον κάθετο σε αυτό άξονά του άρα και κάθε φυσικό μέγεθος που παράγεται από αυτό πρέπει να είναι αναλλοίωτο σε τέτοια περιστροφή. Οποιαδήποτε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που δεν είναι κάθετη στο επίπεδο είναι υποχρεωτικά 0. Επιπλέον, η κατανομή του φορτίου είναι συμμετρική σε κατοπτρισμό ως προς το επίπεδό της, άρα το ηλεκτρικό πεδίο (που θα έχει την ίδια συμμετρία) έχει αντίθετη φορά πάνω και κάτω από το επίπεδο.

Μπορούμε να ορίσουμε το επίπεδο  $x-y$  να είναι ο τοίχος. Επίσης, το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε μετατόπιση παράλληλα σε αυτό (ολίσθηση). Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την αρχή των αξόνων ώστε το σημείο στο οποίο θα υπολογίσουμε το πεδίο να είναι στον άξονα  $z$ , δηλαδή, θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο στο  $(0, 0, z)$ .

Α' τρόπος, χρήση του νόμου Coulomb.

Στοιχειώδες φορτίο  $dq$  στο άπειρο επίπεδο, σε θέση  $(x, y, 0)$  προκαλεί στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο  $d\vec{E}$  στη θέση  $(0, 0, z)$ . Το διάνυσμα από

το φορτίο στο υπό εξέταση σημείο είναι το  $(-x, -y, z)$ . Το μέτρο είναι  $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$  και το μοναδιαίο διάνυσμα είναι το  $\hat{r} = (-x, -y, z)/r$ . Το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{E} = k_e \frac{dq}{r^2} \hat{r} = k_e \frac{dq}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}) .$$

Καθώς  $dq = \sigma dx dy$ , το συνολικό ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = k_e \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} dy \frac{\sigma}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (-x\hat{i} - y\hat{j} + z\hat{k}) .$$

Λόγω συμμετρίας, απομένει μόνο η συνιστώσα στον άξονα  $z$ . Άρα

$$\vec{E} = \hat{k} z k_e \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} .$$

Αλλά εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι (Παράρτημα Α')

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{2}{x^2 + z^2} .$$

Επομένως,

$$\vec{E} = \hat{k} 2z k_e \sigma \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + z^2} .$$

Αλλά εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι (Παράρτημα Α')

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + z^2} = \frac{\pi}{|z|} .$$

Επομένως,

$$\vec{E} = \hat{k} 2z k_e \sigma \frac{\pi}{|z|} = \text{sgn}\{z\} \hat{k} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} = \hat{n} \frac{\sigma}{2\epsilon_0} ,$$

όπου  $\hat{n}$  το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο, με φορά προς τα «έξω».

*Β' τρόπος, χρήση του νόμου Gauss.*

Ορίζω μια κυβική επιφάνεια Gauss με πλευρά  $2z$  που διαπερνάται από το φορτισμένο επίπεδο παράλληλα σε δύο έδρες της, απέχοντας απόσταση  $z$  από κάθε μία. Το κέντρο του κύβου είναι στο  $(0, 0, 0)$ .

Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια είναι μη μηδενική μόνο από τις δύο παράλληλες έδρες. Από τις κάθετες έδρες είναι 0 καθώς  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  είναι κάθετα διανύσματα. Η ροή ηλεκτρικού πεδίου έχει συνεισφορά μόνο από τις δύο παράλληλες στο επίπεδο έδρες, η κάθε μία από αυτές έχει εμβαδόν  $(2z)^2$ . Όπως αναφέραμε, στις έδρες αυτές το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερή τιμή και αντίθετη κατεύθυνση. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από κάθε μία είναι λόγω συμμετρίας, ίδια.

Συνεπώς, η ροή από την επιφάνεια Gauss,  $S$ , είναι δύο φορές η ροή από τη μία παράλληλη έδρα ( $S'$ ):

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2 \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2E(z) \int_{S'} dA = 2E(z)(2z)^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται είναι  $Q = \sigma \times (2z)^2$ . Σύμφωνα με το νόμο Gauss,

$$2E(z)(2z)^2 = \frac{\sigma \times (2z)^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο ανεξάρτητο από την απόσταση  $z$  από το φορτισμένο επίπεδο και είναι κάθετο σε αυτό:

$$\vec{E} = \hat{n} \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

όπου  $\hat{n}$  το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο, με φορά προς τα «έξω».

Με αντικατάσταση,  $E \approx 5.65 \times 10^9 \text{ N/C}$ .

11. Λεπτό σφαιρικό κέλυφος ακτίνας  $R = 10 \text{ cm}$  έχει συνολικό φορτίο  $Q = 100 \mu\text{C}$  ομοιόμορφα κατανεμημένο στην επιφάνειά του. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση α)  $5 \text{ cm}$  και β)  $15 \text{ cm}$  από το κέντρο της κατανομής του φορτίου.

### ΛΥΣΗ

Λόγω συμμετρίας και ομοιόμορφης φόρτισης, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Άρα  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορώ να εφαρμόσω το νόμο Gauss. Ορίζω μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ομόκεντρη του σφαιρικού φλοιού, με ακτίνα  $r$ . Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια  $S$  είναι

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \oint_S dA = E(r)4\pi r^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$  είναι 0 όταν  $r < R$  και  $Q$  όταν  $r \geq R$ . Σύμφωνα με το νόμο Gauss

$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{Q}{\epsilon_0}, & r \geq R \end{cases} \Rightarrow E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{k_e Q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}.$$

Με αντικατάσταση έχουμε (α')  $E(5 \text{ cm}) = 0 \text{ N/C}$  (β')  $E(15 \text{ cm}) \approx 4 \times 10^7 \text{ N/C}$ .

12. Συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας  $R = 10 \text{ cm}$  έχει συνολικό φορτίο  $Q = 100 \mu\text{C}$  ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο της. Βρείτε το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση (α')  $5 \text{ cm}$  και (β')  $15 \text{ cm}$  από το κέντρο της σφαίρας.

**ΛΥΣΗ**

Λόγω συμμετρίας και ομοιόμορφης φόρτισης, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Άρα  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορώ να εφαρμόσω το νόμο Gauss. Ορίζω μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ομόκεντρη της σφαίρας, με ακτίνα  $r$ . Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια  $S$  είναι

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \oint_S dA = E(r)4\pi r^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$  είναι  $Q$  όταν  $r \geq R$ . Όταν  $r < R$  το φορτίο  $q$  που περικλείει η επιφάνεια Gauss είναι ανάλογο του όγκου που περικλείει με συντελεστή αναλογίας τη χωρική πυκνότητα  $\rho$ :

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Για το  $\rho$  έχουμε

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Συνεπώς

$$q = Q \frac{r^3}{R^3}.$$

Από το νόμο του Gauss έχουμε

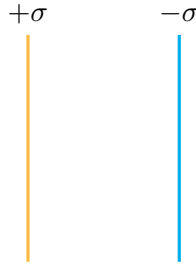
$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}, & r \leq R \\ \frac{Q}{\epsilon_0}, & r > R \end{cases} \Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{k_e Q r}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{k_e Q}{r^2}, & r > R \end{cases}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνεχές στο  $r = R$ .

Με αντικατάσταση έχουμε (α')  $E(5\text{ cm}) \approx 4.5 \times 10^7 \text{ N/C}$  (β')  $E(15\text{ cm}) \approx 4 \times 10^7 \text{ N/C}$ .

13. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο που οφείλεται σε δύο ομοιόμορφα και αντίθετα φορτισμένες επιφάνειες άπειρων διαστάσεων, μεταξύ των επιφανειών και εκτός.

**ΛΥΣΗ**



Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο άπειρης, φορτισμένης, επίπεδης επιφάνειας είναι  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια, με κατεύθυνση μακριά από την επιφάνεια.

Ορίζω τον άξονα  $x$  να είναι κάθετος στα δύο φύλλα, με φορά από το αριστερό προς το δεξί.

Αριστερό φύλλο, θετικά φορτισμένο: Στα αριστερά του το πεδίο είναι

$$\vec{E}_\ell^+ = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}.$$

Στα δεξιά του

$$\vec{E}_r^+ = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}.$$

Δεξί φύλλο, αρνητικά φορτισμένο: Στα αριστερά του το πεδίο είναι

$$\vec{E}_\ell^- = -\frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}.$$

Στα δεξιά του

$$\vec{E}_r^- = \frac{-\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}.$$

Συνολικά:

$$\vec{E} = \vec{E}^+ + \vec{E}^-.$$

Έξω από τα φύλλα  $\vec{E} = 0$ . Ανάμεσα στα φύλλα:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{i}.$$

14. Μια τετράγωνη χάλκινη πλάκα με πλευρά 50 cm και μικρό πάχος, είναι αφόρτιστη. Η πλάκα τοποθετείται στην περιοχή ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου  $E = 100 \text{ kN/C}$  και κάθετα σε αυτό.

- Εξηγήστε γιατί οι πλευρές που είναι κάθετες στο πεδίο αποκτούν αντίθετα φορτία.

- Αν  $\pm\sigma$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στις πλευρές που είναι κάθετες στο πεδίο, εφαρμόστε το νόμο Gauss για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που παράγουν σε όλο το χώρο.
- Πόσο είναι το συνολικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας και πόση πρέπει να είναι η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ ;
- Πόσο είναι το συνολικό φορτίο κάθε πλευράς;

### ΛΥΣΗ

Η δύναμη που ασκείται στα φορτία από το ηλεκτρικό πεδίο συγκεντρώνει τα ελεύθερα ηλεκτρόνια του αγωγού κάτω (αντίθετα από την κατεύθυνση του  $\vec{E}$ ) αφήνοντας πλεόνασμα θετικών ιόντων του μεταλλικού πλέγματος στην επάνω πλευρά. Η επιφανειακή πυκνότητα είναι  $+\sigma$  επάνω και  $-\sigma$  κάτω.

Για να υπολογίσω το ηλεκτρικό πεδίο φορτισμένου επιπέδου σκέφτομαι ως εξής:

Από τη συμμετρία του προβλήματος το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο: το ομοιόμορφα φορτισμένο, άπειρο επίπεδο είναι συμμετρικό σε περιστροφή γύρω από τον κάθετο σε αυτό άξονά του άρα και κάθε φυσικό μέγεθος που παράγεται από αυτό πρέπει να είναι αναλλοίωτο σε τέτοια περιστροφή. Οποιαδήποτε συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που δεν είναι κάθετη στο επίπεδο είναι υποχρεωτικά 0. Επιπλέον, η κατανομή του φορτίου είναι συμμετρική σε κατοπτρισμό ως προς το επίπεδό της, άρα το ηλεκτρικό πεδίο (που θα έχει την ίδια συμμετρία) έχει αντίθετη φορά πάνω και κάτω από το επίπεδο.

Μπορούμε να ορίσουμε το επίπεδο  $x - y$  να είναι η επιφάνεια. Επίσης, το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε μετατόπιση παράλληλα σε αυτό (ολίσθηση). Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε την αρχή των αξόνων ώστε το σημείο στο οποίο θα υπολογίσουμε το πεδίο να είναι στον άξονα  $z$ , δηλαδή, θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο στο  $(0, 0, z)$ .

Ορίζω μια κυβική επιφάνεια Gauss με πλευρά  $2z$  που διαπερνάται από το φορτισμένο επίπεδο παράλληλα σε δύο έδρες της, απέχοντας απόσταση  $z$  από κάθε μία. Το κέντρο του κύβου είναι στο  $(0, 0, 0)$ .

Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια είναι μη μηδενική μόνο από τις δύο παράλληλες έδρες. Από τις κάθετες έδρες είναι 0 καθώς  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  είναι κάθετα διανύσματα. Η ροή ηλεκτρικού πεδίου έχει συνεισφορά μόνο από τις δύο παράλληλες στο επίπεδο έδρες, η κάθε μία από αυτές έχει εμβαδόν  $(2z)^2$ . Όπως αναφέραμε, στις έδρες αυτές το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθερή τιμή και αντίθετη κατεύθυνση. Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από κάθε μία είναι λόγω συμμετρίας, ίδια. Συνεπώς, η ροή από την επιφάνεια Gauss,  $S$ , είναι δύο φορές η ροή από τη μία παράλληλη έδρα ( $S'$ ):

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2 \int_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = 2E(z) \int_{S'} dA = 2E(z)(2z)^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται είναι  $Q = \sigma \times (2z)^2$ . Σύμφωνα με το νόμο Gauss,

$$2E(z)(2z)^2 = \frac{\sigma \times (2z)^2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(z) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο ανεξάρτητο από την απόσταση  $z$  από το φορτισμένο επίπεδο και είναι κάθετο σε αυτό:

$$\vec{E} = \hat{n} \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

όπου  $\hat{n}$  το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο, με φορά προς τα «έξω».

Επομένως, πολύ κοντά στην επάνω επιφάνεια, πάνω και κάτω από αυτή, το ηλεκτρικό πεδίο από τα φορτία της είναι  $+|\sigma|/(2\epsilon_0)\hat{k}$  από πάνω και  $-|\sigma|/(2\epsilon_0)\hat{k}$  από κάτω.  $\hat{k}$  είναι το μοναδιαίο διάνυσμα του  $\vec{E}$ .

Πολύ κοντά στην κάτω επιφάνεια, πάνω και κάτω από αυτή, το ηλεκτρικό πεδίο από τα φορτία της είναι  $-|\sigma|/(2\epsilon_0)\hat{k}$  από πάνω και  $+|\sigma|/(2\epsilon_0)\hat{k}$  από κάτω.

Στο εσωτερικό της πλάκας το συνολικό πεδίο είναι

$$E_{\text{tot}} = -\frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\hat{k} - \frac{|\sigma|}{2\epsilon_0}\hat{k} + E\hat{k}.$$

Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό αγωγού είναι 0. Άρα

$$E = \frac{|\sigma|}{\epsilon_0} \Rightarrow |\sigma| = \epsilon_0 E.$$

Το συνολικό φορτίο κάθε πλευράς εμβαδού  $A$  είναι  $Q = \pm |\sigma| \times A$ .

Με αντικατάσταση,  $\sigma \approx \pm 8.85 \times 10^{-7} \text{ C/m}^2$ ,  $Q \approx \pm 0.22 \mu\text{C}$ .

15. Μικρή σφαίρα μάζας  $m$  φέρει θετικό φορτίο  $q$  και εξαρτάται από το άκρο μεταξένιου νήματος μήκους  $L$ . Το άλλο άκρο του νήματος δένεται σε μεγάλο κατακόρυφο φύλλο μονωτικού υλικού που φέρει επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ . Βρείτε τη γωνία που σχηματίζει το νήμα με το κατακόρυφο φύλλο, όταν η σφαίρα ισορροπεί.

### ΛΥΣΗ

Άπειρο φύλλο, ομοιόμορφα φορτισμένο, με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου  $\sigma$ , παράγει ηλεκτρικό πεδίο κάθετο σε αυτό, με μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το φύλλο. Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο άπειρης, φορτισμένης, επίπεδης επιφάνειας είναι  $\vec{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην επιφάνεια, με κατεύθυνση μακριά από την επιφάνεια.



Ορίζουμε ως άξονα  $x$  τον κάθετο άξονα στο κατακόρυφο φύλλο και ως άξονα  $y$  την κατακόρυφο.

Στο φορτίο ασκούνται τρεις δυνάμεις:

$$\begin{aligned}\vec{F}_e &= q\vec{E} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \hat{i}, \\ \vec{F}_g &= -mg\hat{j}, \\ \vec{T} &= -T \sin \theta \hat{i} + T \cos \theta \hat{j}.\end{aligned}$$

Το φορτίο ισορροπεί όταν το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων είναι 0, όταν δηλαδή

$$\begin{aligned}T_x + F_e &= 0 \Rightarrow T \sin \theta = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0}, \\ T_y + F_g &= 0 \Rightarrow T \cos \theta = mg.\end{aligned}$$

Επομένως

$$\tan \theta = \frac{q\sigma}{2mg\epsilon_0} \Rightarrow \theta = \tan^{-1} \left( \frac{q\sigma}{2mg\epsilon_0} \right).$$

16. Ένα μικρό κομμάτι φελιζόλ μάζας 10 g έχει φορτίο  $-0.7 \mu\text{C}$  και αιωρείται πάνω από το κέντρο ενός οριζόντιου επίπεδου φύλλου πλαστικού πολύ μεγάλων διαστάσεων με σταθερή επιφανειακή πυκνότητα φορτίου. Ποιο είναι το φορτίο ανά μονάδα επιφάνειας στο πλαστικό φύλλο;

Δίνονται  $k_e = 9 \times 10^9 \text{ NC}^{-2}\text{m}^2$ ,  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ .

### ΛΥΣΗ

Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγεται από επίπεδο φύλλο, ομοιόμορφα φορτισμένου με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma$ , είναι

$$\vec{E} = \hat{n} \frac{\sigma}{2\epsilon_0},$$

όπου  $\hat{n}$  το κάθετο διάνυσμα στο φύλλο, με φορά προς τα «πάνω». Θα ορίσουμε την κάθετη ευθεία στο φύλλο ως άξονα  $z$ . Το  $\hat{n}$  πάνω από το φύλλο ταυτίζεται με το  $\hat{k}$ .

Το βάρος του φελιζόλ είναι  $\vec{F}_g = -mg\hat{k}$ . Η ηλεκτρική δύναμη είναι

$$\vec{F}_e = q\vec{E} = \frac{q\sigma}{2\epsilon_0} \hat{k}.$$

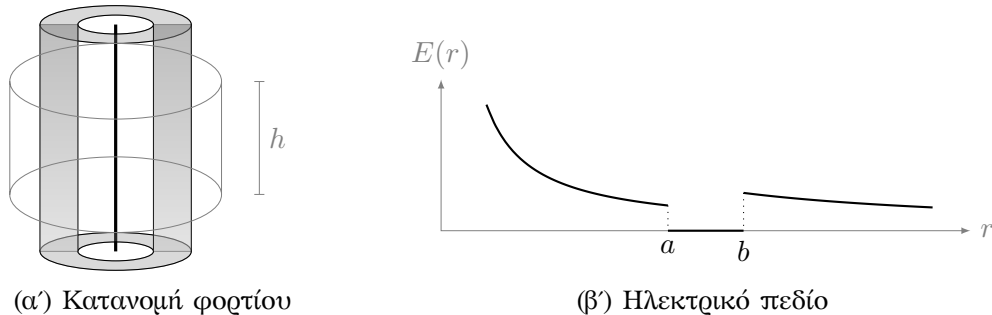
Το σωματίδιο ισορροπεί όταν  $\vec{F}_g + \vec{F}_e = 0$ . Επομένως,

$$\frac{q\sigma}{2\epsilon_0} = mg \Rightarrow \sigma = \frac{2mg\epsilon_0}{q}.$$

Με αντικατάσταση,  $\sigma \approx -2.48 \times 10^{-6} \text{ Cm}^{-2}$ .

17. Ένας πολύ μακρύς αγωγίμος σωλήνας (κοίλος κύλινδρος) έχει εσωτερική ακτίνα  $a$  και εξωτερική  $b$ . Ο σωλήνας φέρει φορτίο ανά μονάδα μήκους  $\lambda > 0$ . Ένα γραμμικό φορτίο είναι κατανομημένο κατά μήκος του άξονα του σωλήνα με γραμμική πυκνότητα  $+\lambda$ .

- Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο ως συνάρτηση της απόστασης  $r$  από τον άξονα του σωλήνα για  $r < a$ ,  $a < r < b$ ,  $r > b$  και συνοψίστε τα αποτελέσματα σε μια γραφική παράσταση  $E(r)$ .
- Ποιο είναι το φορτίο ανά μονάδα μήκους πάνω (α') στην εσωτερική επιφάνεια και (β') στην εξωτερική επιφάνεια του σωλήνα;



Σχήμα 6.27: Άσκηση 17

### ΛΥΣΗ

Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $r$ ,  $\phi$ ,  $z$ , το ηλεκτρικό πεδίο είναι γενικά

$$\vec{E}(r, \phi, z) = E_r(r, \phi, z)\hat{r} + E_\phi(r, \phi, z)\hat{\phi} + E_z(r, \phi, z)\hat{z}.$$

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας και της ομοιομορφίας που έχει η κατανομή φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει

- μόνο ακτινική συνιστώσα (δηλαδή, κάθετα στον άξονα του κυλίνδρου). Δεν μπορεί να έχει συνιστώσα παράλληλα στον άξονα γιατί η περιστροφή του συστήματος κατά  $180^\circ$  γύρω από ευθεία που περνά από το σημείο υπολογισμού του ηλεκτρικού πεδίου αφήνει ίδια κατανομή φορτίου αλλά με αντίθετο πεδίο στον άξονα συμμετρίας. Οι συνιστώσες αυτές του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι ίσες. Επομένως, είναι 0.
- Δεν μπορεί επίσης να έχει συνιστώσα παράλληλη στο διάνυσμα  $\hat{\phi}$  των κυλινδρικών συντεταγμένων (δηλαδή, εφαπτομενικά σε κύκλους που είναι κάθετοι στον άξονα). Ο κατοπτρισμός ως προς ένα επίπεδο που περιέχει τον άξονα συμμετρίας αφήνει ίδια κατανομή φορτίου αλλά με αντίθετο πεδίο στο διάνυσμα  $\hat{\phi}$ . Οι συνιστώσες αυτές του ηλεκτρικού πεδίου πρέπει να είναι ίσες. Επομένως, είναι 0.

- μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα (την απόσταση από τον άξονα).

Δεν εξαρτάται από το «ύψος», τη θέση της προβολής στον άξονα του σημείου στο οποίο υπολογίζουμε το πεδίο. Η μετακίνηση παράλληλα στον άξονα δεν αλλάζει την κατανομή φορτίου (η οποία εκτείνεται στο άπειρο).

Δεν εξαρτάται επίσης από τη γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα του σημείου με κάποιο επίπεδο που περιέχει τον άξονα συμμετρίας. Η περιστροφή γύρω από τον άξονα πρέπει να αφήνει το ίδιο μέτρο του πεδίου, καθώς δεν αλλάζει η κατανομή φορτίου.

Καταλήγουμε ότι  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε ως επιφάνεια Gauss μια κλειστή επιφάνεια που, ένα τμήμα της τουλάχιστον, περνά από σημεία που το ηλεκτρικό πεδίο έχει ίδιο μέτρο. Θα μας διευκολύνει αυτό να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή. Αυτά τα σημεία είναι όσα απέχουν συγκεκριμένη απόσταση από τον άξονα. Η επιφάνεια μπορεί να κλείνει με τμήματα που είναι κάθετα στο πεδίο ώστε η ροή από αυτά να είναι 0.

Από αυτή την κυλινδρική επιφάνεια Gauss, ύψους  $h$ , ομοαξονική με τον κύλινδρο, ακτίνας  $r$ , έχουμε ροή ηλεκτρικού πεδίου μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια. Στις βάσεις η ροή είναι 0 γιατί σε αυτές τα διανύσματα  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  που εμφανίζονται στη στοιχειώδη ροή, είναι κάθετα. Στην παράπλευρη επιφάνεια το στοιχειώδες ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στα στοιχειώδη διανύσματα της επιφάνειας, οπότε το εσωτερικό γινόμενο που εμφανίζεται στη στοιχειώδη ροή γίνεται γινόμενο μέτρων:

$$\Phi_E = \int_S E(r) dA = E(r) \int_S dA = E(r) 2\pi h r .$$

Αυτή είναι και η συνολική ηλεκτρική ροή.

Όταν ένας αγωγός βρεθεί σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, εμφανίζεται αρχικά μη μηδενικό πεδίο στο εσωτερικό του. Ασκεί δυνάμεις στα ελεύθερα φορτία του αγωγού και τα μετακινεί στην επιφάνειά του ώστε να παραγάγουν αντίθετο ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό. Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, στο εσωτερικό του αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0. Αν δεν ήταν, θα ασκούσε δυνάμεις στα ελεύθερα φορτία του αγωγού, θα προκαλούσε την κίνησή τους, και δεν θα είχαμε φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας.

Όταν η ακτίνα της επιφάνειας Gauss είναι μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής ακτίνας του κυλίνδρου, η παράπλευρη επιφάνεια βρίσκεται σε χώρο χωρίς ηλεκτρικό πεδίο. Η συνολική ροή ηλεκτρικού πεδίου είναι 0 και σύμφωνα με το νόμο Gauss, περικλείει φορτίο 0.

Στο σύρμα έχουμε φορτίο  $Q = \lambda h$  εντός της επιφάνειας Gauss. Θυμηθείτε τον ορισμό της γραμμικής πυκνότητας φορτίου:

$$\lambda = \frac{dQ}{ds} \Rightarrow dQ = \lambda ds \Rightarrow Q = \int_0^h \lambda ds = \lambda h .$$

Αν στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού έχουμε φορτίο ομοιόμορφα κατανεμημένο με πυκνότητα  $\lambda'$ , το φορτίο εντός της επιφάνειας Gauss είναι ίσο με  $\lambda'h$ . Συνολικά, το φορτίο εντός της επιφάνειας Gauss, στην εσωτερική επιφάνεια του σωλήνα και στο σύρμα πρέπει να είναι 0. Άρα

$$\lambda h + \lambda' h = 0 \Rightarrow \lambda' = -\lambda .$$

Εφόσον το συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους του αγωγού είναι  $\lambda$ , θα πρέπει το φορτίο εντός της επιφάνειας Gauss στην εξωτερική επιφάνεια,  $\lambda''h$ , και στην εσωτερική επιφάνεια,  $\lambda'h$ , να είναι συνολικά  $\lambda h$ . Άρα

$$\lambda''h - \lambda h = \lambda h \Rightarrow \lambda'' = 2\lambda .$$

Για το ηλεκτρικό πεδίο:

**Όταν**  $r < a$ , το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται είναι αυτό που βρίσκεται στο τμήμα του σύρματος μέσα στην επιφάνεια Gauss, δηλαδή,  $Q = \lambda h$ . Επομένως, από το νόμο Gauss,

$$2\pi h r E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi h r} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} .$$

**Όταν**  $a < r < b$ , γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0.

**Όταν**  $r > b$ , το ηλεκτρικό φορτίο που περικλείεται είναι αυτό που βρίσκεται στο τμήμα του σύρματος και αυτό που βρίσκεται πάνω στο τμήμα του σωλήνα μέσα στην επιφάνεια Gauss, δηλαδή,  $Q' = \lambda h + \lambda h$ . Επομένως, από το νόμο Gauss,

$$2\pi h r E(r) = \frac{Q'}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{1}{2\pi h r} \frac{Q'}{\epsilon_0} = \frac{2\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} .$$

Συνεπώς

$$\vec{E}(r) = \hat{r} \frac{\lambda}{2\pi \epsilon_0} \begin{cases} 1/r , & r < a , \\ 0 , & a < r < b , \\ 2/r , & r > b . \end{cases} .$$

Στα σημεία  $a, b$  που υπάρχει φορτίο, παρατηρείται ασυνέχεια του ηλεκτρικού πεδίου. Η γραφική παράσταση του  $E(r)$  δίνεται στο Σχήμα 6.27β'.

18. Ένα μακρύ ευθύγραμμο σύρμα περιβάλλεται από έναν ομοαξονικό κοίλο μεταλλικό κύλινδρο. Το συμπαγές σύρμα φέρει φορτίο ανά μονάδα μήκους  $+\lambda$  και ο κοίλος κύλινδρος έχει καθαρό φορτίο ανά μονάδα μήκους  $+2\lambda$ . Βρείτε (α') το φορτίο ανά μονάδα μήκους της εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας του κοίλου κυλίνδρου, (β') το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του κυλίνδρου σε απόσταση  $r$  από τον άξονά του.

**ΛΥΣΗ**

Στο εσωτερικό του αγωγού, σε ηλεκτροστατική ισορροπία, το πεδίο είναι 0. Μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss ύψους  $h$ , ομοαξονική με τον κύλινδρο και με ακτίνα μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας του κυλίνδρου έχει συνολική ροή ηλεκτρικού πεδίου 0. Επομένως περικλείει φορτίο 0. Στο σύρμα έχουμε φορτίο  $\lambda h$  εντός της επιφάνειας Gauss. Αν στην εσωτερική επιφάνεια του αγωγού έχουμε φορτίο  $\lambda' h$ , πρέπει  $\lambda h + \lambda' h = 0 \Rightarrow \lambda' = -\lambda$ . Εφόσον το συνολικό φορτίο ανά μονάδα μήκους του αγωγού είναι  $+2\lambda$ , στην εξωτερική επιφάνεια έχουμε  $+3\lambda$ .

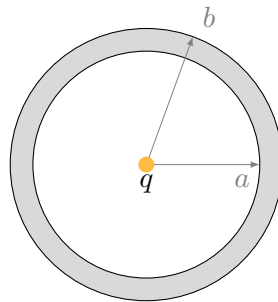
Λόγω συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα, (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Από κυλινδρική επιφάνεια Gauss ύψους  $h$ , ομοαξονική με τον κύλινδρο, ακτίνας  $r$  έχουμε ροή ηλεκτρικού πεδίου μόνο από την παράπλευρη επιφάνεια  $S$

$$\Phi_E = \int_S E(r) dA = E(r) 2\pi h r .$$

Το φορτίο στο εσωτερικό είναι  $Q = +3\lambda h$ . Άρα, από το νόμο Gauss,

$$E(r) = \frac{1}{2\pi h r} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{3\lambda}{2\pi \epsilon_0 r} .$$

19. Ένα μη αγωγίμο σφαιρικό κέλυφος, εσωτερικής ακτίνας  $a = 2 \text{ cm}$  και εξωτερικής ακτίνας  $b = 2.4 \text{ cm}$ , έχει θετική χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho = C/r$ , όπου  $C$  μια σταθερά και  $r$  είναι η απόσταση από το κέντρο του κελύφους. Επιπλέον, μια μικρή μπάλα, φορτίου  $q = 45 \text{ fC}$ , είναι τοποθετημένη σε αυτό το κέντρο. Ποια τιμή θα πρέπει να έχει το  $C$ , αν το ηλεκτρικό πεδίο εντός του κελύφους ( $a \leq r \leq b$ ) είναι σταθερού μέτρου;



Σχήμα 6.28: Άσκηση 19

**ΛΥΣΗ**

Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $r, \phi, \theta$ , το ηλεκτρικό πεδίο είναι γενικά

$$\vec{E}(r, \phi, \theta) = E_r(r, \phi, \theta) \hat{r} + E_\phi(r, \phi, \theta) \hat{\phi} + E_\theta(r, \phi, \theta) \hat{\theta} .$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας που έχει η κατανομή φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει

- μόνο ακτινική συνιστώσα.

Σε ένα δεδομένο σημείο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα εφαπτόμενη στη σφαιρική επιφάνεια καθώς η περιστροφή του συστήματος γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο και το δεδομένο σημείο, αφήνει αναλλοίωτη την κατανομή φορτίου αλλά θα στρέψει την εφαπτόμενη συνιστώσα. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι το ίδιο και επομένως η συνιστώσα αυτή πρέπει να είναι 0.

- μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο.

Δεν εξαρτάται από τις άλλες σφαιρικές συντεταγμένες (τις δύο γωνίες). Οποιαδήποτε στροφή του συστήματος γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από το κέντρο, αλλάζει τις γωνίες αλλά πρέπει να αφήνει το ηλεκτρικό πεδίο ίδιο.

Καταλήγουμε ότι  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε ως επιφάνεια Gauss,  $S$ , μια κλειστή επιφάνεια που περνά από σημεία που το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο. Θα μας διευκολύνει αυτό να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή. Αυτά τα σημεία είναι όσα απέχουν συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο, έστω  $R$ .

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από ένα στοιχειώδες τμήμα της επιφάνειας Gauss με διάνυσμα επιφάνειας  $d\vec{A} = dA\hat{r}$  είναι  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R)dA$ . Επομένως,

$$\Phi_E = \oint_S E(R) dA = E(R) \oint_S dA = E(R)4\pi R^2.$$

Έστω  $a < R < b$ . Το φορτίο που περικλείει η επιφάνεια Gauss είναι αυτό που υπάρχει στο κέντρο και αυτό που υπάρχει στο τμήμα του κελύφους με  $a \leq r \leq R$ :

$$Q = q + \int_{r=a}^{r=R} dq = q + \int \rho d\tau = q + \int_a^R \rho 4\pi r^2 dr = q + 4\pi C \int_a^R r dr = q + 2\pi C(R^2 - a^2).$$

Σύμφωνα με το νόμο Gauss,

$$E(R)4\pi R^2 = \frac{q + 2\pi C(R^2 - a^2)}{\epsilon_0}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του κελύφους θέλουμε να έχει το ίδιο μέτρο, ανεξάρτητα από το  $R$ . Επομένως, στη σχέση

$$E(R) = k_e \frac{q + 2\pi C(R^2 - a^2)}{R^2} = k_e \left( 2\pi C + \frac{q - 2\pi C a^2}{R^2} \right),$$

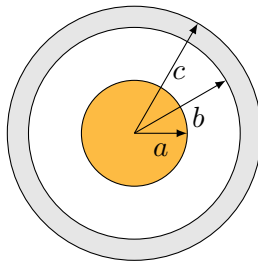
πρέπει ο όρος που έχει εξάρτηση από το  $R$  να μην υπάρχει. Γίνεται αν  $q - 2\pi C a^2 = 0$ , άρα

$$C = \frac{q}{2\pi a^2}.$$

Με αντικατάσταση,  $C \approx 1.79 \times 10^{-11} \text{ C/m}^2$ .

20. Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας  $a = 2 \text{ cm}$  είναι ομόκεντρη με ένα σφαιρικό αγωγίμο κέλυφος εσωτερικής ακτίνας  $b = 2a$  και εξωτερικής ακτίνας  $c = 2.4a$ . Η σφαίρα έχει συνολικό φορτίο  $q_1 = 5 \text{ fC}$ , ομοιόμορφα κατανεμημένο, και το κέλυφος έχει συνολικό φορτίο  $q_2 = -q_1$ .

- Πόσο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στις ακτινικές αποστάσεις (α')  $r = a/2$ , (β')  $r = a$ , (γ')  $r = 1.5a$ , (δ')  $r = 2.3a$ , (ε')  $r = 3.5a$ ;
- Πόσο είναι το συνολικό φορτίο στην εσωτερική και στην εξωτερική επιφάνεια του κελύφους;



Σχήμα 6.29: Άσκηση 20

### ΛΥΣΗ

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας που έχει η κατανομή φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει

- μόνο ακτινική συνιστώσα.  
Σε ένα δεδομένο σημείο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα εφαπτόμενη στη σφαιρική επιφάνεια καθώς η περιστροφή του συστήματος γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο και το δεδομένο σημείο, αφήνει αναλλοίωτη την κατανομή φορτίου αλλά θα στρέψει την εφαπτόμενη συνιστώσα. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι το ίδιο και επομένως η συνιστώσα αυτή πρέπει να είναι 0.
- μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο.  
Δεν εξαρτάται από τις άλλες σφαιρικές συντεταγμένες (τις δύο γωνίες). Οποιαδήποτε στροφή του συστήματος γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από το κέντρο, αλλάζει τις γωνίες αλλά πρέπει να αφήνει το ηλεκτρικό πεδίο ίδιο.

Καταλήγουμε ότι  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε ως επιφάνεια Gauss,  $S$ , μια κλειστή επιφάνεια που περνά από σημεία που το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο. Θα μας διευκολύνει αυτό να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή. Αυτά τα σημεία είναι όσα απέχουν συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο, έστω  $R$ . Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από ένα στοιχειώδες τμήμα της με επιφάνεια  $d\vec{A} = dA\hat{r}$  είναι  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R)dA$ . Επομένως,

$$\Phi_E = \oint_S E(R) dA = E(R) \oint_S dA = E(R)4\pi R^2.$$

Ας εφαρμόσουμε το νόμο Gauss για διάφορες ακτίνες:

**αν**  $0 \leq R \leq a$ :

Η επιφάνεια Gauss βρίσκεται μέσα στη συμπαγή σφαίρα. Η σφαίρα έχει φορτίο  $q_1$  κατανομημένο ομοιόμορφα στον όγκο της,  $V = 4\pi a^3/3$ . Η χωρική πυκνότητα φορτίου είναι

$$\rho = \frac{q_1}{V} = \frac{3q_1}{4\pi a^3}.$$

Στον όγκο της επιφάνειας Gauss,  $V' = 4\pi R^3/3$ , περιέχεται φορτίο  $q' = \rho V' = q_1 V'/V = q_1(R/a)^3$ . Εφαρμόζοντας το νόμο Gauss έχουμε

$$E(R)4\pi R^2 = \frac{q'}{\epsilon_0} \Rightarrow E(R) = k_e \frac{q_1}{a^3} R.$$

Συνεπώς,  $E(a/2) = k_e \frac{q_1}{2a^2} \approx 5.625 \times 10^{-2} \text{ N/C}$  και  $E(a) = k_e \frac{q_1}{a^2} \approx 11.25 \times 10^{-2} \text{ N/C}$ .

**αν**  $a \leq R \leq b$ :

Η επιφάνεια περικλείει το φορτίο της συμπαγούς σφαίρας,  $q_1$ . Εφαρμόζοντας το νόμο Gauss έχουμε

$$E(R)4\pi R^2 = \frac{q_1}{\epsilon_0} \Rightarrow E(R) = k_e \frac{q_1}{R^2}.$$

Συνεπώς,  $E(a) = k_e \frac{q_1}{a^2}$ , ακριβώς όσο υπολογίσαμε στην προηγούμενη περίπτωση, και  $E(1.5a) = k_e \frac{q_1}{2.25a^2} \approx 5 \times 10^{-2} \text{ N/C}$ .

**αν**  $b \leq R \leq c$ :

Η επιφάνεια βρίσκεται μέσα στο αγωγίμο κέλυφος. Γνωρίζουμε ότι όταν ένας αγωγός βρεθεί σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο, εμφανίζεται αρχικά μη μηδενικό πεδίο στο εσωτερικό του. Ασκήι δυνάμεις στα ελεύθερα φορτία του αγωγού και τα μετακινεί στην επιφάνειά του ώστε να παραγάγουν αντίθετο ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό. Στην κατάσταση ηλεκτροστατικής ισορροπίας, στο εσωτερικό του αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο είναι



0. Αν δεν ήταν, θα ασκούσε δυνάμεις στα ελεύθερα φορτία του αγωγού, θα προκαλούσε την κίνησή τους και δεν θα είχαμε φτάσει σε κατάσταση ισορροπίας. Άρα

$$E(R) = 0 .$$

Συνεπώς,  $E(2.3a) = 0$ .

Η εφαρμογή του νόμου Gauss δίνει ότι το φορτίο που περικλείεται είναι 0. Επομένως, το φορτίο της εσωτερικής επιφάνειας είναι αντίθετο από το φορτίο της συμπαγούς σφαίρας:  $q_{in} = -q_1$ .

αν  $c \leq R$ :

Η επιφάνεια περικλείει το φορτίο της συμπαγούς σφαίρας,  $q_1$  και το φορτίο του κελύφους  $q_2 = -q_1$ . Είδαμε ήδη, όμως, ότι το φορτίο  $q_2$  είναι ίσο με αυτό που είναι συγκεντρωμένο στην εσωτερική επιφάνεια. Άρα, στην εξωτερική επιφάνεια το φορτίο είναι 0.

Εφαρμόζοντας το νόμο Gauss έχουμε

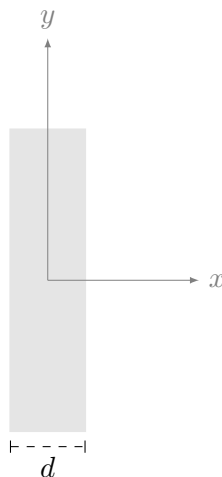
$$E(R)4\pi R^2 = \frac{q_1 + q_2}{\epsilon_0} \Rightarrow E(R) = 0 .$$

Συνεπώς,  $E(3.5a) = 0$ .

21. Μια πλάκα από μονωτικό υλικό έχει ανομοιόμορφη θετική χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho(x, y, z) = Cx^2$ , όπου το  $x$  μετρείται από το κέντρο της πλάκας και το  $C$  είναι μια σταθερά. Η πλάκα έχει άπειρες διαστάσεις στις διευθύνσεις των αξόνων  $y$  και  $z$ . Βρείτε σχέσεις για το ηλεκτρικό πεδίο

(α') στις εξωτερικές περιοχές ( $|x| > d/2$ ) και

(β') στην εσωτερική περιοχή της πλάκας ( $|x| < d/2$ ).



**ΛΥΣΗ**

Η κατανομή φορτίου είναι αναλλοίωτη στη μετακίνηση παράλληλα στους άξονες των  $y$  και  $z$  ή στην περιστροφή γύρω από τον άξονα των  $x$ . Την ίδια συμμετρία θα έχει και το ηλεκτρικό πεδίο: πρέπει να είναι παράλληλο στον άξονα των  $x$  και θα έχει μέτρο που εξαρτάται μόνο από το  $x$ . Άρα  $\vec{E}(x, y, z) = E(x)\hat{i}$ . Επιπλέον, πρέπει να ισχύει  $E(-x) = -E(x)$  ώστε να είναι αναλλοίωτο το ηλεκτρικό πεδίο σε κατοπτρισμό ως προς το επίπεδο  $y - z$ , όπως είναι και η κατανομή φορτίου.

Επιλέγω μια κυβική επιφάνεια με κέντρο το σημείο  $(0, 0, 0)$  και ακμή  $h$ . Τα σημεία  $(x, y, z)$  που την αποτελούν έχουν  $x, y, z$  στο  $[-h/2, h/2]$ .

Η ηλεκτρική ροή από την παράπλευρη επιφάνεια είναι 0 καθώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στα διανύσματα των παράπλευρων εδρών. Συνεισφορά στη ροή έχουν μόνο οι ροές από τις δύο έδρες που είναι παράλληλες στην πλάκα (άρα  $\vec{E}$  και  $d\vec{A}$  είναι παράλληλα), οι οποίες πρέπει να είναι ίσες λόγω συμμετρίας. Η ροή από τη μία έδρα  $S$  είναι

$$\Phi_1 = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E dA = E(h/2) \int_S dA = E(h/2)h^2.$$

Άρα  $\Phi_E = 2\Phi_1 = 2E(h/2)h^2$ .

Έστω  $h \leq d$ . Το φορτίο που περικλείει ο κύβος  $V$  είναι

$$\begin{aligned} q &= \int_V \rho d\tau = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-h/2}^{h/2} dx \rho(x, y, z) = h^2 \int_{-h/2}^{h/2} dx Cx^2 \\ &= \frac{2}{3}Ch^2 \left(\frac{h}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}Ch^5. \end{aligned}$$

Από το νόμο Gauss έχουμε

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E(h/2)h^2 = \frac{1}{12\epsilon_0}Ch^5 \Rightarrow E(h/2) = \frac{1}{24\epsilon_0}Ch^3 \Rightarrow \\ E(x) &= \frac{1}{3\epsilon_0}Cx^3. \end{aligned}$$

Έστω  $h > d$ . Το φορτίο που περικλείει ο κύβος  $V$  είναι

$$\begin{aligned} q &= \int_V \rho d\tau = \int_{-h/2}^{h/2} dz \int_{-h/2}^{h/2} dy \int_{-d/2}^{d/2} dx \rho(x, y, z) = h^2 \int_{-d/2}^{d/2} dx Cx^2 \\ &= \frac{2}{3}Ch^2 \left(\frac{d}{2}\right)^3 = \frac{1}{12}Ch^2d^3. \end{aligned}$$

Από το νόμο Gauss έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi_E &= \frac{q}{\epsilon_0} \Rightarrow 2E(h/2)h^2 = \frac{1}{12\epsilon_0}Ch^2d^3 \Rightarrow E(h/2) = \frac{1}{24\epsilon_0}Cd^3 \Rightarrow \\ E(x) &= \frac{1}{24\epsilon_0}Cd^3.\end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\vec{E}(x) = \hat{i} \frac{C}{3\epsilon_0} \begin{cases} (d/2)^3, & x > d/2, \\ x^3, & 0 \leq x \leq d/2, \\ x^3, & -d/2 \leq x \leq 0, \\ -(d/2)^3, & x \leq -d/2. \end{cases}.$$

22. Κυλινδρική κατανομή φορτίου άπειρου μήκους με ακτίνα  $R$  έχει ομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου  $\rho$ . Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο σε απόσταση  $r$  από τον άξονα, όπου  $r < R$ , είναι  $E = \rho r / (2\epsilon_0)$ , με φορά μακριά από τον άξονα.

#### ΛΥΣΗ

Λόγω της συμμετρίας και της ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') συνιστώσα κάθετη στον άξονα του κυλίνδρου, (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από τον άξονα. Επομένως, αν  $r$  είναι η κάθετη απόσταση από την ευθύγραμμη κατανομή, και  $\hat{r}$  το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, ισχύει  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Ορίζω μια κυλινδρική επιφάνεια Gauss με άξονα τον  $z$ , ακτίνα  $r < R$  και ύψος  $h$ . Η ηλεκτρική ροή από τις βάσεις της είναι 0 καθώς τα διανύσματα επιφάνειας σε αυτές είναι κάθετα στο  $\vec{E}$ . Από την παράπλευρη επιφάνεια  $S$ , στην οποία τα διανύσματα επιφάνειας  $d\vec{A}$  είναι ακτινικά προς τα έξω, δηλαδή παράλληλα στο  $\vec{E}$ , έχουμε ηλεκτρική ροή

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E dA = E(r) \int_S dA = E(r)2\pi rh.$$

Για να εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss, χρειαζόμαστε το φορτίο που περικλείει η κυλινδρική επιφάνεια. Έχει όγκο  $V = \pi r^2 h$  και συνεπώς φορτίο  $Q = \rho V = \rho \pi r^2 h$ . Επομένως,

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r)2\pi rh = \frac{\rho \pi r^2 h}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{2\epsilon_0}, \quad r < R.$$

23. Σφαίρα ακτίνας  $R$  έχει ανομοιόμορφη χωρική πυκνότητα φορτίου  $\rho(r) = A(r/R)$ , όπου  $A$  είναι μια σταθερά. Εάν το συνολικό φορτίο μέσα στη σφαίρα

είναι  $Q > 0$ , δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο μέσα στη σφαίρα είναι

$$\vec{E}(r) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{r^2}{R^4} \hat{r},$$

δηλαδή ακτινικά προς τα έξω.

### ΛΥΣΗ

Η κατανομή του φορτίου είναι αμετάβλητη σε περιστροφή γύρω από οποιαδήποτε άξονα της σφαίρας. Την ίδια ιδιότητα πρέπει να έχει και το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει. Έτσι το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') ακτινική συνιστώσα και (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο της σφαίρας. Επομένως, αν  $r$  είναι η απόσταση από το κέντρο της σφαίρας και  $\hat{r}$  το αντίστοιχο μοναδιαίο διάνυσμα, ισχύει  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Επιλέγω σφαιρική επιφάνεια Gauss,  $S$ , με κέντρο το κέντρο της σφαιρικής κατανομής φορτίου και ακτίνα  $a < R$ . Η ηλεκτρική ροή είναι

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \oint_S E dA = E(a) \oint_S dA = E(a)4\pi a^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται σε αυτή (σε όγκο  $V'$ ) είναι

$$\begin{aligned} q &= \int_{V'} \rho(r) d\tau' = \int_0^a r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi A \frac{r}{R} = 4\pi \frac{A}{R} \int_0^a r^3 dr \\ &= \frac{A\pi a^4}{R}. \end{aligned}$$

Από το νόμο του Gauss,  $\Phi_E = q/\epsilon_0$ , έχουμε

$$E(a)4\pi a^2 = \frac{A\pi a^4}{R\epsilon_0} \Rightarrow E(a) = A\pi k_e \frac{a^2}{R}.$$

Το συνολικό φορτίο  $Q$  της σφαίρας είναι

$$\begin{aligned} Q &= \int_V \rho(r) d\tau = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi A \frac{r}{R} = 4\pi \frac{A}{R} \int_0^R r^3 dr \\ &= A\pi R^3. \end{aligned}$$

Επομένως, το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε απόσταση  $a$  είναι

$$E(a) = A\pi k_e \frac{a^2}{R} = k_e \frac{Qa^2}{R^4},$$

με κατεύθυνση το  $\hat{r}$ .

24. Λεπτός σφαιρικός φλοιός ακτίνας 14 cm έχει ομοιόμορφα κατανεμημένο καθαρό φορτίο 32  $\mu\text{C}$  στην επιφάνειά του. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο στις εξής αποστάσεις από το κέντρο της κατανομής του φορτίου: (α')  $r = 10$  cm, (β')  $r = 20$  cm.

**ΛΥΣΗ**

Λόγω συμμετρίας και ομοιόμορφης φόρτισης, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Άρα  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορώ να εφαρμόσω το νόμο Gauss. Ορίζω μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ομόκεντρη του σφαιρικού φλοιού, με ακτίνα  $r$ . Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια  $S$  είναι

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \int_S dA = E(r)4\pi r^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$  είναι 0 όταν  $r < R$  και  $Q$  όταν  $r \geq R$ .  $R$  είναι η ακτίνα του φορτισμένου σφαιρικού φλοιού και  $Q$  το φορτίο του. Σύμφωνα με το νόμο Gauss

$$E(r)4\pi r^2 = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{Q}{\epsilon_0}, & r \geq R \end{cases} \Rightarrow E(r) = \begin{cases} 0, & r < R \\ \frac{k_e Q}{r^2}, & r \geq R \end{cases}.$$

Με αντικατάσταση των  $Q = 32 \times 10^{-6} \text{ C}$ ,  $R = 0.14 \text{ m}$  έχουμε (α')  $E(0.1 \text{ m}) = 0 \text{ N/C}$  (β')  $E(0.2 \text{ m}) \approx 7.2 \times 10^6 \text{ N/C}$ .

25. Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο δύο ομόκεντρων σφαιρικών επιφανειών (σφαιρικός πυκνωτής) με ακτίνες  $a$ ,  $b$  ( $b > a$ ) και φορτία  $+q$  και  $-q$  αντίστοιχα, σε όλες τις περιοχές ( $r < a$ ,  $a < r < b$ ,  $r > b$ ).

**ΛΥΣΗ**

Λόγω συμμετρίας και ομοιόμορφης φόρτισης των αγωγών, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Άρα  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Ορίζω μια σφαιρική επιφάνεια Gauss ομόκεντρη των φορτισμένων επιφανειών, με ακτίνα  $r$ . Η ροή ηλεκτρικού πεδίου από αυτή είναι

$$\Phi_E = E(r)4\pi r^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται είναι

$$Q = \begin{cases} 0, & r \geq b \\ q, & a \leq r < b \\ 0 & r < a \end{cases}.$$

Άρα

$$E(r) = \frac{\Phi_E}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi r^2} \frac{Q}{\epsilon_0} = \begin{cases} 0, & r \geq b \\ \frac{k_e q}{r^2}, & a \leq r < b \\ 0 & r < a \end{cases}.$$

26. Κύλινδρος άπειρου μήκους και ακτίνας  $R$  έχει χωρική πυκνότητα (πυκνότητα ανά μονάδα όγκου) ηλεκτρικού φορτίου που μεταβάλλεται με την ακτίνα σύμφωνα με τη σχέση

$$\rho(r) = \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right),$$

όπου  $\rho_0$ ,  $a$ ,  $b$  είναι θετικές σταθερές και  $r$  η απόσταση από τον άξονα του κυλίνδρου. Να προσδιοριστεί το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου σε ακτινικές αποστάσεις (α')  $r < R$  και (β')  $r > R$ .

### ΛΥΣΗ

Λόγω συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο κάθετη στην ευθεία συνιστώσα (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από τον άξονα της κατανομής.

Ορίζω κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα  $R_c$  και ύψος  $h$ . Η ροή από αυτήν είναι  $\Phi_E = E(R_c)2\pi R_c h$ .

(α') Αν  $R_c < R$ , το φορτίο που περικλείεται είναι

$$\begin{aligned} Q &= \int_V \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right) d\tau = \int_0^{R_c} r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right) \\ &= 2\pi h \rho_0 \left( a \frac{R_c^2}{2} - \frac{R_c^3}{3b} \right). \end{aligned}$$

Άρα

$$E(R_c) = \frac{\Phi_E}{2\pi R_c h} = \frac{1}{2\pi R_c h} \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \left( a \frac{R_c}{2} - \frac{R_c^2}{3b} \right).$$

(β') Αν  $R_c \geq R$  το φορτίο που περικλείεται είναι

$$\begin{aligned} Q &= \int_V \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right) d\tau = \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dz \rho_0 \left( a - \frac{r}{b} \right) \\ &= 2\pi h \rho_0 \left( a \frac{R^2}{2} - \frac{R^3}{3b} \right). \end{aligned}$$

Άρα

$$E(R_c) = \frac{\rho_0}{\epsilon_0} \frac{R}{R_c} \left( a \frac{R}{2} - \frac{R^2}{3b} \right).$$

27. Η χωρική πυκνότητα όγκου του ηλεκτρικού φορτίου δίνεται από τη σχέση  $\rho(r) = \rho_0 \exp(-ar^3)$ , όπου  $\rho_0$  και  $a$  θετικές σταθερές. Προσδιορίστε το διανυσματικό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  ως συνάρτηση της θέσης  $\vec{r}$  ως προς την αρχή των συντεταγμένων. Ποια είναι η συμπεριφορά του πεδίου για πολύ μικρές και πολύ μεγάλες τιμές του  $r$ ;

**ΛΥΣΗ**

Λόγω συμμετρίας, το ηλεκτρικό πεδίο έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα, (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα.

Από σφαιρική επιφάνεια Gauss, ομόκεντρη με την κατανομή, ακτίνας  $R$ , έχουμε ροή ηλεκτρικού πεδίου

$$\Phi_E = \oint_S E(R) dA = E(R) 4\pi R^2 .$$

Το φορτίο που περικλείεται είναι

$$\begin{aligned} Q &= \int_V \rho(r) d\tau = \int_0^R r^2 dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \rho_0 \exp(-ar^3) \\ &= \frac{4\pi}{3} \rho_0 \int_0^{R^3} \exp(-ax) dx = \frac{4\pi}{3} \rho_0 \left. \frac{\exp(-ax)}{-a} \right|_0^{R^3} \\ &= \frac{4\pi}{3a} \rho_0 (1 - \exp(-aR^3)) . \end{aligned}$$

Άρα

$$E(R) = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 a R^2} (1 - \exp(-aR^3)) .$$

Το διάνυσμα είναι

$$\vec{E}(R) = E(R) \hat{r} .$$

Όταν το  $R$  είναι πολύ μικρό (έτσι ώστε  $aR^3 \ll 1$ ) έχουμε  $\exp(-aR^3) \approx 1 - aR^3$  και επομένως

$$E(R) \approx \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 a R^2} a R^3 = \frac{\rho_0}{3\epsilon_0} R .$$

Όταν το  $R$  είναι πολύ μεγάλο έχουμε  $\exp(-aR^3) \approx 0$  και

$$E(R) \approx \frac{\rho_0}{3\epsilon_0 a R^2} .$$

**6.6.4 Ηλεκτρικό δυναμικό**

1. Σε μια περιοχή του χώρου το ηλεκτρικό δυναμικό είναι  $V = 5x - 3x^2y + 2yz^2$ . Βρείτε

- εκφράσεις για τις συνιστώσες  $E_x$ ,  $E_y$ ,  $E_z$  του ηλεκτρικού πεδίου,
- το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο με συντεταγμένες (σε μέτρα)  $(1, 0, -2)$ .

**ΛΥΣΗ**

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k} = -(5 - 6xy)\hat{i} - (-3x^2 + 2z^2)\hat{j} - 4yz\hat{k}.$$

Το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σημείο  $(x, y, z)$  είναι

$$E = \sqrt{(6xy - 5)^2 + (3x^2 - 2z^2)^2 + (-4yz)^2}.$$

Με αντικατάσταση έχουμε  $E = \sqrt{50}$  N/C.

2. Βρείτε ποιο από τα παρακάτω διανυσματικά πεδία δεν μπορεί να είναι ηλεκτροστατικό πεδίο:

- $\vec{E} = k(xy\hat{i} + 2yz\hat{j} + 3xz\hat{k})$ ,
- $\vec{E} = k(y^3\hat{i} + (2xy + z^2)\hat{j} + 2yz\hat{k})$ .

Το  $k$  είναι σταθερά.

**ΛΥΣΗ**

Το ηλεκτρικό πεδίο αποτελεί την κλίση μιας βαθμωτής συνάρτησης, του δυναμικού (με αντίθετο πρόσημο). Γνωρίζουμε ότι για μια βαθμωτή συνάρτηση  $f$  ισχύει  $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$ . Επομένως, το ηλεκτροστατικό πεδίο πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση  $\nabla \times \vec{E} = \vec{0}$ .

Για το πρώτο πεδίο έχουμε

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ kxy & 2kyz & 3kxz \end{vmatrix} = \hat{i}(0 - 2ky) + \hat{j}(0 - 3kz) + \hat{k}(0 - kx) \neq \vec{0}.$$

Για το δεύτερο πεδίο έχουμε

$$\nabla \times \vec{E} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ky^2 & k(2xy + z^2) & 2kyz \end{vmatrix} = \hat{i}(2kz - 2kz) + \hat{j}(0 - 0) + \hat{k}(2ky - 2ky) = \vec{0}.$$

3. Το δυναμικό στο επίπεδο  $(x, y)$  είναι  $V(x, y) = ar^2$  όπου  $r^2 = x^2 + y^2$  και  $a$  θετική σταθερά. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  και προσδιορίστε τις ισοδυναμικές καμπύλες.



**ΛΥΣΗ**

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι:

$$V(x, y) = a(x^2 + y^2) \Rightarrow \vec{E} = -\nabla V = -2a(x\hat{i} + y\hat{j}) = -2a\vec{r} = -2ar\hat{r}.$$

Οι ισοδυναμικές καμπύλες είναι:

$$V(x, y) = c \Rightarrow x^2 + y^2 = \frac{c}{a}.$$

Είναι κύκλοι με ακτίνα  $\sqrt{c/a}$ .

4. Το ηλεκτρικό πεδίο που δημιουργείται από σημειακό φορτίο  $q$  σε απόσταση  $r$  από το φορτίο έχει μέτρο  $E = 200 \text{ N/C}$  και το δυναμικό είναι  $V = 400 \text{ V}$ . Βρείτε τις τιμές των  $q$  και  $r$ .

**ΛΥΣΗ**

Το ηλεκτρικό πεδίο από σημειακό φορτίο  $q$  σε απόσταση  $r$  από αυτό είναι

$$\vec{E}(r) = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \Rightarrow E(r) = k_e \frac{|q|}{r^2}.$$

Το ηλεκτρικό δυναμικό από σημειακό φορτίο  $q$  σε απόσταση  $r$  από αυτό είναι

$$V(r) = k_e \frac{q}{r}.$$

Θεωρήσαμε ότι  $V(\infty) = 0$ .

Καθώς  $V(r) > 0$  έχουμε  $q > 0$ . Τότε  $r = V(r)/E(r)$  και  $q = rV(r)/k_e$ . Με αντικατάσταση,  $r = 2 \text{ m}$ ,  $q \approx 88.9 \text{ nC}$ .

5. Ομογενές ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο  $325 \text{ V/m}$  είναι προσανατολισμένο προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα  $y$ . Οι συντεταγμένες του σημείου  $A$  είναι  $(-0.2, -0.3) \text{ m}$  και του σημείου  $B$   $(0.4, 0.5) \text{ m}$ . Υπολογίστε τη διαφορά δυναμικού  $V_B - V_A$  χρησιμοποιώντας τη διαδρομή που ορίζει η διατετμημένη γραμμή στο Σχήμα 6.30.

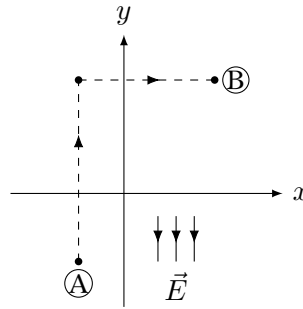
**ΛΥΣΗ**

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι  $\vec{E} = -E\hat{j}$ .

Σύμφωνα με τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού,

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Στο τμήμα της διαδρομής που είναι παράλληλο στον άξονα  $x$  το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ . Άρα εκεί  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = 0$ .



Σχήμα 6.30: Άσκηση 5

Στο κατακόρυφο τμήμα το  $d\vec{s}$  είναι  $d\vec{s} = dy\hat{j}$ . Άρα εκεί  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = -E dy$ .

Συνολικά

$$V_B - V_A = - \int_{y_A}^{y_B} (-E) dy = E(y_B - y_A).$$

Με αντικατάσταση,  $V_B - V_A = 260 \text{ V}$ .

6. Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ δυο φορτισμένων παράλληλων πλακών που απέχουν  $1.8 \text{ cm}$  έχει σταθερή τιμή ίση με  $2.4 \times 10^4 \text{ N/C}$ . Βρείτε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών. Πόση κινητική ενέργεια θα κερδίσει ένα ηλεκτρόνιο αν επιταχυνθεί από την αρνητική μέχρι τη θετική πλάκα;

Δίνεται το φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

### ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό,

$$V_- - V_+ = \int_{C_- \rightarrow +} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Λόγω συμμετρίας και ομοιόμορφης κατανομής φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο είναι κάθετο στις (άπειρες) πλάκες. Δεν μπορεί να έχει συνιστώσα παράλληλη σε αυτές καθώς μια περιστροφή τους γύρω από κάθετο άξονα σε αυτές αφήνει το σύστημα αναλλοίωτο αλλά στρέφει την παράλληλη συνιστώσα. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να παραμένει το ίδιο, οπότε η παράλληλη συνιστώσα πρέπει να είναι 0.

Επιλέγουμε για την καμπύλη  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που συνδέει κάθετα τις δύο πλάκες, με κατεύθυνση από την αρνητική στη θετική, δηλαδή αντιπαράλληλο στο  $\vec{E}$ . Το εσωτερικό γινόμενο  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  γίνεται γινόμενο μέτρων (με αρνητικό πρόσημο). Έστω ότι  $\ell$  είναι η απόσταση των πλακών. Το πεδίο είναι σταθερό, άρα βγαίνει εκτός ολοκλήρωσης:

$$V_- - V_+ = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = - \int_0^\ell E ds = -E \int_0^\ell ds = -E\ell.$$

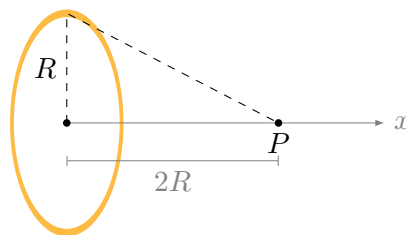
Παρατηρήστε ότι η θετικά φορτισμένη πλάκα έχει υψηλότερο δυναμικό.

Η συνολική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι  $K+U$ . Διατηρείται σε συντηρητικό πεδίο, άρα στη θετική και στην αρνητική πλάκα:

$$K_- + U_- = K_+ + U_+ \Rightarrow K_+ - K_- = U_- - U_+ = q(V_- - V_+) = (-e)(-El) .$$

Με αντικατάσταση,  $V_- - V_+ = -432 \text{ V}$  και  $\Delta K \approx 6.9 \times 10^{-17} \text{ J} = 432 \text{ eV}$ .

7. Δακτύλιος με ακτίνα  $R$  έχει συνολικό φορτίο  $Q$  ομοιόμορφα κατανεμημένο κατά μήκος της περιφέρειάς του. Ποια είναι η διαφορά δυναμικού μεταξύ του κέντρου του δακτυλίου και σημείου επί του άξονα σε απόσταση  $2R$  από το κέντρο του δακτυλίου;



Σχήμα 6.31: Άσκηση 7

## ΛΥΣΗ

### Α' τρόπος

Το ηλεκτρικό πεδίο δακτυλίου, που είναι ομοιόμορφα φορτισμένος με φορτίο  $Q$ , σε απόσταση  $x$  πάνω στον άξονα του δακτυλίου, ξέρουμε ότι είναι:

$$\vec{E} = \hat{k}_e \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} Q .$$

Η ζητούμενη διαφορά δυναμικού είναι

$$V(0, 0, 0) - V(2R, 0, 0) = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

Το σημείο  $A$  έχει συντεταγμένες  $(0, 0, 0)$  και το  $B$   $(2R, 0, 0)$ .

Επιλέγουμε τη διαδρομή  $C$  να είναι ευθύγραμμο τμήμα πάνω στον άξονα, παράλληλο δηλαδή στο  $\vec{E}$ , από το  $x = 0$  έως το  $x = 2R$ . Η επιλογή αυτή είναι ουσιαστικά η μόνη δυνατή καθώς, στο συγκεκριμένο πρόβλημα, μόνο πάνω στον άξονα γνωρίζουμε το ηλεκτρικό πεδίο, άρα μόνο στη συγκεκριμένη

καμπύλη μπορούμε να υπολογίσουμε το  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$ . Με αυτή την επιλογή  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ ,  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E(x) dx$  και

$$\begin{aligned} V(0, 0, 0) - V(2R, 0, 0) &= \int_0^{2R} E(x) dx = \int_0^{2R} k_e Q \frac{x}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx \\ &\stackrel{w=x^2+R^2}{=} k_e Q \frac{1}{2} \int_{R^2}^{5R^2} \frac{1}{w^{3/2}} dw = \frac{k_e Q}{R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right). \end{aligned}$$

### Β' τρόπος

Ένα στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου έχει φορτίο  $dq$ . Ένα σημείο με απόσταση  $x$  πάνω στον άξονα, απέχει  $\sqrt{R^2 + x^2}$  από κάθε στοιχειώδες τμήμα του δακτυλίου. Σε αυτό το σημείο, το δυναμικό του πεδίου που παράγει το στοιχειώδες τμήμα είναι

$$d\tau(x, 0, 0) = k_e \frac{dq}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Το συνολικό δυναμικό είναι το άθροισμα των δυναμικών από όλα τα στοιχειώδη τμήματα:

$$V(x, 0, 0) = \int d\tau = \int k_e \frac{dq}{\sqrt{R^2 + x^2}} = \frac{k_e}{\sqrt{R^2 + x^2}} \int dq = \frac{k_e Q}{\sqrt{R^2 + x^2}}.$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων με  $x = 0$  και  $x = 2R$  είναι

$$V(0, 0, 0) - V(2R, 0, 0) = \frac{k_e Q}{\sqrt{R^2}} - \frac{k_e Q}{\sqrt{5R^2}} = \frac{k_e Q}{R} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{5}} \right).$$

8. Το ηλεκτρικό πεδίο κατά μήκος του άξονα  $x$  ομοιόμορφα φορτισμένου δακτυλίου ακτίνας  $a$  με συνολικό φορτίο  $Q$  είναι

$$E(x, 0, 0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{xQ}{(x^2 + a^2)^{3/2}}.$$

Ποιο είναι το δυναμικό  $V(x, 0, 0)$ ;

### ΛΥΣΗ

Από τον ορισμό:

$$V(x_0, 0, 0) - V_\infty = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

όπου  $C$  μια οποιαδήποτε διαδρομή από το σημείο  $(x_0, 0, 0)$  στο  $\infty$ . Ορίζω ως  $C$  τον άξονα  $x$  και  $V_\infty = 0$ . Τότε

$$V(x_0, 0, 0) = \int_{x_0}^{\infty} \vec{E} \cdot \hat{i} dx = \int_{x_0}^{\infty} E_x dx = \int_{x_0}^{\infty} k_e Q \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx.$$

Όμως,

$$\int_{x_0}^{\infty} \frac{x}{(x^2 + a^2)^{3/2}} dx \stackrel{w=x^2+a^2}{=} \int_{x_0^2+a^2}^{\infty} \frac{1}{2w^{3/2}} dw = -w^{-1/2} \Big|_{x_0^2+a^2}^{\infty} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}.$$

Επομένως

$$V(x_0, 0, 0) = \frac{k_e Q}{\sqrt{x_0^2 + a^2}}.$$

9. Σφαιρικός αγωγός με ακτίνα  $R = 10 \text{ cm}$  έχει φορτίο  $Q = 10 \mu\text{C}$ . Υπολογίστε το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό στις εξής αποστάσεις από το κέντρο του αγωγού (α')  $5 \text{ cm}$ , (β')  $20 \text{ cm}$ , (γ')  $10 \text{ cm}$ .

### ΛΥΣΗ

Αγωγός φορτισμένος ή σε ηλεκτρικό πεδίο, σε ηλεκτροστατική ισορροπία, έχει το ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στην επιφάνειά του (αλλιώς, τα φορτία της επιφάνειας θα κινούνταν στην επιφάνεια και δεν θα είχαμε ισορροπία). Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας είναι 0 αφού για διαδρομή επί της επιφάνειας το  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  είναι 0. Στο εσωτερικό, το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0 (αλλιώς, τα ελεύθερα φορτία θα κινούνταν). Συνεπώς, η διαφορά δυναμικού μεταξύ οποιωνδήποτε σημείων του αγωγού είναι 0. Όλος ο αγωγός είναι ισοδυναμικός χώρος.

Ισοδύναμα, αν υπήρχε διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του αγωγού θα είχαμε κίνηση των ελεύθερων φορτίων, δηλαδή ο αγωγός δεν θα ήταν σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Λόγω συμμετρίας και ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού ( $r \geq R$ ) αναμένουμε να έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα.

Ορίζω σφαιρική επιφάνεια Gauss ομόκεντρη του αγωγού με ακτίνα  $r \geq R$ . Η ηλεκτρική ροή από αυτήν είναι

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \oint_S dA = E(r) 4\pi r^2.$$

Η σφαιρική επιφάνεια περιλαμβάνει όλο το φορτίο  $Q$  του αγωγού· από το νόμο Gauss προκύπτει το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού:

$$\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r}.$$

Το δυναμικό στο εξωτερικό του αγωγού,  $r \geq R$ , είναι, από τον ορισμό:

$$V(r) - V_{\infty} = \int_{Cr \rightarrow \infty} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Επιλέγουμε η καμπύλη  $C$  να είναι η ευθεία που πηγαίνει ακτινικά από το σημείο σε απόσταση  $r$  προς το  $\infty$ . Σε αυτή  $d\vec{s} = ds\hat{r}$ . Σε απόσταση  $s$  από την αρχή, πάνω στην καμπύλη, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο  $E(s)$ . Επιπλέον,  $V_\infty = 0$ . Επομένως, για  $r \geq R$  έχουμε

$$V(r) = \int_r^\infty E(s) ds = \int_r^\infty \frac{k_e Q}{s^2} ds = \frac{k_e Q}{r}.$$

Πάνω ακριβώς στην επιφάνεια του αγωγού το δυναμικό είναι  $V(R) = k_e Q/R$ . Όπως δείξαμε, ίδιο είναι και στο εσωτερικό του αγωγού.

Με αντικατάσταση, προκύπτει ότι σε απόσταση  $r = 0.05$  m, δηλαδή στο εσωτερικό του αγωγού,  $\vec{E} = 0$  και  $V = 9 \times 10^5$  V. Σε απόσταση  $r = 0.2$  m, δηλαδή στο εξωτερικό του αγωγού, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο  $E = 2.25 \times 10^6$  N/C ενώ το δυναμικό είναι  $V = 4.5 \times 10^5$  V. Σε απόσταση  $r = 0.1$  m, δηλαδή ακριβώς πάνω στην επιφάνεια του αγωγού,  $E = 9 \times 10^6$  N/C και  $V = 9 \times 10^5$  V.

Παρατηρήστε ότι έχουμε ασυνέχεια στο ηλεκτρικό πεδίο όταν διασχίζουμε κάθετα την επιφάνεια του αγωγού.

10. Μια μεταλλική σφαίρα ακτίνας 15 cm έχει συνολικό φορτίο 30 nC.

- Πόσο είναι το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια της σφαίρας;
- Αν  $V = 0$  στο άπειρο, ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στην επιφάνεια της σφαίρας;
- Σε πόση απόσταση από την επιφάνεια της σφαίρας το ηλεκτρικό δυναμικό έχει μειωθεί κατά 500 V;

### ΛΥΣΗ

Αγωγός φορτισμένος ή σε ηλεκτρικό πεδίο, σε ηλεκτροστατική ισορροπία, έχει το ηλεκτρικό πεδίο κάθετο στην επιφάνειά του (αλλιώς, τα φορτία της επιφάνειας θα κινούνταν κατά μήκος της επιφάνειας). Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων της επιφάνειας είναι 0 αφού για διαδρομή κατά μήκος της επιφάνειας το  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  είναι 0. Στο εσωτερικό το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0 (αλλιώς, τα ελεύθερα φορτία θα κινούνταν). Η διαφορά δυναμικού μεταξύ οποιωνδήποτε σημείων του αγωγού είναι 0. Όλος ο αγωγός είναι ισοδυναμικός χώρος.

Ισοδύναμα, αν υπήρχε διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του αγωγού θα είχαμε κίνηση των ελεύθερων φορτίων, δηλαδή ο αγωγός δεν θα ήταν σε ηλεκτροστατική ισορροπία.

Λόγω συμμετρίας και ομοιόμορφης κατανομής του φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού ( $r \geq R$ ) αναμένουμε να έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα και (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα.

Ορίζω σφαιρική επιφάνεια Gauss ομόκεντρη του αγωγού με ακτίνα  $r \geq R$ . Η ηλεκτρική ροή από αυτήν είναι

$$\Phi_E = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r) \oint_S dA = E(r) 4\pi r^2 .$$

Η σφαιρική επιφάνεια περιλαμβάνει όλο το φορτίο  $Q$  του αγωγού· από το νόμο Gauss προκύπτει το ηλεκτρικό πεδίο στο εξωτερικό του αγωγού:

$$\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r} .$$

Ακριβώς πάνω στην επιφάνεια της σφαίρας,  $\vec{E} = k_e Q/R^2 \hat{r}$ . Με αντικατάσταση,  $E = 12\,000 \text{ V/m}$ .

Παρατηρήστε ότι έχουμε ασυνέχεια στο ηλεκτρικό πεδίο όταν διασχίζουμε κάθετα την επιφάνεια του αγωγού.

Το δυναμικό στο εξωτερικό του αγωγού,  $r \geq R$ , είναι, από τον ορισμό:

$$V(r) - V_\infty = \int_{C_{r \rightarrow \infty}} \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

Επιλέγουμε η καμπύλη  $C$  να είναι η ευθεία που πηγαίνει ακτινικά από το σημείο σε απόσταση  $r$  προς το  $\infty$ . Σε αυτή  $d\vec{s} = ds \hat{r}$ . Σε απόσταση  $s$  από την αρχή, πάνω στην καμπύλη, το ηλεκτρικό πεδίο έχει μέτρο  $E(s)$ . Επιπλέον,  $V_\infty = 0$ . Επομένως, για  $r \geq R$  έχουμε

$$V(r) = \int_r^\infty E(s) ds = \int_r^\infty \frac{k_e Q}{s^2} ds = \frac{k_e Q}{r} .$$

Πάνω ακριβώς στην επιφάνεια του αγωγού το δυναμικό είναι  $V(R) = k_e Q/R$ . Όπως δείξαμε, ίδιο είναι και στο εσωτερικό του αγωγού. Με αντικατάσταση,  $V(R) = 1800 \text{ V}$ .

Μπορούμε να γράψουμε τον τύπο του δυναμικού ως εξής

$$V(r) = \frac{k_e Q}{r} = V(R) \frac{R}{r} .$$

Για να έχουμε  $V(r) = V(R) - 500 = 1300 \text{ V}$  πρέπει

$$1300 = 1800 \frac{R}{r} \Rightarrow r = 18R/13 \approx 20.8 \text{ cm} ,$$

ή αλλιώς, σε απόσταση  $r' = r - R \approx 5.8 \text{ cm}$  από την επιφάνεια της σφαίρας.

11. Συμπαγής μονωτική σφαίρα ακτίνας  $R$  έχει συνολικό φορτίο  $Q$  ομοιόμορφα κατανεμημένο στον όγκο της. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο και το δυναμικό στο εσωτερικό και στο εξωτερικό της σφαίρας.

**ΛΥΣΗ**

Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $r, \phi, \theta$ , το ηλεκτρικό πεδίο είναι γενικά

$$\vec{E}(r, \phi, \theta) = E_r(r, \phi, \theta)\hat{r} + E_\phi(r, \phi, \theta)\hat{\phi} + E_\theta(r, \phi, \theta)\hat{\theta}.$$

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας που έχει η κατανομή φορτίου, το ηλεκτρικό πεδίο έχει

- μόνο ακτινική συνιστώσα.

Σε ένα δεδομένο σημείο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα εφαπτόμενη στη σφαιρική επιφάνεια καθώς η περιστροφή του συστήματος γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο και το δεδομένο σημείο, αφήνει αναλλοίωτη την κατανομή φορτίου αλλά θα στρέψει την εφαπτόμενη συνιστώσα. Το ηλεκτρικό πεδίο πρέπει να είναι το ίδιο και επομένως η συνιστώσα αυτή πρέπει να είναι 0.

- μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο.

Δεν εξαρτάται από τις άλλες σφαιρικές συντεταγμένες (τις δύο γωνίες). Οποιαδήποτε στροφή του συστήματος γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από το κέντρο, αλλάζει τις γωνίες αλλά πρέπει να αφήνει το ηλεκτρικό πεδίο ίδιο.

Καταλήγουμε ότι  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε ως επιφάνεια Gauss,  $S$ , μια κλειστή επιφάνεια που περνά από σημεία που το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο. Θα μας διευκολύνει αυτό να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή. Αυτά τα σημεία είναι όσα απέχουν συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο, έστω  $r$ .

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από ένα στοιχειώδες τμήμα τής επιφάνειας Gauss με διάνυσμα επιφάνειας  $d\vec{A} = dA\hat{r}$  είναι  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)dA$ . Επομένως,

$$\Phi_E = \oint_S E(r) dA = E(r) \oint_S dA = E(r)4\pi r^2.$$

Το φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια  $S$  είναι  $Q$  όταν  $r \geq R$ . Όταν  $r < R$  το φορτίο  $q$  που περικλείει η επιφάνεια Gauss είναι ανάλογο του όγκου που περικλείει με συντελεστή αναλογίας τη χωρική πυκνότητα  $\rho$ :

$$q = \rho \frac{4}{3}\pi r^3.$$

Για το  $\rho$  έχουμε

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}.$$

Συνεπώς

$$q = Q \frac{r^3}{R^3}.$$



Από το νόμο του Gauss έχουμε

$$E(r)4\pi r^2 = \frac{q}{\epsilon_0} = \begin{cases} \frac{Qr^3}{\epsilon_0 R^3}, & r \leq R \\ \frac{Q}{\epsilon_0}, & r > R \end{cases} \Rightarrow E(r) = \begin{cases} \frac{k_e Q r}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{k_e Q}{r^2}, & r > R \end{cases}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι συνεχές στο  $r = R$ .

Για το δυναμικό  $V(r, \phi, \theta)$  προκύπτει από τη συμμετρία της κατανομής φορτίου ότι δεν εξαρτάται από τις γωνίες  $\phi, \theta$ : Η περιστροφή γύρω από οποιοδήποτε άξονα της σφαιρικής κατανομής (που αλλάζει τις γωνίες) πρέπει να το αφήνει αναλλοίωτο. Επομένως το  $V$  εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο.

Το δυναμικό σε απόσταση  $r$  προκύπτει από τον ορισμό:

$$V(r) - V_\infty = \int_{C_{r \rightarrow \infty}} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

όπου  $C$  μια οποιαδήποτε διαδρομή από το σημείο σε απόσταση  $r$  προς το  $\infty$ . Ορίζω  $C$  την ευθεία που φεύγει ακτινικά από το σημείο σε απόσταση  $r$  και πέρα. Το στοιχειώδες διάνυσμα σε αυτή είναι  $d\vec{s} = ds\hat{r}$ . Επιπλέον,  $V_\infty = 0$ .

Δείξαμε ακόμα ότι  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$  με

$$E(r) = \begin{cases} \frac{k_e Q r}{R^3}, & r \leq R \\ \frac{k_e Q}{r^2}, & r > R \end{cases}.$$

Επομένως,  $\vec{E} \cdot d\vec{s} = E(s) ds$ .

Έστω  $r \leq R$ . Τότε

$$\begin{aligned} V(r) &= \int_r^\infty E(s) ds = \int_r^R E(s) ds + \int_R^\infty E(s) ds \\ &= \frac{k_e Q}{R^3} \int_r^R s ds + k_e Q \int_R^\infty \frac{1}{s^2} ds = \frac{k_e Q}{R^3} \frac{R^2 - r^2}{2} + \frac{k_e Q}{R} \\ &= \frac{k_e Q}{2R} \left( 3 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Έστω  $r > R$ . Τότε

$$V(r) = \int_r^\infty E(s) ds = k_e Q \int_r^\infty \frac{1}{s^2} ds = \frac{k_e Q}{r}.$$

12. Δυο φορτισμένοι σφαιρικοί αγωγοί σε μεγάλη απόσταση μεταξύ τους, συνδέονται με ένα αγωγμό σύρμα. Ολικό φορτίο  $Q = 20 \mu\text{C}$  τοποθετείται στο συνδυασμό των δύο σφαιρών. Αν η μια σφαίρα έχει ακτίνα  $R_1 = 4 \text{ cm}$  και η άλλη  $R_2 = 6 \text{ cm}$

- ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο κοντά στην επιφάνεια κάθε σφαίρας;
- ποιο είναι το δυναμικό κάθε σφαίρας;

### ΛΥΣΗ

«Μεγάλη» απόσταση σημαίνει ότι το φορτίο στη μία σφαίρα δεν επηρεάζει την κατανομή φορτίου στην άλλη. Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι τα δυναμικά των σφαιρών είναι

$$V_1 = \frac{k_e Q_1}{R_1}, \quad V_2 = \frac{k_e Q_2}{R_2}.$$

Τα δυναμικά πρέπει να είναι ίσα, σε ηλεκτροστατική ισορροπία (αλλιώς θα είχαμε κίνηση φορτίου από τον ένα αγωγό στον άλλο). Επιπλέον,  $Q_1 + Q_2 = Q$ . Άρα

$$Q_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} Q, \quad Q_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} Q.$$

Με αντικατάσταση,  $Q_1 = 8 \mu\text{C}$ ,  $Q_2 = 12 \mu\text{C}$ . Τα δυναμικά είναι  $V_1 = V_2 = 1.8 \times 10^6 \text{ V}$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο στην επιφάνεια είναι

$$E_1 = k_e \frac{Q_1}{R_1^2}, \quad E_2 = k_e \frac{Q_2}{R_2^2}.$$

Με αντικατάσταση,  $E_1 = 4.5 \times 10^7 \text{ N/C}$ ,  $E_2 = 3 \times 10^7 \text{ N/C}$ .

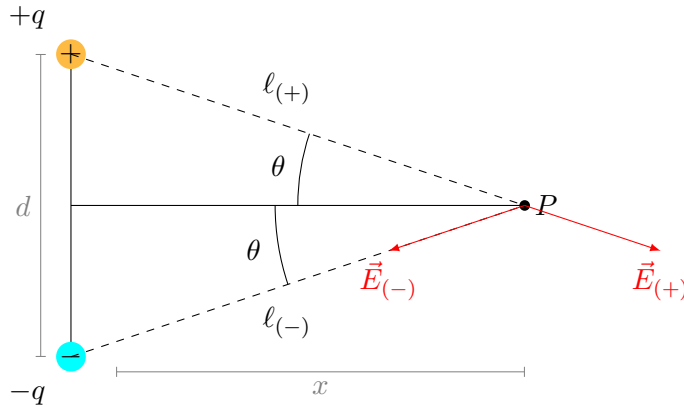
13. Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο και δυναμικό στο σημείο  $P$  στη μεσοκάθετο του ηλεκτρικού διπόλου του Σχήματος 6.32; Βρείτε προσεγγίσεις όταν  $x \gg d$ . Αν το δίπολο είναι μόριο νερού με διπολική ροπή  $p = 6.2 \times 10^{-30} \text{ C m}$  και ένα ιόν  $\text{Na}$  με φορτίο  $1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  σε διάλυμα αλατόνευρου βρίσκεται σε απόσταση  $10 \text{ nm}$  στο σημείο  $P$ , ποια δύναμη ασκεί το μόριο νερού στο ιόν;

### ΛΥΣΗ

Το ηλεκτρικό πεδίο οπουδήποτε είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από τα δύο φορτία. Ορίζω τον άξονα  $y$  να περνά από τα δύο σημεία, με φορά από το αρνητικό προς το θετικό.

Στο σημείο  $P$  σε απόσταση  $x$  πάνω στον άξονα των  $x$ , το θετικό φορτίο παράγει ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο

$$E_{(+)} = k_e \frac{+q}{\ell_{(+)}^2},$$



Σχήμα 6.32: Άσκηση 13

όπου  $\ell_{(+)}$  η απόσταση τού φορτίου από το  $P$ . Αυτή είναι  $\ell_{(+)} = \sqrt{(d/2)^2 + x^2}$ . Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι στην ευθεία που ενώνει το  $P$  με το φορτίο, με φορά πέρα από το  $P$ . Η συνιστώσα του  $\vec{E}_{(+)}$  στον άξονα  $x$  είναι  $E_{(+)} \cos \theta$  ενώ στον άξονα  $y$  είναι  $-E_{(+)} \sin \theta$ .

Στο σημείο  $P$  σε απόσταση  $x$  πάνω στον άξονα των  $x$ , το αρνητικό φορτίο παράγει ηλεκτρικό πεδίο με μέτρο

$$E_{(-)} = k_e \frac{|-q|}{\ell_{(-)}^2},$$

όπου  $\ell_{(-)}$  η απόσταση τού φορτίου από το  $P$ . Αυτή είναι  $\ell_{(-)} = \sqrt{(d/2)^2 + x^2}$ . Η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου είναι στην ευθεία που ενώνει το  $P$  με το φορτίο, με φορά προς το φορτίο. Η συνιστώσα του  $\vec{E}_{(-)}$  στον άξονα  $x$  είναι  $-E_{(-)} \cos \theta$  ενώ στον άξονα  $y$  είναι  $-E_{(-)} \sin \theta$ .

Συνολικά,

$$\begin{aligned} \vec{E} &= \vec{E}_{(+)} + \vec{E}_{(-)} \\ &= \left( k_e \frac{q}{\ell_{(+)}^2} \cos \theta - k_e \frac{q}{\ell_{(-)}^2} \cos \theta \right) \hat{i} + \left( -k_e \frac{q}{\ell_{(+)}^2} \sin \theta - k_e \frac{q}{\ell_{(-)}^2} \sin \theta \right) \hat{j} \\ &= -2k_e \frac{q}{(d/2)^2 + x^2} \sin \theta \hat{j}. \end{aligned}$$

Αλλά

$$\sin \theta = \frac{d/2}{\sqrt{(d/2)^2 + x^2}}.$$

Επομένως,

$$\vec{E}(x, 0, 0) = -\frac{k_e q d}{((d/2)^2 + x^2)^{3/2}} \hat{j}.$$

Η διπολική ροπή είναι  $\vec{p} = \sum q_i \vec{r}_i$ . Για τα δύο φορτία μας,

$$\vec{p} = (+q)\frac{d}{2}\hat{j} + (-q)\frac{-d}{2}\hat{j} = qd\hat{j}.$$

Άρα

$$\vec{E}(x, 0, 0) = -\frac{k_e}{((d/2)^2 + x^2)^{3/2}}\vec{p}.$$

Το δυναμικό στη μεσοκάθετο είναι, από τον ορισμό:

$$V(x, 0, 0) - V_\infty = \int_{C_{x \rightarrow \infty}} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

όπου  $C$  μια οποιαδήποτε διαδρομή από το σημείο  $(x, 0, 0)$  στο  $\infty$ . Ορίζω  $C$  τον άξονα  $x$  μετά το σημείο  $(x, 0, 0)$  και  $V_\infty = 0$ . Τότε  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ . Αλλά  $\vec{E} \cdot \hat{i} = 0$ . Άρα  $V(x, 0, 0) = 0$ .

Όταν  $x \gg d$

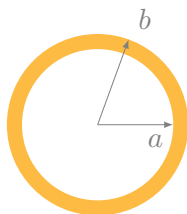
$$E(x, 0, 0) \approx -\frac{k_e qd}{x^3} = -\frac{k_e p}{x^3}.$$

Στο μόριο του νερού η απόσταση των αντίθετων φορτίων  $d$  είναι πολύ μικρή,  $d \approx p/(2e) \approx 2 \times 10^{-11} \text{ m} \ll x$ . Άρα

$$\vec{E}(x, 0, 0) = -\frac{k_e}{x^3}\vec{p}.$$

Για το ιόν με φορτίο  $q$  κοντά σε δίπολο η δύναμη είναι  $\vec{F} = q\vec{E}$ . Με αντικατάσταση,  $F \approx 8.9 \times 10^{-15} \text{ N}$ , με φορά αντίθετη του  $\hat{j}$ .

14. Μια κοίλη μεταλλική σφαίρα με φορτίο  $Q$  έχει εσωτερική και εξωτερική ακτίνα  $a$  και  $b$ . Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο και δυναμικό σε απόσταση  $r$  από το κέντρο όταν (α')  $r < a$ , (β')  $a < r < b$ , (γ')  $r > b$ ; Ποιο πρέπει να είναι το μέγεθος της σφαίρας για να αποφύγουμε την ηλεκτρική εκκένωση αν  $Q = 10/3 \mu\text{C}$ ; Δίνεται ότι η κρίσιμη τιμή του πεδίου είναι  $E = 3 \times 10^6 \text{ V/m}$ .



Σχήμα 6.33: Άσκηση 14

**ΛΥΣΗ**

Λόγω συμμετρίας το ηλεκτρικό πεδίο οπουδήποτε έχει (α') μόνο ακτινική συνιστώσα (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα.

Καθώς στο εσωτερικό του αγωγού ( $a < r < b$ ) το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0, η ροή του από μια κλειστή επιφάνεια που βρίσκεται εκεί είναι 0. Από το νόμο του Gauss προκύπτει ότι οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια εκεί περικλείει μηδενικό συνολικό φορτίο.

Η εσωτερική επιφάνεια ( $r = a$ ), λόγω συμμετρίας, θα πρέπει να έχει ομοιόμορφη κατανομή φορτίου (όχι αλλού θετικά και αλλού αρνητικά). Επομένως, στην εσωτερική επιφάνεια δεν υπάρχει ελεύθερο φορτίο, ούτε μέσα στον αγωγό. Το φορτίο του αγωγού είναι όλο συγκεντρωμένο στην εξωτερική επιφάνεια ( $r = b$ ).

Καθώς στην κοιλότητα ( $r < a$ ) δεν υπάρχει φορτίο, το ηλεκτρικό πεδίο είναι 0 εκεί (αν δεν ήταν, θα είχε ροή από κατάλληλα επιλεγμένη κλειστή επιφάνεια).

Για το εξωτερικό του αγωγού ( $r \geq b$ ): Ορίζω σφαιρική επιφάνεια Gauss ομοκεντρη του αγωγού και ακτίνας ( $r \geq b$ ). Περικλείει το φορτίο  $Q$ . Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από αυτή είναι  $4\pi r^2 E(r)$ . Από το νόμο Gauss

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{Q}{\epsilon_0},$$

άρα

$$\vec{E} = k_e \frac{Q}{r^2} \hat{r}.$$

Αναμένουμε λόγω συμμετρίας το δυναμικό να εξαρτάται μόνο από την ακτίνα.

Στο εξωτερικό, σε απόσταση  $r_0 \geq b$ :

$$V(r_0) - V_\infty = \int_{C_{r_0 \rightarrow \infty}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Αν επιλέξουμε  $C$  την ευθεία που είναι παράλληλη στο  $\hat{r}$ , από την ακτίνα  $r_0$  ως το άπειρο, έχουμε  $d\vec{s} = dr\hat{r}$ . Επιπλέον, ορίζουμε  $V_\infty = 0$ . Τότε

$$V(r_0) = \int_{r_0}^{+\infty} \vec{E} \cdot (dr\hat{r}) = \int_{r_0}^{+\infty} k_e \frac{Q}{r^2} dr = k_e Q \left( -\frac{1}{r} \right) \Big|_{r_0}^{+\infty} = \frac{k_e Q}{r_0}.$$

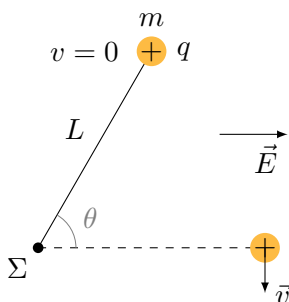
Στο εσωτερικό, όλος ο αγωγός (και η κοιλότητα) έχει το ίδιο δυναμικό, αυτό της εξωτερικής επιφάνειας. Άρα, για  $r < b$ ,  $V(r) = k_e Q/b$ .

Για να αποφύγουμε την ηλεκτρική εκκένωση πρέπει το πεδίο στην επιφάνεια να είναι μικρότερο από την κρίσιμη τιμή,  $E_c$ . Άρα

$$E_c > \frac{k_e Q}{b^2} \Rightarrow b > \sqrt{\frac{k_e Q}{E_c}}.$$

Με αντικατάσταση προκύπτει  $b > 0.1 \text{ m}$ .

15. Ένα σώμα με φορτίο  $q = 2\mu\text{C}$  και μάζα  $m = 0.01\text{ kg}$  είναι προσαρτημένο σε ένα νήμα μήκους  $L = 1.5\text{ m}$  που είναι δεμένο σε σημείο περιστροφής, όπως στο Σχήμα 6.34. Το σώμα, το νήμα και το σημείο περιστροφής βρίσκονται πάνω σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές. Αρχικά το νήμα σχηματίζει γωνία  $\theta_A = \pi/3\text{ rad}$  με το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο  $E = 300\text{ V/m}$  και αφήνουμε ελεύθερο το σώμα από την κατάσταση ηρεμίας. Ποια είναι η ταχύτητα του σώματος όταν το νήμα είναι παράλληλο με το ηλεκτρικό πεδίο;



Σχήμα 6.34: Άσκηση 15

**ΛΥΣΗ**

Ορίζουμε τον άξονα  $x$  να είναι παράλληλος στο πεδίο  $\vec{E}$ .

Έστω  $A$  είναι η αρχική θέση του φορτίου και  $B$  η τελική θέση όταν συναντά τον άξονα  $x$ . Η διαφορά δυναμικής ενέργειας στις δύο θέσεις είναι

$$\Delta U = (U_B - U_A) = q(V_B - V_A) = -q \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε ως διαδρομή  $C$  οποιαδήποτε διαδρομή από το  $A$  στο  $B$  μας βολεύει. Ας υποθέσουμε ότι κινούμαστε από το  $A$  κάθετα προς τον άξονα  $x$  και μετά παράλληλα στον  $x$  μέχρι να συναντήσουμε το  $B$ . Η διαδρομή αυτή συναντά τον άξονα  $x$  στο σημείο  $x = L \cos \theta_A$ .

Στο κατακόρυφο τμήμα το  $\vec{E} \cdot d\vec{s}$  είναι 0 καθώς το στοιχειώδες διάστημα της διαδρομής είναι κάθετο στο  $\vec{E}$ .

Στο τμήμα που είναι παράλληλο στον άξονα  $x$  έχουμε  $ds = Dx$ . Κινούμαστε από το σημείο  $L \cos \theta_A$  στο  $L$ . Τότε

$$\Delta U = U_B - U_A = -q \int_{L \cos \theta_A}^L E dx = -qE(L - L \cos \theta_A).$$

Το ομογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι συντηρητικό, επομένως η αρχική ενέργεια  $K_A + U_A$  είναι ίση με την τελική,  $K_B + U_B$ . Καθώς  $K_A = 0$ , προκύπτει ότι

$$K_B = -(U_B - U_A) = qEL(1 - \cos \theta_A),$$

και η τελική ταχύτητα

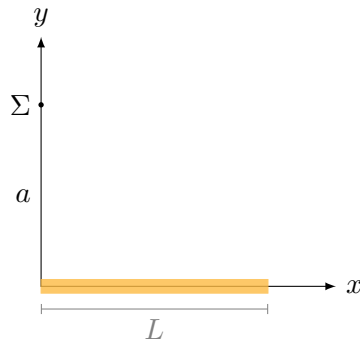
$$v_B = \sqrt{\frac{2K_B}{m}} = \sqrt{\frac{2qEL(1 - \cos \theta_A)}{m}}.$$

Με αντικατάσταση,  $v_B = 0.3 \text{ m/s}$ .

16. Μπορεί ναδειχθεί ότι το δυναμικό σε ένα σημείο  $\Sigma$  σε απόσταση  $\alpha$  επάνω από το ένα άκρο μιας ομοιόμορφα φορτισμένης ράβδου μήκους  $L$ , με συνολικό φορτίο  $Q$ , που βρίσκεται στον άξονα  $x$ , είναι

$$V = k_e \frac{Q}{L} \ln \left( \frac{L + \sqrt{\alpha^2 + L^2}}{\alpha} \right).$$

Από το αποτέλεσμα αυτό, βρείτε μια σχέση που να εκφράζει την κατακόρυφη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο  $\Sigma$ .



Σχήμα 6.35: Άσκηση 16

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι οι συνιστώσες του ηλεκτρικού πεδίου,  $\vec{E}$ , όταν γνωρίζουμε το δυναμικό,  $V$ , είναι

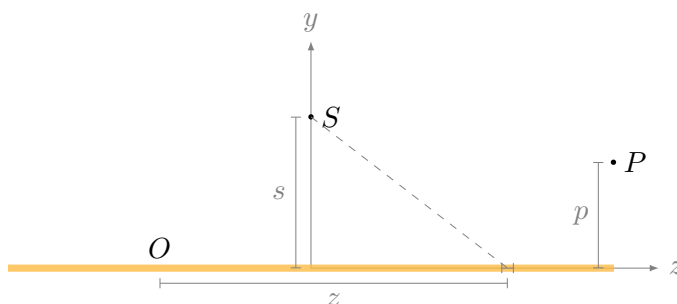
$$\vec{E} = -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial x}\hat{i} - \frac{\partial V}{\partial y}\hat{j} - \frac{\partial V}{\partial z}\hat{k}.$$

Ξέρουμε το  $V(0, \alpha, 0)$ . Η συνιστώσα  $E_y$  στον άξονα  $y$  είναι

$$\begin{aligned}
E_y(0, \alpha, 0) &= -\frac{\partial V}{\partial \alpha} = -k_e \frac{Q}{L} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \ln \left( L + \sqrt{\alpha^2 + L^2} \right) - \ln \alpha \right) \\
&= -k_e \frac{Q}{L} \left( \frac{1}{L + \sqrt{\alpha^2 + L^2}} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + L^2}} - \frac{1}{\alpha} \right) \\
&= k_e \frac{Q}{L} \left( \frac{1}{\alpha} - \frac{\alpha}{L\sqrt{\alpha^2 + L^2} + \alpha^2 + L^2} \right) \\
&= k_e Q \left( \frac{\sqrt{\alpha^2 + L^2} + L}{\alpha \left( L\sqrt{\alpha^2 + L^2} + \alpha^2 + L^2 \right)} \right) = \frac{k_e Q}{\alpha \sqrt{\alpha^2 + L^2}}.
\end{aligned}$$

17. Βρείτε το ηλεκτρικό δυναμικό σε απόσταση  $s$  από ευθύγραμμη ομοιόμορφη κατανομή φορτίου, γραμμικής πυκνότητας  $\lambda$ . Υπολογίστε από αυτό το ηλεκτρικό πεδίο.

### ΛΥΣΗ



Σχήμα 6.36: Άσκηση 17

Η κατανομή του φορτίου έχει κυλινδρική συμμετρία. Μας διευκολύνει να χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \phi, z)$ . Ο άξονας  $z$  είναι η ευθύγραμμη κατανομή.

Το δυναμικό γενικά εξαρτάται από τις τρεις κυλινδρικές συντεταγμένες του σημείου στο οποίο θέλουμε να το υπολογίσουμε:  $V = V(r, \phi, z)$ . Παρατηρούμε όμως ότι η κατανομή φορτίου είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή γύρω από τον εαυτό της. Αυτή η περιστροφή αλλάζει τη γωνία  $\phi$  αλλά πρέπει να αφήνει ίδιο το δυναμικό. Άρα το δυναμικό δεν εξαρτάται από το  $\phi$ . Επίσης, μπορούμε να μετακινήσουμε την κατανομή κατά μήκος του άξονα  $z$ . Η μετακίνηση αλλάζει την τιμή του  $z$  αλλά πρέπει να αφήνει ίδιο το δυναμικό. Άρα το  $V$  δεν εξαρτάται ούτε από το  $z$ . Επομένως, το δυναμικό σε ένα σημείο εξαρτάται μόνο από την απόσταση του σημείου από την κατανομή:  $V = V(r)$ .



Θυμηθείτε ότι δεν ορίζονται απόλυτες τιμές δυναμικού αλλά μόνο διαφορές δυναμικού μεταξύ σημείων. Συνήθως θεωρούμε το δυναμικό στο άπειρο να είναι 0· στη συγκεκριμένη περίπτωση όμως δεν μπορούμε να το κάνουμε καθώς υπάρχει εκεί φορτίο. Επομένως, θα ορίσουμε αυθαίρετα ένα σημείο  $P$  σε απόσταση  $p$  από τον άξονα. Το δυναμικό του είναι  $V(p)$  και ως προς αυτό το σημείο θα υπολογίσουμε το δυναμικό στο ζητούμενο σημείο  $S$  που βρίσκεται σε απόσταση  $s$  από τον άξονα.

Έστω ότι το σημείο  $S$  έχει συντεταγμένες  $(s, \phi_S, z_S)$ . Ένα στοιχειώδες τμήμα της κατανομής σε θέση με συντεταγμένες  $(0, 0, z)$  έχει μήκος  $dz$  και φορτίο  $dq = \lambda dz$ . Η απόστασή του από το  $S$  είναι  $\sqrt{(z - z_S)^2 + s^2}$ . Παράγει στο  $S$  ένα στοιχειώδες δυναμικό  $dV_S$  που δίνεται από τη σχέση

$$dV_S = k_e \frac{dq}{\sqrt{(z - z_S)^2 + s^2}} + V_\infty.$$

Στο σημείο  $P(p, \phi_P, z_P)$  παράγει το δυναμικό

$$dV_P = k_e \frac{dq}{\sqrt{(z - z_P)^2 + p^2}} + V_\infty.$$

Επομένως,

$$dV_S - dV_P = k_e dq \left( \frac{1}{\sqrt{(z - z_S)^2 + s^2}} - \frac{1}{\sqrt{(z - z_P)^2 + p^2}} \right).$$

Όλα τα τμήματα της κατανομής, με  $-\infty < z < \infty$  δίνουν συνολική διαφορά δυναμικού μεταξύ  $S$  και  $P$  που δίνεται από τη σχέση

$$V_S - V_P = \int_{-\infty}^{\infty} (dV_S - dV_P) = \int_{-\infty}^{\infty} k_e \lambda dz \frac{1}{\sqrt{(z - z_S)^2 + s^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} k_e \lambda dz \frac{1}{\sqrt{(z - z_P)^2 + p^2}}.$$

Η αλλαγή μεταβλητής  $z - z_S \rightarrow z$  στο πρώτο ολοκλήρωμα και  $z - z_P \rightarrow z$  στο δεύτερο ολοκλήρωμα καταλήγει στο

$$V_S - V_P = \int_{-\infty}^{\infty} k_e \lambda dz \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + s^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + p^2}} \right).$$

Στο Παράρτημα **A'** δείχνουμε ότι

$$\int_0^{\infty} dz \left( \frac{1}{\sqrt{z^2 + s^2}} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + p^2}} \right) = \ln \frac{p}{s}.$$

Άρα

$$V_S - V_P = 2k_e \lambda \ln \frac{p}{s}.$$

Ας υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο:

Ένα σημείο  $R$  με κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \phi, z)$  βρήκαμε ότι έχει δυναμικό ως προς ένα σημείο αναφοράς  $P$  σε απόσταση  $p$  από τον άξονα της κατανομής

$$V_R = V_P + 2k_e \lambda \ln \left( \frac{p}{r} \right) .$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E}_R = -\nabla V_R .$$

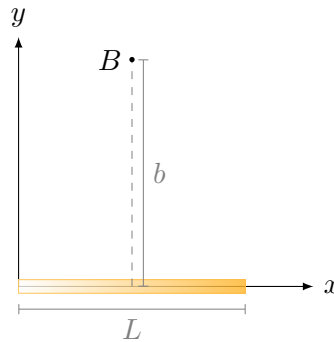
Καθώς το  $\nabla$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \hat{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \hat{\phi} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{k} ,$$

και λαμβάνοντας υπόψη ότι  $V_R = V(r)$ , προκύπτει

$$\vec{E}_R = -2k_e \lambda \nabla \left( \ln \left( \frac{p}{r} \right) \right) = 2k_e \lambda \nabla (\ln r) = 2k_e \lambda \frac{\partial (\ln r)}{\partial r} \hat{r} = \frac{2k_e \lambda}{r} \hat{r} .$$

18. Μια ράβδος (Σχήμα 6.37) μήκους  $L$  βρίσκεται στον άξονα  $x$  με το αριστερό της άκρο στην αρχή των αξόνων και έχει ανομοιόμορφη πυκνότητα φορτίου  $\lambda = \alpha x$ , όπου  $\alpha > 0$  είναι μια σταθερά. Ποιο είναι το ηλεκτρικό δυναμικό στο σημείο  $B$  επί της μεσοκάθετου της ράβδου και σε απόσταση  $b$  επάνω από τον άξονα  $x$ ;



Σχήμα 6.37: Άσκηση 18

### ΛΥΣΗ

Το στοιχειώδες φορτίο  $dq$  στη ράβδο, σε απόσταση  $x$ , προκαλεί ηλεκτρικό δυναμικό στο  $B$  που δίνεται από τη σχέση

$$dV(x) = \frac{k_e dq}{\sqrt{(x - L/2)^2 + b^2}} .$$

Θεωρήσαμε ότι το δυναμικό είναι 0 στο άπειρο.

Το  $dq$  είναι  $dq = \lambda dx = \alpha x dx$ . Άρα

$$dV(x) = \frac{k_e \alpha x dx}{\sqrt{(x - L/2)^2 + b^2}}.$$

Η συνεισφορά από όλη τη ράβδο είναι

$$\begin{aligned} V(b) &= \int dV = \int_0^L \frac{k_e \alpha x dx}{\sqrt{(x - L/2)^2 + b^2}} \stackrel{t=x-L/2}{=} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k_e \alpha (t + L/2) dt}{\sqrt{t^2 + b^2}} \\ &= \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k_e \alpha t dt}{\sqrt{t^2 + b^2}} + \frac{L}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k_e \alpha dt}{\sqrt{t^2 + b^2}}. \end{aligned}$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα είναι 0 καθώς ολοκληρώνουμε αντισυμμετρική συνάρτηση σε συμμετρικό διάστημα. Το δεύτερο ολοκλήρωμα δείχνεται στο Παράρτημα Α' ότι είναι

$$\frac{L}{2} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{k_e \alpha dt}{\sqrt{t^2 + b^2}} = \frac{L}{2} k_e \alpha \ln \left( \frac{(L/2) + \sqrt{(L/2)^2 + b^2}}{(-L/2) + \sqrt{(L/2)^2 + b^2}} \right).$$

Με αντικατάσταση στον τύπο του δυναμικού έχουμε τελικά

$$V(b) = \frac{1}{2} k_e \alpha L \ln \left( \frac{\sqrt{4b^2 + L^2} + L}{\sqrt{4b^2 + L^2} - L} \right).$$

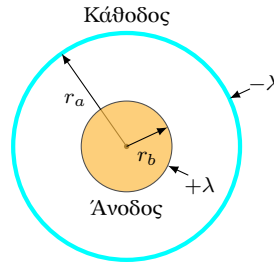
19. Ο γνωστός σωλήνας Geiger–Müller για ανίχνευση ακτινοβολίας αποτελείται (Σχήμα 6.38) από κλειστό κοίλο μεταλλικό κύλινδρο (την κάθοδο) με εσωτερική ακτίνα  $r_a$  και ένα ομοαξονικό σύρμα (άνοδο) με ακτίνα  $r_b$ . Στην άνοδο το φορτίο ανά μονάδα μήκους είναι  $\lambda$  και στην κάθοδο  $-\lambda$ . Ο χώρος μεταξύ των ηλεκτροδίων καταλαμβάνεται από ένα αέριο. Κατά τη χρήση του μετρητή, η διέλευση μέσα από τον χώρο αυτόν ενός στοιχειώδους σωματιδίου υψηλής ενέργειας μπορεί να προκαλέσει ιονισμό ενός ατόμου του αερίου. Λόγω του ισχυρού ηλεκτρικού πεδίου το ιόν και το ηλεκτρόνιο επιταχύνονται προς αντίθετες κατευθύνσεις, προσκρούουν σε άλλα μόρια και τα ιονίζουν και δημιουργείται ηλεκτρική εκκένωση. Ο παλμός του ηλεκτρικού ρεύματος μεταξύ του σύρματος και του κυλίνδρου καταγράφεται από ένα εξωτερικό κύκλωμα.

(α') Δείξτε ότι η διαφορά δυναμικού μεταξύ του σύρματος και του κυλίνδρου είναι

$$\Delta V = 2k_e \lambda \ln \left( \frac{r_a}{r_b} \right).$$

(β') Δείξτε ότι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου μεταξύ ανόδου και καθόδου είναι

$$E = \frac{\Delta V}{\ln \left( \frac{r_a}{r_b} \right)} \frac{1}{r}.$$



Σχήμα 6.38: Άσκηση 19

**ΛΥΣΗ**

Θεωρούμε ότι το μήκος του σωλήνα είναι πολύ μεγάλο ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε την ασυμμετρία στα άκρα. Λόγω ομοιόμορφης κατανομής φορτίου και συμμετρίας, αναμένουμε το ηλεκτρικό πεδίο να έχει (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) (α') μόνο ακτινική συνιστώσα, (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα.

Επιλέγουμε κυλινδρική επιφάνεια Gauss, με ίδιο άξονα με τον κύλινδρο, ύψος  $L$  και ακτίνα  $r$  μεταξύ των  $r_a$ ,  $r_b$ . Η ηλεκτρική ροή από τις βάσεις του κυλίνδρου Gauss είναι 0 καθώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο σε αυτές. Από την παράπλευρη επιφάνεια  $S$  η ροή είναι

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(r)2\pi rL.$$

Από το νόμο του Gauss

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 rL}.$$

Το φορτίο  $Q$  που περικλείει η επιφάνεια Gauss είναι  $Q = -\lambda L$ . Άρα

$$E(r) = -\frac{2k_e\lambda}{r}.$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών είναι, από τον ορισμό,

$$V_b - V_a = - \int_{C_{a \rightarrow b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Επιλέγω ως καμπύλη  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο στην ακτίνα του κυλίνδρου, με κατεύθυνση από τον εσωτερικό αγωγό προς τον εξωτερικό (είναι δηλαδή παράλληλο στο ηλεκτρικό πεδίο). Σε αυτό  $ds \equiv dr$ . Επομένως

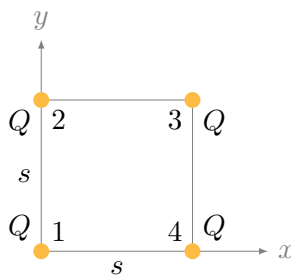
$$\Delta V = - \int_{r_a}^{r_b} E(r) dr = 2k_e\lambda \int_{r_a}^{r_b} \frac{1}{r} dr = 2k_e\lambda \ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right).$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε τον τύπο για το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου χρησιμοποιώντας τη διαφορά δυναμικού:

$$E(r) = \frac{\Delta V}{\ln\left(\frac{r_b}{r_a}\right)} \frac{1}{r}.$$

### 6.6.5 Δυναμική ενέργεια

20. Βρείτε το έργο που απαιτείται για την τοποθέτηση τεσσάρων σωματιδίων, καθένα με φορτίο  $Q$ , στις κορυφές ενός τετραγώνου με πλευρά  $s$ .



Σχήμα 6.39: Άσκηση 20

#### ΛΥΣΗ

Η αρχική κατάσταση του συστήματος έχει όλα τα φορτία στο άπειρο με δυναμική ενέργεια 0.

Το έργο για να τοποθετήσουμε το πρώτο φορτίο στην κορυφή 1 είναι  $W_1 = 0$ , καθώς δεν υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο.

Το έργο για να τοποθετήσουμε το δεύτερο φορτίο στην κορυφή 2 είναι  $W_2 = QV_1$ , όπου  $V_1$  το δυναμικό που οφείλεται στο πρώτο φορτίο. Άρα  $W_2 = k_e Q^2/s$ .

Το έργο για να τοποθετήσουμε το τρίτο φορτίο στην κορυφή 3 είναι  $W_3 = Q(V_1 + V_2)$ , όπου  $V_1, V_2$  τα δυναμικά που οφείλονται στο πρώτο και δεύτερο φορτίο. Η απόσταση των κορυφών 1 και 3 είναι  $s\sqrt{2}$ . Άρα

$$W_3 = k_e \frac{Q^2}{s} + k_e \frac{Q^2}{s\sqrt{2}}.$$

Το έργο για να τοποθετήσουμε το τέταρτο φορτίο στην κορυφή 4 είναι  $W_4 = Q(V_1 + V_2 + V_3)$ :

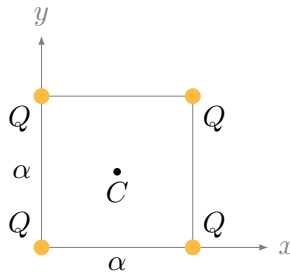
$$W_4 = k_e \frac{Q^2}{s} + k_e \frac{Q^2}{s\sqrt{2}} + k_e \frac{Q^2}{s}.$$

Συνολικά το έργο είναι

$$W = W_1 + W_2 + W_3 + W_4 = k_e \frac{Q^2}{s} (4 + \sqrt{2}) .$$

21. Τέσσερα σημειακά φορτία, καθένα με φορτίο  $Q$ , βρίσκονται στις κορυφές ενός τετραγώνου με πλευρά μήκους  $\alpha$ . Βρείτε

- το συνολικό ηλεκτρικό δυναμικό στο κέντρο του τετραγώνου και
- το έργο που απαιτείται για να μεταφερθεί ένα φορτίο  $q$  από το άπειρο στο κέντρο του τετραγώνου.



Σχήμα 6.40: Άσκηση 21

### ΛΥΣΗ

Η απόσταση κάθε κορυφής από το  $C$  είναι  $d = \alpha/\sqrt{2}$ . Το δυναμικό από κάθε φορτίο είναι

$$V_1 = k_e \frac{Q}{d}$$

με την υπόθεση ότι  $V_\infty = 0$ , άρα συνολικά

$$V_C = 4V_1 = 4k_e \frac{Q}{d} = 4\sqrt{2}k_e \frac{Q}{\alpha} .$$

Το έργο που απαιτείται να μεταφερθεί ένα φορτίο  $q$  από το  $\infty$  στο  $C$  είναι

$$W = q(V_C - V_\infty) = 4\sqrt{2}k_e \frac{qQ}{\alpha} .$$

22. Ποια είναι η δυναμική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη σε ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα με ακτίνα  $R$  και συνολικό φορτίο  $Q$ ;

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε βρει σε προηγούμενη άσκηση ότι το ηλεκτρικό δυναμικό ομοιόμορφα φορτισμένης σφαίρας με ακτίνα  $R$  και συνολικό φορτίο  $Q$  είναι

$$V(r) = \begin{cases} k_e Q \frac{3R^2 - r^2}{2R^3}, & r \leq R \\ \frac{k_e Q}{r}, & r > R \end{cases}.$$

Η δυναμική ενέργεια της σφαίρας μπορεί να υπολογιστεί από τη σχέση

$$U = \frac{1}{2} \int dq V(r)$$

αν θέσουμε  $dq = \rho d\tau = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi$  και υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα σε όλο τον όγκο της.

Η πυκνότητα φορτίου  $\rho$  είναι

$$\rho = \frac{Q}{(4/3)\pi R^3}.$$

Άρα

$$U = \frac{1}{2} \rho \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R k_e Q \frac{3R^2 - r^2}{2R^3} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi.$$

Το τριπλό ολοκλήρωμα έχει τιμή

$$\frac{2}{5} \frac{QR^2}{\epsilon_0}.$$

Τότε

$$U = \frac{1}{2} \frac{3Q}{4\pi R^3} \frac{2}{5} \frac{QR^2}{\epsilon_0} = \frac{3}{20} \frac{Q^2}{\pi \epsilon_0 R}.$$





## Κεφάλαιο 7

# Ηλεκτρικά στοιχεία – Ηλεκτρικά κυκλώματα

### 7.1 Πυκνωτής

Ως *πυκνωτής* χαρακτηρίζεται ένα σύστημα δύο αγωγών («οπλισμοί» του πυκνωτή) με ίσο και αντίθετο φορτίο.

#### 7.1.1 Χωρητικότητα πυκνωτή

Η χωρητικότητα,  $C$ , πυκνωτή με φορτίο  $\pm Q$  στους οπλισμούς και τάση (διαφορά δυναμικού) μεταξύ αυτών  $\Delta V$ , ορίζεται ως

$$C = \frac{Q}{\Delta V} .$$

Στο SI μετριέται σε  $C/V \equiv F$  (Farad). Εξαρτάται μόνο από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του πυκνωτή και το υλικό μεταξύ των οπλισμών. Η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή με εμβαδό κάθε οπλισμού  $A$ , απόσταση οπλισμών  $d$  και διηλεκτρικό μεταξύ των οπλισμών είναι

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} .$$

Το  $\kappa$  είναι η σχετική διαπερατότητα (διηλεκτρική σταθερά) του υλικού μεταξύ των οπλισμών (αδιάστατο μέγεθος). Για το κενό,  $\kappa = 1$ .

Ένας απομονωμένος φορτισμένος αγωγός μπορεί να θεωρηθεί ως ένας οπλισμός πυκνωτή που έχει τον άλλο στο άπειρο. Μπορούμε να ορίσουμε και γι' αυτόν χωρητικότητα.

#### 7.1.2 Πυκνότητα ενέργειας πυκνωτή: Απόδειξη

Σε φορτισμένο πυκνωτή με φορτίο  $Q$ , υπό τάση  $\Delta V$ , είναι αποθηκευμένη (δυναμική) ενέργεια. Έστω ότι κατά τη διαδικασία φόρτισης ο πυκνωτής έχει φορτίο

$q$ , με  $0 \leq q \leq Q$ . Το έργο για να μεταφερθεί φορτίο  $dq$  από τον ένα οπλισμό στον άλλο είναι  $dW = dq\Delta V = dq q/C$ . Το συνολικό έργο  $W$  είναι

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C}.$$

Το έργο αυτό αποθηκεύεται ως δυναμική ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή. Σε επίπεδο πυκνωτή ο όγκος είναι  $Ad$ . Επομένως, η χωρική πυκνότητα ενέργειας,  $u$ , είναι

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{1}{2}C \frac{(\Delta V)^2}{Ad} = \frac{1}{2}\kappa\epsilon_0 \frac{A}{d} \frac{(Ed)^2}{Ad} = \frac{1}{2}\kappa\epsilon_0 E^2.$$

Ο τύπος αποδεικνύεται εύκολα σε επίπεδο πυκνωτή αλλά ισχύει σε κάθε ηλεκτρικό πεδίο, ανεξάρτητα από το πώς έχει παραχθεί αυτό.

## 7.2 Ηλεκτρικό ρεύμα — Αντίσταση

Ως *ηλεκτρικό ρεύμα*,  $I$ , ορίζουμε το ρυθμό με τον οποίο κάποιο φορτίο περνά από ένα σημείο. Αν φορτίο  $dQ$  περνά από το σημείο σε χρονικό διάστημα  $dt$ , το ρεύμα είναι

$$I = \frac{dQ}{dt}.$$

Στο SI μετράται σε  $A \equiv C/s$  (Ampère).

Κατά σύμβαση, θεωρούμε ότι οι φορείς του ρεύματος είναι τα θετικά φορτία.

Το ρεύμα είναι κανονικά ένα διάνυσμα με μέτρο, διεύθυνση και φορά, συνήθως όμως έχουμε κίνηση φορτίων σε καλώδιο οπότε η διεύθυνσή του είναι η καμπύλη του αγωγού.

Αν μια γραμμική κατανομή φορτίων με πυκνότητα  $\lambda$  κινείται με ταχύτητα  $v$ , τότε τα φορτία που βρίσκονται σε μήκος  $ds = v dt$  περνούν σε χρόνο  $dt$  από ένα σημείο. Τα φορτία αυτά είναι  $dQ = \lambda ds$  επομένως ισοδυναμούν με ρεύμα  $I = \lambda v$  και σε διάνυσμα,  $\vec{I} = \lambda \vec{v}$ .

### 7.2.1 Επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος

Έστω ότι έχουμε κίνηση φορτίων πάνω σε μια επιφάνεια. Η διατομή της επιφάνειας κάθετα στο ρεύμα είναι καμπύλη. Τότε μπορούμε να ορίσουμε την *επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος*,  $\vec{K}$ . Το στοιχειώδες ρεύμα (φορτίο ανά μονάδα χρόνου) που περνά κάθετα μια στοιχειώδη καμπύλη με μήκος  $d\ell$ , προς το μήκος αυτό είναι

$$\vec{K} = \frac{d\vec{I}}{d\ell}.$$

Αν η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου των κινούμενων φορτίων είναι  $\sigma$  και η ταχύτητά τους είναι  $v$ , τότε

$$K = \frac{dI}{d\ell} = \frac{dQ}{d\ell dt} = \frac{dQ ds}{ds d\ell dt} = \frac{dQ}{ds d\ell} \frac{ds}{dt} = \sigma v \Rightarrow \vec{K} = \sigma \vec{v}.$$

### 7.2.2 Χωρική πυκνότητα ρεύματος

Η χωρική πυκνότητα ρεύματος,  $\vec{J}$ , είναι ένα διανυσματικό μέγεθος. Το μέτρο του ορίζεται ως το στοιχειώδες ρεύμα  $dI$  που περνά κατά την κίνησή του στο χώρο μια στοιχειώδη επιφάνεια, κάθετη στη ροή, προς το εμβαδόν  $dA$  της επιφάνειας:

$$J = \frac{dI}{dA}.$$

Η διεύθυνση και η φορά του  $\vec{J}$  είναι η διεύθυνση και η φορά του ρεύματος (δηλαδή η διεύθυνση και η φορά των θετικών φορτίων).

Αν  $\rho$  είναι η χωρική πυκνότητα φορτίου των κινούμενων φορτίων και η ταχύτητά τους είναι  $v$ , τότε  $J = \rho v$ , και σε διάνυσμα,  $\vec{J} = \rho \vec{v}$ .

### Εξίσωση συνέχειας

Αν έχουμε δεδομένο  $\vec{J}$ , μπορούμε να βρούμε το ρεύμα που ρέει διαμέσου μιας επιφάνειας  $S$ . Από ένα τμήμα της με διάνυσμα  $d\vec{A}$  περνά ρεύμα  $dI = \vec{J} \cdot d\vec{A}$ . Επομένως, σε κλειστή επιφάνεια έχουμε

$$I = \oint_S dI = \oint_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_V \nabla \cdot \vec{J} d\tau.$$

Στην τελευταία σχέση εφαρμόστηκε το θεώρημα της απόκλισης. Όμως, τα φορτία που εξέρχονται από την επιφάνεια πρέπει να αφαιρούνται από τα φορτία στο εσωτερικό της επιφάνειας άρα

$$I = -\frac{dQ}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_V \rho d\tau = -\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} d\tau.$$

Καθώς ο όγκος  $V$  μπορεί να είναι οποιοσδήποτε, πρέπει

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (7.1)$$

Η παραπάνω σχέση είναι η εξίσωση συνέχειας και εκφράζει τη διατήρηση του φορτίου.

### 7.2.3 Νόμος Ohm

Αν η πυκνότητα ρεύματος σε ένα μέσο είναι ανάλογη του ηλεκτρικού πεδίου σε αυτό, το μέσο λέγεται ωμικό. Ο συντελεστής αναλογίας είναι η αγωγιμότητα του μέσου,  $\sigma$ , και η σχέση είναι ο νόμος του Ohm:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E},$$

ή, σε ισοδύναμη μορφή, για τα μέτρα,

$$\frac{I}{dA} = \sigma \frac{\Delta V}{d\ell} \Rightarrow \Delta V = IR ,$$

όπου

$$R = \frac{1}{\sigma} \frac{d\ell}{dA} = \rho \frac{d\ell}{dA}$$

η αντίσταση του μέσου. Παρατηρούμε ότι η αντίσταση ενός ωμικού μέσου είναι ανάλογη του μήκους του και αντιστρόφως ανάλογη της διατομής του. Ο συντελεστής αναλογίας  $\rho = 1/\sigma$  λέγεται *ειδική αντίσταση* και χαρακτηρίζει το μέσο. Εξαρτάται από τη θερμοκρασία.

*Παρατήρηση:* Αν μέσα στον αγωγό έχουμε χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο, εμφανίζεται και μαγνητική δύναμη στα κινούμενα φορτία. Ο νόμος του Ohm γενικεύεται στη σχέση

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) .$$

Συνήθως η ηλεκτρική δύναμη είναι πολύ μεγαλύτερη από τη μαγνητική και καταλήγουμε στο  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ .

#### 7.2.4 Κλασσική ερμηνεία αγωγιμότητας: Μοντέλο Drude

Σε ένα αγωγό υπάρχουν ακίνητα θετικά ιόντα στο πλέγμα και ηλεκτρόνια που είναι ελεύθερα να κινηθούν. Το συνολικό φορτίο στον αγωγό είναι 0. Τα ηλεκτρόνια θεωρούνται σημειακά φορτία και μάζες, δεν αλληλεπιδρούν μεταξύ τους ή με τα ιόντα, παρά μόνο κατά τις κρούσεις με το πλέγμα των ιόντων. Η κίνηση των ηλεκτρονίων γίνεται προς όλες τις κατευθύνσεις. Το νέφος των ηλεκτρονίων μπορεί επομένως θα θεωρηθεί ως ιδανικό αέριο. Σύμφωνα με τη στατιστική φυσική για το ιδανικό αέριο, για τη μέση κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων σε θερμοκρασία  $T$  ισχύει

$$\frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{3}{2} k_B T .$$

Ο μέσος χρόνος μεταξύ των συγκρούσεων είναι  $\tau = \ell/v$  όπου  $\ell$  η μέση ελεύθερη διαδρομή και  $v$  η μέση ταχύτητα μεταξύ των συγκρούσεων.

Αν στα άκρα του αγωγού εφαρμοστεί διαφορά δυναμικού, εμφανίζεται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο στον αγωγό. Τα ηλεκτρόνια, πέρα από την θερμική κίνηση προς όλες τις διευθύνσεις, εκτελούν ακόμα μία κίνηση προς μία κατεύθυνση. Λόγω του ηλεκτρικού πεδίου με μέτρο  $E$ , τα ηλεκτρόνια αποκτούν επιτάχυνση  $a = eE/m_e$ . Σε μέσο χρόνο  $\tau$  μεταξύ των συγκρούσεων με τα ιόντα, αποκτούν ταχύτητα (ολίσθησης) με μέτρο  $v_d = a\tau = \tau eE/m_e$ . Ισχύει  $v \gg v_d$ .

Αν τα ηλεκτρόνια στον αγωγό έχουν χωρική πυκνότητα  $n$  (δηλαδή,  $n$  =αριθμός ηλεκτρονίων στη μονάδα του όγκου) τότε, σε χρονικό διάστημα  $dt$ , όσα ηλεκτρόνια βρίσκονται σε απόσταση  $dx = v_d dt$  από μια επιφάνεια  $dA$ , θα περάσουν από αυτή την επιφάνεια.  $v_d$  είναι η ταχύτητα ολίσθησης. Ο αριθμός των ηλεκτρονίων στον

όγκο  $dA \, dx$  είναι  $n \, dA \, dx$  και το συνολικό φορτίο που θα περάσει σε χρόνο  $dt$  είναι  $dq = ne \, dA \, dx$ . Θα εμφανιστεί δηλαδή ρεύμα

$$I = \frac{ne \, dA \, dx}{dt} = nev_d \, dA .$$

Η πυκνότητα ρεύματος θα έχει μέτρο

$$J = \frac{I}{dA} = nev_d .$$

Επομένως,

$$J = nev_d = \frac{ne^2 \tau}{m_e} E \Rightarrow \sigma = \frac{ne^2 \tau}{m_e} .$$

## 7.3 Σύνδεση όμοιων στοιχείων

### 7.3.1 Χωρητικότητα συστήματος πυκνωτών

Πυκνωτές με χωρητικότητες  $C_1, C_2, \dots$ , συνδεδεμένοι, ισοδυναμούν με ένα πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ .

- Αν η σύνδεση είναι σε σειρά, δηλαδή οι πυκνωτές έχουν ίδιο φορτίο<sup>1</sup>, οι διαφορές δυναμικού αθροίζονται. Ισχύει

$$V = V_1 + V_2 + \dots \Rightarrow \frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \dots \Rightarrow \frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots .$$

- Αν η σύνδεση είναι παράλληλη, δηλαδή οι πυκνωτές έχουν ίδια τάση, τα φορτία αθροίζονται. Ισχύει

$$Q = Q_1 + Q_2 + \dots \Rightarrow CV = C_1V + C_2V + \dots \Rightarrow C = C_1 + C_2 + \dots .$$

### 7.3.2 Αντίσταση συστήματος αντιστατών

Αντιστάτες με αντιστάσεις  $R_1, R_2, \dots$  συνδεδεμένοι ισοδυναμούν με αντιστάτη αντίστασης  $R$ .

Αν τους διαπερνά το ίδιο ρεύμα (είναι δηλαδή στο ίδιο αγωγό), η σύνδεση είναι σε σειρά και οι διαφορές δυναμικού προστίθενται. Ισχύει

$$V = V_1 + V_2 + \dots \Rightarrow IR = IR_1 + IR_2 + \dots \Rightarrow R = R_1 + R_2 + \dots .$$

Αν έχουν ίδια διαφορά δυναμικού (έχουν δηλαδή κοινά άκρα), η σύνδεση είναι παράλληλη και τα ρεύματα προστίθενται. Ισχύει

$$I = I_1 + I_2 + \dots \Rightarrow \frac{V}{R} = \frac{V}{R_1} + \frac{V}{R_2} + \dots \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots .$$

---

<sup>1</sup>ο ένας σπλισμός του ενός έχει ίδιο και αντίθετο φορτίο με τον σπλισμό του άλλου με τον οποίο συνδέεται, καθώς οι δύο σπλισμοί αποτελούν αφορτιστο απομονωμένο αγωγό.

## 7.4 Επίλυση κυκλώματος

Ηλεκτρικό κύκλωμα είναι ένα σύνολο ηλεκτρικών στοιχείων (αντιστάτες, μπαταρίες, πυκνωτές, πηνία κ.α.), που συνδέονται με αγωγούς ώστε να σχηματίζουν κλειστές διαδρομές (βρόχους) για το ηλεκτρικό ρεύμα. Τα σημεία του κυκλώματος στα οποία συναντώνται τρεις ή περισσότεροι αγωγοί λέγονται κόμβοι. Οι αγωγοί θεωρούνται ιδανικοί, δηλαδή χωρίς αντίσταση.

Για τον υπολογισμό άγνωστων ποσοτήτων (ρεύμα, τάση, αντίσταση, κλπ.) σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα κάνουμε τα εξής:

- Ορίζουμε *αυθαίρετα* τις φορές του ρεύματος σε κάθε κλάδο του κυκλώματος. Κάθε τμήμα του κυκλώματος μεταξύ δύο διακλαδώσεων διαρρέεται από το ίδιο ρεύμα.
- Ορίζουμε αυθαίρετα μια φορά διαγραφής κάθε κλειστού βρόχου.
- Εφαρμόζουμε τους κανόνες Kirchhoff για να σχηματίσουμε ένα σύστημα γραμμικών εξισώσεων με τόσες εξισώσεις όσους άγνωστους έχουμε:
  - κάθε κόμβος που θα επιλέξουμε για να εφαρμόσουμε τον πρώτο κανόνα Kirchhoff, πρέπει να είναι μέρος ενός τουλάχιστον νέου αγωγού, δηλαδή, αγωγού που δεν τον έχουμε λάβει υπόψη σε άλλο κόμβο.
  - κάθε βρόχος που θα επιλέξουμε για να εφαρμόσουμε το δεύτερο κανόνα Kirchhoff, πρέπει να έχει τουλάχιστον ένα νέο τμήμα, δηλαδή, τμήμα που να μην είναι μέρος προηγούμενου βρόχου.

Με τις παραπάνω προϋποθέσεις, το γραμμικό σύστημα που προκύπτει έχει μοναδική λύση.

- Επιλύουμε το γραμμικό σύστημα.
- Αν τυχόν κάποιο ρεύμα προκύψει με αρνητική τιμή, σημαίνει ότι η πραγματική φορά είναι αντίθετη από αυτή που υποθέσαμε. Δεν θα αλλάξουμε όμως τη φορά ή το πρόσημο του ρεύματος.

### 7.4.1 Κανόνες Kirchhoff

1. Το αλγεβρικό άθροισμα των ρευμάτων σε κάθε κόμβο είναι 0. Όσα εισέρχονται θεωρούνται θετικά. Όσα εξέρχονται, αρνητικά. Απλά: «όσο ρεύμα μπαίνει τόσο βγαίνει».
2. Το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών δυναμικού σε κλειστό κύκλωμα είναι 0. Απλά: «όσο θα ανεβεί το δυναμικό τόσο θα κατεβεί».

Επομένως, επιλέγουμε κάποιες κλειστές διαδρομές στο κύκλωμά μας και τις διατρέχουμε γράφοντας τις διαφορές δυναμικού:

- Κάθε πηγή ηλεκτρεγερτικής δύναμης (μπαταρία) στην οποία συναντώ πρώτα τον αρνητικό πόλο και μετά τον θετικό, έχει θετικό  $\Delta V$  (ίσο με την ηλεκτρεγερτική δύναμη (emf)): ανεβαίνω σε διαφορά δυναμικού.
- Κάθε αντιστάτη που τον διατρέχω στη φορά του ρεύματος, έχει αρνητική διαφορά δυναμικού,  $-IR$ : κατεβαίνω σε διαφορά δυναμικού. Αν τον διατρέχω αντίθετα από το ρεύμα, έχει θετική διαφορά δυναμικού,  $+IR$ .

## 7.5 Ασκήσεις—Λύσεις

### 7.5.1 Πυκνωτής

1. Όταν η τάση που εφαρμόζεται σε ένα πυκνωτή αυξάνεται από 80 V σε 110 V, το φορτίο του αυξάνεται κατά  $9 \times 10^{-5}$  C. Προσδιορίστε τη χωρητικότητα.

#### ΛΥΣΗ

Αρχικά ο πυκνωτής είχε άγνωστο φορτίο  $Q$  με τάση  $\Delta V = 80$  V. Η χωρητικότητά του είναι

$$C = \frac{Q}{\Delta V}.$$

Μετά την αύξηση της τάσης, η διαφορά δυναμικού έγινε  $\Delta V' = 110$  V και το φορτίο έχει αυξηθεί κατά  $\Delta Q = 9 \times 10^{-5}$  C, δηλαδή  $Q' = Q + \Delta Q$ . Η χωρητικότητα δεν αλλάζει:

$$C = \frac{Q'}{\Delta V'} = \frac{Q + \Delta Q}{\Delta V'}.$$

Άρα

$$\frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q + \Delta Q}{\Delta V'} \Rightarrow Q = \Delta Q \frac{\Delta V}{\Delta V' - \Delta V} \Rightarrow C = \frac{\Delta Q}{\Delta V' - \Delta V}.$$

Με αντικατάσταση,  $C = 3 \mu\text{F}$ .

2. Ένας επίπεδος πυκνωτής αποτελείται από δύο παράλληλους οπλισμούς που απέχουν μεταξύ τους  $d = 1.8$  mm και έχουν εμβαδόν  $A = 7.6$  cm<sup>2</sup> ο καθένας. Σε αυτούς εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού  $\Delta V = 20$  V. Υπολογίστε

- (α') το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών,
- (β') την επιφανειακή πυκνότητα φορτίου,
- (γ') τη χωρητικότητα,
- (δ') το φορτίο κάθε οπλισμού,
- (ε') την πυκνότητα ενέργειας του πυκνωτή.

#### ΛΥΣΗ

Για να υπολογίσω το (ομογενές) ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών θα χρησιμοποιήσω τον ορισμό της διαφοράς δυναμικού. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι

$$V_+ - V_- = \int_{C_+ \rightarrow -} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$



Επιλέγω ως καμπύλη  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στους οπλισμούς. Το μήκος του είναι  $d$  και πάνω σε αυτό, το στοιχειώδες διάνυσμα και το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλα. Έχουμε

$$\Delta V = \int_{C_{+ \rightarrow -}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_{C_{+ \rightarrow -}} ds = Ed .$$

Επομένως,  $\Delta V = Ed \Rightarrow E \approx 11.1 \text{ kV/m}$ .

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} \approx 3.74 \text{ pF} .$$

Το φορτίο κάθε οπλισμού είναι  $Q = C\Delta V \approx 74.8 \text{ pC}$ .

Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι

$$\sigma = \frac{Q}{A} = \frac{CV}{A} = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{d} \approx 98.3 \text{ nC/m}^2 .$$

Η αποθηκευμένη ενέργεια στον όγκο του πυκνωτή,  $Ad$ , είναι

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} C (\Delta V)^2 .$$

Η πυκνότητα ενέργειας είναι

$$u = \frac{U}{Ad} = \frac{CV^2}{2Ad} = \frac{\epsilon_0}{2} \left( \frac{\Delta V}{d} \right)^2 = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \approx 5.46 \times 10^{-4} \text{ J/m}^3 .$$

3. Ένας σφαιρικός πυκνωτής έχει φορτίο  $Q$  και οπλισμούς εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας  $a$ ,  $b$  αντίστοιχα. Με χρήση του νόμου Gauss βρείτε το πεδίο  $\vec{E}$  ανάμεσα στους οπλισμούς, την τάση  $V$  και τη χωρητικότητα  $C$  του πυκνωτή. Χρησιμοποιώντας την εξίσωση  $u = \epsilon_0 E^2 / 2$  για την πυκνότητα ενέργειας, επιβεβαιώστε ότι η ηλεκτρική ενέργεια ενός σφαιρικού πυκνωτή είναι  $U = Q^2 / (2C)$  (η εξίσωση αυτή ισχύει για πυκνωτή οποιασδήποτε γεωμετρίας).

### ΛΥΣΗ

Λόγω ομοιόμορφης κατανομής φορτίου και συμμετρίας, αναμένουμε το ηλεκτρικό πεδίο να έχει (σε σφαιρικές συντεταγμένες) (α') μόνο ακτινική συνιστώσα και (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα.

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss,  $S$ , σφαίρα με ακτίνα  $r$  μεταξύ  $a$ ,  $b$ , ομόκεντρη του πυκνωτή. Η ηλεκτρική ροή από αυτή είναι

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \int_S E dA = E(r) 4\pi r^2 .$$

Από το νόμο του Gauss

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(r) = \frac{k_e Q}{r^2} \Rightarrow \vec{E} = \frac{k_e Q}{r^2} \hat{r}.$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι, από τον ορισμό,

$$V_a - V_b = \int_{C_{a \rightarrow b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Επιλέγω ως καμπύλη  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο στην ακτίνα της σφαίρας, με κατεύθυνση από  $a$  προς  $b$ . Επομένως

$$\Delta V = \int_a^b \frac{k_e Q}{r^2} dr = k_e Q \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Η χωρητικότητα είναι

$$C = \left| \frac{Q}{\Delta V} \right| = \frac{ab}{k_e(b-a)}.$$

Η χωρική πυκνότητα ενέργειας,  $u(\vec{r})$ , είναι

$$u(\vec{r}) = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 = \frac{k_e}{8\pi} \frac{Q^2}{r^4},$$

στο χώρο μεταξύ των οπλισμών. Εκτός του πυκνωτή το πεδίο είναι 0. Η συνολική ενέργεια είναι

$$\begin{aligned} U &= \iiint u dV = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b u r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{k_e}{8\pi} \frac{Q^2}{r^2} \sin \theta dr d\theta d\phi = \frac{k_e Q^2}{8\pi} \int_a^b \frac{1}{r^2} dr \int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi \\ &= \frac{k_e Q^2}{8\pi} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) \cdot 2 \cdot 2\pi = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{k_e(b-a)}{ab} \right) = \frac{Q |\Delta V|}{2} = \frac{Q^2}{2C}. \end{aligned}$$

4.
  - Ένας κυλινδρικός πυκνωτής έχει φορτίο  $Q$ , μήκος  $L$  και οπλισμούς εσωτερικής και εξωτερικής ακτίνας  $a$ ,  $b$  αντίστοιχα. Βρείτε την τάση  $V$  και τη χωρητικότητα  $C$  του πυκνωτή.
  - Ομοαξονικό καλώδιο έχει εσωτερική διάμετρο του εξωτερικού αγωγού ίση με 0.9 cm και είναι γεμισμένο με πολυαιθυλένιο το οποίο έχει σχετική διηλεκτρική σταθερά 2.3. Αν η χωρητικότητα ανά μονάδα μήκους του καλωδίου είναι 40 pF/m, ποια είναι η διάμετρος του εσωτερικού αγωγού;

## ΛΥΣΗ

- Θεωρούμε ότι το μήκος  $L$  είναι πολύ μεγάλο ώστε να μπορούμε να αγνοήσουμε την ασυμμετρία στα άκρα. Λόγω ομοιόμορφης κατανομής φορτίου και συμμετρίας, αναμένουμε το ηλεκτρικό πεδίο να έχει (σε κυλινδρικές συντεταγμένες) (α') μόνο ακτινική συνιστώσα και (β') μέτρο που εξαρτάται μόνο από την ακτίνα. Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss ένα κύλινδρο με άξονα τον άξονα του πυκνωτή, ύψος  $L$  και ακτίνα  $R$  μεταξύ των  $a$ ,  $b$ . Η ηλεκτρική ροή από τις βάσεις του κυλίνδρου Gauss είναι 0 καθώς το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο σε αυτές. Από την παράπλευρη επιφάνεια,  $S$ , η ροή είναι

$$\Phi_E = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(R)2\pi RL.$$

Από το νόμο του Gauss

$$\Phi_E = \frac{Q}{\epsilon_0} \Rightarrow E(R) = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 RL}.$$

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι, από τον ορισμό,

$$V_a - V_b = \int_{C_{a \rightarrow b}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Επιλέγουμε ως καμπύλη  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που είναι παράλληλο στην ακτίνα του κυλίνδρου, με κατεύθυνση από  $a$  προς  $b$  (είναι δηλαδή παράλληλο στο ηλεκτρικό πεδίο). Σε αυτό  $ds \equiv dR$ . Επομένως

$$\Delta V = \int_a^b E(R) dR = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \int_a^b \frac{1}{R} dR = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln(b/a).$$

Η χωρητικότητα είναι

$$C = \frac{Q}{\Delta V} = \frac{Q}{\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln(b/a)} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(b/a)}.$$

- Έχουμε από τα δεδομένα  $\epsilon = \kappa\epsilon_0$ ,  $\kappa = 2.3$ ,  $b = 9 \text{ mm}$ ,  $C/L = 40 \text{ pF/m}$ . Από τον τύπο που καταλήξαμε πριν

$$\frac{C}{L} = \frac{2\pi\kappa\epsilon_0}{\ln(b/a)} \Rightarrow \ln(b/a) = \frac{\kappa}{2\kappa_e C/L} \Rightarrow a = b \exp\left(-\frac{\kappa}{2\kappa_e C/L}\right).$$

Με αντικατάσταση,  $a \approx 0.37 \text{ mm}$ .

5. Η απόσταση μεταξύ των οπλισμών ενός επίπεδου πυκνωτή που βρίσκεται στον αέρα είναι  $1.5\text{ cm}$  και κάθε οπλισμός έχει εμβαδόν  $25\text{ cm}^2$ . Οι οπλισμοί φορτίζονται έως ότου αποκτήσουν διαφορά δυναμικού  $250\text{ V}$  και ύστερα αποσυνδέονται από την τροφοδοσία. Στη συνέχεια ο πυκνωτής εμβαπτίζεται σε νερό. Υποθέστε ότι το νερό είναι μονωτής με διηλεκτρική σταθερά  $\kappa = 80$ . Βρείτε

- (α') το φορτίο των οπλισμών πριν και μετά την εμβάπτιση,  
 (β') τη χωρητικότητα και τη διαφορά δυναμικού μετά την εμβάπτιση και  
 (γ') τη μεταβολή της ενέργειας του πυκνωτή.

### ΛΥΣΗ

Η αρχική χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$C = \epsilon_0 \frac{A}{d} \approx 1.475\text{ pF} .$$

Το φορτίο του είναι

$$Q = C\Delta V = \epsilon_0 \frac{A\Delta V}{d} \approx 369\text{ pC} .$$

Το φορτίο δεν αλλάζει μετά την εμβάπτιση (δεν συνδέεται σε κύκλωμα ώστε να υπάρξει μεταφορά φορτίου):  $Q' = Q$ .

Η χωρητικότητα μετά την εμβάπτιση είναι

$$C' = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} = \kappa C \approx 118\text{ pF} .$$

Η διαφορά δυναμικού γίνεται

$$\Delta V' = \frac{Q'}{C'} = \frac{Q}{\kappa C} = \frac{\Delta V}{\kappa} = 3.125\text{ V} .$$

Η αποθηκευμένη ενέργεια πριν την εμβάπτιση είναι

$$U = \frac{Q^2}{2C} \approx 46.1\text{ nJ} .$$

Μετά είναι

$$U' = \frac{Q'^2}{2C'} = \frac{1}{\kappa} \frac{Q^2}{2C} = \frac{U}{\kappa} .$$

Η μεταβολή στην ενέργεια είναι

$$\Delta U = U' - U = U \frac{1 - \kappa}{\kappa} = -\frac{79}{80} U \approx -45.5\text{ nJ} .$$

6. Μια συγκεκριμένη ουσία έχει διηλεκτρική σταθερά 2.8 και διηλεκτρική αντοχή (μέγιστο ηλεκτρικό πεδίο)  $18\text{ MV/m}$ . Αν χρησιμοποιείται ως διηλεκτρικό υλικό σε ένα επίπεδο πυκνωτή, πόσο είναι το ελάχιστο εμβαδό των οπλισμών του πυκνωτή ώστε η χωρητικότητα να είναι  $0.07\text{ }\mu\text{F}$  και να εξασφαλίζεται ότι ο πυκνωτής μπορεί να αντέξει μια διαφορά δυναμικού  $4\text{ kV}$ ;

**ΛΥΣΗ**

Η χωρητικότητα επίπεδου πυκνωτή με εμβαδό κάθε οπλισμού  $A$ , απόσταση οπλισμών  $d$  και διηλεκτρικό με σταθερά  $\kappa$  μεταξύ των οπλισμών είναι

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} . \quad (7.2)$$

Το ηλεκτρικό πεδίο μεταξύ των οπλισμών είναι ομογενές και κάθετο στους οπλισμούς. Η διαφορά δυναμικού των οπλισμών σχετίζεται με το πεδίο με την εξίσωση

$$V_+ - V_- = \int_{L_{+ \rightarrow -}} \vec{E} \cdot d\vec{s} .$$

Επιλέγω ως καμπύλη  $L$  το ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στους οπλισμούς. Το μήκος του είναι  $d$  και πάνω σε αυτό το στοιχειώδες μήκος και το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλα. Έχουμε

$$\Delta V = \int_{L_{+ \rightarrow -}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_{L_{+ \rightarrow -}} ds = Ed \Rightarrow d = \frac{\Delta V}{E} .$$

Με αντικατάσταση στην (7.2) έχουμε

$$A = \frac{C}{\kappa \epsilon_0} \frac{\Delta V}{E} .$$

Καθώς πρέπει  $E \leq E_{\max} \equiv 18 \text{ MV/m}$ , ισχύει

$$A \geq \frac{C}{\kappa \epsilon_0} \frac{\Delta V}{E_{\max}} .$$

Επομένως,

$$A_{\min} = \frac{C}{\kappa \epsilon_0} \frac{\Delta V}{E_{\max}} = 0.628 \text{ m}^2 .$$

7. Οι παράλληλοι οπλισμοί σε ένα πυκνωτή γεμάτο με αέρα, με εμβαδόν οπλισμού  $8.5 \text{ cm}^2$  και απόσταση οπλισμών  $3 \text{ mm}$ , είναι φορτισμένοι από μια μπαταρία των  $6 \text{ V}$ . Στη συνέχεια αποσυνδέονται από την μπαταρία και απομακρύνονται ο ένας από τον άλλο χωρίς να εκφορτισθούν, σε μια απόσταση  $8 \text{ mm}$  μεταξύ τους. Βρείτε (α') τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών, (β') την αρχική και (γ') την τελική αποθηκευμένη ενέργεια.

**ΛΥΣΗ**

Η χωρητικότητα του πυκνωτή είναι

$$C = \frac{\epsilon_0 A}{d} .$$

Ο πυκνωτής έχει αποκτήσει με τη φόρτιση φορτίο

$$Q = CV = \frac{\epsilon_0 AV}{d}.$$

Έχει αρχική αποθηκευμένη ενέργεια

$$U = \frac{1}{2}QV = \frac{\epsilon_0 AV^2}{2d}.$$

Με την αλλαγή της απόστασης των οπλισμών αλλάζει η χωρητικότητα:

$$C' = \frac{\epsilon_0 A}{d'} = C \frac{d}{d'}.$$

Το φορτίο παραμένει το ίδιο, άρα η νέα διαφορά δυναμικού είναι

$$V' = \frac{Q}{C'} = \frac{Q}{C} \frac{d'}{d} = V \frac{d'}{d}.$$

Η τελική ενέργεια είναι

$$U' = \frac{1}{2}QV' = \frac{1}{2}QV \frac{d'}{d} = U \frac{d'}{d}.$$

Με αντικατάσταση,  $V' = 16 \text{ V}$ ,  $U \approx 45.135 \text{ pJ}$ ,  $U' \approx 120.36 \text{ pJ}$ .

### 7.5.2 Ηλεκτρικό ρεύμα — Αντίσταση

- Ένα κυλινδρικό σύρμα με αντίσταση  $6 \Omega$  τεντώνεται έτσι ώστε το μήκος του να γίνει 3 φορές μεγαλύτερο του αρχικού του μήκους. Να βρείτε την αντίσταση του μακρύτερου σύρματος, υποθέτοντας ότι η ειδική αντίσταση, ο συνολικός όγκος και η πυκνότητα του υλικού δεν μεταβάλλονται.

#### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι η αντίσταση ωμικού αγωγού με μήκος  $\ell$ , εμβαδό διατομής  $A$  και ειδικής αντίστασης  $\rho$  είναι

$$R = \rho \frac{\ell}{A}.$$

Αν τεντωθεί σε μήκος  $\ell'$  διατηρώντας τον όγκο του, πρέπει η νέα διατομή του να έχει εμβαδόν  $A'$  τέτοιο ώστε  $\ell A = \ell' A'$ . Επομένως  $A/A' = \ell'/\ell$ . Η αντίστασή του μετά το τέντωμα είναι

$$R' = \rho \frac{\ell'}{A'} = \rho \frac{\ell}{A} \frac{\ell'}{\ell} \frac{A}{A'} = R \left( \frac{\ell'}{\ell} \right)^2.$$

Καθώς  $\ell'/\ell = 3$ ,  $R' = 9R = 54 \Omega$ .

2. Δύο ομόκεντρα σφαιρικά μεταλλικά κελύφη με ακτίνες  $a$ ,  $b$ , αντίστοιχα, διαχωρίζονται από αγωγίμο υλικό με αγωγιμότητα  $\sigma$ .
- Αν διατηρούνται σε διαφορά δυναμικού  $\Delta V$ , ποιο είναι το ρεύμα που ρέει μεταξύ τους;
  - Ποια είναι η αντίσταση μεταξύ τους;

## ΛΥΣΗ

**α' τρόπος** Καθώς έχουμε δεδομένη τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σφαιρικών επιφανειών, μπορούμε να βρούμε το ρεύμα που ρέει μεταξύ τους αν υπολογίσουμε την αντίσταση του αγωγίμου υλικού.

Ξερούμε ότι ένας αγωγός με ειδική αντίσταση  $\rho = 1/\sigma$ , διατομή  $A$  στη ροή του ρεύματος και μήκος  $d\ell$  έχει αντίσταση

$$dR = \rho \frac{d\ell}{A} = \frac{d\ell}{\sigma A}.$$

Επομένως, ένα κέλυφος του υλικού, με ακτίνα  $r$  μεταξύ  $a$ ,  $b$ , με εμβαδόν διατομής στη φορά του ρεύματος  $A = 4\pi r^2$  και πάχος  $dr$  κατά τη διεύθυνση του ρεύματος έχει αντίσταση

$$dR = \frac{dr}{4\pi\sigma r^2}.$$

Η συνολική αντίσταση είναι

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{dr}{4\pi\sigma r^2} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Το ρεύμα είναι

$$I = \frac{\Delta V}{R} = 4\pi\sigma\Delta V \frac{ab}{b-a}.$$

**β' τρόπος** Το σύστημα είναι ουσιαστικά ένας σφαιρικός πυκνωτής, στον οποίο όμως μπορεί να περάσει ρεύμα από τον ένα οπλισμό στον άλλο.

Έστω  $Q$  είναι το φορτίο του εσωτερικού οπλισμού. Με εφαρμογή του νόμου Gauss, εύκολα δείχνεται ότι στο χώρο μεταξύ των οπλισμών το ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \hat{r}.$$

Χρησιμοποιήσαμε σφαιρικές συντεταγμένες λόγω της συμμετρίας.

Η διαφορά δυναμικού στις δύο επιφάνειες  $A$ ,  $B$ , είναι

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s},$$

όπου  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα από τη μία επιφάνεια στην άλλη, παράλληλα στο  $\hat{r}$ . Σε αυτό  $d\vec{s} = dr\hat{r}$ , και

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_a^b \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

Άρα,

$$\vec{E} = (V_A - V_B) \frac{ab}{b-a} \frac{1}{r^2} \hat{r}.$$

Η πυκνότητα ρεύματος είναι  $\vec{J} = \sigma \vec{E}$  και το συνολικό ρεύμα μεταξύ των επιφανειών

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

όπου  $S$  μια σφαίρα με ακτίνα μεταξύ των  $a, b$ . Αλλά,

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \sigma \int_S \vec{E} \cdot d\vec{A} = \sigma \frac{Q}{\epsilon_0} = 4\pi\sigma \frac{ba}{b-a} \Delta V.$$

Η αντίσταση είναι

$$R = \frac{\Delta V}{I} = \frac{1}{4\pi\sigma} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right).$$

3. Δύο ομοαξονικοί μεταλλικοί κύλινδροι με ακτίνες  $a, b$ , και άπειρο μήκος, διαχωρίζονται από αγωγίμο υλικό με αγωγιμότητα  $\sigma$  που δεν είναι ομοιόμορφη. Συγκεκριμένα,  $\sigma = k/r$ , όπου  $r$  η απόσταση από τον άξονα και  $k$  σταθερά. Βρείτε την αντίσταση μεταξύ των κυλίνδρων.

### ΛΥΣΗ

**α' τρόπος** Ξερούμε ότι ένας αγωγός με ειδική αντίσταση  $\rho = 1/\sigma$ , διατομή  $A$  στη ροή του ρεύματος και μήκος  $d\ell$  έχει αντίσταση

$$dR = \rho \frac{d\ell}{A} = \frac{d\ell}{\sigma A}.$$

Επομένως, ένα κυλινδρικό τμήμα του υλικού, με ακτίνα  $r$  μεταξύ  $a, b$ , ύψος  $L$ , με εμβαδόν διατομής στη φορά του ρεύματος  $A = 2\pi rL$  και πάχος  $dr$  κατά τη διεύθυνση του ρεύματος έχει αντίσταση

$$dR = \frac{dr}{2\pi rL\sigma} = \frac{dr}{2\pi kL}.$$

Η συνολική αντίσταση είναι

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{dr}{2\pi kL} = \frac{b-a}{2\pi kL}.$$



**β' τρόπος** Το σύστημα έχει κυλινδρική συμμετρία. Για την περιγραφή του διευκολύνουν οι κυλινδρικές συντεταγμένες, με άξονα  $z$  τον άξονα των κυλίνδρων.

Το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε μετατόπιση παράλληλα στον  $z$  και σε περιστροφή γύρω από αυτόν. Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο δεν εξαρτάται από  $z$ ,  $\phi$  αλλά μόνο από την απόσταση  $r$  από τον άξονα:  $\vec{E} = \vec{E}(r)$ .

Το σύστημα είναι επίσης αναλλοίωτο σε περιστροφή κατά  $180^\circ$  γύρω από οποιοδήποτε άξονα κάθετο στον  $z$ . Σε κάθε σημείο που θέλουμε να υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο μπορούμε να ορίσουμε ένα τέτοιο άξονα. Η περιστροφή γύρω από αυτόν πρέπει να αφήνει το ηλεκτρικό πεδίο ίδιο. Επομένως, δεν υπάρχει κάθετη συνιστώσα του  $\vec{E}$ . Καταλήγουμε ότι  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει ίδιο μέτρο σε όσα σημεία απέχουν συγκεκριμένη απόσταση από τον άξονα  $z$ . Ορίζω μια επιφάνεια Gauss να αποτελείται από αυτά τα σημεία, δηλαδή, μια κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας  $\rho$  και ύψος  $L$ . Η επιφάνεια κλείνει με δύο βάσεις κάθετες στον  $z$ . Η ροή του  $\vec{E}$  από αυτή την επιφάνεια είναι  $E(\rho)2\pi\rho L$  και σύμφωνα με το νόμο Gauss ισούται με  $Q/\epsilon_0$ , αν  $b > \rho \geq a$ . Έστω  $\lambda$  είναι το φορτίο ανά μονάδα μήκους που περικλείεται από την επιφάνεια. Τότε  $Q = \lambda L$  και

$$\vec{E}(\rho) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0\rho} \hat{r}.$$

Η χωρική πυκνότητα ρεύματος είναι

$$\vec{J}(r) = \sigma \vec{E} = \frac{k\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Από ένα στοιχειώδη όγκο του αγωγικού υλικού σε απόσταση  $r$ , με επιφάνεια  $dA = r d\phi dz$  κατά μήκος του  $\vec{J}$ , και πάχος  $dr$ , περνά ρεύμα

$$dI = J(r) dA \Rightarrow I(r) = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^L dz r \frac{k\lambda}{2\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{k\lambda L}{\epsilon_0} \frac{1}{r}.$$

Η (απόλυτη) διαφορά δυναμικού στα άκρα του, κατά μήκος της ροής του ρεύματος, είναι  $dV = E(r) dr$ . Η αντίσταση αυτού του όγκου είναι

$$dR = \frac{dV}{I} = \frac{1}{2\pi kL} dr \Rightarrow R = \int_a^b \frac{1}{2\pi kL} dr = \frac{b-a}{2\pi kL}.$$

4. Μπαταρία με ΗΕΔ  $\mathcal{E}$  και εσωτερική αντίσταση  $r$  συνδέεται με συσκευή που παρουσιάζει μεταβλητή αντίσταση  $R$ . Αν θέλουμε να μεταφέρουμε τη μέγιστη δυνατή ισχύ στη συσκευή, πόσο πρέπει να είναι το  $R$ ;

**ΛΥΣΗ**

Το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα είναι  $I = \mathcal{E}/(R + r)$ . Η ισχύς που μεταφέρεται στη συσκευή είναι

$$P = I^2 R = \mathcal{E}^2 \frac{R}{(R + r)^2}.$$

Ακρότατη τιμή έχουμε για  $R$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{d}{dR} \left( \frac{R}{(R + r)^2} \right) = 0 \Rightarrow \frac{(R + r)^2 - R2(R + r)}{(R + r)^4} = \frac{r - R}{(R + r)^3} = 0 \Rightarrow R = r.$$

Εύκολα δείχνεται ότι η δεύτερη παράγωγος είναι αρνητική, οπότε με  $R = r$  η ισχύς είναι μέγιστη,  $P_{\max} = \mathcal{E}^2/(4r)$ .

5. Χάλκινο σύρμα έχει διάμετρο 1.02 mm, ειδική αντίσταση  $\rho = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$  και διαρρέεται από ρεύμα  $I = 1.67 \text{ A}$ . Υπολογίστε

- το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στο σύρμα,
- τη διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του σύρματος που απέχουν 50 m,
- την αντίσταση τμήματος του σύρματος μήκους 50 m.

**ΛΥΣΗ**

Από το νόμο του Ohm:

$$J = \frac{E}{\rho} \Rightarrow E = \rho J.$$

Η πυκνότητα ρεύματος είναι  $J = I/A$ , άρα

$$E = \rho \frac{I}{A}.$$

Η διατομή του αγωγού είναι  $A = \pi(d/2)^2$  με  $d = 1.02 \text{ mm}$ . Με αντικατάσταση,  $E \approx 3.52 \times 10^{-2} \text{ V/m}$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο στον αγωγό είναι σταθερό. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ δύο σημείων του  $A$ ,  $B$ , με απόσταση  $\ell = 50 \text{ m}$  είναι

$$\Delta V = V_A - V_B = \int_{C_{A \rightarrow B}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = E \int_A^B ds = E\ell.$$

Άρα  $\Delta V \approx -1.76 \text{ V}$ .

Η αντίσταση  $R$  του συγκεκριμένου τμήματος είναι

$$R = \frac{\Delta V}{I} \approx 1.05 \Omega.$$

6. Ένα τμήμα σύρματος από χρωμιονικελίνη με ακτίνα 2.5 mm πρόκειται να χρησιμοποιηθεί στην περιέλιξη ενός θερμαντικού πηνίου. Αν το πηνίο πρέπει να διαρρέεται από ρεύμα 9.25 A όταν στα άκρα του εφαρμόζεται τάση 120 V, βρείτε

(α') την απαιτούμενη αντίσταση του πηνίου και

(β') το μήκος σύρματος που χρειάζεται για την περιέλιξη.

Δίνεται ότι η χρωμιονικελίνη έχει ειδική αντίσταση  $\rho = 1 \times 10^{-6} \Omega \text{ m}$ .

### ΛΥΣΗ

Επιθυμούμε να έχει το πηνίο αντίσταση

$$R = \frac{\Delta V}{I} \approx 12.97 \Omega .$$

Η αντίσταση του σύρματος συνδέεται με το μήκος του,  $\ell$ , την ακτίνα του,  $r$ , και την ειδική του αντίσταση με τη σχέση

$$R = \rho \frac{\ell}{\pi r^2} .$$

Επομένως,

$$\ell = \frac{\pi r^2 R}{\rho} = \frac{\pi r^2 \Delta V}{I \rho} .$$

Με αντικατάσταση,  $\ell \approx 254.72 \text{ m}$ .

7. Δύο αγωγοί είναι κατασκευασμένοι από το ίδιο υλικό και έχουν το ίδιο μήκος. Ο αγωγός  $A$  είναι ένα συμπαγές σύρμα διαμέτρου 1 mm. Ο αγωγός  $B$  είναι ένας κούφιος σωλήνας εξωτερικής διαμέτρου 2 mm και εσωτερικής διαμέτρου 1 mm. Βρείτε το λόγο των αντιστάσεων  $R_A/R_B$  μετρημένων ανάμεσα στα άκρα τους.

### ΛΥΣΗ

Έστω  $\ell$  είναι το μήκος των αγωγών,  $\rho$  η ειδική αντίσταση του υλικού,  $d_A = 1 \text{ mm}$  η διάμετρος του  $A$ ,  $d_B^{(2)} = 2 \text{ mm}$  η εξωτερική διάμετρος του  $B$  και  $d_B^{(1)} = 1 \text{ mm}$  η εσωτερική διάμετρος του  $B$ .

Η επιφάνεια της διατομής του  $A$  είναι  $A_A = \pi(d_A/2)^2$ . Η αντίστασή του είναι

$$R_A = \rho \frac{\ell}{A_A} = \frac{4\rho\ell}{\pi d_A^2} .$$

Η επιφάνεια της διατομής του  $B$  είναι  $A_B = \pi \left( d_B^{(2)}/2 \right)^2 - \pi \left( d_B^{(1)}/2 \right)^2$ . Η αντίστασή του είναι

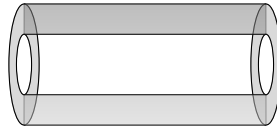
$$R_B = \rho \frac{\ell}{A_B} = \frac{4\rho\ell}{\pi \left( \left( d_B^{(2)} \right)^2 - \left( d_B^{(1)} \right)^2 \right)}.$$

Για το λόγο  $R_A/R_B$  έχουμε

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{\left( d_B^{(2)} \right)^2 - \left( d_B^{(1)} \right)^2}{d_A^2}.$$

Με αντικατάσταση,  $R_A/R_B = 3$ .

8. Μια ηλεκτρική αντίσταση είναι κατασκευασμένη από υλικό ειδικής αντίστασης  $\rho$  σε σχήμα κοίλου κυλίνδρου μήκους  $L$  με εσωτερική ακτίνα  $r_a$  και εξωτερική  $r_b$ . Εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού μεταξύ των βάσεων του κυλίνδρου που προκαλεί ρεύμα παράλληλο προς τον άξονα. Βρείτε μια γενική έκφραση της αντίστασης συναρτήσει των  $L$ ,  $\rho$ ,  $r_a$  και  $r_b$ .



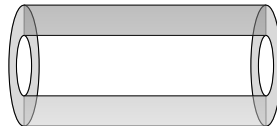
#### ΛΥΣΗ

Η αντίσταση είναι ανάλογη του μήκους του αγωγού (κατά τη φορά του ρεύματος), αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού της διατομής του (κάθετα στο ρεύμα) και ο συντελεστής αναλογίας είναι η ειδική αντίσταση.

Το εμβαδόν της διατομής είναι  $A = \pi(r_b^2 - r_a^2)$  άρα

$$R = \rho \frac{L}{A} = \rho \frac{L}{\pi(r_b^2 - r_a^2)}.$$

9. Το κενό ανάμεσα σε δύο ομοαξονικούς αγωγίμους σωλήνες μήκους  $L$  έχει πληρωθεί με υλικό ειδικής αντίστασης  $\rho$ . Ο εσωτερικός σωλήνας έχει ακτίνα  $a$  και ο εξωτερικός  $b$ . Εφαρμόζεται διαφορά δυναμικού μεταξύ εσωτερικής και εξωτερικής επιφάνειας. Ποια είναι η ολική αντίσταση, για ακτινική ροή του ρεύματος; Μπορείτε να αγνοήσετε την αντίσταση των αγωγίμων σωλήνων.



**ΛΥΣΗ**

Η αντίσταση είναι ανάλογη του μήκους του αγωγού (κατά τη φορά του ρεύματος), αντιστρόφως ανάλογη του εμβαδού της διατομής του (κάθετα στη φορά του ρεύματος) και ο συντελεστής αναλογίας είναι η ειδική αντίσταση.

Το ρεύμα διαρρέει υλικό με διαφορετική διατομή σε κάθε απόσταση από τον άξονα. Σε απόσταση  $r$  η διατομή του υλικού είναι  $2\pi rL$ . Το τμήμα από  $r$  έως  $r + dr$  παρουσιάζει μια στοιχειώδη αντίσταση

$$dR = \rho \frac{dr}{2\pi Lr}.$$

Η συνολική αντίσταση είναι

$$R = \int dR = \int_a^b \frac{\rho}{2\pi Lr} dr = \frac{\rho}{2\pi L} \ln\left(\frac{b}{a}\right).$$

10. Θέλουμε να κατασκευάσουμε ομογενές σύρμα με αντίσταση  $R = 0.5 \Omega$  χρησιμοποιώντας ολόκληρη ποσότητα  $1 \text{ g}$  χαλκού. Ποια τιμή πρέπει να έχει (α') το μήκος και (β') η διάμετρος του σύρματος;

Δίνεται ότι ο χαλκός έχει ειδική αντίσταση  $\rho = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$  και πυκνότητα  $d = 8.92 \text{ g/cm}^3$ .

**ΛΥΣΗ**

Ο όγκος της ποσότητας  $M = 1 \text{ g}$  είναι  $V = M/d$ . Από αυτό το υλικό θα φτιάξουμε κύλινδρο με ύψος  $\ell$  και επιφάνεια κάθε βάσης  $A$ . Ισχύει  $V = \ell A$ . Επομένως,

$$A = \frac{M}{d\ell}.$$

Η αντίστασή του,  $R$ , θα είναι

$$R = \rho \frac{\ell}{A} = \rho \frac{d\ell^2}{M} \Rightarrow \ell = \sqrt{\frac{MR}{\rho d}}.$$

Με αντικατάσταση,  $\ell \approx 1.805 \text{ m}$ . Η επιφάνεια  $A$  θα είναι  $A = 62.1 \times 10^{-9} \text{ m}^2$  και συνεπώς η διάμετρος του κυλίνδρου είναι  $2r = 2\sqrt{A/\pi} \approx 281 \mu\text{m}$ .

11. Τμήμα χάλκινου σύρματος συνολικού μήκους  $3 \text{ m}$  αποτελείται από τμήμα (α) μήκους  $1.2 \text{ m}$  με διάμετρο  $1.6 \text{ mm}$  και τμήμα (β) μήκους  $1.8 \text{ m}$  με διάμετρο  $0.8 \text{ mm}$ . Το ρεύμα στο τμήμα (α) είναι  $2.5 \text{ mA}$ . Βρείτε

- το ρεύμα στο τμήμα (β),
- το ηλεκτρικό πεδίο στο τμήμα (α),
- το ηλεκτρικό πεδίο στο τμήμα (β),
- τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των άκρων του όλου σύρματος, μήκους  $3 \text{ m}$ .

Δίνεται ότι ο χαλκός έχει ειδική αντίσταση  $\rho = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ .

**ΛΥΣΗ**

Το ρεύμα είναι το ίδιο και στο δεύτερο τμήμα, αλλιώς θα είχαμε συσσώρευση ή παραγωγή φορτίου.

Το ηλεκτρικό πεδίο σε τμήμα διαμέτρου  $d$  έχει μέτρο

$$E = \frac{J}{\sigma} = \frac{I\rho}{A} = \frac{I\rho}{\pi(d/2)^2}.$$

Με αντικατάσταση για το πρώτο τμήμα,  $E_I \approx 2.14 \times 10^{-5} \text{ V/m}$ . Με αντικατάσταση για το δεύτερο τμήμα,  $E_{II} = 4E_I \approx 8.56 \times 10^{-5} \text{ V/m}$ .

Η συνολική διαφορά δυναμικού είναι

$$\Delta V = V_I + V_{II} = E_I \ell_I + E_{II} \ell_{II}.$$

Με αντικατάσταση,  $\Delta V \approx 1.8 \times 10^{-4} \text{ V}$ .

12. Ένα χάλκινο φύλλο έχει πάχος  $t = 2 \text{ mm}$  και η επιφάνειά του έχει διαστάσεις  $L_1 \times L_2$ , όπου  $L_2 = 24 \text{ cm}$  και  $L_1 = 8 \text{ cm}$ . Αν οι πλευρές με το μεγαλύτερο μήκος στραφούν και ενωθούν ώστε να σχηματισθεί ένας κοίλος κύλινδρος ύψους  $L_2$ , ποια θα είναι η ηλεκτρική αντίσταση μεταξύ των βάσεων του κυλίνδρου; (Υποθέστε ότι  $L_1 = 2\pi r$ , όπου  $r$  είναι η εσωτερική ακτίνα του κοίλου κυλίνδρου).

Δίνεται ότι ο χαλκός έχει ειδική αντίσταση  $\rho = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ .

**ΛΥΣΗ**

Το εμβαδόν της κάθε βάσης υπολογίζεται ως εξής: Η εσωτερική ακτίνα είναι  $r = L_1/(2\pi)$ . Η εξωτερική ακτίνα είναι  $r' = r + t$ . Το εμβαδόν της βάσης είναι  $A = \pi r'^2 - \pi r^2 = \pi t(2r + t) = t(L_1 + \pi t)$ .

Η αντίσταση είναι

$$R = \rho \frac{L_2}{A} = \rho \frac{L_2}{tL_1 + \pi t^2}.$$

Με αντικατάσταση,  $R \approx 23.92 \mu\Omega$ .

13. Σύρμα από χαλκό έχει διάμετρο  $1.02 \text{ mm}$ . Σύρματα αυτής της διαμέτρου χρησιμοποιούνται για τροφοδοσία λαμπτήρων. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα  $I = 1.67 \text{ A}$  τροφοδοτώντας λαμπτήρα ισχύος  $200 \text{ W}$ . Η πυκνότητα ελευθέρων ηλεκτρονίων είναι  $n = 8.5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ . Υπολογίστε

- το μέτρο της πυκνότητας ρεύματος (που θεωρείται σταθερή),
- το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης των ηλεκτρονίων.

Δίνεται το φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

**ΛΥΣΗ**

Η διατομή του αγωγού έχει επιφάνεια  $A = \pi(d/2)^2$ . Η πυκνότητα ρεύματος είναι

$$J = \frac{I}{A} = \frac{4I}{\pi d^2}.$$

Με αντικατάσταση,  $J \approx 2.045 \times 10^6 \text{ A/m}^2$ .

Η ταχύτητα ολίσθησης είναι

$$v_d = \frac{J}{ne}.$$

Με αντικατάσταση,  $v_d \approx 1.5 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ .

14. Ένας αγωγός έχει εμβαδόν διατομής  $8 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  και διαρρέεται από ρεύμα ίσο με 8 A. Αν η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων αγωγιμότητας είναι  $5 \times 10^{28} \text{ m}^{-3}$ , πόσος χρόνος χρειάζονται τα ηλεκτρόνια για να διασχίσουν 1 m του αγωγού; Πώς συγκρίνεται γενικά η ταχύτητα των ηλεκτρονίων με τις γνωστές θερμικές ταχύτητες των ηλεκτρονίων σε θερμοκρασία δωματίου και γιατί;
- Δίνεται το φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

**ΛΥΣΗ**

Από το μοντέλο Drude

$$J = nev_d \Rightarrow v_d = \frac{J}{ne} = \frac{I}{neA}.$$

Ο χρόνος για να διανύσουν τα ηλεκτρόνια μήκος  $\ell$  είναι  $t = \ell/v_d$ .

Με αντικατάσταση, η ταχύτητα ολίσθησης είναι  $v_d = 1.25 \times 10^{-4} \text{ m/s}$  και ο χρόνος  $t = 8000 \text{ s}$ .

Η θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων προκύπτει από τη στατιστική αντιμετώπιση τους ως ιδανικό αέριο. Η (μεταφορική) κινητική ενέργεια σχετίζεται με τη θερμοκρασία του ιδανικού αερίου με τη σχέση

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_bT.$$

Άρα, η θερμική ταχύτητα των ηλεκτρονίων είναι

$$v_{th} = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e}}.$$

Σε θερμοκρασία δωματίου είναι  $v_{th} \approx 1.2 \times 10^5 \text{ m/s}$ . Αυτή είναι η ταχύτητα μεταξύ των συγκρούσεων με τα άτομα του αγωγού. Είναι πολύ μεγαλύτερη από την ταχύτητα ολίσθησης, που είναι η ταχύτητα κίνησης ως ρεύμα.

15. Ένα αλουμινένιο σύρμα με εμβαδόν διατομής  $4 \times 10^{-6} \text{ m}^2$  διαρρέεται από ρεύμα 5 A. Η πυκνότητα του αλουμινίου είναι  $2.7 \text{ g/cm}^3$  και η γραμμομοριακή μάζα είναι  $M = 26.982 \text{ g/mol}$ . Κάθε άτομο αλουμινίου παρέχει ένα ηλεκτρόνιο αγωγιμότητας. Βρείτε την ταχύτητα ολίσθησης των ηλεκτρονίων του σύρματος.

Δίνεται ότι ο αριθμός Avogadro είναι  $N_A \approx 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  και το φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

### ΛΥΣΗ

Η πυκνότητα του ρεύματος είναι

$$J = \frac{I}{A}.$$

Ένα mole αλουμινίου έχει όγκο  $V = M/d$  όπου  $d$  η πυκνότητα του αλουμινίου. Κάθε άτομο παρέχει ένα ηλεκτρόνιο. Επομένως, σε ένα mole τα  $N_A$  άτομα δίνουν  $N_A$  ηλεκτρόνια σε όγκο  $M/d$ . Η χωρική πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι

$$n = \frac{N_A}{M/d} = \frac{N_A d}{M}.$$

Η ταχύτητα ολίσθησης είναι

$$v_d = \frac{J}{ne} = \frac{IM}{N_A d A e}.$$

Με αντικατάσταση,  $v_d \approx 0.1297 \text{ mm/s}$ .

16. Υπολογίστε τη μέση ελεύθερη διαδρομή (μεταξύ δύο διαδοχικών συγκρούσεων) των ηλεκτρονίων στο χαλκό, αν η μέση θερμική ταχύτητα είναι  $8.6 \times 10^5 \text{ m/s}$ .

Δίνεται ότι ο χαλκός έχει ειδική αντίσταση  $\rho = 1.7 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ , πυκνότητα  $8.92 \text{ g/cm}^3$  και γραμμομοριακή μάζα  $M = 63.5 \text{ g/mol}$ . Επίσης, ο αριθμός Avogadro είναι  $N_A \approx 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ , η μάζα ηλεκτρονίου είναι  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  και το φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

### ΛΥΣΗ

Ένα mole χαλκού έχει όγκο  $V = M/d$  όπου  $d$  η πυκνότητα του χαλκού. Κάθε άτομο παρέχει ένα ηλεκτρόνιο. Επομένως, σε ένα mole τα  $N_A$  άτομα δίνουν  $N_A$  ηλεκτρόνια σε όγκο  $M/d$ . Η χωρική πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι

$$n = \frac{N_A}{M/d} = \frac{N_A d}{M}.$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma = \frac{1}{\rho} = \frac{ne^2\tau}{m_e}.$$



Επομένως, ο μέσος χρόνος μεταξύ των συγκρούσεων είναι

$$\tau = \frac{m_e}{ne^2\rho} = \frac{m_e M}{N_A de^2\rho}.$$

Η μέση ελεύθερη διαδρομή είναι

$$\ell = v\tau = \frac{m_e M v}{N_A de^2\rho}.$$

Με αντικατάσταση,  $\ell \approx 21.26 \text{ nm}$ .

17. Αν το μέτρο της ταχύτητας ολίσθησης των ελεύθερων ηλεκτρονίων ενός χάλκινου σύρματος είναι  $7.84 \times 10^{-4} \text{ m/s}$ , ποιο είναι το μέτρο του ηλεκτρικού πεδίου στον αγωγό;

Δίνεται ότι ο χαλκός έχει ειδική αντίσταση  $\rho = 1.72 \times 10^{-8} \Omega \text{ m}$ , πυκνότητα  $d = 8.92 \text{ g/cm}^3$  και γραμμομοριακή μάζα  $M = 63.5 \text{ g/mol}$ . Επίσης, ο αριθμός Avogadro είναι  $N_A \approx 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$  και το φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

#### ΛΥΣΗ

Ένα mole χαλκού έχει όγκο  $V = M/d$  όπου  $d$  η πυκνότητα του χαλκού. Κάθε άτομο παρέχει ένα ηλεκτρόνιο. Επομένως, σε ένα mole τα  $N_A$  άτομα δίνουν  $N_A$  ηλεκτρόνια σε όγκο  $M/d$ . Η χωρική πυκνότητα των ηλεκτρονίων είναι

$$n = \frac{N_A}{M/d} = \frac{N_A d}{M}.$$

Ισχύει ότι  $J = \sigma E = E/\rho$  και  $J = nev_d$ . Άρα

$$E = nev_d \rho = \frac{N_A e v_d d \rho}{M}.$$

Με αντικατάσταση,  $E \approx 0.18 \text{ N/C}$ .

18. Ένας δίσκος φωνόγραφου φέρει μια ομοιόμορφη πυκνότητα στατικού ηλεκτρισμού  $\sigma$ . Αν περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , πόση θα είναι η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος  $\vec{K}$  σε απόσταση  $r$  από το κέντρο;

#### ΛΥΣΗ

Ο δίσκος έχει κυλινδρική συμμετρία. Θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα  $z$  τον άξονα περιστροφής.

Η γραμμική ταχύτητα των φορτίων σε απόσταση  $r$  από το κέντρο είναι  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \hat{k}) \times (r \hat{r}) = \omega r \hat{\phi}$ . Η ταχύτητα προκύπτει εφαπτομενική στον κύκλο με ακτίνα  $r$  και έχει μέτρο  $v = \omega r$ .

Η επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος είναι

$$\vec{K} = \sigma \vec{v} = \sigma \omega r \hat{\phi}.$$

19. Μια ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ακτίνας  $R$ , με συνολικό φορτίο  $Q$ , έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων και περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από τον άξονα  $z$ . Βρείτε την πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}$  σε οποιοδήποτε σημείο  $(r, \phi, \theta)$  στο εσωτερικό της σφαίρας.

**ΛΥΣΗ**

Θα χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες, με άξονα  $z$  τον άξονα περιστροφής.

Η γραμμική ταχύτητα των φορτίων στο σημείο  $(r, \phi, \theta)$  είναι  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = (\omega \hat{k}) \times (r \hat{r}) = \omega r \sin \theta \hat{\phi}$ . Η ταχύτητα προκύπτει εφαπτομενική στη σφαίρα με ακτίνα  $r$  και έχει μέτρο  $v = \omega r \sin \theta$ .

Η χωρική πυκνότητα φορτίων είναι

$$\rho = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{4\pi R^3/3}.$$

Η χωρική πυκνότητα ρεύματος,  $\vec{J}$ , είναι

$$\vec{J} = \rho \vec{v} = \frac{3Q}{4\pi R^3} \omega r \sin \theta \hat{\phi}.$$

**7.5.3 Σύνδεση στοιχείων**

1. Τρεις πυκνωτές  $8\mu\text{F}$ ,  $10\mu\text{F}$  και  $14\mu\text{F}$  συνδέονται στους πόλους μιας μπαταρίας  $12\text{ V}$ . Πόση ενέργεια αποδίδει η μπαταρία αν οι πυκνωτές συνδέονται (α') σε σειρά, (β') παράλληλα.

**ΛΥΣΗ**

Η δυναμική ενέργεια που αποθηκεύεται σε ένα πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ , φορτισμένο με φορτίο  $Q$ , είναι

$$U = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}C(\Delta V)^2.$$

Για ίδια τάση,  $\Delta V$ , η ενέργεια είναι ανάλογη της χωρητικότητας. Η φόρτιση του πυκνωτή σταματά όταν η διαφορά δυναμικού στους οπλισμούς εξισώνεται με την ηλεκτρεγερτική δύναμη της μπαταρίας που τον φορτίζει.

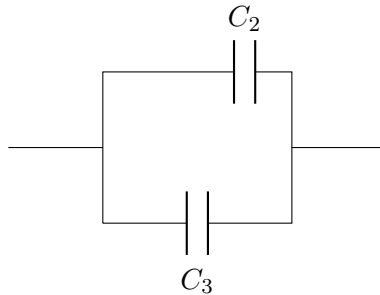
Αν συνδέσουμε τους πυκνωτές σε σειρά, ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας  $C$ , για την οποία ισχύει

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \Rightarrow C \approx 3.37\mu\text{F}.$$

Η ενέργεια είναι  $242.89\mu\text{J}$ .

Αν συνδέσουμε τους πυκνωτές παράλληλα, ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας  $C = C_1 + C_2 + C_3 = 32\mu\text{F}$ . Η ενέργεια είναι  $2304\mu\text{J}$ .

2. Προσδιορίστε την ισοδύναμη χωρητικότητα των πυκνωτών της συνδεσμολογίας του Σχήματος 7.1. Αν τα άκρα της συνδεσμολογίας συνδεθούν με πηγή 12 V, υπολογίστε την τάση και το φορτίο κάθε πυκνωτή. Δίνονται  $C_1 = 3 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 2 \mu\text{F}$ .



Σχήμα 7.1: Άσκηση 2

**ΛΥΣΗ**

Ο πυκνωτής 1 και ο πυκνωτής 2 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Για τη χωρητικότητα  $C_{12}$  ισοδύναμου πυκνωτή ισχύει

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = 2 \mu\text{F}.$$

Η παράλληλη σύνδεση των δύο πυκνωτών με χωρητικότητες  $2 \mu\text{F}$  ισοδυναμεί με πυκνωτή χωρητικότητας  $C_{123} = C_{12} + C_3 = 4 \mu\text{F}$ .

Αν  $\Delta V = 12 \text{ V}$ , ο πυκνωτής 3 έχει αυτή την τάση και φορτίο  $Q_3 = C_3 \Delta V = 24 \mu\text{C}$ . Ο ισοδύναμος πυκνωτής των 1, 2 έχει την ίδια τάση και φορτίο  $Q_{12} = C_{12} \Delta V = 24 \mu\text{C}$ .

Στη σύνδεση σε σειρά, τα φορτία των πυκνωτών 1, 2 είναι ίδια και ίσα με το φορτίο  $Q_{12}$ . Άρα  $Q_1 = Q_2 = 24 \mu\text{C}$ . Για τις τάσεις ισχύει  $\Delta V_1 = Q_1/C_1 = 8 \text{ V}$  και  $\Delta V_2 = Q_2/C_2 = 4 \text{ V}$  και έχουν άθροισμα 12 V, όπως περιμέναμε.

3. Τέσσερις πυκνωτές συνδέονται όπως δείχνει το Σχήμα 7.2.

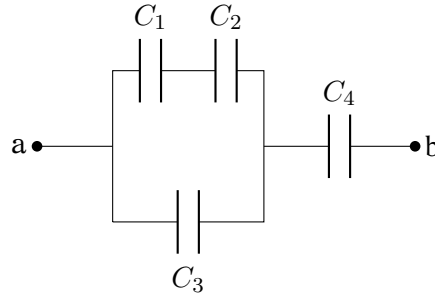
- Βρείτε την ισοδύναμη χωρητικότητα μεταξύ των σημείων  $a$  και  $b$ .
- Υπολογίστε το φορτίο κάθε πυκνωτή αν  $V_{ab} = 15 \text{ V}$ .

Δίνονται:  $C_1 = 15 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 3 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 6 \mu\text{F}$ ,  $C_4 = 20 \mu\text{F}$ .

**ΛΥΣΗ**

Οι πυκνωτές 1 και 2 συνδέονται σε σειρά. Η χωρητικότητα του ισοδύναμου πυκνωτή,  $C_{12}$ , είναι

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = 2.5 \mu\text{F}.$$



Σχήμα 7.2: Άσκηση 3

Ο ισοδύναμος πυκνωτής των 1, 2 και ο πυκνωτής 3 είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Η ισοδύναμη χωρητικότητα είναι  $C_{123} = C_{12} + C_3 = 8.5 \mu\text{F}$ . Ο ισοδύναμος πυκνωτής των 1, 2, 3 και ο πυκνωτής 4 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Για την ισοδύναμη χωρητικότητα ισχύει

$$\frac{1}{C_{1234}} = \frac{1}{C_{123}} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow C_{1234} = 340/57 \mu\text{F} \approx 5.96 \mu\text{F}.$$

Για τα φορτία, αν εφαρμοστεί τάση  $\Delta V = 15 \text{ V}$ , έχουμε:  $Q_{1234} = C_{1234}\Delta V \approx 89.47 \mu\text{C}$ . Αφού ο ισοδύναμος των 1, 2, 3 πυκνωτής και ο 4 είναι σε σειρά, ισχύει  $Q_{123} = Q_4 = Q_{1234} \approx 89.47 \mu\text{C}$ . Η τάση στον 4 είναι  $\Delta V_4 = Q_4/C_4 \approx 4.47 \text{ V}$ .

Η τάση στον ισοδύναμο πυκνωτή των 1, 2, 3 είναι  $\Delta V_{123} = Q_{123}/C_{123} \approx 10.53 \text{ V}$ . Τόση είναι η τάση στον πυκνωτή 3 και στον ισοδύναμο των 1, 2. Για τα φορτία,  $Q_3 = C_3\Delta V_3 \approx 63.16 \mu\text{C}$ ,  $Q_1 = Q_2 = Q_{12} = C_{12}\Delta V_{12} \approx 26.31 \mu\text{C}$ . Η τάση  $\Delta V_1 = Q_1/C_1 \approx 1.75 \text{ V}$  και η  $\Delta V_2 = Q_2/C_2 \approx 8.77 \text{ V}$ .

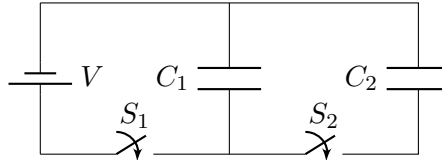
4. Ένας πυκνωτής των  $100 \text{ pF}$  φορτίζεται σε μια διαφορά δυναμικού των  $50 \text{ V}$  και η μπαταρία-φορτιστής αποσυνδέεται. Ο πυκνωτής στη συνέχεια συνδέεται παράλληλα με ένα δεύτερο, αρχικά αφόρτιστο πυκνωτή. Αν η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πρώτου πυκνωτή πέσει στα  $35 \text{ V}$ , ποια είναι η χωρητικότητα του δεύτερου πυκνωτή;

### ΛΥΣΗ

Όταν ολοκληρωθεί η φόρτιση, ο πυκνωτής θα έχει αποκτήσει φορτίο  $Q_1 = C_1 V$ . Όταν συνδεθεί με το δεύτερο πυκνωτή και η διαφορά δυναμικού γίνει  $V' < V$  θα έχει φορτίο  $Q'_1 = C_1 V'$ . Το φορτίο που λείπει,  $Q_1 - Q'_1$ , έχει μεταφερθεί στο δεύτερο πυκνωτή. Αυτός έχει φορτίο  $Q'_2 = Q_1 - Q'_1 = C_1(V - V')$  με διαφορά δυναμικού στα άκρα του  $V'$ . Επομένως, η χωρητικότητά του είναι

$$C_2 = \frac{Q'_2}{V'} = C_1 \frac{V - V'}{V'} \approx 42.86 \text{ pF}.$$

5. Θεωρήστε τη συνδεσμολογία του Σχήματος 7.3, όπου  $C_1 = 6\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 3\mu\text{F}$  και  $V = 20\text{ V}$ . Εάν κλείσουμε πρώτα τον διακόπτη  $S_1$ , φορτίζεται ο πυκνωτής  $C_1$ . Στη συνέχεια ανοίγουμε τον διακόπτη  $S_1$  και συνδέουμε το φορτισμένο πυκνωτή με τον αφόρτιστο κλείνοντας τον διακόπτη  $S_2$ . Υπολογίστε το αρχικό φορτίο που απέκτησε ο πυκνωτής  $C_1$  και το τελικό φορτίο που έχει κάθε πυκνωτής.



Σχήμα 7.3: Άσκηση 5

**ΛΥΣΗ**

Η τάση του  $C_1$  είναι  $V$ . Το φορτίο που αποκτά αρχικά είναι  $Q = C_1 V$ . Ανοίγουμε τον  $S_1$ , κλείνουμε τον  $S_2$  και αφήνουμε να ισορροπήσουν. Οι  $C_1$  και  $C_2$  έχουν ίδια τάση,  $V_1 = V_2$ , και μοιράζονται το φορτίο  $Q$ . Άρα

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} \Rightarrow Q_2 = \frac{C_2}{C_1} Q_1.$$

Αλλά  $Q_1 + Q_2 = Q$ . Επομένως

$$Q = Q_1 \left( 1 + \frac{C_2}{C_1} \right) \Rightarrow Q_1 = Q \frac{C_1}{C_1 + C_2}.$$

Η τάση είναι  $\Delta V = Q_1 / C_1$ .

Με αντικατάσταση,  $Q = 120\mu\text{C}$ ,  $Q_1 = 80\mu\text{C}$ ,  $Q_2 = 40\mu\text{C}$ ,  $\Delta V = 13.33\text{ V}$ .

6. Ένας πυκνωτής αποτελείται από δύο τετραγωνικές μεταλλικές πλάκες πλευράς μήκους  $L$  που έχουν μεταξύ τους απόσταση  $d$ . Το αριστερό μισό του χώρου μεταξύ των οπλισμών γεμίζεται με πολυστυρόλιο ( $\kappa = 2.56$ ) και το δεξί μισό με συνθετικό καουτσούκ ( $\kappa = 6.7$ ). Βρείτε τη χωρητικότητα της διάταξης εάν  $L = 2\text{ cm}$ ,  $d = 0.75\text{ mm}$ . (Ο πυκνωτής μπορεί να θεωρηθεί ως δύο πυκνωτές που συνδέονται παράλληλα.)

**ΛΥΣΗ**

Το αριστερό τμήμα του πυκνωτή έχει οπλισμούς με εμβαδόν  $A_\ell = L^2/2$  και απόσταση  $d$ . Μεταξύ των οπλισμών έχει μονωτή με σχετική διαπερατότητα  $\kappa_\ell$ . Η χωρητικότητά του είναι

$$C_\ell = \frac{\kappa_\ell \epsilon_0 A_\ell}{d} = \kappa_\ell \epsilon_0 \frac{L^2}{2d}.$$



Σχήμα 7.4: Άσκηση 6

Το δεξί τμήμα του πυκνωτή έχει οπλισμούς με εμβαδόν  $A_r = L^2/2$  και απόσταση  $d$ . Μεταξύ των οπλισμών έχει μονωτή με σχετική διαπερατότητα  $\kappa_r$ . Η χωρητικότητά του είναι

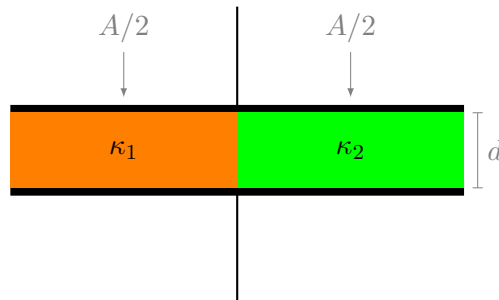
$$C_r = \frac{\kappa_r \epsilon_0 A_r}{d} = \kappa_r \epsilon_0 \frac{L^2}{2d}.$$

Οι δύο πυκνωτές συνδέονται παράλληλα. Ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας

$$C = C_\ell + C_r = \frac{\kappa_\ell + \kappa_r}{2} \epsilon_0 \frac{L^2}{d}.$$

Με αντικατάσταση έχουμε  $C \approx 21.86 \text{ pF}$ .

7. Επίπεδος πυκνωτής με εμβαδόν οπλισμού  $A = 10 \text{ cm}^2$  και με απόσταση οπλισμών  $d = 10 \text{ mm}$ , γεμίζεται με υλικά διηλεκτρικής σταθεράς  $\kappa_1 = 8$  και  $\kappa_2 = 12$ , όπως στο Σχήμα 7.5. Ποια είναι η χωρητικότητά του;



Σχήμα 7.5: Άσκηση 7

### ΛΥΣΗ

Ο πυκνωτής μπορεί να θεωρηθεί ως δύο πυκνωτές που συνδέονται παράλληλα.

Το αριστερό τμήμα του πυκνωτή έχει οπλισμούς με εμβαδόν  $A_1 = A/2$  και απόσταση  $d$ . Μεταξύ των οπλισμών έχει μονωτή με σχετική διαπερατότητα  $\kappa_1$ . Η χωρητικότητά του είναι

$$C_1 = \frac{\kappa_1 \epsilon_0 A_1}{d} = \kappa_1 \epsilon_0 \frac{A}{2d}.$$

Το δεξί τμήμα του πυκνωτή έχει οπλισμούς με εμβαδόν  $A_2 = A/2$  και απόσταση  $d$ . Μεταξύ των οπλισμών έχει μονωτή με σχετική διαπερατότητα  $\kappa_2$ . Η χωρητικότητά του είναι

$$C_2 = \frac{\kappa_2 \epsilon_0 A_2}{d} = \kappa_2 \epsilon_0 \frac{A}{2d}.$$

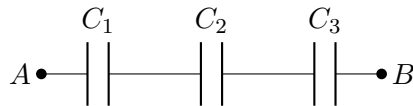
Οι δύο πυκνωτές συνδέονται παράλληλα. Ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας

$$C = C_1 + C_2 = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \epsilon_0 \frac{A}{d}.$$

Με αντικατάσταση,  $C \approx 8.85 \text{ pF}$ .

8. Οι τρεις πυκνωτές στο Σχήμα 7.6 έχουν χωρητικότητες  $C_1 = 10 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 20 \mu\text{F}$ ,  $C_3 = 25 \mu\text{F}$ . Αν κανένας πυκνωτής δεν μπορεί να αντέξει διαφορά δυναμικού μεγαλύτερη από  $100 \text{ V}$  χωρίς να καταρρεύσει

- (α') ποια είναι η μέγιστη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων  $A$  και  $B$ ,  
 (β') ποια είναι η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί στη διάταξη των τριών πυκνωτών;



Σχήμα 7.6: Άσκηση 8

### ΛΥΣΗ

Οι πυκνωτές είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Όταν υπάρξει διαφορά δυναμικού στα άκρα τους αποκτούν το ίδιο φορτίο,  $Q$ . Το μέγιστο φορτίο που μπορεί να έχει ο πυκνωτής  $i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) είναι  $Q_i = C_i V_{\max}$ . Επομένως, ο πυκνωτής με τη μικρότερη χωρητικότητα, ο πρώτος, καθορίζει το κοινό φορτίο:  $Q = C_1 V_{\max} = 1 \text{ mC}$ . Με τόσο φορτίο, οι διαφορές δυναμικού στους πυκνωτές είναι  $V_1 = Q/C_1 = 100 \text{ V}$ ,  $V_2 = Q/C_2 = 50 \text{ V}$ ,  $V_3 = Q/C_3 = 40 \text{ V}$ . Η διαφορά δυναμικού των σημείων  $A$ ,  $B$ , είναι  $\Delta V = V_1 + V_2 + V_3 = 190 \text{ V}$ .

Η μέγιστη ενέργεια που μπορεί να αποθηκευτεί στον πυκνωτή  $i$  είναι  $U_i = Q^2/(2C_i)$ . Η συνολική είναι

$$U = U_1 + U_2 + U_3 = \frac{Q^2}{2} \left( \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} \right) = 95 \text{ mJ}.$$

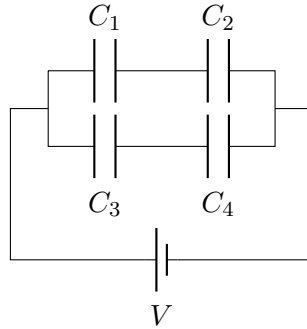
9. Στο Σχήμα 7.7 βρείτε

- (α') την ισοδύναμη χωρητικότητα του συστήματος των τεσσάρων πυκνωτών,

(β') το φορτίο κάθε πυκνωτή,

(γ') τη διαφορά δυναμικού στα άκρα κάθε πυκνωτή.

Δίνονται  $C_1 = 3\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 6\mu\text{F}$ ,  $C_3 = 2\mu\text{F}$ ,  $C_4 = 4\mu\text{F}$ ,  $V = 90\text{ V}$ .



Σχήμα 7.7: Άσκηση 9

#### ΛΥΣΗ

Οι πυκνωτές  $C_1$ ,  $C_2$  είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας  $C_{12}$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = 2\mu\text{F}.$$

Οι πυκνωτές  $C_3$ ,  $C_4$  είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας  $C_{34}$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} \Rightarrow C_{34} \approx 1.33\mu\text{F}.$$

Οι πυκνωτές  $C_{12}$  και  $C_{34}$  είναι συνδεδεμένοι παράλληλα. Ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας  $C_{1234} = C_{12} + C_{34} = 3.33\mu\text{F}$ .

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του  $C_{12}$  είναι ίση με  $V$ , την τάση της μπαταρίας. Το φορτίο που είναι αποθηκευμένο στο σύστημα των  $C_1$ ,  $C_2$  είναι  $Q_{12} = C_{12}V = 180\mu\text{C}$ . Καθώς οι πυκνωτές  $C_1$ ,  $C_2$  είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, οι οπλισμοί τους έχουν ίσο φορτίο. Ο κάθε πυκνωτής έχει φορτίο  $Q_1 = Q_2 = Q_{12} = 180\mu\text{C}$ . Η διαφορά δυναμικού κάθε πυκνωτή είναι  $V_1 = Q_1/C_1 = 60\text{ V}$  και  $V_2 = Q_2/C_2 = 30\text{ V}$ . Φυσικά το άθροισμά τους κάνει  $V$ .

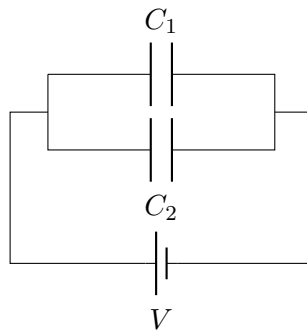
Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του  $C_{34}$  είναι ίση με  $V$ , την τάση της μπαταρίας. Το φορτίο που είναι αποθηκευμένο στο σύστημα των  $C_3$ ,  $C_4$  είναι  $Q_{34} = C_{34}V = 120\mu\text{C}$ . Καθώς οι πυκνωτές  $C_3$ ,  $C_4$  είναι συνδεδεμένοι σε σειρά, οι οπλισμοί τους έχουν ίσο φορτίο. Ο κάθε πυκνωτής έχει φορτίο  $Q_3 = Q_4 = Q_{34} = 120\mu\text{C}$ . Η διαφορά δυναμικού κάθε πυκνωτή είναι  $V_3 = Q_3/C_3 = 60\text{ V}$  και  $V_4 = Q_4/C_4 = 30\text{ V}$ . Φυσικά το άθροισμά τους κάνει  $V$ .



10. Δύο πυκνωτές  $C_1 = 25\mu\text{F}$ ,  $C_2 = 5\mu\text{F}$ , είναι συνδεδεμένοι παράλληλα και φορτίζονται από μπαταρία  $100\text{ V}$ .

- (α') Σχεδιάστε το διάγραμμα κυκλώματος.  
 (β') Υπολογίστε τη συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται στους δύο πυκνωτές.  
 (γ') Αν οι δύο πυκνωτές συνδεθούν σε σειρά, ποια διαφορά δυναμικού πρέπει να εφαρμοστεί στα άκρα αυτών έτσι ώστε να αποθηκευθεί η ίδια ποσότητα ενέργειας όπως πριν.

## ΛΥΣΗ



Σχήμα 7.8: Άσκηση 10

Το διάγραμμα του κυκλώματος είναι στο Σχήμα 7.8.

Η ενέργεια που αποθηκεύεται στους πυκνωτές είναι

$$U = \frac{1}{2}C_1V^2 + \frac{1}{2}C_2V^2 = 0.15\text{ J} .$$

Αν συνδέονταν σε σειρά θα ισοδυναμούσαν με πυκνωτή χωρητικότητας  $C_{12}$  που ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{C_{12}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2} .$$

Η ενέργεια που θα αποθήκευε αυτός με διαφορά δυναμικού  $V'$  θα ήταν

$$U' = \frac{1}{2}C_{12}V'^2 .$$

Για να είναι ίσες πρέπει

$$U = U' \Rightarrow \frac{1}{2}(C_1 + C_2)V^2 = \frac{1}{2}C_{12}V'^2 \Rightarrow \left(\frac{V'}{V}\right)^2 = \frac{(C_1 + C_2)^2}{C_1C_2} \Rightarrow V' = V\frac{C_1 + C_2}{\sqrt{C_1C_2}} .$$

Άρα πρέπει να έχει διαφορά δυναμικού  $V' \approx 268\text{ V}$ .

11. Εννέα χάλκινα καλώδια μήκους  $\ell$  και διαμέτρου  $d$  συνδέονται παράλληλα για να σχηματίσουν ένα σύνθετο αγωγό αντίστασης  $R$ . Πόση θα πρέπει να είναι η διάμετρος  $D$  ενός μόνο χάλκινου καλωδίου μήκους  $\ell$  προκειμένου να έχει την ίδια αντίσταση με το σύνθετο αγωγό;

**ΛΥΣΗ**

Η αντίσταση καθενός καλωδίου από τα εννέα, με ειδική αντίσταση  $\rho$ , είναι

$$R_i = \rho \frac{\ell}{A} = \rho \frac{4\ell}{\pi d^2}.$$

Καθώς συνδέονται παράλληλα, έχουν συνολική αντίσταση  $R$  που προκύπτει από τη σχέση

$$\frac{1}{R} = \sum_{i=1}^9 \frac{1}{R_i} = 9 \frac{\pi d^2}{4\rho\ell} \Rightarrow R = \frac{4\rho\ell}{9\pi d^2}.$$

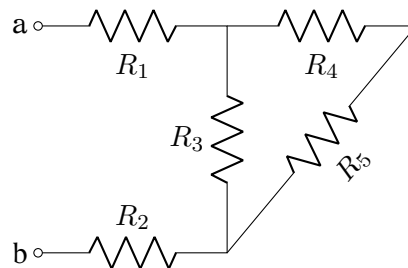
Η αντίσταση ενός χάλκινου αγωγού μήκους  $\ell$  με διάμετρο  $D$  είναι

$$R = \rho \frac{4\ell}{\pi D^2}.$$

Για να είναι ίσες οι αντιστάσεις πρέπει

$$\frac{4\rho\ell}{9\pi d^2} = \rho \frac{4\ell}{\pi D^2} \Rightarrow D = 3d.$$

12. Βρείτε την ισοδύναμη αντίσταση μεταξύ των σημείων a και b στο Σχήμα 7.9. Δίνονται οι αντιστάσεις των αντιστατών 1, 2, 3, 4, 5:  $R_1 = 4.1 \Omega$ ,  $R_2 = 3.8 \Omega$ ,  $R_3 = 2 \Omega$ ,  $R_4 = 5.1 \Omega$ ,  $R_5 = 3.5 \Omega$ .



Σχήμα 7.9: Άσκηση 12

**ΛΥΣΗ**

Οι αντιστάτες 4, 5 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά (περνά το ίδιο ρεύμα). Ισοδυναμούν με αντιστάτη αντίστασης  $R_{45} = R_4 + R_5 = 8.6 \Omega$ . Ο αντιστάτης 45

συνδέεται παράλληλα με τον αντιστάτη 3 (έχουν ίδια τάση). Ο ισοδυναμικός τους έχει αντίσταση

$$\frac{1}{R_{345}} = \frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_{45}} \Rightarrow R_{345} \approx 1.62 \, \Omega .$$

Οι αντιστάτες 1, 345 και 2 είναι συνδεδεμένοι σε σειρά. Ισοδυναμούν με αντιστάτη αντίστασης

$$R = R_1 + R_{345} + R_2 \approx 9.52 \, \Omega .$$

13. Δύο αντιστάτες συνδεδεμένοι σε σειρά έχουν ισοδύναμη αντίσταση  $690 \, \Omega$ . Όταν είναι συνδεδεμένοι παράλληλα, έχουν ισοδύναμη αντίσταση  $150 \, \Omega$ . Βρείτε την τιμή της αντίστασης κάθε αντιστάτη.

### ΛΥΣΗ

Έστω  $R_1$  και  $R_2$  οι άγνωστες αντιστάσεις. Όταν οι αντιστάτες συνδέονται σε σειρά έχουν ισοδύναμη αντίσταση  $R_s$

$$R_s = R_1 + R_2 .$$

Όταν συνδέονται παράλληλα έχουν ισοδύναμη αντίσταση  $R_p$  που υπολογίζεται από τη σχέση

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_p = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} .$$

Οι παραπάνω σχέσεις παραμένουν οι ίδιες στην εναλλαγή  $R_1 \leftrightarrow R_2$ . Επομένως, δεν μπορούμε να βρούμε μονοσήμαντα τις τιμές για  $R_1, R_2$ .

Έχουμε

$$R_s R_p = R_1 R_2 = R_1 (R_s - R_1) \Rightarrow R_1^2 - R_s R_1 + R_s R_p = 0 .$$

Η λύση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης είναι

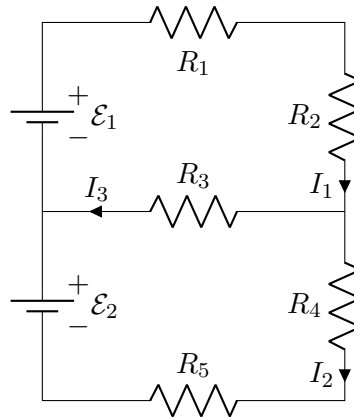
$$R_1 = \frac{R_s \pm \sqrt{R_s^2 - 4R_s R_p}}{2} .$$

Με αντικατάσταση,

$$R_1 = 345 \pm 15\sqrt{69} \approx \begin{cases} 220.4 \, \Omega \\ 469.6 \, \Omega \end{cases} .$$

Καθώς  $R_2 = R_s - R_1$  έχουμε

$$R_1 \approx \begin{cases} 469.6 \, \Omega \\ 220.4 \, \Omega \end{cases} .$$



Σχήμα 7.10: Άσκηση 1

#### 7.5.4 Επίλυση κυκλώματος

- Υπολογίστε τα ρεύματα του κυκλώματος στο Σχήμα 7.10. Δίνονται  $\mathcal{E}_1 = 24 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 12 \text{ V}$ ,  $R_1 = 2 \Omega$ ,  $R_2 = 4 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ ,  $R_4 = 1 \Omega$ ,  $R_5 = 5 \Omega$ .

##### ΛΥΣΗ

Η εφαρμογή του πρώτου κανόνα του Kirchhoff σε οποιονδήποτε από τους δύο κόμβους, δίνει για τα ρεύματα

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 .$$

Η εφαρμογή του δεύτερου κανόνα του Kirchhoff στον επάνω βρόχο, δίνει για τις διαφορές δυναμικού

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_1 R_2 - I_3 R_3 = 0 .$$

Στον κάτω βρόχο, ο δεύτερος κανόνας του Kirchhoff δίνει

$$\mathcal{E}_2 + I_3 R_3 - I_2 R_4 - I_2 R_5 = 0 .$$

Για τα άγνωστα ρεύματα σχηματίζεται επομένως το σύστημα

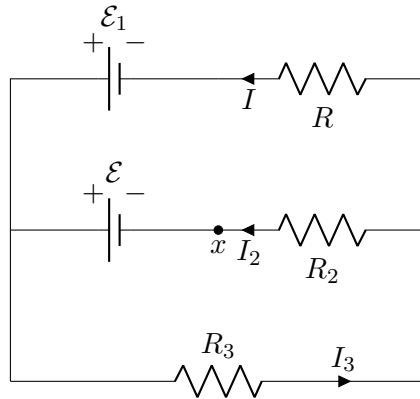
$$\begin{aligned} I_1 - I_2 - I_3 &= 0 , \\ (R_1 + R_2)I_1 + R_3 I_3 &= \mathcal{E}_1 , \\ (R_4 + R_5)I_2 - R_3 I_3 &= \mathcal{E}_2 . \end{aligned}$$

Η αντικατάσταση των τιμών και η επίλυση του συστήματος δίνει  $I_1 = 3.5 \text{ A}$ ,  $I_2 = 2.5 \text{ A}$ ,  $I_3 = 1 \text{ A}$ .

- Στο κύκλωμα του Σχήματος 7.11 βρείτε

- το ρεύμα του αντιστάτη  $R$ ,
- την αντίσταση  $R$ ,
- την άγνωστη ΗΕΔ  $\mathcal{E}$ .
- Αν το κύκλωμα κοπεί στο σημείο  $x$  ποιο είναι το ρεύμα του αντιστάτη  $R$ ;

Δίνονται  $\mathcal{E}_1 = 28 \text{ V}$ ,  $R_2 = 6 \Omega$ ,  $R_3 = 3 \Omega$ ,  $I_2 = 4 \text{ A}$ ,  $I_3 = 6 \text{ A}$ .



Σχήμα 7.11: Άσκηση 2

#### ΛΥΣΗ

Έστω ότι το ρεύμα  $I$  στον αντιστάτη  $R$  έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Πρώτος κανόνας Kirchhoff για τα ρεύματα, σε οποιονδήποτε από τους δύο κόμβους:

$$-I - I_2 + I_3 = 0 \Rightarrow I = I_3 - I_2 = 2 \text{ A} .$$

Δεύτερος κανόνας Kirchhoff για τις διαφορές δυναμικού στο κάτω κύκλωμα:

$$-\mathcal{E} + I_2 R_2 + I_3 R_3 = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = 42 \text{ V} .$$

Δεύτερος κανόνας Kirchhoff για τις διαφορές δυναμικού στο πάνω κύκλωμα:

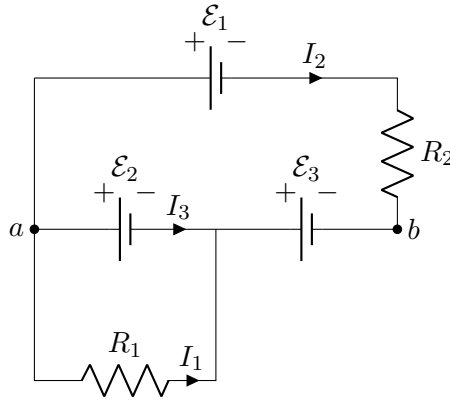
$$-\mathcal{E}_1 + IR - I_2 R_2 + \mathcal{E} = 0 \Rightarrow R = 5 \Omega .$$

Κόβουμε το εσωτερικό κύκλωμα στο  $x$ . Το ρεύμα που διαρρέει το απομένον κύκλωμα είναι  $I'$ . Δεύτερος κανόνας Kirchhoff στο κύκλωμα:

$$-\mathcal{E}_1 + I'R + I'R_3 = 0 \Rightarrow I' = 3.5 \text{ A} .$$

3. Στο Σχήμα 7.12,  $R_1 = 100 \Omega$ ,  $R_2 = 50 \Omega$  και οι ιδανικές μπαταρίες έχουν ΗΕΔ  $\mathcal{E}_1 = 6 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 5 \text{ V}$  και  $\mathcal{E}_3 = 4 \text{ V}$ . Να υπολογίσετε

- το ρεύμα στον αντιστάτη 1,
- το ρεύμα στον αντιστάτη 2,
- τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων a και b.



Σχήμα 7.12: Άσκηση 3

**ΛΥΣΗ**

Έστω ότι τα ρεύματα στο κύκλωμα έχουν τις φορές που δείχνονται στο σχήμα. Δεύτερος κανόνας Kirchhoff για τις διαφορές δυναμικού στο κάτω κύκλωμα:

$$-\mathcal{E}_2 + I_1 R_1 = 0 \Rightarrow I_1 = \mathcal{E}_2 / R_1 .$$

Με αντικατάσταση,  $I_1 = 0.05 \text{ A}$ .

Δεύτερος κανόνας Kirchhoff για τις διαφορές δυναμικού στο πάνω κύκλωμα:

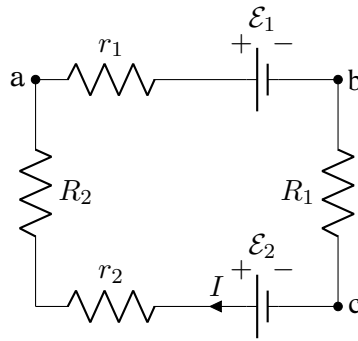
$$-\mathcal{E}_1 + I_2 R_2 + \mathcal{E}_3 + \mathcal{E}_2 = 0 \Rightarrow I_2 = \frac{\mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3}{R_2} .$$

Με αντικατάσταση,  $I_2 = -0.06 \text{ A}$ . Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η πραγματική φορά του ρεύματος είναι αντίθετη από αυτή που υποθέσαμε.

Για τη διαφορά δυναμικού  $V_b - V_a$  έχουμε

$$V_a - \mathcal{E}_2 - \mathcal{E}_3 = V_b \Rightarrow V_b - V_a = -9 \text{ V} .$$

4. Στο κύκλωμα του Σχήματος 7.13, οι μπαταρίες  $\mathcal{E}_1$ ,  $\mathcal{E}_2$  έχουν εσωτερικές αντιστάσεις  $r_1$ ,  $r_2$  αντίστοιχα. Υπολογίστε (α') το ρεύμα στο κύκλωμα, (β') την πολική τάση της μπαταρίας  $\mathcal{E}_1$ , (γ') τη διαφορά δυναμικού  $V_c - V_a$ , (δ') την ισχύ εξόδου της μπαταρίας  $\mathcal{E}_1$ , (ε') πώς καταναλώνεται η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια που παράγει η μπαταρία  $\mathcal{E}_1$ ; Δίδονται  $\mathcal{E}_1 = 16 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 8 \text{ V}$ ,  $r_1 = 1.6 \Omega$ ,  $r_2 = 1.4 \Omega$ ,  $R_1 = 9 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ .



Σχήμα 7.13: Άσκηση 4

**ΛΥΣΗ**

Έστω ότι η φορά ρεύματος είναι όπως στο σχήμα. Διατρέχω στη φορά των δεικτών του ρολογιού το κύκλωμα και εφαρμόζω το δεύτερο νόμο Kirchhoff:

$$-IR_2 - Ir_1 - \varepsilon_1 - IR_1 + \varepsilon_2 - Ir_2 = 0 \Rightarrow I = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{r_1 + r_2 + R_1 + R_2}.$$

Με αντικατάσταση,  $I = -8/17 \text{ A} \approx -0.47 \text{ A}$ . Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι το ρεύμα είναι αντίθετης φοράς από αυτή που υποθέσαμε.

Για τη διαφορά δυναμικού  $V_b - V_a$  στους πόλους της μπαταρίας 1 έχουμε  $V_a - Ir_1 - \varepsilon_1 = V_b$ . Με αντικατάσταση,  $V_b - V_a \approx -15.25 \text{ V}$ .

Για τη διαφορά δυναμικού  $V_c - V_a$  έχουμε  $V_a - IR_1 - Ir_1 - \varepsilon_1 = V_c \Rightarrow V_c - V_a = -11.01 \text{ V}$ .

Η ισχύς εξόδου στην μπαταρία 1 είναι  $P = I(V_b - V_a) \approx 7.17 \text{ W}$ .

Η ενέργεια της μπαταρίας 1 γίνεται θερμότητα στους αντιστάτες,  $I^2 R_i$  και  $I^2 r_i$ , και ενέργεια φόρτισης της μπαταρίας 2.

5. Στο κύκλωμα του Σχήματος 7.14 βρείτε

- το ρεύμα που διαρρέει τον αντιστάτη  $R_5$ ,
- τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων  $a$  και  $b$ .

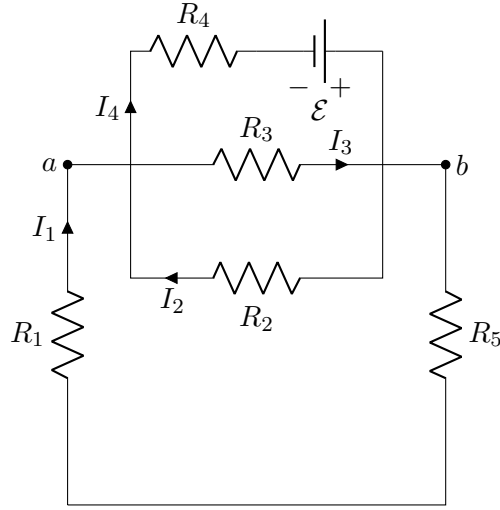
Δίνονται  $R_1 = 5 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \Omega$ ,  $R_3 = 10 \Omega$ ,  $R_4 = 10 \Omega$ ,  $R_5 = 20 \Omega$ ,  $\mathcal{E} = 25 \text{ V}$ .

**ΛΥΣΗ**

Έστω ότι οι φορές των ρευμάτων σε κάθε κλάδο είναι όπως φαίνονται στο σχήμα.

Ο πρώτος κανόνας Kirchhoff για τον κόμβο ένωσης των δύο βρόχων είναι

$$I_1 + I_2 - I_3 - I_4 = 0.$$



Σχήμα 7.14: Άσκηση 5

Ο δεύτερος κανόνας Kirchhoff για το βασικό βρόχο είναι

$$-I_1 R_1 - I_3 R_3 - I_1 R_5 = 0 .$$

Ο δεύτερος κανόνας Kirchhoff για το δευτερεύοντα βρόχο είναι

$$-I_4 R_4 + \mathcal{E} - I_2 R_2 = 0 .$$

Ο δεύτερος κανόνας Kirchhoff για το πάνω τμήμα του δευτερεύοντα βρόχου είναι

$$-I_4 R_4 + \mathcal{E} + I_3 R_3 = 0 .$$

Συγκεντρώνουμε τις τέσσερις εξισώσεις για τα τέσσερα άγνωστα ρεύματα:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 &= 0 , \\ I_1(R_1 + R_5) + I_3 R_3 &= 0 , \\ I_2 R_2 + I_4 R_4 &= \mathcal{E} , \\ I_3 R_3 - I_4 R_4 &= -\mathcal{E} . \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις γνωστές τιμές:

$$\begin{aligned} I_1 + I_2 - I_3 - I_4 &= 0 , \\ 25I_1 + 10I_3 &= 0 , \\ 5I_2 + 10I_4 &= 25 , \\ 10I_3 - 10I_4 &= -25 . \end{aligned}$$



Η λύση του συστήματος δίνει  $I_1 = 10/44$  A,  $I_2 = 50/44$  A,  $I_3 = -25/44$  A,  $I_4 = 85/44$  A. Το αρνητικό πρόσημο στο  $I_3$  σημαίνει ότι η πραγματική φορά του ρεύματος είναι αντίθετη από αυτή που υποθέσαμε.

Η διαφορά δυναμικού των σημείων  $a$ ,  $b$  είναι η διαφορά δυναμικού στα άκρα της  $R_3$ :

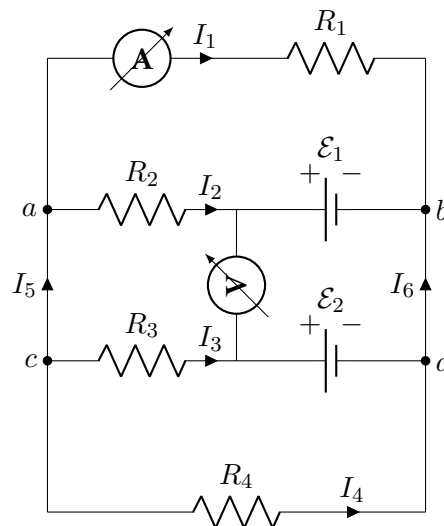
$$V_a - I_3 R_3 = V_b \Rightarrow V_a - V_b = I_3 R_3 = -125/22 \text{ V}.$$

6. Ποιες είναι οι ενδείξεις που αναμένουμε να δούμε

- στο ιδανικό αμπερόμετρο (με μηδενική εσωτερική αντίσταση) και
- στο ιδανικό βολτόμετρο (με άπειρη αντίσταση)

του Σχήματος 7.15;

Δίνονται  $R_1 = 6 \Omega$ ,  $R_2 = 10 \Omega$ ,  $R_3 = 5 \Omega$ ,  $R_4 = 6 \Omega$ ,  $\mathcal{E}_1 = 6 \text{ V}$ ,  $\mathcal{E}_2 = 4.5 \text{ V}$ .



Σχήμα 7.15: Άσκηση 6

### ΛΥΣΗ

Έστω ότι οι φορές των ρευμάτων σε κάθε κλάδο είναι όπως φαίνονται στο σχήμα.

Η ένδειξη του βολτόμετρου είναι η διαφορά δυναμικού στο μέσο των δύο εσωτερικών κλάδων. Διατρέχουμε τον κλειστό βρόχο που περιέχει το βολτόμετρο και τις δύο πηγές ΗΕΔ. Έχουμε

$$\Delta V = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 = 1.5 \text{ V}.$$

Το ρεύμα  $I_1$ , την ένδειξη δηλαδή του αμπερόμετρου, θα τη βρούμε ως εξής:

Εφαρμόζω τον πρώτο κανόνα Kirchhoff σε καθένα από τους κόμβους  $a$ ,  $b$ ,  $c$ :

$$-I_1 - I_2 + I_5 = 0 ,$$

$$I_1 + I_2 + I_6 = 0 ,$$

$$-I_3 - I_4 - I_5 = 0 .$$

Η εξίσωση στον κόμβο  $d$  δεν είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες, μπορεί να παραχθεί από αυτές και γι' αυτό δεν τη γράφουμε.

Εφαρμόζω το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στους τρεις βρόχους που αποτελούν το κύκλωμα:

$$-I_1 R_1 + \mathcal{E}_1 + I_2 R_2 = 0 ,$$

$$-I_2 R_2 - \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + I_3 R_3 = 0 ,$$

$$-I_3 R_3 - \mathcal{E}_2 + I_4 R_4 = 0 .$$

Η εξίσωση που θα βγάzaμε για το βρόχο που περιέχει το αμπερόμετρο και τις αντιστάσεις  $R_1$ ,  $R_4$ , δεν είναι ανεξάρτητη από τις προηγούμενες, μπορεί να παραχθεί από αυτές και γι' αυτό δεν τη γράφουμε.

Συγκεντρώνουμε τις 6 εξισώσεις για τους 6 άγνωστους  $I_1$ ,  $I_2$ ,  $I_3$ ,  $I_4$ ,  $I_5$ ,  $I_6$ :

$$-I_1 - I_2 + I_5 = 0 ,$$

$$I_1 + I_2 + I_6 = 0 ,$$

$$-I_3 - I_4 - I_5 = 0 ,$$

$$-I_1 R_1 + I_2 R_2 = -\mathcal{E}_1 ,$$

$$-I_2 R_2 + I_3 R_3 = \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 ,$$

$$-I_3 R_3 + I_4 R_4 = \mathcal{E}_2 .$$

Με αντικατάσταση των γνωστών τιμών έχουμε

$$-I_1 - I_2 + I_5 = 0 ,$$

$$I_1 + I_2 + I_6 = 0 ,$$

$$-I_3 - I_4 - I_5 = 0 ,$$

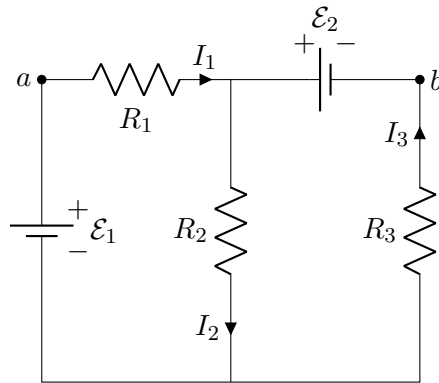
$$-6I_1 + 10I_2 = -6 ,$$

$$-10I_2 + 5I_3 = 1.5 ,$$

$$-5I_3 + 6I_4 = 4.5 .$$

Η λύση του συστήματος για το  $I_1$  είναι  $15/38$  A.

7. Βρείτε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των σημείων  $a$  και  $b$  στο κύκλωμα του Σχήματος 7.16. Δίνονται  $\mathcal{E}_1 = 5$  V,  $\mathcal{E}_2 = 10$  V,  $R_1 = 3$  Ω,  $R_2 = 5$  Ω,  $R_3 = 7$  Ω.



Σχήμα 7.16: Άσκηση 7

**ΛΥΣΗ**

Ισχύει ότι

$$V_a - I_1 R_1 - \mathcal{E}_2 = V_b .$$

Χρειαζόμαστε το ρεύμα  $I_1$ .

Πρώτος κανόνας Kirchhoff για τα ρεύματα:

$$-I_1 + I_2 - I_3 = 0 .$$

Δεύτερος κανόνας Kirchhoff για τις διαφορές δυναμικού στο αριστερό κύκλωμα:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 = 0 .$$

Δεύτερος κανόνας Kirchhoff για τις διαφορές δυναμικού στο δεξί κύκλωμα:

$$-\mathcal{E}_2 + I_3 R_3 + I_2 R_2 = 0$$

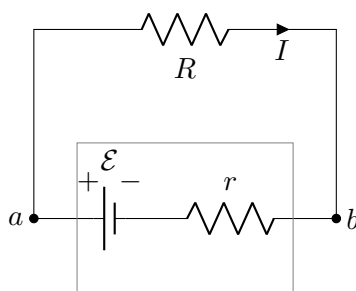
Με αντικατάσταση έχουμε:

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 - I_3 &= 0 \\ 3I_1 + 5I_2 &= 5 \\ 5I_2 + 7I_3 &= 10 \end{aligned}$$

Η επίλυση του συστήματος με τη μέθοδο Cramer δίνει  $I_1 = 10/71$  A. Επομένως

$$V_b - V_a = -I_1 R_1 - \mathcal{E}_2 = -\frac{740}{71} \approx -10.42 \text{ V} .$$

8. Μια μπαταρία έχει ΗΕΔ 15 V. Όταν αποδίδει ισχύ 20 W σε μια εξωτερική αντίσταση  $R$ , η τάση μεταξύ των πόλων της μπαταρίας είναι 11.6 V. Τι τιμή έχει (α') η αντίσταση  $R$ , (β') η εσωτερική αντίσταση της μπαταρίας;



Σχήμα 7.17: Άσκηση 8

**ΛΥΣΗ**

Η ισχύς που αποδίδεται στην αντίσταση  $R$  όταν διαρρέεται από ρεύμα  $I$  είναι  $P = I^2 R$ .

Το ρεύμα  $I$  που διαρρέει το κύκλωμα βρίσκεται ως εξής: ο εσωτερικός αντιστάτης  $r$  και ο εξωτερικός αντιστάτης  $R$  είναι συνδεδεμένοι σε σειρά (διαρρέονται από το ίδιο ρεύμα). Ισοδυναμούν με αντιστάτη που έχει αντίσταση  $R' = R + r$ . Στα άκρα του ισοδύναμου αντιστάτη η διαφορά δυναμικού είναι  $\mathcal{E}$ . Διαρρέεται από ρεύμα

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R'} = \frac{\mathcal{E}}{R + r}.$$

Η ισχύς στον εξωτερικό αντιστάτη είναι

$$P = \frac{\mathcal{E}^2 R}{(R + r)^2} \Rightarrow \frac{\mathcal{E}^2}{P} = \frac{(R + r)^2}{R}. \quad (7.3)$$

Η τάση μεταξύ των πόλων της μπαταρίας,  $V_{ab}$ , είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού  $IR$  στον εξωτερικό αντιστάτη. Επομένως,

$$V_{ab} = IR = \frac{\mathcal{E} R}{R + r} \Rightarrow \frac{V_{ab}}{\mathcal{E}} = \frac{R}{R + r}. \quad (7.4)$$

Το γινόμενο κατά μέλη των σχέσεων (7.3) και (7.4) δίνει

$$\frac{\mathcal{E}^2}{P} \cdot \frac{V_{ab}}{\mathcal{E}} = \frac{(R + r)^2}{R} \cdot \frac{R}{R + r} \Rightarrow R + r = \frac{V_{ab} \mathcal{E}}{P}. \quad (7.5)$$

Αντικαθιστώντας το αποτέλεσμα της εξίσωσης (7.5) στην (7.4) έχουμε:

$$\frac{V_{ab}}{\mathcal{E}} = \frac{RP}{V_{ab} \mathcal{E}} \Rightarrow R = \frac{V_{ab}^2}{P}.$$

Με αντικατάσταση,  $R = 11.6^2/20 = 6.728 \Omega$ .

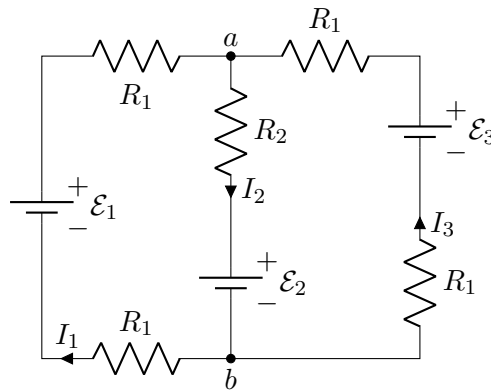
Από την εξίσωση (7.5) προκύπτει

$$r = \frac{V_{ab} \mathcal{E}}{P} - R.$$

Με αντικατάσταση,  $r = 11.6 \cdot 15/20 - 6.728 = 1.972 \Omega$ .

9. Στο Σχήμα 7.18 οι αντιστάσεις είναι  $R_1 = 1\ \Omega$  και  $R_2 = 2\ \Omega$  και οι ιδανικές μπαταρίες έχουν ΗΕΔ  $\mathcal{E}_1 = 2\text{ V}$  και  $\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_3 = 4\text{ V}$ .

- Πόσο είναι το ρεύμα και ποια κατεύθυνση έχει στις μπαταρίες 1, 2 και 3;
- Ποια είναι η διαφορά δυναμικού  $V_a - V_b$ ;



Σχήμα 7.18: Άσκηση 9

### ΛΥΣΗ

Έστω ότι οι φορές των ρευμάτων σε κάθε κλάδο είναι όπως φαίνονται στο σχήμα.

Εφαρμόζουμε τον πρώτο κανόνα του Kirchhoff στον κόμβο  $a$ :

$$I_1 - I_2 + I_3 = 0 .$$

Εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στον αριστερό βρόχο:

$$\mathcal{E}_1 - I_1 R_1 - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 - I_1 R_1 = 0 .$$

Εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο δεξί βρόχο:

$$\mathcal{E}_2 + I_2 R_2 + I_3 R_1 - \mathcal{E}_3 + I_3 R_1 = 0 .$$

Συγκεντρώνουμε τις εξισώσεις για τα άγνωστα ρεύματα:

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0 , \\ 2I_1 R_1 + I_2 R_2 &= \mathcal{E}_1 - \mathcal{E}_2 , \\ I_2 R_2 + 2I_3 R_1 &= \mathcal{E}_3 - \mathcal{E}_2 . \end{aligned}$$

Αντικαθιστούμε τις γνωστές τιμές

$$\begin{aligned} I_1 - I_2 + I_3 &= 0, \\ 2I_1 + 2I_2 &= -2, \\ 2I_2 + 2I_3 &= 0. \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος δίνει  $I_1 = -2/3$  A,  $I_2 = -1/3$  A,  $I_3 = 1/3$  A. Τα αρνητικά πρόσημα σημαίνουν ότι τα ρεύματα  $I_1$ ,  $I_2$  έχουν αντίθετη φορά από αυτή που υποθέσαμε.

Για τη διαφορά δυναμικού  $V_a - V_b$  έχουμε:

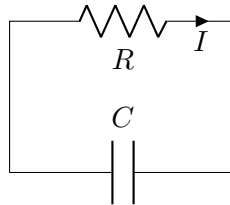
$$V_a - I_2 R_2 - \mathcal{E}_2 = V_b \Rightarrow V_a - V_b = I_2 R_2 + \mathcal{E}_2.$$

Με αντικατάσταση,  $V_a - V_b = 10/3$  V.

10. Ένας πυκνωτής χωρητικότητας  $2$  nF, με αρχικό φορτίο  $5.1$   $\mu$ C, εκφορτίζεται μέσω ενός αντιστάτη  $1.3$  k $\Omega$ .

- Υπολογίστε την τιμή του ρεύματος στον αντιστάτη  $9$   $\mu$ s αφού αυτός συνδεθεί με τα άκρα του πυκνωτή.
- Πόσο φορτίο εξακολουθεί να έχει ο πυκνωτής μετά από  $8$   $\mu$ s;
- Πόση είναι η μέγιστη τιμή του ρεύματος στον αντιστάτη;

**ΛΥΣΗ**



Η διαφορά δυναμικού,  $V$ , στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού στον αντιστάτη,  $IR$ . Αλλά  $V = Q/C$ . Άρα

$$V = IR \Rightarrow \frac{Q}{C} = IR.$$

Το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα προκύπτει από τη μείωση του φορτίου  $Q$  του πυκνωτή. Επομένως,  $I = -dQ/dt$ . Να το δούμε και αλλιώς: Το φορτίο που υπάρχει στο θετικό οπλισμό του πυκνωτή και στον αγωγό είναι σταθερό, όσο υπήρχε στον πυκνωτή αρχικά. Ας το συμβολίσουμε με  $Q_0$ . Αν,

κάθε στιγμή,  $Q$  είναι το φορτίο στον πυκνωτή και  $Q_\alpha$  το φορτίο στον αγωγό ισχύει:

$$Q + Q_\alpha = Q_0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{dQ_\alpha}{dt} = 0 \Rightarrow I \equiv \frac{dQ_\alpha}{dt} = -\frac{dQ}{dt}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{Q}{C} = IR = -R \frac{dQ}{dt} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{RC} Q.$$

Η διαφορική εξίσωση για το  $Q(t)$  λύνεται με χωρισμό μεταβλητών:

$$\frac{dQ}{Q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \int \frac{dQ}{Q} = -\int \frac{dt}{RC} + a \Rightarrow \ln Q = -\frac{t}{RC} + a.$$

Το  $a$  είναι η σταθερή που προκύπτει από την αόριστη ολοκλήρωση.

Συνεχίζοντας, έχουμε:

$$Q = \exp\left(-\frac{t}{RC} + a\right) \Rightarrow Q = \exp(a) \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Όταν  $t = 0$ ,  $Q(t=0) \equiv Q_0 = \exp(a)$ . Άρα

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Τη χρονική στιγμή  $t_1 = 8 \mu\text{s}$  το φορτίο του πυκνωτή είναι  $Q(t_1) \approx 0.235 \mu\text{C}$ .

Για το ρεύμα στο κύκλωμα έχουμε

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{RC} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Τη χρονική στιγμή  $t_2 = 9 \mu\text{s}$  το ρεύμα είναι  $I(t_2) \approx 61.56 \text{ mA}$ .

Η μέγιστη τιμή του ρεύματος είναι για  $t = 0$ :

$$I_{\max} = \frac{Q_0}{RC}.$$

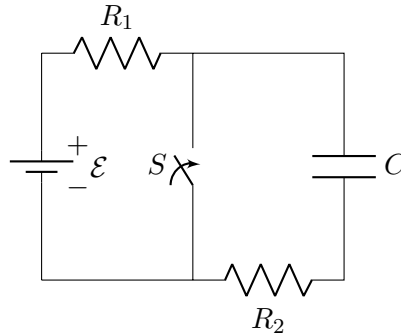
Με αντικατάσταση,  $I_{\max} \approx 1.96 \text{ A}$ .

11. Στο Σχήμα 7.19, έχουμε αφήσει το διακόπτη  $S$  ανοιχτό για μεγάλο χρονικό διάστημα. Κατόπιν τον κλείνουμε.

Έστω ότι  $\mathcal{E} = 10 \text{ V}$ ,  $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$ ,  $R_2 = 100 \text{ k}\Omega$  και  $C = 10 \mu\text{F}$ . Βρείτε την τιμή της σταθεράς χρόνου

- πριν από το κλείσιμο του διακόπτη,
- μετά το κλείσιμο του διακόπτη.

Έστω ότι κλείνουμε το διακόπτη την χρονική στιγμή  $t = 0$ . Βρείτε το ρεύμα που διαρρέει το διακόπτη συναρτήσει του χρόνου.



Σχήμα 7.19: Άσκηση 11

**ΛΥΣΗ**

**ΔΙΑΚΟΠΤΗΣ ΑΝΟΙΧΤΟΣ** Όσο ο διακόπτης είναι ανοιχτός, εφαρμόζουμε το δεύτερο κανόνα του Kirchhoff στο (μοναδικό) βρόχο του κυκλώματός μας:

$$\mathcal{E} - IR_1 - V - IR_2 = 0 ,$$

όπου  $V$  η διαφορά δυναμικού στα άκρα του πυκνωτή. Θεωρήσαμε ότι το ρεύμα  $I$  έχει φορά από το θετικό πόλο της μπαταρίας προς τον αρνητικό.

Ισχύει ότι  $V = Q/C$  όπου  $Q$  το φορτίο του πυκνωτή. Το φορτίο αυτό είναι ίσο με αυτό που κυκλοφορούσε στο κύκλωμα (η μεταβολή του οποίου με το χρόνο είναι το ρεύμα). Άρα και  $I = dQ/dt$ . Συνεπώς

$$\frac{dQ}{dt}(R_1 + R_2) + \frac{Q}{C} = \mathcal{E} \Rightarrow \frac{dQ}{dt} = \frac{C\mathcal{E} - Q}{(R_1 + R_2)C} .$$

Η διαφορική εξίσωση μπορεί να λυθεί με χωρισμό μεταβλητών:

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{C\mathcal{E} - Q}{(R_1 + R_2)C} \Rightarrow \frac{dQ}{Q - C\mathcal{E}} = -\frac{dt}{(R_1 + R_2)C} .$$

Με αόριστη ολοκλήρωση έχουμε

$$\int \frac{dQ}{Q - C\mathcal{E}} = - \int \frac{dt}{(R_1 + R_2)C} + a \Rightarrow \ln(Q - C\mathcal{E}) = -\frac{t}{(R_1 + R_2)C} + a .$$

Το  $a$  είναι σταθερή που προκύπτει από την αόριστη ολοκλήρωση.

Άρα

$$Q - C\mathcal{E} = \exp(a) \exp\left(-\frac{t}{(R_1 + R_2)C}\right) .$$



Όταν  $t = 0$ ,  $Q(0) = 0$ . Επομένως,

$$\exp(a) = -C\mathcal{E}$$

και

$$Q(t) = C\mathcal{E} \left( 1 - \exp \left( -\frac{t}{(R_1 + R_2)C} \right) \right).$$

Η σταθερά χρόνου είναι  $(R_1 + R_2)C = 1.5 \text{ s}$ .

**ΔΙΑΚΟΠΤΗΣ ΚΛΕΙΣΤΟΣ** Με κλειστό διακόπτη ο πυκνωτής εκφορτίζεται. Στον κλάδο του κυκλώματος που τον περιέχει κυκλοφορεί ρεύμα  $I$ . Ρεύμα επίσης κυκλοφορεί και στον αριστερό κλάδο αλλά λόγω του βραχυκυκλώματος οι δύο βρόχοι (αριστερός και δεξιός) είναι ανεξάρτητοι. Εύκολα προκύπτει αυτό και από την εφαρμογή των κανόνων Kirchhoff.

Η διαφορά δυναμικού,  $V$ , στα άκρα του πυκνωτή είναι ίση με τη διαφορά δυναμικού στον αντιστάτη,  $IR_2$ . Αλλά,  $V = Q/C$ . Άρα

$$V = IR_2 \Rightarrow \frac{Q}{C} = IR_2.$$

Το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα προκύπτει από τη μείωση του φορτίου  $Q$  του πυκνωτή. Επομένως,  $I = -dQ/dt$ . Να το δούμε και αλλιώς: Το φορτίο που υπάρχει στο θετικό σπλισμό του πυκνωτή και στον αγωγό είναι σταθερό, όσο υπήρχε στον πυκνωτή αρχικά. Ας το συμβολίσουμε με  $Q_0$ . Αν, κάθε στιγμή,  $Q$  είναι το φορτίο στον πυκνωτή και  $Q_\alpha$  το φορτίο στον αγωγό ισχύει:

$$Q + Q_\alpha = Q_0 \Rightarrow \frac{dQ}{dt} + \frac{dQ_\alpha}{dt} = 0 \Rightarrow I \equiv \frac{dQ_\alpha}{dt} = -\frac{dQ}{dt}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε

$$\frac{Q}{C} = -R_2 \frac{dQ}{dt}.$$

Η διαφορική εξίσωση για το  $Q(t)$  λύνεται με χωρισμό μεταβλητών:

$$-\frac{dt}{R_2 C} = \frac{dQ}{Q} \Rightarrow -\int \frac{dt}{R_2 C} + a = \int \frac{dQ}{Q} \Rightarrow -\frac{t}{R_2 C} + a = \ln Q.$$

Το  $a$  είναι σταθερή που προκύπτει από την αόριστη ολοκλήρωση.

Συνεχίζοντας, έχουμε:

$$\exp \left( -\frac{t}{R_2 C} + a \right) = Q \Rightarrow Q = \exp(a) \exp \left( -\frac{t}{R_2 C} \right).$$

Όταν  $t = 0$ ,  $Q(t = 0) \equiv Q_0 = \exp(a)$ . Άρα

$$Q(t) = Q_0 \exp \left( -\frac{t}{R_2 C} \right).$$

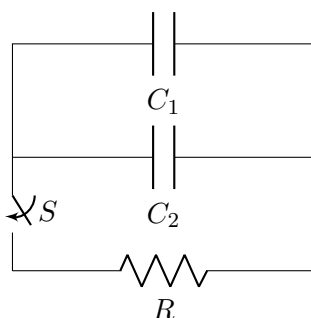
Για το ρεύμα στο κύκλωμα έχουμε

$$I(t) = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_0}{R_2 C} \exp\left(-\frac{t}{R_2 C}\right).$$

Η σταθερά χρόνου είναι  $R_2 C = 1$  s.

12. Στο Σχήμα 7.20 φορτίζουμε τους δυο πυκνωτές με μια μπαταρία 12 V. Αποσυνδέουμε την μπαταρία και κλείνουμε το διακόπτη. Έπειτα από 1 ms πόσο φορτίο εξακολουθεί να έχει ο πυκνωτής  $C_1$ ; ο πυκνωτής  $C_2$ ; Πόσο θα είναι τότε το ρεύμα στον αντιστάτη;

Δίνονται  $R = 500 \Omega$ ,  $C_1 = 3 \mu\text{F}$ ,  $C_2 = 2 \mu\text{F}$ .



Σχήμα 7.20: Άσκηση 12

### ΛΥΣΗ

Και οι δύο πυκνωτές ξεκινούν για  $t = 0$  με διαφορά δυναμικού  $V_0$  όση η ΗΕΔ της μπαταρίας. Είναι συνδεδεμένοι με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουν ίδια διαφορά δυναμικού στα άκρα τους, δηλαδή παράλληλα. Ισοδυναμούν με πυκνωτή χωρητικότητας  $C = C_1 + C_2$  και με φορτίο  $Q = CV$ . Αρχικά το φορτίο είναι  $Q_0 = CV_0 = (C_1 + C_2)V_0$ .

Έχουμε εκφόρτιση πυκνωτή μέσω αντίστασης. Για τη διαδικασία αυτή αποδείξαμε σε προηγούμενη άσκηση και στη θεωρία ότι το φορτίο του ισοδύναμου πυκνωτή είναι

$$Q(t) = Q_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του, αλλά και στα άκρα των  $C_1$ ,  $C_2$ , είναι

$$V(t) = \frac{Q(t)}{C} = V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Το φορτίο του  $C_1$  είναι

$$Q_1(t) = C_1 V(t) = C_1 V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right).$$

Το φορτίο του  $C_2$  είναι

$$Q_2(t) = C_2 V(t) = C_2 V_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) .$$

Το ρεύμα στον αντιστάτη είναι

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) .$$

Στη χρονική στιγμή  $t' = 1 \text{ ms}$  έχουμε  $Q_1(t') \approx 24.13 \mu\text{C}$ ,  $Q_2(t') \approx 16.09 \mu\text{C}$ ,  $I(t') \approx 16.09 \text{ mA}$ .



## Κεφάλαιο 8

# Υλικά σε ηλεκτρικό πεδίο

### 8.1 Μικροσκοπικός μηχανισμός πόλωσης

Τα διάφορα υλικά χωρίζονται γενικά σε δύο κατηγορίες: τους αγωγούς και τους μονωτές.

Στους αγωγούς κάποια από τα «εξωτερικά» ηλεκτρόνια των ατόμων έχουν αποσυνδεθεί από τα άτομα και μπορούν να κινηθούν ελεύθερα σε όλο το υλικό. Τα άτομα από τα οποία έφυγαν είναι πλέον θετικά φορτισμένα ιόντα. Αν ένα αγωγό υλικό βρεθεί σε ηλεκτρικό πεδίο, τα ηλεκτρόνια μπορούν να κινηθούν υπό την επίδρασή του πολύ πιο εύκολα/γρήγορα από τα θετικά ιόντα, καθώς τα ιόντα έχουν χιλιάδες φορές μεγαλύτερη μάζα και δέχονται δυνάμεις από τα γειτονικά τους ιόντα. Με αυτό το μηχανισμό δημιουργείται ηλεκτρικό ρεύμα.

Ένας μονωτής αποτελείται από ουδέτερα άτομα ή μόρια. Τα ηλεκτρόνια και ο πυρήνας σε ένα άτομο δεν είναι τελείως ακίνητα αλλά μπορούν να μετατοπιστούν ελαφρά, παραμένοντας όμως στο χώρο ενός ατόμου. Όταν ένα ουδέτερο άτομο βρεθεί σε ηλεκτρικό πεδίο, το ηλεκτρονικό νέφος και ο πυρήνας δέχονται αντίθετες δυνάμεις και μετακινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Η απομάκρυνσή τους δεν είναι μεγάλη καθώς εμφανίζεται μεταξύ τους ελκτική δύναμη που αντισταθμίζει τις δυνάμεις από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο (αρκεί αυτό να μην είναι πολύ ισχυρό). Στην ισορροπία τα άτομα παραμένουν συνολικά ουδέτερα αλλά *πολώνονται*, καθώς ισοδυναμούν με δύο ίσα και αντίθετα φορτία σε μικρή απόσταση μεταξύ τους. Η επαγόμενη διπολική ροπή,  $\vec{p}$ , είναι ανάλογη του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$ :

$$\vec{p} = \alpha \vec{E} .$$

Η σταθερά αναλογίας  $\alpha$  ονομάζεται *ατομική πολωσιμότητα* και χαρακτηρίζει το υλικό.

Στην περίπτωση που το μονωτικό υλικό αποτελείται από μόρια, η περιγραφή της συμπεριφοράς τους σε ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι το ίδιο απλή. Συχνά είναι διαφορετική η δυνατότητα διαχωρισμού των φορτίων ανάλογα με τον προσανατολισμό του μορίου ως προς το ηλεκτρικό πεδίο. Γενικά η σχέση που συνδέει την

επαγόμενη διπολική ροπή  $(p_x, p_y, p_z)$  με το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο  $(E_x, E_y, E_z)$  είναι

$$\begin{aligned} p_x &= \alpha_{xx}E_x + \alpha_{xy}E_y + \alpha_{xz}E_z, \\ p_y &= \alpha_{yx}E_x + \alpha_{yy}E_y + \alpha_{yz}E_z, \\ p_z &= \alpha_{zx}E_x + \alpha_{zy}E_y + \alpha_{zz}E_z. \end{aligned}$$

Οι εννέα σταθερές  $\alpha_{ij}$  που εμφανίζονται αποτελούν τον *τανυστή πολωσιμότητας* του μορίου.

Υπάρχουν μόρια, π.χ. το μόριο του νερού, που παρουσιάζουν μόνιμη διπολική ροπή  $\vec{p}$ , πιο ισχυρή από την επαγόμενη εξαιτίας του εξωτερικού πεδίου. Ένα τέτοιο μόριο σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο δέχεται στα κέντρα του θετικού και του αρνητικού φορτίου ίδιες και αντίθετες δυνάμεις με συνολική δύναμη  $\vec{0}$ :

$$\vec{F}_+ + \vec{F}_- = q_+ \vec{E} + q_- \vec{E} = \vec{0}.$$

Επιπλέον, δέχεται ροπή στρέψης ως προς το κέντρο του

$$\vec{\tau} = \vec{r}_+ \times \vec{F}_+ + \vec{r}_- \times \vec{F}_- = q_+ \vec{r}_+ \times \vec{E} + q_- \vec{r}_- \times \vec{E} = (q_+ \vec{r}_+ + q_- \vec{r}_-) \times \vec{E} = \vec{p} \times \vec{E}.$$

Αυτή η ροπή στρέψης περιστρέφει το μόριο ώστε η διπολική ροπή να γίνει παράλληλη στο ηλεκτρικό πεδίο. Η δυναμική ενέργεια του διπόλου στο ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E}.$$

Όταν τα  $\vec{p}$  και  $\vec{E}$  είναι παράλληλα, η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη.

Αν ένα πολικό μόριο βρεθεί σε ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο, οι δυνάμεις που δέχονται τα ίσα και αντίθετα φορτία δεν είναι ακριβώς ίδιες καθώς τα κέντρα των φορτίων απέχουν και βρίσκονται σε σημεία με διαφορετικό ηλεκτρικό πεδίο. Επομένως το μόριο δέχεται δύναμη

$$\vec{F}_+ + \vec{F}_- = q (\vec{E}_+ - \vec{E}_-).$$

Αν  $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$  είναι το διάνυσμα μεταξύ των κέντρων τότε προσεγγιστικά

$$\vec{E}_+ - \vec{E}_- \approx d_x \frac{\partial E_x}{\partial x} \hat{i} + d_y \frac{\partial E_y}{\partial y} \hat{j} + d_z \frac{\partial E_z}{\partial z} \hat{k} = (\vec{d} \cdot \nabla) \vec{E}.$$

Επομένως, για πολύ μικρό δίπολο, η δύναμη που δέχεται σε ανομοιογενές ηλεκτρικό πεδίο είναι

$$\vec{F} = (q \vec{d} \cdot \nabla) \vec{E} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}.$$

Η ροπή στρέψης ως προς το κέντρο του είναι πάλι  $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$ .

Αν θέλουμε να υπολογίσουμε τη ροπή στρέψης ως προς κάποιο άλλο σημείο, όχι το κέντρο του διπόλου, πρέπει να λάβουμε υπόψη και τη ροπή της δύναμης  $\vec{F}$ :

$$\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E} + \vec{r} \times \vec{F},$$

όπου  $\vec{r}$  το διάνυσμα από το σημείο αναφοράς προς το σημείο εφαρμογής της δύναμης.

## 8.2 Πόλωση υλικού

Ένα διηλεκτρικό υλικό που τοποθετείται σε ηλεκτρικό πεδίο θα εμφανίσει διπολική ροπή. Αν αποτελείται από άτομα ή μη πολικά μόρια, το πεδίο θα αναπτύξει στο καθένα μια διπολική ροπή, παράλληλη σε αυτό. Αν το υλικό αποτελείται από πολικά μόρια, κάθε μόνιμο δίπολο θα δεχθεί ροπή στρέψης που θα τείνει να το ευθυγραμμίσει με το πεδίο. Η τυχαία θερμική κίνηση θα εμποδίσει βέβαια την απόλυτη ευθυγράμμιση. Επιπλέον, θα εμφανιστεί στα πολικά μόρια μια (μικρή) διπολική ροπή εξ επαγωγής.

Το διανυσματικό άθροισμα των διπολικών ροπών που θα εμφανιστούν θα έχει μη μηδενικό αποτέλεσμα, το οποίο θα είναι παράλληλο στο εξωτερικό πεδίο. Το υλικό επομένως πολώνεται. Μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα της *πόλωσης*,  $\vec{P}$ , ως την ηλεκτρική διπολική ροπή που εμφανίζεται ανά μονάδα όγκου.

Καθώς εμφανίζεται διπολική ροπή (λόγω εξωτερικού πεδίου), το υλικό θα παράγει στο χώρο ηλεκτρικό πεδίο εξαιτίας της. Γνωρίζουμε ότι ένας στοιχειώδης όγκος του υλικού  $d\tau'$ , με στοιχειώδη διπολική ροπή  $d\vec{p} = \vec{P} d\tau'$ , παράγει σε σημείο με διάνυσμα  $\vec{r}$  ως προς αυτόν, ένα ηλεκτρικό πεδίο με δυναμικό

$$dV(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{d\vec{p} \cdot \hat{r}}{r^2}.$$

Το συνολικό δυναμικό από όλο τον όγκο  $\mathcal{V}$  του υλικού είναι

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{\vec{P}(\vec{r}') \cdot (\widehat{r - r'})}{|\vec{r} - \vec{r}'|^2} d\tau'.$$

Στον παραπάνω τύπο, το  $\vec{r}$  προσδιορίζει το σημείο στο οποίο υπολογίζουμε το δυναμικό ενώ το  $\vec{r}'$  προσδιορίζει τη θέση κάθε στοιχειώδους όγκου  $d\tau'$  του υλικού.

Μπορεί να δειχθεί ότι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \oint_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \vec{P} \cdot \hat{n} dA' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} (-\nabla \cdot \vec{P}) d\tau',$$

όπου  $\mathcal{S}$  είναι η εξωτερική, κλειστή επιφάνεια του υλικού. Επομένως, το δυναμικό από πολωμένο διηλεκτρικό υλικό ισοδυναμεί με το άθροισμα του δυναμικού μιας επιφανειακής κατανομής φορτίων με  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας, και του δυναμικού μιας χωρικής κατανομής φορτίων με  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ . Τα φορτία αυτά ονομάζονται *δέσμια φορτία*.

Τα δέσμια φορτία έχουν φυσική υπόσταση. Ας σκεφτούμε ένα υλικό από άτομα ή μη πολικά μόρια: σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο τα θετικά και αρνητικά φορτία μέσα στο άτομο ή μόριο διαχωρίζονται και εμφανίζεται δίπολο. Το θετικό φορτίο του ενός διπόλου πλησιάζει το αρνητικό φορτίο του γειτονικού του (και αντίστροφα) και ουσιαστικά αλληλοεξουδετερώνονται. Μένουν μόνο τα φορτία στα άκρα, στην επιφάνεια δηλαδή, και εμφανίζεται η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου,  $\sigma_b$ . Αν το

εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο δεν είναι ομογενές, η αλληλοαναίρεση γειτονικών φορτίων δεν είναι απόλυτη και εμφανίζεται η χωρική πυκνότητα  $\rho_b$ .

Από το μηχανισμό πόλωσης που περιγράψαμε, εύκολα αντιλαμβάνεται κανείς ότι το συνολικό δέσμιο φορτίο σε ένα υλικό είναι 0 (καθώς προέρχεται από ανακατανομή των φορτίων ουδέτερων μορίων). Πράγματι, το δέσμιο φορτίο στην κλειστή επιφάνεια  $S$  του υλικού είναι

$$Q_{b,S} = \oint_S \sigma_b dA = \oint_S (\vec{P} \cdot \hat{n}) dA = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{A},$$

και το δέσμιο φορτίο στον όγκο  $V$  είναι

$$Q_{b,V} = \int_V \rho_b d\tau = - \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) d\tau.$$

Το συνολικό δέσμιο φορτίο είναι

$$Q_b = Q_{b,S} + Q_{b,V} = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{A} - \int_V (\nabla \cdot \vec{P}) d\tau = 0.$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το θεώρημα της απόκλισης (§4.4) για το διανυσματικό πεδίο  $\vec{P}$ . Επομένως, το δέσμιο φορτίο στην επιφάνεια είναι ίσο και αντίθετο με το φορτίο στο εσωτερικό του υλικού.

### 8.3 Ηλεκτρική μετατόπιση

Βρήκαμε ότι ένα διηλεκτρικό υλικό σε εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο πολώνεται και παράγει εξαιτίας της διπολικής του ροπής ένα ηλεκτρικό πεδίο. Το πεδίο αυτό ισοδυναμεί με το πεδίο μιας χωρικής κατανομής φορτίων με  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$  και το πεδίο μιας επιφανειακής κατανομής φορτίων με  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ . Στο υλικό βέβαια μπορεί να υπάρχουν και άλλα φορτία εκτός από τα δέσμια. Ας τα ονομάσουμε «ελεύθερα» φορτία. Η κατανομή τους στο χώρο έχει πυκνότητα  $\rho_f$  και παράγουν και αυτά ένα πεδίο. Η πυκνότητα φορτίου στο χώρο είναι  $\rho = \rho_f + \rho_b$ . Ο νόμος Gauss στη διαφορική του μορφή για το συνολικό πεδίο είναι

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f.$$

Το διάνυσμα  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  ονομάζεται *ηλεκτρική μετατόπιση*. Χρησιμοποιώντας το νέο αυτό μέγεθος, ο νόμος Gauss γίνεται, στη διαφορική μορφή

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f,$$

και στην ολοκληρωτική μορφή

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f,$$



όπου  $Q_f$  το ελεύθερο φορτίο που περιέχεται στην επιφάνεια  $S$ .

Είναι ιδιαίτερα χρήσιμες οι παραπάνω μορφές του νόμου Gauss στην περίπτωση των διηλεκτρικών. Τα δέσμια φορτία δεν μπορούν να υπολογιστούν εύκολα, το  $\rho_f$  όμως καθορίζεται από εμάς και έτσι μπορούμε με τη γνωστή εφαρμογή του νόμου Gauss να υπολογίσουμε το  $\vec{D}$ .

**Παρατήρηση** Στην εξωτερική επιφάνεια του υλικού υπάρχουν δέσμια φορτία. Δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε εκεί τη διαφορική μορφή του νόμου Gauss χωρίς να τα λάβουμε υπόψη.

## 8.4 Γραμμικά διηλεκτρικά

Στα περισσότερα υλικά η πόλωση που εμφανίζεται είναι ανάλογη του ηλεκτρικού πεδίου, αν αυτό δεν είναι αρκετά ισχυρό:

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi_e \vec{E} .$$

Η σταθερά αναλογίας  $\chi_e$  είναι η *ηλεκτρική επιδεκτικότητα* (electric susceptibility) και είναι αδιάστατο μέγεθος. Η τιμή της εξαρτάται από το υλικό και εξωτερικούς παράγοντες όπως η θερμοκρασία. Τα υλικά στα οποία η εξάρτηση του  $\vec{P}$  από το  $\vec{E}$  είναι γραμμική λέγονται *γραμμικά διηλεκτρικά*.

Το πεδίο  $\vec{E}$  που εμφανίζεται στον τύπο είναι το συνολικό πεδίο που υπάρχει στο χώρο του υλικού, δηλαδή το εξωτερικό πεδίο και το πεδίο που παράγει η διπολική ροπή του υλικού.

Ας δούμε πώς γίνεται η σχέση που ορίζει την ηλεκτρική μετατόπιση:

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} + \epsilon_0 \chi_e \vec{E} = (1 + \chi_e) \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon \vec{E} .$$

Το  $\vec{D}$  στα γραμμικά διηλεκτρικά είναι και αυτό ανάλογο του  $\vec{E}$  με σταθερά αναλογίας το  $\epsilon = (1 + \chi_e) \epsilon_0$ , την *ηλεκτρική διαπερατότητα* (permittivity) του υλικού. Η ποσότητα  $\kappa = 1 + \chi_e$  είναι η *σχετική ηλεκτρική διαπερατότητα* του υλικού ως προς το κενό (ή διηλεκτρική σταθερά του υλικού).

Ας αναφέρουμε ότι σε κάποια διηλεκτρικά η πόλωση είναι πιο εύκολη σε συγκεκριμένες διευθύνσεις απ' ό,τι σε άλλες. Η σχέση της πόλωσης  $\vec{P}$  και του ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E}$  σε αυτά είναι

$$\begin{aligned} P_x &= \epsilon_0 (\chi_{e,xx} E_x + \chi_{e,xy} E_y + \chi_{e,xz} E_z) , \\ P_y &= \epsilon_0 (\chi_{e,yx} E_x + \chi_{e,yy} E_y + \chi_{e,yz} E_z) , \\ P_z &= \epsilon_0 (\chi_{e,zx} E_x + \chi_{e,zy} E_y + \chi_{e,zz} E_z) . \end{aligned}$$

Οι εννέα σταθερές  $\chi_{e,ij}$  που εμφανίζονται αποτελούν τον *τανυστή επιδεκτικότητας* του υλικού.

### 8.4.1 Ηλεκτρικό πεδίο σε χώρο με ομογενές διηλεκτρικό

Σε ένα ομογενές γραμμικό διηλεκτρικό (σε διηλεκτρικό δηλαδή που δεν εξαρτώνται οι ιδιότητές του από τη θέση ή τον προσανατολισμό), που βρίσκεται παντού<sup>1</sup>, ισχύει για το  $\vec{D}$  εκτός από το «νόμο Gauss» ( $\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f$ ) και η σχέση  $\nabla \times \vec{D} = \vec{0}$ . Η αντικατάσταση  $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$  δίνει

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_f}{\epsilon}, \quad \nabla \times \vec{E} = \vec{0}.$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να επανέλθουμε στις γνωστές εξισώσεις που ικανοποιεί το  $\vec{E}$  με την αλλαγή  $\rho_f \leftrightarrow \rho$  και  $\epsilon \leftrightarrow \epsilon_0$ . Επομένως, το ηλεκτρικό πεδίο σε ομογενές διηλεκτρικό μπορεί να υπολογιστεί από το συνολικό φορτίο, ελεύθερο και δέσμιο, έχοντας στον τύπο του το  $\epsilon_0$ , ή από το ελεύθερο μόνο φορτίο, έχοντας στον τύπο το  $\epsilon$ . Έτσι π.χ. αν έχουμε ένα ελεύθερο σημειακό φορτίο  $q_f$  σε ομογενές διηλεκτρικό που καλύπτει όλο το χώρο, το πεδίο  $\vec{E}$ , στον υπολογισμό του οποίου κανονικά θα έπρεπε να λάβουμε υπόψη και τα δέσμια φορτία του υλικού, υπολογίζεται πιο απλά, μόνο από το ελεύθερο φορτίο:

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q_f}{r^2} \hat{r}.$$

Το πεδίο μικραίνει (αφού  $\epsilon > \epsilon_0$ ) καθώς το διηλεκτρικό πολώνεται και γύρω από το  $q_f$  συσσωρεύονται αντίθετα φορτισμένα, δέσμια φορτία.

### 8.4.2 Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου σε διηλεκτρικό

Έστω ένα γραμμικό διηλεκτρικό υλικό με όγκο  $\mathcal{V}$ , που βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο (που εν μέρει παράγεται και από την πόλωση του διηλεκτρικού). Το σύστημά τους έχει αποθηκευμένη ενέργεια

$$U = \frac{1}{2} \int_{\mathcal{V}} \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau.$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη μόνο στο συνολικό ηλεκτρικό πεδίο, χωρίς να λαμβάνουμε υπόψη την «παραμόρφωση» των μορίων του υλικού είναι

$$U = \frac{\epsilon_0}{2} \int_{\mathcal{V}} E^2 \, d\tau.$$

<sup>1</sup>Μαθηματικά, η απαίτηση είναι να ισχύει παντού  $\nabla \times \vec{P} = \vec{0}$ .

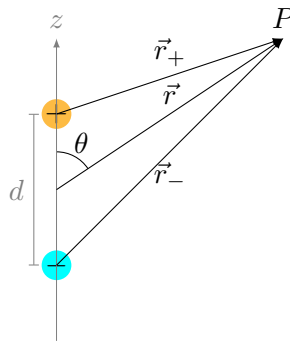
## 8.5 Ασκήσεις—Λύσεις

### 8.5.1 Δίπολο

1. Δείξτε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός ιδανικού διπόλου, με διπολική ροπή  $\vec{p}$  παράλληλη προς τον άξονα  $z$ , μπορεί να γραφεί ως

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}] .$$

#### ΛΥΣΗ



Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο ίσα και αντίθετα φορτία  $\pm q$ , που τα κέντρα τους βρίσκονται σε απόσταση  $d$ . Στην περίπτωση του ιδανικού διπόλου τα φορτία είναι σημειακά και η απόστασή τους τείνει στο 0.

Το δυναμικό που παράγεται σε σημείο με διάνυσμα θέσης  $\vec{r}_+$  ως προς το θετικό φορτίο  $+q$  και  $\vec{r}_-$  ως προς το αρνητικό φορτίο είναι

$$V(\vec{r}) = k_e \left( \frac{q}{r_+} - \frac{q}{r_-} \right) .$$

Το διάνυσμα της σχετικής θέσης του θετικού φορτίου ως προς το αρνητικό είναι  $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$  και το μέτρο του είναι η απόσταση των φορτίων,  $d$ .

Αν ορίσουμε ως σημείο αναφοράς το μέσο της απόστασης των φορτίων, το κέντρο του διπόλου δηλαδή, τότε το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό έχει διάνυσμα  $\vec{r}$  για το οποίο ισχύει

$$\vec{r} = \frac{1}{2}\vec{d} + \vec{r}_+ , \quad \vec{r} = -\frac{1}{2}\vec{d} + \vec{r}_- .$$

Επομένως,

$$\vec{r}_{\pm} = \vec{r} \mp \frac{1}{2}\vec{d} .$$

Τα μέτρα των διανυσμάτων  $\vec{r}_{\pm}$  είναι

$$r_{\pm} = \sqrt{\left(\vec{r} \mp \frac{1}{2}\vec{d}\right) \cdot \left(\vec{r} \mp \frac{1}{2}\vec{d}\right)} = \sqrt{r^2 \mp \vec{r} \cdot \vec{d} + \frac{1}{4}d^2} = \sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + \frac{1}{4}d^2}.$$

$\theta$  είναι η γωνία των διανυσμάτων  $\vec{r}$  και  $\vec{d}$ .

Παρατηρούμε ότι οι όροι  $1/r_{\pm}$  που εμφανίζονται στο δυναμικό γράφονται

$$\frac{1}{r_{\pm}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 \mp rd \cos \theta + \frac{1}{4}d^2}} = \frac{1}{r} \frac{1}{\sqrt{1 \mp \frac{d}{r} \cos \theta + \frac{1}{4}\left(\frac{d}{r}\right)^2}}.$$

Μας ενδιαφέρει να υπολογίσουμε μια έκφραση αυτών των όρων για  $d \ll r$ , δηλαδή για  $d/r \ll 1$ . Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{1 \mp x \cos \theta + \frac{1}{4}x^2}}$$

στο σημείο  $x = 0$  είναι

$$f(x) = 1 \pm \frac{\cos \theta}{2}x + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{8}x^2 \pm \frac{5 \cos^3 \theta - \cos \theta}{16}x^3 + \dots.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V(\vec{r}) &= k_e \frac{q}{r} \times \\ &\left[ \left( 1 + \frac{\cos \theta}{2} \frac{d}{r} + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{8} \left( \frac{d}{r} \right)^2 + \frac{5 \cos^3 \theta - \cos \theta}{16} \left( \frac{d}{r} \right)^3 + \dots \right) \right. \\ &\quad \left. - \left( 1 - \frac{\cos \theta}{2} \frac{d}{r} + \frac{3 \cos^2 \theta - 1}{8} \left( \frac{d}{r} \right)^2 - \frac{5 \cos^3 \theta - \cos \theta}{16} \left( \frac{d}{r} \right)^3 + \dots \right) \right] \\ &= k_e \frac{q}{r} \left( \cos \theta \frac{d}{r} + \frac{5 \cos^3 \theta - \cos \theta}{8} \left( \frac{d}{r} \right)^3 + \dots \right). \end{aligned}$$

Αν κρατήσουμε από τους όρους στην παρένθεση μόνο τον πρώτο καθώς οι υπόλοιποι είναι πολύ μικρότεροι του όταν  $d \ll r$ , προκύπτει ότι

$$V(\vec{r}) \approx k_e \frac{qd \cos \theta}{r^2}.$$

Έχουμε ορίσει ως σημείο αναφοράς το κέντρο του διπόλου. Έστω ότι η διπολική ροπή  $\vec{p} = q\vec{d}$  ορίζει τον άξονα  $z$ . Οι δύο από τις τρεις σφαιρικές συντεταγμένες του σημείου που θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό είναι αυτές που ορίσαμε ως  $r$  και  $\theta$ . Η τρίτη συντεταγμένη, το  $\phi$ , δεν εμφανίζεται

στο δυναμικό καθώς το φυσικό μας σύστημα είναι αναλλοίωτο σε περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$ , οπότε και το δυναμικό έχει την ίδια συμμετρία.

Συνεπώς,

$$V(\vec{r}) = V(r, \theta) \approx k_e \frac{p \cos \theta}{r^2}.$$

Για το ηλεκτρικό πεδίο έχουμε

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}) &= -\nabla V = -\frac{\partial V}{\partial r} \hat{r} - \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} \hat{\theta} - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial V}{\partial \phi} \hat{\phi} \\ &= 2k_e \frac{p \cos \theta}{r^3} \hat{r} + \frac{1}{r} k_e \frac{p \sin \theta}{r^2} \hat{\theta} = \frac{k_e}{r^3} (2p \cos \theta \hat{r} + p \sin \theta \hat{\theta}). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα  $\vec{p}$  (ο άξονας  $z$  ουσιαστικά) βρίσκεται στο επίπεδο των  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  των σφαιρικών συντεταγμένων. Με το  $\hat{r}$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  και με το  $\hat{\theta}$  σχηματίζει γωνία  $90^\circ + \theta$ . Επομένως,

$$\vec{p} = p \cos \theta \hat{r} + p \cos(90^\circ + \theta) \hat{\theta} = p \cos \theta \hat{r} - p \sin \theta \hat{\theta} \Rightarrow p \sin \theta \hat{\theta} = p \cos \theta \hat{r} - \vec{p}.$$

Επομένως,

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{k_e}{r^3} (3p \cos \theta \hat{r} - \vec{p}) = \frac{k_e}{r^3} (3(p \cdot \hat{r}) \hat{r} - \vec{p}).$$

Η τελευταία σχέση προέκυψε καθώς  $p \cos \theta = \vec{p} \cdot \hat{r}$ . Η έκφραση στην οποία καταλήξαμε για το  $\vec{E}$  είναι ανεξάρτητη από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων.

**Παρατήρηση** Μπορούμε να γράψουμε και το δυναμικό ανεξάρτητα από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων αν παρατηρήσουμε ότι  $p \cos \theta = \vec{p} \cdot \hat{r}$  και  $r^2 = \vec{r} \cdot \vec{r}$ :

$$V(\vec{r}) \approx k_e \frac{\vec{p} \cdot \hat{r}}{\vec{r} \cdot \vec{r}}.$$

2. Έστω ότι η πυκνότητα φορτίου του ηλεκτρονιακού νέφους σε ένα άτομο είναι ανάλογη της απόστασης από το κέντρο, μέχρι την ακτίνα  $R$  του ατόμου. Ποια είναι η εξάρτηση της επαγόμενης διπολικής ροπής  $\vec{p}$  του ατόμου από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}_{\text{ext}}$ ;

### ΛΥΣΗ

Έχουμε δεδομένο ότι  $\rho(r) = Ar$  για  $r \leq R$  και  $\rho(r) = 0$  για  $r > R$ . Η κατανομή φορτίου είναι συμμετρική σε περιστροφή γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από το κέντρο. Το ηλεκτρικό πεδίο που προκαλεί πρέπει και αυτό να έχει την ίδια συμμετρία. Αναμένουμε επομένως να έχει μόνο ακτινική συνιστώσα και να εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο. Επομένως, σε σφαιρικές συντεταγμένες  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε ως επιφάνεια Gauss,  $S$ , μια κλειστή επιφάνεια που περνά από σημεία που το ηλεκτρικό πεδίο είναι ίδιο. Θα μας διευκολύνει αυτό να υπολογίσουμε την ηλεκτρική ροή. Αυτά τα σημεία είναι όσα απέχουν συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο, έστω  $\alpha$ .

Η ροή του ηλεκτρικού πεδίου από ένα στοιχειώδες τμήμα τής επιφάνειας Gauss με διάνυσμα επιφάνειας  $d\vec{A} = dA\hat{r}$  είναι  $d\Phi_E = \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(\alpha) dA$ . Επομένως,

$$\Phi_E = \oint_S E(\alpha) dA = E(\alpha) \oint_S dA = E(\alpha) 4\pi\alpha^2.$$

Το συνολικό φορτίο που περικλείει η επιφάνεια Gauss είναι

$$Q' = \int_V \rho d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\alpha \rho r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi.$$

Αν  $\alpha \leq R$ ,

$$Q' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\alpha A r r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = A\pi\alpha^4.$$

Αν  $\alpha > R$ ,

$$Q' = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^R A r r^2 \sin\theta dr d\theta d\phi = A\pi R^4.$$

Από το νόμο Gauss

$$E(\alpha) 4\pi\alpha^2 = \frac{A}{\epsilon_0} \pi\alpha^4 \Rightarrow E(\alpha) = \frac{A}{4\epsilon_0} \alpha^2$$

για  $\alpha \leq R$  και

$$E(\alpha) 4\pi\alpha^2 = \frac{A}{\epsilon_0} \pi R^4 \Rightarrow E(\alpha) = \frac{A}{4\epsilon_0} \frac{R^4}{\alpha^2}$$

για  $\alpha > R$ .

Υπό την επίδραση του εξωτερικού πεδίου, ο πυρήνας απομακρύνεται από το κέντρο του ηλεκτρονιακού νέφους κατά απόσταση  $d \ll R$ , στην κατεύθυνση του εξωτερικού πεδίου. Το  $d$  είναι τέτοιο ώστε η δύναμη από το εξωτερικό ηλεκτρικό πεδίο να αντισταθμίζεται από τη δύναμη του ηλεκτρονιακού νέφους, ή αλλιώς, τα ηλεκτρικά πεδία να είναι ίσα και αντίθετα. Επομένως

$$\frac{A}{4\epsilon_0} d^2 = E_{\text{ext}} \Rightarrow d = \sqrt{\frac{4\epsilon_0}{A} E_{\text{ext}}}.$$

Η επαγόμενη διπολική ροπή  $p = qd$  τότε είναι ανάλογη του  $\sqrt{E_{\text{ext}}}$ .

- Ένα σημειακό φορτίο  $q$  τοποθετείται σε μεγάλη απόσταση  $r$  από το κέντρο ενός ουδέτερου ατόμου πολωσιμότητας  $\alpha$ . Πόση είναι η δύναμη έλξης μεταξύ τους;

**ΛΥΣΗ**

Θεωρούμε ως σημείο αναφοράς τη θέση του φορτίου  $q$ . Το φορτίο παράγει ένα ηλεκτρικό πεδίο στη θέση  $(x, y, z)$  του ατόμου που είναι

$$\vec{E} = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} = k_e \frac{q}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) .$$

Το άτομο αποκτά διπολική ροπή  $\vec{p} = \alpha \vec{E}$ . Εξαιτίας της διπολικής ροπής δέχεται δύναμη από το φορτίο που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F} = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E} = \alpha \left( E_x \frac{\partial}{\partial x} + E_y \frac{\partial}{\partial y} + E_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (E_x \hat{i} + E_y \hat{j} + E_z \hat{k}) .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F_x &= k_e q \alpha E_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = k_e q \alpha \left[ \frac{E_x}{r^3} - \frac{3x}{r^5} (E_x x + E_y y + E_z z) \right] \\ &= k_e \alpha \frac{q}{r^3} \left( E_x - \frac{3x}{r^2} (\vec{E} \cdot \vec{r}) \right) . \end{aligned}$$

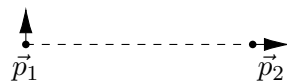
Όμοια

$$F_y = k_e \alpha \frac{q}{r^3} \left( E_y - \frac{3y}{r^2} (\vec{E} \cdot \vec{r}) \right) , \quad F_z = k_e \alpha \frac{q}{r^3} \left( E_z - \frac{3z}{r^2} (\vec{E} \cdot \vec{r}) \right) .$$

Άρα

$$\begin{aligned} \vec{F} &= k_e \alpha \frac{q}{r^3} \left( \vec{E} - \frac{3(\vec{E} \cdot \vec{r})}{r^2} \vec{r} \right) = k_e \alpha \frac{q}{r^3} \left( \vec{E} - 3(\vec{E} \cdot \hat{r}) \hat{r} \right) \\ &= k_e \alpha \frac{q}{r^3} \left( \vec{E} - 3k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} \right) = -2k_e^2 \alpha \frac{q^2}{r^5} \hat{r} . \end{aligned}$$

4. Τα  $\vec{p}_1$  και  $\vec{p}_2$  είναι δύο ιδανικά (σημειακά) δίπολα που απέχουν απόσταση  $a$ .



- Πόση είναι η ροπή στρέψης, ως προς το κέντρο του  $\vec{p}_1$ , στο  $\vec{p}_1$  εξαιτίας του  $\vec{p}_2$ ;
- Πόση είναι η ροπή στρέψης, ως προς το κέντρο του  $\vec{p}_2$ , στο  $\vec{p}_2$  εξαιτίας του  $\vec{p}_1$ ;

**ΛΥΣΗ**

Ορίζουμε την ευθεία που περνά από τα δύο δίπολα να είναι ο άξονας  $x$ . Αυτή είναι και η κατεύθυνση του  $\vec{p}_2$ . Η αρχή είναι το σημείο που βρίσκεται το δίπολο  $\vec{p}_1$ . Η κατεύθυνσή του ορίζει τον άξονα  $y$ . Το δίπολο  $\vec{p}_1$  βρίσκεται σε θέση με συντεταγμένες  $(0, 0)$ . Το δίπολο  $\vec{p}_2$  βρίσκεται σε θέση με συντεταγμένες  $(a, 0)$ .

Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο ενός διπόλου  $\vec{p}$ , σε θέση  $\vec{r}$  ως προς το δίπολο, είναι

$$\vec{E}(\vec{r}) = k_e \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}] .$$

Η θέση του  $\vec{p}_1$  ως προς το  $\vec{p}_2$  είναι

$$\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2 = (0, 0) - (a, 0) = (-a, 0) .$$

Το μέτρο του διανύσματος είναι  $r_{12} = a$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι  $\hat{r}_{12} = (-1, 0) = -\hat{i}$ .

Το πεδίο  $\vec{E}_2$  σε αυτή τη θέση είναι

$$\vec{E}_2(\vec{r}_{12}) = k_e \frac{1}{a^3} [3((p_2\hat{i}) \cdot (-\hat{i}))(-\hat{i}) - (p_2\hat{i})] = k_e \frac{1}{a^3} 2p_2\hat{i} .$$

Η ροπή στρέψης στο  $\vec{p}_1$  είναι

$$\vec{\tau}_{12} = \vec{p}_1 \times \vec{E}_2(\vec{r}_{12}) = (p_1\hat{j}) \times \left( k_e \frac{1}{a^3} 2p_2\hat{i} \right) = -k_e \frac{1}{a^3} 2p_1p_2\hat{k} .$$

Για το  $\vec{p}_2$  έχουμε:

Η θέση του  $\vec{p}_2$  ως προς το  $\vec{p}_1$  είναι

$$\vec{r}_{21} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (a, 0) - (0, 0) = (a, 0) .$$

Το μέτρο του διανύσματος είναι  $r_{21} = a$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι  $\hat{r}_{21} = (1, 0) = \hat{i}$ .

Το πεδίο  $\vec{E}_1$  σε αυτή τη θέση είναι

$$\vec{E}_1(\vec{r}_{21}) = k_e \frac{1}{a^3} [3((p_1\hat{j}) \cdot \hat{i})\hat{i} - (p_1\hat{j})] = -k_e \frac{1}{a^3} p_1\hat{j} .$$

Η ροπή στρέψης στο  $\vec{p}_2$  είναι

$$\vec{\tau}_{21} = \vec{p}_2 \times \vec{E}_1(\vec{r}_{21}) = (p_2\hat{i}) \times \left( -k_e \frac{1}{a^3} p_1\hat{j} \right) = -k_e \frac{1}{a^3} p_1p_2\hat{k} .$$

Οι ροπές στρέψης δεν είναι ίσες και αντίθετες γιατί δεν υπολογίζονται ως προς το ίδιο σημείο.

5. Δείξτε ότι η δυναμική ενέργεια ιδανικού διπόλου σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  είναι

$$U = -\vec{p} \cdot \vec{E} .$$



**ΛΥΣΗ**

Το δίπολο αποτελείται από δύο φορτία  $\pm q$  σε θέσεις  $\vec{r}_{\pm}$  (ως προς κάποιο σημείο αναφοράς), με απομάκρυνση  $\vec{d} = \vec{r}_+ - \vec{r}_-$  μεταξύ τους.

Έστω ένα φορτίο  $+q$  που βρίσκεται σε θέση με δυναμικό  $V_+$ . Το σύστημα γνωρίζουμε ότι έχει δυναμική ενέργεια  $U_+ = +qV_+$ . Αν το φορτίο είναι αρνητικό,  $U_- = -qV_-$ . Η συνολική δυναμική ενέργεια είναι

$$U = U_+ + U_- = q(V_+ - V_-) .$$

Αν βρούμε το  $V_+$  από το ανάπτυγμα Taylor του δυναμικού στο σημείο  $\vec{r}_-$  προκύπτει

$$V_+ = V_- + \nabla V|_- \cdot (\vec{r}_+ - \vec{r}_-) \cdots .$$

Επομένως, στο όριο  $d \rightarrow 0$ ,

$$\Delta V = V_+ - V_- = \vec{d} \cdot \nabla V \Rightarrow U = q\vec{d}(-\vec{E}) = -\vec{p} \cdot \vec{E} .$$

6. Δείξτε ότι η ενέργεια αλληλεπίδρασης δύο ιδανικών διπόλων  $\vec{p}_1, \vec{p}_2$ , που βρίσκονται στις θέσεις  $\vec{r}_1, \vec{r}_2$ , είναι

$$U = k_e \frac{1}{r^3} [\vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2 - 3(\vec{p}_1 \cdot \hat{r})(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})] ,$$

όπου  $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$ .

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο του διπόλου  $\vec{p}_2$  σε θέση  $\vec{r}$  είναι

$$\vec{E}_2(\vec{r}) = k_e \frac{1}{r^3} [3(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{p}_2] .$$

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο διπόλων είναι

$$U = -\vec{p}_1 \cdot \vec{E}_2 = -k_e \frac{1}{r^3} [3(\vec{p}_2 \cdot \hat{r})(\vec{p}_1 \cdot \hat{r} - \vec{p}_1 \cdot \vec{p}_2)] .$$

7. Ένα δίπολο βρίσκεται σε απόσταση  $r$  από ένα σημειακό φορτίο  $q$  και ο προσανατολισμός του είναι τέτοιος που το διάνυσμα της διπολικής ροπής,  $\vec{p}$ , σχηματίζει γωνία  $\theta$  με το διάνυσμα  $\vec{r}$  που συνδέει το  $q$  με το δίπολο.

- Υπολογίστε τη δύναμη στο δίπολο.
- Υπολογίστε τη δύναμη στο  $q$ .

**ΛΥΣΗ**

Το φορτίο παράγει ηλεκτρικό πεδίο στη θέση  $\vec{r}$  που βρίσκεται το δίπολο:

$$\vec{E}_q = k_e \frac{q}{r^2} \hat{r} = k_e q \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) .$$

Η δύναμη που δέχεται το δίπολο είναι

$$\vec{F}_p = (\vec{p} \cdot \nabla) \vec{E}_q = \left( p_x \frac{\partial}{\partial x} + p_y \frac{\partial}{\partial y} + p_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \left( k_e q \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} (x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}) \right) .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} F_{p,x} &= k_e q p_x \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}} = k_e q \left[ \frac{p_x}{r^3} - \frac{3x}{r^5} (p_x x + p_y y + p_z z) \right] \\ &= k_e \frac{q}{r^3} \left( p_x - \frac{3x}{r^2} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right) . \end{aligned}$$

Όμοια

$$F_{p,y} = k_e \frac{q}{r^3} \left( p_y - \frac{3y}{r^2} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right) , \quad F_{p,z} = k_e \frac{q}{r^3} \left( p_z - \frac{3z}{r^2} (\vec{p} \cdot \vec{r}) \right) .$$

Άρα

$$\vec{F}_p = k_e \frac{q}{r^3} \left( \vec{p} - \frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r}) \vec{r}}{r^2} \right) = k_e \frac{q}{r^3} (\vec{p} - 3(\vec{p} \cdot \hat{r}) \hat{r}) .$$

Ισχύει επιπλέον ότι  $\vec{p} \cdot \hat{r} = p \cos \theta$ .

Για τη δύναμη στο φορτίο:

Γνωρίζουμε ότι το ηλεκτρικό πεδίο του διπόλου  $\vec{p}$  σε θέση  $-\vec{r}$  του φορτίου είναι

$$\vec{E}_p(-\vec{r}) = k_e \frac{1}{r^3} [3(\vec{p} \cdot (-\hat{r}))(-\hat{r}) - \vec{p}] .$$

Ισχύει ότι  $\vec{p} \cdot \hat{r} = p \cos \theta$ . Επομένως

$$\vec{E}_p(\vec{r}) = k_e \frac{1}{r^3} (3p \cos \theta \hat{r} - \vec{p}) .$$

Η δύναμη που δέχεται το φορτίο  $q$  είναι

$$\vec{F}_q = q \vec{E}_p = k_e \frac{q}{r^3} (3p \cos \theta \hat{r} - \vec{p}) .$$

Είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη στο δίπολο.

## 8.5.2 Πόλωση υλικού

1. Μια σφαίρα ακτίνας  $R$  φέρει πόλωση  $\vec{P} = k\vec{r}$ , όπου  $k$  σταθερά και  $\vec{r}$  το διάνυσμα με αρχή το κέντρο της σφαίρας.

(α') Υπολογίστε τα δέσμια φορτία  $\sigma_b$  και  $\rho_b$ .

(β') Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο μέσα και έξω από τη σφαίρα.

## ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι τα δέσμια φορτία έχουν

- επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην εξωτερική επιφάνεια της σφαίρας και
- χωρική πυκνότητα  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ .

Το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στην επιφάνεια της σφαίρας είναι το  $\hat{r}$ . Πάνω στην επιφάνεια το μέτρο του  $\vec{P}$  είναι  $kR$ . Επομένως,  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{r} = P = kR$ .

Η χωρική πυκνότητα  $\rho_b$  είναι<sup>2</sup>

$$\rho_b = -\nabla \cdot (kr\hat{r}) = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2(kr)) = -3k.$$

Η κατανομή των φορτίων είναι ομοιόμορφη και στον όγκο του υλικού και στην επιφάνεια, και είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή γύρω από οποιοδήποτε άξονα περνά από το κέντρο της σφαίρας. Εύκολα δείχνεται ότι το ηλεκτρικό πεδίο που παράγουν είναι ακτινικό και το μέτρο του εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο:  $E(\vec{r}) = E(r)\hat{r}$ .

Αν επιλέξουμε ως επιφάνεια Gauss  $S'$ , μια σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα  $\alpha$ , ομόκεντρη της σφαίρας, έχουμε για τη ροή του ηλεκτρικού πεδίου από αυτή

$$\oint_{S'} \vec{E} \cdot d\vec{A} = E(\alpha)4\pi\alpha^2.$$

Το φορτίο που περικλείει αυτή, αν  $\alpha < R$ , είναι το φορτίο που έχει ο όγκος  $V'$  της σφαίρας με ακτίνα  $\alpha$  και πυκνότητα φορτίου  $\rho_b$ :

$$Q_b = \int_{V'} \rho_b d\tau = -3k \int_{V'} d\tau = -3k \frac{4}{3} \pi \alpha^3.$$

<sup>2</sup>Ειδικά στη συγκεκριμένη περίπτωση, αντί να γράψουμε τον τελεστή  $\nabla$  σε σφαιρικές συντεταγμένες, θα μπορούσαμε να τον γράψουμε σε καρτεσιανές καθώς το  $\vec{P}$  είναι  $k\vec{r} = k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ .

Αν  $\alpha \geq R$ , το φορτίο που περικλείεται είναι το δέσμιο φορτίο στον όγκο  $\mathcal{V}$  της σφαίρας και το δέσμιο φορτίο στην επιφάνειά της,  $\mathcal{S}$ :

$$Q_b = \int_{\mathcal{V}} \rho_b d\tau + \oint_{\mathcal{S}} \sigma_b dA = -3k \int_{\mathcal{V}} d\tau + kR \oint_{\mathcal{S}} dA = -3k \frac{4}{3} \pi R^3 + kR 4\pi R^2 = 0.$$

Το ολικό δέσμιο φορτίο σε αυτή την περίπτωση είναι φυσικά 0 αφού τα φορτία προέρχονται από ανακατανομή των φορτίων στα μόρια του υλικού (που είναι φυσικά ουδέτερα).

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι στο εξωτερικό της σφαίρας το ηλεκτρικό πεδίο είναι  $\vec{0}$ , ενώ στο εσωτερικό, σε απόσταση  $\alpha$  είναι

$$E(\alpha) 4\pi \alpha^2 = \frac{-4k\pi \alpha^3}{\epsilon_0} \Rightarrow E(\alpha) = -\frac{k\alpha}{\epsilon_0}.$$

2. Ένα παχύ σφαιρικό κέλυφος εσωτερικής ακτίνας  $a$  και εξωτερικής  $b$ , είναι διηλεκτρικό υλικό με μόνιμη πόλωση

$$\vec{P}(\vec{r}) = \frac{k}{r} \hat{r},$$

όπου  $k$  είναι μια σταθερά και  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα με αρχή το κέντρο. Δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία στο πρόβλημα. Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο και στις τρεις περιοχές με δύο τρόπους:

- Εντοπίστε όλα τα δέσμια φορτία και χρησιμοποιήστε το νόμο του Gauss για να βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο που παράγουν.
- Χρησιμοποιήστε το νόμο του Gauss για το πεδίο  $\vec{D}$  και από αυτό υπολογίστε το  $\vec{E}$ .

## ΛΥΣΗ

### Α' τρόπος

Τα δέσμια φορτία στο εσωτερικό του υλικού έχουν πυκνότητα

$$\begin{aligned} \rho_b &= -\nabla \cdot \vec{P} = -\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 k/r)}{\partial r} = -\frac{k}{r^2}. \end{aligned}$$

Στην εσωτερική επιφάνεια τα δέσμια φορτία έχουν πυκνότητα

$$\sigma_b = \vec{P} \cdot (-\hat{r}) = -\frac{k}{a}.$$

Στην εξωτερική επιφάνεια τα δέσμια φορτία έχουν πυκνότητα

$$\sigma'_b = \vec{P} \cdot \hat{r} = \frac{k}{b}.$$

Η κατανομή των δέσμιων φορτίων είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από το κέντρο. Θα πρέπει λοιπόν και το ηλεκτρικό πεδίο να μην μεταβάλλεται σε τέτοια περιστροφή. Αυτό σημαίνει ότι το  $\vec{E}$

- έχει μόνο ακτινική συνιστώσα και
- εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο,  $r$ , και όχι τις γωνίες  $\phi$ ,  $\theta$ .

Επομένως,  $\vec{E} = E(r)\hat{r}$ .

Επιλέγουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $R$ , ομόκεντρη της κατανομής. Η ροή του  $\vec{E}$  είναι, ως γνωστόν,  $\Phi = E(R)4\pi R^2$  ενώ το φορτίο  $Q_{\text{in}}$  που περιέχεται σε αυτή είναι

**αν**  $R < a$

$$Q_{\text{in}} = 0,$$

αφού δεν υπάρχουν φορτία στην κοιλότητα. Σε αυτή την περίπτωση,  $E(R) = 0$ .

**αν**  $a \leq R < b$

$$Q_{\text{in}} = \int_V \rho_b d\tau + \oint_S \sigma_b dA.$$

Ο όγκος  $V$  είναι ο όγκος του κελύφους με ακτίνα μεταξύ  $a$  και  $R$  και  $S$  η εσωτερική επιφάνεια (σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $a$ ). Έχουμε

$$\int_V \rho_b d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^R \frac{-k}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 4\pi k(a - R).$$

Επίσης,

$$\oint_S \sigma_b dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{k}{a}\right) a^2 \sin \theta d\theta d\phi = -4\pi ka.$$

Συνολικά,

$$Q_{\text{in}} = 4\pi k(a - R) - 4\pi ka = -4\pi kR.$$

Σε αυτή την περίπτωση

$$E(R) = \frac{-4\pi kR}{4\pi\epsilon_0 R^2} = -\frac{k}{\epsilon_0 R}.$$

αν  $b \leq R$

$$Q_{\text{in}} = \int_V \rho_b d\tau + \oint_S \sigma_b dA + \oint_{S'} \sigma_b dA .$$

Ο όγκος  $V$  είναι ο όγκος του κελύφους με ακτίνα μεταξύ  $a$  και  $b$ ,  $S$  η εσωτερική επιφάνεια (σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $a$ ) και  $S'$  η εξωτερική επιφάνεια (σφαιρική επιφάνεια ακτίνας  $b$ ). Έχουμε

$$\int_V \rho_b d\tau = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{-k}{r^2} r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi = 4\pi k(a-b) .$$

$$\int_S \sigma_b dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(-\frac{k}{a}\right) a^2 \sin \theta d\theta d\phi = -4\pi ka .$$

$$\int_{S'} \sigma'_b dA = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{k}{b} b^2 \sin \theta d\theta d\phi = 4\pi kb .$$

Συνολικά,

$$Q_{\text{in}} = 4\pi k(a-b) - 4\pi ka + 4\pi kb = 0 .$$

Σε αυτή την περίπτωση  $E(R) = 0$ .

### Β' τρόπος

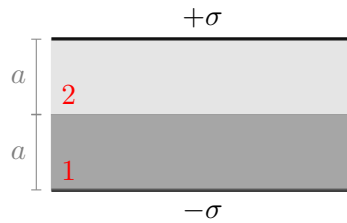
Ο νόμος Gauss για το πεδίο  $\vec{D}$  είναι

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f ,$$

όπου τώρα  $Q_f = 0$  στο εσωτερικό οποιασδήποτε επιφάνειας Gauss. Άρα  $\vec{D} = \vec{0}$ . Καθώς  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$  προκύπτει ότι

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\frac{1}{\epsilon_0} \vec{P} = \begin{cases} \vec{0} & r < a \\ -\frac{k}{\epsilon_0 r} \hat{r} & a \leq r \leq b \\ \vec{0} & b < r \end{cases} .$$

- Ο χώρος ανάμεσα στους σπλισμούς ενός πυκνωτή παράλληλων πλακών είναι γεμάτος με δύο στρώματα από διαφορετικά γραμμικά διηλεκτρικά. Το κάθε στρώμα έχει πάχος  $a$ . Η διηλεκτρική σταθερά των στρωμάτων 1 και 2 είναι  $\kappa_1 = 2$  και  $\kappa_2 = 1.5$  αντίστοιχα. Η πυκνότητα του ελεύθερου φορτίου στον άνω σπλισμό είναι  $\sigma$  και στον κάτω  $-\sigma$ .



Σχήμα 8.1: Άσκηση 3

- (α') Βρείτε την ηλεκτρική μετατόπιση  $\vec{D}$  σε κάθε στρώμα.  
 (β') Βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  σε κάθε στρώμα.  
 (γ') Βρείτε την πόλωση  $\vec{P}$  σε κάθε στρώμα.  
 (δ') Βρείτε τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών.  
 (ε') Βρείτε τις θέσεις και τις τιμές όλων των δέσμιων φορτίων.  
 (στ') Με γνώση των δέσμιων φορτίων υπολογίστε ξανά το πεδίο  $\vec{E}$  σε κάθε στρώμα και συγκρίνετε με την απάντηση στο ερώτημα (β').

**ΛΥΣΗ**

Το σύστημα είναι συμμετρικό σε περιστροφή γύρω από άξονα κάθετο στους οπλισμούς. Το  $\vec{D}$  (όπως και τα  $\vec{E}$  και  $\vec{P}$ ) δεν μπορεί να έχει συνιστώσα κάθετη στον άξονα. Ας ονομάσουμε την κάθετη διεύθυνση στους οπλισμούς ως τον άξονα  $z$ .

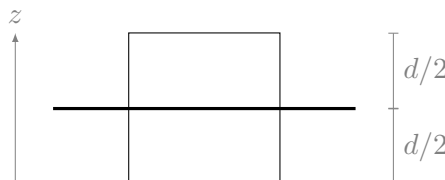
Επιπλέον, καθώς οι οπλισμοί εκτείνονται στο άπειρο, μια μετατόπιση του συστήματος κάθετα στον άξονα  $z$ , δηλαδή πάνω στο επίπεδο  $x - y$ , δεν θα πρέπει να αλλάζει το  $\vec{D}$  (και τα άλλα διανύσματα): το  $\vec{D}$  είναι συνεπώς ανεξάρτητο από τις συντεταγμένες  $x, y$ . Άρα,  $\vec{D} = D(z)\hat{k}$ .

Θα εφαρμόσουμε την ολοκληρωτική μορφή του νόμου Gauss για το  $\vec{D}$ :

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f,$$

όπου  $Q_f$  το ελεύθερο φορτίο που περιέχεται στην επιφάνεια  $S$ .

Επιλέγω ως επιφάνεια Gauss ένα κύβο πλευράς  $d$ , που διαπερνάται παράλληλα σε δύο έδρες του από ένα οπλισμό. Ας υποθέσουμε ότι στον οπλισμό  $z = 0$ . Η διατομή του κύβου φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Το  $\vec{D}$  είναι παράλληλο στις παράπλευρες έδρες, οπότε η ροή του από εκεί είναι 0. Στην επάνω έδρα η ροή είναι  $D(d/2)d^2$ . Στην κάτω έδρα η ροή είναι  $-D(-d/2)d^2$ . Λόγω της συμμετρίας κατοπτρισμού  $-D(-d/2) = D(d/2)$  άρα η συνολική ροή από τον κύβο είναι  $2D(d/2)d^2$ . Αυτή είναι ίση με το φορτίο που έχει ο οπλισμός μέσα στον κύβο:  $\sigma d^2$ . Επομένως,  $D(d/2) = \sigma/2$ . Παρατηρούμε ότι είναι ανεξάρτητη από την απόσταση από τον οπλισμό.

Οι δύο οπλισμοί μαζί δίνουν ένα πεδίο  $D$  που έχει μηδενική τιμή εκτός του πυκνωτή και μέσα  $\vec{D} = -\sigma\hat{k}$ .

Γνωρίζουμε ότι  $\vec{D} = \kappa\epsilon_0\vec{E}$ . Για το υλικό 1,  $\vec{E}_1 = -\hat{k}\sigma/(\kappa_1\epsilon_0)$ . Για το υλικό 2,  $\vec{E}_2 = -\hat{k}\sigma/(\kappa_2\epsilon_0)$ .

Γνωρίζουμε ότι

$$\vec{P} = \vec{D} - \epsilon_0\vec{E} = -\hat{k}\sigma(1 - 1/\kappa).$$

Για το υλικό 1,  $\vec{P}_1 = -\hat{k}\sigma(1 - 1/\kappa_1)$ . Για το υλικό 2,  $\vec{P}_2 = -\hat{k}\sigma(1 - 1/\kappa_2)$ .

Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των πλακών είναι

$$V_+ - V_- = \int_{C_{+ \rightarrow -}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Επιλέγω ως καμπύλη  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που είναι κάθετο στους οπλισμούς. Το μήκος του είναι  $2a$  και πάνω σε αυτό, το στοιχειώδες διάνυσμα και το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλα. Το ηλεκτρικό πεδίο αλλάζει τιμή στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο διηλεκτρικών. Έχουμε

$$V_+ - V_- = \int_{C_{+ \rightarrow -}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^a E_1 ds + \int_a^{2a} E_2 ds = a(E_1 + E_2) = \frac{a\sigma}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right).$$

Ας υπολογίσουμε το ηλεκτρικό πεδίο από όλα τα φορτία:

Τα δέσμια φορτία στο εσωτερικό έχουν χωρική πυκνότητα  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = 0$  ενώ στις εξωτερικές επιφάνειες των υλικών έχουν επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ .

**Για το υλικό 1:** Στην επάνω επιφάνειά του (έστω 1+), που εφάπτεται στο θετικό οπλισμό,  $\vec{P}_1 = -\hat{k}\sigma(1 - 1/\kappa_1)$  και  $\hat{n} = \hat{k}$  άρα  $\sigma_b^{1+} = -\sigma(1 - 1/\kappa_1)$ .

Στην κάτω επιφάνειά του (έστω 1-) που εφάπτεται στο υλικό 2,  $\vec{P}_1 = -\hat{k}\sigma(1 - 1/\kappa_1)$  και  $\hat{n} = -\hat{k}$  άρα  $\sigma_b^{1-} = \sigma(1 - 1/\kappa_1)$ .

**Για το υλικό 2:** Στην επάνω επιφάνειά του (έστω 2+), που εφάπτεται στο υλικό 1,  $\vec{P}_2 = -\hat{k}\sigma(1 - 1/\kappa_2)$  και  $\hat{n} = \hat{k}$  άρα  $\sigma_b^{2+} = -\sigma(1 - 1/\kappa_2)$ .

Στην κάτω επιφάνειά του (έστω 2-) που εφάπτεται στον αρνητικό οπλισμό,  $\vec{P}_2 = -\hat{k}\sigma(1 - 1/\kappa_2)$  και  $\hat{n} = -\hat{k}$  άρα  $\sigma_b^{2-} = \sigma(1 - 1/\kappa_2)$ .

Με βάση τα παραπάνω, έχουμε τρεις συσσωρεύσεις φορτίων:



**επάνω** με συνολική επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma + \sigma^{1+} = \sigma/\kappa_1$ .

**στη μέση** με συνολική επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma^{1-} + \sigma^{2+} = \sigma(-1/\kappa_1 + 1/\kappa_2)$ .

**κάτω** με συνολική επιφανειακή πυκνότητα  $-\sigma + \sigma^{2-} = -\sigma/\kappa_2$ .

Η εφαρμογή του νόμου Gauss για το  $\vec{E}$  γύρω από τις τρεις συσσωρεύσεις μας δίνει:

**Για την επάνω επιφάνεια:** Επάνω  $\vec{E} = \hat{k}\sigma/\kappa_1/(2\epsilon_0)$ . Κάτω  $\vec{E} = -\hat{k}\sigma/\kappa_1/(2\epsilon_0)$ .

**Για τη μεσαία επιφάνεια:** Επάνω  $\vec{E} = \hat{k}\sigma(-1/\kappa_1 + 1/\kappa_2)/(2\epsilon_0)$ . Κάτω  $\vec{E} = -\hat{k}\sigma(-1/\kappa_1 + 1/\kappa_2)/(2\epsilon_0)$ .

**Για την κάτω επιφάνεια:** Επάνω  $\vec{E} = -\hat{k}\sigma/\kappa_2/(2\epsilon_0)$ . Κάτω  $\vec{E} = \hat{k}\sigma/\kappa_2/(2\epsilon_0)$ .

Συνολικά, αθροίζοντας διανυσματικά τα πεδία, έχουμε

**Πάνω από την επάνω επιφάνεια:**

$$\vec{E} = \hat{k} \left( \frac{\sigma}{\kappa_1(2\epsilon_0)} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \frac{\sigma}{\kappa_2(2\epsilon_0)} \right) = \vec{0}.$$

**Στο υλικό 1:**

$$\vec{E} = \hat{k} \left( -\frac{\sigma}{\kappa_1(2\epsilon_0)} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \frac{\sigma}{\kappa_2(2\epsilon_0)} \right) = -\hat{k} \frac{\sigma}{\kappa_1\epsilon_0}$$

**Στο υλικό 2:**

$$\vec{E} = \hat{k} \left( -\frac{\sigma}{\kappa_1(2\epsilon_0)} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \frac{\sigma}{\kappa_2(2\epsilon_0)} \right) = -\hat{k} \frac{\sigma}{\kappa_2\epsilon_0}.$$

**Κάτω από την κάτω επιφάνεια:**

$$\vec{E} = -\hat{k} \left( \frac{\sigma}{\kappa_1(2\epsilon_0)} + \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left( -\frac{1}{\kappa_1} + \frac{1}{\kappa_2} \right) - \frac{\sigma}{\kappa_2(2\epsilon_0)} \right) = \vec{0}.$$

4. Σε μια σφαίρα από γραμμικό διηλεκτρικό υλικό εμφυτεύθηκε ομοιόμορφα ένα ελεύθερο φορτίο χωρικής πυκνότητας  $\rho_f$ . Βρείτε το δυναμικό στο κέντρο της σφαίρας (ως προς το άπειρο), αν η ακτίνα της είναι  $R$  και η διηλεκτρική σταθερά του υλικού είναι  $\kappa$ .

### ΛΥΣΗ

Λόγω της σφαιρικής συμμετρίας που έχει η κατανομή ελεύθερου φορτίου, η ηλεκτρική μετατόπιση έχει

- μόνο ακτινική συνιστώσα.

Σε ένα δεδομένο σημείο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα εφαπτόμενη στη σφαιρική επιφάνεια καθώς η περιστροφή του συστήματος γύρω από άξονα που περνά από το κέντρο και το δεδομένο σημείο, αφήνει αναλλοίωτη την κατανομή φορτίου αλλά θα στρέψει την εφαπτόμενη συνιστώσα. Η ηλεκτρική μετατόπιση πρέπει να είναι η ίδια και επομένως η συνιστώσα αυτή πρέπει να είναι 0.

- μέτρο που εξαρτάται μόνο από την απόσταση από το κέντρο.

Δεν εξαρτάται από τις άλλες σφαιρικές συντεταγμένες (τις δύο γωνίες). Οποιαδήποτε στροφή του συστήματος γύρω από οποιοδήποτε άξονα που περνά από το κέντρο, αλλάζει τις γωνίες αλλά πρέπει να αφήνει την ηλεκτρική μετατόπιση ίδια.

Καταλήγουμε ότι  $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ .

Ο νόμος Gauss για την ηλεκτρική μετατόπιση είναι

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_f,$$

όπου  $Q_f$  το ελεύθερο φορτίο που περιέχεται στην επιφάνεια  $S$ .

Μπορούμε να επιλέξουμε ως επιφάνεια Gauss,  $S$ , μια κλειστή επιφάνεια που περνά από σημεία που η ηλεκτρική μετατόπιση είναι ίδια. Θα μας διευκολύνει αυτό να υπολογίσουμε τη ροή της. Αυτά τα σημεία είναι όσα απέχουν συγκεκριμένη απόσταση από το κέντρο, έστω  $\alpha$ .

Η ροή της  $\vec{D}$  από την  $S$  είναι  $4\pi\alpha^2 D(\alpha)$ . Αν  $\alpha \leq R$ , το φορτίο που περικλείει η  $S$  στο εσωτερικό της ( $V'$ ) είναι

$$Q_f = \int_{V'} \rho_f d\tau = \rho_f \frac{4}{3}\pi\alpha^3.$$

Αν  $\alpha > R$ , το φορτίο που περικλείει η  $S$  είναι αυτό στη σφαίρα ( $V$ )

$$Q_f = \int_V \rho_f d\tau = \rho_f \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Άρα

$$D(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{3}\rho_f\alpha & \alpha \leq R \\ \frac{1}{3}\rho_f\frac{R^3}{\alpha^2} & \alpha > R \end{cases}.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο είναι  $\vec{E} = \vec{D}/(\kappa\epsilon_0)$  στο εσωτερικό και  $\vec{E} = \vec{D}/\epsilon_0$  στο εξωτερικό:

$$\vec{E}(\alpha) = \hat{r} \begin{cases} \frac{1}{3\kappa\epsilon_0} \rho_f \alpha & \alpha \leq R \\ \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_f \frac{R^3}{\alpha^2} & \alpha > R \end{cases}.$$

Το δυναμικό στο κέντρο είναι, από τον ορισμό:

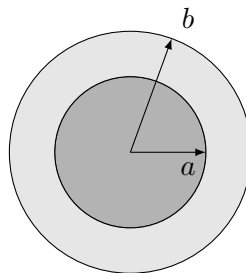
$$V(r=0) - V_\infty = \int_{C_{r \rightarrow \infty}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Επιλέγουμε η καμπύλη  $C$  να είναι η ευθεία που πηγαίνει ακτινικά από το κέντρο προς το  $\infty$ . Σε αυτή  $d\vec{s} = d\alpha \hat{r}$ .

Καθώς το ηλεκτρικό πεδίο αλλάζει τιμή στο σύνορο της σφαίρας, έχουμε

$$\begin{aligned} V(0) - V_\infty &= \int_{C_{O \rightarrow R}} \vec{E} \cdot d\vec{s} + \int_{C_{R \rightarrow \infty}} \vec{E} \cdot d\vec{s} \\ &= \int_0^R \frac{1}{3\kappa\epsilon_0} \rho_f \alpha d\alpha + \int_R^\infty \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_f \frac{R^3}{\alpha^2} d\alpha \\ &= \frac{1}{3\epsilon_0} \rho_f R^2 \left( \frac{1}{2\kappa} + 1 \right). \end{aligned}$$

5. Σφαιρικός αγωγός ακτίνας  $a$ , φέρει φορτίο  $Q$ . Ο αγωγός αυτός περιβάλλεται μέχρι την ακτίνα  $b$  από ένα σφαιρικό στρώμα γραμμικού διηλεκτρικού υλικού επιδεκτικότητας  $\chi_e$ . Βρείτε την ενέργεια αυτού του συστήματος.



Σχήμα 8.2: Άσκηση 5

#### ΛΥΣΗ

Το ηλεκτρικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι ως γνωστόν  $\vec{0}$  (άρα τόσο είναι και η ηλεκτρική μετατόπιση). Γνωρίζουμε ακόμα ότι όλο το ελεύθερο

φορτίο είναι συγκεντρωμένο στην επιφάνεια του αγωγού. Η ηλεκτρική μετατόπιση στο εξωτερικό του αγωγού εύκολα προκύπτει από το νόμο Gauss ότι είναι

$$\vec{D} = \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r}, \quad r \geq a.$$

Το ηλεκτρικό πεδίο στο διάστημα  $a \leq r \leq b$  είναι

$$\vec{E} = \frac{1}{(1 + \chi_e)\epsilon_0} \vec{D},$$

ενώ για  $r > b$

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \vec{D}.$$

Η ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο σύστημα είναι

$$U = \frac{1}{2} \int \vec{D} \cdot \vec{E} \, d\tau$$

με την ολοκλήρωση να γίνεται σε όλο το χώρο. Έτσι, σε σφαιρικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_0^\infty \vec{D} \cdot \vec{E} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \vec{D} \cdot \vec{E} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^\infty \vec{D} \cdot \vec{E} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{1}{(1 + \chi_e)\epsilon_0} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_b^\infty \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \right)^2 r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= 2\pi \int_a^b \frac{1}{(1 + \chi_e)\epsilon_0} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \right)^2 r^2 \, dr + 2\pi \int_b^\infty \frac{1}{\epsilon_0} \left( \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \right)^2 r^2 \, dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \left[ \frac{1}{(1 + \chi_e)} \left( \frac{1}{a} - \frac{1}{b} \right) + \frac{1}{b} \right]. \end{aligned}$$

6. Ένας κύβος με πλευρά  $a$  από διηλεκτρικό υλικό έχει μόνιμη πόλωση  $\vec{P} = k\vec{r}$  όπου  $k$  σταθερά. Το  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα από το κέντρο του κύβου. Βρείτε όλα τα δέσμια φορτία και ελέγξτε ότι έχουν άθροισμα 0.

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι στον κύβο εμφανίζεται δέσμιο φορτίο με χωρική πυκνότητα  $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$  και με επιφανειακή πυκνότητα  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο διάνυσμα σε κάθε έδρα.

Η χωρική πυκνότητα είναι

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}\right) = -k(1 + 1 + 1) = -3k,$$

αφού  $\vec{P} = k(x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k})$ .

Στην έδρα που είναι παράλληλη στο επίπεδο  $y-z$ , με  $x = a/2$  και με κάθετο διάνυσμα προς τα έξω το  $\hat{i}$ , η επιφανειακή πυκνότητα είναι  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{i} = P_x = kx = ka/2$ . Στην απέναντί της, στο  $x = -a/2$ , με κάθετο διάνυσμα προς τα έξω το  $-\hat{i}$ , η πυκνότητα είναι  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{i} = -P_x = -kx = ka/2$ . Εύκολα δείχνεται ότι σε κάθε έδρα  $\sigma_b = ka/2$ .

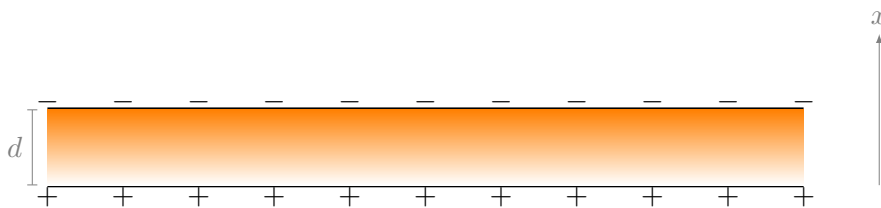
Κάθε έδρα έχει εμβαδόν  $a^2$ . Το φορτίο κάθε έδρας είναι  $\sigma_b a^2$ . Το συνολικό φορτίο στην επιφάνεια είναι  $6(ka/2)a^2 = 3ka^3$ .

Το συνολικό φορτίο στο εσωτερικό του κύβου (που έχει όγκο  $a^3$ ) είναι  $\rho_b a^3 = -3ka^3$ .

Σε όλο τον κύβο το συνολικό φορτίο είναι 0.

7. Ο χώρος ανάμεσα στους επίπεδους οπλισμούς ενός πυκνωτή είναι γεμάτος με διηλεκτρικό του οποίου η ηλεκτρική επιδεκτικότητα  $\chi_e = (\epsilon/\epsilon_0) - 1$  είναι ανάλογη της απόστασης  $x$  από τον κάτω οπλισμό:  $\chi_e = x/d$ , όπου  $d$  η απόσταση των οπλισμών. Οι οπλισμοί του πυκνωτή έχουν διαφορά δυναμικού  $\Delta V$  και πολύ μεγάλη επιφάνεια  $A$ .

- (α') Στο χώρο μεταξύ των οπλισμών βρείτε το πεδίο της ηλεκτρικής μετατόπισης  $\vec{D}$ , το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  και την πόλωση  $\vec{P}$  του διηλεκτρικού.
- (β') Υπολογίστε τις πυκνότητες των δέσμιων φορτίων στην επιφάνεια και στο εσωτερικό του διηλεκτρικού.
- (γ') Υπολογίστε το συνολικό δέσμιο φορτίο στο διηλεκτρικό. Πρέπει να είναι 0.



Σχήμα 8.3: Άσκηση 7

### ΛΥΣΗ

Η ομοιόμορφη κατανομή των (ελεύθερων) φορτίων στους οπλισμούς είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή γύρω από άξονα κάθετο στους οπλισμούς. Η

συμμετρία αυτή επιβάλλει στο πεδίο  $\vec{D}$  να έχει μόνο συνιστώσα στον κάθετο άξονα, τον άξονα  $x$ . Η διεύθυνση του πεδίου είναι από τον θετικά φορτισμένο οπλισμό προς τον αρνητικά φορτισμένο. Γνωρίζουμε από το νόμο Gauss γραμμένο για το πεδίο  $\vec{D}$  ότι για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια  $S$  ισχύει

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{f,\text{in}}.$$

Ας πάρουμε ως επιφάνεια Gauss ένα κύλινδρο με άξονα κάθετο στους οπλισμούς, που να περικλείει ένα τμήμα ενός οπλισμού. Εύκολα προκύπτει ότι το πεδίο  $\vec{D}$  από άπειρο φορτισμένο φύλλο έχει τιμή  $\pm i\sigma_f/2$ , όπου  $\sigma_f$  η επιφανειακή πυκνότητα (ελεύθερου) φορτίου του φύλλου. Το πρόσημο είναι  $+$  ή  $-$  αν το σημείο υπολογισμού είναι πάνω ή κάτω, αντίστοιχα, από το φύλλο. Το πεδίο που παράγεται από τους δύο οπλισμούς με αντίθετη επιφανειακή πυκνότητα προκύπτει μη μηδενικό μόνο στο εσωτερικό. Εκεί έχει τιμή  $\vec{D} = i\sigma_f$ , όπου  $\sigma_f$  η επιφανειακή πυκνότητα του θετικά φορτισμένου φύλλου.

Για το ηλεκτρικό πεδίο στο διηλεκτρικό έχουμε

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = i \frac{\sigma_f}{(1 + \chi_e)\epsilon_0} = i \frac{d\sigma_f}{(d + x)\epsilon_0}.$$

Για να απαλείψουμε το άγνωστο  $\sigma_f$  ας υπολογίσουμε τη διαφορά δυναμικού. Είναι

$$\Delta V = V_+ - V_- = \int_{C_{+ \rightarrow -}} \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

Αν επιλέξουμε ως καμπύλη  $C$  το κάθετο ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τους δύο οπλισμούς έχουμε  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ . Τότε

$$\Delta V = \int_{C_{+ \rightarrow -}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_0^d \frac{d\sigma_f}{(d + x)\epsilon_0} dx = \frac{d\sigma_f}{\epsilon_0} \ln(x + d)|_0^d = \frac{d\sigma_f}{\epsilon_0} (\ln(2d) - \ln(d)) = \frac{d\sigma_f}{\epsilon_0} \ln 2.$$

Επομένως,

$$\vec{D} = i \frac{\epsilon_0 \Delta V}{d \ln 2}, \quad \vec{E} = i \frac{\Delta V}{(x + d) \ln 2}, \quad \vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = i \frac{x \epsilon_0 \Delta V}{d(x + d) \ln 2}.$$

Η χωρική πυκνότητα δέσμιου φορτίου είναι

$$\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P} = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{x \epsilon_0 \Delta V}{d(x + d) \ln 2} = -\frac{\epsilon_0 \Delta V}{(x + d)^2 \ln 2}.$$

Η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην επάνω επιφάνεια του διηλεκτρικού (με  $x = d$ ,  $\hat{n} = \hat{x}$ ) είναι

$$\sigma_b^- = \vec{P} \cdot \hat{n} = \left. \frac{x \epsilon_0 \Delta V}{d(x + d) \ln 2} \right|_{x=d} = \frac{\epsilon_0 \Delta V}{2d \ln 2}.$$

Η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην κάτω επιφάνεια του διηλεκτρικού (με  $x = 0$ ,  $\hat{n} = -\hat{x}$ ) είναι

$$\sigma_b^+ = \vec{P} \cdot \hat{n} = - \left. \frac{x\epsilon_0 \Delta V}{d(x+d) \ln 2} \right|_{x=0} = 0.$$

Το συνολικό δέσμιο φορτίο στον όγκο  $\mathcal{V}$  του διηλεκτρικού είναι

$$Q_{\text{in}} = \int_{\mathcal{V}} \rho_b d\tau = - \int_0^d \frac{\epsilon_0 \Delta V}{(x+d)^2 \ln 2} A dx = - \frac{A\epsilon_0 \Delta V}{2d \ln 2}.$$

Το δέσμιο φορτίο στην κάτω επιφάνεια είναι 0 ενώ στην επάνω είναι

$$Q_s = \sigma_b^- A = \frac{A\epsilon_0 \Delta V}{2d \ln 2}.$$

Το συνολικό φορτίο είναι  $Q_{\text{in}} + Q_s + 0 = 0$ .

8. Δύο ομόκεντροι σφαιρικοί αγωγοί με ακτίνες  $a$ ,  $b$  έχουν στο χώρο ανάμεσά τους διηλεκτρικό του οποίου η ηλεκτρική επιδεκτικότητα  $\chi_e = (\epsilon/\epsilon_0) - 1$  μεταβάλλεται γραμμικά με την απόσταση  $r$  από το κέντρο:  $\chi_e = (r-a)/(b-a)$ . Οι αγωγοί έχουν φορτία  $+Q$  ο εσωτερικός και  $-Q$  ο εξωτερικός.

- (α') Στο χώρο μεταξύ των αγωγών βρείτε το πεδίο της ηλεκτρικής μετατόπισης  $\vec{D}$ , εφαρμόζοντας το νόμο Gauss. Κατόπιν, βρείτε το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  στο χώρο μεταξύ των αγωγών και την πόλωση  $\vec{P}$  του διηλεκτρικού.
- (β') Υπολογίστε τις πυκνότητες των δέσμιων φορτίων στην επιφάνεια και στο εσωτερικό του διηλεκτρικού.
- (γ') Υπολογίστε το συνολικό δέσμιο φορτίο στο διηλεκτρικό. Πρέπει να είναι 0.

Δίνεται ότι:

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}.$$

### ΛΥΣΗ

Η ομοιόμορφη κατανομή των (ελεύθερων) φορτίων στους αγωγούς είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή γύρω από άξονα της σφαίρας. Η συμμετρία αυτή επιβάλλει στο πεδίο  $\vec{D}$  να έχει μόνο συνιστώσα στο  $\hat{r}$  των σφαιρικών συντεταγμένων. Η διεύθυνση του πεδίου είναι από τον θετικά φορτισμένο αγωγό προς τον αρνητικά φορτισμένο. Επιπλέον, λόγω της περιστροφικής συμμετρίας πρέπει να εξαρτάται μόνο από το  $r$  και όχι τις άλλες σφαιρικές συντεταγμένες. Επομένως,  $\vec{D} = D(r)\hat{r}$ .

Γνωρίζουμε από το νόμο Gauss γραμμένο για το πεδίο  $\vec{D}$  ότι για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια  $S$  ισχύει

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{f,\text{in}} .$$

Ας πάρουμε ως επιφάνεια Gauss μια σφαίρα με ακτίνα  $r$  μεταξύ  $a$ ,  $b$ , ομόκεντρον των αγωγών. Το διάνυσμα κάθε στοιχειώδους επιφάνειας σε αυτή είναι  $d\vec{A} = r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta \, \hat{r}$ . Επομένως

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{f,\text{in}} \Rightarrow \int_0^{2\pi} \int_0^\pi D(r) r^2 \sin \theta \, d\phi \, d\theta = Q \Rightarrow 4\pi r^2 D(r) = Q \Rightarrow D(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} .$$

Στο εξωτερικό, δηλαδή σε περιοχές με  $r > b$  ή  $r < a$  το συνολικό φορτίο που περικλείεται από την επιφάνεια Gauss είναι 0 άρα και  $D(r) = 0$ .

Για το ηλεκτρικό πεδίο στο διηλεκτρικό έχουμε

$$\vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \vec{D} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} .$$

Στο εξωτερικό, το πεδίο είναι  $\vec{0}$ .

Το διάνυσμα της πόλωσης είναι

$$\vec{P} = \chi_e \epsilon_0 \vec{E} = \chi_e \epsilon_0 \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{\chi_e}{1 + \chi_e} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r} = \frac{r - a}{r + b - 2a} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \hat{r} .$$

Η χωρική πυκνότητα δέσμιου φορτίου είναι

$$\begin{aligned} \rho_b &= -\nabla \cdot \vec{P} = -\left( \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 P_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta P_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi} \right) \\ &= -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{r - a}{r + b - 2a} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \right) = -\frac{Q}{4\pi} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{r - a}{r + b - 2a} \right) \\ &= -\frac{b - a}{(r + b - 2a)^2} \frac{Q}{4\pi r^2} . \end{aligned}$$

Η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην «εξωτερική» επιφάνεια του διηλεκτρικού (με  $r = b$ ,  $\hat{n} = \hat{r}$ ) είναι

$$\sigma_b^- = \vec{P} \cdot \hat{n} = \frac{r - a}{r + b - 2a} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \Big|_{r=b} = \frac{Q}{8\pi b^2} .$$

Η επιφανειακή πυκνότητα δέσμιου φορτίου στην «εσωτερική» επιφάνεια του διηλεκτρικού (με  $r = a$ ,  $\hat{n} = -\hat{r}$ ) είναι

$$\sigma_b^+ = \vec{P} \cdot \hat{n} = -\frac{r - a}{r + b - 2a} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{r^2} \Big|_{r=a} = 0 .$$



Το συνολικό δέσμιο φορτίο στον όγκο  $\mathcal{V}$  του διηλεκτρικού είναι

$$\begin{aligned} Q_{\text{in}} &= \int_{\mathcal{V}} \rho_b \, d\tau = - \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \int_a^b \frac{b-a}{(r+b-2a)^2} \frac{Q}{4\pi r^2} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\phi \\ &= -Q(b-a) \int_a^b \frac{1}{(r+b-2a)^2} \, dr = Q(b-a) \left. \frac{1}{r+b-2a} \right|_a^b = -\frac{Q}{2} . \end{aligned}$$

Το δέσμιο φορτίο στην εσωτερική επιφάνεια είναι 0 ενώ στην εξωτερική (που έχει εμβαδόν  $A = 4\pi b^2$ ) είναι

$$Q_s = \sigma_b^- A = \frac{Q}{2} .$$

Το συνολικό φορτίο είναι  $Q_{\text{in}} + Q_s + 0 = 0$ .



## Μέρος III

# Μαγνητισμός



## Κεφάλαιο 9

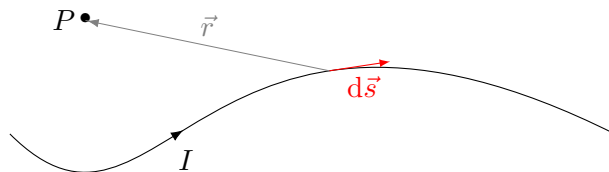
# Μαγνητικό πεδίο

### 9.1 Νόμος Biot–Savart

Σταθερό ρεύμα  $I$  που διαρρέει στοιχειώδες τμήμα αγωγού με διάνυσμα  $d\vec{s}$  με φορά τη φορά του ρεύματος, παράγει στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο  $d\vec{B}$  σε σημείο στη θέση  $\vec{r}$  ως προς το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού. Το  $d\vec{B}$  δίνεται από το νόμο Biot–Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} .$$

$\mu_0$  είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού (ή μαγνητική σταθερά). Έχει τιμή στο νέο SI περίπου ίση με  $4\pi 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ .



Το συνολικό μαγνητικό πεδίο στο σημείο  $P$  από το ρεύμα της καμπύλης  $C$  είναι

$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} .$$

Αν έχουμε ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}$  σε επιφάνεια  $S$  ή χωρική πυκνότητα  $\vec{J}$  σε όγκο  $V$ , η ποσότητα  $I d\vec{s}$  αντικαθίσταται με  $\vec{K} dA$  ή  $\vec{J} d\tau$  και ο νόμος

Biot–Savart γίνεται

$$\vec{B} = \int_S \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{K} \times \hat{r}}{r^2} dA$$

και

$$\vec{B} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} d\tau$$

αντίστοιχα.

## 9.2 Δύναμη Lorentz

Σε ένα ηλεκτρικό φορτίο  $q$ , που κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$  μέσα σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  και σε μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$ , ασκείται ηλεκτρική δύναμη,

$$\vec{F}_E = q\vec{E} ,$$

και μαγνητική δύναμη,

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} .$$

Η συνολική δύναμη είναι

$$\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B} .$$

Η μαγνητική δύναμη  $q\vec{v} \times \vec{B}$  δεν παράγει έργο: είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα άρα και στο στοιχειώδες μήκος κατά το οποίο μετακινείται το φορτίο:

$$dW = \vec{F}_B \cdot d\vec{s} = (q\vec{v} \times \vec{B}) \cdot \vec{v} dt = 0 .$$

Επιπλέον, δρα ως κεντρομόλος και αναγκάζει το κινούμενο φορτίο να κινηθεί κυκλικά, κάθετα στο μαγνητικό πεδίο:

$$\left| q\vec{v} \times \vec{B} \right| = \frac{mv^2}{R} .$$

## 9.3 Μαγνητική δύναμη σε ρεύμα

Η δύναμη από μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  σε φορτίο  $q$  κινούμενο με ταχύτητα  $\vec{v}$  είναι  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ .

Σε στοιχειώδες φορτίο  $dq$  που διανύει διάστημα  $d\vec{s}$  σε χρόνο  $dt$ , έχει δηλαδή ταχύτητα  $\vec{v} = d\vec{s}/dt$  (πολύ μικρότερη από  $c$ ), ασκείται στοιχειώδης μαγνητική δύναμη

$$d\vec{F}_B = dq \vec{v} \times \vec{B} = \frac{dq}{dt} d\vec{s} \times \vec{B} = I d\vec{s} \times \vec{B} .$$

Άρα, η στοιχειώδης δύναμη από μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  σε ρεύμα  $I$  που διαρρέει αγωγό στοιχειώδους μήκους  $d\vec{s}$  είναι

$$d\vec{F}_B = I d\vec{s} \times \vec{B}.$$

Ένας αγωγός  $C$ , με εκτεταμένο μήκος, που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  και βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  δέχεται δύναμη

$$\vec{F} = \int_C d\vec{F}_B = \int_C I d\vec{s} \times \vec{B}.$$

Στην περίπτωση που έχουμε ρεύμα να κινείται επιφανειακά σε επιφάνεια  $S$  με επιφανειακή πυκνότητα ρεύματος  $\vec{K}$ , η ποσότητα  $I d\vec{s}$  στους προηγούμενους τύπους αντικαθίσταται από  $\vec{K} dA$  και το ολοκλήρωμα για τη συνολική δύναμη είναι επιφανειακό:

$$\vec{F} = \int_S d\vec{F}_B = \int_S (\vec{K} dA) \times \vec{B}.$$

Στην περίπτωση που έχουμε ρεύμα να κινείται σε κάποιον όγκο  $V$  με χωρική πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}$ , η ποσότητα  $I d\vec{s}$  στους προηγούμενους τύπους αντικαθίσταται από  $\vec{J} d\tau$  και το ολοκλήρωμα για τη συνολική δύναμη είναι ολοκλήρωμα όγκου:

$$\vec{F} = \int_V d\vec{F}_B = \int_V (\vec{J} d\tau) \times \vec{B}.$$

### 9.3.1 Εφαρμογή

Σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μήκους  $L$ , σε ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$ , ασκείται δύναμη

$$\vec{F} = \int_C d\vec{F}_B = \int_0^L I ds \hat{L} \times \vec{B} = I \vec{L} \times \vec{B}.$$

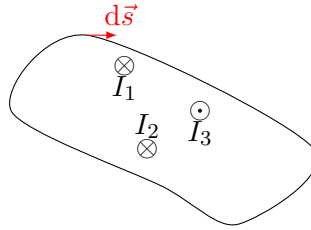
Το  $\vec{L} = L\hat{L}$  είναι το διάνυσμα με διεύθυνση παράλληλα στον αγωγό, φορά τη φορά του ρεύματος και μέτρο  $L$ .

## 9.4 Νόμος Ampère

Σε πρόβλημα υψηλής συμμετρίας, χρήσιμος είναι ο νόμος Ampère για τον υπολογισμό του μαγνητικού πεδίου: Έστω  $C$  μια κλειστή καμπύλη. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $\vec{B}$  σε αυτή, η κυκλοφορία δηλαδή του  $\vec{B}$ , είναι ανάλογο του συνολικού ρεύματος  $I$  που περνά από επιφάνεια με σύνορο αυτή την καμπύλη:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I.$$

Η σταθερά αναλογίας είναι η μαγνητική διαπερατότητα του κενού,  $\mu_0$ .



Η φορά διαγραφής της καμπύλης  $\mathcal{C}$ , δηλαδή η φορά του  $d\vec{s}$ , προσδιορίζεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού: αν ο αντίχειρας δείχνει τη φορά του ρεύματος που περικλείεται στο βρόχο, τα δάχτυλα του δεξιού χεριού κάμπτονται στη φορά διαγραφής της  $\mathcal{C}$ .

Αν μπορούμε να βρούμε μια κλειστή καμπύλη που να περνά από σημεία στα οποία το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο ή παράλληλο ή, γενικότερα, να έχει συγκεκριμένη γωνία με την καμπύλη, τότε το εσωτερικό γινόμενο γίνεται γινόμενο μέτρων. Επιπλέον, αν το πεδίο έχει σταθερό μέτρο πάνω στην καμπύλη, μπορεί να βγει από το ολοκλήρωμα, οπότε μπορεί να υπολογιστεί.

#### 9.4.1 Συμμετρία

Αν η κατανομή του ρεύματος είναι αναλλοίωτη σε

- περιστροφή γύρω από κάποιο άξονα,
- μετατόπιση,

τότε και το μαγνητικό πεδίο είναι αναλλοίωτο σε αυτούς τους μετασχηματισμούς.

#### Κανόνας κατοπτρισμού ως προς επίπεδο

Αν η κατανομή ρεύματος είναι αναλλοίωτη σε κατοπτρισμό ως προς ένα επίπεδο, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε κάθε σημείο του επιπέδου.

*Αιτιολόγηση:* Το μαγνητικό πεδίο είναι εξωτερικό γινόμενο δύο «κανονικών» (ή, αλλιώς, πολικών) διανυσμάτων ( $\vec{J}$  και  $\vec{r}$ ). Ως τέτοιο, είναι «ψευδοδιάνυσμα» (ή αξονικό διάνυσμα). Έτσι, αν  $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ ,  $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$  είναι δύο πολικά διανύσματα, το  $\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b}$  είναι ψευδοδιάνυσμα. Έστω ότι κάνουμε κατοπτρισμό ως προς το επίπεδο  $x - y$ . Σε αυτό το μετασχηματισμό, το  $\vec{a}$  γίνεται  $\vec{a}' = (a_x, a_y, -a_z)$ , το  $\vec{b}$  γίνεται  $\vec{b}' = (b_x, b_y, -b_z)$ , και το εξωτερικό γινόμενο εύκολα δείχνεται ότι γίνεται  $\vec{c}' = (-c_x, -c_y, c_z) = -(\vec{c})$ .

Ως πρώτη παρατήρηση βλέπουμε ότι ένα αξονικό διάνυσμα, όταν κατοπτριστεί, αποκτά αντίθετη φορά από αυτό που θα περιμέναμε σε ένα πολικό διάνυσμα. Δεύτερη παρατήρηση που μπορούμε να κάνουμε είναι ότι αν το φυσικό σύστημα είναι αναλλοίωτο στον κατοπτρισμό, το αξονικό διάνυσμα, το διάνυσμα  $\vec{c}$ , πάνω



στα σημεία του επιπέδου κατοπτρισμού, πρέπει να ταυτίζεται με το κατοπτρικό του,  $\vec{c}'$ . Αφού λοιπόν  $\vec{c} = \vec{c}'$ , ισχύει  $c_x = c_y = 0$ . Άρα το εξωτερικό γινόμενο έχει μόνο συνιστώσα κάθετη στο επίπεδο κατοπτρισμού.

### 9.4.2 Διαφορική μορφή του νόμου Ampère

Ξεκινώντας από την ολοκληρωτική μορφή του νόμου Ampère μπορεί να αποδειχθεί η διαφορική του μορφή: Έστω μια επιφάνεια  $S$  που έχει ως σύνορο την κλειστή καμπύλη  $C$ . Η κυκλοφορία του  $\vec{B}$  στη  $C$ , με εφαρμογή του θεωρήματος Stokes (4.5) γίνεται

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}.$$

Αν το ρεύμα που διέρχεται από την επιφάνεια  $S$  έχει χωρική πυκνότητα  $\vec{J}$  τότε

$$I = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Η ολοκληρωτική μορφή του νόμου Ampère γίνεται

$$\int_S (\nabla \times \vec{B}) \cdot d\vec{A} = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Καθώς η επιφάνεια  $S$  μπορεί να είναι οποιαδήποτε, πρέπει να ισχύει

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J}.$$

Αυτή είναι η διαφορική μορφή του νόμου Ampère.

## 9.5 Μαγνητικό δυναμικό

Γνωρίζουμε τη μαθηματική ταυτότητα  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{v}) = 0$  για οποιαδήποτε διανυσματική συνάρτηση  $\vec{v}$ . Η σχέση  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  μας επιτρέπει να ορίσουμε μια διανυσματική συνάρτηση  $\vec{A}$  για την οποία ισχύει

$$\vec{B} = \nabla \times \vec{A}.$$

Το  $\vec{A}$  είναι το διανυσματικό μαγνητικό δυναμικό. Παρατηρήστε ότι ο ορισμός του  $\vec{A}$  δεν είναι μονοσήμαντος· ξέρουμε ότι  $\nabla \times (\nabla f) = 0$ , για οποιαδήποτε βαθμωτή συνάρτηση  $f$ . Μπορούμε επομένως να προσθέσουμε στο  $\vec{A}$  την κλίση οποιασδήποτε βαθμωτής συνάρτησης. Κατάλληλη επιλογή της συνάρτησης αυτής μπορεί να μας δώσει μαγνητικό δυναμικό που ικανοποιεί τη σχέση  $\nabla \cdot \vec{A} = 0$ .

Με τη χρήση του, ο νόμος Ampère στη διαφορική του μορφή γίνεται

$$\nabla \times \vec{B} = \nabla \times (\nabla \times \vec{A}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} = -\nabla^2 \vec{A} = \mu_0 \vec{J}.$$

Η λύση της εξίσωσης  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ , αν υποθέσουμε ότι το ρεύμα είναι μηδέν στο άπειρο, είναι

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} d\tau'.$$

Αν έχουμε ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}$  σε πεπερασμένη επιφάνεια  $S$  ή ρεύμα  $I$  σε όχι άπειρη καμπύλη  $C$ , η σχέση γίνεται

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{K}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dA',$$

ή

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_C \frac{I}{|\vec{r} - \vec{r}'|} ds'.$$

## 9.6 Ροή μαγνητικού πεδίου

Η ροή ενός μαγνητικού πεδίου  $\vec{B}$  από μια επιφάνεια  $S$  είναι

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Το  $d\vec{A}$  είναι το διάνυσμα επιφάνειας σε κάθε στοιχειώδες τμήμα της  $S$ . Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στο στοιχειώδες τμήμα, με φορά προς τα «έξω». Έχει μέτρο το εμβαδόν της στοιχειώδους επιφάνειας.

Η μαγνητική ροή στο SI μετρείται σε Wb (weber) ή, ισοδύναμα, σε  $T \cdot m^2$ .

## 9.7 Νόμος Gauss για το μαγνητισμό

Από οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια η ροή του μαγνητικού πεδίου είναι 0. Αν θέλουμε να το σκεφτόμαστε με το μοντέλο των μαγνητικών πόλων, το «αλγεβρικό άθροισμα» μαγνητικών πόλων που περιλαμβάνει οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι πάντα 0. Δεν υπάρχουν ελεύθεροι μαγνητικοί πόλοι αλλά εμφανίζονται πάντα σε ζεύγη (βόρειος–νότιος).

Η διαφορική μορφή του νόμου είναι  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$ .

## 9.8 Ηλεκτρεγερτική δύναμη (ΗΕΔ)

Η ΗΕΔ  $\mathcal{E}$  κατά μήκος μιας καμπύλης  $C$  που βρίσκεται σε ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  είναι

$$\mathcal{E} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}.$$

## 9.9 Νόμος Faraday

Μεταβολή της ροής,  $\Phi_B$ , του μαγνητικού πεδίου από μια επιφάνεια παράγει ηλεκτρεγερτική δύναμη,  $\mathcal{E}$ , ίση με

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt},$$

στο σύνορο της επιφάνειας, σύμφωνα με το νόμο Faraday.

Αν λάβουμε υπόψη τον τύπο

$$\mathcal{E} = \int_C \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

για την ΗΕΔ, συμπεραίνουμε από το νόμο Faraday ότι η χρονική μεταβολή μαγνητικής ροής από μια επιφάνεια έχει ως αποτέλεσμα την εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου στο σύνορό της.

### 9.9.1 Νόμος Lenz

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη που προβλέπει ο νόμος Faraday τείνει να αντισταθεί στο αίτιο που την προκαλεί, δηλαδή τείνει να αντισταθμίσει την αλλαγή της μαγνητικής ροής: αν αυτή μειώνεται, τείνει να την αυξήσει, αν αυξάνεται, τείνει να την μειώσει.

Στο νόμο Lenz οφείλεται το πρόσημο – στον τύπο του νόμου Faraday.

### 9.9.2 Διαφορική μορφή νόμου Faraday

Εστω ότι σε κάποιο χώρο υπάρχει χρονικά μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο. Η ροή του από μια σταθερή επιφάνεια  $S$  είναι

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Η παράγωγός της ως προς το χρόνο είναι (με αντίθετο πρόσημο) η κυκλοφορία κάποιου ηλεκτρικού πεδίου στο σύνορο  $C$  της επιφάνειας:

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}.$$

Η εφαρμογή του θεωρήματος Stokes δίνει

$$\int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{A} = -\int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{A}.$$

Καθώς η  $S$  είναι μια οποιαδήποτε επιφάνεια, πρέπει

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Αυτή είναι η διαφορική μορφή του νόμου Faraday.

## 9.10 Επαγωγή

### 9.10.1 Αυτεπαγωγή

Σε ένα βρόχο που κυκλοφορεί ρεύμα  $I$  το οποίο μεταβάλλεται για οποιονδήποτε λόγο, παράγεται μαγνητικό πεδίο ανάλογο του  $I$ , σύμφωνα με το νόμο Biot-Savart. Η ροή του πεδίου από το βρόχο είναι και αυτή ανάλογη του  $I$  άρα μεταβάλλεται και αυτή με το χρόνο. Επομένως εμφανίζεται σύμφωνα με το νόμο Faraday ηλεκτρεγερτική δύναμη στο κύκλωμα η οποία τείνει να αντισταθεί στο αίτιο (τη μεταβολή του  $I$ ) που την προκαλεί (νόμος Lenz). Άρα, αν π.χ. το ρεύμα  $I$  αυξάνει με το χρόνο, η παραγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη τείνει να το μειώσει παράγοντας ρεύμα με αντίθετη φορά. Αν το  $I$  μειώνεται, τείνει να το ενισχύσει με ρεύμα ίδιας φοράς.

Αναφέρουμε ότι η μαγνητική ροή  $\Phi_B$  σε ένα κλειστό κύκλωμα είναι ανάλογη του μαγνητικού πεδίου το οποίο με τη σειρά του είναι ανάλογο του ρεύματος  $I$  στο κύκλωμα. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής ενός κυκλώματος ορίζεται ως

$$L = \frac{\Phi_B}{I} = \frac{d\Phi_B}{dI}$$

και είναι ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ  $\mathcal{E}$  και  $\frac{dI}{dt}$ :

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt}.$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος. Στο SI μετριέται σε H (henry).

### 9.10.2 Αμοιβαία επαγωγή

Έστω δύο βρόχοι σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους. Αν στον ένα από αυτούς κυκλοφορεί ρεύμα  $I_1$ , παράγεται μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}_1$  στο γύρω χώρο, που είναι ανάλογο του  $I_1$ , όπως προβλέπει ο νόμος Biot-Savart. Κάποιες από τις γραμμές του μαγνητικού πεδίου περνούν από το δεύτερο βρόχο. Η ροή του  $\vec{B}_1$  από αυτόν,

$$\Phi_{B,12} = \int_S \vec{B}_1 \cdot d\vec{A}_2$$

είναι και αυτή ανάλογη του  $I_1$ ,

$$\Phi_{B,12} = M_{12} I_1.$$

Ο συντελεστής  $M_{12}$  ορίζεται ως ο *συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής* του συστήματος των δύο βρόχων.

Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$M_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{C_1} \oint_{C_2} \frac{d\vec{s}_1 \cdot d\vec{s}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|}.$$

Παρατηρούμε ότι ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής εξαρτάται από τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά των δύο βρόχων (καμπύλες  $C_1, C_2$ ) και τη σχετική τους θέση. Στο SI μετρείται σε henry (H). Επίσης, η τιμή παραμένει ίδια αν εναλλάξουμε τις καμπύλες στο ολοκλήρωμα. Επομένως,  $M_{12} = M_{21}$ , δηλαδή ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής είναι κοινός για τους δύο βρόχους,  $M$ .

Αν η ροή του  $\vec{B}_1$  από το δεύτερο βρόχο,  $\Phi_{B,12}$ , αλλάζει με το χρόνο (γιατί το  $I_1$  μεταβάλλεται με το χρόνο ή κινείται ο ένας βρόχος ως προς το άλλο ή αλλάζει το σχήμα ενός βρόχου), τότε επάγεται σε αυτό το βρόχο μια ΗΕΔ  $\mathcal{E}_2$ , σύμφωνα με το νόμο Faraday. Καθώς

$$M = \frac{d\Phi_{B,12}}{dI_1},$$

ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής είναι επιπλέον ο συντελεστής αναλογίας μεταξύ της ΗΕΔ στο δεύτερο βρόχο,  $\mathcal{E}_2$ , και του  $dI_1/dt$ :

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\Phi_{B,12}}{dt} = -\frac{d\Phi_{B,12}}{dI_1} \frac{dI_1}{dt} = -M \frac{dI_1}{dt}.$$

## 9.11 Ενέργεια μαγνητικού πεδίου

Ένας βρόχος που διαρρέεται από χρονικά μεταβαλλόμενο ρεύμα εμφανίζει, όπως ξέρουμε, ΗΕΔ  $\mathcal{E}$  από αυτεπαγωγή. Αυτή η ΗΕΔ τείνει να αντισταθμίσει τη μεταβολή του ρεύματος. Το ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  που εμφανίζεται λόγω αυτεπαγωγής, ασκεί δύναμη  $dq\vec{E}$  σε ένα φορτίο  $dq$  που κυκλοφορεί στο κύκλωμα. Το έργο αυτής της δύναμης σε μία πλήρη διαγραφή του βρόχου  $C$  (δηλαδή η κυκλοφορία της δύναμης) είναι

$$dW_{\text{emf}} = \oint_C (dq\vec{E}) \cdot d\vec{s} = dq\mathcal{E}.$$

Αυτή η ποσότητα, με αντίθετο πρόσημο, είναι η ενέργεια  $U$  που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο του βρόχου. Αν θέσουμε  $dq = I dt$  και  $\mathcal{E} = -L(dI/dt)$  έχουμε

$$dU = -(I dt)\mathcal{E} = LI dI \Rightarrow U = \int LI dI = \frac{1}{2}LI^2.$$

Στην παραπάνω σχέση θεωρήσαμε ότι για  $I = 0$  η ενέργεια του μαγνητικού πεδίου είναι 0.

Μπορεί ναδειχθεί ότι η χωρική πυκνότητα ενέργειας που αποθηκεύεται στο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  είναι

$$u = \frac{dU}{d\tau} = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

## 9.12 Εξισώσεις Maxwell

Έως τώρα έχουμε συναντήσει κάποιες διαφορικές εξισώσεις που αφορούν το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο:

**νόμος Gauss στον ηλεκτρισμό**

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho ,$$

**νόμος Gauss στο μαγνητισμό**

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 ,$$

**νόμος Faraday**

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} ,$$

**νόμος Ampère (μαγνητοστατικής)**

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} .$$

Οι παραπάνω εξισώσεις δεν είναι συμβατές μεταξύ τους. Καταρχάς, παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{E}) = \nabla \times \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial (\nabla \times \vec{B})}{\partial t} = 0 ,$$

όπως θα έπρεπε για την απόκλιση της στροφής κάθε διανυσματικής συνάρτησης. Όμως

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} .$$

Γνωρίζουμε από την εξίσωση συνέχειας (§7.1) ότι

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} .$$

Επομένως, όταν μεταβάλλεται η πυκνότητα φορτίου, η απόκλιση της στροφής του  $\vec{B}$  δεν είναι 0!

Ας δούμε πώς μπορούμε να τροποποιήσουμε το νόμο Ampère ώστε να «απορροφηθεί» ο όρος  $-\mu_0(\partial\rho/\partial t)$ . Από το νόμο Gauss του ηλεκτρισμού ξέρουμε ότι  $\rho = \epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E}$ , άρα

$$\mu_0 \nabla \cdot \vec{J} = -\mu_0 \frac{\partial \rho}{\partial t} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{E})}{\partial t} = -\nabla \cdot \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) .$$

Συνεπώς, αν προσθέσουμε στο δεξί μέλος του νόμου Ampère την ποσότητα

$$\nabla \cdot \left( \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right) ,$$

θα μπορέσουμε να έχουμε  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$ :

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} . \quad (9.1)$$

Όταν το πεδίο  $\vec{E}$  δεν μεταβάλλεται με το χρόνο, καταλήγουμε στο νόμο Ampère της μαγνητοστατικής.

Παρατηρούμε ότι σε αναλογία με το νόμο Faraday, που περιγράφει την εμφάνιση ηλεκτρικού πεδίου από μεταβαλλόμενο μαγνητικό, ο (πλήρης) νόμος Ampère περιγράφει την εμφάνιση μαγνητικού πεδίου από χρονικά μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό.

Ο όρος

$$\vec{J}_d = \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ονομάζεται πυκνότητα του ρεύματος μετατόπισης.

Στην ολοκληρωτική μορφή, ο νόμος Ampère με τη διόρθωση Maxwell είναι

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S (\vec{J} + \vec{J}_d) \cdot d\vec{A} .$$

Οι τέσσερις παραπάνω σχέσεις για τα  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  εκφράζουν ότι το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο παράγονται από φορτία και ρεύματα. Μαζί με τη δύναμη σε κινούμενο φορτίο,  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ , είναι οι βασικές σχέσεις του ηλεκτρομαγνητισμού.

### 9.12.1 Οι εξισώσεις σε υλικό

Παρατηρήστε ότι οι εξισώσεις Maxwell εμπεριέχουν τη χωρική πυκνότητα του συνολικού φορτίου, ελεύθερου και δέσμιου, όπως και τη χωρική πυκνότητα ρεύματος, ελεύθερου και δέσμιου. Σε χώρο με διηλεκτρικό εμφανίζονται τα δέσμια φορτία ( $\rho_b = -\nabla \cdot \vec{P}$ ,  $\sigma_b = \vec{P} \cdot \hat{n}$ ) και σε οποιοδήποτε υλικό, τα δέσμια ρεύματα ( $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$ ,  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ ). Επιπλέον, σε ένα διηλεκτρικό με πόλωση  $\vec{P}$  που μεταβάλλεται με το χρόνο, έχουμε μεταβαλλόμενα  $\rho_b$ ,  $\sigma_b$ , σε κάθε σημείο, δηλαδή εμφανίζεται κίνηση φορτίου, ένα ρεύμα, μέσα στο υλικό. Η χωρική πυκνότητά του είναι

$$\vec{J}_P = \frac{\partial \vec{P}}{\partial t}$$

και ονομάζεται πυκνότητα ρεύματος πόλωσης. Το  $\vec{J}_P$  ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας, δηλαδή τη διατήρηση του φορτίου:

$$\nabla \cdot \vec{J}_P = \nabla \cdot \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} = \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{P})}{\partial t} = -\frac{\partial \rho_b}{\partial t} .$$

Συνολικά, η πυκνότητα φορτίου είναι  $\rho = \rho_f + \rho_b$  ενώ η πυκνότητα ρεύματος είναι  $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_P$ .

Ας ξαναγράψουμε τις εξισώσεις Maxwell ώστε να εμφανίζονται μόνο τα ελεύθερα φορτία και ρεύματα.

Ο νόμος Gauss στον ηλεκτρισμό γίνεται

$$\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho = \rho_f + \rho_b = \rho_f - \nabla \cdot \vec{P} \Rightarrow \nabla \cdot (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P}) = \rho_f .$$

Αν ορίσουμε το πεδίο της ηλεκτρικής μετατόπισης  $\vec{D}$  όπως και στη στατική περίπτωση με τη σχέση

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} ,$$

ο νόμος γίνεται

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f .$$

Ο νόμος Ampère με τη διόρθωση Maxwell γίνεται

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 (\vec{J}_f + \vec{J}_b + \vec{J}_P) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \\ \nabla \times \vec{B} &= \mu_0 \left( \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \right) + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \\ \nabla \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) &= \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial (\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P})}{\partial t} \Rightarrow \\ \nabla \times (\vec{B} - \mu_0 \vec{M}) &= \mu_0 \vec{J}_f + \mu_0 \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

η τελευταία σχέση γίνεται

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} .$$

Συνοψίζοντας, οι εξισώσεις Maxwell με τα ελεύθερα φορτία και ρεύματα είναι

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_f , \quad (9.2)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad (9.3)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad (9.4)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} . \quad (9.5)$$

Στις παραπάνω σχέσεις,

$$\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} , \quad \vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} .$$



## 9.13 Εφαρμογές

### 9.13.1 Μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς

Σε ένα σωληνοειδές με άπειρο μήκος, η κατανομή του ρεύματος είναι συμμετρική. Το σύστημα έχει συμμετρία μετατόπισης παράλληλα στον άξονά του και περιστροφής γύρω από αυτόν. Δεν πρέπει επομένως να εξαρτάται το μαγνητικό πεδίο από τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $\phi$ ,  $z$ . Έτσι  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ .

Σύμφωνα με το νόμο Biot-Savart, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο ρεύμα, άρα  $B_\phi = 0$ . Επιπλέον, αν κατοπτρίσουμε το ρεύμα ως προς οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου, η κατανομή παραμένει η ίδια. Σύμφωνα με τον κανόνα του κατοπτρισμού, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε αυτό το επίπεδο, δηλαδή είναι παράλληλο στον άξονα συμμετρίας. Αν αυτός ορίζει τον άξονα  $z$ ,  $\vec{B} = B(r)\hat{z}$ .

Ας εφαρμόσουμε το νόμο Ampère σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που βρίσκεται όλο εκτός του σωληνοειδούς. Δύο πλευρές είναι κάθετες στον άξονα  $z$  (άρα και στο  $\vec{B}$ ) και οι άλλες δύο είναι παράλληλες. Στις κάθετες πλευρές  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  ενώ στις παράλληλες, το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό. Έστω ότι οι δύο παράλληλες πλευρές έχουν μήκος  $\ell$  και οι αποστάσεις τους από τον άξονα είναι  $r_1$ ,  $r_2$ . Εύκολα δείχνεται ότι

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow (B(r_1) - B(r_2))\ell = 0 \Rightarrow B(r_1) = B(r_2) .$$

Καταλήξαμε ότι σε οποιεσδήποτε αποστάσεις  $r_1$ ,  $r_2$  μεγαλύτερες από την ακτίνα του σωληνοειδούς, το πεδίο έχει ίδια τιμή. Σε πολύ μεγάλη απόσταση από τον άξονα, αντιλαμβανόμαστε το σωληνοειδές ως ένα κύλινδρο με δύο ρεύματα αντίθετης φοράς σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους: οποιοδήποτε τμήμα σπείρας που διαρρέεται από ρεύμα έχει το αντιδιαμετρικό του τμήμα σε πολύ μικρή απόσταση με αντίθετο ρεύμα. Το μαγνητικό πεδίο πολύ μακριά είναι πολύ μικρό. Σε άπειρη απόσταση γίνεται 0. Εφόσον όμως στο εξωτερικό του σωληνοειδούς έχει ίδια τιμή, αυτή πρέπει να είναι ίδια με την τιμή σε άπειρη απόσταση, δηλαδή 0.

Ας ορίσουμε τώρα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που περικλείει κάποιες σπείρες του σωληνοειδούς. Δύο από τις πλευρές του, μήκους  $\ell$  η κάθε μία, είναι παράλληλες στον άξονα του σωληνοειδούς και οι δύο άλλες είναι κάθετες. Η κυκλοφορία του  $\vec{B}$  στη  $C$  είναι ανάλογη του ρεύματος που περνά από επιφάνεια με σύνολο αυτή την καμπύλη:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}} .$$

Στα τμήματα της καμπύλης που είναι στο εξωτερικό του σωληνοειδούς ή κάθετα στον άξονα έχουμε  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  είτε γιατί  $\vec{B} = \vec{0}$  είτε γιατί  $\vec{B}$  και  $d\vec{s}$  είναι κάθετα. Μόνο στο εσωτερικό τμήμα που είναι παράλληλο στον άξονα έχουμε  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = B ds \neq 0$ .

Άρα

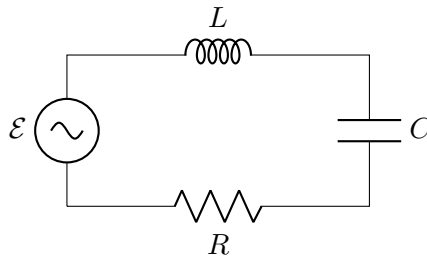
$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = B \int_0^\ell ds = B\ell .$$

Επομένως,

$$B = \frac{\mu_0 I_{\text{total}}}{\ell} = \frac{\mu_0 N I}{\ell} = \mu_0 n I ,$$

όπου  $n$  ο αριθμός σπειρών ανά μονάδα μήκους και  $I$  το ρεύμα μίας σπείρας.

### 9.13.2 Πλήρης μελέτη κυκλώματος RLC εναλλασσόμενου ρεύματος



Σχήμα 9.1: Κύκλωμα RLC εναλλασσόμενου ρεύματος

Οι διαφορές δυναμικού στον πυκνωτή είναι  $V_C = Q/C$ , στο πηνίο  $V_L = L dI/dt$ , στον αντιστάτη  $V_R = IR$ .

#### Υπολογισμός διαφορών δυναμικού στα στοιχεία

**Α' τρόπος, με πραγματικούς αριθμούς** Αν για την τάση της πηγής ισχύει  $\mathcal{E}(t) = V_{\text{max}} \cos(\omega t)$ , θα πρέπει και το ρεύμα να είναι και αυτό εναλλασσόμενο με κάποια διαφορά φάσης  $\phi$  ως προς το  $\mathcal{E}$ :  $I(t) = I_{\text{max}} \cos(\omega t - \phi)$ .

Για το φορτίο του πυκνωτή έχουμε

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) \Rightarrow dQ = I(t) dt \Rightarrow Q(t) = \int I(t) dt + \tilde{Q} = \frac{I_{\text{max}}}{\omega} \sin(\omega t - \phi) + \tilde{Q} ,$$

όπου  $\tilde{Q}$  η σταθερά ολοκλήρωσης. Το  $\tilde{Q}$  είναι το φορτίο που έχει αρχικά ο πυκνωτής. Καθώς όμως θεωρούμε ότι είναι αρχικά αφόρτιστος,  $\tilde{Q} = 0$ . Η αρχή του χρόνου είναι το  $t_0 = \phi/\omega$ .

Η τάση στα στοιχεία είναι

$$\begin{aligned} V_R &= RI = RI_{\text{max}} \cos(\omega t - \phi) , \\ V_C &= \frac{Q}{C} = \frac{I_{\text{max}}}{\omega C} \sin(\omega t - \phi) , \\ V_L &= L \frac{dI}{dt} = -LI_{\text{max}} \omega \sin(\omega t - \phi) . \end{aligned}$$

Η χωρητική αντίσταση είναι

$$X_C = \frac{V_{C,\max}}{I_{\max}} = \frac{1}{\omega C}.$$

Η επαγωγική αντίσταση είναι

$$X_L = \frac{V_{L,\max}}{I_{\max}} = \omega L.$$

Από το 2ο κανόνα Kirchhoff

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= V_R + V_C + V_L \\ &= RI_{\max} \cos(\omega t - \phi) + \frac{I_{\max}}{\omega C} \sin(\omega t - \phi) - LI_{\max} \omega \sin(\omega t - \phi) \\ &= I_{\max}(R \cos(\omega t - \phi) - (X_L - X_C) \sin(\omega t - \phi)) \\ &= I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \\ &\quad \left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \cos(\omega t - \phi) - \frac{X_L - X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \sin(\omega t - \phi) \right). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$0 \leq \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \leq 1, \quad -1 \leq \frac{X_L - X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \leq 1,$$

και

$$\left( \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \right)^2 + \left( \frac{X_L - X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} \right)^2 = 1.$$

Μπορούμε επομένως να θέσουμε

$$\cos \theta = \frac{R}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}, \quad \sin \theta = \frac{X_L - X_C}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}},$$

με  $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$  αφού  $\cos \theta \geq 0$ . Άρα

$$\mathcal{E} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} (\cos \theta \cos(\omega t - \phi) - \sin \theta \sin(\omega t - \phi)).$$

Καθώς

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$$

προκύπτει ότι

$$V_{\max} \cos(\omega t) = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \cos(\omega t - \phi + \theta).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V_{\max} &= I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}, \\ \omega t &= \omega t - \phi + \theta \Rightarrow \phi = \theta. \end{aligned}$$

Άρα το  $I_{\max}$  είναι

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}}.$$

**Β' τρόπος, με μιγαδικούς αριθμούς** Αν για την τάση της πηγής ισχύει ότι  $\mathcal{E}(t)$  είναι το πραγματικό μέρος του  $V_{\max} e^{i\omega t}$ , θα πρέπει και το ρεύμα να είναι και αυτό εναλλασσόμενο με κάποια διαφορά φάσης  $\phi$  ως προς το  $\mathcal{E}$ :  $I(t) = I_{\max} e^{i(\omega t - \phi)}$ . Για το φορτίο του πυκνωτή έχουμε

$$\frac{dQ}{dt} = I(t) \Rightarrow Q(t) = Q(0) + \int_0^t I(t) dt \Rightarrow Q(t) = \frac{I_{\max}}{i\omega} e^{i(\omega t - \phi)} .$$

Η τάση στα στοιχεία είναι

$$\begin{aligned} V_R &= RI = RI_{\max} e^{i(\omega t - \phi)} , \\ V_C &= \frac{Q}{C} = \frac{I_{\max}}{i\omega C} e^{i(\omega t - \phi)} , \\ V_L &= L \frac{dI}{dt} = iLI_{\max} \omega e^{i(\omega t - \phi)} . \end{aligned}$$

Η χωρητική αντίσταση είναι

$$X_C = \frac{\|V_C\|}{\|I\|} = \frac{1}{\omega C} .$$

Η επαγωγική αντίσταση είναι

$$X_L = \frac{\|V_L\|}{\|I\|} = \omega L .$$

Από το 2ο κανόνα Kirchhoff

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= V_R + V_C + V_L = RI_{\max} e^{i(\omega t - \phi)} + \frac{I_{\max}}{i\omega C} e^{i(\omega t - \phi)} + iLI_{\max} \omega e^{i(\omega t - \phi)} \\ &= I_{\max} (R - iX_C + iX_L) e^{i(\omega t - \phi)} . \end{aligned}$$

Ο μιγαδικός αριθμός  $R - iX_C + iX_L$  έχει μέτρο  $\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$  και φάση  $\theta = \tan^{-1}((X_L - X_C)/R)$ . Άρα

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{i\theta} e^{i(\omega t - \phi)} \Rightarrow \\ V_{\max} e^{i\omega t} &= I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} e^{i(\omega t - \phi + \theta)} . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} V_{\max} &= I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2} , \\ \omega t &= \omega t - \phi + \theta \Rightarrow \phi = \theta . \end{aligned}$$

Άρα το  $I_{\max}$  είναι

$$I_{\max} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}} .$$

**Υπολογισμός λοιπών μεγεθών****Εμπέδωση**

Η εμπέδωση είναι

$$Z = \frac{V_{\max}}{I_{\max}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}.$$

**Διαφορά φάσης ρεύματος-τάσης**

Για τη διαφορά φάσης ρεύματος-τάσης έχουμε

$$\tan \phi = \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{X_L - X_C}{R}.$$

**Συχνότητα συντονισμού**

Η συχνότητα συντονισμού τάσης-ρεύματος προκύπτει όταν  $\phi = 0$ . Τότε  $X_L - X_C = 0 \Rightarrow \omega_r^2 LC = 1$ . Άρα, η συχνότητα συντονισμού είναι

$$\omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

**Ισχύς**

Η ισχύς που παρέχει κάθε χρονική στιγμή η πηγή είναι

$$P(t) = \mathcal{E}(t)I(t) = V_{\max} \cos(\omega t) I_{\max} \cos(\omega t - \phi) = \frac{V_{\max}^2}{Z} \cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi).$$

Καθώς

$$\begin{aligned} \cos(a - b) &= \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b), \\ \cos(a + b) &= \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b), \end{aligned}$$

έχουμε

$$\frac{\cos(a + b) + \cos(a - b)}{2} = \cos(a) \cos(b).$$

Επομένως

$$\cos(\omega t) \cos(\omega t - \phi) = \frac{\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi}{2}.$$

Η στιγμιαία ισχύς της πηγής γίνεται

$$P(t) = \frac{V_{\max}^2}{Z} \frac{\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi}{2}.$$

Η μέση ισχύς είναι

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt,$$

όπου  $T = 1/f$  η περίοδος της τάσης και του ρεύματος. Άρα

$$\langle P \rangle = \frac{V_{\max}^2}{2TZ} \int_0^T [\cos(2\omega t - \phi) + \cos \phi] dt = \frac{V_{\max}^2}{2Z} \cos \phi .$$

Καθώς

$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}} = \frac{R}{Z} ,$$

η μέση ισχύς γίνεται

$$\langle P \rangle = \frac{RV_{\max}^2}{2Z^2} .$$

**Ενεργός τιμή του μεγέθους  $X(t)$**

Η ενεργός τιμή του μεγέθους  $X(t)$  συμβολίζεται με  $X_{\text{rms}}$  και ορίζεται από τη σχέση

$$X_{\text{rms}} = \sqrt{\langle X^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T X(t)^2 dt} .$$

## 9.14 Ασκήσεις—Λύσεις

### 9.14.1 Νόμος Biot–Savart

- Ένας ευθύγραμμος αγωγός άπειρου μήκους διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I$ . Υπολογίστε το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου στο χώρο γύρω του.

#### ΛΥΣΗ

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, η καταλληλότερη περιγραφή του γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(\rho, \phi, z)$  με άξονα  $z$  τον ευθύγραμμο αγωγό και με γωνία  $\phi = 0$  για το επίπεδο που ορίζεται από τον αγωγό και το σημείο. Η φορά του ρεύματος προσδιορίζει τα θετικά  $z$ . Το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού είναι το  $d\vec{s} = dz\hat{k}$ . Έστω ότι είναι στη θέση  $(0, 0, z)$ . Το διάνυσμα από αυτή τη θέση ως ένα σημείο  $(R, 0, \bar{z})$  είναι  $\vec{r} = (R, 0, \bar{z} - z)$  με μέτρο

$$r = \sqrt{R^2 + (\bar{z} - z)^2}.$$

Το μοναδιαίο είναι  $\hat{r} = \vec{r}/r$ .

Στο σημείο  $(R, 0, \bar{z})$  παράγεται στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dz}{r^3} \hat{\phi}.$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο από όλα τα τμήματα του αγωγού είναι

$$\vec{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(R^2 + (\bar{z} - z)^2)^{3/2}} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{2}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}.$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(R^2 + (z - \bar{z})^2)^{3/2}}$$

που εμφανίστηκε παραπάνω, υπολογίζεται στο Παράρτημα Α'.

- Ένα κυκλικός βρόχος με ακτίνα  $R$  διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Εφαρμόστε το νόμο Biot–Savart για να βρείτε το μαγνητικό πεδίο που παράγεται σε απόσταση  $z$  κατακόρυφα πάνω από το κέντρο του βρόχου.

#### ΛΥΣΗ

Έστω  $z$  ο άξονας του κυκλικού βρόχου. Λόγω της συμμετρίας που έχει ο βρόχος σε περιστροφή γύρω από τον  $z$  θα διευκολυνθούμε αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \phi, z)$ . Επίσης, λόγω της περιστροφικής συμμετρίας, το μαγνητικό πεδίο στα σημεία του άξονα  $z$  πρέπει να μην έχει συνιστώσα κάθετη στον  $z$  (αν είχε, η συνιστώσα θα άλλαζε με την περιστροφή).

Ένα στοιχειώδες τμήμα του κυκλικού βρόχου με μήκος  $ds$  και φορά στη φορά του ρεύματος δημιουργεί πάνω στον άξονα  $z$ , σε απόσταση  $z$  από το κέντρο, στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο  $d\vec{B}$  που δίνεται από το νόμο Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{\rho}}{\rho^2}.$$

Το  $\vec{\rho}$  είναι το διάνυσμα από το  $d\vec{s}$ , που έχει διάνυσμα θέσης  $R\hat{r}$ , προς το σημείο του άξονα  $z$  που έχει διάνυσμα θέσης  $z\hat{z}$ . Επομένως,  $\vec{\rho} = z\hat{z} - R\hat{r}$ . Καθώς  $d\vec{s} = ds\hat{\phi}$  (με το  $\phi$  στη φορά του ρεύματος) έχουμε

$$d\vec{s} \times \hat{\rho} = ds\hat{\phi} \times \left( \frac{z\hat{z} - R\hat{r}}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right) = ds \frac{z\hat{r} + R\hat{z}}{\sqrt{z^2 + R^2}}.$$

Τότε

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} ds \frac{z\hat{r} + R\hat{z}}{(z^2 + R^2)^{3/2}}.$$

Από το διάνυσμα αυτό μας ενδιαφέρει μόνο η συνιστώσα στον  $z$ . Η ολοκλήρωση που θα κάνουμε παρακάτω σε όλο τον κύκλο, μηδενίζει τη συνολική συνιστώσα που είναι κάθετη στον  $z$ . Άρα

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int d\vec{B} = \int \frac{\mu_0 I}{4\pi} ds \frac{R\hat{z}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R\hat{z}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} \int ds \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R\hat{z}}{(z^2 + R^2)^{3/2}} 2\pi R = \hat{z} \frac{\mu_0 I}{2} \frac{R^2}{(z^2 + R^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

3. Ένας κυκλικός συρμάτινος βρόχος που διαρρέεται από ρεύμα 5 A, εμφανίζει μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του 10 μT. Ποια είναι η ακτίνα του βρόχου;

### ΛΥΣΗ

Ένα στοιχειώδες τμήμα του κυκλικού βρόχου με μήκος  $ds$  και φορά στη φορά του ρεύματος δημιουργεί στο κέντρο του βρόχου στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο  $d\vec{B}$  που δίνεται από το νόμο Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Το  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα από το  $d\vec{s}$  προς το κέντρο. Έχει μέτρο  $R$ , την ακτίνα του κύκλου. Το  $\hat{r}$  είναι το μοναδιαίο του διάνυσμα.

Το  $d\vec{s}$  έχει μήκος  $ds$  και είναι πάντα κάθετο στο  $\vec{r}$ . Ισχύει ότι

$$d\vec{s} \times \hat{r} = ds\hat{k},$$

όπου  $\hat{k} = d\hat{s} \times \hat{r}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο επίπεδο του κύκλου.



Επομένως, στο κέντρο,

$$d\vec{B} = \hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} ds .$$

Ολοκληρώνουμε κατά μήκος ολόκληρου του κύκλου  $C$ :

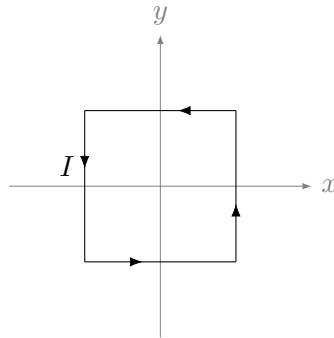
$$\vec{B} = \int_C d\vec{B} = \int_0^{2\pi R} \hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} ds = \hat{k} \frac{\mu_0 I}{2R} .$$

Για το μέτρο  $B$  έχουμε

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R} \Rightarrow R = \frac{\mu_0 I}{2B} .$$

Με αντικατάσταση,  $R = (\pi/10)\text{m} \approx 0.314\text{m}$ .

4. Βρείτε το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου που δημιουργείται στο κέντρο ενός τετράγωνου βρόχου που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης  $I$ . Η απόσταση του κέντρου από την πλευρά είναι  $R$ .



Σχήμα 9.2: Άσκηση 4

### ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το νόμο Biot–Savart, ένα στοιχειώδες τμήμα αγωγού με ρεύμα παράγει σε θέση  $\vec{r}$  ως προς αυτό, στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο που δίνεται από τη σχέση

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} .$$

Στο πρόβλημά μας, για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο, πρέπει να υπολογίσουμε τη συνεισφορά σε αυτό από κάθε πλευρά του αγωγού. Παρατηρούμε ότι οποιαδήποτε πλευρά, π.χ. η αριστερή, αν περιστραφεί κατά  $90^\circ$  δεξιόστροφα γύρω από τον κάθετο άξονα που περνά από το κέντρο, θα ταυτιστεί με την επάνω πλευρά. Αν περιστραφεί κατά  $180^\circ$  θα ταυτιστεί με τη δεξιά πλευρά, κλπ. Επομένως, μπορούμε να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο,  $\vec{B}_1$ , από τη μία πλευρά και κατόπιν θα το περιστρέψουμε

γύρω από τον κάθετο άξονα κατά πολλαπλάσια των  $90^\circ$  ώστε να βρούμε τα πεδία από τις άλλες πλευρές.

Ορίζουμε άξονες όπως στο Σχήμα 9.2 με αρχή το κέντρο του τετραγώνου.

Ένα στοιχειώδες τμήμα της αριστερής πλευράς του αγωγού βρίσκεται στη θέση  $(-R, y)$ , με  $y$  στο  $[-R, R]$ . Το μήκος του είναι  $dy$ . Η φορά του ρεύματος είναι η  $-\hat{j}$ . Άρα  $d\vec{s} = -dy \hat{j}$ .

Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από το  $(-R, y)$  στο σημείο  $(0, 0)$  είναι  $\vec{r} = (0, 0) - (-R, y) = (R, -y)$ . Το μέτρο του είναι  $r = \sqrt{R^2 + y^2}$ . Επομένως,

$$d\vec{s} \times \vec{r} = -dy \hat{j} \times (R \hat{i} - y \hat{j}) = R dy \hat{k}.$$

Το στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο είναι

$$d\vec{B}_1 = \hat{k} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IR dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Το συνολικό πεδίο από το αριστερό τμήμα είναι

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \int d\vec{B}_1 = \hat{k} \frac{R\mu_0 I}{4\pi} \int_{-R}^R \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} = \hat{k} \frac{R\mu_0 I}{4\pi} \frac{\sqrt{2}}{R^2} \\ &= \hat{k} \frac{\mu_0 I}{2\sqrt{2}\pi R}. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο Παράρτημα Α'.

Παρατηρούμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι πάνω στον κάθετο άξονα οπότε οποιαδήποτε περιστροφή γύρω από αυτόν το αφήνει αναλλοίωτο. Επομένως,  $\vec{B}_2 = \vec{B}_3 = \vec{B}_4 = \vec{B}_1$ . Το συνολικό πεδίο από τον αγωγό είναι

$$\vec{B} = 4\vec{B}_1 = \hat{k} \frac{\sqrt{2}\mu_0 I}{\pi R}.$$

5. Βρείτε το πεδίο στο κέντρο ενός κανονικού πολύγωνου με  $n$  πλευρές, που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα έντασης  $I$ . Το  $R$  είναι η απόσταση του κέντρου από οποιαδήποτε πλευρά του πολυγώνου.

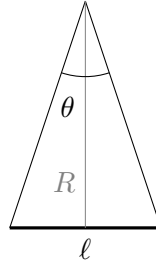
Βεβαιωθείτε ότι το πεδίο που βρήκατε, στο όριο  $n \rightarrow \infty$ , ισούται με το πεδίο ενός κυκλικού βρόχου.

### ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το σκεπτικό που αναπτύξαμε στην προηγούμενη άσκηση, θα εφαρμόσουμε το νόμο Biot-Savart σε μία πλευρά και κατόπιν θα περιστρέψουμε γύρω από τον κάθετο άξονα το αποτέλεσμα κατά τα  $n$  πολλαπλάσια της γωνίας  $2\pi/n$  ώστε να βρούμε τη συνεισφορά από τις άλλες πλευρές, ή

τελικά, καθώς θα προκύψει ότι το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στον άξονα περιστροφής, θα το πολλαπλασιάσουμε  $n$  φορές.

Σε ένα κανονικό πολύγωνο με  $n$  πλευρές, η κάθε πλευρά με τις δύο «ακτίνες» σχηματίζει ισοσκελές τρίγωνο με γωνία στην κορυφή ίση με  $\theta = 2\pi/n$  (Σχήμα 9.3).

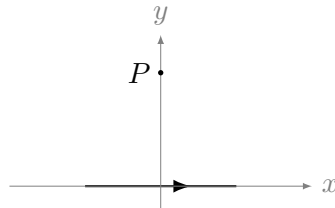


Σχήμα 9.3: Άσκηση 5

Από το τρίγωνο που σχηματίζεται έχουμε για το μήκος της πλευράς του πολυγώνου  $\ell$

$$\frac{\ell/2}{R} = \tan(\theta/2) \Rightarrow \ell = 2R \tan(\pi/n) .$$

Το πρόβλημά μας τώρα είναι ο υπολογισμός του μαγνητικού πεδίου ενός αγωγού μήκους  $\ell$  στη μεσοκάθετό του, σε απόσταση  $R$ . Ας ορίσουμε ως αρχή των αξόνων την προβολή του σημείου  $C$  στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο, πάνω στον αγωγό. Ο αγωγός θα είναι ο άξονας  $x$  και κάθετα σε αυτόν ο άξονας  $y$  θα περνά από το σημείο  $C$ .



Ένα στοιχειώδες τμήμα του έχει μήκος  $dx$ , βρίσκεται σε θέση  $x$  με  $-\ell/2 \leq x \leq \ell/2$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του ρεύματος είναι το  $\hat{i}$ , άρα  $d\vec{s} = dx \hat{i}$ . Το σημείο  $P$  έχει συντεταγμένες  $(0, R)$ . Το διάνυσμα από το τμήμα προς το  $P$  είναι  $\vec{r} = (0, R) - (x, 0) = (-x, R)$  και έχει μέτρο  $r = \sqrt{x^2 + R^2}$ . Σύμφωνα με το νόμο Biot–Savart

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} .$$

Αλλά

$$d\vec{s} \times \vec{r} = (dx \hat{i}) \times (-x \hat{i} + R \hat{j}) = R dx \hat{k} .$$

Έτσι

$$d\vec{B}_1 = \hat{k} \frac{\mu_0 I R}{4\pi (x^2 + R^2)^{3/2}} dx .$$

Η συνεισφορά από όλα τα στοιχειώδη τμήματα είναι

$$\vec{B}_1 = \int d\vec{B}_1 = \hat{k} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{1}{(x^2 + R^2)^{3/2}} dx = \hat{k} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{2}{R^2} \frac{\ell/2}{\sqrt{R^2 + (\ell/2)^2}} .$$

Από το τρίγωνο στο Σχήμα 9.3 προκύπτει ότι

$$\frac{\ell/2}{\sqrt{R^2 + (\ell/2)^2}} = \sin(\theta/2) = \sin(\pi/n) .$$

Άρα

$$\vec{B}_1 = \hat{k} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) .$$

Το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από τις  $n$  πλευρές δίνει

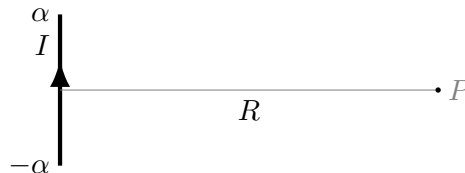
$$\vec{B} = \hat{k} \frac{n\mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) .$$

Αν  $n = 4$ , εύκολα προκύπτει ότι καταλήγουμε στον τύπο της προηγούμενης άσκησης.

Όταν  $n \rightarrow \infty$ , δηλαδή όταν ο βρόχος μας γίνεται κυκλικός,  $\pi/n \rightarrow 0$ . Τότε  $\sin(\pi/n) \approx \pi/n$ . Επομένως,

$$\vec{B} = \hat{k} \frac{n\mu_0 I}{2\pi R} \sin(\pi/n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{\mu_0 I}{2R} .$$

6. Κλειστό κύκλωμα που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ , περιλαμβάνει ευθύγραμμο τμήμα μήκους  $2\alpha$  (Σχήμα 9.4). Σημείο  $P$  βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος και σε απόσταση  $R$ . Προσδιορίστε το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  στο σημείο  $P$  που οφείλεται στο ευθύγραμμο τμήμα. Μελετήστε την περίπτωση  $\alpha \rightarrow \infty$ .



Σχήμα 9.4: Άσκηση 6

**ΛΥΣΗ**

Έστω  $y$  ο άξονας του ευθύγραμμου αγωγίου τμήματος. Εκτείνεται από το σημείο με συντεταγμένες  $(0, -\alpha)$  έως το  $(0, \alpha)$ . Η κάθετος που περνά από το σημείο  $P$  αποτελεί τον άξονα  $x$ . Το σημείο  $P$  είναι στη θέση  $(R, 0)$ . Το ρεύμα στον αγωγό παράγει μαγνητικό πεδίο στο  $P$ .

Ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους  $d\vec{s} = dy \hat{j}$  του αγωγού παράγει στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο στο  $P$  που δίνεται από το νόμο Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dy \hat{j} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Το διάνυσμα από το στοιχειώδες τμήμα  $dy \hat{j}$  στη θέση  $(0, y)$  ως το σημείο  $(R, 0)$  είναι

$$\vec{r} = (R, 0) - (0, y) = R\hat{i} - y\hat{j}.$$

Το μοναδιαίο  $\hat{r}$  είναι

$$\hat{r} = \frac{R\hat{i} - y\hat{j}}{\sqrt{R^2 + y^2}}.$$

Επομένως,

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{dy \hat{j} \times (R\hat{i} - y\hat{j})}{(R^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Αλλά  $\hat{j} \times \hat{j} = 0$ ,  $\hat{j} \times \hat{i} = -\hat{k}$ , άρα

$$d\vec{B} = -\hat{k} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο είναι

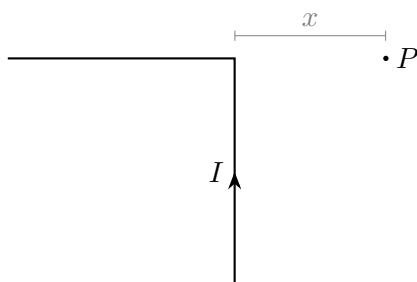
$$\begin{aligned} \vec{B} &= \int_{-\alpha}^{\alpha} (-\hat{k}) \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} = -\hat{k} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\alpha}^{\alpha} \frac{dy}{(R^2 + y^2)^{3/2}} \\ &= -\hat{k} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{2}{R^2} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + R^2}} \\ &= -\hat{k} \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 + R^2}}. \end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο Παράρτημα Α'.

Όταν  $\alpha \rightarrow +\infty$ , έχουμε αγωγό άπειρου μήκους και

$$\vec{B} \rightarrow -\hat{k} \frac{\mu_0 I}{2\pi R}.$$

7. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο  $P$ , σε απόσταση  $x$  από την ορθή γωνία ενός απεριόριστα μακρού σύρματος που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I$ , όπως στο Σχήμα 9.5.



Σχήμα 9.5: Άσκηση 7

**ΛΥΣΗ**

Θεωρούμε ότι το οριζόντιο τμήμα του αγωγού ορίζει τον αρνητικό άξονα  $x$  ενώ το κατακόρυφο ορίζει τον αρνητικό άξονα  $y$ . Το σημείο ένωσής τους έχει συντεταγμένες  $(0, 0)$  και το σημείο  $P$  βρίσκεται στη θέση  $(x, 0)$ .

Για να βρούμε το μαγνητικό πεδίο στο σημείο  $P$  πρέπει να υπολογίσουμε τη συνεισφορά σε αυτό από κάθε στοιχειώδες τμήμα του αγωγού. Θα εφαρμόσουμε το νόμο Biot–Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3}.$$

Τα στοιχειώδη τμήματα του αγωγού που βρίσκονται στο οριζόντιο μέρος του έχουν μέτρο  $dx$ , διεύθυνση τον άξονα  $x$  και φορά αρνητική, όπως το ρεύμα. Άρα για αυτά  $d\vec{s} = -dx\hat{i}$ . Το διάνυσμα  $\vec{r}$  για αυτά τα τμήματα είναι παράλληλο στο  $\hat{i}$ . Επομένως  $d\vec{s} \times \vec{r} = \vec{0}$  και  $d\vec{B} = \vec{0}$ .

Τα στοιχειώδη τμήματα του αγωγού που βρίσκονται στο κατακόρυφο μέρος του έχουν μέτρο  $dy$ , διεύθυνση τον άξονα  $y$  και φορά θετική, όπως το ρεύμα. Άρα για αυτά  $d\vec{s} = dy\hat{j}$ . Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από ένα τμήμα στη θέση  $(0, y)$  έως το σημείο  $(x, 0)$  είναι το

$$\vec{r} = (x, 0) - (0, y) = x\hat{i} - y\hat{j}.$$

Το μέτρο του είναι  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Το  $y$  είναι στο διάστημα από  $-\infty$  έως  $0$ . Επομένως,

$$d\vec{s} \times \vec{r} = dy\hat{j} \times (x\hat{i} - y\hat{j}) = -x dy\hat{k}.$$

Το  $-\hat{k}$  είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος, προς τα μέσα. Άρα

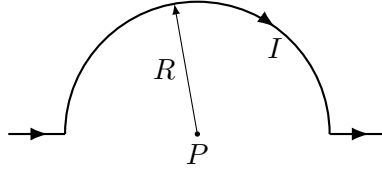
$$d\vec{B} = -\hat{k} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ix}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy$$

και

$$\begin{aligned} \vec{B} = \int d\vec{B} &= -\hat{k} \int_{-\infty}^0 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Ix}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dy \\ &= -\hat{k} \frac{\mu_0 Ix}{4\pi} \frac{1}{x^2} = -\hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi x}. \end{aligned}$$

Δείτε το Παράρτημα Α' για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

8. Ένα τμήμα σύρματος συνολικού μήκους  $4R$ , κάμπτεται και διαμορφώνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.6. Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα  $I = 6 \text{ A}$ . Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο  $P$ , όταν  $R = 2\pi \text{ cm}$ .



Σχήμα 9.6: Άσκηση 8

### ΛΥΣΗ

Ορίζουμε τη θέση  $(0, 0)$  στο σημείο  $P$ . Το μαγνητικό πεδίο στο  $P$  είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων που παράγουν τα τρία τμήματα του αγωγού.

Ένα στοιχειώδες τμήμα μήκους  $d\vec{s} = dx\hat{i}$ , στη θέση  $x$ , ενός από τους ευθύγραμμους αγωγούς, παράγει στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο στο  $P$  που δίνεται από το νόμο Biot–Savart. Όμως, το διάνυσμα από οποιοδήποτε τμήμα των ευθύγραμμων αγωγών ως το  $P$  είναι παράλληλο στον άξονα  $x$  (στον άξονα των αγωγών). Έτσι,  $d\vec{s} \times \hat{r} = \vec{0}$ . Επομένως τα ευθύγραμμα τμήματα δεν παράγουν μαγνητικό πεδίο στο  $P$ .

Ο ημικυκλικός αγωγός αποτελείται από στοιχειώδη τμήματα με μήκος  $ds$ . Η κατεύθυνσή τους είναι στη φορά του ρεύματος. Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από το τμήμα του αγωγού ως το  $P$  έχει μήκος  $R$  και κατεύθυνση προς το  $P$ . Επομένως,  $d\vec{s} \times \hat{r} = -ds\hat{k}$ , όπου  $\hat{k}$  το κάθετο διάνυσμα στο σύστημα, με φορά προς τα έξω.

Ο νόμος Biot–Savart δίνει

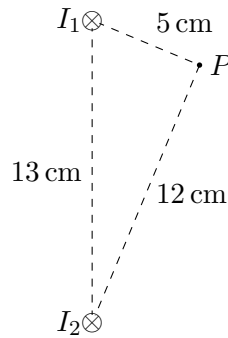
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{R^2} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{ds\hat{k}}{R^2}.$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \hat{k} \int_0^{\pi R} ds = -\frac{\mu_0 I}{4R} \hat{k}.$$

Με αντικατάσταση,  $\vec{B} = -\hat{k}30 \mu\text{T}$ .

9. Οι δύο παράλληλοι αγωγοί μεγάλου μήκους στο Σχήμα 9.7, διαρρέονται από ρεύματα  $I_1 = 3 \text{ A}$  και  $I_2 = 3 \text{ A}$ , με φορά προς το εσωτερικό της σελίδας. Προσδιορίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στο σημείο  $P$ .



Σχήμα 9.7: Άσκηση 9

**ΛΥΣΗ**

Ορίζω σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων. Η ευθεία που συνδέει τους αγωγούς είναι ο άξονας  $y$ , οι αγωγοί ορίζουν τον άξονα  $z$  και ο άξονας  $x$  είναι στο επίπεδο του σχήματος. Η αρχή των αξόνων είναι στο  $I_2$ .

Γνωρίζουμε ότι άπειρου μήκους ευθύγραμμος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα  $I_1$  προς τα θετικά  $z$ , παράγει μαγνητικό πεδίο σε απόσταση  $D_1$  με μέτρο

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D_1}.$$

Η κατεύθυνση βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού. Στο σημείο  $P$  το πεδίο του  $I_1$  είναι εφαπτόμενο στον κύκλο με κέντρο τον αγωγό 1 που περνά από το  $P$ . Άρα έχει κατεύθυνση προς το  $I_2$ . Το  $\vec{B}_1$  είναι παράλληλο στο  $(\vec{PI}_2)$ .

Το πεδίο από το  $I_2$  έχει μέτρο

$$B_2 = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi D_2}.$$

Η διεύθυνση του  $\vec{B}_2$  είναι η ευθεία που ενώνει τον αγωγό με ρεύμα  $I_1$  και το σημείο  $P$  και η φορά είναι από τον αγωγό προς το  $P$ . Το  $\vec{B}_2$  είναι παράλληλο στο  $(\vec{I_1P})$ .

Από το σχήμα  $D_1 = 5 \text{ cm}$ ,  $D_2 = 12 \text{ cm}$ .

Ας βρούμε τις συντεταγμένες του  $P$ : το συνημίτονο της γωνίας  $\theta_2 \equiv \widehat{I_1 I_2 P}$  είναι

$$\cos \theta_2 = \frac{(PI_2)}{(I_1 I_2)}$$

αλλά και

$$\cos \theta_2 = \frac{P_y}{(PI_2)}.$$

Επομένως,

$$P_y = \frac{(PI_2)^2}{(I_1 I_2)} = \frac{144}{13} \text{ cm}.$$



Για το  $\sin \theta_2$  έχουμε

$$\sin \theta_2 = \frac{(PI_1)}{(I_1 I_2)}$$

αλλά και

$$\sin \theta_2 = \frac{P_x}{(PI_2)} .$$

Επομένως,

$$P_x = \frac{(PI_1)(PI_2)}{(I_1 I_2)} = \frac{60}{13} \text{ cm} .$$

Ο αγωγός 2 είναι στο  $(0, 0)$  ενώ ο 1 στο  $(0, 13 \text{ cm})$ .

Προκύπτει ότι το διάνυσμα  $(P\vec{I}_2)$  είναι το  $-60/13\hat{i} - 144/13\hat{j}$  και το  $(I_1\vec{P})$  είναι το  $60/13\hat{i} + (144/13 - 13)\hat{j} = 60/13\hat{i} - 25/13\hat{j}$ . Τα μοναδιαία είναι  $-(5\hat{i} + 12\hat{j})/13$  και  $(12\hat{i} - 5\hat{j})/13$  αντίστοιχα.

Για τα μέτρα των μαγνητικών πεδίων στο  $P$  έχουμε  $B_1 = 12 \mu\text{T}$ ,  $B_2 = 5 \mu\text{T}$ .

Επομένως, σε  $\mu\text{T}$

$$\vec{B}_1 = -12 \times (5\hat{i} + 12\hat{j})/13 , \quad \vec{B}_2 = 5 \times (12\hat{i} - 5\hat{j})/13 .$$

Το συνολικό πεδίο στο  $P$  είναι

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = -\hat{j}13 \mu\text{T} .$$

10. Το ρεύμα στον μεγάλου μήκους ευθύγραμμο αγωγό έχει τιμή  $I_1 = 5 \text{ A}$  και βρίσκεται στο επίπεδο ορθογώνιου βρόχου που διαρρέεται από ρεύμα  $I_2 = 10 \text{ A}$ . Οι διαστάσεις είναι  $c = 0.1 \text{ m}$ ,  $a = 0.15 \text{ m}$  και  $\ell = 0.45 \text{ m}$  (Σχήμα 9.8). Βρείτε το μέτρο και την κατεύθυνση της συνισταμένης δύναμης που ασκείται στο βρόχο από το μαγνητικό πεδίο το οποίο δημιουργείται από τον ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό.

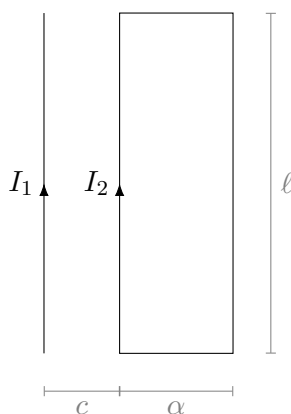
### ΛΥΣΗ

Ορίζω σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων: ο ευθύγραμμος αγωγός αποτελεί τον άξονα  $y$  και στο επίπεδο του σχήματος είναι ο άξονας  $x$  με τα θετικά του προς το ορθογώνιο πλαίσιο.

Γνωρίζουμε ότι ο ευθύγραμμος ρευματοφόρος αγωγός παράγει σε απόσταση  $R$  μαγνητικό πεδίο με μέτρο

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} .$$

Το μοναδιαίο διάνυσμα του  $\vec{B}$  στην περιοχή του ορθογώνιου πλαισίου είναι το  $-\hat{k}$ , όπως προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού για τη συγκεκριμένη φορά του  $I_1$ .



Σχήμα 9.8: Άσκηση 10

Το συγκεκριμένο μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη στο ρευματοφόρο πλαίσιο. Κάθε κατακόρυφη πλευρά βρίσκεται εξ ολοκλήρου σε περιοχή με συγκεκριμένη τιμή του μαγνητικού πεδίου.

Στην αριστερή πλευρά το πεδίο είναι

$$\vec{B}_1 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi c} \hat{k}$$

και συνεπώς η δύναμη είναι

$$\vec{F}_1 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_1 = I_2 \ell \hat{j} \times (-B_1 \hat{k}) = -I_2 \ell B_1 \hat{i} = -\frac{\mu_0 \ell I_1 I_2}{2\pi c} \hat{i}.$$

Στη δεξιά πλευρά το πεδίο είναι

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi(c + \alpha)} \hat{k}$$

και συνεπώς η δύναμη είναι

$$\vec{F}_3 = I_2 \vec{L} \times \vec{B}_2 = I_2 (-\ell \hat{j}) \times (-B_2 \hat{k}) = I_2 \ell B_2 \hat{i} = \frac{\mu_0 \ell I_1 I_2}{2\pi(c + \alpha)} \hat{i}.$$

Στην επάνω και στην κάτω πλευρά το πεδίο δεν είναι σταθερό. Ένα στοιχειώδες τμήμα της επάνω πλευράς που βρίσκεται σε απόσταση  $x$  από τον άξονα  $y$  (τον ευθύγραμμο αγωγό) έχει μήκος  $ds = dx$ , διεύθυνση τον άξονα  $x$  και φορά τη φορά του ρεύματος (δηλαδή προς τα θετικά  $x$ ). Άρα  $d\vec{s} = dx \hat{i}$ . Βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{k}$$

και του ασκείται μαγνητική δύναμη

$$d\vec{F}_2 = I_2 d\vec{s} \times \vec{B} = I_2 dx \hat{i} \times \left( -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} \hat{k} \right) = \hat{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx .$$

Το  $x$  βρίσκεται στο  $[c, c + \alpha]$  επομένως

$$\vec{F}_2 = \int d\vec{F}_2 = \int_c^{c+\alpha} \hat{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi x} dx = \hat{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln x \Big|_c^{c+\alpha} = \hat{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{c + \alpha}{c} .$$

Για την κάτω πλευρά, ένα στοιχειώδες τμήμα είναι  $d\vec{s} = -dx \hat{i}$ , αντίθετο από αυτό της επάνω πλευράς. Η θέση του,  $x$ , αλλάζει και εδώ στο  $[c, c + \alpha]$ . Το μαγνητικό πεδίο είναι πάλι

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 I_1}{2\pi x} \hat{k}$$

συνεπώς

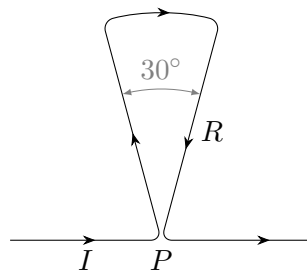
$$\vec{F}_4 = -\vec{F}_2 = -\hat{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi} \ln \frac{c + \alpha}{c} .$$

Η συνολική δύναμη σε όλο το πλαίσιο είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = -\frac{\mu_0 \ell I_1 I_2}{2\pi c} \hat{i} - \frac{\mu_0 \ell I_1 I_2}{2\pi(c + \alpha)} \hat{i} = -\hat{i} \frac{\mu_0 \ell I_1 I_2}{2\pi} \left( \frac{\alpha}{c(c + \alpha)} \right) .$$

Με αντικατάσταση,  $\vec{F} = -\hat{i} 27 \mu\text{N}$ .

11. Μια κλειστή αγωγή διαδρομή η οποία έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 9.9 παράγει μαγνητικό πεδίο στο σημείο  $P$ , το κέντρο του τόξου. Αν το τόξο αντιστοιχεί σε επίκεντρο γωνία  $30^\circ$  και το συνολικό μήκος του σύρματος της κλειστής διαδρομής είναι 1.2 m, ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση του πεδίου που παράγεται στο  $P$ , αν το ρεύμα στο σύρμα είναι 3 A;



Σχήμα 9.9: Άσκηση 11

**ΛΥΣΗ**

Για να υπολογίσουμε το μαγνητικό πεδίο στο  $P$  πρέπει να εφαρμόσουμε τον τύπο Biot–Savart για κάθε στοιχειώδες τμήμα του αγωγού:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Τα ευθύγραμμα τμήματα (τα οριζόντια και οι «ακτίνες») έχουν παράλληλα ή αντιπαράλληλα τα διανύσματα  $d\vec{s}$  και  $\vec{r}$  που εμφανίζονται στον τύπο. Το εξωτερικό γινόμενο  $d\vec{s} \times \hat{r}$  είναι 0, επομένως δεν συνεισφέρουν στο πεδίο στο  $P$ . Το μαγνητικό πεδίο στο  $P$  προέρχεται μόνο από το τόξο.

Στο τόξο, ένα στοιχειώδες τμήμα έχει μήκος  $R d\phi$ . Το διάνυσμα  $d\vec{s}$  εφάπτεται στην καμπύλη, με φορά τη φορά του ρεύματος. Άρα  $d\vec{s} = R d\phi \hat{s}$ . Η γωνία  $\phi$  μεταβάλλεται στο διάστημα  $[0, \phi_0]$  (στο συγκεκριμένο πρόβλημα είναι  $\phi_0 = 30^\circ = \pi/6$  rad).

Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από τα στοιχειώδη τμήματα του τόξου προς το  $P$  έχει μέτρο  $R$ . Έτσι

$$d\vec{s} \times \hat{r} = -R d\phi \hat{k},$$

όπου  $\hat{k}$  το κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο με φορά προς τα έξω.

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι το στοιχειώδες πεδίο στο  $P$  είναι

$$d\vec{B} = -\hat{k} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\phi}{R}.$$

Το συνολικό πεδίο είναι

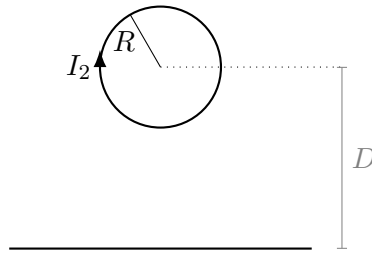
$$\vec{B} = \int d\vec{B} = -\hat{k} \frac{\mu_0 I}{4\pi R} \int_0^{\phi_0} d\phi = -\hat{k} \frac{\mu_0 I \phi_0}{4\pi R}.$$

Θα υπολογίσουμε το  $R$  γνωρίζοντας το συνολικό μήκος του σύρματος της κλειστής διαδρομής, έστω  $L$  (στο πρόβλημα,  $L = 1.2$  m). Το τμήμα της κλειστής διαδρομής έχει μήκος  $R + R\phi_0 + R$ . Άρα  $R = L/(2 + \phi_0)$ . Επομένως

$$\vec{B} = -\hat{k} \frac{\mu_0 I \phi_0 (2 + \phi_0)}{4\pi L}.$$

Με αντικατάσταση,  $\vec{B} = -\hat{k} (\pi/12 + (\pi/12)^2) \times 10^{-6} \approx -\hat{k} 0.33 \mu\text{T}$ .

12. Κυκλικός βρόχος έχει ακτίνα  $R$  και φέρει ρεύμα  $I_2$  με φορά κατά τους δείκτες του ρολογιού (Σχήμα 9.10). Το κέντρο του βρόχου βρίσκεται σε απόσταση  $D$  πάνω από μακρύ ευθύγραμμο σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση του ρεύματος  $I_1$  στο σύρμα αν το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο του βρόχου είναι μηδέν;



Σχήμα 9.10: Άσκηση 12

**ΛΥΣΗ**

Το μαγνητικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από τον κυκλικό και τον ευθύγραμμο αγωγό.

Σε κυκλικό αγωγό ακτίνας  $R$  το στοιχειώδες τμήμα έχει μήκος  $ds$ . Το διάνυσμα του τμήματος είναι εφαπτόμενο στον κύκλο κατά τη φορά του ρεύματος:  $d\vec{s} = ds\hat{s}$ .

Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από ένα στοιχειώδες τμήμα ως το κέντρο έχει μέτρο  $R$ . Είναι κάθετο στο  $\hat{s}$ , με κατεύθυνση προς το κέντρο.

Έστω  $\hat{k} = \hat{r} \times \hat{s}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο με φορά προς τα έξω. Επομένως  $d\vec{s} \times \hat{r} = -ds\hat{k}$ .

Το μαγνητικό πεδίο από στοιχειώδες τμήμα  $d\vec{s}$  του κυκλικού αγωγού στο κέντρο του είναι, σύμφωνα με το νόμο Biot-Savart,

$$d\vec{B}_2 = \frac{\mu_0 I_2}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{R^2} = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi R^2} ds \hat{k}.$$

Το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο από όλα τα τμήματα του κυκλικού αγωγού είναι

$$\vec{B}_2 = -\frac{\mu_0 I_2}{4\pi R^2} \hat{k} \int_0^{2\pi R} ds = -\frac{\mu_0 I_2}{2R} \hat{k}.$$

Γνωρίζουμε ότι άπειρου μήκους ευθύγραμμος αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα  $I_1$  προς τα θετικά  $x$  (από αριστερά προς τα δεξιά), παράγει μαγνητικό πεδίο σε απόσταση  $D$  ίσο με

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D} \hat{k}.$$

Το συνολικό πεδίο από τους δύο αγωγούς στο κέντρο του κυκλικού αγωγού είναι

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{I_1 \mu_0}{2\pi D} \hat{k} - \frac{\mu_0 I_2}{2R} \hat{k} = \frac{\mu_0}{2} \left( \frac{I_1}{\pi D} - \frac{I_2}{R} \right) \hat{k}.$$

Για να είναι 0 πρέπει

$$\frac{I_1}{\pi D} - \frac{I_2}{R} = 0 \Rightarrow I_1 = I_2 \frac{\pi D}{R}.$$

Αφού το ρεύμα που προκύπτει είναι θετικό, είναι σωστή η υπόθεσή μας ότι κινείται προς τα θετικά  $x$ .

### 9.14.2 Δύναμη Lorentz

1. Πρωτόνιο με ταχύτητα  $\vec{v} = (10\hat{i} + 20\hat{j})$  m/s εισέρχεται σε μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = (0.4\hat{i} + 0.3\hat{j} + 0.02\hat{k})$  T. Ποια είναι το μέτρο της δύναμης που δρα στο πρωτόνιο και το μέτρο της επιτάχυνσής του; (η μάζα του πρωτονίου είναι  $m_p \approx 1.67 \times 10^{-27}$  kg.)

#### ΛΥΣΗ

Η δύναμη είναι

$$\begin{aligned}\vec{F} &= (-e)\vec{v} \times \vec{B} = e(10\hat{i} + 20\hat{j}) \times (0.4\hat{i} + 0.3\hat{j} + 0.02\hat{k}) = e(3\hat{k} - 0.2\hat{j} - 8\hat{k} + 0.4\hat{i}) \\ &\approx (0.64\hat{i} - 3.2\hat{j} - 8\hat{k})10^{-19} \text{ N} .\end{aligned}$$

Το μέτρο της είναι  $\|\vec{F}\| = 1.6 \times 10^{-19} \sqrt{0.4^2 + 0.2^2 + 5^2} \approx 8 \times 10^{-19} \text{ N}$ .

Η επιτάχυνση είναι  $\vec{F}/m_p$  και το μέτρο της

$$a = \frac{\|\vec{F}\|}{m_p} \approx 4.81 \times 10^8 \text{ m/s}^2 .$$

2. Ποιο μαγνητικό πεδίο απαιτείται ώστε να αναγκάσει ένα ηλεκτρόνιο που έχει ενέργεια 725 eV να διαγράψει κυκλική τροχιά ακτίνας 0.5 m;  
Δίνονται: μάζα ηλεκτρονίου  $m_e = 9.1 \times 10^{-31}$  kg, φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19}$  C.

#### ΛΥΣΗ

Καθώς έχουμε κυκλική κίνηση του φορτίου, θα διευκολύνουν την μαθηματική περιγραφή οι κυλινδρικές συντεταγμένες. Τα  $r, \phi$ , είναι στο επίπεδο της κίνησης και το  $z$  είναι στον κάθετο άξονα. Εφόσον η ταχύτητα είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά, ορίζουμε το  $\hat{\phi}$  ώστε  $\vec{v} = v\hat{\phi}$ .

Έστω  $\vec{B} = B_r\hat{r} + B_\phi\hat{\phi} + B_z\hat{z}$ . Η μαγνητική δύναμη που ασκείται στο ηλεκτρόνιο είναι

$$\vec{F} = (-e)\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow \vec{F} = -ev(-B_r\hat{z} + B_z\hat{r}) .$$

Η δύναμη αυτή είναι πάντα κάθετη στην ταχύτητα και επομένως δρα ως κεντρομόλος αναγκάζοντας το φορτίο να εκτελέσει κυκλική τροχιά με ακτίνα  $R$ :

$$\vec{F} = -\frac{m_e v^2}{R}\hat{r} \Rightarrow -ev(B_z\hat{r} - B_r\hat{z}) = -\frac{mv^2}{R}\hat{r} \Rightarrow \begin{cases} evB_z = -\frac{mv^2}{R} \Rightarrow B_z = \frac{mv}{eR} \\ B_r = 0 \end{cases} .$$

Η συνιστώσα  $B_\phi$  είναι απροσδιόριστη.

Αν  $K$  είναι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου, η ταχύτητά του έχει μέτρο  $v = \sqrt{2K/m_e}$ . Άρα

$$B_z = \frac{\sqrt{2m_e K}}{eR}.$$

Με αντικατάσταση,  $B_z \approx 182 \mu\text{T}$ .

3. Ένα ηλεκτρόνιο συγκρούεται ελαστικά με ένα άλλο ηλεκτρόνιο που είναι αρχικά σε κατάσταση ηρεμίας. Μετά τη σύγκρουση, οι ακτίνες των τροχιών τους είναι 1 cm και 2.4 cm. Οι τροχιές είναι κάθετες σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο 0.044 T. Υπολογίστε την ενέργεια (σε keV) του προσπίπτοντος ηλεκτρονίου.

Σημείωση: Εάν μια σύγκρουση είναι ελαστική, η συνολική κινητική ενέργεια των σωμάτων δεν μεταβάλλεται.

Δίνονται: μάζα ηλεκτρονίου  $m_e = 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$ , φορτίο ηλεκτρονίου  $-e = -1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ .

#### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι ένα σωματίδιο με φορτίο  $q$ , που εισέρχεται με ταχύτητα  $\vec{v}$  σε ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$ , κάθετο στην ταχύτητά του, εκτελεί κυκλική κίνηση σε κάθετο επίπεδο στο  $\vec{B}$  με ακτίνα

$$R = \frac{mv}{|q|B}.$$

Συνεπώς, τα δύο ηλεκτρόνια με άγνωστες ταχύτητες  $v_1, v_2$  εκτελούν κυκλικές τροχιές με ακτίνες

$$R_1 = \frac{m_e v_1}{eB}, \quad R_2 = \frac{m_e v_2}{eB}.$$

Οι άγνωστες ταχύτητες έχουν μέτρα

$$v_1 = \frac{R_1 e B}{m_e}, \quad v_2 = \frac{R_2 e B}{m_e}.$$

Η συνολική κινητική ενέργεια, μετά την κρούση, αλλά και πριν καθώς είναι ελαστική, είναι

$$K = \frac{m_e v_1^2}{2} + \frac{m_e v_2^2}{2} = \frac{e^2 B^2}{2m_e} (R_1^2 + R_2^2).$$

Με αντικατάσταση,  $K \approx 115 \text{ keV}$ .

Αυτή είναι η κινητική ενέργεια του προσπίπτοντος ηλεκτρονίου καθώς το ακίνητο δεν έχει ενέργεια.

4. Δύο πρωτόνια κινούνται παράλληλα μεταξύ τους σε απόσταση  $10^{-12} \text{ m}$ . Ποια είναι η συνολική δύναμη μεταξύ των πρωτονίων αν η ταχύτητά τους είναι (α') 0.1c (β') 0.7c (γ') 1c. (Η ταχύτητα του φωτός είναι  $c = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ .)

**ΛΥΣΗ**

Παρατηρήστε ότι στο αδρανειακό σύστημα αναφοράς που κινείται με την ίδια σταθερή ταχύτητα με τα φορτία, υπάρχει μόνο ηλεκτρική δύναμη και όχι μαγνητική (δεν υπάρχει κίνηση φορτίων). Στο σύστημα που βλέπει τα φορτία να κινούνται, εμφανίζεται και ηλεκτρική και μαγνητική δύναμη. Επομένως, υπάρχει μία δύναμη, η ηλεκτρομαγνητική, που ανάλογα με την κίνηση εμφανίζεται ως μόνο ηλεκτρική ή ως ηλεκτρική και μαγνητική.

Μεταξύ των κινούμενων φορτίων ασκείται ηλεκτρική δύναμη,  $\vec{F}_E = q\vec{E}$ , και μαγνητική δύναμη,  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Τα  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  είναι αυτά που παράγονται από το ένα φορτίο και  $q$  είναι το ηλεκτρικό φορτίο του άλλου. Για τον σωστό υπολογισμό τους πρέπει να λάβουμε υπόψη τη θεωρία της σχετικότητας. Ας το δούμε πρώτα κλασικά.

**Κλασική φυσική** Το ηλεκτρικό πεδίο που παράγει το κινούμενο φορτίο δίνεται από τον τύπο

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r},$$

(ο οποίος όμως ισχύει για ακίνητο φορτίο).

Ένα ηλεκτρικό φορτίο  $q$ , κινούμενο με ταχύτητα  $\vec{v}$ , παράγει μαγνητικό πεδίο. Η ποσότητα  $I d\vec{s}$  στο νόμο Biot-Savart μπορεί να γραφεί (για  $v \ll c$ ):

$$I d\vec{s} = \frac{q}{dt} d\vec{s} = q \frac{d\vec{s}}{dt} = q\vec{v}.$$

Επομένως, ο νόμος Biot-Savart για αργά κινούμενο φορτίο γίνεται

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 q}{4\pi} \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Αλλά

$$\mu_0 \epsilon_0 = \frac{1}{c^2}.$$

Επομένως,

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{v} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E}.$$

Η συνολική δύναμη είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_E + \vec{F}_B = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q^2}{r^2} \hat{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0 c^2} \frac{q^2}{r^2} \vec{v} \times (\vec{v} \times \hat{r}).$$

Ισχύει ότι  $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$ . Επομένως

$$\vec{F} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \left( \hat{r} + \left( \frac{(\vec{v} \cdot \hat{r})\vec{v}}{c^2} - \frac{v^2}{c^2} \hat{r} \right) \right).$$



Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η ταχύτητα είναι κάθετη στο διάνυσμα  $\vec{r}$  που συνδέει τα δύο φορτία. Επομένως,  $\vec{v} \cdot \hat{r} = 0$  και η συνολική δύναμη είναι

$$\vec{F} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Με αντικατάσταση, (α') όταν  $v = 0.1c$ ,  $F \approx 228 \mu\text{N}$ . (β') όταν  $v = 0.7c$ ,  $F \approx 118 \mu\text{N}$ . (γ') όταν  $v = c$ ,  $F = 0 \text{ N}$ .

**Θεωρία σχετικότητας** Αν στο σύστημα αναφοράς που κινείται με τα φορτία υπάρχει ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}$  και μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  τότε στο σύστημα αναφοράς που κινείται με ταχύτητα  $-\vec{v}$  ως προς τα φορτία εμφανίζεται ηλεκτρικό πεδίο  $\vec{E}'$  και μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}'$  που δίνονται από τις σχέσεις (εξίσωση Joules–Bernoulli)

$$\begin{aligned}\vec{E}' &= \gamma(\vec{E} - \vec{v} \times \vec{B}) - (\gamma - 1)(\vec{E} \cdot \hat{v})\hat{v}, \\ \vec{B}' &= \gamma\left(\vec{B} + \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}\right) - (\gamma - 1)(\vec{B} \cdot \hat{v})\hat{v},\end{aligned}$$

όπου

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

ο παράγοντας Lorentz.

Καθώς στο σύστημα που τα φορτία είναι ακίνητα

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{r}, \quad \vec{B} = 0,$$

και το  $\hat{r}$  είναι κάθετο στη φορά της κίνησης (ταχύτητα), έχουμε

$$\vec{E}' = \gamma \vec{E}, \quad \vec{B}' = \gamma \frac{\vec{v} \times \vec{E}}{c^2}.$$

Η συνολική δύναμη στο κινούμενο σύστημα είναι

$$\vec{F}' = q\vec{E}' + q\vec{v} \times \vec{B}' = q\gamma\vec{E} + q\frac{\gamma}{c^2}\vec{v} \times (\vec{v} \times \vec{E}) = \gamma\vec{F}.$$

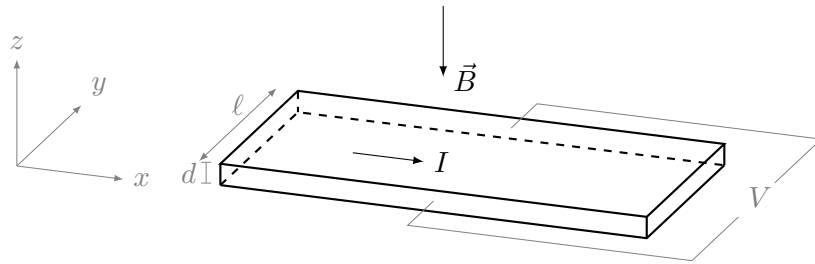
Επομένως, για το συγκεκριμένο πρόβλημα προκύπτει ότι

$$\vec{F}' = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \hat{r}.$$

Με αντικατάσταση, (α') όταν  $v = 0.1c$ ,  $F' \approx 230 \mu\text{N}$ . (β') όταν  $v = 0.7c$ ,  $F' \approx 165 \mu\text{N}$ . (γ') όταν  $v = c$ ,  $F' = 0 \text{ N}$ .

## 5. Φαινόμενο Hall

Λωρίδα χαλκού με πάχος  $d = 2\text{ mm}$  και πλάτος  $\ell = 1.5\text{ cm}$  τοποθετείται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B = 0.4\text{ T}$  (Σχήμα 9.11). Ρεύμα  $I = 75\text{ A}$  περνά μέσα από τη λωρίδα προς την κατεύθυνση  $+x$ . Αναπτύσσεται διαφορά δυναμικού στα δύο άκρα με τελική τιμή  $V = 0.81\text{ }\mu\text{V}$ . Ποια είναι η συγκέντρωση των ηλεκτρονίων στον χαλκό;



Σχήμα 9.11: Άσκηση 5

## ΛΥΣΗ

Ορίζω καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων με άξονα  $x$  στην κατεύθυνση του ρεύματος, άξονα  $y$  κάθετο στο ρεύμα και στο μαγνητικό πεδίο και με φορά προς τα «μέσα», και άξονα  $z$  κάθετο στον αγωγό με φορά προς τα επάνω.

Το μαγνητικό πεδίο είναι  $\vec{B} = -B\hat{k}$ . Τα ηλεκτρόνια στον αγωγό κινούνται με ταχύτητα ολίσθησης  $\vec{v}_d = -v_d\hat{i}$ , αντίθετα από τη φορά του ρεύματος. Ασκείται μαγνητική δύναμη στα ηλεκτρόνια  $\vec{F}_B = -e\vec{v}_d \times \vec{B} = ev_d B\hat{j}$ . Αυτή τα συγκεντρώνει σε θετικά  $y$  και μένουν τα αρνητικά  $y$  θετικά φορτισμένα. Δημιουργείται έτσι ένα ηλεκτρικό πεδίο με φορά από τα θετικά προς τα αρνητικά φορτία,  $\vec{E} = E\hat{j}$ , που ενισχύεται συνεχώς. Αυτό ασκεί πάνω στα ελεύθερα ηλεκτρόνια ηλεκτρική δύναμη:  $\vec{F}_E = -e\vec{E} = -eE\hat{j}$ . Σε κατάσταση ηλεκτρικής ισορροπίας το άθροισμα των δυνάμεων είναι  $\vec{F}_B + \vec{F}_E = 0 \Rightarrow ev_d B - eE = 0 \Rightarrow E = v_d B$ . Στην κατάσταση ισορροπίας το ηλεκτρικό πεδίο έχει σταθεροποιηθεί. Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των επιφανειών σε θετικά και αρνητικά  $y$  είναι τότε  $\Delta V = E\ell$ , όπου  $\ell$  το πλάτος του αγωγού. Επομένως

$$v_d = \frac{\Delta V}{\ell B}.$$

Η πυκνότητα ρεύματος είναι  $J = I/A$ , όπου  $A$  το εμβαδόν της διατομής του αγωγού,  $A = \ell d$ .  $d$  είναι το πάχος του αγωγού. Σύμφωνα με το μοντέλο Drude,  $J = nev_d$ . Άρα

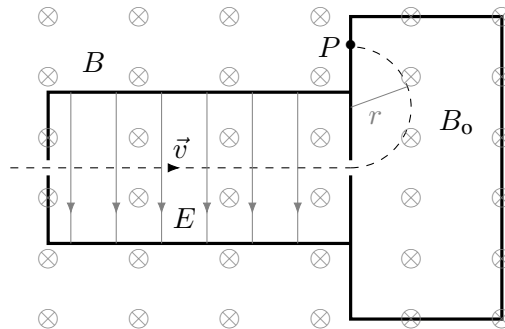
$$n = \frac{I}{Aev_d}.$$

Επομένως

$$n = \frac{I\ell B}{Ae\Delta V} = \frac{IB}{de\Delta V}.$$

Με αντικατάσταση,  $n \approx 1.16 \times 10^{29} \text{ m}^{-3}$ .

6. Στο **φασματογράφο μάζας**, μια δέσμη από ιόντα (κάθε ιόν έχει μάζα  $m$  και φορτίο  $q$ ), διέρχεται πρώτα μέσω σχισμής σε ένα διαχωριστή ταχυτήτων, μέσω πεδίου  $E$  και  $B$ , όπως στο Σχήμα 9.12. Ποια είναι η ταχύτητα των ιόντων που θα διέλθουν μέσω της δεύτερης σχισμής στο ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B_0$ ; Τα ιόντα κατόπιν κινούνται σε ημικυκλική τροχιά ακτίνας  $r$ . Βρείτε μια σχέση που θα επιτρέψει τον υπολογισμό του λόγου  $m/q$  εάν τα πεδία  $E$ ,  $B$ ,  $B_0$  και η ακτίνα  $r$  είναι γνωστά.



Σχήμα 9.12: Άσκηση 6

### ΛΥΣΗ

Έστω ότι η διεύθυνση της κίνησης στο σχήμα είναι ο άξονας  $x$ , με τα ιόντα να κινούνται παράλληλα στο  $\hat{i}$  ( $\vec{v} = v\hat{i}$ ). Το ηλεκτρικό πεδίο ορίζει τον άξονα  $y$  και είναι αντίθετο στο  $\hat{j}$  ( $\vec{E} = -E\hat{j}$ ). Το μαγνητικό πεδίο στο σχήμα είναι  $\vec{B} = -B\hat{k}$ .

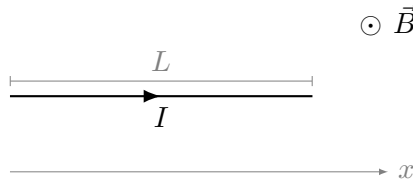
Στο πρώτο τμήμα του φασματογράφου, τα φορτία παραμένουν σε ευθεία αν η συνολική δύναμη που ασκείται πάνω τους είναι  $\vec{0}$ . Ασκούνται δύο δυνάμεις: η ηλεκτρική,  $\vec{F}_E = q\vec{E} = -qE\hat{j}$ , και η μαγνητική,  $\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = qvB\hat{j}$ . Το άθροισμά τους είναι  $0$  όταν  $E = vB$ . Επομένως, περνούν τη σχισμή τα ιόντα που έχουν  $v = E/B$ .

Στο δεύτερο τμήμα του φασματογράφου υπάρχει μόνο μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = -B_0\hat{k}$ . Στα ιόντα ασκείται δύναμη πάντα κάθετη στη ταχύτητα,  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$ . Το μέτρο της ταχύτητας δεν αλλάζει, επομένως το μέτρο της δύναμης είναι πάντα  $F = qvB_0$ . Δρα ως κεντρομόλος, άρα

$$qvB_0 = m \frac{v^2}{r} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{rB_0}{v} \Rightarrow \frac{m}{q} = \frac{rB_0B}{E}.$$

### 9.14.3 Μαγνητική δύναμη σε ρεύμα

- Ένα σύρμα διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I = 2.4 \text{ A}$ . Ένα ευθύγραμμο τμήμα του σύρματος, μήκους  $L = 0.75 \text{ m}$  κατά μήκος του άξονα  $x$ , βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = \hat{k}1.6 \text{ T}$ . Αν το ρεύμα έχει φορά κατά την κατεύθυνση του θετικού άξονα  $x$ , βρείτε τη μαγνητική δύναμη που ασκείται στο ευθύγραμμο τμήμα του σύρματος.



Σχήμα 9.13: Άσκηση 1

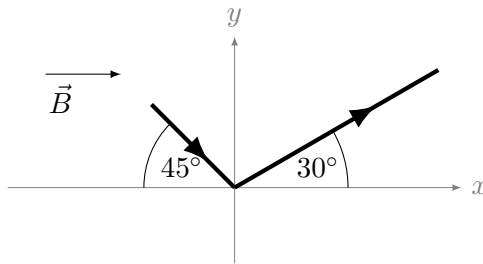
#### ΛΥΣΗ

Ο ευθύγραμμος αγωγός έχει διάνυσμα  $\vec{L} = L\hat{i}$ , καθώς το ρεύμα είναι παράλληλο στο  $\hat{i}$ . Ο αγωγός βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και ασκείται πάνω του δύναμη

$$\vec{F}_B = I\vec{L} \times \vec{B} = ILB\hat{i} \times \hat{k} = -ILB\hat{j}.$$

Με αντικατάσταση,  $\vec{F}_B = -\hat{j}2.88 \text{ N}$ .

- Ο αγωγός που φαίνεται στο Σχήμα 9.14 διαρρέεται από ρεύμα  $I = 0.2 \text{ A}$ . Το μικρότερο τμήμα του αγωγού έχει μήκος  $0.8 \text{ m}$  και το μεγαλύτερο  $1.6 \text{ m}$ . Προσδιορίστε το μέτρο και την κατεύθυνση της μαγνητικής δύναμης που ασκείται στον αγωγό, αν υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = \hat{i}1.9 \text{ T}$ .



Σχήμα 9.14: Άσκηση 2

#### ΛΥΣΗ

Η συνολική δύναμη του μαγνητικού πεδίου στον αγωγό είναι το διανυσματικό άθροισμα των δυνάμεων στα δύο τμήματα.

Γνωρίζουμε ότι σε ευθύγραμμο αγωγό μήκους  $L$ , με κατεύθυνση  $\hat{L}$ , που διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I$ , σε ομογενές πεδίο  $\vec{B}$ , ασκείται μαγνητική δύναμη που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}.$$

Για το πρώτο, το αριστερό, τμήμα του αγωγού, το διάνυσμα  $\vec{L}_1$  έχει μήκος  $L_1$  (εδώ 0.8 m), έχει κατεύθυνση ίδια με το ρεύμα, δηλαδή προς το σημείο (0, 0) (το σημείο της κάμψης). Η γωνία που σχηματίζει με το  $\vec{B}$  είναι  $\theta_1$  (εδώ  $45^\circ$ ). Το  $\vec{L}_1 \times \vec{B}$  είναι παράλληλο στο  $\hat{k}$ . Άρα

$$\vec{F}_1 = IL_1 B \sin \theta_1 \hat{k}.$$

Για το δεύτερο, το δεξί, τμήμα του αγωγού, το διάνυσμα  $\vec{L}_2$  έχει μήκος  $L_2$  (εδώ 1.6 m), έχει κατεύθυνση ίδια με το ρεύμα, δηλαδή απομακρύνεται από το σημείο (0, 0). Η γωνία που σχηματίζει με το  $\vec{B}$  είναι  $\theta_2$  (εδώ  $30^\circ$ ). Το  $\vec{L}_2 \times \vec{B}$  είναι αντιπαράλληλο στο  $\hat{k}$ . Άρα

$$\vec{F}_2 = -IL_2 B \sin \theta_2 \hat{k}.$$

Συνολικά

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = \hat{k}IB(L_1 \sin \theta_1 - L_2 \sin \theta_2).$$

Με αντικατάσταση,  $\vec{F} = -\hat{k} 0.089 \text{ N}$ .

3. Ρεύμα  $I = 15 \text{ A}$  έχει φορά κατά μήκος του θετικού άξονα  $x$  σε ένα σύρμα κάθετο σε μαγνητικό πεδίο. Στο ρεύμα ασκείται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο ίση με  $0.63 \text{ N/m}$  ανά μονάδα μήκους, στην κατεύθυνση του αρνητικού άξονα  $y$ . Υπολογίστε το μέτρο και την κατεύθυνση του μαγνητικού πεδίου στην περιοχή την οποία διαρρέει το ρεύμα.

### ΛΥΣΗ

Έχουμε από την εκφώνηση  $\vec{F}/L = -\hat{y}0.63 \text{ N/m}$ . Επίσης,  $B_x = 0$ , αφού το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο σύρμα (που είναι παράλληλο στον άξονα  $x$ ). Γνωρίζουμε ότι η δύναμη σε ευθύγραμμο ρευματοφόρο αγωγό μήκους  $L$  από ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} \Rightarrow \frac{1}{L}\vec{F} = I\hat{L} \times \vec{B} = I\hat{i} \times \vec{B} = I(B_y\hat{k} - B_z\hat{j}).$$

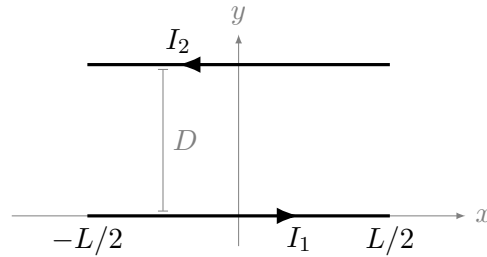
Επομένως,

$$IB_z = 0.63 \text{ T} \cdot \text{A} \Rightarrow B_z = 0.042 \text{ T}.$$

$$IB_y = 0 \Rightarrow B_y = 0.$$

Άρα  $\vec{B} = \hat{k}0.042 \text{ T}$ .

4. Δύο παράλληλοι αγωγοί μήκους  $L = 0.5 \text{ m}$  ο καθένας, διαρρέονται από αντίρροπα ρεύματα μέτρου  $10 \text{ A}$ . Πόσο πρέπει να απέχουν μεταξύ τους οι αγωγοί αν πρέπει να απωθούνται με δύναμη  $F = 1 \text{ N}$ ;



Σχήμα 9.15: Άσκηση 4

**ΛΥΣΗ**

(χωρίς υποθέσεις)

Θεωρούμε ότι οι παράλληλοι αγωγοί είναι οριζόντιοι, απέχουν απόσταση  $D$  και ο αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα με κατεύθυνση προς τα δεξιά ορίζει τον άξονα  $x$ . Ο αγωγός βρίσκεται μεταξύ των σημείων  $x = -L/2$  και  $x = L/2$ . Το επίπεδο των αγωγών είναι το επίπεδο  $x - y$ . Ο δεύτερος αγωγός είναι σε απόσταση  $D$ , μεταξύ των σημείων  $(-L/2, D)$ ,  $(L/2, D)$ .

Ο πρώτος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα  $I_1$  στη φορά του  $\hat{i}$  και ο δεύτερος από ρεύμα  $I_2$  με αντίθετη φορά.

Σύμφωνα με το νόμο Biot-Savart, ένα στοιχειώδες τμήμα του πρώτου ρευματοφόρου αγωγού παράγει μαγνητικό πεδίο σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του δεύτερου αγωγού.

Το στοιχειώδες μήκος του πρώτου αγωγού στη φορά του ρεύματος είναι  $d\vec{s}_1 = dx_1 \hat{i}$ . Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από το στοιχειώδες τμήμα στη θέση  $(x_1, 0)$  ως το  $(x_2, D)$  είναι  $\vec{r} = (x_2 - x_1) \hat{i} + D \hat{j}$ . Έχει μέτρο

$$r = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + D^2}$$

και το μοναδιαίο διάνυσμα είναι

$$\hat{r} = \frac{(x_2 - x_1) \hat{i} + D \hat{j}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + D^2}}.$$

Επομένως

$$d\vec{s}_1 \times \hat{r} = \frac{D dx_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + D^2}} \hat{k}.$$

Το μαγνητικό πεδίο από το στοιχειώδες τμήμα του πρώτου αγωγού είναι

$$d\vec{B}_1 = \frac{I_1 \mu_0}{4\pi} \frac{d\vec{s}_1 \times \hat{r}}{r^2} = \frac{DI_1 \mu_0}{4\pi} \frac{dx_1}{((x_2 - x_1)^2 + D^2)^{3/2}} \hat{k}.$$

Το συνολικό πεδίο στο σημείο  $(x_2, D)$  είναι

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \int d\vec{B}_1 \\ &= \hat{k} \int_{-L/2}^{L/2} \frac{DI_1\mu_0}{4\pi} \frac{dx_1}{((x_2 - x_1)^2 + D^2)^{3/2}} = \hat{k} \frac{DI_1\mu_0}{4\pi} \int_{-L/2-x_2}^{L/2-x_2} \frac{dw}{(w^2 + D^2)^{3/2}} \\ &= \hat{k} \frac{I_1\mu_0}{4\pi D} \left( \frac{L/2 - x_2}{\sqrt{D^2 + (L/2 - x_2)^2}} + \frac{L/2 + x_2}{\sqrt{D^2 + (L/2 + x_2)^2}} \right) .\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο Παράρτημα Α'.

Αυτό το μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη σε κάθε στοιχειώδες τμήμα του δευτέρου ρευματοφόρου αγωγού:

$$d\vec{F} = I_2 d\vec{s}_2 \times \vec{B}_1 .$$

Ισχύει ότι  $d\vec{s}_2 = -dx_2 \hat{i}$ . Καθώς  $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$  έχουμε

$$d\vec{F} = \hat{j} \frac{I_1 I_2 \mu_0}{4\pi D} \left( \frac{L/2 - x_2}{\sqrt{D^2 + (L/2 - x_2)^2}} + \frac{L/2 + x_2}{\sqrt{D^2 + (L/2 + x_2)^2}} \right) dx_2 .$$

Η συνολική δύναμη σε όλα τα στοιχειώδη τμήματα του δευτέρου αγωγού είναι

$$\begin{aligned}\vec{F} &= \int d\vec{F} = \hat{j} \frac{I_1 I_2 \mu_0}{4\pi D} \int_{-L/2}^{+L/2} dx_2 \left( \frac{L/2 - x_2}{\sqrt{D^2 + (L/2 - x_2)^2}} + \frac{L/2 + x_2}{\sqrt{D^2 + (L/2 + x_2)^2}} \right) \\ &= \hat{j} \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi D} \left( \sqrt{L^2 + D^2} - D \right) .\end{aligned}$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται στο Παράρτημα Α'.

Για να έχει μέτρο  $F$  πρέπει

$$F = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi D} \left( \sqrt{L^2 + D^2} - D \right) = \frac{I_1 I_2 \mu_0}{2\pi} \left( \sqrt{(L/D)^2 + 1} - 1 \right) .$$

Επομένως

$$D = \frac{L}{\sqrt{\left( \frac{2\pi F}{I_1 I_2 \mu_0} + 1 \right)^2 - 1}} .$$

Με αντικατάσταση των  $L = 0.5 \text{ m}$ ,  $I_1 = I_2 = 10 \text{ A}$ ,  $F = 1 \text{ N}$  προκύπτει

$$D = \frac{10^{-5}}{\sqrt{1 + 4 \cdot 10^{-6}}} \approx 10^{-5} \text{ m} .$$

Γενικότερα, αν

$$\frac{2\pi F}{I_1 I_2 \mu_0} \approx 10^7 \frac{F}{2I_1 I_2} \gg 1$$

ισχύει

$$D \approx \frac{I_1 I_2 \mu_0 L}{2\pi F} .$$

**ΛΥΣΗ**

(αν υποθέσουμε ότι  $D \ll L$ )

Θεωρούμε ότι οι παράλληλοι αγωγοί είναι οριζόντιοι, απέχουν απόσταση  $D$ , και ο αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα με κατεύθυνση προς τα δεξιά (ο «πρώτος» αγωγός) ορίζει τον άξονα  $x$ . Το επίπεδο των αγωγών είναι το επίπεδο  $x - y$ . Ο δεύτερος αγωγός είναι στα θετικά  $y$ .

Ο πρώτος αγωγός διαρρέεται από ρεύμα  $I_1$  στη φορά του  $\hat{i}$  και ο δεύτερος από ρεύμα  $I_2$  με αντίθετη φορά.

Θεωρούμε ακόμα ότι η απόσταση  $D$  είναι πολύ μικρότερη από  $L$  οπότε το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο πρώτος αγωγός εξαρτάται κατά μέτρο μόνο από την απόσταση από αυτόν, η διεύθυνσή του είναι κυκλική γύρω από τον αγωγό και η φορά προσδιορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο πρώτος αγωγός αν θεωρηθεί ευθύγραμμος με άπειρο μήκος, σε απόσταση  $D$ , είναι

$$B_1 = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi D}.$$

Στη θέση που βρίσκεται ο δεύτερος αγωγός, το μαγνητικό πεδίο του πρώτου είναι παράλληλο στο  $\hat{k}$  (άξονας  $z$ ) και έχει ίδια τιμή σε όλο το μήκος του αγωγού.

Η μαγνητική δύναμη στον ευθύγραμμο, δεύτερο αγωγό από το ομογενές πεδίο  $\vec{B}_1$  είναι

$$\vec{F} = I_2 \vec{L}_2 \times \vec{B}_1,$$

όπου  $\vec{L}_2 = -L \hat{i}$ .

Καθώς  $\hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$  έχουμε

$$\vec{F} = \hat{j} \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi D}.$$

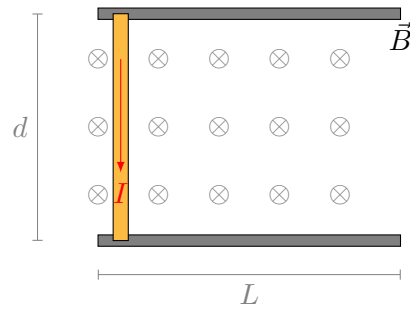
Για να έχει συγκεκριμένο μέτρο  $F$  πρέπει

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi D} \Rightarrow D = \frac{\mu_0 I_1 I_2 L}{2\pi F}.$$

Με αντικατάσταση προκύπτει  $D = 10^{-5} \text{ m}$ .

5. Επάνω σε δύο παράλληλους μεταλλικούς οδηγούς που απέχουν  $d = 12 \text{ cm}$  ο ένας από τον άλλον και έχουν μήκος  $L = 45 \text{ cm}$ , βρίσκεται ακίνητη μια κυλινδρική ράβδος μάζας  $m = 0.72 \text{ kg}$  και ακτίνας  $R = 6 \text{ cm}$  (Σχήμα 9.16). Η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα  $I = 48 \text{ A}$  με τη φορά που φαίνεται στην εικόνα και μπορεί να κυλά επάνω στους οδηγούς χωρίς να ολισθαίνει. Κάθετα στη ράβδο και τους οδηγούς υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B = 0.24 \text{ T}$ . Αν η ράβδος ξεκινά από κατάσταση ηρεμίας, πόσο θα είναι το μέτρο της ταχύτητάς της καθώς θα βγαίνει από τους οδηγούς;





Σχήμα 9.16: Άσκηση 5

**ΛΥΣΗ**

Ορίζω σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων: Έστω ότι ο άξονας  $x$  είναι παράλληλος στους μεταλλικούς οδηγούς με φορά προς τα δεξιά και ο άξονας  $y$  είναι στην αρχική θέση της ράβδου, με φορά προς τα επάνω. Το μαγνητικό πεδίο είναι τότε  $\vec{B} = -B\hat{k}$ .

Το τμήμα της ράβδου που διαρρέεται από το ρεύμα  $I$  έχει μήκος  $d$ , όσο η απόσταση των οδηγών. Το διάνυσμα μήκους της ράβδου είναι  $\vec{L} = -d\hat{j}$ . Στη ράβδο ασκείται δύναμη από το ομογενές μαγνητικό πεδίο:

$$\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B} = IdB\hat{i}.$$

Το έργο αυτής της δύναμης μέχρι να φύγει η ράβδος από τους οδηγούς είναι  $W = \vec{F} \cdot \vec{L} = FL$ . Αυτό θα γίνει κινητική ενέργεια περιστροφικής και μεταφορικής κίνησης:

$$K = W \Rightarrow \frac{1}{2}I_{\text{cm}}\omega^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 = FL.$$

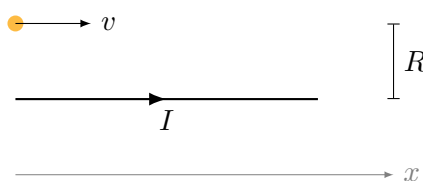
Η ροπή αδράνειας της ράβδου γύρω από τον άξονά της είναι  $I_{\text{cm}} = mR^2/2$ . Καθώς στην κύλιση χωρίς ολίσθηση έχουμε  $v_{\text{cm}} = \omega R$  προκύπτει ότι

$$\frac{mR^2}{4}(v_{\text{cm}}/R)^2 + \frac{1}{2}mv_{\text{cm}}^2 = FL \Rightarrow \frac{3}{4}mv_{\text{cm}}^2 = FL \Rightarrow v_{\text{cm}} = \sqrt{\frac{4FL}{3m}} = \sqrt{\frac{4IdLB}{3m}}.$$

Με αντικατάσταση,  $v_{\text{cm}} \approx 1.07 \text{ m/s}$ .

**9.14.4 Νόμος Ampère**

1. Φορτίο  $q$  κινείται με ταχύτητα  $\vec{v}$  παράλληλα προς ρευματοφόρο αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Η κατεύθυνση του φορτίου και του ρεύματος είναι παράλληλη στον άξονα  $x$ . Η απόσταση μεταξύ φορτίου και αγωγού είναι  $R$ . Να βρεθεί η δύναμη που ασκείται στο φορτίο (ο αγωγός είναι ηλεκτρικά ουδέτερος).



Σχήμα 9.17: Άσκηση 1

**ΛΥΣΗ**

Το ρεύμα στον αγωγό παράγει σε κάθε σημείο μαγνητικό πεδίο που υπολογίζεται

**με τον τύπο Biot-Savart:** Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος, η καταλληλότερη περιγραφή του γίνεται σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(\rho, \phi, z)$  με άξονα  $z$  τον ευθύγραμμο αγωγό και με γωνία  $\phi = 0$  για το επίπεδο που ορίζεται από τον αγωγό και το σημείο. Η φορά του ρεύματος προσδιορίζει τα θετικά  $z$ . Το στοιχειώδες τμήμα του αγωγού είναι το  $d\vec{s} = dz\hat{k}$ . Έστω ότι είναι στη θέση  $(0, 0, z)$ . Το διάνυσμα από αυτή τη θέση ως ένα σημείο  $(R, 0, \bar{z})$  είναι  $\vec{r} = (R, 0, \bar{z} - z)$  με μέτρο

$$r = \sqrt{R^2 + (\bar{z} - z)^2}.$$

Το μοναδιαίο είναι  $\hat{r} = \vec{r}/r$ .

Στο σημείο  $(R, 0, \bar{z})$  παράγεται στοιχειώδες μαγνητικό πεδίο

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \vec{r}}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{R dz}{r^3} \hat{\phi}.$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο από όλα τα τμήματα του αγωγού είναι

$$\vec{B} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{r^3} = \hat{\phi} \frac{\mu_0 I R}{4\pi} \frac{2}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}.$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(R^2 + (z - \bar{z})^2)^{3/2}}$$

που εμφανίστηκε παραπάνω, υπολογίζεται στο Παράρτημα Α'.

**με το νόμο Ampère:** Λόγω κυλινδρικού σχήματος, θα διευκολυνθούν οι υπολογισμοί αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \phi, z)$ , με άξονα  $z$  τον άξονα του καλωδίου και αρχή οποιοδήποτε σημείο του άξονα. Καθώς η κατανομή του ρεύματος είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή γύρω από τον  $z$ , το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τη συντεταγμένη  $\phi$ . Είναι επίσης αναλλοίωτη σε μετατόπιση παράλληλα στον άξονα, άρα το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τη συντεταγμένη  $z$ . Συνεπώς  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ .

Το ρεύμα είναι επίσης συμμετρικό σε κατοπτρισμό ως προς οποιοδήποτε επίπεδο που περιέχει τον άξονα  $z$ . Άρα το  $\vec{B}$  είναι κάθετο σε κάθε τέτοιο επίπεδο, δηλαδή έχει συνιστώσα μόνο στο  $\hat{\phi}$ . Το  $\hat{\phi}$  έχει φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού με βάση το ρεύμα που περνά από τον αγωγό. Επομένως  $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ .

Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του χώρου που απέχουν μια απόσταση  $R$  από τον άξονα  $z$  έχουν ίδιο μέτρο μαγνητικού πεδίου. Ορίζω ως βρόχο Ampère ένα κύκλο κάθετο στον αγωγό, με κέντρο σε σημείο του αγωγού και ακτίνα  $R$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης  $C$  είναι  $d\vec{s} = ds\hat{\phi}$ . Το γινόμενο  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  είναι:

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B(R) ds .$$

Από το νόμο Ampère έχουμε

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow \int_0^{2\pi R} B(R) ds = \mu_0 I \Rightarrow B(R) 2\pi R = \mu_0 I .$$

Άρα

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} .$$

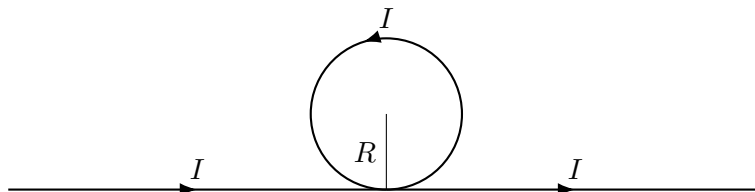
Στο σύστημα κυλινδρικών συντεταγμένων που επιλέξαμε,  $\vec{v} = v\hat{k}$ .

Το μαγνητικό πεδίο ασκεί δύναμη στο κινούμενο φορτίο:

$$\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B} = qv \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{k} \times \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 I q v}{2\pi R} \hat{r} .$$

Η δύναμη είναι ελκτική αν το  $q$  είναι θετικό.

2. Ένα ευθύγραμμο σύρμα πολύ μεγάλου μήκους σχηματίζει σε κάποιο σημείο του ένα κυκλικό βρόχο ακτίνας  $R$  (Σχήμα 9.18). Το σύρμα διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Βρείτε το διάνυσμα του μαγνητικού πεδίου στο κέντρο του βρόχου.



Σχήμα 9.18: Άσκηση 2

**ΛΥΣΗ**

Το μαγνητικό πεδίο σε οποιοδήποτε σημείο του χώρου είναι το διανυσματικό άθροισμα των πεδίων από τον κυκλικό,  $\vec{B}_1$ , και τον ευθύγραμμο αγωγό,  $\vec{B}_2$ .

Σε κυκλικό αγωγό ακτίνας  $R$  το στοιχειώδες τμήμα έχει μήκος  $ds$ . Το διάνυσμα του τμήματος είναι εφαπτόμενο στον κύκλο κατά τη φορά του ρεύματος:  $d\vec{s} = ds\hat{s}$ .

Το διάνυσμα  $\vec{r}$  από ένα στοιχειώδες τμήμα ως το κέντρο έχει μέτρο  $R$ . Είναι κάθετο στο  $\hat{s}$ , με κατεύθυνση προς το κέντρο.

Έστω  $\hat{k} = \hat{s} \times \hat{r}$  το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο με φορά προς τα έξω. Επομένως  $d\vec{s} \times \hat{r} = ds\hat{k}$ .

Το μαγνητικό πεδίο από στοιχειώδες τμήμα  $d\vec{s}$  του κυκλικού αγωγού στο κέντρο του είναι, σύμφωνα με το νόμο Biot-Savart,

$$d\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{R^2} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} ds \hat{k}.$$

Το μαγνητικό πεδίο στο κέντρο από όλα τα τμήματα του κυκλικού αγωγού είναι

$$\vec{B}_1 = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \hat{k} \int_0^{2\pi R} ds = \frac{\mu_0 I}{2R} \hat{k}.$$

Από τη συμμετρία του προβλήματος, το μαγνητικό πεδίο που παράγει ο άπειρος ευθύγραμμος αγωγός θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την απόσταση από τον αγωγό (που τον θεωρώ ως άξονα  $z$ ) και όχι από τις υπόλοιπες κυλινδρικές συντεταγμένες:  $\vec{B}(r, \phi, z) = \vec{B}(r)$ . Η φορά του άξονα  $z$  προσδιορίζεται από τη φορά του ρεύματος.

Ορίζω ως βρόχο Ampère ένα κύκλο κάθετο στον αγωγό, με κέντρο σε σημείο του αγωγού και ακτίνα  $R$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = R d\phi \hat{\phi}$ . Το γινόμενο  $\vec{B}_2 \cdot d\vec{s}$  είναι:

$$\vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = B_{2,\phi}(R) R d\phi,$$

όπου  $B_{2,\phi}$  το μέτρο της συνιστώσας του  $\vec{B}_2$  που είναι εφαπτόμενη στο βρόχο Ampère.

Από το νόμο Ampère έχουμε

$$\oint_C \vec{B}_2 \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow \int_0^{2\pi} B_{2,\phi}(R) R d\phi = \mu_0 I \Rightarrow B_{2,\phi}(R) 2\pi R = \mu_0 I.$$

Άρα

$$B_{2,\phi}(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\phi}.$$

Από τη σχέση Biot–Savart ξέρουμε ότι το μαγνητικό πεδίο άπειρου ευθύγραμμου αγωγού έχει συνιστώσα μόνο στο  $\hat{\phi}$ :  $\vec{B}_2 = B_{2,\phi}(r)\hat{\phi}$ .

Το διάνυσμα  $\hat{\phi}$  είναι κάθετο στο επίπεδο του σχήματος με φορά προς τα έξω, ταυτίζεται δηλαδή με αυτό που ορίσαμε ως  $\hat{k}$  στον κυκλικό αγωγό.

Συνεπώς, το ολικό μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B} = \vec{B}_1 = \vec{B}_2 = \frac{1 + \pi \mu_0 I}{\pi} \frac{\hat{k}}{2R}.$$

3. Ένα ευθύγραμμο ομοαξονικό καλώδιο άπειρου μήκους αποτελείται από μια αγωγική κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα  $a$  και ένα ευθύγραμμο αγωγό στον άξονα του καλωδίου. Οι δύο αγωγοί διαρρέονται από ίσα ρεύματα  $I$ , με αντίθετη φορά. Υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο σε οποιαδήποτε απόσταση  $r$  από τον άξονα του καλωδίου.

### ΛΥΣΗ

Λόγω κυλινδρικού σχήματος, θα διευκολυνθούν οι υπολογισμοί αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \phi, z)$ , με άξονα  $z$  τον άξονα του καλωδίου και αρχή οποιοδήποτε σημείο του άξονα. Καθώς η κατανομή των ρευμάτων είναι αναλλοίωτη σε περιστροφή γύρω από τον  $z$ , το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τη συντεταγμένη  $\phi$ . Είναι επίσης αναλλοίωτη σε μετατόπιση παράλληλα στον άξονα, άρα το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τη συντεταγμένη  $z$ . Συνεπώς  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ .

Η κατανομή των ρευμάτων είναι επίσης συμμετρική σε κατοπτρισμό ως προς οποιοδήποτε επίπεδο που περιέχει τον άξονα  $z$ . Άρα το  $\vec{B}$  είναι κάθετο σε κάθε τέτοιο επίπεδο, δηλαδή έχει συνιστώσα μόνο στο  $\hat{\phi}$ . Το  $\hat{\phi}$  έχει φορά που καθορίζεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού με βάση το ρεύμα που περνά από τον εσωτερικό αγωγό. Επομένως  $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ .

Παρατηρούμε ότι όλα τα σημεία του χώρου που απέχουν μια απόσταση  $R$  από τον άξονα  $z$  έχουν ίδιο μέτρο μαγνητικού πεδίου. Επιλέγω ως βρόχο Ampère ένα κύκλο  $C$  κάθετο στο καλώδιο, με κέντρο στον άξονα  $z$  και ακτίνα  $R$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης  $C$  είναι  $d\vec{s} = ds\hat{\phi}$ . Το γινόμενο  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  είναι:

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B(R) ds.$$

Σύμφωνα με το νόμο Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}}.$$

Το αριστερό μέλος είναι

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi R} B(R) ds = B(R) 2\pi R.$$

Το συνολικό ρεύμα που περικλείεται από το βρόχο Ampère είναι

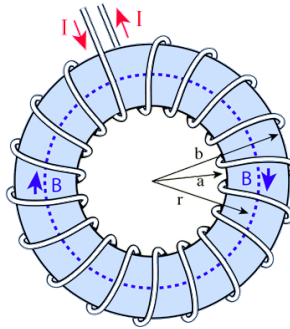
$$I_{\text{total}} = \begin{cases} I, & R < a \\ 0, & R > a \end{cases}.$$

Επομένως,  $B(R) = 0$  αν  $R > a$  και

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$$

αν  $R < a$ .

4. Τα μαγνητικά πηνία στον αντιδραστήρα σύντηξης Tokamak έχουν τη μορφή ενός δακτυλιοειδούς πηνίου που έχει εσωτερική ακτίνα 0.7 m και εξωτερική 1.3 m (Σχήμα 9.19). Στο εσωτερικό του πηνίου βρίσκεται το πλάσμα. Αν το πηνίο έχει 900 σπείρες σύρματος και η κάθε μία διαρρέεται από ρεύμα 14 000 A, βρείτε το μαγνητικό πεδίο κατά μήκος της εσωτερικής και της εξωτερικής ακτίνας του πηνίου.



Σχήμα 9.19: Άσκηση 4

### ΛΥΣΗ

Διευκολύνει τη μαθηματική περιγραφή η χρήση κυλινδρικών συντεταγμένων  $(r, \phi, z)$  με άξονα  $z$  τον άξονα συμμετρίας.

Το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε περιστροφή γύρω από τον  $z$ , άρα το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητο από τη συντεταγμένη  $\phi$ .

Κατοπτρισμός ως προς οποιοδήποτε επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $z$ , αφήνει το σύστημα ίδιο. Επομένως, το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετο σε κάθε τέτοιο επίπεδο, άρα παράλληλο στο  $\hat{\phi}$ .

Το πεδίο στο σχήμα είναι  $\vec{B} = -B(r, z)\hat{\phi}$ .

Έστω κύκλος κάθετος στον άξονα  $z$ , με ακτίνα  $r$  μεταξύ της εσωτερικής και της εξωτερικής ακτίνας και με κέντρο στον άξονα του τόρου. Το επίπεδο στο οποίο βρίσκεται έχει οποιοδήποτε  $z$  αρκεί να βρίσκεται μέσα στον τόρο.

Θα εφαρμόσουμε το νόμο του Ampère για αυτή την καμπύλη. Το  $d\vec{s}$  ενός στοιχειώδους τμήματος είναι  $d\vec{s} = -ds\hat{\phi}$ . Η επιλογή της φοράς διαγραφής είναι τέτοια ώστε το  $d\vec{s}$  να έχει ίδια φορά με το  $\vec{B}$ . Ισοδύναμα, η φορά προκύπτει με τον κανόνα του δεξιού χεριού από το ρεύμα που περικλείεται. Ο νόμος του Ampère δίνει

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}} \Rightarrow \int_0^{2\pi r} B ds = \mu_0 I_{\text{total}} \Rightarrow B 2\pi r = \mu_0 NI \Rightarrow B(r, z) = \frac{\mu_0 NI}{2\pi r}.$$

$N$  είναι το πλήθος των σπειρών και  $I$  το ρεύμα σε κάθε μία. Παρατηρούμε ότι δεν εμφανίζεται στον τύπο του μέτρου του  $\vec{B}$  το  $z$ .

Με αντικατάσταση,  $B = 3.6 \text{ T}$  για την εσωτερική ακτίνα και  $B \approx 1.94 \text{ T}$  για την εξωτερική.

5. Η πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}$  μέσα σε ένα συμπαγή κυλινδρικό αγωγό μεγάλου μήκους, ακτίνας  $\alpha = 3.1 \text{ mm}$ , ακολουθεί την κατεύθυνση του κεντρικού άξονα και το μέτρο της μεταβάλλεται γραμμικά με την ακτινική απόσταση  $r$  από τον άξονα σύμφωνα με την  $J = J_0 r / \alpha$ , όπου  $J_0 = 310 \text{ A/m}^2$ . Να βρείτε το μέτρο του μαγνητικού πεδίου που παράγει η  $\vec{J}$  σε (α')  $r = 0$ , (β')  $r = \alpha/2$  και (γ')  $r = \alpha$ .

#### ΛΥΣΗ

Η κατανομή του ρεύματος παρουσιάζει κυλινδρική συμμετρία. Διευκολύνει τους υπολογισμούς το κυλινδρικό σύστημα συντεταγμένων, με άξονα  $z$  τον άξονα του κυλίνδρου.

Το σύστημα έχει συμμετρία μετατόπισης παράλληλα στον άξονά του και περιστροφής γύρω από αυτόν. Δεν πρέπει επομένως να εξαρτάται το μαγνητικό πεδίο από τις κυλινδρικές συντεταγμένες  $\phi, z$ . Έτσι  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ .

Το σύστημα είναι συμμετρικό στον κατοπτρισμό ως προς οποιοδήποτε επίπεδο που περιέχει τον άξονα συμμετρίας. Σύμφωνα με τον κανόνα του κατοπτρισμού, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε κάθε τέτοιο επίπεδο. Επομένως, έχει μόνο συνιστώσα στο  $\hat{\phi}$ . Έτσι  $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ .

Επιλέγω ένα κύκλο με ακτίνα  $R$  και κέντρο οποιοδήποτε σημείο του άξονα του κυλίνδρου. Εφαρμόζω σε αυτή την καμπύλη ( $C$ ) το νόμο Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I(R).$$

Το ρεύμα που συμβολίζω με  $I(R)$  είναι αυτό που περνά από το εσωτερικό του κύκλου. Αν  $R \leq \alpha$ ,

$$I(R) = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

όπου  $S$  η κυκλική επιφάνεια (η οποία έχει σύνορο την καμπύλη  $C$ ). Αν  $R > \alpha$ ,

$$I(R) = \int_{S'} \vec{J} \cdot d\vec{A},$$

όπου  $S'$  η κυκλική διατομή του αγωγού (καθώς έξω από τον αγωγό,  $\vec{J} = \vec{0}$ ).

Στο αριστερό μέλος του νόμου Ampère, το διάνυσμα  $d\vec{s}$  ενός στοιχειώδους τμήματος της καμπύλης  $C$  έχει μέτρο  $ds$  και φορά το  $\hat{\phi}$ . Συνεπώς  $d\vec{s} = ds\hat{\phi}$  και

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_0^{2\pi R} B(R) ds = B(R)2\pi R.$$

Στο δεξί μέλος του νόμου Ampère, κάθε στοιχειώδες κομμάτι της  $S$  έχει  $d\vec{A} = dA\hat{J}$  καθώς το  $\hat{J}$  ορίζει τον άξονα  $z$  και το  $d\vec{A}$  είναι παράλληλο σε αυτόν. Το στοιχειώδες εμβαδόν σε πολικές συντεταγμένες είναι  $dA = r dr d\phi$ . Επομένως

$$I(R) = \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = \int_S J dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R J(r)r dr d\phi = 2\pi J_0 \int_0^R \frac{r^2}{\alpha} dr = \frac{2\pi J_0 R^3}{3\alpha}.$$

Επομένως έχουμε

$$B(R)2\pi R = \mu_0 \frac{2\pi J_0 R^3}{3\alpha} \Rightarrow B(R) = \mu_0 \frac{J_0 R^2}{3\alpha}.$$

Με αντικατάσταση,  $B(0) = 0$ ,  $B(\alpha/2) = \mu_0 J_0 \alpha / 12 \approx 100 \text{ nT}$ ,  $B(\alpha) = \mu_0 J_0 \alpha / 3 \approx 403 \text{ nT}$ .

6. Ένας βρόχος που αποτελείται από μια τετράγωνη σπείρα με πλευρά  $2 \text{ cm}$ , διαρρέεται από ρεύμα  $0.2 \text{ A}$  με δεξιόστροφη φορά. Ο βρόχος βρίσκεται στο εσωτερικό ενός σωληνοειδούς, με το επίπεδο του βρόχου κάθετο στο μαγνητικό πεδίο του σωληνοειδούς. Το σωληνοειδές έχει  $30$  σπείρες/cm και διαρρέεται από ρεύμα  $15 \text{ A}$ , επίσης με δεξιόστροφη φορά. Βρείτε

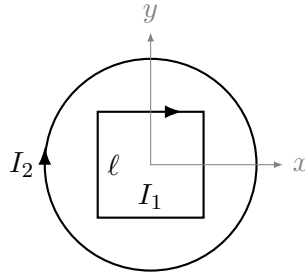
- τη δύναμη που δέχεται κάθε πλευρά του βρόχου και
- τη ροπή που ασκείται στον βρόχο.

### ΛΥΣΗ

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι ομογενές, με κατεύθυνση τον άξονα του πηνίου και μέτρο  $B = \mu_0 n I_2$ , όπου  $n$  το πλήθος των σπειρών ανά μονάδα μήκους του σωληνοειδούς. Με βάση τη φορά του  $I_2$  το μαγνητικό πεδίο είναι  $\vec{B} = -B\hat{k}$ .

Γνωρίζουμε ότι η δύναμη που ασκείται από ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B$  σε ευθύγραμμο τμήμα αγωγού  $\vec{L}$  που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  είναι  $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ .





Σχήμα 9.20: Άσκηση 6

Για το αριστερό, επάνω, δεξιό, κάτω τμήμα του τετραγώνου που διαρρέεται από ρεύμα  $I_1$  τα διανύσματα  $\vec{L}$  είναι  $\vec{L} = \ell\hat{j}$ ,  $\vec{L} = \ell\hat{i}$ ,  $\vec{L} = -\ell\hat{j}$ ,  $\vec{L} = -\ell\hat{i}$  αντίστοιχα. Οι δυνάμεις σε αυτά είναι αντίστοιχα

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -I_1\ell B\hat{j} \times \hat{k} = -I_1\ell B\hat{i}, \\ \vec{F} &= -I_1\ell B\hat{i} \times \hat{k} = I_1\ell B\hat{j}, \\ \vec{F} &= I_1\ell B\hat{j} \times \hat{k} = I_1\ell B\hat{i}, \\ \vec{F} &= I_1\ell B\hat{i} \times \hat{k} = -I_1\ell B\hat{j}.\end{aligned}$$

Όλες οι δυνάμεις έχουν ίδιο μέτρο (αναμενόμενο από τη συμμετρία του προβλήματος):  $F = I_1\ell B = \mu_0 n\ell I_1 I_2$ . Με αντικατάσταση,  $F \approx 226 \mu\text{N}$ .

Ο τετράγωνος βρόχος έχει μαγνητική ροπή με μέτρο  $m = I_1 A = I_1 \ell^2$  και κατεύθυνση το  $-\hat{k}$  καθώς το κάθετο διάνυσμα επιφάνειας είναι στον άξονα  $z$ . Η ροπή στρέψης σε αυτή τη μαγνητική ροπή είναι

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = \vec{0},$$

καθώς  $\vec{m}$  και  $\vec{B}$  είναι παράλληλα.

7. Δύο ευθύγραμμα αγωγία τμήματα μεγάλου μήκους είναι παράλληλα και απέχουν μεταξύ τους 8 cm. Πρόκειται να μεταφέρουν ίσα ρεύματα, έτσι ώστε το μαγνητικό πεδίο σε ένα σημείο στο μέσο της μεταξύ τους απόστασης να έχει μέτρο  $300 \mu\text{T}$ . (α') Τα ρεύματα πρέπει να είναι της ίδιας ή αντίθετης κατεύθυνσης; (β') Πόσο ρεύμα απαιτείται;

Δίνεται  $\mu_0 = 4\pi 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ .

### ΛΥΣΗ

Λόγω της συμμετρίας που υπάρχει, το μαγνητικό πεδίο που παράγει ένας άπειρος ευθύγραμμος αγωγός θα πρέπει να εξαρτάται μόνο από την απόσταση από αυτόν και όχι από τις υπόλοιπες κυλινδρικές συντεταγμένες:  $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(r)$ .

Ορίζω ως βρόχο Ampère ένα κύκλο κάθετο στον αγωγό, με κέντρο σε σημείο του αγωγού και ακτίνα  $R$ . Το στοιχειώδες διάνυσμα της καμπύλης είναι  $d\vec{s} = R d\theta \hat{\theta}$ . Το γινόμενο  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  είναι:

$$\vec{B} \cdot d\vec{s} = B_{\theta}(R) R d\theta .$$

Από το νόμο Ampère έχουμε

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow \int_0^{2\pi} B_{\theta}(R) R d\theta = \mu_0 I \Rightarrow B_{\theta}(R) 2\pi R = \mu_0 I .$$

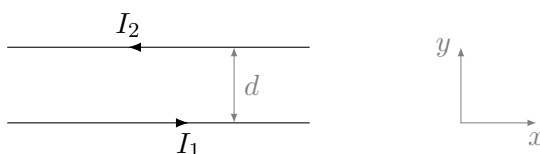
Άρα

$$B_{\theta}(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\theta} .$$

Από τον τύπο Biot-Savart ξέρουμε ότι το μαγνητικό πεδίο έχει συνιστώσα μόνο στο  $\hat{\theta}$ . Επομένως,

$$\vec{B} = B_{\theta}(r) \hat{\theta} = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} \hat{\theta} . \quad (9.6)$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα: Θεωρούμε ότι οι δύο παράλληλοι αγωγοί ορίζουν το επίπεδο  $x - y$ . Ο ένας αγωγός ορίζει τον άξονα  $x$  και η κατεύθυνση του ρεύματος  $I$  σε αυτόν ορίζει τη θετική φορά του άξονα. Ο δεύτερος αγωγός βρίσκεται σε απόσταση  $d$  από τον πρώτο και διαρέεται από ρεύμα  $I$ . Η κατεύθυνση από τον πρώτο αγωγό προς το δεύτερο ορίζει τη θετική φορά του άξονα  $y$ .



Σχήμα 9.21: Άσκηση 7

Ας υποθέσουμε ότι τα ρεύματα στους δύο αγωγούς έχουν ίδια φορά. Τα μαγνητικά πεδία που παράγουν οι δύο αγωγοί σε ένα σημείο με απόσταση  $d/2$  από τον καθένα είναι σύμφωνα με την εξίσωση 9.6

$$\begin{aligned} \vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(d/2)} \hat{k} , \\ \vec{B}_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(d/2)} (-\hat{k}) . \end{aligned}$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \vec{0} .$$

Καταλήξαμε σε άτοπο. Το μαγνητικό πεδίο σύμφωνα με την άσκηση είναι μη μηδενικό.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα ρεύματα στους δύο αγωγούς έχουν αντίθετη φορά. Τα μαγνητικά πεδία που παράγουν οι δύο αγωγοί σε ένα σημείο με απόσταση  $d/2$  από τον καθένα είναι σύμφωνα με την εξίσωση 9.6

$$\begin{aligned}\vec{B}_1 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(d/2)} \hat{k}, \\ \vec{B}_2 &= \frac{\mu_0 I}{2\pi(d/2)} \hat{k}.\end{aligned}$$

Το συνολικό μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \hat{k}.$$

Για το μέτρο του  $\vec{B}$  ισχύει

$$B = \frac{2\mu_0 I}{\pi d} \Rightarrow I = \frac{\pi B d}{2\mu_0}.$$

Με αντικατάσταση,  $I = 30 \text{ A}$ .

8. Ένα δακτυλιοειδές πηνίο με μέση ακτίνα  $20 \text{ cm}$  και  $630$  σπείρες, πληρούται με ρινίσματα χάλυβα, του οποίου η μαγνητική επιδεκτικότητα  $\chi_m$  είναι  $100$ . Αν το ρεύμα στις σπείρες είναι  $3 \text{ A}$ , βρείτε το πεδίο  $B$  (που υποτίθεται ότι είναι ομογενές) στο εσωτερικό του πηνίου.

#### ΛΥΣΗ

Βρήκαμε σε προηγούμενη άσκηση ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό δακτυλιοειδούς πηνίου χωρίς πυρήνα, με  $N$  σπείρες, που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ , σε απόσταση  $r$  από το κέντρο, έχει μέτρο

$$B = \frac{\mu_0 N I}{2\pi r}$$

και διεύθυνση κάθετη στα επίπεδα των σπειρών, δηλαδή, οι μαγνητικές γραμμές είναι κύκλοι.

Καθώς εδώ η μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα είναι  $\mu = \mu_0(1 + \chi_m)$ , το μαγνητικό πεδίο έχει μέτρο

$$B = \frac{\mu_0(1 + \chi_m) N I}{2\pi r}.$$

Αν υποθέσουμε ότι η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα του δακτυλίου δεν διαφέρουν πολύ από τη μέση ακτίνα  $R$ , το πεδίο έχει σταθερό μέτρο στο εσωτερικό:

$$B = \frac{\mu_0(1 + \chi_m) N I}{2\pi R}.$$

Με αντικατάσταση,  $B \approx 191 \text{ mT}$ .

9. Ένα υπεραγωγό σωληνοειδές είναι κατασκευασμένο ώστε να παράγει μαγνητικό πεδίο 10 T.

- Αν το σωληνοειδές έχει 2000 σπείρες/μέτρο, ποιο είναι το απαιτούμενο ρεύμα;
- Ποια δύναμη ανά μονάδα μήκους ασκείται στις σπείρες του πηνίου από το μαγνητικό πεδίο;

### ΛΥΣΗ

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό σωληνοειδούς έχει μέτρο  $B_{\text{in}} = \mu n I$ , όπου  $\mu$  η μαγνητική διαπερατότητα του πυρήνα του (εδώ είναι το κενό, άρα  $\mu_0$ ),  $n$  η πυκνότητα σπειρών (σπείρες ανά μονάδα μήκους) και  $I$  το ρεύμα που τις διαρρέει. Επομένως, το ρεύμα είναι

$$I = \frac{B_{\text{in}}}{\mu_0 n} \approx 3979 \text{ A} .$$

Το μαγνητικό πεδίο πάνω στις σπείρες του σωληνοειδούς παρουσιάζει ασυνέχεια. Εντός είναι  $B_{\text{in}} = \mu_0 n I$ . Εκτός είναι 0. Δεχόμαστε ότι ακριβώς πάνω στις σπείρες είναι ο μέσος όρος:  $B = \mu_0 n I / 2$ .

Η μαγνητική δύναμη που ασκείται σε στοιχειώδες τμήμα μιας ρευματοφόρου σπείρας είναι

$$d\vec{F} = I d\vec{s} \times \vec{B} .$$

Χρησιμοποιώ κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \phi, z)$  με άξονα  $z$  τον άξονα του σωληνοειδούς (δηλαδή το  $\vec{B}$ ). Σε κάποιο σημείο του  $z$  είναι η αρχή των συντεταγμένων. Τότε το διάνυσμα ενός στοιχειώδους τμήματος κάθε σπείρας είναι  $d\vec{s} = R d\phi \hat{\phi}$  και  $\vec{B} = B \hat{z}$ . Επομένως  $d\vec{s} \times \vec{B} = BR d\phi \hat{r}$  και

$$d\vec{F} = \hat{r} B I R d\phi .$$

Η δύναμη απωθεί ακτινικά κάθε στοιχειώδες τμήμα της σπείρας, τόξου  $d\phi$ , με ίδιο μέτρο,  $B I R d\phi$ . Τα αντιδιαμετρικά τμήματα έχουν συνολική δύναμη 0. Επομένως η συνολική δύναμη στη σπείρα είναι 0.

Ένα στοιχειώδες μήκος  $dz$  του σωληνοειδούς έχει  $n dz$  σπείρες. Σε αυτές η στοιχειώδης μαγνητική δύναμη είναι

$$d\vec{F} = \hat{r} B I n dz R d\phi .$$

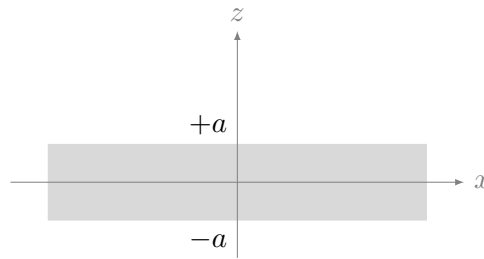
Η δύναμη ανά μονάδα μήκους είναι

$$\frac{d\vec{F}}{dz} = \hat{r} B I n R d\phi .$$

Η ποσότητα  $dA = R d\phi dz$  είναι μια στοιχειώδης επιφάνεια του σωληνοειδούς. Σε αυτή ασκείται (μαγνητική) πίεση

$$P = \frac{dF}{dA} = BnI = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2} = \frac{B_{\text{in}}^2}{2\mu_0}.$$

10. Μια άπειρη πλάκα που έχει πάχος από  $z = -a$  μέχρι  $z = a$ , διαρρέεται από ομογενές ρεύμα χωρικής πυκνότητας  $\vec{J} = J\hat{i}$ . Βρείτε το μαγνητικό πεδίο ως συνάρτηση του  $z$ , στο εσωτερικό και εξωτερικό της πλάκας.



Σχήμα 9.22: Άσκηση 10

## ΛΥΣΗ

### Α' τρόπος

Ο νόμος Biot-Savart για ρεύμα με χωρική πυκνότητα  $\vec{J}$  είναι

$$\vec{B} = \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \hat{r}}{r^2} d\tau.$$

Το  $\vec{r}$  είναι το διάνυσμα από ένα στοιχειώδη όγκο του στερεού σε θέση  $(x', y', z')$  προς το σημείο  $(x, y, z)$  στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το πεδίο:

$$\vec{r} = (x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k}.$$

Το μέτρο του είναι  $r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$  και το μοναδιαίο διάνυσμα είναι  $\hat{r} = \vec{r}/r$ .

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα,  $\vec{J} = J\hat{i}$ . Σε καρτεσιανές συντεταγμένες ο στοιχειώδης όγκος του στερεού στη θέση  $(x', y', z')$  είναι  $d\tau = dx' dy' dz'$  επομένως

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{(J\hat{i}) \times ((x - x')\hat{i} + (y - y')\hat{j} + (z - z')\hat{k})}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dx' dy' dz'.$$

Τα όρια ολοκλήρωσης είναι  $(-\infty, \infty)$  για  $x'$  και  $y'$ , και  $[-a, a]$  για το  $z'$ . Άρα

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(y - y')\hat{k} - (z - z')\hat{j}}{((x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2)^{3/2}} dx' dy' dz'.$$

Ας κάνουμε τις αλλαγές μεταβλητών  $x' - x \rightarrow x'$ ,  $y' - y \rightarrow y'$ ,  $z' - z \rightarrow z'$  ώστε να απλοποιηθεί κάπως! Ο τύπος γίνεται

$$\vec{B}(x, y, z) = \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-a-z}^{a-z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z'\hat{j} - y'\hat{k}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} dx' dy' dz'.$$

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{-y'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} dy'$$

είναι 0 αφού ολοκληρώνουμε αντισυμμετρική συνάρτηση σε συμμετρικό διάστημα. Επομένως

$$\vec{B}(x, y, z) = \hat{j} \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-a-z}^{a-z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{z'}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} dx' dy' dz'.$$

Στο Παράρτημα A' δείχνουμε ότι

$$\int_a^b \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{1}{y^2} \left( \frac{b}{\sqrt{y^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right).$$

Άρα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{3/2}} dx' = \frac{2}{y'^2 + z'^2}.$$

Επομένως,

$$\vec{B}(x, y, z) = \hat{j} \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-a-z}^{a-z} dz' 2z' \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y'^2 + z'^2} dy'.$$

Στο Παράρτημα A' δείχνουμε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{y'^2 + z'^2} dy' = \frac{\pi}{|z'|}.$$

Επομένως

$$\vec{B}(x, y, z) = \hat{j} \frac{\mu_0 J}{4\pi} \int_{-a-z}^{a-z} dz' 2\pi \frac{z'}{|z'|} = \hat{j} \frac{\mu_0 J}{2} \int_{-a-z}^{a-z} dz' \frac{z'}{|z'|}.$$

Ας διακρίνουμε περιπτώσεις:

- αν  $a - z \leq 0 \rightarrow a \leq z$  τότε  $z' \leq 0$  και  $z'/|z'| = -1$ . Το  $\vec{B}$  γίνεται

$$\vec{B}(x, y, z) = -\hat{j} \frac{\mu_0 J}{2} \int_{-a-z}^{a-z} dz' = -\hat{j} \frac{\mu_0 J}{2} (a - z + a + z) = -\hat{j} \mu_0 J a .$$

- αν  $-a - z \geq 0 \rightarrow -a \geq z$  τότε  $z' \geq 0$  και  $z'/|z'| = 1$ . Το  $\vec{B}$  γίνεται

$$\vec{B}(x, y, z) = \hat{j} \frac{\mu_0 J}{2} \int_{-a-z}^{a-z} dz' = \hat{j} \frac{\mu_0 J}{2} (a - z + a + z) = \hat{j} \mu_0 J a .$$

- Αλλιώς, αν δηλαδή  $a - z > 0$  και  $-a - z < 0$  (συνεπώς  $|z| < a$ ), έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{-a-z}^{a-z} dz' \frac{z'}{|z'|} &= \int_0^{a-z} dz' \frac{z'}{|z'|} + \int_{-a-z}^0 dz' \frac{z'}{|z'|} \\ &= \int_0^{a-z} dz' - \int_{-a-z}^0 dz' = (a - z) - (a + z) = -2z . \end{aligned}$$

Το  $\vec{B}$  γίνεται

$$\vec{B}(x, y, z) = -\hat{j} \mu_0 J z .$$

Συνολικά,

$$\vec{B} = \hat{j} \mu_0 J \begin{cases} -a , & z \geq a \\ -z , & |z| \leq a \\ a , & z \leq -a \end{cases}$$

### Β' τρόπος

Η πυκνότητα ρεύματος είναι ομογενής και η πλάκα εκτείνεται στο άπειρο στις δύο διαστάσεις  $x - y$ .

Οποιαδήποτε μετατόπιση της αρχής του συστήματος συντεταγμένων πάνω στο επίπεδο  $x - y$  αφήνει αναλλοίωτο το σύστημα. Το μαγνητικό πεδίο πρέπει να έχει ίδια τιμή ανεξάρτητα από τις συντεταγμένες  $x, y$  του σημείου υπολογισμού. Άρα  $\vec{B} = \vec{B}(z)$ .

Ο κατοπτρισμός της κατανομής ρεύματος ως προς οποιαδήποτε επιφάνεια παράλληλη στο επίπεδο  $x - z$  αφήνει αναλλοίωτο το σύστημα. Σύμφωνα με τον κανόνα κατοπτρισμού, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε κάθε σημείο αυτής. Επομένως, παντού υπάρχει μόνο συνιστώσα  $B_y$  και έτσι  $\vec{B} = B_y(z) \hat{j}$ .

Παρατηρήστε ότι και ο κατοπτρισμός στο επίπεδο  $x - y$  (και μόνο σε αυτό, σε κανένα παράλληλό του) έχει την ιδιότητα να αφήνει αναλλοίωτη την κατανομή ρεύματος. Το μαγνητικό πεδίο στα σημεία του επιπέδου  $x - y$ , δηλαδή σε  $z = 0$ , είναι κάθετο στο επίπεδο  $x - y$ , δηλαδή παράλληλο (ή αντιπαράλληλο) στο  $\hat{k}$ . Καταλήξαμε ότι το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο και στο  $\hat{j}$  και στο  $\hat{k}$ , κάτι που μπορεί να γίνει μόνο αν είναι  $\vec{0}$ . Επομένως,  $\vec{B}(0) = \vec{0}$ .

Το ότι το μαγνητικό πεδίο είναι 0 στα σημεία με  $z = 0$ , μπορούμε να το βρούμε και αλλιώς:

Αν περιστρέψουμε το σύστημα γύρω από το  $\vec{J}$ , δηλαδή από τον άξονα  $x$ , κατά  $180^\circ$ , τότε ένα σημείο στο  $(x, y, z)$  θα μεταφερθεί στη θέση  $(x, -y, -z)$ . Η συνιστώσα του μαγνητικού πεδίου  $B_y$  στο σημείο  $(x, y, z)$ , μετά την περιστροφή θα βρεθεί στο  $(x, -y, -z)$  με ίδια απόλυτη τιμή αλλά αντίθετο πρόσημο. Η κατανομή του ρεύματος όμως είναι ίδια. Το  $-B_y(z)$  πρέπει να είναι ίσο με την τιμή που είχε πριν την περιστροφή η  $B_y(-z)$ . Άρα  $B_y(z) = -B_y(-z)$  και συνεπώς  $B_y(0) = 0$ .

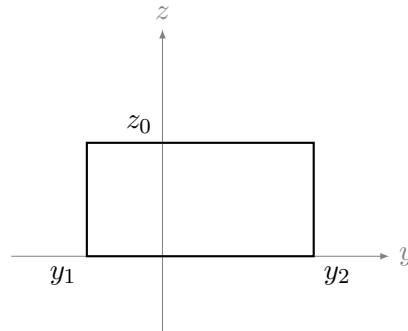
Ας ορίσουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,  $S$ , κάθετο στο ρεύμα, βρίσκεται δηλαδή στο επίπεδο  $y-z$  (Σχήμα 9.23). Η μία πλευρά από τις παράλληλες στον άξονα  $y$ , βρίσκεται στο  $z = 0$ · η άλλη στο  $z_0 > 0$ . Οι πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα  $z$  έχουν  $y = y_1$  και  $y = y_2$ .

Σε αυτό το βρόχο θα εφαρμόσουμε το νόμο Ampère:

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I.$$

Η φορά διαγραφής της καμπύλης  $C$ , σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού, είναι αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού, αφού το ρεύμα εξέρχεται από το βρόχο.

Στις πλευρές που είναι παράλληλες στον άξονα  $z$ , έστω  $C_1$  και  $C_3$ , το  $\vec{B} = B_y \hat{y}$  είναι κάθετο στα στοιχειώδη διανύσματα των καμπυλών. Επομένως τα ολοκληρώματα της ποσότητας  $\vec{B} \cdot d\vec{s}$  στις καμπύλες  $C_1, C_3$  είναι 0.



Σχήμα 9.23: Άσκηση 10

Στις πλευρές  $C_2, C_4$  που είναι παράλληλες στον  $z$  έχουμε  $d\vec{s} = \pm dy \hat{y}$ . Έτσι

$$\int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{B}(z_0) \cdot (-dy \hat{y}) = -B_y(z_0) \int_{y_1}^{y_2} dy = B_y(z_0)(y_1 - y_2),$$



και

$$\int_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{y_1}^{y_2} \vec{B}(0) \cdot (dy\hat{y}) = 0.$$

Επομένως

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \int_{C_1} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{C_2} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{C_3} \vec{B} \cdot d\vec{s} + \int_{C_4} \vec{B} \cdot d\vec{s} = (y_1 - y_2)B_y(z_0).$$

Για το δεξί μέλος του νόμου Ampère έχουμε

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_S \vec{J} \cdot d\vec{A}.$$

Αν  $z_0 \leq a$ , δηλαδή ο βρόχος είναι εξ ολοκλήρου μέσα στον αγωγό,

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = Jz_0(y_2 - y_1).$$

Τότε

$$B_y(z_0) = -\mu_0 J z_0.$$

Αν  $z_0 > a$ ,

$$\int_S \vec{J} \cdot d\vec{A} = Ja(y_2 - y_1).$$

Τότε

$$B_y(z_0) = -\mu_0 Ja.$$

Δείξαμε με τη συμμετρία ότι το  $B_y$  είναι αντισυμμετρική συνάρτηση ( $B_y(z) = -B_y(-z)$ ) οπότε συνολικά

$$\vec{B}(z) = \hat{j}\mu_0 J \begin{cases} -a, & z \geq a \\ -z, & |z| \leq a \\ a, & z \leq -a \end{cases}$$

### 9.14.5 Μαγνητικό δυναμικό

1. Ποια πυκνότητα ρεύματος δημιουργεί το δυναμικό που σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι  $\vec{A} = k\hat{\phi}$ , όπου  $k$  είναι μια σταθερά;

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι ο νόμος Ampère, εκφρασμένος με το μαγνητικό δυναμικό, είναι:  $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_0 \vec{J}$ . Βολεύει να μετατρέψουμε σε καρτεσιανές συντεταγμένες, καθώς σε αυτές η Λαπλασιανή διανύσματος έχει απλή μορφή. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι αρκετά πολύπλοκη.

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\phi = \hat{z} \times \hat{r} = \hat{z} \times \frac{x\hat{i} + y\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Άρα, οι καρτεσιανές συνιστώσες του  $\vec{A}$  είναι

$$A_x = -k \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad A_y = k \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad A_z = 0.$$

Η λαπλασιανή του  $A_x$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\begin{aligned} \nabla^2 A_x &= \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ &= k \frac{-y(2x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} + k \frac{3y(x^2)}{(x^2 + y^2)^{5/2}} \\ &= \frac{ky}{(x^2 + y^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Παρόμοια, η λαπλασιανή του  $A_y$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι

$$\nabla^2 A_y = -\frac{kx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

και  $\nabla^2 A_z = 0$ . Άρα

$$\vec{J} = \frac{k}{\mu_0} \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{k}{\mu_0} \frac{1}{x^2 + y^2} \frac{-y\hat{i} + x\hat{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{k}{\mu_0 r^2} \hat{\phi}.$$

**9.14.6 Ροή μαγνητικού πεδίου**

- Ένα δακτυλιοειδές σωληνοειδές έχει μέση ακτίνα  $R = 10 \text{ cm}$  και εμβαδόν διατομής  $A = 1 \text{ cm}^2$ . Γύρω από τον πυρήνα μαλακού σιδήρου, μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu = 100\mu_0$ , υπάρχουν  $N = 400$  σπείρες σύρματος. Υπολογίστε το ρεύμα που απαιτείται για να δημιουργηθεί μαγνητική ροή ίση με  $5 \times 10^{-4} \text{ Wb}$  σε μια διατομή του πυρήνα.

**ΛΥΣΗ**

Από προηγούμενη άσκηση γνωρίζουμε ότι στο εσωτερικό δακτυλιοειδούς σωληνοειδούς με ακτίνα σπειρών πολύ μικρότερη από την ακτίνα του δακτύλιου (όπως στο συγκεκριμένο:  $\sqrt{1/\pi} \ll 10$ ), το μαγνητικό πεδίο έχει παντού το ίδιο μέτρο,

$$B = \frac{\mu N I}{2\pi R},$$

και είναι κάθετο στα επίπεδα των σπειρών.  $I$  είναι το ρεύμα που διαρρέει το σωληνοειδές.

Η μαγνητική ροή από την επιφάνεια  $S$  μιας σπείρας είναι

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B dA = BA = \frac{\mu N A I}{2\pi R}.$$

Επομένως,

$$I = \Phi_B \frac{2\pi R}{\mu N A}.$$

Με αντικατάσταση,  $I \approx 62.5$  A.

2. Η μαγνητική ροή διαμέσου κάθε μίας από τις 5 έδρες ενός ζαριού δίνεται από την  $\Phi_M = \pm N \text{Wb}$  όπου  $N$  ( $= 1$  έως  $5$ ) είναι το πλήθος των κουκκίδων στην έδρα. Η ροή είναι θετική προς τα έξω για  $N$  περιττό και αρνητική (προς τα μέσα) για  $N$  άρτιο. Πόση είναι η ροή δια μέσου της 6ης έδρας του ζαριού;

**ΛΥΣΗ**

Η συνολική μαγνητική ροή από τις πέντε έδρες, δηλαδή, με  $N = 1, \dots, 5$ , είναι  $\Phi_{12345} = +1 - 2 + 3 - 4 + 5 = 3 \text{Wb}$ . Η συνολική ροή από όλες τις έδρες,  $\Phi = \Phi_{12345} + \Phi_6$ , είναι 0, σύμφωνα με το νόμο Gauss στο μαγνητισμό. Επομένως,  $\Phi_6 = -3 \text{Wb}$ .

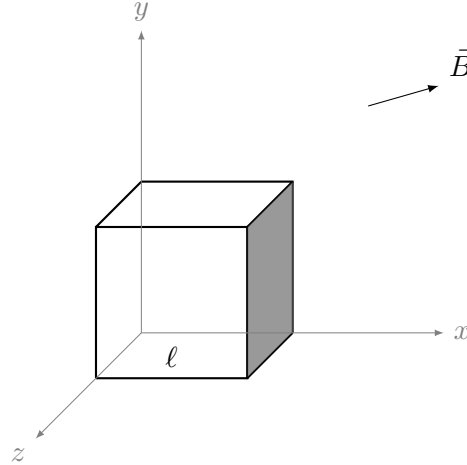
3. Ένα δακτυλιοειδές πηνίο με πυρήνα από σίδηρο έχει τυλιγμένες γύρω του 250 σπείρες σύρματος ανά μέτρο. Το ρεύμα στις σπείρες είναι 8 A. Αν η μαγνητική διαπερατότητα του σιδήρου είναι  $\mu = 5000\mu_0$  υπολογίστε (α') το μαγνητίζον πεδίο  $H$ , (β') την πυκνότητα μαγνητικής ροής (δηλαδή το πεδίο  $B$ ).

**ΛΥΣΗ**

Το μαγνητικό πεδίο σωληνοειδούς με  $n$  σπείρες ανά μονάδα μήκους, με πυρήνα μαγνητικής διαπερατότητας  $\mu$ , γνωρίζουμε ότι είναι  $B = \mu n I$ . Με αντικατάσταση,  $B = 4\pi \text{T}$ . Καθώς  $\vec{B} = \mu \vec{H}$  έχουμε ότι  $H = n I$ . Με αντικατάσταση,  $H = 2000 \text{ A/m}$ .

4. Ένας κύβος ακμής  $\ell = 2.5 \text{ cm}$  βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο  $(5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) \text{T}$  (Σχήμα 9.24).

- Υπολογίστε τη ροή που διέρχεται από τη σκιασμένη έδρα του κύβου.
- Ποια είναι η συνολική ροή που διαπερνά και τις έξι έδρες του κύβου;



Σχήμα 9.24: Άσκηση 4

**ΛΥΣΗ**

Η μαγνητική ροή  $\Phi_B$  από τη σκιασμένη επιφάνεια  $S$  είναι

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}.$$

Η σκιασμένη επιφάνεια έχει κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα προς τα «έξω» ως προς τον κύβο, το διάνυσμα  $\hat{i}$  του άξονα  $x$ . Παίρνουμε ένα στοιχειώδες τμήμα της με εμβαδόν  $dA$  και διάνυσμα επιφάνειας  $d\vec{A} = dA\hat{i}$ . Για τη ροή από αυτό έχουμε

$$\vec{B} \cdot d\vec{A} = (5\hat{i} + 4\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot dA\hat{i} = 5 dA.$$

Άρα

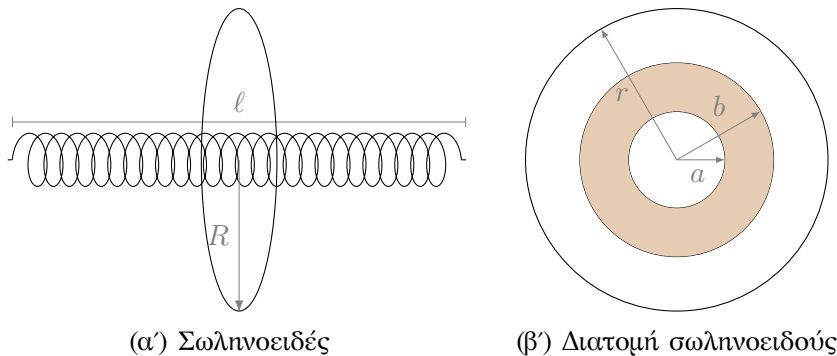
$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S 5 dA = 5A = 5\ell^2.$$

Με αντικατάσταση,  $\Phi_B = 3.125 \text{ mWb}$ .

Συνολικά από την κλειστή κυβική επιφάνεια η ροή είναι 0 (νόμος Gauss για το μαγνητικό πεδίο). Μπορούμε να καταλήξουμε στο ίδιο αποτέλεσμα παρατηρώντας ότι οι απέναντι έδρες του κύβου βρίσκονται στο ίδιο πεδίο (αφού είναι παντού σταθερό) αλλά με αντίθετα διανύσματα επιφάνειας. Η ροή από ανά δύο τις απέναντι έδρες έχει αλγεβρικό άθροισμα 0.

5. Ένα σωληνοειδές με ακτίνα  $r = 1.25 \text{ cm}$  και μήκος  $\ell = 30 \text{ cm}$  έχει 300 σπείρες και διαρρέεται από ρεύμα  $12 \text{ A}$ .

- Υπολογίστε τη ροή που διέρχεται από την επιφάνεια ενός κυκλικού δίσκου με ακτίνα  $R = 5 \text{ cm}$ , κάθετο στον άξονα του σωληνοειδούς και με το κέντρο του επάνω σε αυτόν τον άξονα, όπως στο Σχήμα 9.25α'.
- Στο Σχήμα 9.25β' φαίνεται μια μεγενθυμένη πλάγια όψη του ίδιου σωληνοειδούς. Υπολογίστε τη ροή που διαπερνά την καφέ περιοχή, έναν δακτύλιο με εσωτερική ακτίνα  $a = 4 \text{ mm}$  και εξωτερική ακτίνα  $b = 8 \text{ mm}$ .



Σχήμα 9.25: Άσκηση 5

### ΛΥΣΗ

Θεωρούμε ότι το σωληνοειδές είναι ιδανικό: το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι ομογενές, με μέτρο  $B = \mu_0 n I = \mu_0 N I / \ell$  και κατεύθυνση τον άξονα του σωληνοειδούς, ενώ στο εξωτερικό του είναι 0.

Η μαγνητική ροή από τον κυκλικό δίσκο είναι η ροή από το τμήμα του που βρίσκεται μέσα στο μαγνητικό πεδίο. Το διάνυσμα επιφάνειας αυτού του τμήματος έχει μέτρο όσο το εμβαδόν του,  $\pi r^2$ , και είναι παράλληλο στο  $\vec{B}$ . Επομένως

$$\Phi_1 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B dA = B \int_S dA = \mu_0 N I \pi r^2 / \ell .$$

Με αντικατάσταση,  $\Phi_1 \approx 7.4 \mu\text{Wb}$ .

Ο δακτύλιος στο εσωτερικό του σωληνοειδούς έχει εμβαδόν  $A = \pi(b^2 - a^2)$ . Η ροή του ομογενούς πεδίου  $\vec{B}$  από αυτόν είναι

$$\Phi_2 = B A = \frac{\mu_0 N I}{\ell} \pi (b^2 - a^2) .$$

Με αντικατάσταση,  $\Phi_2 \approx 2.27 \mu\text{Wb}$ .

## 9.14.7 Νόμος Faraday

1. Ένα τετράγωνο πλαίσιο, πλευράς  $\ell$ , έχει φτιαχτεί από μεταλλικό σύρμα με ειδική αντίσταση  $\rho$ , κυκλικής διατομής, με ακτίνα  $a$ . Απομακρύνεται με σταθερή ταχύτητα  $v$  από ένα ευθύγραμμο αγωγό άπειρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Το πλαίσιο και ο αγωγός βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο. Δύο πλευρές του τετραγώνου είναι παράλληλες στον αγωγό και οι άλλες δύο κάθετες.

Εξηγήστε γιατί το πλαίσιο θα ζεσταθεί και υπολογίστε την ισχύ που χάνεται με τη μορφή θερμότητας.

## ΛΥΣΗ

Το σύρμα που σχηματίζει το πλαίσιο έχει μήκος  $4\ell$ , εμβαδό διατομής  $\pi a^2$  και παρουσιάζει αντίσταση  $R = \rho(4\ell)/(\pi a^2)$ .

Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση  $r$  από ευθύγραμμο αγωγό άπειρου μήκους που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  έχει μέτρο

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

και οι μαγνητικές γραμμές σχηματίζουν κύκλους με κέντρο στο αγωγό. Το μαγνητικό πεδίο επομένως είναι κάθετο στο τετράγωνο πλαίσιο, δηλαδή παράλληλο στο διάνυσμα επιφάνειάς του,  $\vec{A}$ . Έστω ότι η πλευρά του πλαισίου που είναι πιο κοντά στον αγωγό απέχει από αυτόν κάποια στιγμή απόσταση  $d$ . Η μαγνητική ροή που περνά τότε από το τετράγωνο πλαίσιο  $S$  είναι

$$\Phi = \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_0^\ell dx \int_R^{d+\ell} dy \frac{\mu_0 I}{2\pi y} = \ell \frac{\mu_0 I}{2\pi} \ln \left( \frac{d+\ell}{d} \right).$$

Αν θεωρήσουμε ότι τη χρονική στιγμή  $t = 0$  το πλαίσιο και ο αγωγός είχαν απόσταση 0, η απόστασή τους  $R$  μεταβάλλεται με το χρόνο με τη σχέση  $d = vt$ . Η χρονική μεταβολή της μαγνητικής ροής είναι

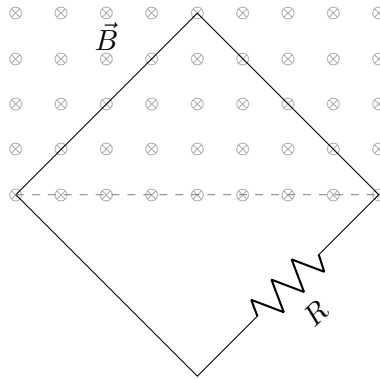
$$\frac{d\Phi}{dt} = \ell \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{d}{dt} \left( \ln \left( \frac{d+\ell}{d} \right) \right) = \ell \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left( \frac{v}{vt+\ell} - \frac{1}{t} \right) = -\frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\ell^2}{t(vt+\ell)}.$$

Σύμφωνα με το νόμο Faraday, στο πλαίσιο εμφανίζεται ΗΕΔ με τιμή  $\mathcal{E} = d\Phi/dt$ , ρεύμα  $I' = \mathcal{E}/R$  και η ισχύς που γίνεται θερμότητα είναι

$$P = \mathcal{E}I' = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{\left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{\ell^2}{t(vt+\ell)} \right)^2}{\rho \frac{4\ell}{\pi a^2}}.$$

2. Τετράγωνος συρματίνος βρόχος πλευράς  $\ell = 2\text{ m}$  είναι κάθετος σε ομογενές μαγνητικό πεδίο όπως στο Σχήμα 9.26. Ο βρόχος περιλαμβάνει αντιστάτη με  $R = 200\ \Omega$ . Αν το μέτρο του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση  $B(t) = 0.1 + 2t$  (σε Tesla),

- ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στο κύκλωμα;
- ποιο είναι το επαγόμενο ρεύμα και ποια η κατεύθυνσή του;



Σχήμα 9.26: Άσκηση 2

**ΛΥΣΗ**

Η μισή επιφάνεια του βρόχου βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο και έχει εμβαδό  $\ell^2/2$ . Η ροή του μαγνητικού πεδίου από αυτή είναι

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A},$$

όπου  $d\vec{A}$  το διάνυσμα στοιχειώδους τμήματος της επιφάνειας. Αυτό είναι παράλληλο στο  $\vec{B}$ . Το  $\vec{B}$  είναι το ίδιο σε όλη την επιφάνεια, άρα

$$\Phi_B = B \int_S dA = B \frac{\ell^2}{2}.$$

Η ροή μεταβάλλεται με το χρόνο:  $\Phi_B(t) = B(t)\ell^2/2$ . Σύμφωνα με το νόμο Faraday, η χρονική μεταβολή της ροής παράγει στο κύκλωμα μια ΗΕΔ ίση με

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B'(t)\frac{\ell^2}{2} = -4\text{ V}.$$

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι η ΗΕΔ που επάγεται τείνει να αντισταθμίσει το αίτιο που την προκαλεί. Θα προκαλέσει ρεύμα  $I = |\mathcal{E}|/R = 20\text{ mA}$  στο κύκλωμα, που θα τείνει να μειώσει το μαγνητικό πεδίο (που αυξάνει με το χρόνο). Το ρεύμα θα ρέει *αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού* έτσι ώστε το μαγνητικό πεδίο που θα παράγεται στο εσωτερικό του βρόχου να είναι αντίθετο από το αυξανόμενο εξωτερικό  $\vec{B}$ .

3. Ένα μεγάλου μήκους σωληνοειδές με  $n$  σπείρες ανά μονάδα μήκους και ακτίνα  $a$ , διαρρέεται από εναλλασσόμενο ρεύμα  $I = I_0 \sin(\omega t)$ .
- Ποιο είναι το ηλεκτρικό πεδίο που επάγεται σε ακτίνα  $r$  από τον άξονα του σωληνοειδούς;
  - Ποια είναι η κατεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου όταν το ρεύμα αυξάνεται αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού στο πηνίο;

### ΛΥΣΗ

Έστω  $z$  ο άξονας του σωληνοειδούς. Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι  $\vec{B}(t) = \mu_0 n I(t) \hat{k}$  και είναι ομογενές. Στο εξωτερικό του είναι  $\vec{0}$ .

Το ηλεκτρικό πεδίο στο χώρο πρέπει να είναι αναλλοίωτο σε περιστροφή γύρω από τον άξονα και μετατόπιση παράλληλα σε αυτόν. Επομένως δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες  $\phi$ ,  $z$  αλλά μόνο από την απόσταση  $r$  από τον άξονα του σωληνοειδούς. Επίσης, δεν έχει συνιστώσα στον άξονα  $z$  καθώς το σύστημα έχει συμμετρία κατοπτρισμού ως προς επίπεδο κάθετο στον  $z$ .

Παίρνουμε ένα κυκλικό δίσκο  $S$ , κάθετο στον άξονα, με ακτίνα  $r$  και κέντρο στον άξονα του σωληνοειδούς. Αν  $r \leq a$ , το εμβαδόν της περιοχής από το οποίο διέρχεται μαγνητικό πεδίο είναι  $\pi r^2$ . Αν  $r > a$ , το εμβαδόν είναι  $\pi a^2$ .

Η μαγνητική ροή από τον δίσκο είναι

$$\Phi_B = BA = \begin{cases} \mu_0 n I(t) \pi r^2 & r \leq a \\ \mu_0 n I(t) \pi a^2 & r > a \end{cases}.$$

Σύμφωνα με το νόμο Faraday στην ολοκληρωτική του μορφή, η επαγόμενη ΗΕΔ στο σύνορο της επιφάνειας  $S$  είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\mu_0 n \pi \min(r, a)^2 I_0 \omega \cos \omega t.$$

Έχουμε

$$\mathcal{E}(t) \equiv \int_{\partial S} \vec{E}(r, t) \cdot d\vec{s} = E_\phi(r, t) \int_0^{2\pi} ds = 2\pi r E_\phi(r, t).$$

Το  $d\vec{s}$  είναι παράλληλο στο  $\hat{\phi}$  των κυλινδρικών συντεταγμένων, δηλαδή η φορά διαγραφής του κύκλου είναι η φορά του ρεύματος στο πηνίο.

Συνεπώς, η συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου που είναι εφαπτόμενη στον κύκλο είναι

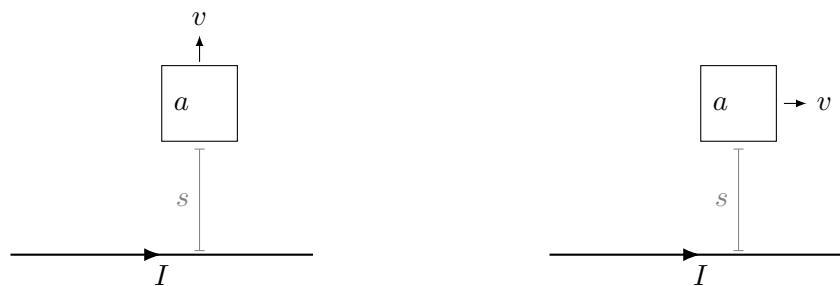
$$E_\phi(r, t) = \begin{cases} -\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} r \cos \omega t, & r \leq a \\ -\frac{\mu_0 n I_0 \omega}{2} \frac{a^2}{r} \cos \omega t, & r > a \end{cases}.$$



Το  $\vec{E}$  έχει αντίθετη φορά από το ρεύμα.

4. Ένα τετράγωνο πλαίσιο με πλευρά  $a$  βρίσκεται στο ίδιο επίπεδο με ένα ευθύγραμμο αγωγό άπειρου μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  και απέχει από το πλαίσιο απόσταση  $s$ .

- Βρείτε τη ροή του μαγνητικού πεδίου από το βρόχο.
- Αν απομακρύνουμε το βρόχο από τον αγωγό με σταθερή ταχύτητα  $v$ , πόση είναι η ΗΕΔ που αναπτύσσεται; Ποια είναι η φορά του ρεύματος στο βρόχο;
- Υπολογίστε την ΗΕΔ και τη φορά του ρεύματος αν ο βρόχος κινείται με ταχύτητα  $v$  παράλληλα στον αγωγό.



(α') Βρόχος που απομακρύνεται από τον αγωγό      (β') Βρόχος παράλληλος στον αγωγό

Σχήμα 9.27: Άσκηση 4

#### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγει άπειρος ευθύγραμμος αγωγός με ρεύμα  $I$ , σε απόσταση  $r$  από αυτόν είναι

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \hat{\phi}.$$

Χρησιμοποιούμε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα  $z$  τον αγωγό.

Η ροή του μαγνητικού πεδίου από την επιφάνεια του βρόχου (έστω  $S$ ) είναι

$$\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_s^{s+a} dr \int_0^a dz \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I a}{2\pi} (\ln(s+a) - \ln(s)).$$

Αν το  $s$  μεταβάλλεται με το χρόνο με τη σχέση  $s(t) = s_0 + vt$  τότε μεταβάλλεται και η ροή, άρα εμφανίζεται στο βρόχο ΗΕΔ:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I a v}{2\pi} \left( \frac{1}{s(t)+a} - \frac{1}{s(t)} \right) = \frac{\mu_0 I a^2 v}{2\pi} \frac{1}{s(t)(s(t)+a)}.$$

Το ρεύμα  $I'$  που αναπτύσσεται στο βρόχο τείνει να αντισταθμίσει το αίτιο που προκαλεί την ΗΕΔ, δηλαδή ουσιαστικά, την απομάκρυνση από τον αγωγό. Η φορά του θα πρέπει να είναι τέτοια ώστε να έλκεται ο βρόχος.

Εύκολα δείχνεται ότι οι δυνάμεις που ασκούνται στις κάθετες πλευρές είναι αντίθετες, ανεξάρτητα από τη φορά του ρεύματος:

$$d\vec{F}_2 = I' (dr\hat{r}) \times \vec{B}, \quad d\vec{F}_4 = I' (-dr\hat{r}) \times \vec{B}.$$

Έστω ότι το  $I'$  ρέει αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού. Η δύναμη στην πλησιέστερη στον αγωγό πλευρά είναι

$$\vec{F}_1 = I' \vec{L} \times \vec{B} = I' (a\hat{z}) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi s} \hat{\phi} = -\frac{\mu_0 I I' a}{2\pi s} \hat{r}.$$

Η δύναμη στην απέναντι πλευρά είναι

$$\vec{F}_3 = I' (-\vec{L}) \times \vec{B} = I' (-a\hat{z}) \times \frac{\mu_0 I}{2\pi(s+a)} \hat{\phi} = \frac{\mu_0 I I' a}{2\pi(s+a)} \hat{r}.$$

Η συνολική δύναμη στο βρόχο είναι

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \vec{F}_4 = \hat{r} \frac{\mu_0 I I' a}{2\pi} \left( \frac{1}{(s+a)} - \frac{1}{s} \right) = -\hat{r} \frac{\mu_0 I I' a^2}{2\pi} \frac{1}{s(s+a)}.$$

Η δύναμη είναι ελκτική, άρα η υπόθεσή μας ότι το ρεύμα στο βρόχο κινείται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού είναι σωστή.

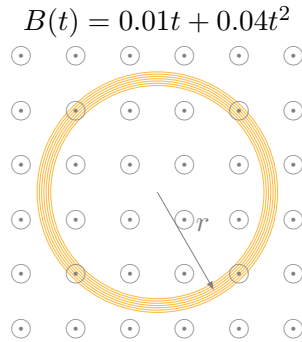
Στην περίπτωση παράλληλης κίνησης, δεν μεταβάλλεται η ροή με το χρόνο. Κάθε τμήμα της επιφάνειας του βρόχου περνά συνεχώς από σημεία με ίδιο μαγνητικό πεδίο κατά μέτρο, διεύθυνση και φορά. Το διάνυσμα επιφάνειας παραμένει και αυτό το ίδιο. Άρα η ΗΕΔ και το ρεύμα είναι 0.

5. Ένα κυκλικό πηνίο ακτίνας  $r = 4 \text{ cm}$  και  $N = 30$  σπειρών έχει αντίσταση  $R = 1 \Omega$  και τοποθετείται σε μαγνητικό πεδίο που έχει διεύθυνση κάθετη στο επίπεδο του πηνίου. Το μέτρο του μαγνητικού πεδίου μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με την έκφραση  $B = 0.01t + 0.04t^2$ , όπου το  $t$  είναι σε  $s$  και το  $B$  σε  $T$ . Υπολογίστε την εξ επαγωγής ΗΕΔ και το επαγόμενο ρεύμα στο πηνίο κατά τη χρονική στιγμή  $t = 5 \text{ s}$ .

### ΛΥΣΗ

Η συνολική επιφάνεια των σπειρών του πηνίου είναι  $A = N\pi r^2$ . Το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στο στοιχειώδες διάνυσμα της επιφάνειας,  $d\vec{A}$ . Η ροή του μαγνητικού πεδίου από την επιφάνεια των σπειρών είναι

$$\Phi_B = \int_A \vec{B}(t) \cdot d\vec{A} = B(t) \int_A dA = B(t)A = B(t)N\pi r^2.$$



Σχήμα 9.28: Άσκηση 5

Καθώς η μαγνητική ροή μεταβάλλεται, θα αναπτυχθεί στα άκρα του πηνίου ηλεκτρεγερτική δύναμη που δίνεται από το νόμο Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\pi r^2 B'(t) = -N\pi r^2(0.01 + 0.08t) .$$

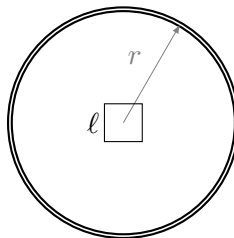
Το ρεύμα που διαρρέει το πηνίο είναι

$$I = \frac{|\mathcal{E}|}{R} = \frac{N\pi r^2}{R}(0.01 + 0.08t) .$$

Τη χρονική στιγμή  $t = 5 \text{ s}$  έχουμε  $\mathcal{E} \approx -61.82 \text{ mV}$  και  $I \approx 61.82 \text{ mA}$ .

6. Ένας συρματίνος βρόχος που αποτελείται από μία τετράγωνη σπείρα πλευράς  $\ell = 1 \text{ cm}$ , είναι τοποθετημένος μέσα σε ένα σωληνοειδές ακτίνας  $r = 3 \text{ cm}$ , όπως φαίνεται από πλάγια όψη στο Σχήμα 9.29. Το σωληνοειδές έχει μήκος  $L = 20 \text{ cm}$  και  $N = 100$  σπείρες.

- Αν το ρεύμα στο σωληνοειδές είναι  $I = 3 \text{ A}$ , πόση είναι η μαγνητική ροή που διέρχεται από τον τετράγωνο βρόχο;
- Αν το ρεύμα στο σωληνοειδές μηδενιστεί σταδιακά, μέσα σε χρόνο  $\tau = 3 \text{ s}$ , πόσο είναι το μέτρο της μέσης ΗΕΔ που επάγεται στον τετράγωνο βρόχο;



Σχήμα 9.29: Άσκηση 6

**ΛΥΣΗ**

Θεωρούμε ότι το σωληνοειδές είναι ιδανικό: το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του είναι ομογενές, με μέτρο  $B = \mu_0 n I = \mu_0 N I / L$  και κατεύθυνση τον άξονα του σωληνοειδούς. Η ροή του μαγνητικού πεδίου από την επιφάνεια  $S$  του τετράγωνου βρόχου είναι

$$\Phi_B = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B dA = BA = \frac{\mu_0 N I}{L} \ell^2.$$

Με αντικατάσταση,  $\Phi_B \approx 188 \text{ nWb}$ .

Όταν μεταβάλλεται το ρεύμα, η ΗΕΔ που αναπτύσσεται είναι, σύμφωνα με το νόμο Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 N \ell^2}{L} \frac{dI}{dt}.$$

Η μέση τιμή της ΗΕΔ σε χρόνο  $\tau$ ,  $\langle \mathcal{E} \rangle$ , είναι

$$\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau \mathcal{E}(t) dt = -\frac{1}{\tau} \int_0^\tau \frac{\mu_0 N \ell^2}{L} \frac{dI}{dt} dt = -\frac{\mu_0 N \ell^2}{L\tau} \int_I^0 dI = \frac{\mu_0 N I \ell^2}{L\tau}.$$

Με αντικατάσταση,  $\langle \mathcal{E} \rangle \approx 62.8 \text{ nV}$ .

7. Αγωγμός κυκλικός βρόχος διαμέτρου  $6 \text{ cm}$  με αντίσταση  $0.01 \Omega$  είναι κάθετος σε μαγνητικό πεδίο  $B$ . Το πεδίο μειώνεται από  $1 \text{ T}$  σε  $0.4 \text{ T}$  σε χρόνο  $1.2 \text{ s}$ . Ποιο είναι το μέγεθος και η φορά του ρεύματος που επάγεται στο βρόχο;

**ΛΥΣΗ**

Καθώς αλλάζει το μαγνητικό πεδίο, αλλάζει η ροή του από το βρόχο. Η μεταβολή της μαγνητικής ροής παράγει ηλεκτρεγερτική δύναμη σε αυτόν.

Η ροή του μαγνητικού πεδίου από τον κυκλικό βρόχο είναι

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B \int_A dA = B\pi \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Καθώς το πεδίο  $\vec{B}$  μεταβάλλεται με το χρόνο, η ροή εξαρτάται από το χρόνο. Ο ρυθμός μεταβολής της ροής είναι

$$\frac{d\Phi_B}{dt} \approx \frac{\Phi_B(t_2) - \Phi_B(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{B(t_2) - B(t_1)}{t_2 - t_1} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Σύμφωνα με το νόμο Faraday στο βρόχο εμφανίζεται ηλεκτρεγερτική δύναμη

$$\mathcal{E} = -\frac{B(t_2) - B(t_1)}{t_2 - t_1} \pi \left(\frac{d}{2}\right)^2.$$

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη παράγει ρεύμα στο βρόχο  $I = \mathcal{E}/R$ . Με αντικατάσταση,  $I \approx 0.141 \text{ A}$ .

Η φορά του ρεύματος σύμφωνα με το νόμο του Lenz είναι τέτοια ώστε να παραγάγει μαγνητικό πεδίο που τείνει να αναιρέσει τη μεταβολή του αρχικού. Επομένως, θα παράγει μαγνητικό πεδίο παράλληλο στο αρχικό.

Αν υποθέσουμε ότι ο βρόχος είναι στο επίπεδο  $x - y$  και το μαγνητικό πεδίο ορίζει τον άξονα  $z$ , ο κανόνας του δεξιού χεριού δίνει κίνηση του ρεύματος αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

8. Ένα μεγάλου μήκους σωληνοειδές έχει  $n$  σπείρες ανά μέτρο και διαρρέεται από ρεύμα  $I = I_0 (1 - \exp(-\alpha t))$ . Στο εσωτερικό του σωληνοειδούς και ομοαξονικά με αυτό υπάρχει ένας βρόχος ακτίνας  $R$  που έχει συνολικά  $N$  σπείρες λεπτού σύρματος. Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στο βρόχο λόγω της μεταβολής του ρεύματος;

### ΛΥΣΗ

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό μακρού σωληνοειδούς ξέρουμε ότι είναι παράλληλο στον άξονά του και ομογενές. Εκτός, είναι 0. Για ένα τετράγωνο που περικλείει  $N$  σπείρες ισχύει ο νόμος Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 NI \Rightarrow B\ell = \mu_0 NI \Rightarrow B = \mu_0 nI .$$

Επομένως  $B(t) = \mu_0 n I_0 (1 - \exp(-\alpha t))$ .

Η ροή αυτού του μαγνητικού πεδίου από το εσωτερικό πηνίο είναι

$$\Phi_B = \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = B(t)A ,$$

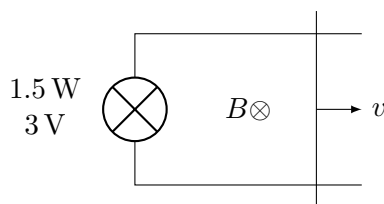
όπου  $A$  η συνολική επιφάνεια των εσωτερικών βρόχων,  $A = N\pi R^2$ .

Η ηλεκτρεγερτική δύναμη είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -N\pi R^2 \frac{dB(t)}{dt} = -\alpha N\pi R^2 \mu_0 n I_0 \exp(-\alpha t) .$$

9. Ένα κύκλωμα περιλαμβάνει λαμπτήρα, που λειτουργεί με ισχύ  $P = 1.5 \text{ W}$  σε τάση  $V = 3 \text{ V}$ , και ιδανικά σύρματα χωρίς αντίσταση (Σχήμα 9.30). Το δεξί τμήμα του κυκλώματος μήκους  $\ell = 10 \text{ cm}$  έλκεται με σταθερή ταχύτητα  $v$  μέσα σε κάθετο μαγνητικό πεδίο  $B = 0.1 \text{ T}$ . Βρείτε

- την αντίσταση του λαμπτήρα,
- την ταχύτητα που πρέπει να έχει το σύρμα για να πυρακτώσει τον λαμπτήρα,
- την εξωτερική δύναμη που χρειάζεται για την κίνηση του σύρματος.



Σχήμα 9.30: Άσκηση 9

**ΛΥΣΗ**

Η ισχύς του λαμπτήρα συνδέεται με την τάση και την αντίστασή του με τη σχέση

$$P = VI = \frac{V^2}{R} \Rightarrow R = \frac{V^2}{P}.$$

Με αντικατάσταση,  $R = 6 \Omega$ .

Για να ανάψει ο λαμπτήρας πρέπει να υπάρξει ηλεκτρεγερτική δύναμη ίση με το  $V$ . Αυτή θα προκύψει από τη μεταβολή της μαγνητικής ροής λόγω μεταβολής της επιφάνειας που βρίσκεται στο μαγνητικό πεδίο.

Η απομάκρυνση  $x$  της ράβδου από τη θέση που βρίσκεται όταν  $t = 0$  είναι  $x(t) = x_0 + vt$ . Το εμβαδόν της επιφάνειας του κλειστού αγωγού που βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο είναι  $A(t) = \ell x(t) = \ell x_0 + \ell vt$ . Η μαγνητική ροή από την επιφάνεια του κλειστού αγωγού είναι  $\Phi_B(t) = BA(t) = B\ell x_0 + B\ell vt$ . Επομένως,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\ell v.$$

Η ταχύτητα  $v$  για να έχουμε  $|\mathcal{E}| = V$  είναι

$$v = \frac{V}{B\ell}.$$

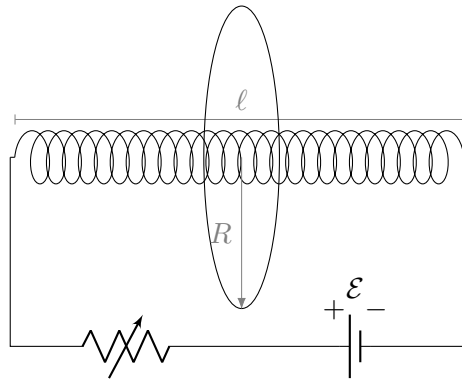
Με αντικατάσταση,  $v = 300 \text{ m/s}$ .

Η ισχύς για να λειτουργήσει ο λαμπτήρας δίνεται μέσω της εξωτερικής δύναμης. Ο ρυθμός μεταβολής του έργου της, η ισχύς δηλαδή, είναι  $Fv$  και πρέπει να είναι ίση με  $P$ . Επομένως,  $F = P/v$ . Με αντικατάσταση,  $F = 5 \times 10^{-3} \text{ N}$ .

10. Ένας κυκλικός βρόχος μίας σπείρας ακτίνας  $R$ , είναι ομοαξονικός με ένα επίμηκες σωληνοειδές ακτίνας  $r$  και μήκους  $\ell$  το οποίο έχει  $N$  σπείρες. Η μεταβλητή αντίσταση μεταβάλλεται έτσι ώστε το ρεύμα στο σωληνοειδές να μειώνεται γραμμικά από  $7.2 \text{ A}$  σε  $2.4 \text{ A}$  μέσα σε  $0.3 \text{ s}$ . Αν  $r = 0.03 \text{ m}$ ,  $\ell = 0.75 \text{ m}$  και  $N = 1500$  σπείρες, υπολογίστε την επαγόμενη ΗΕΔ στον κυκλικό βρόχο.

**ΛΥΣΗ**

ΗΕΔ εμφανίζεται στο βρόχο λόγω της μεταβολής της μαγνητικής ροής από αυτόν, σύμφωνα με το νόμο Faraday.



Σχήμα 9.31: Άσκηση 10

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς έχει μέτρο, ως γνωστόν,  $B = \mu_0 NI/\ell$ . Είναι παράλληλο στον άξονα του σωληνοειδούς. Η ροή του από το βρόχο είναι  $\Phi_B = BA$  όπου  $A = \pi r^2$  το εμβαδόν της διατομής του σωληνοειδούς (σε αυτό μόνο το τμήμα του κυκλικού δίσκου υπάρχει μαγνητικό πεδίο). Άρα

$$\Phi_B = \frac{\mu_0 NI \pi r^2}{\ell}.$$

Το ρεύμα μεταβάλλεται γραμμικά. Έτσι

$$\frac{dI}{dt} = \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{I_{\text{final}} - I_{\text{initial}}}{t_{\text{final}} - t_{\text{initial}}}.$$

Σύμφωνα με το νόμο του Faraday, εμφανίζεται ΗΕΔ στο βρόχο:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -\frac{\mu_0 N \pi r^2}{\ell} \frac{\Delta I}{\Delta t}.$$

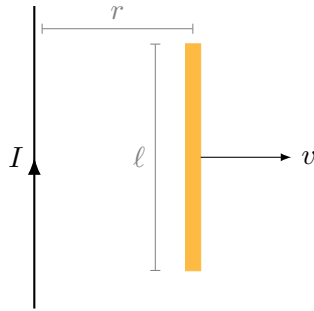
Με αντικατάσταση,  $\mathcal{E} = 113.7 \mu\text{V}$ .

Η φορά, σύμφωνα με το νόμο Lenz είναι τέτοια ώστε να αυξηθεί η ροή από το βρόχο. Επομένως, η ΗΕΔ τείνει να δώσει ρεύμα που θα ενισχύσει το μαγνητικό πεδίο. Το ρεύμα στο βρόχο πρέπει να έχει την ίδια φορά με το ρεύμα στο σωληνοειδές.

11. Μια αγωγή ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα  $v$ , κάθετη σε ένα μεγάλο μήκους ευθύγραμμο σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ . Αποδείξτε ότι η ΗΕΔ που αναπτύσσεται μεταξύ των άκρων της ράβδου είναι  $(\mu_0 v I / (2\pi r))\ell$ .

### ΛΥΣΗ

Ορίζω σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων: ο άξονας  $z$  είναι το ευθύγραμμο σύρμα (με φορά προς τα επάνω), η διεύθυνση της κίνησης του αγωγού είναι



Σχήμα 9.32: Άσκηση 11

ο άξονας  $x$  (με φορά προς τα δεξιά) και ο άξονας  $y$  είναι κάθετα στο επίπεδο προς τα μέσα.

Ο ευθύγραμμος αγωγός παράγει μαγνητικό πεδίο γύρω του. Οι μαγνητικές γραμμές είναι κυκλικές. Στην περιοχή της ράβδου το μαγνητικό πεδίο είναι  $\vec{B} = \mu_0 I / (2\pi r) \hat{j}$ . Η ταχύτητα της ράβδου είναι  $\vec{v} = v \hat{i}$ .

Στα ελεύθερα ηλεκτρόνια, με φορτίο  $-e$ , της ράβδου, τα οποία κινούνται με την ταχύτητα  $\vec{v}$ , ασκείται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο:

$$\vec{F}_B = (-e)\vec{v} \times \vec{B} = -evB\hat{k}.$$

Τα ηλεκτρόνια υπό την επίρεια αυτής της δύναμης κινούνται προς το κάτω μέρος της ράβδου, αφήνοντας περίσσεια θετικών φορτίων στο άνω μέρος. Η συσσώρευση αντίθετων φορτίων στα άκρα προκαλεί την εμφάνιση ολόένα αυξανόμενου ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E} = -E\hat{k}$  που ασκεί δύναμη στα ελεύθερα ηλεκτρόνια  $\vec{F}_E = eE\hat{k}$ . Η κατευθυνόμενη κίνηση των ηλεκτρονίων σταματά όταν οι δύο δυνάμεις έχουν συνισταμένη  $\vec{0}$ :

$$\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{0} \Rightarrow E = vB.$$

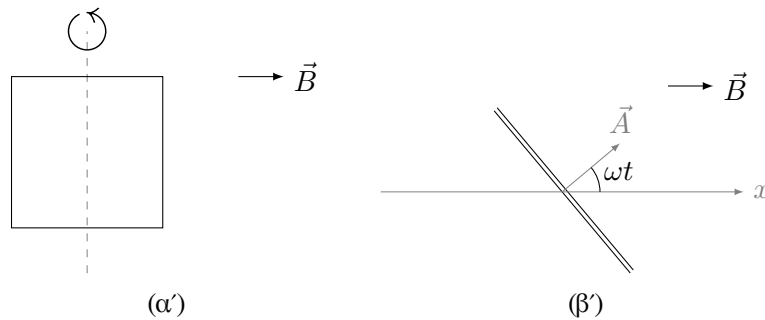
Η ΗΕΔ κατά μήκος της ράβδου (καμπύλη  $\mathcal{C}$ ,  $d\vec{s} = -ds\hat{k}$ ) είναι

$$\mathcal{E} = \int_{\mathcal{C}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_{\mathcal{C}} E ds = E\ell = vB\ell = \frac{\mu_0 I v \ell}{2\pi r}.$$

12. Ένα πλαίσιο εμβαδού  $A = 0.1 \text{ m}^2$  περιστρέφεται με  $f = 60$  στροφές ανά δευτερόλεπτο και με τον άξονα της περιστροφής κάθετο σε μαγνητικό πεδίο ίσο με  $B = 0.2 \text{ T}$  (Σχήμα 9.33α').

- Αν το πλαίσιο αποτελείται από  $N = 1000$  σπείρες, ποια είναι η μέγιστη τάση που αναπτύσσεται στο πλαίσιο;
- Όταν η επαγόμενη τάση στο πλαίσιο είναι μέγιστη, ποιος είναι ο προσανατολισμός του πλαισίου ως προς το μαγνητικό πεδίο;





Σχήμα 9.33: Άσκηση 12

**ΛΥΣΗ**

Έστω ότι ο άξονας περιστροφής του πλαισίου είναι ο  $z$  και το μαγνητικό πεδίο είναι ο άξονας  $x$ . Ορίζω ως αρχή του χρόνου όταν το πλαίσιο είναι κάθετο στο μαγνητικό πεδίο. Τότε, το διάνυσμα επιφάνειας μίας σπείρας του πλαισίου  $\vec{A}$  είναι παράλληλο στο  $\hat{i}$ , δηλαδή στο  $\vec{B}$ .

Το  $\vec{A}$  τη χρονική στιγμή  $t$  είναι  $\vec{A} = A \cos(\omega t)\hat{i} + A \sin(\omega t)\hat{j}$ . Το  $\omega$  είναι  $\omega = 2\pi f$ .

Η μαγνητική ροή από τις  $N$  σπείρες του πλαισίου είναι

$$\Phi_B = N \int_A \vec{B} \cdot d\vec{A} = N \vec{B} \cdot \vec{A} = NAB \cos(\omega t) .$$

Σύμφωνα με το νόμο Faraday η παράγωγός της είναι η ΗΕΔ:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = NAB\omega \sin(\omega t) .$$

Η μέγιστη τάση εμφανίζεται όταν  $\sin(\omega t) = \pm 1$ , όταν δηλαδή το  $\vec{A}$  είναι κάθετο στο  $\vec{B}$ , και είναι  $\mathcal{E}_{\max} = NAB\omega$ . Με αντικατάσταση,  $\mathcal{E}_{\max} = 2400\pi \text{ V} \approx 7540 \text{ V}$ .

13. Ποια είναι η μέγιστη ροπή που αποδίδει ένας ηλεκτρικός κινητήρας του οποίου ο ρότορας είναι ορθογώνιο πλαίσιο διαστάσεων  $\ell = 2.5 \text{ cm}$  επί  $w = 4 \text{ cm}$  που έχει  $N = 80$  σπείρες; Υποθέστε ότι ο κινητήρας διαρρέεται από ρεύμα  $I = 10 \text{ A}$  και ότι μέσα στον κινητήρα υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο  $B = 0.8 \text{ T}$ .

Αν ο κινητήρας περιστρέφεται με  $f = 3600 \text{ rev/min}$ , ποια είναι η μέγιστη ισχύς που παρέχει ο κινητήρας;

**ΛΥΣΗ**

Η μαγνητική ροπή κάθε σπείρας είναι  $\vec{m}_1 = I\vec{A}$ , όπου  $A = \ell w$  το εμβαδόν της. Για τις  $N$  σπείρες  $\vec{m} = N\vec{m}_1 = NI\vec{A}$ . Η ροπή στρέψης είναι  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ . Άρα

$\tau = N\ell wIB \sin \theta$ , όπου  $\theta$  η γωνία του κάθετου διανύσματος στην επιφάνεια με το διάνυσμα  $\vec{B}$ . Η γωνία μεταβάλλεται κατά την περιστροφή:  $\theta = \omega t$ .

Η μέγιστη ροπή είναι  $\tau_{\max} = N\ell wIB$ . Με αντικατάσταση,  $\tau_{\max} = 0.64 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

Η ισχύς,  $P$ , συνδέεται με τη ροπή  $\vec{\tau}$  και το  $\vec{\omega}$  με τη σχέση  $P = \vec{\tau} \cdot \vec{\omega}$ . Αφού τα  $\vec{\tau}$ ,  $\vec{\omega}$  είναι παράλληλα,  $P = \tau\omega$ . Η μέγιστη ισχύς αποδίδεται όταν το  $\tau$  γίνεται μέγιστο και είναι  $P_{\max} = \tau_{\max}\omega = 2\pi f\tau_{\max} \approx 241.3 \text{ W}$ .

14. Στον εναλλάκτη (γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος) 250 σπειρών ενός αυτοκινήτου, η μαγνητική ροή που διέρχεται από την επιφάνεια κάθε σπείρας είναι  $\Phi_B = 2.5 \times 10^{-4} \cos \omega t$ , όπου  $\omega$  είναι η γωνιακή ταχύτητα του εναλλάκτη. Ο εναλλάκτης περιστρέφεται τρεις φορές σε κάθε περιστροφή του κινητήρα. Όταν ο κινητήρας λειτουργεί με συχνότητα  $1000 \text{ rev/min}$  προσδιορίστε (α') την ΗΕΔ που επάγεται στον εναλλάκτη συναρτήσει του χρόνου και (β') τη μέγιστη ΗΕΔ στον εναλλάκτη.

### ΛΥΣΗ

Η γωνιακή ταχύτητα του εναλλάκτη είναι

$$\omega = 2\pi \times 3 \times 1000 \text{ rev/min} = 100\pi \text{ rad/s}.$$

Η συνολική ροή από τις  $N$  σπείρες είναι  $\Phi_{\text{total}} = N\Phi_B = 625 \times 10^{-4} \cos \omega t \text{ Wb}$ . Η ΗΕΔ, σύμφωνα με το νόμο Faraday, είναι

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_{\text{total}}}{dt} = 625 \times 10^{-4} \omega \sin \omega t = 6.25\pi \sin \omega t \text{ V}.$$

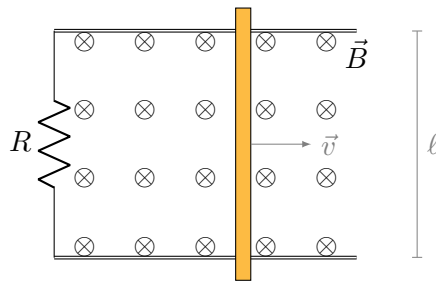
Η μέγιστή της τιμή είναι  $6.25\pi \text{ V}$ .

15. Αγωγή ράβδος κινείται προς τα δεξιά χωρίς τριβή πάνω σε δύο παράλληλους αγωγούς (Σχήμα 9.34), οι οποίοι συνδέονται πάνω στο ένα άκρο τους με αντίσταση ίση με  $R = 6 \Omega$ . Ένα μαγνητικό πεδίο  $B = 2.5 \text{ T}$  είναι κάθετο στη σελίδα προς τα μέσα. Το μήκος της ράβδου είναι  $\ell = 1.2 \text{ m}$  και η μάζα είναι αμελητέα.

- Υπολογίστε τη δύναμη που απαιτείται για την κίνηση της ράβδου προς τα δεξιά με σταθερή ταχύτητα  $v = 2 \text{ m/s}$ .
- Με ποιο ρυθμό καταναλώνεται ενέργεια στην αντίσταση;

### ΛΥΣΗ

Η ράβδος, οι παράλληλοι αγωγοί και ο κλάδος με τον αντιστάτη σχηματίζουν κλειστό κύκλωμα. Το κύκλωμα αυτό βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο άρα υπάρχει ροή του μαγνητικού πεδίου από μια επιφάνεια που έχει σύνορο το



Σχήμα 9.34: Ασκήσεις 15 και 16

κύκλωμα. Η επιφάνεια του κυκλώματος αλλάζει με το χρόνο οπότε, σύμφωνα με το νόμο Faraday, εμφανίζεται ΗΕΔ.

Ορίζω ως άξονα  $x$  τη διεύθυνση της κίνησης. Αρχή του άξονα είναι το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο αντιστάτης. Η διεύθυνση της ράβδου είναι ο άξονας  $y$  με κατεύθυνση προς τα πάνω.

Η απομάκρυνση  $x$  της ράβδου από τη θέση  $x = 0$ , στην οποία θεωρούμε ότι βρισκόταν όταν  $t = 0$ , είναι  $x(t) = vt$ . Το εμβαδόν της επιφάνειας με σύνορο τον κλειστό βρόχο είναι  $A(t) = \ell x(t) = \ell vt$ . Το κάθετο διάνυσμα επιφάνειας μπορούμε να το πάρουμε ως παράλληλο του  $\vec{B}$ . Η μαγνητική ροή από την επιφάνεια αυτή είναι

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA(t) = Bv\ell t.$$

Επομένως, από το νόμο Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -Bv\ell.$$

Η ισχύς  $P$  που χάνεται ως θερμότητα στον αντιστάτη είναι  $P = \mathcal{E}^2/R = B^2 v^2 \ell^2 / R$ . Με αντικατάσταση,  $P = 6 \text{ W}$ .

Η ΗΕΔ θα δημιουργήσει ρεύμα  $I$  στο βρόχο:  $I = |\mathcal{E}|/R$ . Το ρεύμα  $I$  που διαρρέει τη ράβδο έχει τέτοια φορά ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκαλεί, δηλαδή στην αύξηση της μαγνητικής ροής. Γι' αυτό πρέπει να παράγει στο εσωτερικό του βρόχου μαγνητικό πεδίο με αντίθετη φορά από το αρχικό ώστε να μειωθεί η συνολική ροή. Επομένως, η φορά του ρεύματος στη ράβδο είναι προς τα πάνω, παράλληλα στο  $\hat{j}$ .

Καθώς η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα, ασκείται δύναμη πάνω της από το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = -B\hat{k}$  που δίνεται από τη σχέση  $\vec{F} = I\ell\hat{j} \times (-B\hat{k}) = -BI\ell\hat{i}$ . Παρατηρούμε ότι η δύναμη που παράγεται έχει τέτοιο πρόσημο ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που την προκαλεί, δηλαδή την αύξηση του εμβαδού του βρόχου.

Για να έχει η ράβδος σταθερή ταχύτητα, πρέπει να ασκείται εξωτερική δύναμη ίση και αντίθετη με την  $\vec{F}$ . Άρα η άγνωστη δύναμη είναι

$$\vec{F}' = BI\ell\hat{i} \Rightarrow F' = B\ell\frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{B^2v\ell^2}{R}.$$

Με αντικατάσταση,  $F' = 3\text{ N}$ .

**Εναλλακτικός τρόπος για τον υπολογισμό της δύναμης:** Εκτός από τη θερμότητα στον αντιστάτη πουθενά αλλού δεν καταναλώνεται ενέργεια· η ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα. Η απώλεια ισχύος αντισταθμίζεται από την ισχύ της άγνωστης δύναμης,  $\vec{F}'$ . Επομένως,

$$\vec{F}' \cdot \vec{v} = P = \frac{\mathcal{E}^2}{R} = \frac{B^2v^2\ell^2}{R} \Rightarrow F' = \frac{B^2v\ell^2}{R}.$$

Με αντικατάσταση,  $F' = 3\text{ N}$ , παράλληλη στην ταχύτητα.

16. Το μήκος της ράβδου που ολισθαίνει μεταξύ των παράλληλων αγωγών στο Σχήμα 9.34 είναι  $\ell = 25\text{ cm}$ , το μαγνητικό πεδίο  $B = 0.8\text{ T}$ , η ακίνητη αντίσταση  $R = 5\ \Omega$  και η αρχική ταχύτητα  $v_0 = 1\text{ m/s}$ . Αν η ταχύτητα της κινούμενης ράβδου μειώνεται στο  $0.4v_0$  σε χρόνο  $3\text{ s}$ , ποια είναι η τιμή της μάζας της ράβδου;

### ΛΥΣΗ

Ορίζω ως άξονα  $x$  τη διεύθυνση της κίνησης. Αρχή του άξονα είναι το σημείο στο οποίο βρίσκεται ο αντιστάτης. Η διεύθυνση της ράβδου είναι ο άξονας  $y$  με κατεύθυνση προς τα πάνω.

Το εμβαδόν της επιφάνειας με σύνορο τον κλειστό βρόχο είναι  $A(t) = \ell x(t)$ , όπου  $x(t)$  η θέση της ράβδου. Το κάθετο διάνυσμα επιφάνειας μπορώ να το πάρω ως παράλληλο του  $\vec{B}$ . Η μαγνητική ροή από την επιφάνεια αυτή είναι

$$\Phi_B(t) = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = BA(t) = B\ell x(t).$$

Επομένως,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = -B\ell\frac{dx}{dt} = -B\ell v(t).$$

Η ΗΕΔ θα δημιουργήσει ρεύμα  $I$  στο βρόχο:  $I = |\mathcal{E}|/R$ . Το ρεύμα  $I$  που διαρρέει τη ράβδο έχει τέτοια φορά ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που το προκαλεί, δηλαδή στην αύξηση της μαγνητικής ροής. Γι'αυτό πρέπει να παράγει στο εσωτερικό του βρόχου μαγνητικό πεδίο με αντίθετη φορά από το αρχικό ώστε να μειωθεί η συνολική ροή. Επομένως, η φορά του ρεύματος στη ράβδο είναι προς τα πάνω, παράλληλα στο  $\hat{j}$ .

Καθώς η ράβδος διαρρέεται από ρεύμα, ασκείται δύναμη πάνω της από το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = -B\hat{k}$  που δίνεται από τη σχέση

$$\vec{F} = I\ell\hat{j} \times (-B\hat{k}) = -BI\ell\hat{i} = -\frac{B^2\ell^2 v(t)}{R}\hat{i}.$$

Παρατηρούμε ότι η δύναμη που παράγεται έχει τέτοιο πρόσημο ώστε να αντιτίθεται στο αίτιο που την προκαλεί, δηλαδή την αύξηση του εμβαδού του βρόχου.

Η δύναμη αυτή προκαλεί επιβράδυνση της ράβδου:

$$\vec{F} = m\vec{a} \Rightarrow \frac{dv}{dt} = -\frac{B^2\ell^2}{mR}v(t).$$

Ας θέσουμε για διευκόλυνση  $\tau = mR/(B\ell)^2$ . Τότε

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v(t)}{\tau} \Rightarrow \frac{dv}{v} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow \int \frac{dv}{v} = -\int \frac{dt}{\tau} \Rightarrow \ln v = -\frac{t}{\tau} + c.$$

Η σταθερή  $c$  προσδιορίζεται από την απαίτηση για  $t = 0$  να έχουμε  $v(t) = v_0$ . Επομένως,

$$\ln v(t) = -\frac{t}{\tau} + \ln v_0 \Rightarrow v(t) = v_0 e^{-t/\tau}.$$

Για  $t = 3\text{ s}$  πρέπει να έχουμε  $v(t) = 0.4v_0$ . Επομένως,  $\ln(0.4) = -3/\tau \Rightarrow -3/\ln(0.4) = \tau = mR/(B\ell)^2$ . Αντικαθιστώντας τις γνωστές ποσότητες και επιλύοντας ως προς  $m$  έχουμε

$$m = -\frac{3}{125 \ln(0.4)} \approx 26.2\text{ g}.$$

### 9.14.8 Επαγωγή

1. Βρείτε το συντελεστή αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους, ενός σωληνοειδούς με άπειρο μήκος, ακτίνα  $R$  και  $n$  σπείρες ανά μονάδα μήκους.

#### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι στο εσωτερικό σωληνοειδούς με άπειρο μήκος, που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ , το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές, παράλληλο στον άξονα του σωληνοειδούς και με μέτρο  $B = \mu_0 n I$ .

Η μαγνητική ροή από μία σπείρα διατομής  $S$  είναι

$$\Phi_1 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A}_1 = B\pi R^2 = \mu_0 n I \pi R^2.$$

Από  $N$  σπείρες η ροή είναι  $N\Phi_1$  και ο συντελεστής αυτεπαγωγής τους είναι

$$L = \frac{d(N\Phi_1)}{dI} = \mu_0 N n \pi R^2 .$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους  $\ell$  είναι

$$\frac{L}{\ell} = \mu_0 \frac{N}{\ell} n \pi R^2 = \mu_0 n^2 \pi R^2 .$$

2. Ένα εναλλασσόμενο ρεύμα  $I(t) = I_0 \cos(\omega t)$  ρέει σε ευθύγραμμο αγωγό που συμπίπτει με τον κάθετο άξονα ενός τοροειδούς σωληνοειδούς με τετράγωνη διατομή,  $N$  σπειρών. Η εσωτερική ακτίνα του σωληνοειδούς είναι  $a$  και η εξωτερική  $b$ . Το σωληνοειδές συνδέεται με αντιστάτη αντίστασης  $R$ .

- Ποια είναι η ΗΕΔ που επάγεται στο σωληνοειδές;
- Ποιο είναι το ρεύμα στον αντιστάτη,  $I_R$ ;
- Ποια είναι η επαγόμενη ΗΕΔ στο σωληνοειδές λόγω του  $I_R$ ;
- Ποιος ο λόγος του πλάτους της ΗΕΔ από αυτεπαγωγή (λόγω του  $I_R(t)$ ) προς το πλάτος της ΗΕΔ από (αμοιβαία) επαγωγή λόγω του  $I(t)$ ;

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από το ρεύμα του ευθύγραμμου αγωγού (αν αυτό δεν μεταβάλλεται γρήγορα) είναι

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} \hat{\phi} .$$

Το  $\vec{B}$  εκφράστηκε σε κυλινδρικές συντεταγμένες με άξονα  $z$  τον ευθύγραμμο αγωγό.

Μια σπείρα του σωληνοειδούς είναι τετράγωνο με πλευρά  $\ell = b - a$ . Σε κυλινδρικές συντεταγμένες έχει κάποιο σταθερό  $\phi$ ,  $r \in [a, b]$  και  $z \in [-\ell/2, \ell/2]$ . Η ροή του μαγνητικού πεδίου από αυτή την επιφάνεια ( $S$ ) είναι

$$\phi_1 = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} .$$

Το  $d\vec{A}$  είναι παράλληλο στο  $\hat{\phi}$  (άρα και στο  $\vec{B}$ ) και έχει μέτρο  $dr dz$ . Επομένως

$$\phi_1 = \int_a^b dr \int_{-(b-a)/2}^{(b-a)/2} dz \frac{\mu_0 I(t)}{2\pi r} = \frac{\mu_0 (b-a) I(t)}{2\pi} \ln(b/a) .$$

Από όλο το σωληνοειδές η ροή είναι

$$\Phi_B = N\phi_1 = \frac{\mu_0 N (b-a) I(t)}{2\pi} \ln(b/a) .$$

Η ΗΕΔ που επάγεται είναι, σύμφωνα με το νόμο Faraday,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{\mu_0 N(b-a)I_0\omega}{2\pi} \ln(b/a) \sin(\omega t) .$$

Το ρεύμα στον αντιστάτη είναι φυσικά

$$I_R(t) = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mu_0 N(b-a)I_0\omega}{2\pi R} \ln(b/a) \sin(\omega t) .$$

Ξέρουμε ότι το μαγνητικό πεδίο σε δακτυλιοειδές πηνίο που διαρρέεται από ρεύμα  $I_R$  είναι

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 N I_R(t)}{2\pi r} \hat{\phi} .$$

Η ροή του από το σωληνοειδές της άσκησης προκύπτει με τον τρόπο που ακολουθήσαμε παραπάνω (αλλάζοντας ουσιαστικά το  $I$  με  $N I_R$ ) ότι είναι

$$\tilde{\Phi}_B = \frac{\mu_0 N(b-a)N I_R(t)}{2\pi} \ln(b/a) .$$

Η ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο σωληνοειδές από αυτεπαγωγή λόγω του  $I_R$  είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_R &= \frac{d\tilde{\Phi}_B}{dt} \\ &= \frac{\mu_0 N(b-a)N}{2\pi} \ln(b/a) \frac{\mu_0 N(b-a)I_0\omega^2}{2\pi R} \ln(b/a) \cos(\omega t) \\ &= \frac{\mu_0^2 I_0 N^3 \omega^2 (b-a)^2}{4\pi^2 R} \ln^2(b/a) \cos(\omega t) . \end{aligned}$$

Ο λόγος του πλάτους της ΗΕΔ λόγω του  $I_R(t)$  προς το πλάτος της ΗΕΔ λόγω του  $I(t)$  είναι

$$\frac{\mathcal{E}_{R,0}}{\mathcal{E}_0} = \frac{\mu_0 N^2 \omega (b-a)}{2\pi R} \ln(b/a) .$$

3. Το ρεύμα σε ένα πηνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής  $L = 90 \text{ mH}$  μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τη σχέση  $I = t^2 - 6t$ , όπου το ρεύμα  $I$  μετριέται σε Α και ο χρόνος  $t$  σε s. Βρείτε την τιμή της επαγόμενης ΗΕΔ στους χρόνους (α')  $t = 1 \text{ s}$  και (β')  $t = 4 \text{ s}$ . Πότε μηδενίζεται η ΗΕΔ;

### ΛΥΣΗ

Η επαγόμενη, σύμφωνα με το νόμο Faraday, ΗΕΔ είναι

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} .$$

Επομένως,  $\mathcal{E}(t) = -L(2t - 6)$ .

Με αντικατάσταση έχουμε  $\mathcal{E}(1 \text{ s}) = 4L = 0.36 \text{ V}$  και  $\mathcal{E}(4 \text{ s}) = -2L = -0.18 \text{ V}$ .

Η ΗΕΔ μηδενίζεται όταν  $2t - 6 = 0$ , δηλαδή όταν  $t = 3 \text{ s}$ .

4. Η επαγωγή ενός πηνίου με  $N = 400$  σπείρες, πυκνά τυλιγμένες, είναι  $L = 8 \text{ mH}$ . Να υπολογίσετε τη μαγνητική ροή διαμέσου του πηνίου όταν το ρεύμα είναι  $I = 5 \text{ mA}$ .

**ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με τον ορισμό του συντελεστή αυτεπαγωγής,

$$L = \frac{d\Phi_B}{dI} \Rightarrow d\Phi_B = L dI \Rightarrow \Phi_B = LI .$$

Η προσθετική σταθερά που εμφανίζεται σε κάθε αόριστη ολοκλήρωση είναι 0 καθώς όταν  $I = 0$  (και συνεπώς,  $B = 0$ ), η μαγνητική ροή είναι  $\Phi_B = 0$ .

Η ροή από μία σπείρα του πηνίου είναι  $\phi_1 = \Phi_B/N$ .

Με αντικατάσταση,  $\Phi_B = 40 \mu\text{Wb}$  και  $\phi_1 = 0.1 \mu\text{Wb}$ .

5. Η ΗΕΔ από αυτεπαγωγή σε ένα σωληνοειδές με συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$  μεταβάλλεται συναρτήσει του χρόνου σύμφωνα με τη σχέση  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_0 e^{-kt}$ . Υποθέστε ότι το φορτίο είναι πεπερασμένο και βρείτε το συνολικό φορτίο που διέρχεται από ένα σημείο του σύρματος του σωληνοειδούς.

**ΛΥΣΗ**

Η επαγόμενη, σύμφωνα με το νόμο Faraday, ΗΕΔ είναι

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\mathcal{E}(t)/L .$$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα,

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{-kt} \Rightarrow \int dI = - \int \frac{\mathcal{E}_0}{L} e^{-kt} dt + c \Rightarrow I(t) = \frac{\mathcal{E}_0}{kL} e^{-kt} + c .$$

Η σταθερά  $c$  της αόριστης ολοκλήρωσης είναι 0 καθώς όταν  $t \rightarrow \infty$ ,  $I \rightarrow 0$ . Επομένως, για το συνολικό φορτίο  $Q$  που θα περάσει από ένα σημείο του αγωγού στο χρονικό διάστημα από 0 έως  $\infty$  έχουμε

$$Q = \int dq = \int_0^\infty I(t) dt = \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}_0}{kL} e^{-kt} dt \Rightarrow Q = -\frac{\mathcal{E}_0}{k^2 L} e^{-kt} \Big|_0^\infty = \frac{\mathcal{E}_0}{k^2 L} .$$

6. Το ρεύμα σε ένα πηνίο μεταβάλλεται από  $3.5 \text{ A}$  σε  $2 \text{ A}$ , μέσα σε χρόνο  $0.5 \text{ s}$ , διατηρώντας την ίδια φορά. Αν η μέση ΗΕΔ που επάγεται στο πηνίο είναι  $12 \text{ mV}$ , ποιος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου;



**ΛΥΣΗ**

Ο ρυθμός μεταβολής του ρεύματος είναι προσεγγιστικά

$$\frac{dI}{dt} \approx \frac{\Delta I}{\Delta t} = \frac{2 - 3.5}{0.5} = -3 \text{ A/s.}$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι

$$L = -\frac{\mathcal{E}}{dI/dt} \approx -\frac{12 \times 10^{-3}}{-3} = 4 \text{ mH.}$$

7. Ένα σωληνοειδές έχει  $N = 450$  σπείρες ομοιόμορφα τυλιγμένες, διάμετρο  $d = 15 \text{ mm}$ , μήκος  $\ell = 12 \text{ cm}$  και διαρρέεται από ρεύμα  $I = 40 \text{ mA}$ . Υπολογίστε

- το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς,
- τη μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα,
- το συντελεστή αυτεπαγωγής του σωληνοειδούς.

Ποια από τις ποσότητες αυτές εξαρτάται από το ρεύμα; Υποθέστε ότι στο εσωτερικό του σωληνοειδούς υπάρχει αέρας.

**ΛΥΣΗ**

Έχουμε δείξει ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό μακρού σωληνοειδούς έχει μέτρο

$$B = \frac{\mu I_{\text{total}}}{\ell} = \mu n I.$$

Για το συγκεκριμένο πρόβλημα  $\mu = \mu_0$ ,  $n = N/\ell = 3750$  σπείρες/m. Με αντικατάσταση,  $B = 188.5 \mu\text{T}$ .

Καθώς το μαγνητικό πεδίο είναι ομογενές στο εσωτερικό του σωληνοειδούς, η μαγνητική ροή είναι

$$\Phi_B = \int_{A_{\text{total}}} \vec{B} \cdot d\vec{A} = B A_{\text{total}} = B N \pi (d/2)^2 = \mu_0 n N \pi (d/2)^2 I.$$

Η μαγνητική ροή από μία σπείρα είναι  $\Phi_B/N = \mu_0 n \pi (d/2)^2 I$ . Με αντικατάσταση,  $33.33 \text{ nWb}$ .

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής  $L$  είναι

$$L = \frac{d\Phi_B}{dI} = \mu_0 n N \pi (d/2)^2.$$

Με αντικατάσταση,  $L = 375 \mu\text{H}$ .

Το μαγνητικό πεδίο και η μαγνητική ροή είναι ανάλογα του ρεύματος. Ο συντελεστής αυτεπαγωγής εξαρτάται από γεωμετρικά χαρακτηριστικά του κυκλώματος και από τον πυρήνα· όχι από το ρεύμα.

8. Δύο σωληνοειδή  $A$  και  $B$ , που βρίσκονται σε κοντινή απόσταση μεταξύ τους με κοινό άξονα, έχουν  $N_A = 400$  και  $N_B = 700$  σπείρες αντίστοιχα. Αν το σωληνοειδές  $A$  φέρει ρεύμα  $I_A = 3.5$  A, τότε από κάθε σπείρα του  $A$  διέρχεται μαγνητική ροή  $\phi_A = 300 \mu\text{Wb}$  και από κάθε σπείρα του  $B$  διέρχεται ροή  $\phi_B = 90 \mu\text{Wb}$ .
- Υπολογίστε τον συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής των δύο σωληνοειδών.
  - Ποιος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του  $A$ ;
  - Ποια είναι η ΗΕΔ που επάγεται στο  $B$  όταν το ρεύμα στο  $A$  μεταβάλλεται με ρυθμό  $0.5$  A/s;

**ΛΥΣΗ**

Αν  $\phi_B$  είναι η ροή από μια σπείρα του  $B$ , η συνολική ροή από τις  $N_B$  σπείρες του σωληνοειδούς  $B$  είναι  $\Phi_B = N_B \phi_B$ . Η ροή αυτή οφείλεται στο ρεύμα του  $A$  και είναι ανάλογη αυτού. Ο συντελεστής αναλογίας είναι ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής,  $M$ . Άρα  $M = N_B \phi_B / I_A = 18$  mH.

Αν  $\phi_A$  είναι η ροή από μια σπείρα του  $A$ , η συνολική ροή από τις  $N_A$  σπείρες του σωληνοειδούς  $A$  είναι  $\Phi_A = N_A \phi_A$ . Η ροή αυτή οφείλεται στο ρεύμα του  $A$  και είναι ανάλογη αυτού. Ο συντελεστής αναλογίας είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής,  $L$ . Άρα  $L = N_A \phi_A / I_A \approx 34.3$  mH.

Η ΗΕΔ στο σωληνοειδές  $B$  που επάγεται λόγω της μεταβολής του ρεύματος στο  $A$  είναι

$$\mathcal{E}_B = -M \frac{dI}{dt}.$$

Με αντικατάσταση,  $\mathcal{E}_B = -9$  mV.

9. Αποδείξτε ότι και οι δύο εκφράσεις του συντελεστή αυτεπαγωγής  $L = d\Phi_B / dI$  και  $L = -\mathcal{E} / (dI / dt)$  έχουν τις ίδιες μονάδες μέτρησης.

**ΛΥΣΗ**

Ας συμβολίσουμε με  $[X]$  τη μονάδα μέτρησης του φυσικού μεγέθους  $X$ .

Από τη σχέση

$$\frac{d\Phi_B}{dI} = -\frac{\mathcal{E}}{dI/dt}$$

προκύπτει ότι θέλουμε να δείξουμε πως  $[\Phi_B] = [\mathcal{E}][T]$ .

Καθώς  $[\Phi_B] = [B][A]$  θέλουμε να δείξουμε ότι  $[B][A] = [\mathcal{E}][T]$ . Από τις σχέσεις  $\vec{F} = q\vec{E}$  και  $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$  προκύπτει ότι  $[E] = [v][B] = [L][B]/[T]$ . Ακόμα,  $[\mathcal{E}] = [E][L]$ . Άρα  $[\mathcal{E}][T] = [E][L][T] = [B][L]^2 = [B][A]$ .

10. Όταν το ρεύμα σε ένα πηνίο 500 σπειρών μεταβάλλεται με ρυθμό  $10$  A/s, τότε στο πηνίο επάγεται ΗΕΔ  $24$  mV. Πόση είναι η μαγνητική ροή που διέρχεται από κάθε σπείρα του πηνίου τη στιγμή που το ρεύμα έχει τιμή  $4$  A;

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι

$$\mathcal{E} = -L \frac{dI}{dt} .$$

Αν λύσουμε ως προς  $L$  και αντικαταστήσουμε τις δεδομένες τιμές,  $L = 2.4 \text{ mH}$ .

Γνωρίζουμε ακόμα ότι

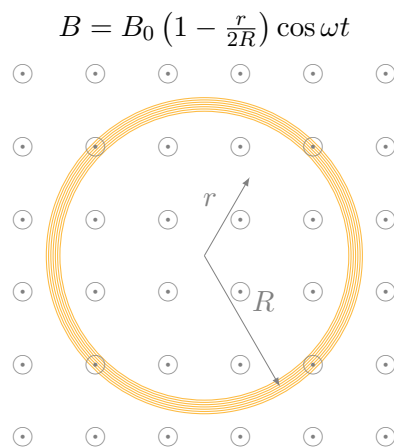
$$L = \frac{d\Phi_B}{dI} \Rightarrow L dI = d\Phi_B \Rightarrow \Phi_B = LI + c .$$

Η σταθερή  $c$  της ολοκλήρωσης είναι 0 καθώς όταν  $I = 0$  έχουμε  $\Phi_B = 0$ . Η συνολική ροή είναι  $N = 500$  φορές η ροή από μια σπείρα,  $\phi_1$ . Άρα

$$\Phi_B = LI \Rightarrow N\phi_1 = LI \Rightarrow \phi_1 = \frac{LI}{N} .$$

Με αντικατάσταση,  $\phi_1 = 19.2 \mu\text{Wb}$ .

11. Ένας κυκλικός βρόχος ακτίνας  $R$  αποτελείται από  $N$  πυκνά τυλιγμένες σπείρες σύρματος και διαπερνάται από ένα εξωτερικό μαγνητικό πεδίο το οποίο διευθύνεται κάθετα προς το επίπεδο του βρόχου. Το μέτρο του πεδίου στο επίπεδο του βρόχου είναι  $B = B_0(1 - r/(2R)) \cos \omega t$ , όπου το  $r$  μετρείται από το κέντρο του βρόχου, όπως στο Σχήμα 9.35. Υπολογίστε την εξ επαγωγής ΗΕΔ που αναπτύσσεται στο βρόχο.



Σχήμα 9.35: Άσκηση 11

**ΛΥΣΗ**

Η μαγνητική ροή από μία σπείρα του βρόχου είναι

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} .$$

Το εμβαδόν ενός στοιχειώδους τμήματος της επίπεδης επιφάνειας με σύνορο το βρόχο είναι, σε πολικές συντεταγμένες,  $dA = r dr d\theta$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα μπορούμε να το πάρουμε παράλληλο στο  $\hat{B}$ . Επομένως,

$$\begin{aligned}\phi_B &= \int_S \vec{B} \cdot d\vec{A} = \int_S B dA = \int_0^{2\pi} \int_0^R B(r, t) r dr d\theta \\ &= 2\pi \int_0^R B_0 \left(1 - \frac{r}{2R}\right) \cos \omega t r dr = 2\pi \frac{R^2}{3} B_0 \cos \omega t .\end{aligned}$$

Η συνολική ροή είναι  $\Phi_B(t) = N\phi_B(t)$ . Σύμφωνα με το νόμο Faraday, στο βρόχο θα εμφανιστεί ΗΕΔ που δίνεται από τη σχέση

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi_B}{dt} = \frac{2\pi N R^2 B_0 \omega}{3} \sin \omega t .$$

12. Μια συμπαγής λεπτή και αγώγιμη ράβδος μήκους  $L$  περιστρέφεται με μηχανική συσκευή με σταθερή γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  γύρω από ένα άξονα κάθετο στην ράβδο, ο οποίος διέρχεται από το μέσο της. Αν στην περιοχή αυτή υπάρχει ομογενές μαγνητικό πεδίο παράλληλο προς τον άξονα περιστροφής της ράβδου, αποδείξτε ότι η επαγόμενη ΗΕΔ μεταξύ του μέσου της ράβδου και ενός από τα άκρα της είναι  $B\omega L^2/8$ .

### ΛΥΣΗ

Από την εκφώνηση έχουμε  $\vec{\omega}$  και  $\vec{B}$  παράλληλα. Έστω ότι ορίζουν τον άξονα  $z$  στις κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \phi, z)$ .

Η ταχύτητα κάθε ελεύθερου ηλεκτρονίου που βρίσκεται σε απόσταση  $r$  από το μέσο της ράβδου είναι  $\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} = \omega r \hat{\phi}$ . Αν  $-e$  είναι το φορτίο του, ασκείται πάνω του δύναμη από το μαγνητικό πεδίο ίση με

$$\vec{F}_B = (-e)\vec{v} \times \vec{B} = -e\omega r B \hat{r} .$$

Τα ηλεκτρόνια υπό την επίρεια αυτής της δύναμης κινούνται προς το μέσο της ράβδου αφήνοντας περίσσεια θετικών φορτίων στα άκρα. Η συσσώρευση αντίθετων φορτίων σε άκρο και μέσο προκαλεί την εμφάνιση ολόένα αυξανόμενου ηλεκτρικού πεδίου  $\vec{E} = -E\hat{r}$  που ασκεί δύναμη στα ελεύθερα ηλεκτρόνια  $\vec{F}_E = (-e)(-E)\hat{r}$ . Η κατευθυνόμενη κίνηση των ηλεκτρονίων σταματά όταν οι δύο δυνάμεις έχουν συνισταμένη  $\vec{0}$ :

$$\vec{F}_B + \vec{F}_E = \vec{0} \Rightarrow E(r) = \omega r B .$$

Η ΗΕΔ κατά μήκος της ράβδου από ένα άκρο προς το μέσο (καμπύλη  $C$ ,  $d\vec{s} = -dr\hat{r}$ ) είναι

$$\mathcal{E} = -\int_C \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^{L/2} E(r) dr = B\omega \int_0^{L/2} r dr = \frac{B\omega L^2}{8} .$$

13. Δύο πηνία A και B είναι τυλιγμένα με σύρμα ίσων μηκών. Κάθε πηνίο έχει τον ίδιο αριθμό σπειρών ανά μονάδα μήκους, αλλά το πηνίο A έχει διπλάσιο αριθμό σπειρών από το πηνίο B. Ποιος είναι ο λόγος του συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου A προς τον συντελεστή του B;

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι σε ένα πηνίο χωρίς πυρήνα, με  $N$  σπείρες, μήκος  $\ell$ , πυκνότητα σπειρών  $n = N/\ell$  και ακτίνα  $r$ , το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του έχει μέτρο  $B = \mu_0 n I$ . Η συνολική επιφάνεια είναι  $A = N\pi r^2$  και συνεπώς η μαγνητική ροή είναι  $\Phi_B = BA = \mu_0 n I N \pi r^2$ . Ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι  $L = d\Phi_B / dI = \mu_0 n N \pi r^2$ .

Το μήκος  $D$  του σύρματος που αποτελεί το πηνίο είναι  $N$  φορές η περιφέρεια μιας σπείρας, δηλαδή  $D = 2\pi r N$ . Άρα  $r = D/(2\pi N)$  και  $L = \mu_0 n D^2 / (4\pi N)$ . Τα δύο πηνία έχουν ίδιο πυρήνα, ίδιο  $D$ , ίδιο  $n$  αλλά  $N_A = 2N_B$ . Επομένως

$$\frac{L_A}{L_B} = \frac{\mu_0 n D^2 / (4\pi N_A)}{\mu_0 n D^2 / (4\pi N_B)} = \frac{N_B}{N_A} = \frac{1}{2}.$$

14. Ένα πηνίο 50 σπειρών είναι τυλιγμένο στο κεντρικό τμήμα ενός σωληνοειδούς μεγάλου μήκους. Το σωληνοειδές έχει επιφάνεια διατομής  $8.8 \times 10^{-3} \text{ m}^2$  και είναι ομοιόμορφα τυλιγμένο με 1000 σπείρες ανά μέτρο μήκους. Υπολογίστε το συντελεστή αμοιβαίας επαγωγής των δύο πηνίων.

**ΛΥΣΗ**

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό μακρού σωληνοειδούς είναι παράλληλο στον άξονά του και ομογενές. Έχει μέτρο  $B = \mu_0 n I$ , όπου  $n$  η πυκνότητα των σπειρών και  $I$  το ρεύμα που διαρρέει το σωληνοειδές.

Η ροή αυτού του μαγνητικού πεδίου από το δεύτερο πηνίο είναι  $\Phi_{B,12} = BA_{\text{total}}$ . Ο συντελεστής αμοιβαίας επαγωγής είναι

$$M = \frac{d\Phi_{B,12}}{dI} = \mu_0 n A_{\text{total}} = \mu_0 n N A.$$

Με αντικατάσταση,  $M \approx 553 \mu\text{H}$ .

**9.14.9 Μαγνητική ενέργεια**

1. Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό ενός υπεραγωγίμου σωληνοειδούς είναι  $B = 4.5 \text{ T}$ . Το σωληνοειδές έχει εσωτερική διάμετρο  $d = 6.2 \text{ cm}$  και μήκος  $\ell = 26 \text{ cm}$ . Βρείτε
  - την πυκνότητα της μαγνητικής ενέργειας του πεδίου και
  - την ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς.

**ΛΥΣΗ**

Η πυκνότητα μαγνητικής ενέργειας στο εσωτερικό του σωληνοειδούς είναι

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Με αντικατάσταση,  $u_B \approx 8.06 \text{ MJ/m}^3$ .

Η συνολική μαγνητική ενέργεια στον όγκο  $V$  του σωληνοειδούς είναι

$$U = \iiint_V u_B dV = u_B V.$$

Ο όγκος του κυλίνδρου με διάμετρο  $d$  και μήκος  $\ell$  είναι  $V = \pi(d/2)^2 \ell$ . Με αντικατάσταση,  $U \approx 6325 \text{ J}$ .

2. Υπολογίστε την πυκνότητα ενέργειας του μαγνητικού πεδίου κοντά στο κέντρο ενός πυκνά τυλιγμένου σωληνοειδούς  $n = 990$  σπειρών ανά μέτρο, όταν το ρεύμα που το διαρρέει είναι  $I = 2.8 \text{ A}$ .

**ΛΥΣΗ**

Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς γνωρίζουμε ότι είναι  $B = \mu_0 n I$ . Γνωρίζουμε επίσης ότι η πυκνότητα ενέργειας του πεδίου είναι

$$u_B = \frac{B^2}{2\mu_0}.$$

Άρα

$$u_B = \frac{\mu_0 n^2 I^2}{2}.$$

Με αντικατάσταση,  $u_B = 4.83 \text{ J/m}^3$ .

3. Υπολογίστε την ενέργεια που αποθηκεύεται σε τμήμα μήκους  $\ell$  ενός σωληνοειδούς άπειρου μήκους, με ακτίνα  $R$ , με  $n$  σπείρες ανά μονάδα μήκους, που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ .

**ΛΥΣΗ**

**α' τρόπος** Γνωρίζουμε ότι η συνολική ενέργεια που έχει αποθηκευτεί στο μαγνητικό πεδίο ενός βρόχου με συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$ , που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  είναι

$$U = \frac{1}{2} L I^2.$$

Ξέρουμε ότι σε ένα ιδανικό σωληνοειδές το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό είναι παράλληλο στον άξονα του σωληνοειδούς με μέτρο  $B = \mu_0 n I$

ενώ εκτός είναι 0. Στο τμήμα με μήκος  $\ell$  υπάρχουν  $N = n\ell$  σπείρες με εμβαδό  $\pi R^2$  η κάθε μία. Η ροή του μαγνητικού πεδίου από αυτές

$$\Phi = B(n\ell\pi R^2) = \mu_0 I n^2 \ell \pi R^2 .$$

Ο συντελεστής αυτεπαγωγής είναι

$$L = \frac{\Phi}{I} = \mu_0 n^2 \ell \pi R^2 .$$

Επομένως,

$$U = \frac{1}{2} \mu_0 I^2 n^2 \ell \pi R^2 .$$

**β' τρόπος** Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας που έχει αποθηκευτεί στο μαγνητικό πεδίο ενός βρόχου με συντελεστή αυτεπαγωγής  $L$ , που διαρρέεται από ρεύμα  $I$  είναι

$$u = \frac{1}{2\mu_0} B^2 .$$

Μαγνητικό πεδίο υπάρχει μόνο στο εσωτερικό του σωληνοειδούς: είναι παράλληλο στον άξονα του σωληνοειδούς με μέτρο  $B = \mu_0 n I$ . Επομένως σε όλο τον όγκο  $\mathcal{V}$  του τμήματος σωληνοειδούς με μήκος  $\ell$  έχει αποθηκευτεί ενέργεια

$$U = \int_{\mathcal{V}} u \, d\tau = \int_{\mathcal{V}} \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \, d\tau = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \int_{\mathcal{V}} d\tau = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 I^2 \ell \pi R^2 .$$

4. Ένα ομοαξονικό καλώδιο μεγάλου μήκους αποτελείται από ένα κεντρικό κυλινδρικό ευθύγραμμο καλώδιο ακτίνας  $a$  και μια ομοαξονική κυλινδρική επιφάνεια με ακτίνα  $b$ . Ανάμεσά τους υπάρχει μονωτικό φύλλο. Στον εσωτερικό κύλινδρο ρέει ρεύμα  $I$  ομοιόμορφα κατανομημένο που επιστρέφει από την εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια με ομοιόμορφη επιφανειακή πυκνότητα. Βρείτε τον συντελεστή αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους.

### ΛΥΣΗ

Θα υπολογίσουμε το συντελεστή αυτεπαγωγής χρησιμοποιώντας τη σχέση  $U = LI^2/2$  για τη συνολική ενέργεια του μαγνητικού πεδίου. Καθώς

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_{\mathcal{V}} B^2 \, d\tau$$

πρέπει να βρούμε το μαγνητικό πεδίο πρώτα.

Λόγω της κυλινδρικής συμμετρίας, διευκολύνονται οι υπολογισμοί αν χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες,  $(r, \phi, z)$  με άξονα  $z$  τον άξονα του καλωδίου.

Το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε περιστροφή γύρω από τον  $z$  και σε μετατόπιση παράλληλα σε αυτόν. Το μαγνητικό πεδίο επομένως είναι ανεξάρτητο από τα  $\phi, z$ . Επίσης υπάρχει συμμετρία κατοπτρισμού ως προς οποιοδήποτε επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $z$ . Αυτό σημαίνει ότι το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε κάθε τέτοιο επίπεδο, δηλαδή είναι παράλληλο στο  $\hat{\phi}$ . Επομένως,  $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ .

Επιλέγουμε ένα κύκλο ακτίνας  $R$ , κάθετο στον άξονα  $z$ , με κέντρο πάνω σε αυτόν. Ο κύκλος (έστω  $C$ ) περνά από σημεία που το μαγνητικό πεδίο έχει ίδιο μέτρο. Θα εφαρμόσουμε το νόμο Ampère για να βρούμε το  $B(r)$  στο εσωτερικό του κυκλώματος.

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{in}} .$$

Έστω  $R < a$ . Το ρεύμα που περικλείεται στην  $C$  έχει πυκνότητα  $J = I/(\pi a^2)$  και είναι  $I_{\text{in}} = J\pi R^2 = I(R/a)^2$ . Ο νόμος Ampère δίνει

$$B(R)2\pi R = \mu_0 I(R^2/a^2) \Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} R .$$

Έστω  $a < R < b$ . Το συνολικό ρεύμα είναι  $I$ . Ο νόμος Ampère δίνει

$$B(R)2\pi R = \mu_0 I \Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} .$$

Έστω  $R > b$ . Το συνολικό ρεύμα είναι  $I - I = 0$ . Ο νόμος Ampère δίνει

$$B(R)2\pi R = 0 \Rightarrow B(R) = 0 .$$

Η συνολική ενέργεια που είναι αποθηκευμένη στο μαγνητικό πεδίο σε τμήμα μήκος  $\ell$  είναι

$$U = \frac{1}{2\mu_0} \int_V B^2 d\tau$$

όπου  $V$  ο χώρος με  $0 \leq r < \infty$ ,  $0 \leq \phi < 2\pi$ ,  $0 \leq z \leq \ell$ . Άρα

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2\mu_0} \int_0^\ell \int_0^{2\pi} \int_0^\infty B^2(r) r dr d\phi dz \\ &= 2\pi\ell \left( \int_0^a \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} \right)^2 r^3 dr + \int_a^b \left( \frac{\mu_0 I}{2\pi} \right)^2 \frac{1}{r} dr \right) \\ &= \frac{\mu_0 I^2}{4\pi} \ell \left( \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right) . \end{aligned}$$

Καταλήγουμε ότι

$$L = \frac{2U}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} \ell \left( \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right) .$$



Ο συντελεστής αυτεπαγωγής ανά μονάδα μήκους είναι

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{2\pi} \left( \frac{1}{4} + \ln \left( \frac{b}{a} \right) \right) .$$

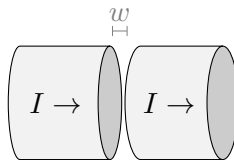
Στην περίπτωση που  $a = b$  (δηλαδή δεν υπάρχει κενός χώρος μεταξύ των αγωγών) προκύπτει ότι

$$\frac{L}{\ell} = \frac{\mu_0}{8\pi} .$$

ανεξάρτητα από το  $a$ .

### 9.14.10 Εξισώσεις Maxwell

- Ένας κυλινδρικός αγωγός με ακτίνα  $a$  διαρρέεται από σταθερό ρεύμα  $I$ , ομοιόμορφα κατανεμημένο. Ένα μικρό διάκενο στον αγωγό, με μήκος  $w \ll a$ , σχηματίζει ένα πυκνωτή με παράλληλους επίπεδους οπλισμούς. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του πυκνωτή, σε μικρή απόσταση από τον άξονα.



Σχήμα 9.36: Άσκηση 1

#### ΛΥΣΗ

Λόγω της συμμετρίας μας διευκολύνουν οι κυλινδρικές συντεταγμένες, με άξονα  $z$  τον αγωγό.

Η χωρική πυκνότητα ρεύματος είναι  $\vec{J} = I/(\pi a^2)\hat{z}$ . Υπάρχει συσσώρευση φορτίου, αρνητικού/θετικού, στους «οπλισμούς» και μάλιστα αυτή μεταβάλλεται με το χρόνο. Ο ρυθμός μεταβολής είναι το  $I$ .

Έστω ότι σε κάποια χρονική στιγμή υπάρχει στις δύο επιφάνειες του διακενου φορτίο  $\pm Q$ . Η επιφανειακή πυκνότητα φορτίου είναι  $\sigma = \pm Q/(\pi a^2)$ . Για μικρές αποστάσεις από τον άξονα, μπορούμε να θεωρήσουμε τους οπλισμούς ότι έχουν πολύ μεγάλη επιφάνεια. Γνωρίζουμε ότι σε πυκνωτή με επιφανειακή πυκνότητα φορτίου στους οπλισμούς  $\pm\sigma$ , το ηλεκτρικό πεδίο ανάμεσα έχει μέτρο  $\sigma/\epsilon_0$  και είναι κάθετο στους οπλισμούς, με φορά από τα θετικά φορτία προς τα αρνητικά:

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{z} = \frac{Q}{\pi \epsilon_0 a^2} \hat{z} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial t} = \frac{I}{\pi \epsilon_0 a^2} \hat{z} .$$

Στο κενό δεν υπάρχει πυκνότητα ρεύματος αλλά μόνο το ρεύμα μετατόπισης:  $\vec{J}_d = \epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t$ . Σύμφωνα με το νόμο Ampère

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \left( \frac{I}{\pi a^2} \hat{z} \right) \cdot d\vec{A}.$$

Η κατανομή ρεύματος είναι συμμετρική σε κατοπτρισμό ως προς οποιοδήποτε επίπεδο περιλαμβάνει τον άξονα  $z$ . Το μαγνητικό πεδίο πρέπει να είναι κάθετο σε κάθε τέτοια επιφάνεια. Επομένως,  $\vec{B} = B\hat{\phi}$ . Επιπλέον, λόγω κυλινδρικής συμμετρίας, το πεδίο δεν εξαρτάται από το  $\phi$ .

Επιλέγουμε ως βρόχο Ampère  $C$  ένα κύκλο κάθετο στον άξονα, μέσα στο διάκενο, με κέντρο στον άξονα και ακτίνα  $r < a$ . Σε αυτόν  $d\vec{s} = r d\phi \hat{\phi}$ . Ως επιφάνεια  $S$  επιλέγουμε τον κυκλικό δίσκο με σύνορο την καμπύλη  $C$ . Σε αυτή  $d\vec{A} = dA \hat{z}$ . Ο νόμος Ampère γίνεται

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 \int_S \frac{I}{\pi a^2} dA \Rightarrow B 2\pi r = \frac{\mu_0 I}{\pi a^2} \pi r^2 \Rightarrow B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} r.$$

2. Σε ένα ιδανικό αγωγό η αγωγιμότητα  $\sigma$  είναι άπειρη, επομένως  $\vec{E} = \vec{J}/\sigma = \vec{0}$ . Το ελεύθερο φορτίο βρίσκεται στην επιφάνεια. Δείξτε ότι

- Το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό του αγωγού είναι σταθερό ( $\partial \vec{B} / \partial t = \vec{0}$ ).
- Η ροή του μαγνητικού πεδίου από βρόχο ιδανικού αγωγού είναι σταθερή.
- Σε υπεραγωγό (ιδανικό αγωγό με μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό όχι μόνο σταθερό αλλά ακριβώς  $\vec{0}$ ) το ρεύμα ρέει μόνο στην επιφάνεια.

### ΛΥΣΗ

Καθώς στο εσωτερικό έχουμε  $\vec{E} = \vec{0}$ , ο νόμος Faraday σε διαφορική μορφή δίνει

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0},$$

Ο νόμος Faraday σε ολοκληρωτική μορφή είναι

$$\oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = -\frac{\partial \Phi_B}{\partial t}.$$

Αφού στο εσωτερικό του αγωγού  $\vec{E} = \vec{0}$  η κυκλοφορία του σε βρόχο είναι 0 και συνεπώς η μαγνητική ροή είναι σταθερή.

Ο νόμος Ampère με τη διόρθωση Maxwell είναι

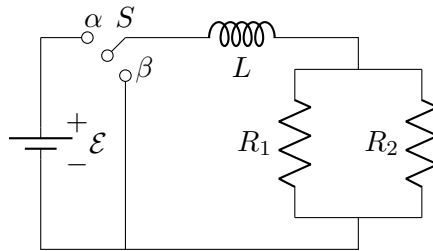
$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 J + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Αφού στο εσωτερικό υπεραγωγού  $\vec{E} = \vec{B} = \vec{0}$  πρέπει να έχουμε  $\vec{J} = \vec{0}$ . Άρα αν υπάρχει ρεύμα, είναι στην επιφάνεια.

## 9.14.11 Κυκλώματα

1. Όταν ο διακόπτης στο Σχήμα 9.37 είναι στη θέση  $\alpha$ , ποια τιμή πρέπει να έχει η  $R_1$  ώστε η σταθερά χρόνου του κυκλώματος να είναι  $15\ \mu\text{s}$ ; Πόσο είναι το ρεύμα στο πηνίο τη στιγμή που θέτουμε το διακόπτη στη θέση  $\beta$ ;

Δίνονται:  $\mathcal{E} = 24\ \text{V}$ ,  $L = 5\ \text{mH}$ ,  $R_2 = 450\ \Omega$ .



Σχήμα 9.37: Άσκηση 1

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι η σταθερά χρόνου σε ένα κύκλωμα  $RL$  είναι  $\tau = L/R$ . Στο συγκεκριμένο κύκλωμα έχουμε παράλληλη σύνδεση των  $R_1$ ,  $R_2$ . Για τη συνολική αντίσταση  $R$  ισχύει

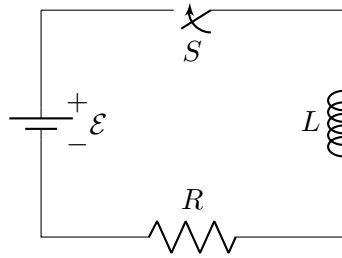
$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow \frac{\tau}{L} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Rightarrow R_1 = 1 / \left( \frac{\tau}{L} - \frac{1}{R_2} \right).$$

Με αντικατάσταση,  $R_1 \approx 1.29\ \text{k}\Omega$ .

Όταν μετακινήσουμε το διακόπτη στο  $\beta$ , μετά από πολύ χρόνο στη θέση  $\alpha$ , το ρεύμα που στιγμιαία κυκλοφορεί στον κλάδο  $LR$  είναι  $I_{\max} = \mathcal{E}/R = \mathcal{E}\tau/L$ . Με αντικατάσταση,  $I_{\max} = 72\ \text{mA}$ .

2. Στο κύκλωμα του σχήματος 9.38,  $\mathcal{E} = 6\ \text{V}$ ,  $L = 350\ \text{mH}$  και  $R = 5\ \Omega$ . Προσδιορίστε τις ακόλουθες ποσότητες σε χρόνο  $t = 0.1\ \text{s}$  μετά από το κλείσιμο του διακόπτη:

- τον ρυθμό με τον οποίο αποθηκεύεται ενέργεια στο μαγνητικό πεδίο του πηνίου,
- τη στιγμιαία ισχύ που αποδίδεται στην αντίσταση και
- το στιγμιαίο ρυθμό με τον οποίο παρέχεται ενέργεια από την μπαταρία.
- Ποιο είναι το αλγεβρικό άθροισμα των διαφορών ρυθμών μεταφορών ενέργειας;



Σχήμα 9.38: Άσκηση 2

**ΛΥΣΗ**

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα  $RL$ :

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0. \quad (9.7)$$

Θέτω  $x = \mathcal{E} - IR$ . Τότε  $dx = -R dI$  και  $x(t=0) = \mathcal{E}$  (αφού  $I(0) = 0$ ). Επομένως,

$$\begin{aligned} x = -\frac{L}{R} \frac{dx}{dt} &\Rightarrow -\frac{R}{L} dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{R}{L} \int_0^t dt = \int_{\mathcal{E}}^x \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ -\frac{R}{L} t &= \ln\left(\frac{x}{\mathcal{E}}\right) \Rightarrow x = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \Rightarrow \mathcal{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)\right) = IR. \end{aligned}$$

Επομένως, για το κύκλωμα  $RL$  ισχύει

$$I(t) = I_{\max} (1 - \exp(-t/\tau)),$$

όπου  $\tau = L/R$  η σταθερά χρόνου του κυκλώματος και  $I_{\max} = \mathcal{E}/R$ .

Η ισχύς που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι

$$P_L = |V_L| I = LI \frac{dI}{dt} = RI_{\max}^2 (1 - \exp(-t/\tau)) (\exp(-t/\tau)).$$

Η ισχύς στην αντίσταση είναι

$$P_R = V_R I = I^2 R = RI_{\max}^2 (1 - \exp(-t/\tau))^2.$$

Η ισχύς που παρέχει η μπαταρία είναι

$$P_{\mathcal{E}} = \mathcal{E} I = \mathcal{E} I_{\max} (1 - \exp(-t/\tau)).$$

Η σταθερά χρόνου έχει τιμή  $\tau = 70$  ms. Το μέγιστο ρεύμα έχει τιμή  $I_{\max} = 1.2$  A. Για  $t = 0.1$  s έχουμε  $P_L \approx 1.312$  W,  $P_R \approx 4.163$  W,  $P_{\mathcal{E}} \approx 5.475$  W.

Η ενέργεια που παρέχει η μπαταρία θα τη θεωρήσουμε θετική. Η ενέργεια που καταναλώνεται στον αντιστάτη και η ενέργεια που αποθηκεύεται στο

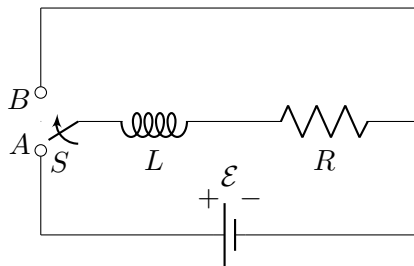
πνίο είναι αρνητικές. Για το αλγεβρικό άθροισμα των ρυθμών μεταφοράς ενέργειας οποιαδήποτε στιγμή έχουμε

$$P_{\mathcal{E}} - P_L - P_R = I \left( \mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} \right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη την 9.7, το άθροισμα είναι 0, το αναμενόμενο από τη διατήρηση ενέργειας.

3. Ένα πνίο με συντελεστή αυτεπαγωγής 140 mH και με αντίσταση 4.9 Ω συνδέεται μέσω διακόπτη με μπαταρία 6 V, Σχήμα 9.39.

- Όταν ο διακόπτης βρίσκεται στο A (σύνδεση με μπαταρία) πόσος χρόνος περνά έως ότου το ρεύμα φθάσει τα 220 mA;
- Πόσο είναι το ρεύμα που διαρρέει το πνίο 10 s μετά το κλείσιμο του διακόπτη;
- Στη συνέχεια ο διακόπτης στρέφεται γρήγορα από το A στο B. Πόσος χρόνος περνά έως ότου το ρεύμα ελαττωθεί στα 160 mA;



Σχήμα 9.39: Άσκηση 3

### ΛΥΣΗ

Στην περίπτωση που ο διακόπτης είναι στη θέση A, το κάτω κύκλωμα διαρρέεται από ρεύμα, έστω  $I$ , που υποθέτουμε ότι περνά στο τμήμα  $RL$  από αριστερά προς τα δεξιά.

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κάτω κύκλωμα:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0.$$

Η διαφορική εξίσωση που προέκυψε, λύνεται ως εξής:

$$\mathcal{E} - L \frac{dI}{dt} - IR = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = \frac{\mathcal{E} - IR}{L} \Rightarrow \frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \frac{dt}{L} \Rightarrow \int \frac{dI}{\mathcal{E} - IR} = \int \frac{dt}{L}.$$

Θέτω  $x = \mathcal{E} - IR$ . Τότε  $dx = -R dI$  και  $x(t=0) = \mathcal{E}$  (αφού  $I(0) = 0$ ). Επομένως,

$$-\frac{1}{R} \int \frac{dx}{x} = \int \frac{dt}{L} \Rightarrow \ln(x) = -\frac{R}{L}t + c.$$

Η  $c$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Όταν  $t = 0$ ,  $x = \mathcal{E}$  και τότε  $c = \ln(\mathcal{E})$ . Επομένως

$$\begin{aligned}\ln(x) = \ln(\mathcal{E}) - \frac{R}{L}t &\Rightarrow x = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \Rightarrow \mathcal{E} - IR = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{R}{L}t\right) \\ &\Rightarrow IR = \mathcal{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right) .\end{aligned}$$

Επομένως, για το κύκλωμα ισχύει

$$I(t) = I_{\max} (1 - \exp(-t/\tau)) ,$$

όπου  $\tau = L/R$  η σταθερά χρόνου του κυκλώματος και  $I_{\max} = \mathcal{E}/R$ .

Για να έχουμε ρεύμα  $I' = 220 \text{ mA}$  πρέπει

$$I' = I_{\max} (1 - \exp(-t'/\tau)) \Rightarrow t' = -\tau \ln \left(1 - \frac{I'}{I_{\max}}\right) .$$

Με αντικατάσταση,  $t' \approx 5.66 \text{ ms}$ .

Σε  $t' = 10 \text{ s}$  έχουμε  $I(t') \approx 1.22 \text{ A}$ .

Όταν ο διακόπτης πάει στο  $B$ , έχουμε ρεύμα  $I$  στο πάνω κύκλωμα. Θεωρούμε ότι είχαμε αφήσει πολύ χρόνο το διακόπτη στο  $A$  ώστε το ρεύμα να πάρει τη μέγιστή του τιμή. Ο 2ος κανόνας του Kirchhoff δίνει

$$L \frac{dI}{dt} + IR = 0 \Rightarrow \frac{dI}{dt} = -\frac{1}{\tau} I \Rightarrow \frac{dI}{I} = -\frac{dt}{\tau} \Rightarrow I(t) = I_{\max} \exp(-t/\tau) ,$$

όπου  $\tau = L/R$  η σταθερά χρόνου του κυκλώματος και  $I_{\max} = \mathcal{E}/R$ , καθώς αυτό είναι το ρεύμα για  $t = 0$ . Αυτή είναι η μέγιστη τιμή καθώς μετά το ρεύμα ελαττώνεται (το  $dI/dt$  είναι αρνητικό).

Το ρεύμα θα γίνει  $I' = 160 \text{ mA}$  όταν

$$I' = I_{\max} \exp(-t'/\tau) \Rightarrow t' = -\tau \ln \left(\frac{I'}{I_{\max}}\right) .$$

Με αντικατάσταση,  $t' \approx 58.15 \text{ ms}$ .

4. Ένα πηνίο ( $L = 400 \text{ mH}$ ), ένας πυκνωτής ( $C = 4.43 \mu\text{F}$ ) και ένας αντιστάτης ( $R = 500 \Omega$ ) συνδέονται σε σειρά. Μια πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος  $50 \text{ Hz}$  παράγει στο κύκλωμα ρεύμα μέγιστης τιμής  $250 \text{ mA}$ .

- Υπολογίστε την απαιτούμενη μέγιστη τάση  $V_0$ .
- Βρείτε τη γωνία φάσης κατά την οποία το ρεύμα προηγείται ή υστερεί της εφαρμοζόμενης τάσης.

**ΛΥΣΗ**

Από την επίλυση του κυκλώματος  $RLC$  γνωρίζουμε ότι

$$V_{\max} = I_{\max} \sqrt{R^2 + (X_C - X_L)^2},$$

όπου η χωρητική αντίσταση είναι  $X_C = 1/(\omega C)$ , η επαγωγική αντίσταση είναι  $X_L = \omega L$  και το  $\omega$  είναι  $2\pi f$ .

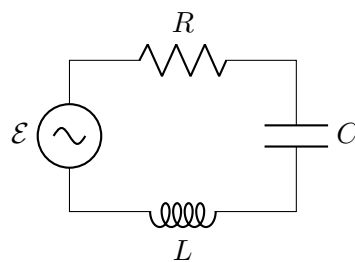
Με αντικατάσταση,  $V_{\max} \equiv V_0 \approx 193.89 \text{ V}$ .

Για τη διαφορά φάσης ρεύματος-τάσης έχουμε

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \approx -1.1857 \Rightarrow \phi \approx -0.87 \text{ rad} \approx -49.84^\circ.$$

Άρα το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά  $49.84^\circ$ .

5. Ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από τις ακόλουθες συνιστώσες:  $R = 150 \Omega$ ,  $L = 250 \text{ mH}$ ,  $C = 2 \mu\text{F}$ , καθώς και εναλλακτήρα με  $V_{\max} = 210 \text{ V}$  που λειτουργεί στα  $50 \text{ Hz}$ . Υπολογίστε (α') την επαγωγική αντίσταση, (β') τη χωρητική αντίσταση, (γ') την εμπέδηση, (δ') το ρεύμα, (ε') τη διαφορά φάσης μεταξύ ρεύματος και εφαρμοζόμενης τάσης, (στ') τη μέση ισχύ, (ζ') τη συχνότητα συντονισμού.



Σχήμα 9.40: Άσκηση 5

**ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με τη θεωρία που αναπτύχθηκε παραπάνω, και καθώς  $\omega = 2\pi f =$

$100\pi \text{ rad s}^{-1}$ , έχουμε

$$\begin{aligned} X_L &= \frac{V_{L,\max}}{I_{\max}} = \omega L = 25\pi \, \Omega, \\ X_C &= \frac{V_{C,\max}}{I_{\max}} = \frac{1}{\omega C} = 5000/\pi \, \Omega, \\ Z &= \frac{V_{\max}}{I_{\max}} = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2} \approx 1520 \, \Omega, \\ I_{\max} &= \frac{V_{\max}}{Z} \approx 0.138 \text{ A}, \\ \phi &= \tan^{-1} \left( \frac{X_L - X_C}{R} \right) \approx -84.34^\circ, \\ \langle P \rangle &= \frac{RV_{\max}^2}{2Z^2} \approx 1.43 \text{ W}, \\ f_r &= \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 225 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

6. Γιατί συνήθως το άθροισμα των μέγιστων τάσεων στα άκρα των συνιστωσών ενός εν σειρά κυκλώματος  $RLC$  εναλλασσόμενου ρεύματος είναι μεγαλύτερο από τη μέγιστη εφαρμοζόμενη εξωτερική τάση; Δεν αποτελεί αυτό παραβίαση του κανόνα των τάσεων του Kirchhoff;

#### ΛΥΣΗ

Η μέγιστη εξωτερικά εφαρμοζόμενη τάση είναι  $V_{\max} = I_{\max}Z$ . Οι μέγιστες τάσεις στα στοιχεία  $R$ ,  $L$ ,  $C$ , είναι  $I_{\max}R$ ,  $I_{\max}X_L$ ,  $I_{\max}X_C$  αντίστοιχα. Το άθροισμα των μέγιστων τάσεων είναι  $I_{\max}(R + X_L + X_C)$ . Μπορεί εύκολα ναδειχθεί ότι είναι μεγαλύτερο από το  $V_{\max} = I_{\max}\sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ . Όμως, οι μέγιστες τάσεις στα στοιχεία του κυκλώματος δεν εμφανίζονται ταυτόχρονα· υπάρχει διαφορά φάσης μεταξύ τους (χρονική καθυστέρηση). Επομένως, δεν παραβιάζεται ο δεύτερος κανόνας Kirchhoff.

7. Υπολογίστε τη συχνότητα συντονισμού ενός κυκλώματος  $RLC$  εν σειρά, στο οποίο  $C = 8.4 \mu\text{F}$  και  $L = 120 \text{ mH}$ .

#### ΛΥΣΗ

Συντονισμό, δηλαδή μηδενική διαφορά φάσης ρεύματος-τάσης, γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι έχουμε όταν η χωρητική και η επαγωγική αντίσταση στο κύκλωμα  $RLC$  είναι ίσες:

$$X_C = X_L \Rightarrow \frac{1}{\omega_r C} = \omega_r L \Rightarrow \omega_r = \frac{1}{\sqrt{LC}} \Rightarrow f_r = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}.$$

Με αντικατάσταση,  $f_r \approx 158.5 \text{ Hz}$ .



8. Ποια είναι η αντίσταση ενός λαμπτήρα πυρακτώσεως που καταναλώνει μέση ισχύ 75 W, όταν συνδεθεί με εναλλακτήρα (γεννήτρια εναλλασσόμενου ρεύματος) συχνότητας 60 Hz, στον οποίο το πλάτος της τάσης (η μέγιστη τιμή) είναι 170 V;

**ΛΥΣΗ**

Η τάση είναι  $V(t) = V_{\max} \sin(\omega t)$  όπου, στο συγκεκριμένο πρόβλημα,  $V_{\max} = 170$  V και  $\omega = 2\pi f$  με  $f = 60$  Hz.

Το ρεύμα είναι

$$I(t) = \frac{V(t)}{R} = \frac{V_{\max}}{R} \sin(\omega t) .$$

Η ισχύς που καταναλώνεται (ως φως και θερμότητα) στον λαμπτήρα είναι

$$P(t) = V(t)I(t) = \frac{V_{\max}^2}{R} \sin^2(\omega t) .$$

Η μέση ισχύς είναι

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt ,$$

όπου  $T = 1/f$  η περίοδος της τάσης και του ρεύματος. Άρα

$$\langle P \rangle = \frac{V_{\max}^2}{TR} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt = \frac{V_{\max}^2}{\omega TR} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx .$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \sin^2 x dx &= \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos(2x)}{2} dx = \pi - \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(2x) dx \\ &= \pi - \frac{1}{4} \int_0^{4\pi} \cos y dy = \pi - \frac{1}{4} \sin y \Big|_0^{4\pi} = \pi . \end{aligned}$$

Επομένως

$$\langle P \rangle = \frac{V_{\max}^2}{\omega TR} \pi = \frac{V_{\max}^2}{2R} \Rightarrow R = \frac{V_{\max}^2}{2\langle P \rangle} .$$

Με αντικατάσταση,  $R \approx 192.67 \Omega$ .

9. Ένα κύκλωμα εναλλασσόμενου ρεύματος αποτελείται από πηγή ΗΕΔ  $V = V_0 \sin(\omega t)$  συνδεδεμένη με αντίσταση  $R$ . Το ρεύμα ισούται με το 60% της μέγιστης τιμής του ρεύματος κατά τη χρονική στιγμή  $t = 0.007$  s. Ποια είναι η μικρότερη τιμή της συχνότητας της γεννήτριας που παρέχει αυτό το ρεύμα;

**ΛΥΣΗ**

Το ρεύμα είναι

$$I(t) = \frac{V_0}{R} \sin(\omega t) = I_{\max} \sin(\omega t) .$$

Καθώς  $I(t') = 0.6 I_{\max}$  έχουμε

$$\sin(\omega t') = 0.6 \Rightarrow \omega t' = \sin^{-1}(0.6) \approx \begin{cases} 0.6435 \text{ rad} \\ 2.498 \text{ rad} \end{cases}$$

Η μικρότερη συχνότητα  $f$  είναι

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \approx \frac{0.6435/t'}{2\pi} \approx 14.63 \text{ Hz} .$$

10. Σε ένα ορισμένο κύκλωμα  $RLC$  εν σειρά,  $I_{\text{rms}} = 9 \text{ A}$ ,  $V_{\text{rms}} = 180 \text{ V}$  και το ρεύμα προηγείται της τάσης κατά  $37^\circ$ .

- Ποια είναι η αντίσταση του κυκλώματος;
- Υπολογίστε τη διαφορά  $X_L - X_C$  του κυκλώματος.

**ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με τον ορισμό της εμπέδησης, ισχύει

$$Z \equiv \frac{V_{\max}}{I_{\max}} .$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι στο ημιτονοειδές ρεύμα ισχύει

$$V_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}} ,$$

και

$$I_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T I(t)^2 dt} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} .$$

Άρα

$$Z = \frac{V_{\text{rms}}}{I_{\text{rms}}} .$$

Ξέρουμε ακόμα ότι  $Z = \sqrt{R^2 + (X_L - X_C)^2}$ .

Αν το ρεύμα **έπεται** της τάσης κατά γωνία  $\phi$ , γνωρίζουμε ότι

$$\tan \phi = \frac{X_L - X_C}{R} \Rightarrow X_L - X_C = R \tan \phi . \quad (9.8)$$

Επομένως,

$$Z = \sqrt{R^2 + R^2 \tan^2 \phi} = \frac{R}{\cos \phi} \Rightarrow R = Z \cos \phi .$$

Με αντικατάσταση στην (9.8) έχουμε

$$X_L - X_C = R \tan \phi = Z \sin \phi .$$

Επομένως, με αριθμητική αντικατάσταση (προσέξτε ότι  $\phi = -37^\circ$ ) προκύπτει ότι  $Z = 20 \Omega$ ,  $R \approx 16 \Omega$ ,  $X_L - X_C \approx -12^\circ$ .

11. Πόσο είναι το μέγιστο ρεύμα σε ένα πυκνωτή  $2.2 \mu\text{F}$  όταν αυτός είναι συνδεδεμένος σε πρίζα Ευρωπαϊκού τύπου με  $\Delta V_{\text{rms}} = 240 \text{ V}$  και  $f = 50 \text{ Hz}$ ;

#### ΛΥΣΗ

Το φορτίο στον πυκνωτή είναι κάθε στιγμή  $Q(t) = CV(t)$ . Η διαφορά δυναμικού στα άκρα του είναι η τάση της πηγής,  $V(t) = V_{\text{max}} \sin(\omega t)$ . Η μεταβολή του φορτίου με το χρόνο είναι το ρεύμα στο κύκλωμα:

$$I = \frac{dQ}{dt} = CV_{\text{max}}\omega \cos(\omega t) .$$

Το μέγιστο ρεύμα είναι επομένως

$$I_{\text{max}} = CV_{\text{max}}\omega .$$

Γνωρίζουμε ότι στην ημιτονοειδή τάση  $V_{\text{rms}} = V_{\text{max}}/\sqrt{2}$ . Επίσης,  $\omega = 2\pi f$ . Συνεπώς

$$I_{\text{max}} = 2\pi\sqrt{2} CV_{\text{rms}}f .$$

Με αντικατάσταση,  $I_{\text{max}} \approx 235 \text{ mA}$ .

12. Ένα πηνίο συνδέεται με εναλλακτήρα συχνότητας  $20 \text{ Hz}$  με ενεργό τάση  $50 \text{ V}$ . (α') Ποιος είναι ο συντελεστής αυτεπαγωγής του πηνίου ώστε το στιγμιαίο ρεύμα στο κύκλωμα να είναι μικρότερο από  $80 \text{ mA}$ ; (β') Ποια είναι η επαγωγική αντίσταση;

#### ΛΥΣΗ

Καθώς στο ημιτονοειδές ρεύμα ισχύει  $V_{\text{rms}} = V_m/\sqrt{2}$ , προκύπτει ότι  $V(t) = V_m \sin(\omega t)$  με  $V_m = 50\sqrt{2} \text{ V}$  και  $\omega = 2\pi 20 \text{ Hz}$ . Επίσης ισχύει

$$V = L \frac{dI}{dt} \Rightarrow I(t) = \frac{V_m}{L} \int \sin(\omega t) dt = -\frac{V_m}{\omega L} \cos(\omega t) .$$

Για να είναι το ρεύμα κάθε στιγμή μικρότερο από  $I_m = 80 \text{ mA}$  πρέπει

$$\frac{V_m}{\omega L} < I_m \Rightarrow L > \frac{V_m}{\omega I_m} .$$

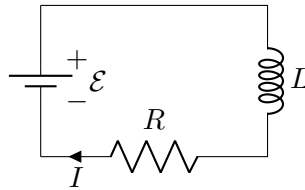
Με αντικατάσταση,  $L > 7.034 \text{ H}$ .

Η επαγωγική αντίσταση είναι

$$X_L = \frac{V_m}{I_m} = \frac{V_m}{\frac{V_m}{\omega L}} = \omega L .$$

Με αντικατάσταση,  $X_L \approx 884 \Omega$ .

13. Μια μπαταρία 12 V συνδέεται σε σειρά με μια αντίσταση και ένα πηνίο (Σχήμα 9.41). Βρείτε μια έκφραση για τη χρονική εξάρτηση του ρεύματος. Η σταθερά χρόνου του κυκλώματος είναι 500 μs και το μέγιστο ρεύμα είναι 200 mA. Ποια είναι η τιμή του συντελεστή αυτεπαγωγής του πηνίου;



Σχήμα 9.41: Άσκηση 13

### ΛΥΣΗ

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα  $RL$ :

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 .$$

Θέτω  $x = \mathcal{E} - IR$ . Τότε  $dx = -R dI$  και  $x(t=0) = \mathcal{E}$ . Επομένως,

$$\begin{aligned} x &= -\frac{L}{R} \frac{dx}{dt} \Rightarrow -\frac{R}{L} dt = \frac{dx}{x} \Rightarrow -\frac{R}{L} \int_0^t dt = \int_{\mathcal{E}}^x \frac{dx}{x} \Rightarrow \\ -\frac{R}{L} t &= \ln\left(\frac{x}{\mathcal{E}}\right) \Rightarrow x = \mathcal{E} \exp\left(-\frac{R}{L} t\right) \Rightarrow \mathcal{E} \left(1 - \exp\left(-\frac{R}{L} t\right)\right) = IR . \end{aligned}$$

Επομένως, για το κύκλωμα  $RL$  ισχύει

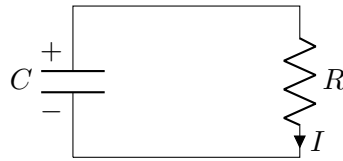
$$I = I_{\max} (1 - \exp(-t/\tau)) ,$$

όπου  $\tau = L/R$  η σταθερά χρόνου του κυκλώματος και  $I_{\max} = \mathcal{E}/R$ .

Άρα

$$\frac{\tau}{I_{\max}} = \frac{L}{\mathcal{E}} \Rightarrow L = \frac{\tau}{I_{\max}} \mathcal{E} .$$

Με αντικατάσταση,  $L = 0.03 \text{ H}$ .



Σχήμα 9.42: Άσκηση 14

14. Ένας φορτισμένος πυκνωτής 750 pF έχει αρχικό φορτίο 6 μC. Στη συνέχεια συνδέεται με αντίσταση 150 MΩ και αφήνεται να εκφορτισθεί μέσω της αντίστασης (Σχήμα 9.42). (α') Ποια είναι η σταθερά χρόνου του κυκλώματος; (β') Εκφράστε το ρεύμα του κυκλώματος και το φορτίο του πυκνωτή ως συναρτήσεις του χρόνου. (γ') Πόση ενέργεια αποθηκεύεται αρχικά στον φορτισμένο πυκνωτή; (δ') Αν ο πυκνωτής εκφορτισθεί πλήρως μέσω της αντίστασης, πόση ενέργεια καταναλώνεται υπό τη μορφή θερμότητας μέσω της αντίστασης;

**ΛΥΣΗ**

Εφαρμόζουμε το 2ο κανόνα του Kirchhoff στο κύκλωμα RC:  $V_c - IR = 0$ . Ισχύει  $V_c = Q/C$ , όπου  $Q$  το φορτίο του πυκνωτή. Επιπλέον, το ρεύμα που κυκλοφορεί στο κύκλωμα είναι ίσο με την απόλυτη τιμή του ρυθμού με τον οποίο μεταβάλλεται το φορτίο του πυκνωτή:  $I = |dQ/dt|$ . Καθώς το φορτίο μειώνεται (άρα το  $dQ/dt$  είναι αρνητικό),  $I = -dQ/dt$ . Άρα

$$\frac{Q}{C} = -R \frac{dQ}{dt} \Rightarrow -\frac{1}{RC} dt = \frac{dQ}{Q} \Rightarrow -\frac{t}{RC} = \ln Q + c \Rightarrow \exp(-t/\tau) = Qe^c,$$

όπου  $c$  η σταθερά ολοκλήρωσης και  $\tau = RC$  η σταθερά χρόνου του κυκλώματος. Καθώς όταν  $t = 0$  ισχύει  $Q = Q_{\max}$ , προκύπτει ότι  $e^c = 1/Q_{\max}$ . Επομένως

$$Q(t) = Q_{\max} \exp(-t/\tau).$$

Με αντικατάσταση,  $\tau = 0.1125$  s.

Για το ρεύμα ισχύει

$$I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{Q_{\max}}{\tau} \exp(-t/\tau).$$

Η ενέργεια που ήταν αποθηκευμένη στον πυκνωτή είναι

$$E_{\max} = \frac{Q_{\max}^2}{2C}.$$

Με αντικατάσταση  $E_{\max} = 24$  mJ.

Η ισχύς που χάνεται με τη μορφή θερμότητας στον αντιστάτη κάθε στιγμή είναι

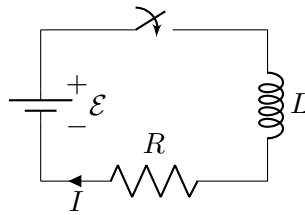
$$P(t) = I^2 R = \frac{Q_{\max}^2}{RC^2} \exp(-2t/\tau).$$

Η πλήρης εκφόρτιση γίνεται όταν  $Q(t) = 0 \Rightarrow t = \infty$ . Η συνολική ενέργεια που καταναλώνεται μέχρι την πλήρη εκφόρτιση είναι

$$E = \int_0^\infty \frac{Q_{\max}^2}{RC^2} \exp(-2t/\tau) dt \Rightarrow E = \frac{Q_{\max}^2}{2C} \int_0^\infty \exp(-x) dx = \frac{Q_{\max}^2}{2C}.$$

Όπως είναι αναμενόμενο, η συνολική θερμότητα είναι ίση με την αρχική ενέργεια.

15. Θεωρήστε ότι έχουμε το κύκλωμα στο Σχήμα 9.43, όπου  $\mathcal{E} = 24 \text{ V}$ ,  $R = 8 \Omega$ ,  $L = 4 \text{ H}$ . Πόση ενέργεια αποθηκεύεται στο πηνίο όταν το ρεύμα φτάσει την τελική τιμή ισορροπίας του μετά το κλείσιμο του διακόπτη;



Σχήμα 9.43: Άσκηση 15

### ΛΥΣΗ

Στο κύκλωμα  $RL$  ισχύει

$$\mathcal{E} - IR - L \frac{dI}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E}I - I^2 R - LI \frac{dI}{dt} = 0.$$

Η ποσότητα  $\mathcal{E}I$  είναι η ισχύς που παρέχει η μπαταρία. Η ποσότητα  $I^2 R$  είναι η ισχύς που καταναλώνεται με τη μορφή θερμότητας στον αντιστάτη. Η ποσότητα  $LI \frac{dI}{dt}$  είναι η ισχύς που αποθηκεύεται στο πηνίο.

Μέγιστο ρεύμα έχουμε όταν

$$\frac{dI(t)}{dt} = 0 \Rightarrow \mathcal{E} = I_{\max} R.$$

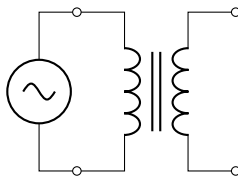
Η συνολική ενέργεια που αποθηκεύεται στο πηνίο είναι

$$E = \int_0^\infty LI \frac{dI}{dt} dt = \int_0^{I_{\max}} LI dI = \frac{1}{2} LI_{\max}^2 = \frac{1}{2} L(\mathcal{E}/R)^2.$$

Με αντικατάσταση,  $E = 18 \text{ J}$ .

## 9.14.12 Μετασχηματιστές

1. Ένας ιδανικός μετασχηματιστής αποδίδει ενεργό τάση εξόδου 2200 V όταν το πρωτεύον συνδέεται με πηγή ενεργού τάσης 110 V (Σχήμα 9.44).
  - (α') Αν το πρωτεύον πηνίο έχει 80 σπείρες, πόσες σπείρες θα χρειαστούν για το δευτερεύον πηνίο;
  - (β') Αν η αντίσταση φόρτου στο δευτερεύον διαρρέεται από ρεύμα 1.5 A, ποιο είναι το ρεύμα στο πρωτεύον πηνίο;
  - (γ') Αν η αντίσταση φόρτου στο δευτερεύον είναι  $R = 1\text{ k}\Omega$ , ποια είναι η ισοδύναμη αντίσταση λόγω της παρουσίας του μετασχηματιστή για το πρωτεύον κύκλωμα;



Σχήμα 9.44: Άσκηση 1

**ΛΥΣΗ**

Από το νόμο του Faraday και τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στο πρωτεύον κύκλωμα, η τάση της πηγής είναι ίση με την ηλεκτρεγερτική δύναμη στα άκρα του πηνίου:

$$V_1 = -\frac{d\Phi_{B,1}}{dt},$$

όπου  $\Phi_{B,1}$  η μαγνητική ροή στο πηνίο 1.

Ο νόμος του Faraday για το δευτερεύον κύκλωμα δίνει

$$V_2 = -\frac{d\Phi_{B,2}}{dt},$$

όπου  $\Phi_{B,2}$  η μαγνητική ροή στο πηνίο 2.

Στον ιδανικό μετασχηματιστή θεωρούμε ότι όλο το μαγνητικό πεδίο από το πρωτεύον κύκλωμα κατευθύνεται στο δευτερεύον με τρόπο ώστε η ροή από μία σπείρα,  $\varphi$ , είναι ίδια είτε στο πρωτεύον κύκλωμα είτε στο δευτερεύον. Άρα

$$V_1 = -N_1 \frac{d\varphi}{dt}, \quad V_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Επομένως

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow N_2 = N_1 \frac{V_2}{V_1}.$$

Καθώς στην ημιτονοειδή τάση  $V_{\text{rms}} = V_{\text{max}}/\sqrt{2}$ , προκύπτει ότι

$$N_2 = N_1 \frac{V_{2,\text{rms}}}{V_{1,\text{rms}}}.$$

Με αντικατάσταση,  $N_2 = 1600$  σπείρες.

Σε ιδανικό μετασχηματιστή δεν έχουμε απώλειες ενέργειας. Επομένως η ισχύς που παρέχεται στο πρωτεύον,  $V_1 I_1$ , είναι ίση με την ισχύ στο δευτερεύον,  $V_2 I_2$ . Άρα

$$V_1 I_1 = V_2 I_2 \Rightarrow I_1 = I_2 \frac{V_2}{V_1}.$$

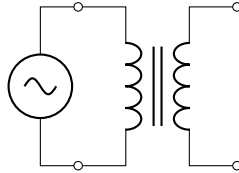
Με αντικατάσταση,  $I_1 = 30$  A.

Αν στο δευτερεύον κύκλωμα συνδέσουμε αντιστάτη με αντίσταση  $R$ , έχουμε ρεύμα  $I_2 = V_2/R$ . Η ισοδύναμη αντίσταση,  $R_{eq}$ , στο πρωτεύον είναι

$$R_{eq} = \frac{V_1}{I_1} = \frac{V_1}{I_2 \frac{V_2}{V_1}} = \frac{V_1^2}{V_2^2} R.$$

Με αντικατάσταση,  $R_{eq} = 2.5 \Omega$ .

2. Ένας μετασχηματιστής (Σχήμα 9.45) έχει  $N_1 = 350$  σπείρες και  $N_2 = 2000$  σπείρες. Εάν η τάση εισόδου είναι  $V(t) = 170 \cos(\omega t)$  V, ποια είναι η ενεργός τάση που αναπτύσσεται στους ακροδέκτες του δευτερεύοντος πηνίου;



Σχήμα 9.45: Άσκηση 2

### ΛΥΣΗ

Από το νόμο του Faraday και τον 2ο κανόνα του Kirchhoff στο πρωτεύον κύκλωμα, η τάση της πηγής είναι ίση με την ηλεκτρεγερτική δύναμη στα άκρα του πηνίου:

$$V_1 = -\frac{d\Phi_{B,1}}{dt},$$

όπου  $\Phi_{B,1}$  η μαγνητική ροή στο πηνίο 1.

Ο νόμος του Faraday για το δευτερεύον κύκλωμα δίνει

$$V_2 = -\frac{d\Phi_{B,2}}{dt},$$



όπου  $\Phi_{B,2}$  η μαγνητική ροή στο πηνίο 2.

Στον ιδανικό μετασχηματιστή θεωρούμε ότι όλο το μαγνητικό πεδίο από το πρωτεύον κύκλωμα κατευθύνεται στο δευτερεύον με τρόπο ώστε η ροή από μία σπείρα,  $\varphi$ , είναι ίδια είτε στο πρωτεύον κύκλωμα είτε στο δευτερεύον.

Άρα

$$V_1 = -N_1 \frac{d\varphi}{dt}, \quad V_2 = -N_2 \frac{d\varphi}{dt}.$$

Επομένως

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

και

$$V_2(t) = V_1(t) \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow V_{2,\max} = V_{1,\max} \frac{N_2}{N_1}.$$

Στο συνημιτονοειδές ρεύμα,  $V(t) = V_{\max} \cos(\omega t)$ , ισχύει

$$V_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\langle V(t)^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt} = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}.$$

Άρα

$$V_{2,\text{rms}} = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{1,\max} \frac{N_2}{N_1}.$$

Με αντικατάσταση,  $V_{2,\text{rms}} \approx 687 \text{ V}$ .

3. Ένας μετασχηματιστής έχει απόδοση 95% και το δευτερεύον πηνίο έχει διπλάσιο αριθμό σπειρών από το πρωτεύον. Εάν το πρωτεύον πηνίο διαρρέεται από ρεύμα 5 A όταν η ενεργός τάση είναι 120 V, ποιο είναι το ρεύμα στο δευτερεύον και η ενεργός τάση;

#### ΛΥΣΗ

Σε μετασχηματιστή με απόδοση  $\eta$ , η ισχύς στο δευτερεύον πηνίο συνδέεται με την ισχύ στο πρωτεύον με τη σχέση

$$V_2 I_2 = \eta V_1 I_1.$$

Ξέρουμε επίσης ότι  $V_{i,\text{rms}} = V_{i,\max}/\sqrt{2}$  ( $i = 1, 2$ ) και

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Επομένως,

$$V_{2,\text{rms}} = V_{1,\text{rms}} \frac{N_2}{N_1}$$

και

$$I_2 = \eta I_1 \frac{N_1}{N_2}.$$

Με αντικατάσταση,  $V_{2,\text{rms}} = 2V_{1,\text{rms}} = 240 \text{ V}$  και  $I_2 = 2.375 \text{ A}$ .

4. Όταν το πρωτεύον πηνίο ενός μετασχηματιστή ανύψωσης είναι συνδεδεμένο στα άκρα μιας πηγής 110 V (rms) τότε ο μετασχηματιστής έχει τάση εξόδου 2200 V (rms).

- Αν το πρωτεύον πηνίο έχει 80 σπείρες, πόσες πρέπει να έχει το δευτερεύον;
- Αν στα άκρα του δευτερεύοντος πηνίου υπάρχει ένας αντιστάτης φόρτου από τον οποίο διέρχεται ρεύμα 1.5 A, πόσο είναι σε ιδανικές συνθήκες το ρεύμα στο πρωτεύον πηνίο;
- Αν ο μετασχηματιστής έχει στην πραγματικότητα απόδοση 95%, πόσο είναι το ρεύμα στο πρωτεύον πηνίο όταν το ρεύμα στο δευτερεύον είναι 1.2 A;

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι σε ιδανικό μετασχηματιστή ισχύει

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι στο ημιτονοειδές ρεύμα ισχύει

$$V_{\text{rms}} \equiv \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T V(t)^2 dt} = \frac{V_{\text{max}}}{\sqrt{2}}.$$

Επομένως,

$$\frac{V_{2,\text{rms}}}{V_{1,\text{rms}}} = \frac{N_2}{N_1}.$$

Με αντικατάσταση,  $N_2 = 1600$  σπείρες.

Αν υπάρχει αντίσταση  $R = V_2/I_2$  στην έξοδο του δευτερεύοντος πηνίου, η στιγμιαία που καταναλώνει είναι  $P(t) = V_2^2(t)/R$ . Αν  $T = 1/f$  η περίοδος της τάσης, η μέση ισχύς είναι

$$\langle P \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T P(t) dt = \frac{1}{R} \frac{1}{T} \int_0^T V_2^2(t) dt = \frac{V_{2,\text{rms}}^2}{R} = V_{2,\text{rms}} I_{2,\text{rms}}.$$

Στον ιδανικό μετασχηματιστή η ισχύς στο δευτερεύον πηνίο είναι ίση με την ισχύ στο πρωτεύον. Άρα

$$V_{1,\text{rms}} I_{1,\text{rms}} = V_{2,\text{rms}} I_{2,\text{rms}} \Rightarrow I_{1,\text{rms}} = \frac{V_{2,\text{rms}}}{V_{1,\text{rms}}} I_{2,\text{rms}}.$$

Με αντικατάσταση,  $I_{1,\text{rms}} = 30$  A.

Αν ο μετασχηματιστής έχει απόδοση  $\eta$  τότε ισχύει

$$P_2 = \eta P_1 \Rightarrow \eta V_{1,\text{rms}} I_{1,\text{rms}} = V_{2,\text{rms}} I_{2,\text{rms}} \Rightarrow I_{1,\text{rms}} = \frac{1}{\eta} \frac{V_{2,\text{rms}}}{V_{1,\text{rms}}} I_{2,\text{rms}}.$$

Με αντικατάσταση,  $I_{1,\text{rms}} \approx 25.26$  A.

## Κεφάλαιο 10

# Υλικά σε μαγνητικό πεδίο

### 10.1 Μαγνητική διπολική ροπή

Η μαγνητική διπολική ροπή  $\vec{m}$  ενός βρόχου με επιφάνεια  $\vec{A}$ , που διαρρέεται από ρεύμα  $I$ , είναι το διάνυσμα

$$\vec{m} = I\vec{A}.$$

Η μαγνητική ροπή είναι κάθετη στο βρόχο. Η κατεύθυνσή της είναι αυτή που προκύπτει από τον κανόνα του δεξιού χεριού: ο αντίχειρας δείχνει το  $\vec{m}$  όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα κάμπτονται στη φορά του  $I$ .

Σε μαγνητικό δίπολο  $\vec{m}$  ασκείται δύναμη από ένα μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  με ροπή στρέψης ως προς το κέντρο του

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}.$$

Η ροπή στρέψης προσδιορίζει τον άξονα περιστροφής. Η περιστροφή είναι τέτοια ώστε να ευθυγραμμίσει το  $\vec{m}$  με το  $\vec{B}$ .

Η δυναμική ενέργεια  $U$  ενός μαγνητικού διπόλου  $\vec{m}$  σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  είναι

$$U = -\vec{m} \cdot \vec{B}.$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι η δύναμη που δέχεται ένα πολύ μικρό μαγνητικό δίπολο από μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{F} = -\nabla U = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}).$$

### 10.2 Μαγνήτιση

Εγγενής ιδιότητα των ηλεκτρονίων είναι να παρουσιάζουν μαγνητική διπολική ροπή, ανάλογη του φορτίου και του spin τους. Είναι δηλαδή μικρά μαγνητικά δίπολα. Επίσης, στα άτομα ή μόρια ενός υλικού, έχουμε το ηλεκτρονιακό νέφος που

περιστρέφεται γύρω από τον πυρήνα. Όταν ένα άτομο βρεθεί σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο, η αλληλεπίδραση των τροχιακών στροφορμών των ηλεκτρονίων με το μαγνητικό πεδίο παράγει μαγνητική διπολική ροπή. Οι δύο αυτές κατηγορίες μαγνητικών διπόλων συνεισφέρουν στη μαγνητική ροπή του υλικού.

Λόγω θερμικής κίνησης, ο προσανατολισμός των μαγνητικών διπόλων στο υλικό είναι τυχαίος και η συνολική μαγνητική ροπή είναι 0. Όταν όμως το υλικό βρεθεί σε μαγνητικό πεδίο, τα μαγνητικά δίπολα τείνουν να ευθυγραμμιστούν και εμφανίζεται μαγνητική ροπή. Σε κάποια υλικά, τα *παραμαγνητικά*, η μαγνητική ροπή είναι παράλληλη στο εξωτερικό μαγνητικό πεδίο και *έλκονται* από το πεδίο. Σε άλλα, τα *διαμαγνητικά*, η μαγνητική ροπή είναι αντιπαράλληλη στο εξωτερικό πεδίο και *απωθούνται* από αυτό. Σε κάποια, τα *φερρομαγνητικά*, η μαγνητική ροπή εμφανίζεται όταν υπάρχει εξωτερικό πεδίο αλλά διατηρείται ακόμα και όταν δεν υπάρχει αυτό. Η μαγνήτιση αυτών των υλικών και η κατεύθυνσή της εξαρτώνται όχι μόνο από το πεδίο που υπάρχει κάποια στιγμή αλλά και από τα μαγνητικά πεδία στα οποία βρέθηκε παλιότερα το υλικό. Η έλξη από μη ομογενές πεδίο στα παραμαγνητικά υλικά ή η άπωση στα διαμαγνητικά υλικά είναι πολύ πιο ασθενείς από τη δύναμη που δέχεται ένα φερρομαγνητικό υλικό, και πολύ δύσκολα παρατηρούνται.

### 10.2.1 Παραμαγνητισμός

Όπως αναφέραμε, μια «πηγή» μαγνητικής διπολικής ροπής είναι το spin. Η ροπή στρέψης  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$  στο μαγνητικό δίπολο τείνει να το ευθυγραμμίσει με το μαγνητικό πεδίο. Όμως η απαγορευτική αρχή του Pauli εφαρμοζόμενη στα ηλεκτρόνια τα αναγκάζει να δημιουργούν ζεύγη με αντίθετο spin, δηλαδή αντίθετη μαγνητική διπολική ροπή. Η συνεισφορά ενός ζεύγους ηλεκτρονίων στη συνολική μαγνήτιση είναι αμελητέα. Άτομα ή μόρια με περιττό πλήθος ηλεκτρονίων εμφανίζουν συνήθως κάποια μαγνητική διπολική ροπή (ουσιαστικά από το «μονό» ηλεκτρόνιο), που και αυτή λόγω της θερμικής κίνησης, δεν ευθυγραμμίζεται απόλυτα με το εξωτερικό πεδίο. Αυτός είναι ο κύριος μηχανισμός εμφάνισης μαγνητικής διπολικής ροπής σε ένα παραμαγνητικό υλικό.

### 10.2.2 Διαμαγνητισμός

Λόγω της περιφοράς γύρω από τον πυρήνα, ένα ηλεκτρόνιο έχει μαγνητική διπολική ροπή, ανάλογη της τροχιακής στροφορμής. Όταν το άτομο βρεθεί σε μαγνητικό πεδίο, η ροπή στρέψης στο δίπολο αναγκάζει τη στροφορμή (και τη διπολική ροπή) να περιστρέφεται γύρω από το εξωτερικό πεδίο. Από αυτό το μηχανισμό εμφανίζεται μια πολύ μικρή συνεισφορά στην ολική μαγνητική ροπή καθώς είναι πιο δύσκολο να στραφεί η τροχιακή στροφορμή (δηλαδή οι τροχιές των ηλεκτρονίων) απ' ό,τι τα spin. Η κύρια συνεισφορά, όπως είπαμε, στη μαγνήτιση ενός παραμαγνητικού υλικού είναι η ευθυγράμμιση των μαγνητικών διπόλων που οφείλονται στο spin. Όμως, η περιστροφή της τροχιακής μαγνητικής διπολικής ροπής γύρω από το πεδίο, προκαλεί επιπλέον κίνηση στα ηλεκτρόνια και παράγεται μια επιπλέον μαγνητική διπολική ροπή που είναι *αντίθετη* στο εξωτερικό μαγνητικό

πεδίο. Αυτός ο μηχανισμός είναι υπεύθυνος για το διαμαγνητισμό. Εμφανίζεται σε όλα τα υλικά αλλά είναι πολύ πιο αδύναμος από το μηχανισμό του παραμαγνητισμού. Έτσι, παρατηρείται συνήθως σε υλικά με άρτιο πλήθος ηλεκτρονίων σε κάθε άτομο, στα οποία ο παραμαγνητισμός είναι αμελητέος.

### 10.2.3 Μαγνητικό πεδίο υλικού

Ανεξάρτητα με το μηχανισμό στον οποίο οφείλεται, η μαγνητική διπολική ροπή που εμφανίζεται σε κάθε άτομο συνεισφέρει στην ολική μαγνητική ροπή του υλικού. Μπορούμε να ορίσουμε το διάνυσμα της *μαγνήτισης*,  $\vec{M}$ , ως τη μαγνητική διπολική ροπή που εμφανίζεται, ανά μονάδα όγκου:

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{d\tau}.$$

Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό δυναμικό που οφείλεται σε μαγνητικό δίπολο στην αρχή των αξόνων είναι

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2}.$$

Ένας στοιχειώδης όγκος  $d\tau$  υλικού με μαγνήτιση  $\vec{M}$  εμφανίζει μαγνητική διπολική ροπή  $\vec{M} d\tau$ . Το μαγνητικό δυναμικό από αυτόν είναι

$$d\vec{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{M} \times \hat{r}}{r^2} d\tau,$$

όπου  $\vec{r}$  το διάνυσμα από το στοιχειώδη όγκο προς το σημείο υπολογισμού. Το συνολικό μαγνητικό δυναμικό από το υλικό όγκου  $V$  είναι

$$\vec{A}(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{M} \times (\widehat{r - r'})}{|\vec{r} - \vec{r'}|^2} d\tau'.$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_S \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} (\vec{M} \times \hat{n}) dA' + \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r'}|} (\nabla \times \vec{M}) d\tau',$$

όπου  $S$  είναι η εξωτερική, κλειστή επιφάνεια του υλικού. Επομένως, το μαγνητικό δυναμικό από μαγνητισμένο υλικό ισοδυναμεί με το άθροισμα του μαγνητικού δυναμικού ενός επιφανειακού ρεύματος με πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας, και του μαγνητικού δυναμικού ενός ρεύματος με χωρική πυκνότητα  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$ . Τα ρεύματα αυτά ονομάζονται *δέσμια ρεύματα*.

## Υπολογισμός των δέσμιων ρευμάτων

Ας υπολογίσουμε το ρεύμα που διαρρέει μια οποιαδήποτε διατομή  $S$  του υλικού: έχουμε ρεύμα στο «εσωτερικό» της επιφάνειας  $S$  με πυκνότητα  $\vec{J}_b$  και ρεύμα με πυκνότητα  $\vec{K}_b$  στο σύνορο της  $S$ , μια κλειστή καμπύλη που θα τη συμβολίσουμε με  $C$ .

Το ρεύμα στην  $S$  είναι

$$I_{b,S} = \int_S \vec{J}_b \cdot d\vec{A} = \int_S (\nabla \times \vec{M}) \cdot d\vec{A} = \oint_C \vec{M} \cdot d\vec{s}.$$

Η τελευταία ισότητα προέκυψε με χρήση του θεωρήματος Stokes (§4.5) για το διανυσματικό πεδίο  $\vec{M}$ .

Το ρεύμα στην κλειστή καμπύλη  $C$ , το σύνορο της  $S$ , που βρίσκεται στην επιφάνεια του υλικού έχει πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ . Ας συμβολίσουμε με  $\vec{K}_\perp$  τη συνιστώσα του  $\vec{K}_b$  που είναι κάθετη στην καμπύλη  $C$  (δηλαδή κάθετη στο στοιχειώδες τμήμα της  $d\vec{s}$ ), και «δείχνει» στην ίδια πλευρά της επιφάνειας  $S$  με το διάνυσμα επιφάνειας  $d\vec{A}$ . Το ρεύμα που διαρρέει την  $C$  με φορά προς το «εξωτερικό» της επιφάνειας  $S$  είναι (προσέξτε ότι εμφανίζεται στον τύπο το μέτρο της  $\vec{K}_\perp$ , με τυχόν πρόσημο)

$$I_{b,C} = \oint_C K_\perp ds.$$

Ας υπολογίσουμε την  $\vec{K}_\perp$  (ώστε να βρούμε το μέτρο της). Η  $\vec{K}_\perp$  είναι κάθετη στο, εφαπτόμενο στην  $C$ , διάνυσμα  $d\vec{s}$ , άρα είναι η συνιστώσα του  $\vec{K}_b$  που βρίσκεται στο επίπεδο που σχηματίζουν το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια του υλικού (και στην καμπύλη  $C$ ),  $\hat{n}$ , και το  $\hat{n} \times d\vec{s}$  (αυτό δείχνει στο εξωτερικό της επιφάνειας  $S$ ):

$$\vec{K}_\perp = (\vec{K}_b \cdot \hat{n})\hat{n} + (\vec{K}_b \cdot (\hat{n} \times d\vec{s}))(\hat{n} \times d\vec{s}).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\vec{K}_b \cdot \hat{n} = (\vec{M} \times \hat{n}) \cdot \hat{n} = (\hat{n} \times \hat{n}) \cdot \vec{M} = 0.$$

Χρησιμοποιήσαμε τις σχέσεις  $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$  και  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$  που ισχύουν για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ .

Επομένως,

$$\vec{K}_\perp = (\vec{K}_b \cdot (\hat{n} \times d\vec{s}))(\hat{n} \times d\vec{s}) \Rightarrow K_\perp = \vec{K}_b \cdot (\hat{n} \times d\vec{s}),$$

αφού το  $\hat{n} \times d\vec{s}$  έχει μέτρο 1.

Έτσι το δέσμιο ρεύμα που περνά κάθετα την  $C$ , προς το εξωτερικό της  $S$ , γίνεται

$$I_{b,C} = \oint_C \vec{K}_b \cdot (\hat{n} \times d\vec{s}) ds = \oint_C d\vec{s} \cdot (\vec{K}_b \times \hat{n}) ds = \oint_C (\vec{K}_b \times \hat{n}) \cdot d\vec{s}.$$

Παρατηρούμε ότι  $\vec{K}_b \times \hat{n} = -\hat{n} \times \vec{K}_b = -\hat{n} \times (\vec{M} \times \hat{n})$ . Η εφαρμογή της σχέσης

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c},$$

που ισχύει για οποιαδήποτε διανύσματα  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$ , δίνει

$$\vec{K}_b \times \hat{n} = -\hat{n} \times (\vec{M} \times \hat{n}) = -(\hat{n} \cdot \hat{n})\vec{M} + (\hat{n} \cdot \vec{M})\hat{n} = -\vec{M} + (\hat{n} \cdot \vec{M})\hat{n}.$$

Το ρεύμα που περνά κάθετα την  $\mathcal{C}$  γίνεται

$$I_{b,\mathcal{C}} = \oint_{\mathcal{C}} (-\vec{M} + (\hat{n} \cdot \vec{M})\hat{n}) \cdot d\vec{s} = - \oint_{\mathcal{C}} \vec{M} \cdot d\vec{s},$$

καθώς το  $\hat{n}$  είναι κάθετο στο  $d\vec{s}$ .

Παρατηρούμε ότι  $I_{b,\mathcal{S}} = -I_{b,\mathcal{C}}$ . Επομένως, όσο ρεύμα ρέει από την επιφάνεια  $\mathcal{S}$  προς τα «έξω» τόσο ρεύμα κινείται αντίθετα στο σύνορο της  $\mathcal{S}$ .

### 10.3 Μαγνητίζον πεδίο

Βρήκαμε ότι ένα υλικό σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο μαγνητίζεται και παράγει εξαιτίας της μαγνητικής διπολικής ροπής ένα μαγνητικό πεδίο. Το πεδίο αυτό οφείλεται σε μια χωρική πυκνότητα ρεύματος  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$  και σε ένα επιφανειακό ρεύμα με πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ . Στην περιοχή του υλικού βέβαια μπορεί να υπάρχει και άλλο ρεύμα· ας το ονομάσουμε *ελεύθερο* ρεύμα. Η χωρική πυκνότητά του είναι  $\vec{J}_f$ . Συνολικά το ρεύμα έχει χωρική πυκνότητα  $\vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b$ . Ο νόμος Ampère στη διαφορική του μορφή για το συνολικό πεδίο είναι

$$\frac{1}{\mu_0} \nabla \times \vec{B} = \vec{J} = \vec{J}_f + \vec{J}_b = \vec{J}_f + \nabla \times \vec{M} \Rightarrow \nabla \times \left( \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} \right) = \vec{J}_f.$$

Το πεδίο

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M}$$

ονομάζεται *μαγνητίζον πεδίο* και η χρήση του φέρνει το νόμο Ampère σε απλή μορφή:  $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}_f$  ή σε ολοκληρωτική μορφή,

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f,$$

όπου  $I_f$  το ελεύθερο ρεύμα που περνά από επιφάνεια με όριο το βρόχο  $\mathcal{C}$ .

### 10.4 Γραμμικά μαγνητικά υλικά

Στα παραμαγνητικά και στα διαμαγνητικά υλικά, η μαγνήτιση εμφανίζεται όταν υπάρχει εξωτερικό πεδίο και εξαφανίζεται όταν το πεδίο σβήσει. Στα περισσότερα τέτοια υλικά, η μαγνήτιση που εμφανίζεται είναι ανάλογη του μαγνητίζοντος πεδίου  $\vec{H}$ , αν αυτό δεν είναι αρκετά ισχυρό:

$$\vec{M} = \chi_m \vec{H} .$$

Η σταθερά  $\chi_m$  ονομάζεται *μαγνητική επιδεκτικότητα* (magnetic susceptibility) και είναι αδιάστατο μέγεθος. Η τιμή της εξαρτάται από το υλικό και εξωτερικούς παράγοντες όπως η θερμοκρασία ή η πίεση. Είναι θετική στα παραμαγνητικά υλικά και αρνητική στα διαμαγνητικά. Στα περισσότερα υλικά η τιμή της είναι πολύ μικρή ( $1 \gg \chi_m$ ). Τα υλικά των οποίων η μαγνήτιση ικανοποιεί την παραπάνω σχέση ονομάζονται γραμμικά.

Ο ορισμός του μαγνητίζοντος πεδίου δίνει

$$\vec{H} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \chi_m \vec{H} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m) \vec{H} = \mu \vec{H} .$$

Το  $\vec{B}$  στα γραμμικά μαγνητικά υλικά είναι και αυτό ανάλογο του  $\vec{H}$ , με σταθερά αναλογίας το  $\mu = (1 + \chi_m)\mu_0$ , τη *μαγνητική διαπερατότητα* (magnetic permeability) του υλικού. Η ποσότητα  $1 + \chi_m$  είναι η *σχετική μαγνητική διαπερατότητα* του υλικού ως προς το κενό.

Σε ένα ομογενές γραμμικό μαγνητικό υλικό, δηλαδή σε υλικό που οι ιδιότητές του δεν εξαρτώνται από τη θέση ή τον προσανατολισμό, που βρίσκεται παντού<sup>1</sup>, η χωρική πυκνότητα των δέσμιων ρευμάτων είναι ανάλογη της πυκνότητας των ελεύθερων ρευμάτων:

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \nabla \times (\chi_m \vec{H}) = \chi_m \vec{J}_f .$$

<sup>1</sup>Μαθηματικά, η απαίτηση είναι να ισχύει παντού  $\nabla \cdot \vec{M} = 0$ .



## 10.5 Ασκήσεις—Λύσεις

### 10.5.1 Μαγνητική διπολική ροπή

1. Ένα ορθογώνιο πλαίσιο που αποτελείται από 225 σπείρες και έχει εμβαδόν  $0.45 \text{ m}^2$ , βρίσκεται μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο  $0.21 \text{ T}$ . Η μέγιστη ροπή που ασκείται στο πλαίσιο είναι  $8 \times 10^{-3} \text{ N m}$ .

- Υπολογίστε το ρεύμα στο πλαίσιο.
- Θα μεταβληθεί η τιμή του ρεύματος που υπολογίσατε αν το σύρμα που σχηματίζει τις 225 σπείρες χρησιμοποιηθεί ώστε να αποτελεί πλαίσιο μίας μόνο σπείρας του ίδιου σχήματος και μεγαλύτερου εμβαδού; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

#### ΛΥΣΗ

Η μαγνητική ροπή του πλαισίου είναι  $\vec{m} = NI\vec{A}$  όπου  $N$  το πλήθος των σπειρών,  $I$  το ρεύμα που τις διαρρέει και  $\vec{A}$  το διάνυσμα επιφάνειας μίας σπείρας.

Η ροπή σε μαγνητικό πεδίο είναι  $\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B}$ . Η μέγιστη τιμή είναι όταν η μαγνητική ροπή είναι κάθετη στο πεδίο:

$$\tau_{\max} = NIAB \Rightarrow I = \frac{\tau_{\max}}{NAB}.$$

Με αντικατάσταση,  $I \approx 376 \mu\text{A}$ .

Έστω ότι η σπείρα είναι ορθογώνιο με πλευρές  $a, b$ . Το μήκος του αγωγού είναι  $N \times 2(a + b)$ . Αν φτιάξω με τον αγωγό ένα ορθογώνιο με ίδιο λόγο πλευρών, αυτό θα έχει πλευρές  $Na$  και  $Nb$ . Το εμβαδόν του θα είναι  $N^2ab$  και θα έχω μία σπείρα. Άρα  $A' = N^2A$  και  $N' = 1$ . Θα διαρρέεται από ρεύμα

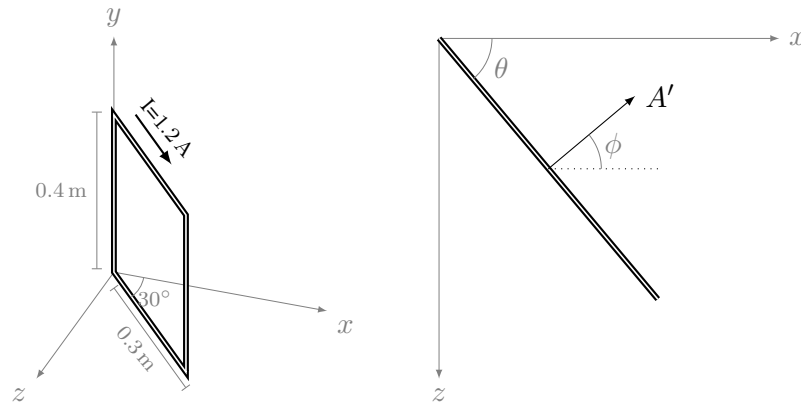
$$I' = \frac{\tau_{\max}}{N'A'B} = \frac{\tau_{\max}}{N^2AB} = \frac{I}{N}.$$

Με αντικατάσταση,  $I \approx 1.67 \mu\text{A}$ .

2. Το ορθογώνιο πλαίσιο του σχήματος 10.1 αποτελείται από 100 σπείρες. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της ροπής στρέψης που ασκείται στο πλαίσιο από ομογενές μαγνητικό πεδίο  $0.8 \text{ T}$  στην κατεύθυνση του άξονα  $x$ ; Ποια είναι η αναμενόμενη φορά περιστροφής του πλαισίου;

#### ΛΥΣΗ

Το πλαίσιο αποτελείται από  $N = 100$  σπείρες. Η καθεμιά έχει εμβαδόν  $A = 0.4 \times 0.3 = 0.12 \text{ m}^2$ . Το συνολικό εμβαδόν είναι  $A' = NA = 12 \text{ m}^2$ .



Σχήμα 10.1: Άσκηση 2

Το διάνυσμα επιφάνειας είναι στο επίπεδο  $x - z$ . Αν  $\theta$  είναι η γωνία που σχηματίζει το πλαίσιο με τον άξονα  $x$  τότε  $\vec{A}' = A'(\cos \phi \hat{i} - \sin \phi \hat{k}) = A'(\sin \theta \hat{i} - \cos \theta \hat{k})$ , αφού  $\theta + \phi = \pi/2$ .

Το ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο είναι  $I = 1.2 \text{ A}$  και βρίσκεται σε μαγνητικό πεδίο  $\vec{B} = \hat{y} 0.8 \text{ T}$ .

Η μαγνητική διπολική ροπή του πλαισίου είναι

$$\vec{m} = I\vec{A}' = INA(-\cos \theta \hat{k} + \sin \theta \hat{i}).$$

Λόγω της μαγνητικής διπολικής ροπής  $\vec{m}$ , στο πλαίσιο ασκείται δύναμη από το μαγνητικό πεδίο  $\vec{B}$  με ροπή στρέψης

$$\vec{\tau} = \vec{m} \times \vec{B} = INAB(-\cos \theta \hat{k} + \sin \theta \hat{i}) \times \hat{i} = -INAB \cos \theta \hat{j}.$$

Με αντικατάσταση,  $\vec{\tau} \approx \hat{j} 9.98 \text{ N} \cdot \text{m}$ .

Η στροφή που θα υποστεί το πλαίσιο είναι τέτοια ώστε να ευθυγραμμιστούν τα  $\vec{m}$  και  $\vec{B}$ , δηλαδή, γύρω από τον άξονα  $y$  αυξάνοντας τη γωνία  $\theta$ .

- Ένα κυκλικό πηνίο που έχει 100 σπείρες, ακτίνα  $0.025 \text{ m}$  και διαρρέεται από ρεύμα  $0.1 \text{ A}$ , βρίσκεται σε εξωτερικό μαγνητικό πεδίο  $1.5 \text{ T}$ . Πόσο έργο χρειάζεται να καταναλωθεί ώστε να περιστραφεί το πηνίο από μια θέση όπου η μαγνητική ροπή είναι παράλληλη προς το πεδίο, σε άλλη όπου η ροπή είναι αντιπαράλληλη;

### ΛΥΣΗ

Η μαγνητική ροπή του πλαισίου είναι  $\vec{m} = NI\vec{A}$  όπου  $N$  το πλήθος των σπειρών,  $I$  το ρεύμα που τις διαρρέει και  $\vec{A}$  το διάνυσμα επιφάνειας μιας σπείρας. Καθώς οι σπείρες είναι κυκλικές, η επιφάνειά τους είναι  $A = \pi R^2$ . Επομένως το  $\vec{m}$  έχει μέτρο  $m = NI\pi R^2$ .

Η δυναμική ενέργεια όταν το  $\vec{m}$  είναι παράλληλο στο  $\vec{B}$  είναι  $U_1 = -mB$ . Όταν  $\vec{m}$  και  $\vec{B}$  είναι αντιπαράλληλα, η δυναμική ενέργεια είναι  $U_2 = mB$ . Το έργο για να στραφεί το  $\vec{m}$  από παράλληλο στο  $\vec{B}$  σε αντιπαράλληλο είναι  $W = U_2 - U_1 = 2mB = 2\pi NIBR^2$ . Με αντικατάσταση,  $W = 3\pi/160 \approx 58.9 \text{ mJ}$ .

4. Μια άπειρη πλάκα που έχει πάχος από  $z = -a$  μέχρι  $z = a$ , διαρρέεται από ομογενές ρεύμα χωρικής πυκνότητας  $\vec{J} = J\hat{i}$ . Ένα μαγνητικό δίπολο  $\vec{m} = m\hat{k}$  είναι τοποθετημένο στην αρχή των αξόνων. Βρείτε τη δύναμη που δέχεται. Κάνετε το ίδιο αν το δίπολο είναι στον άξονα  $y$ .

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε από προηγούμενη άσκηση ότι το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό της πλάκας είναι  $\vec{B} = -\hat{j}\mu_0 Jz$ . Η δύναμη που δέχεται το δίπολο είναι

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla((m\hat{k}) \cdot (-\hat{j}\mu_0 Jz)) = \vec{0}.$$

Αν το δίπολο είναι  $\vec{m} = m\hat{j}$ ,

$$\vec{F} = \nabla(\vec{m} \cdot \vec{B}) = \nabla((m\hat{j}) \cdot (-\hat{j}\mu_0 Jz)) = \nabla(-m\mu_0 Jz) = -m\mu_0 J\hat{k}.$$

5. Η μαγνήτιση κορεσμού του σιδηρομαγνητικού υλικού νικελίου, όταν όλες οι ατομικές μαγνητικές ροπές είναι ευθυγραμμισμένες, είναι  $M_s = 4.7 \times 10^5 \text{ A/m}$ . Να υπολογίσετε την ατομική μαγνητική ροπή ενός ατόμου νικελίου. Η πυκνότητα του νικελίου είναι  $\rho = 8.9 \text{ g/cm}^3$  και η μοριακή μάζα του είναι  $\mathcal{M} = 58.71 \text{ g/mol}$ . Ο αριθμός Avogadro είναι  $N_A = 6.02 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$ .

### ΛΥΣΗ

Κάθε άτομο νικελίου έχει μάζα

$$m = \frac{\mathcal{M}}{N_A}.$$

Το πλήθος ατόμων στη μονάδα του όγκου είναι

$$n = \frac{\rho}{m} = \frac{\rho N_A}{\mathcal{M}}.$$

Η μέγιστη τιμή της μαγνήτισης, δηλαδή της μαγνητικής διπολικής ροπής στη μονάδα του όγκου, προκύπτει όταν τα  $n$  άτομα στη μονάδα του όγκου έχουν παράλληλες τις ατομικές μαγνητικές ροπές τους ( $\vec{m}$ ). Άρα

$$M_s = nm \Rightarrow m = \frac{M_s}{n} = \frac{M_s \mathcal{M}}{\rho N_A}.$$

Με αντικατάσταση,  $m \approx 5.666 \times 10^{-24} \text{ A} \cdot \text{m}^2 \approx 0.611 \mu_B$ .

### 10.5.2 Μαγνήτιση

6. Ένας μακρύς κύλινδρος με ακτίνα  $R$  έχει ομοιόμορφη μαγνήτιση  $\vec{M}$  παράλληλα στον άξονά του. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στο  $\vec{M}$  στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του κυλίνδρου.

#### ΛΥΣΗ

**α' τρόπος** Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από τη μαγνήτιση του κυλίνδρου είναι το πεδίο που παράγει ένα ρεύμα με χωρική πυκνότητα  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$  και ένα ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

Έστω ότι ο άξονας του κυλίνδρου είναι ο άξονας  $z$ . Τότε  $\vec{M} = M\hat{z}$ . Καθώς το  $\vec{M}$  είναι σταθερό,

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \vec{0}.$$

Ας βρούμε το επιφανειακό ρεύμα. Στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου  $\hat{n} = \hat{r}$ . Άρα

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{r} = M\hat{\phi}.$$

Η επιφανειακή κατανομή ρεύματος είναι ίδια με αυτή που έχουμε στο ιδανικό σωληνοειδές. Γνωρίζουμε ότι σε αυτό, το μαγνητικό πεδίο εκτός είναι 0 και εντός  $B = \mu_0 nI$ , παράλληλα στον άξονα. Το  $n$  είναι το πλήθος σπειρών ανά μονάδα μήκους και  $I$  είναι το ρεύμα μιας σπείρας. Επομένως  $nI$  είναι το ρεύμα που ρέει στην επιφάνεια ανά μονάδα κάθετου μήκους, δηλαδή το  $K$ . Άρα εντός του κυλίνδρου  $B = \mu_0 K\hat{z} = \mu_0 M\hat{z} = \mu_0 \vec{M}$ .

**β' τρόπος** Καθώς δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα, το μαγνητίζον πεδίο  $\vec{H}$  είναι  $\vec{0}$ . Άρα

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M}.$$

Στο εσωτερικό (που υπάρχει  $\vec{M}$ ) υπάρχει μαγνητικό πεδίο ενώ στο εξωτερικό  $\vec{B} = \vec{0}$ .

7. Ένας μακρύς κύλινδρος με ακτίνα  $R$  έχει μαγνήτιση σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $\vec{M} = kr^2\hat{\phi}$ , όπου  $k$  σταθερά. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο που οφείλεται στο  $\vec{M}$  στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του κυλίνδρου.

#### ΛΥΣΗ

**α' τρόπος** Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από τη μαγνήτιση του κυλίνδρου είναι το πεδίο που παράγει ένα ρεύμα με χωρική πυκνότητα  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$  και ένα ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

Έστω ότι ο άξονας του κυλίνδρου είναι ο άξονας  $z$ . Το  $\vec{J}_b$  είναι

$$\begin{aligned}\vec{J}_b &= \nabla \times \vec{M} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_z}{\partial \phi} - \frac{\partial M_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r M_\phi) - \frac{\partial M_r}{\partial \phi} \right) \hat{k} \\ &= \left( -\frac{\partial (kr^2)}{\partial z} \right) \hat{r} + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r(kr^2)) \right) \hat{k} = 3kr \hat{k} .\end{aligned}$$

Για το επιφανειακό ρεύμα: στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου  $\hat{n} = \hat{r}$ . Άρα

$$\vec{K}_b = \vec{M} \Big|_{r=R} \times \hat{r} = -kR^2 \hat{k} .$$

Οι πυκνότητες ρεύματος είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες  $\phi, z$ . Το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε περιστροφή γύρω από τον άξονα ή σε μετατόπιση. Την ίδια συμμετρία πρέπει να έχει το μαγνητικό πεδίο:  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ .

Οι πυκνότητες ρεύματος είναι επίσης συμμετρικές σε κατοπτρισμό ως προς οποιοδήποτε επίπεδο περιέχει τον άξονα συμμετρίας. Συνεπώς, το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στο  $\hat{\phi}$ :  $\vec{B} = B(r)\hat{\phi}$ .

Επιλέγω ένα κυκλικό βρόχο  $\mathcal{C}$  με ακτίνα  $a$  και κέντρο στον άξονα  $z$ . Αυτός περνά από σημεία που το μαγνητικό πεδίο έχει μέτρο με σταθερή τιμή  $B(a)$ . Σύμφωνα με το νόμο Ampère

$$\oint_{\mathcal{C}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I .$$

Το αριστερό μέλος είναι  $B(a)2\pi a$ , αν  $n$  φορές διαγραφής είναι  $n$  φορές του  $\hat{\phi}$ . Το ρεύμα που περνά το βρόχο με πυκνότητα  $\vec{J}$  είναι

$$I_J = \int_S \vec{J}_b \cdot d\vec{A} .$$

$S$  είναι η επιφάνεια του βρόχου.

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού και τη δεδομένη φορά διαγραφής της  $\mathcal{C}$ , το στοιχειώδες διάνυσμα κάθε τμήματος της επιφάνειας είναι παράλληλο στο  $\hat{k}$ :  $d\vec{A} = r dr d\phi \hat{k}$ . Έτσι

αν  $a \geq R$

$$I_J = \int_0^{2\pi} \int_0^R (3kr\hat{k}) \cdot (r \, dr \, d\phi\hat{k}) = 3k \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^R r^2 \, dr = 2k\pi R^3 .$$

αν  $a < R$

$$I_J = \int_0^{2\pi} \int_0^a (3kr\hat{k}) \cdot (r \, dr \, d\phi\hat{k}) = 3k \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^a r^2 \, dr = 2k\pi a^3 .$$

Σε αυτό το ρεύμα πρέπει να προσθέσουμε, αν  $a \geq R$ , το επιφανειακό ρεύμα που περνά παράλληλα στον άξονα, πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου, από κύκλο ακτίνας  $R$  (ας τον ονομάσουμε  $\mathcal{C}'$ ):

$$I_K = \int_{\mathcal{C}'} K_b \, ds = -kR^2 \int_{\mathcal{C}'} ds = -kR^2(2\pi R) = -2k\pi R^3 .$$

Συνολικά

$$I = \begin{cases} 0 & a \geq R \\ 2k\pi a^3 & a < R \end{cases} ,$$

Άρα

$$B(a) = \frac{\mu_0}{2\pi a} I = \begin{cases} 0 & a \geq R \\ \mu_0 k a^2 & a < R \end{cases} ,$$

Πιο συνοπτικά,  $\vec{B}(r) = \mu_0 \vec{M}(r)$ .

**β' τρόπος** Καθώς δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα, το μαγνητίζον πεδίο  $\vec{H}$  είναι  $\vec{0}$ . Άρα

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M} .$$

Στο εσωτερικό (που υπάρχει  $\vec{M}$ ) υπάρχει μαγνητικό πεδίο ενώ στο εξωτερικό  $\vec{B} = \vec{0}$ .

8. Ένας μακρύς κύλινδρος με ακτίνα  $R$  έχει μαγνήτιση  $\vec{M} = kr\hat{z}$ , με  $k$  σταθερά. Ο άξονας του κυλίνδρου είναι ο άξονας  $z$ . Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο εσωτερικό και στο εξωτερικό του κυλίνδρου με δύο τρόπους:

- υπολογίστε το μαγνητικό πεδίο των δέσμιων ρευμάτων,
- χρησιμοποιήστε το μαγνητίζον πεδίο.

**ΛΥΣΗ**

**α' τρόπος** Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο που παράγεται από τη μαγνήτιση του κυλίνδρου είναι το πεδίο που παράγει ένα ρεύμα με χωρική πυκνότητα  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$  και ένα ρεύμα με επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας.

Το  $\vec{J}_b$  είναι

$$\begin{aligned}\vec{J}_b &= \nabla \times \vec{M} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial M_z}{\partial \phi} - \frac{\partial M_\phi}{\partial z} \right) \hat{r} + \left( \frac{\partial M_r}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial r} \right) \hat{\phi} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial}{\partial r} (r M_\phi) - \frac{\partial M_r}{\partial \phi} \right) \hat{k} \\ &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial (kr)}{\partial \phi} - \frac{\partial (kr)}{\partial r} \right) \hat{\phi} = -k \hat{\phi}.\end{aligned}$$

Για το επιφανειακό ρεύμα: στην παράπλευρη επιφάνεια του κυλίνδρου έχουμε  $\hat{n} = \hat{r}$ . Άρα

$$\vec{K}_b = \vec{M} \Big|_{r=R} \times \hat{r} = kR \hat{\phi}.$$

Οι πυκνότητες ρεύματος είναι ανεξάρτητες από τις συντεταγμένες  $\phi, z$ . Το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε περιστροφή γύρω από τον άξονα ή σε μετατόπιση. Την ίδια συμμετρία πρέπει να έχει το μαγνητικό πεδίο:  $\vec{B} = \vec{B}(r)$ .

Σύμφωνα με το νόμο Biot-Savart, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο ρεύμα, άρα  $B_\phi = 0$ . Επιπλέον, αν κατοπτρίσουμε το ρεύμα ως προς οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου, η κατανομή παραμένει η ίδια. Σύμφωνα με τον κανόνα του κατοπτρισμού, το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο σε αυτό το επίπεδο, δηλαδή παράλληλα στον άξονα συμμετρίας:  $\vec{B} = B(r) \hat{z}$ .

Ας εφαρμόσουμε το νόμο Ampère σε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που βρίσκεται όλο εκτός του κυλίνδρου. Δύο πλευρές είναι κάθετες στον άξονα  $z$  (άρα και στο  $\vec{B}$ ) και οι άλλες δύο είναι παράλληλες. Στις κάθετες πλευρές  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  ενώ στις παράλληλες, το μαγνητικό πεδίο είναι σταθερό. Έστω ότι οι δύο παράλληλες πλευρές έχουν μήκος  $\ell$  και οι αποστάσεις τους από τον άξονα είναι  $r_1, r_2$ . Εύκολα δείχνεται ότι

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I \Rightarrow (B(r_1) - B(r_2))\ell = 0 \Rightarrow B(r_1) = B(r_2).$$

Καταλήξαμε ότι σε οποιοδήποτε αποστάσεις  $r_1, r_2$  μεγαλύτερες από την ακτίνα του κυλίνδρου, το πεδίο έχει ίδια τιμή. Σε πολύ μεγάλη απόσταση από τον άξονα, αντιλαμβανόμαστε τον κύλινδρο με ρεύματα αντίθετης φοράς σε πολύ μικρή απόσταση μεταξύ τους: οποιοδήποτε τμήμα του κυλίνδρου που διαρρέεται από ρεύμα έχει το αντιδιαμετρικό του τμήμα

σε πολύ μικρή απόσταση με αντίθετο ρεύμα. Το μαγνητικό πεδίο πολύ μακριά είναι πολύ μικρό. Σε άπειρη απόσταση γίνεται 0. Εφόσον όμως στο εξωτερικό του κυλίνδρου έχει ίδια τιμή, αυτή πρέπει να είναι ίδια με την τιμή σε άπειρη απόσταση, δηλαδή 0.

Ας ορίσουμε τώρα ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο που έχει μία πλευρά εντός του κυλίνδρου, έστω σε απόσταση  $r$ , και την παράλληλή της εκτός αυτού, σε απόσταση  $r'$ . Το μήκος αυτών των πλευρών είναι  $\ell$ . Οι δύο άλλες είναι κάθετες στον άξονα. Η κυκλοφορία του  $\vec{B}$  στη  $C$  είναι

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I_{\text{total}} .$$

Στα τμήματα της καμπύλης που είναι στο εξωτερικό του κυλίνδρου ή κάθετα στον άξονα έχουμε  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = 0$  είτε γιατί  $\vec{B} = 0$  είτε γιατί  $\vec{B}$  και  $d\vec{s}$  είναι κάθετα. Μόνο στο εσωτερικό τμήμα που είναι παράλληλο στον άξονα έχουμε  $\vec{B} \cdot d\vec{s} = B(r) ds \neq 0$ . Άρα

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = B(r) \int_0^\ell ds = B(r)\ell .$$

Έχουμε διαγράψει την καμπύλη αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.

Ένα μέρος του ρεύματος που περνά από την επιφάνεια του βρόχου,  $S$ , είναι

$$I_J = \int_S \vec{J}_b \cdot d\vec{A} .$$

Σύμφωνα με τον κανόνα του δεξιού χεριού και με δεδομένη τη φορά διαγραφής της καμπύλης  $C$ , το  $d\vec{A}$  της επιφάνειας είναι παράλληλο στο  $\hat{\phi}$ , με μέτρο  $dr dz$ . Άρα  $d\vec{A} = dr dz \hat{\phi}$  και

$$I_J = \int_r^R dr \int_0^\ell dz (-k\hat{\phi}) \cdot \hat{\phi} = k(r - R)\ell .$$

Σε αυτό πρέπει να προσθέσουμε το επιφανειακό ρεύμα  $I_K$ : αυτό έχει τιμή  $I_K = K_b \ell = kR\ell$ . Επομένως για  $r \leq R$

$$\begin{aligned} B(r)\ell &= \mu_0(I_J + I_K) = \mu_0(k(r - R) + kR)\ell \Rightarrow B(r) = \mu_0 k r \Rightarrow \\ \vec{B}(r) &= \mu_0 k r \hat{z} = \mu_0 \vec{M} . \end{aligned}$$

**β' τρόπος** Καθώς δεν υπάρχουν ελεύθερα ρεύματα, το μαγνητίζον πεδίο  $\vec{H}$  είναι  $\vec{0}$ . Άρα

$$\frac{1}{\mu_0} \vec{B} - \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow \vec{B} = \mu_0 \vec{M} .$$

Στο εσωτερικό (που υπάρχει  $\vec{M}$ ) υπάρχει μαγνητικό πεδίο ενώ στο εξωτερικό  $\vec{B} = \vec{0}$ .



9. Δείξτε ότι το μαγνητικό πεδίο ενός ιδανικού διπόλου με διπολική ροπή  $\vec{m}$  είναι

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}] .$$

**ΛΥΣΗ**

Ορίζουμε σύστημα σφαιρικών συντεταγμένων με αρχή τη θέση του διπόλου. Η διπολική ροπή ορίζει τον άξονα  $z$ :  $\vec{m} = m\hat{k}$ .

Ξέρουμε ότι το μαγνητικό δυναμικό του πεδίου που παράγει το δίπολο είναι

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \hat{r}}{r^2} = \hat{\phi} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m \sin \theta}{r^2} .$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned} \vec{B} = \nabla \times \vec{A} &= \frac{1}{r \sin \theta} \left[ \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\phi) - \frac{\partial A_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \phi} - \frac{\partial}{\partial r} (r A_\phi) \right] \hat{\theta} \\ &\quad + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} (r A_\theta) - \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] \hat{\phi} \\ &= \frac{m\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (2 \cos \theta \hat{r} + \sin \theta \hat{\theta}) . \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα  $\vec{m}$  (ο άξονας  $z$  ουσιαστικά) βρίσκεται στο επίπεδο των  $\hat{r}$ ,  $\hat{\theta}$  των σφαιρικών συντεταγμένων. Με το  $\hat{r}$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  και με το  $\hat{\theta}$  σχηματίζει γωνία  $90^\circ + \theta$ . Επομένως,

$$\vec{m} = m \cos \theta \hat{r} + m \cos(90^\circ + \theta) \hat{\theta} = m \cos \theta \hat{r} - m \sin \theta \hat{\theta} \Rightarrow m \sin \theta \hat{\theta} = m \cos \theta \hat{r} - \vec{m} .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (2m \cos \theta \hat{r} + m \sin \theta \hat{\theta}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (2m \cos \theta \hat{r} + (m \cos \theta \hat{r} - \vec{m})) \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3m \cos \theta \hat{r} - \vec{m}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} (3(\vec{m} \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}) . \end{aligned}$$

10. Δύο ιδανικά μαγνητικά δίπολα είναι παράλληλα μεταξύ τους. Βρείτε τη δυναμική ενέργεια του συστήματος και τη δύναμη που ασκείται από το ένα στο άλλο.

**ΛΥΣΗ**

Θα θεωρήσουμε το επίπεδο των παράλληλων διπόλων ως το επίπεδο  $x - z$ . Οι μαγνητικές διπολικές ροπές ορίζουν τον άξονα  $z$ :  $\vec{m}_1 = m_1 \hat{k}$ ,  $\vec{m}_2 = m_2 \hat{k}$ , και η θέση του πρώτου διπόλου ορίζει την αρχή των αξόνων.

Γνωρίζουμε ότι το μαγνητικό πεδίο από το πρώτο δίπολο είναι

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{1}{r^3} [3(\vec{m}_1 \cdot \hat{r})\hat{r} - \vec{m}_1] .$$

$\vec{r}$  είναι το διάνυσμα από το πρώτο δίπολο προς το άλλο, δηλαδή, το διάνυσμα θέσης του δεύτερου διπόλου.

Η δυναμική ενέργεια του συστήματος των διπόλων είναι

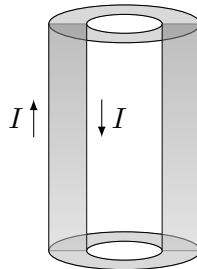
$$U = -\vec{m}_2 \cdot \vec{B} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^3} \left( 3(\hat{k} \cdot \hat{r})(\hat{k} \cdot \hat{r}) - \hat{k} \cdot \hat{k} \right) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^3} (3 \cos^2 \theta - 1) .$$

$\theta$  είναι η γωνία του διανύσματος από το πρώτο δίπολο προς το δεύτερο, με τον άξονα των διπολικών ροπών (δηλαδή, η γωνία  $\theta$  των σφαιρικών συντεταγμένων).

Η δύναμη από το πρώτο δίπολο στο δεύτερο είναι

$$\vec{F} = -\nabla U = -3 \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{m_1 m_2}{r^4} ((3 \cos^2 \theta - 1)\hat{r} + \sin(2\theta)\hat{\theta}) .$$

11. Ένα ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από δύο κυλινδρικές επιφάνειες που διαχωρίζονται από ένα γραμμικό μονωτικό υλικό με μαγνητική επιδεκτικότητα  $\chi_m$ . Ένα ρεύμα  $I$  ρέει στην εσωτερική επιφάνεια και επιστρέφει από την εξωτερική. Η κατανομή του πάνω σε κάθε επιφάνεια είναι ομοιόμορφη. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο στο χώρο ανάμεσα στις επιφάνειες.



Σχήμα 10.2: Άσκηση 11

### ΛΥΣΗ

Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας και άπειρου μήκους, το μαγνητικό (και το μαγνητίζον) πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητα από τις συντεταγμένες  $\phi$ ,  $z$  των κυλινδρικών συντεταγμένων. Ο άξονας  $z$  είναι ο άξονας του καλωδίου.

Η κατανομή των ρευμάτων είναι συμμετρική σε κατοπτρισμό ως προς οποιαδήποτε επιφάνεια που περιέχει τον άξονα  $z$ . Επομένως, μαγνητικό (και το μαγνητίζον) πεδίο είναι κάθετα σε κάθε τέτοια επιφάνεια, δηλαδή είναι παράλληλα στο  $\hat{\phi}$ . Έτσι,  $\vec{H} = H(r)\hat{\phi}$ .

**α' τρόπος** Λόγω του μαγνητικού πεδίου, δημιουργούνται δέσμια ρεύματα στο μονωτικό υλικό. Μπορούμε να αποφύγουμε τον υπολογισμό τους αν χρησιμοποιήσουμε το νόμο Ampère για το πεδίο  $\vec{H}$  σε μια κλειστή καμπύλη  $C$ :

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f .$$

Έστω ότι η  $C$  είναι κύκλος κάθετος στον άξονα  $z$ , με κέντρο στον άξονα  $z$  και ακτίνα  $R$  ανάμεσα στις ακτίνες των δύο κυλινδρικών επιφανειών. Το ελεύθερο ρεύμα που περνά την κυκλική επιφάνεια είναι  $I$ . Τότε

$$\oint_C (H\hat{\phi}) \cdot (ds\hat{\phi}) = I_f \Rightarrow H(R)2\pi R = I \Rightarrow H(R) = \frac{I}{2\pi R} .$$

Αν η ακτίνα  $R$  είναι μεγαλύτερη από την ακτίνα της εξωτερικής επιφάνειας ή μικρότερη από την ακτίνα της εσωτερικής, η καμπύλη  $C$  περικλείει μηδενικό ελεύθερο ρεύμα, οπότε εκεί  $\vec{H} = \vec{0}$ .

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B}(R) = \mu\vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \mu_0(1 + \chi_m)\frac{I}{2\pi R}\hat{\phi} .$$

**β' τρόπος** Λόγω του μαγνητικού πεδίου, δημιουργούνται δέσμια ρεύματα στο μονωτικό υλικό. Γνωρίζουμε ότι η μαγνήτιση στο γραμμικό υλικό είναι  $\vec{M} = \chi_m\vec{H}$ . Προκαλεί δέσμια ρεύματα με επιφανειακή πυκνότητα στις δύο επιφάνειες του υλικού  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$  και χωρική πυκνότητα  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$ . Το  $\vec{M}$  είναι παράλληλο στο  $\vec{H}$ , δηλαδή στο  $\hat{\phi}$ . Στις επιφάνειες το κάθετο διάνυσμα είναι  $\pm\hat{r}$ . Άρα, στην εσωτερική επιφάνεια έχουμε  $\vec{K}_i = -\chi_m H(\hat{\phi} \times \hat{r}) = \chi_m H(R_i)\hat{k}$  και στην εξωτερική  $\vec{K}_o = -\chi_m H(R_o)\hat{k}$ . Η χωρική πυκνότητα είναι

$$\vec{J}_b = \chi_m \nabla \times \vec{H} = \chi_m \frac{1}{r}(rH)'\hat{k} .$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο Ampère για το μαγνητικό πεδίο σε μια κλειστή καμπύλη  $C$ :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \mu_0 I .$$

Έστω ότι η  $C$  είναι κύκλος κάθετος στον άξονα  $z$ , με κέντρο στον άξονα  $z$  και ακτίνα  $R$  ανάμεσα στις ακτίνες των δύο κυλινδρικών επιφανειών. Το συνολικό ρεύμα που περνά την κυκλική επιφάνεια  $S$  είναι το άθροισμα του ελεύθερου ρεύματος  $I$ , του επιφανειακού ρεύματος στην εσωτερική

επιφάνεια,  $K_i(2\pi R_i)$ , και του ρεύματος μέσα στο υλικό. Το τελευταίο είναι

$$\begin{aligned} I_J &= \int_S \vec{J}_b \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_{R_i}^R r \, dr \left( \chi_m \frac{1}{r} (rH)' \right) = 2\pi \chi_m \int_{R_i}^R \frac{d(rH)}{dr} dr \\ &= 2\pi \chi_m (RH(R) - R_i H(R_i)) . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I_{\text{total}} &= I + 2\pi K_i R_i + 2\pi \chi_m (RH(R) - R_i H(R_i)) \\ &= I + 2\pi \chi_m R_i H(R_i) + 2\pi \chi_m (RH(R) - R_i H(R_i)) \\ &= I + 2\pi \chi_m RH(R) . \end{aligned}$$

Ο νόμος Ampère δίνει

$$B(R)2\pi R = \mu_0(I + 2\pi \chi_m RH(R)) .$$

Γνωρίζουμε ότι  $\vec{B} = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H}$ . Άρα

$$B(R) = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} + \mu_0 \chi_m \frac{B(R)}{\mu_0(1 + \chi_m)} \Rightarrow B(R) = \frac{\mu_0(1 + \chi_m)I}{2\pi R} .$$

12. Μια σφαίρα ακτίνας  $R$  έχει μόνιμη μαγνήτιση  $\vec{M} = M\hat{z}$ , όπου  $M$  σταθερά.

- Υπολογίστε τα δέσμια ρεύματα στο εσωτερικό και την επιφάνεια της σφαίρας.
- Βρείτε το ρεύμα που ρέει από ένα μεσημβρινό της σφαίρας, δηλαδή ένα ημικύκλιο που περνά από τα σημεία στα οποία τέμνει ο άξονας  $z$  την επιφάνεια της σφαίρας.

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι το δέσμιο ρεύμα στο εσωτερικό του υλικού έχει χωρική πυκνότητα  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$  ενώ στην επιφάνεια έχει επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$ , όπου  $\hat{n}$  το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα σε κάθε σημείο της επιφάνειας. Άρα

$$\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M} = \vec{0}$$

(αφού οι παράγωγοι σταθερής συνάρτησης είναι 0), και

$$\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n} = M\hat{z} \times \hat{r} = M \sin \theta \hat{\phi} ,$$

αφού το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια είναι το  $\hat{r}$  και η γωνία που σχηματίζει με το  $\hat{z}$  είναι  $\theta$ .

Η επιφανειακή κατανομή ρεύματος περνά κάθετα από κάθε ημικύκλιο που περνά από τους πόλους της σφαίρας. Ένα στοιχειώδες τμήμα αυτού του ημικυκλίου με μήκος  $ds = R d\theta$  διαρρέεται από ρεύμα  $dI = K_b ds = M \sin \theta R d\theta$ . Το συνολικό ρεύμα είναι

$$I = \int dI = \int_0^\pi M R \sin \theta d\theta = 2MR.$$

13. Ρεύμα  $I$  ρέει σε μακρύ ευθύγραμμο σύρμα ακτίνας  $a$ . Το σύρμα είναι από γραμμικό υλικό με επιδεκτικότητα  $\chi_m$  και το ρεύμα είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο. Βρείτε το μαγνητικό πεδίο σε απόσταση  $R$  από τον άξονα. Ποιο είναι το συνολικό ρεύμα που ρέει;

### ΛΥΣΗ

Λόγω κυλινδρικής συμμετρίας και άπειρου μήκους, το μαγνητικό (και το μαγνητίζον) πεδίο πρέπει να είναι ανεξάρτητα από τις συντεταγμένες  $\phi$ ,  $z$  των κυλινδρικών συντεταγμένων. Ο άξονας  $z$  είναι ο άξονας του καλωδίου.

Η κατανομή του ρεύματος είναι συμμετρική σε κατοπτρισμό ως προς οποιαδήποτε επιφάνεια που περιέχει τον άξονα  $z$ . Επομένως, μαγνητικό (και το μαγνητίζον) πεδίο είναι κάθετα σε κάθε τέτοια επιφάνεια, δηλαδή είναι παράλληλα στο  $\hat{\phi}$ . Έτσι,  $\vec{H} = H(r)\hat{\phi}$ .

Ο νόμος Ampère για το πεδίο  $\vec{H}$  σε κλειστή καμπύλη  $C$ , είναι

$$\oint_C \vec{H} \cdot d\vec{s} = I_f.$$

Έστω ότι η  $C$  είναι κύκλος κάθετος στον άξονα  $z$ , με κέντρο στον άξονα  $z$  και ακτίνα  $R$ . Το ελεύθερο ρεύμα που περνά την κυκλική επιφάνεια είναι  $I_f = I$ , αν  $R \geq a$ . Για  $R < a$  θα υπολογίσουμε το ρεύμα ως εξής: η πυκνότητα του ρεύματος είναι σταθερή με τιμή  $J = I/(\pi a^2)$  οπότε από την επιφάνεια  $\pi R^2$  του κύκλου περνά ρεύμα  $I_f = J\pi R^2 = I(R/a)^2$ .

Εύκολα προκύπτει ότι

$$H(R) = \frac{I_f}{2\pi R} = \begin{cases} \frac{IR}{2\pi a^2} & R < a \\ \frac{I}{2\pi R} & R \geq a \end{cases}.$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B}(R) = \mu_0(1 + \chi_m)\vec{H} = \hat{\phi} \begin{cases} \frac{\mu_0(1 + \chi_m)IR}{2\pi a^2} & R < a \\ \frac{\mu_0 I}{2\pi R} & R \geq a \end{cases}.$$

Τα δέσμια ρεύματα έχουν επιφανειακή πυκνότητα  $\vec{K}_b = \vec{M} \times \hat{n}$  και χωρική πυκνότητα  $\vec{J}_b = \nabla \times \vec{M}$ . Επίσης ξέρουμε ότι  $\vec{M} = \chi_m \vec{H}$ . Το κάθετο διάνυσμα στην εξωτερική επιφάνεια του σύρματος είναι το  $\hat{r}$  των κυλινδρικών συντεταγμένων. Άρα

$$\vec{K}_b = \chi_m \vec{H}(a) \times \hat{r} = -\frac{\chi_m I}{2\pi a} \hat{z}$$

και

$$\vec{J}_b = \chi_m \nabla \times \vec{H} = \chi_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r H_\phi) \hat{z} = \chi_m \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{I r^2}{2\pi a^2} \right) \hat{z} = \frac{\chi_m I}{\pi a^2} \hat{z}.$$

Το συνολικό δέσμιο ρεύμα που ρέει από τη διατομή του σύρματος (έστω  $S$ ) είναι

$$I_J = \int_S \vec{J}_b \cdot d\vec{A} = J_b \pi a^2 = \chi_m I.$$

Σε αυτό πρέπει να προσθέσουμε το επιφανειακό ρεύμα,  $I_K = K_b(2\pi a) = -\chi_m I$ . Συνολικά, το δέσμιο ρεύμα είναι  $I_J + I_K = 0$  (όπως είναι αναμενόμενο) και το μόνο ρεύμα που ρέει είναι το  $I$ .

Εναλλακτικά, το συνολικό ρεύμα  $I_{\text{total}}$  μπορούμε να το υπολογίσουμε από το νόμο Ampère για το μαγνητικό πεδίο. Επιλέγουμε ως βρόχο Ampère ( $C$ ) ένα κύκλο με ακτίνα  $R > a$ , κάθετο στον άξονα του κυλίνδρου με κέντρο πάνω στον άξονα. Τότε

$$\mu_0 I_{\text{total}} = \oint_C \vec{B} \cdot d\vec{s} = \oint_C B ds = B(R) \oint_C ds = B(R) 2\pi R = \mu_0 I.$$

Άρα  $I_{\text{total}} = I$ .

## Μέρος IV

# Ηλεκτρομαγνητικά κύματα





## Κεφάλαιο 11

# Νόμοι διατήρησης ηλεκτρομαγνητισμού

### 11.1 Διατήρηση φορτίου

Έχουμε δει στην §7.2.2 την εξίσωση συνέχειας, η οποία περιγράφει τη διατήρηση του φορτίου:

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}.$$

Στην εξίσωση αυτή μπορούμε να καταλήξουμε και από τις εξισώσεις Maxwell:

$$\nabla \times \vec{B} = \mu_0 \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = \mu_0 \nabla \cdot \vec{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial (\nabla \cdot \vec{E})}{\partial t}.$$

Όμως  $\nabla \cdot (\nabla \times \vec{B}) = 0$  και  $\epsilon_0 \nabla \cdot \vec{E} = \rho$ . Η προηγούμενη εξίσωση καταλήγει στην εξίσωση συνέχειας.

Η εξίσωση συνέχειας είναι συνέπεια των βασικών νόμων της ηλεκτροδυναμικής και αποτελεί τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιούν οι πηγές του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου, τα φορτία και τα ρεύματα, σε μια περιοχή.

### 11.2 Ενέργεια

Γνωρίζουμε ότι σε ένα ηλεκτροστατικό πεδίο αποθηκεύεται ενέργεια με χωρική πυκνότητα (ενέργεια ανά μονάδα όγκου)

$$u_E = \frac{\epsilon_0}{2} E^2.$$

Αντίστοιχα, για ένα στατικό μαγνητικό πεδίο η αποθηκευμένη ενέργεια έχει πυκνότητα

$$u_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Στην περίπτωση που έχουμε ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο η πυκνότητα ενέργειας είναι

$$u = u_E + u_B = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Για να έχουμε όμως ηλεκτρομαγνητικό πεδίο, πρέπει να έχουμε χρονικά μεταβαλλόμενες την πυκνότητα φορτίου ( $\rho$ ) και την πυκνότητα ρεύματος ( $\vec{J}$ ). Υπάρχει δηλαδή μετακίνηση φορτίου στο χώρο. Σε χρονικό διάστημα  $dt$  η ενέργεια που δίνεται από το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο σε χώρο  $V$  στο μετακινούμενο φορτίο μπορεί ναδειχθεί ότι είναι ίση με την μείωση της ενέργειας που αποθηκεύεται στο πεδίο μείον την ενέργεια που εξέρχεται από το σύνορο  $S$  του όγκου  $V$  με τη μορφή ηλεκτρομαγνητικού κύματος:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left( \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \right) d\tau - \frac{1}{\mu_0} \oint_S (\vec{E} \times \vec{B}) \cdot d\vec{A}.$$

Η παραπάνω σχέση αποτελεί το θεώρημα Poynting και εκφράζει τη διατήρηση της ενέργειας.

Το διάνυσμα

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} (\vec{E} \times \vec{B})$$

είναι το διάνυσμα Poynting και το μέτρο του είναι η επιφανειακή πυκνότητα ροής ενέργειας (ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας και ανά μονάδα χρόνου), όπως θα δούμε στο § 12.4.2.

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει φορτίο στο χώρο για να απορροφήσει ενέργεια, η μείωση της ενέργειας του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου σε κάποια περιοχή είναι ίση με την ενέργεια που εξέρχεται από το σύνορο της περιοχής:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V u d\tau = - \oint_S \vec{S} \cdot d\vec{A} = - \int_V (\nabla \cdot \vec{S}) d\tau.$$

Η ισότητα ισχύει για κάθε χώρο  $V$  επομένως

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla \cdot \vec{S}.$$

Η παραπάνω σχέση εκφράζει την τοπική διατήρηση ενέργειας.

### 11.3 Ορμή

Το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο φέρει, εκτός από ενέργεια, και ορμή. Σε μια περιοχή με όγκο  $V$  η ορμή που αποθηκεύεται στο πεδίο είναι

$$\vec{p} = \mu_0 \epsilon_0 \int_V \vec{S} d\tau.$$

Η χωρική πυκνότητα ορμής είναι επομένως  $\vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \epsilon_0 (\vec{E} \times \vec{B})$ .

## 11.4 Στροφορμή

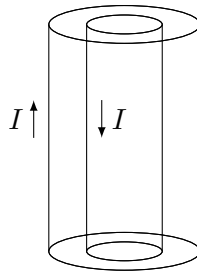
Η στροφορμή που αποθηκεύεται σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο έχει χωρική πυκνότητα

$$\vec{\ell} = \vec{r} \times \vec{g} = \epsilon_0 \vec{r} \times (\vec{E} \times \vec{B}) .$$

### 11.5 Ασκήσεις–Λύσεις

1. Ένα μακρύ ομοαξονικό καλώδιο αποτελείται από μια εσωτερική κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας  $a$  και μια εξωτερική κυλινδρική επιφάνεια ακτίνας  $b$ . Ρεύμα  $I$  ρέει στην εσωτερική επιφάνεια και επιστρέφει με αντίθετη κατεύθυνση από την εξωτερική. Αν οι δύο αγωγοί έχουν μεταξύ τους διαφορά δυναμικού  $V$  υπολογίστε

- την ισχύ (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) που μεταφέρεται παράλληλα στους αγωγούς.
- την ορμή που αποθηκεύεται στα πεδία.



Σχήμα 11.1: Άσκηση 1

#### ΛΥΣΗ

Λόγω της συμμετρίας του προβλήματος θα χρησιμοποιήσουμε κυλινδρικές συντεταγμένες. Ορίζουμε τον άξονα  $z$  των συντεταγμένων να συμπίπτει με τον άξονα των αγωγών.

Το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε περιστροφή γύρω από τον άξονα  $z$  και σε μετατόπιση παράλληλα σε αυτόν. Επομένως, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο δεν μπορούν να εξαρτώνται από τις συντεταγμένες  $\phi$ ,  $z$  αλλά μόνο από την  $r$ , την απόσταση από τον άξονα. Επιπλέον, το σύστημα είναι αναλλοίωτο σε κατοπτρισμό ως προς οποιοδήποτε επίπεδο κάθετο στο  $\hat{\phi}$ . Επομένως, το μαγνητικό πεδίο είναι παράλληλο στο  $\hat{\phi}$  και το ηλεκτρικό πεδίο δεν μπορεί να έχει συνιστώσα στο  $\hat{\phi}$ . Η συνιστώσα του  $\vec{E}$  στο  $\hat{z}$  είναι το πεδίο που προκαλεί τη ροή του ρεύματος. Η συνιστώσα του  $\vec{E}$  στο  $\hat{r}$  είναι αυτή που σχετίζεται με τη διαφορά δυναμικού μεταξύ των αγωγών.

Για να υπάρχει διαφορά δυναμικού μεταξύ των «οπλισμών» του κυλινδρικού πυκνωτή πρέπει να υπάρχει κάποια συσσώρευση φορτίου σε αυτούς με γραμμική πυκνότητα  $\pm\lambda$ . Εύκολα δείχνεται με εφαρμογή του νόμου Gauss ότι στο εσωτερικό των οπλισμών

$$E_r(r) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} .$$

Με εφαρμογή του νόμου Ampère εύκολα καταλήγουμε ότι στο εσωτερικό

$$B_\phi(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} .$$

Έξω από τον αγωγό (δηλαδή για  $r < a$  ή  $r > b$ ) τα πεδία προκύπτουν 0.

Η ενέργεια του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου μεταφέρεται στη διεύθυνση του διανύσματος Poynting:

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \left( (E_r \hat{r}) \times B_\phi \hat{\phi} \right) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{I}{2\pi r} \hat{z} .$$

Η ισχύς που περνά τη διατομή  $\mathcal{S}$  του καλωδίου είναι

$$P = \int_{\mathcal{S}} \vec{S} \cdot d\vec{A} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{I}{2\pi r} r dr = \frac{\lambda I}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a) .$$

Ας απαλείψουμε το  $\lambda$ : Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των οπλισμών είναι

$$V = \int_{C_{a \rightarrow b}} \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_a^b \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a) .$$

Επομένως,  $P = VI$ .

Η ορμή που αποθηκεύεται στα πεδία σε μήκος  $h$  του αγωγού είναι

$$\begin{aligned} \vec{p} &= \mu_0 \epsilon_0 \int_{\mathcal{V}} \vec{S} d\tau = \mu_0 \epsilon_0 \int \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} \frac{I}{2\pi r} \hat{z} d\tau = \frac{\lambda \mu_0 I}{4\pi^2} \hat{z} \int_a^b dr \frac{1}{r^2} r \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^h dz \\ &= \hat{z} \frac{\lambda \mu_0 I}{2\pi} h \ln(b/a) = \mu_0 \epsilon_0 V I h \hat{z} . \end{aligned}$$



## Κεφάλαιο 12

# Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

### 12.1 Εισαγωγή

Κύμα είναι γενικά μια διαταραχή ενός συνεχούς μέσου, που διαδίδεται με σταθερή ταχύτητα, διατηρώντας το σχήμα της. Κάποιες ειδικές κατηγορίες κυμάτων βέβαια δεν ανταποκρίνονται πλήρως στην παραπάνω περιγραφή: έχουμε κύματα που δεν διατηρούν το σχήμα τους (αν υπάρχει απορρόφηση), στάσιμα κύματα (που δεν διαδίδονται), κύματα που δεν έχουν σταθερή ταχύτητα (αν αλλάζουν μέσο διάδοσης) ή κύματα που δεν κινούνται απαραίτητα σε συνεχές μέσο (αλλά στο κενό).

Στη γενική περίπτωση των κυμάτων που αποδίδονται από τον παραπάνω «ορισμό», η μαθηματική περιγραφή της διαταραχής είναι, για μονοδιάστατη κίνηση στον άξονα  $z$ ,  $f(z, t) = g(z - vt)$ . Η εξίσωση δηλαδή που περιγράφει την απομάκρυνση από μια θέση, στο σημείο  $z$  τη χρονική στιγμή  $t$ , είναι οποιαδήποτε (παραγωγίσιμη) συνάρτηση της ποσότητας  $z - vt$  όπου  $v$  η ταχύτητα διάδοσης.

Η διαφορική εξίσωση, σε μία χωρική διάσταση, που ικανοποιεί μια τέτοια συνάρτηση  $g$  είναι

$$\frac{\partial^2 g}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} .$$

Εύκολα επαληθεύεται ότι κάθε συνάρτηση  $g(z - vt)$  την ικανοποιεί. Επιπλέον, όμως, την ικανοποιεί και κάθε συνάρτηση της μορφής  $h(z + vt)$ , που είναι ένα κύμα που διαδίδεται με αρνητική ταχύτητα (δηλαδή, σε αντίθετη κατεύθυνση). Η γενική λύση της κυματικής εξίσωσης είναι το άθροισμα δύο τέτοιων συναρτήσεων:

$$f(z, t) = g(z - vt) + h(z + vt) .$$

#### 12.1.1 Ορολογία

Οποιοδήποτε κύμα (που ικανοποιεί κάποιες γενικές συνθήκες) μπορεί να αναλυθεί σε επαλληλία συνημιτονοειδών κυμάτων, δηλαδή συναρτήσεων της μορφής

$$f(z, t) = A \cos(k(z - vt) + \delta) .$$

Ο συντελεστής  $A$  ονομάζεται πλάτος του κύματος, είναι θετικός και αποτελεί τη μέγιστη τιμή της απομάκρυνσης από την ισορροπία. Το όρισμα του συνημιτόνου είναι η φάση του κύματος και το  $\delta$  είναι η σταθερά φάσης. Η φάση είναι 0 όταν  $z = vt - \delta/k$ . τότε το κύμα παίρνει τη μέγιστη τιμή. Το  $k$  είναι ο (γωνιακός) κυματάρριθμος· σχετίζεται με το μήκος κύματος  $\lambda$  με τη σχέση

$$\lambda = \frac{2\pi}{k} .$$

Το μήκος κύματος εκφράζει τη (μικρότερη) απόσταση στο  $z$  που μεσολαβεί μεταξύ δύο σημείων στα οποία το κύμα μια χρονική στιγμή έχει ίδια τιμή (και παράγωγο). Είναι δηλαδή η χωρική περίοδος:

$$f(z, t) = f(z + \lambda, t) .$$

Το κύμα κινείται προς μεγαλύτερα  $z$  με ταχύτητα  $v$ . Σε ένα συγκεκριμένο σημείο η απομάκρυνση αλλάζει με το χρόνο. Επανέρχεται (με την ίδια παράγωγο) όταν περάσει χρόνος

$$T = \frac{2\pi}{kv} ,$$

ή πολλαπλάσιο αυτού. Η μικρότερη μη μηδενική τιμή από αυτές, το  $T$ , αποτελεί τη (χρονική) περίοδο.

Η *συχνότητα*  $f$  εκφράζει πόσες ταλαντώσεις γίνονται στη μονάδα του χρόνου. Ισχύει

$$f = \frac{1}{T} = \frac{kv}{2\pi} = \frac{v}{\lambda} .$$

Η *γωνιακή συχνότητα*  $\omega = 2\pi f$  είναι πιο εύχρηστο μέγεθος καθώς  $\omega = kv$ . Έτσι ένα συνημιτονοειδές κύμα γράφεται

$$f(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \delta) .$$

Ένα κύμα που κινείται προς μικρότερα  $z$  θα έχει ίδιο κυματάρριθμο, αντίθετη ταχύτητα (άρα αντίθετο  $\omega$ ) και αντίθετη σταθερά φάσης

$$f(z, t) = A \cos(kz + \omega t - \delta) .$$

Αλλά  $A \cos(kz + \omega t - \delta) = A \cos(-kz - \omega t + \delta)$ . Επομένως το κύμα που κινείται ανάποδα έχει αντίθετο κυματάρριθμο.

### 12.1.2 Μιγαδική αναπαράσταση

Χρησιμοποιώντας τη βασική σχέση των μιγαδικών αριθμών, τον τύπο Euler,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta ,$$



διαπιστώνουμε ότι

$$\begin{aligned} f(z, t) &= A \cos(k(z - vt) + \delta) = A \operatorname{Re} \left[ e^{i(kz - \omega t + \delta)} \right] = \operatorname{Re} \left[ A e^{i\delta} e^{i(kz - \omega t)} \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \right], \end{aligned}$$

όπου  $\tilde{A} = A e^{i\delta}$ , το μιγαδικό πλάτος.

Η χρήση της μιγαδικής αναπαράστασης ενός κύματος διευκολύνει πολύ τις πράξεις. Η επαλληλία (άθροισμα) συνημιτονοειδών κυμάτων υπολογίζεται πιο εύκολα με μιγαδικούς αριθμούς. Το «φυσικό» άθροισμα είναι το πραγματικό μέρος του τελικού μιγαδικού αριθμού.

### 12.1.3 Μετασχηματισμός Fourier

Οποιοδήποτε κύμα μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός συνημιτονοειδών κυμάτων:

$$\tilde{f}(z, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{A}(k) e^{i(kz - \omega t)} dk.$$

Το  $\omega$  είναι συνάρτηση του  $k$  και τα  $k$  παίρνουν και θετικές και αρνητικές τιμές ώστε να λαμβάνονται υπόψη τα κύματα που διαδίδονται και στις δύο κατευθύνσεις. Η συνάρτηση  $\tilde{A}(k)$  αποτελεί το μετασχηματισμό Fourier του κύματος  $f(z, t)$  και μπορεί να υπολογιστεί από αυτό:

$$\tilde{A}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(kz - \omega t)} \tilde{f}(z, t) dz.$$

## 12.2 Πρόσπτωση σε διεπιφάνεια

Ένα κύμα της μορφής

$$\tilde{f}_I(z, t) = \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0)$$

που διαδίδεται σε ένα μέσο 1 (ή στο κενό), και στην πορεία του συναντά άλλο μέσο 2 στο σημείο  $z = 0$ , θα δημιουργήσει στο διαχωριστικό σημείο δύο κύματα: το ένα θα είναι το *ανακλώμενο*,

$$\tilde{f}_R(z, t) = \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, \quad (z < 0)$$

που κινείται στο αρχικό μέσο, αντίθετα από το προσπίπτον κύμα (γι' αυτό το αρνητικό πρόσημο στον κυματάριθμο), και το άλλο θα είναι το *διερχόμενο*,

$$\tilde{f}_T(z, t) = \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, \quad (z > 0)$$

που θα συνεχίσει στο άλλο μέσο.

Η γωνιακή συχνότητα  $\omega$  των τριών κυμάτων είναι ίδια. Η ταχύτητα διάδοσης στα δύο μέσα όμως είναι διαφορετική, γι' αυτό και το διερχόμενο κύμα έχει διαφορετικό κυματάριθμο (και διαφορετικό μήκος κύματος).

Η ταλάντωση στα δύο μέσα δίνεται συνολικά από τον τύπο

$$\tilde{f}(z, t) = \begin{cases} \tilde{A}_I e^{i(k_1 z - \omega t)} + \tilde{A}_R e^{i(-k_1 z - \omega t)}, & (z < 0) \\ \tilde{A}_T e^{i(k_2 z - \omega t)}, & (z > 0) \end{cases}$$

Στο διαχωριστικό σημείο των δύο μέσων, στο  $z = 0$  δηλαδή, η ταλάντωση πρέπει να είναι *συνεχής*, δηλαδή  $\tilde{f}(0^-, t) = \tilde{f}(0^+, t)$ , με συνεχή πρώτη παράγωγο ως προς  $z$ , δηλαδή

$$\left. \frac{\partial \tilde{f}(z, t)}{\partial z} \right|_{0^-} = \left. \frac{\partial \tilde{f}(z, t)}{\partial z} \right|_{0^+}.$$

### 12.3 Πόλωση κυμάτων

Η απομάκρυνση των σημείων του μέσου διάδοσης από τη θέση ισορροπίας μπορεί να γίνεται *κατά τη διεύθυνση της διάδοσης*. Κύματα με τέτοιου είδους απομάκρυνση λέγονται *διαμήκη* κύματα. Τα ακουστικά κύματα είναι τέτοια: το μέσο διάδοσης συμπιέζεται και αραιώνει κατά τη διεύθυνση διάδοσης. Η απομάκρυνση μπορεί να γίνεται και *κάθετα στη διεύθυνση της διάδοσης*. Τα κύματα με τέτοια απομάκρυνση λέγονται *εγκάρσια* κύματα.

Τα εγκάρσια κύματα μπορούν να έχουν δύο διαφορετικές καταστάσεις *πόλωσης*, καθώς υπάρχουν δύο ανεξάρτητες διευθύνσεις που είναι κάθετες στη διεύθυνση διάδοσης. Έτσι, ένα εγκάρσιο κύμα μπορεί να είναι το

$$\vec{f}(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{x}$$

ή το

$$\vec{f}(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}$$

ή γενικότερα, το

$$\vec{f}(z, t) = \tilde{A} e^{i(kz - \omega t)} \hat{n}$$

όπου το διάνυσμα πόλωσης  $\hat{n}$  είναι ένα διάνυσμα κάθετο στον άξονα διάδοσης  $z$ :  $\hat{n} = \cos \theta \hat{x} + \sin \theta \hat{y}$ . Η γωνία  $\theta$  είναι η γωνία *πόλωσης*.

Λαμβάνοντας υπόψη τα παραπάνω, ένα γραμμικά πολωμένο εγκάρσιο κύμα είναι γενικά ένας συνδυασμός δύο κυμάτων, ενός οριζόντια και ενός κάθετα πολωμένου:

$$\vec{f}(z, t) = (\tilde{A} \cos \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{x} + (\tilde{A} \sin \theta) e^{i(kz - \omega t)} \hat{y}.$$

Στην περίπτωση που τα (μυγαδικά) πλάτη των κυμάτων δεν έχουν ίδια φάση, το επίπεδο της πόλωσης δεν παραμένει σταθερό. Έτσι, π.χ. αν στο άξονα  $x$  έχουμε

$\vec{f}_x(z, t) = A \cos(kz - \omega t)\hat{x}$  ενώ στον άξονα  $y$  το κύμα προηγείται σε φάση κατά  $\pi/2$ , δηλαδή έχουμε  $\vec{f}_y(z, t) = A \cos(kz - \omega t + \pi/2)\hat{y} = -A \sin(kz - \omega t)\hat{y}$ , η επαλληλία τους δίνει

$$\vec{f} = A \cos(kz - \omega t)\hat{x} - A \sin(kz - \omega t)\hat{y}.$$

Το διάνυσμα  $\vec{f}$  σε πολικές συντεταγμένες έχει μέτρο  $A$  και γωνία  $\phi = -(kz - \omega t)$ . Η γωνία  $\phi$  δεν είναι σταθερή με το χρόνο (ή τη θέση) οπότε το  $\vec{f}$  περιστρέφεται γύρω από τον άξονα  $z$ . Σε συγκεκριμένο σημείο  $z$  η γωνία  $\phi$  αυξάνει με το χρόνο, δηλαδή το  $\vec{f}$  περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Στη συγκεκριμένη περίπτωση έχουμε *κυκλική πόλωση*.

## 12.4 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό

Σε περιοχή του χώρου που δεν υπάρχουν φορτία ή ρεύματα, οι εξισώσεις του Maxwell γίνονται

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

Με βάση αυτές μπορούν εύκολα να προκύψουν οι εξισώσεις που υπακούουν χωριστά τα πεδία  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$ :

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}.$$

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση είναι η ίδια για τα δύο πεδία. Οι συνιστώσες των πεδίων  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  ικανοποιούν την εξίσωση

$$\nabla^2 f = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2},$$

η οποία είναι η γενίκευση στις τρεις διαστάσεις της μονοδιάστατης κυματικής εξίσωσης που είδαμε πριν. Η ταχύτητα των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων σε χώρο χωρίς φορτία ή ρεύματα προκύπτει ότι είναι

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}.$$

και έχει την τιμή 299 792 458 m/s ακριβώς. Συμπίπτει με την ταχύτητα του φωτός στο κενό και αυτό το γεγονός ήταν η πρώτη ένδειξη ότι το φως είναι ηλεκτρομαγνητικό κύμα.

### 12.4.1 Μονοχρωματικά επίπεδα κύματα

Τα ημιτονοειδή/συνημιτονοειδή κύματα, η βάση του χώρου των κυμάτων, έχουν συγκεκριμένη συχνότητα  $\omega$  και λέγονται *μονοχρωματικά*. Αν τα κύματα έχουν ίδια

τιμή σε κάθε επίπεδο που είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης, λέγονται *επίπεδα κύματα*. Τα ηλεκτρομαγνητικά μονοχρωματικά, επίπεδα κύματα είναι επομένως της μορφής

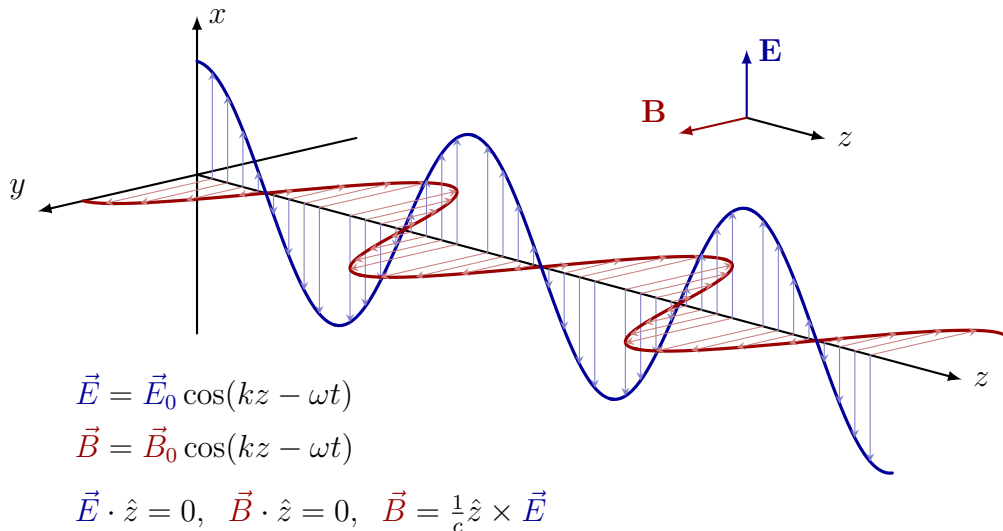
$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{i(kz - \omega t)},$$

με (μιγαδικά) πλάτη  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  και  $\omega = ck$ . Στις παραπάνω σχέσεις εννοείται ότι τα φυσικά πεδία είναι τα πραγματικά μέρη των μιγαδικών ποσοτήτων.

Καθώς πρέπει τα μονοχρωματικά κύματα να ικανοποιούν τις εξισώσεις Maxwell και όχι μόνο την κυματική, οι σχέσεις  $\nabla \cdot \vec{E} = 0$ ,  $\nabla \cdot \vec{B} = 0$  δίνουν ότι στη διεύθυνση διάδοσης οι συνιστώσες των  $\vec{E}_0$ ,  $\vec{B}_0$  είναι 0. Επομένως τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι εγκάρσια (κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης). Επιπλέον, ο νόμος Faraday επιβάλλει να ισχύει η σχέση

$$\vec{B}_0 = \frac{1}{c} \hat{z} \times \vec{E}_0.$$

Επομένως, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης (Σχήμα 12.1). Αν η διεύθυνση διάδοσης είναι ο άξονας  $z$  και το ηλεκτρικό πεδίο είναι στον άξονα  $x$ , το μαγνητικό είναι στον άξονα  $y$ . Το ηλεκτρομαγνητικό κύμα είναι γραμμικά πολωμένο: η διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου προσδιορίζει την πόλωση του κύματος, το διάνυσμα  $\hat{n}$ .



Σχήμα 12.1: Ηλεκτρομαγνητικό κύμα

Αν η διεύθυνση διάδοσης δεν είναι η  $\hat{z}$  αλλά γενικά κάποιο διάνυσμα στο χώρο, ο όρος  $kz$  πρέπει να αντικατασταθεί με τον  $k_x x + k_y y + k_z z$  δηλαδή το  $\vec{k} \cdot \vec{r}$ . Ο κυματάρηθος επομένως είναι διάνυσμα  $\vec{k}$ . Γενικά, οι εξισώσεις μονοχρωματικού

ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} \hat{n}, \quad (12.1)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{c} E_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)} (\hat{k} \times \hat{n}). \quad (12.2)$$

Θυμίζουμε ότι το διάνυσμα  $\vec{E}$  (δηλαδή το  $\hat{n}$ ) είναι κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης  $\hat{k}$  και στις παραπάνω σχέσεις τα φυσικά πεδία είναι το πραγματικό μέρος των μιγαδικών εκφράσεων.

### 12.4.2 Ενέργεια και ορμή

Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα ενέργειας που αποθηκεύεται σε ηλεκτρικό και σε μαγνητικό πεδίο είναι

$$u = \frac{\epsilon_0}{2} E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2.$$

Στην περίπτωση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου ξέρουμε ότι για τα μέτρα ισχύει  $B = E/c = \sqrt{\epsilon_0 \mu_0} E$ . Επομένως η πυκνότητα ενέργειας στο μαγνητικό πεδίο προκύπτει ίση με την πυκνότητα ενέργειας στο ηλεκτρικό πεδίο και

$$u = \epsilon_0 E^2 = \epsilon_0 E_0^2 \cos^2(kz - \omega t + \delta).$$

Ας υπολογίσουμε το διάνυσμα Poynting,  $\vec{S} = (\vec{E} \times \vec{B})/\mu_0$ :

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{c\mu_0} \vec{E} \times (\hat{k} \times \vec{E}) = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \hat{k} = cu \hat{k}.$$

Παρατηρούμε ότι η διεύθυνση διάδοσης συμπίπτει με το διάνυσμα Poynting.

Σε χρόνο  $\Delta t$  το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διανύει μια απόσταση  $c\Delta t$ . Από μια επιφάνεια  $\Delta A$  κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης έχει περάσει σε αυτό το χρόνο όλη η ενέργεια που βρισκόταν σε όγκο  $\Delta A(c\Delta t)$ , δηλαδή  $uc\Delta A\Delta t$ . Η ενέργεια ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου (ή ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας) είναι  $cu$ , δηλαδή το μέτρο του διανύσματος Poynting.

Η ένταση  $I$  του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι η μέση τιμή, σε μία περίοδο, της ενέργειας ανά μονάδα επιφάνειας ανά μονάδα χρόνου, η μέση τιμή δηλαδή του μέτρου του  $\vec{S}$ :

$$I = \langle S \rangle = \frac{\int_0^T S dt}{\int_0^T dt} = \frac{1}{T} \int_0^T S dt = \frac{1}{2} c\epsilon_0 E_0^2.$$

Γνωρίζουμε ακόμα ότι το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο μεταφέρει ορμή. Η χωρική πυκνότητα ορμής είναι

$$\vec{g} = \mu_0 \epsilon_0 \vec{S} = \mu_0 \epsilon_0 cu \hat{k} = \frac{u}{c} \hat{k}.$$

Όταν φως προσπίπτει σε υλικό που το απορροφά πλήρως, πέρα από την ενέργεια που μεταφέρεται στο υλικό, αποδίδεται και ορμή. Σε χρόνο  $\Delta t$  το ηλεκτρομαγνητικό κύμα διανύει μια απόσταση  $c\Delta t$ . Από μια επιφάνεια  $\Delta A$  κάθετη στη διεύθυνση διάδοσης έχει περάσει σε αυτό το χρόνο όλη η ορμή που βρισκόταν σε όγκο  $\Delta A(c\Delta t)$ , δηλαδή  $\Delta p = (u/c)c\Delta A\Delta t$ . Επομένως ασκείται από το φως στο υλικό δύναμη  $F = \Delta p/\Delta t = u\Delta A$  με πίεση  $P = F/dA = u$ . Η μέση πίεση της ακτινοβολίας είναι

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2}\epsilon_0 E_0^2 = \frac{I}{c}.$$

Στην περίπτωση που έχουμε ανάκλαση, επειδή η ενέργεια που περνά προς το υλικό εκπέμπεται ξανά (και περνά δεύτερη φορά από την επιφάνεια) η πίεση διπλασιάζεται.

## 12.5 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε μέσο

Στην περίπτωση που έχουμε διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε μέσο που είναι γραμμικό, εκτείνεται παντού, και δεν έχει ελεύθερα φορτία και ρεύματα, τότε έχουμε  $\vec{D} = \epsilon\vec{E}$  και  $\vec{H} = \frac{1}{\mu}\vec{B}$ . Αν επιπλέον το μέσο είναι ομογενές, τα  $\epsilon$ ,  $\mu$  είναι παντού ίδια. Τότε οι εξισώσεις Maxwell γνωρίζουμε ότι γίνονται

$$\nabla \cdot \vec{E} = 0, \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \times \vec{B} = \mu\epsilon\frac{\partial \vec{E}}{\partial t},$$

δηλαδή, γίνονται όπως οι εξισώσεις στο κενό αλλά με την αλλαγή του  $\mu_0$  σε  $\mu$  και του  $\epsilon_0$  σε  $\epsilon$ .

Η ταχύτητα που έχει το ηλεκτρομαγνητικό κύμα στο μέσο γίνεται

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{c}{n},$$

όπου

$$n = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} = \sqrt{(1 + \chi_e)(1 + \chi_m)}$$

ο δείκτης διάθλασης του μέσου.

Όλα τα μεγέθη που έχουμε υπολογίσει για τη διάδοση του κύματος στο κενό παραμένουν ίδια, αφού γίνουν οι αλλαγές  $\mu_0$  σε  $\mu$ ,  $\epsilon_0$  σε  $\epsilon$  και  $c$  σε  $v$ . Έτσι

- η πυκνότητα ενέργειας είναι

$$u = \frac{\epsilon}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu}B^2.$$

- το διάνυσμα Poynting είναι

$$\vec{S} = \frac{1}{\mu}\vec{E} \times \vec{B},$$

- η ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας είναι

$$S = vu ,$$

- η ένταση του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου είναι

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2 ,$$

- η μέση πίεση της ακτινοβολίας είναι

$$\langle P \rangle = \frac{I}{v} = \sqrt{\mu \epsilon} I .$$

## 12.6 Πρόσπτωση σε διεπιφάνεια

### 12.6.1 Συνοριακές συνθήκες

Όταν ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα περνά από ένα διηλεκτρικό μέσο σε άλλο, το ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο πάνω στη διεπιφάνεια παρουσιάζουν ασυνέχεια. Συγκεκριμένα, οι συνιστώσες του, παράλληλη ( $\parallel$ ) και κάθετη ( $\perp$ ) στη διεπιφάνεια, στις δύο πλευρές της προκύπτει ότι σχετίζονται μεταξύ τους ως εξής:

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = 0 , \quad \vec{E}_1^\parallel - \vec{E}_2^\parallel = \vec{0} , \quad (12.3)$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = 0 , \quad \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel = \vec{0} . \quad (12.4)$$

Αναφέραμε ότι όποτε ένα κύμα συναντά μια διεπιφάνεια κατά τη διάδοσή του, δημιουργεί ένα ανακλώμενο και ένα διερχόμενο κύμα. Τα πλάτη τους μπορούν να υπολογιστούν με τις παραπάνω συνοριακές συνθήκες.

### 12.6.2 Κάθετη πρόσπτωση σε διεπιφάνεια

Ας υποθέσουμε ότι ένα επίπεδο μονοχρωματικό κύμα με γωνιακή συχνότητα  $\omega$ , πολωμένο στον άξονα  $x$ , κινείται στη διεύθυνση του άξονα  $z$  από τα αρνητικά προς τα θετικά. Συναντά το επίπεδο  $x - y$  που αποτελεί τη διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων. Το προσπίπτον κύμα έχει πεδία

$$\vec{E}_I(z, t) = \tilde{E}_{0,I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{x} , \quad \vec{B}_I(z, t) = \frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0,I} e^{i(k_1 z - \omega t)} \hat{y} . \quad (z < 0)$$

Το ανακλώμενο κύμα που δημιουργείται έχει πεδία

$$\vec{E}_R(z, t) = \tilde{E}_{0,R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{x} , \quad \vec{B}_R(z, t) = -\frac{1}{v_1} \tilde{E}_{0,R} e^{i(-k_1 z - \omega t)} \hat{y} . \quad (z < 0)$$

Οι κυματάρια είναι ίδιοι καθώς τα δύο κύματα έχουν ίδιο  $\omega$  και ίδια ταχύτητα (αφού κινούνται στο ίδιο μέσο). Παρατηρήστε ότι η διεύθυνση του  $\vec{B}_R$  είναι το  $\hat{k} \times \vec{E} = -\hat{y}$ .

Το διερχόμενο κύμα που δημιουργείται έχει πεδία

$$\vec{E}_T(z, t) = \tilde{E}_{0,T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{x}, \quad \vec{B}_T(z, t) = \frac{1}{v_2} \tilde{E}_{0,T} e^{i(k_2 z - \omega t)} \hat{y}. \quad (z > 0)$$

Το κύμα στο μέσο 1 και το κύμα στο μέσο 2, στο σημείο  $z = 0$ , πρέπει να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες που αναφέραμε. Καθώς δεν υπάρχουν συνιστώσες που είναι κάθετες στη διεπιφάνεια, και  $z = 0$ , πρέπει

$$E_I^\parallel + E_R^\parallel = E_T^\parallel, \quad \frac{1}{\mu_1} (B_I^\parallel + B_R^\parallel) = \frac{1}{\mu_2} B_T^\parallel,$$

δηλαδή

$$\tilde{E}_{0,I} + \tilde{E}_{0,R} = \tilde{E}_{0,T},$$

και

$$\frac{1}{\mu_1 v_1} (\tilde{E}_{0,I} - \tilde{E}_{0,R}) = \frac{1}{\mu_2 v_2} \tilde{E}_{0,T},$$

Η λύση των δύο παραπάνω εξισώσεων για τα (μγαδικά) πλάτη δίνει

$$\frac{\tilde{E}_{0,R}}{\tilde{E}_{0,I}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad \frac{\tilde{E}_{0,T}}{\tilde{E}_{0,I}} = \frac{2}{1 + \beta},$$

όπου

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_2}{\mu_2 \epsilon_1}} = \frac{\epsilon_2 v_2}{v_1 \epsilon_1}.$$

Ας υπολογίσουμε τις εντάσεις των κυμάτων. Γνωρίζουμε ότι

$$I = \frac{1}{2} v \epsilon E_0^2 = \frac{1}{2} v \epsilon \left| \tilde{E}_0 \right|^2.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} I_I &= \frac{1}{2} v_1 \epsilon_1 \left| \tilde{E}_{0,I} \right|^2, \\ I_R &= \frac{1}{2} v_1 \epsilon_1 \left| \tilde{E}_{0,R} \right|^2, \\ I_T &= \frac{1}{2} v_2 \epsilon_2 \left| \tilde{E}_{0,T} \right|^2. \end{aligned}$$

Ο λόγος της έντασης του ανακλώμενου κύματος προς την ένταση του προσπίπτοντος είναι

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left| \frac{\tilde{E}_{0,R}}{\tilde{E}_{0,I}} \right|^2 = \left( \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2.$$



Η ποσότητα αυτή είναι ο *συντελεστής ανάκλασης*.

Ο λόγος της έντασης του διερχόμενου κύματος προς την ένταση του προσπίπτοντος είναι

$$T = \frac{I_T}{I_I} = \frac{v_2 \epsilon_2}{v_1 \epsilon_1} \left| \frac{\tilde{E}_{0,T}}{\tilde{E}_{0,I}} \right|^2 = \frac{v_2 \epsilon_2}{v_1 \epsilon_1} \left( \frac{2}{1 + \beta} \right)^2 = \beta \left( \frac{2}{1 + \beta} \right)^2 .$$

Η ποσότητα αυτή είναι ο *συντελεστής διάδοσης*.

Παρατηρήστε ότι  $R + T = 1$ , όπως απαιτεί η διατήρηση της ενέργειας.

Στα περισσότερα μέσα  $\mu \approx \mu_0$ . Σε αυτά  $\beta = v_1/v_2 = n_2/n_1$  και έτσι, οι συντελεστές ανάκλασης και διάδοσης συναρτίζονται των δεικτών διάθλασης είναι

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2 , \quad T = \frac{4n_1 n_2}{(n_1 + n_2)^2} .$$

### 12.6.3 Πλάγια πρόσπτωση σε διεπιφάνεια

Η γενική μορφή (12.2) ενός μονοχρωματικού κύματος με συχνότητα  $\omega$  και κυματάριθμο  $\vec{k}_I$ , που διαδίδεται στο μέσο 1, με ταχύτητα  $v = \omega/k_I$ , είναι

$$\vec{E}_I(\vec{r}, t) = \vec{E}_{0,I} e^{i(\vec{k}_I \cdot \vec{r} - \omega t)} , \quad \vec{B}_I(\vec{r}, t) = \frac{1}{v_1} \hat{k}_I \times \vec{E}_I .$$

Όταν ένα τέτοιο κύμα προσπίπτει σε διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των μέσων 1 και 2, υπό γωνία  $\theta_I$  ως προς την κάθετο στην επιφάνεια, εμφανίζεται ένα ανακλώμενο κύμα με ίδια συχνότητα αλλά διαφορετικό κυματάριθμο  $\vec{k}_R$  στο μέσο 1 και ένα διερχόμενο (ή διαθλώμενο) κύμα στο μέσο 2, με ίδια συχνότητα και διαφορετικό  $\vec{k}_T$ :

$$\begin{aligned} \vec{E}_R(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{0,R} e^{i(\vec{k}_R \cdot \vec{r} - \omega t)} , & \vec{B}_R(\vec{r}, t) &= \frac{1}{v_1} \hat{k}_R \times \vec{E}_R , \\ \vec{E}_T(\vec{r}, t) &= \vec{E}_{0,T} e^{i(\vec{k}_T \cdot \vec{r} - \omega t)} , & \vec{B}_T(\vec{r}, t) &= \frac{1}{v_2} \hat{k}_T \times \vec{E}_T . \end{aligned}$$

Καθώς έχουν ίδιο  $\omega$  πρέπει να ισχύει  $k_I v_1 = k_R v_1 = k_T v_2$ . Το συνολικό κύμα στο μέσο 1,  $\vec{E}_I + \vec{E}_R$  και  $\vec{B}_I + \vec{B}_R$ , και το κύμα στο μέσο 2,  $\vec{E}_T$ ,  $\vec{B}_T$ , στη διαχωριστική επιφάνεια πρέπει να ικανοποιούν τις συνοριακές συνθήκες (12.4).

Μια πρώτη συνέπεια των συνοριακών συνθηκών είναι ότι, σε κάθε σημείο  $\vec{r}$  της διαχωριστικής επιφάνειας πρέπει να ισχύει

$$\vec{k}_I \cdot \vec{r} = \vec{k}_R \cdot \vec{r} = \vec{k}_T \cdot \vec{r} .$$

Από αυτές τις σχέσεις προκύπτουν οι παρακάτω νόμοι:

**Πρώτος νόμος** Οι κυματάριθμοι του προσπίπτοντος,  $\vec{k}_I$ , του ανακλώμενου,  $\vec{k}_R$ , και του διαθλώμενου,  $\vec{k}_T$ , κύματος είναι συνεπίπεδοι. Το επίπεδό τους είναι κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων.

**Δεύτερος νόμος ή νόμος ανάκλασης** Η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_I$  ως προς την κάθετο είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης  $\theta_R$  ως προς την κάθετο.

**Τρίτος νόμος ή νόμος διάθλασης/Snell** Η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_I$  και η γωνία διάθλασης  $\theta_T$ , μετρούμενες ως προς την κάθετο στη διαχωριστική επιφάνεια, ικανοποιούν τη σχέση

$$n_1 \sin \theta_I = n_2 \sin \theta_T .$$

Οι νόμοι αυτοί ισχύουν για κάθε είδους κύμα και είναι οι βασικοί νόμοι της γεωμετρικής οπτικής.

Δεύτερη συνέπεια των συνοριακών συνθηκών, που πλέον αφορούν τα μιγαδικά πλάτη των κυμάτων καθώς οι εκθετικοί όροι είναι ίδιοι, είναι ότι οι συνιστώσες στη διεπιφάνεια ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{\tilde{E}_{0,R}^{\parallel}}{\tilde{E}_{0,I}^{\parallel}} = \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} , \quad \frac{\tilde{E}_{0,T}^{\parallel}}{\tilde{E}_{0,I}^{\parallel}} = \frac{2}{\alpha + \beta} , \quad (12.5)$$

ενώ οι κάθετες συνιστώσες στη διεπιφάνεια ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{\tilde{E}_{0,R}^{\perp}}{\tilde{E}_{0,I}^{\perp}} = \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} , \quad \frac{\tilde{E}_{0,T}^{\perp}}{\tilde{E}_{0,I}^{\perp}} = \frac{2}{1 + \alpha\beta} . \quad (12.6)$$

Στις παραπάνω σχέσεις

$$\alpha = \frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} , \quad \beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 v_2} = \frac{\mu_1 n_2}{\mu_2 n_1} .$$

Οι εξισώσεις (12.5) και (12.6) λέγονται εξισώσεις Fresnel.

Από τις εξισώσεις Fresnel παρατηρούμε ότι το προσπίπτον και το διαδιδόμενο κύμα έχουν πλάτος με ίδιο πρόσημο, άρα έχουν διαφορά φάσης 0, ενώ το ανακλώμενο κύμα έχει πλάτος με αντίθετο πρόσημο από το προσπίπτον όταν  $\alpha < \beta$  για την παράλληλη συνιστώσα και  $1 < \alpha\beta$  για την κάθετη συνιστώσα.

Η ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας που προσπίπτει στην διαχωριστική επιφάνεια είναι  $I_I = \langle \vec{S} \cdot \hat{n} \rangle$ . Το  $\hat{n}$  είναι το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Για την ένταση επομένως προκύπτει ότι

$$I_I = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0,I}^2 \cos \theta_I .$$

Ανάλογα προκύπτει ότι

$$I_R = \frac{1}{2} \epsilon_1 v_1 E_{0,R}^2 \cos \theta_R , \quad I_T = \frac{1}{2} \epsilon_2 v_2 E_{0,T}^2 \cos \theta_T .$$

Οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης για την παράλληλη συνιστώσα είναι

$$R_{\parallel} = \frac{I_R}{I_I} = \left( \frac{\tilde{E}_{0,R}^{\parallel}}{\tilde{E}_{0,I}^{\parallel}} \right)^2 = \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2$$

και

$$T_{\parallel} = \frac{I_T^{\parallel}}{I_I^{\parallel}} = \frac{\epsilon_2 v_2 \cos \theta_T}{\epsilon_1 v_1 \cos \theta_I} \left( \frac{\tilde{E}_{0,T}^{\parallel}}{\tilde{E}_{0,I}^{\parallel}} \right)^2 = \alpha \beta \left( \frac{2}{\alpha + \beta} \right)^2 ,$$

ενώ για την κάθετη συνιστώσα

$$R_{\perp} = \frac{I_R^{\perp}}{I_I^{\perp}} = \left( \frac{\tilde{E}_{0,R}^{\perp}}{\tilde{E}_{0,I}^{\perp}} \right)^2 = \left( \frac{1 - \alpha \beta}{1 + \alpha \beta} \right)^2$$

και

$$T_{\perp} = \frac{I_T^{\perp}}{I_I^{\perp}} = \frac{\epsilon_2 v_2 \cos \theta_T}{\epsilon_1 v_1 \cos \theta_I} \left( \frac{\tilde{E}_{0,T}^{\perp}}{\tilde{E}_{0,I}^{\perp}} \right)^2 = \alpha \beta \left( \frac{2}{1 + \alpha \beta} \right)^2 .$$

Εύκολα αποδεικνύεται ότι  $R_{\parallel} + T_{\parallel} = 1$ ,  $R_{\perp} + T_{\perp} = 1$ .

Παρατηρούμε ότι όταν  $\alpha = \beta$  ο συντελεστής  $R_{\parallel}$  γίνεται 0. Όλη η ενέργεια της συνιστώσας του προσπίπτοντος που είναι παράλληλη στη διεπιφάνεια, μεταφέρεται στο διερχόμενο κύμα. Η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_B$  στην οποία έχουμε  $\alpha = \beta$  είναι η γωνία *Brewster*. Ικανοποιεί τη σχέση

$$\sin^2 \theta_B = \frac{1 - \beta^2}{(v_2/v_1)^2 - \beta^2} .$$

Στα περισσότερα υλικά  $\mu \approx \mu_0$  οπότε σε αυτά  $\tan \theta_B = n_2/n_1$ .

## 12.7 Ηλεκτρομαγνητικά κύματα σε αγωγό

Ας εξετάσουμε την περίπτωση που έχουμε διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος σε αγωγό. Γνωρίζουμε ότι αν στον αγωγό έχουμε ηλεκτρικό πεδίο, εμφανίζεται πυκνότητα (ελεύθερου) ρεύματος ανάλογη του πεδίου:  $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$ . Γενικότερα, μπορούμε να έχουμε αρχικά και μια κατανομή ελεύθερου φορτίου  $\rho_f$ . Οι εξισώσεις Maxwell σε γραμμικό μέσο (9.5) γίνονται

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{1}{\epsilon} \rho_f , \quad \nabla \cdot \vec{B} = 0 , \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} , \quad \nabla \times \vec{B} = \mu \sigma \vec{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} .$$

Τα  $\rho_f$ ,  $\vec{J}_f = \sigma \vec{E}$  υποχρεωτικά ικανοποιούν την εξίσωση συνέχειας

$$\nabla \cdot \vec{J}_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} \Rightarrow \sigma \nabla \cdot \vec{E} = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} .$$

Χρησιμοποιώντας την πρώτη εξίσωση Maxwell (νόμος Gauss) όμως, προκύπτει ότι

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t} .$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση έχει λύση την  $\rho_f(t) = \rho_{0,f} e^{-\sigma t/\epsilon}$ . Αυτό σημαίνει ότι η πυκνότητα ελεύθερου φορτίου πέφτει εκθετικά από την αρχική της τιμή με χαρακτηριστικό χρόνο  $\epsilon/\sigma$ . Όλα τα ελεύθερα φορτία μετακινούνται στα άκρα. Σε λίγα πολλαπλάσια του χαρακτηριστικού χρόνου μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το  $\rho_f$  είναι 0 και έτσι απομένει στον αγωγό μόνο το ελεύθερο ρεύμα.

Οι εξισώσεις Maxwell με  $\rho_f = 0$  μπορούν να μας δώσουν τις εξισώσεις που ικανοποιούν τα πεδία  $\vec{E}$  και  $\vec{B}$  χωριστά:

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad \nabla^2 \vec{B} = \mu\epsilon \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} + \mu\sigma \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Η διαφορική εξίσωση για τα δύο πεδία είναι ίδια. Η λύση της είναι της μορφής

$$\vec{E} = \vec{E}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)}, \quad \vec{B} = \vec{B}_0 e^{-\kappa z} e^{i(kz - \omega t)},$$

όπου

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}, \quad \kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1}.$$

Παρατηρούμε ότι το μιγαδικό πλάτος των κυμάτων εξασθενεί κατά ένα παράγοντα  $e^{-\kappa z}$  όσο αυξάνει το  $z$ . Το χαρακτηριστικό μήκος  $d = 1/\kappa$  είναι μέτρο της διείσδυσης του κύματος σε ένα αγωγό. Το  $k$  προσδιορίζει το μήκος κύματος και την ταχύτητα, όπως και στα κύματα σταθερού πλάτους:

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k}.$$

Παρατηρήστε ότι για συχνότητες  $\omega \ll \sigma/\epsilon$ , δηλαδή σε καλούς αγωγούς, έχουμε  $\kappa \approx k$  και το κύμα εξασθενεί πολύ σε μήκος μικρότερο από το μήκος κύματός του.

Όπως και κατά τη διάδοση στο κενό, οι εξισώσεις Maxwell προβλέπουν ότι τα πεδία είναι κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης και ότι

$$\vec{B} = \frac{k + i\kappa}{\omega} (\hat{z} \times \vec{E}),$$

δηλαδή είναι και κάθετα μεταξύ τους. Όμως τώρα διαφέρουν στη φάση: στη φάση του  $\vec{E}$  προστίθεται η γωνία  $\phi = \tan^{-1}(\kappa/k)$  για να προκύψει η φάση του  $\vec{B}$ . Επομένως, τα πραγματικά πεδία στο μονοχρωματικό κύμα είναι

$$\vec{E}(z, t) = E_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t) \hat{x}, \quad \vec{B}(z, t) = B_0 e^{-\kappa z} \cos(kz - \omega t + \phi) \hat{y}.$$

Τα πλάτη τους συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{\tilde{B}_0}{\tilde{E}_0} = \sqrt{\epsilon\mu \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}}.$$

### 12.7.1 Ανάκλαση σε αγώγιμη επιφάνεια

Οι συνοριακές συνθήκες (12.4) ισχύουν αν δεν υπάρχουν ελεύθερα φορτία και ρεύματα στην επιφάνεια. Σε αγώγιμη επιφάνεια που μπορεί να έχει τέτοια οι συνοριακές συνθήκες γίνονται

$$\epsilon_1 E_1^\perp - \epsilon_2 E_2^\perp = \sigma_f, \quad \vec{E}_1^\parallel - \vec{E}_2^\parallel = \vec{0}, \quad (12.7)$$

$$B_1^\perp - B_2^\perp = \vec{0}, \quad \frac{1}{\mu_1} \vec{B}_1^\parallel - \frac{1}{\mu_2} \vec{B}_2^\parallel = \vec{K}_f \times \hat{n}. \quad (12.8)$$

$\sigma_f$  είναι η επιφανειακή πυκνότητα ελεύθερων φορτίων,  $\vec{K}_f$  η επιφανειακή πυκνότητα ελεύθερου ρεύματος,  $\hat{n}$  το κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια.

Για επίπεδα μονοχρωματικά κύματα που κινούνται σε διηλεκτρικό υλικό και προσπίπτουν κάθετα σε επιφάνεια αγώγιμου υλικού (π.χ. σε διαχωριστική επιφάνεια γυαλιού-άργυρου, σε καθρέφτη δηλαδή) προκύπτει ότι οι λόγοι των μιγαδικών πλάτων του ανακλώμενου και του διερχόμενου κύματος προς το πλάτος του προσπίπτοντος είναι

$$\frac{\tilde{E}_{0,R}}{\tilde{E}_{0,I}} = \frac{1 - \beta}{1 + \beta}, \quad \frac{\tilde{E}_{0,T}}{\tilde{E}_{0,I}} = \frac{2}{1 + \beta},$$

όπου τώρα το  $\beta$  είναι μιγαδική ποσότητα με τιμή

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} (k_2 + i\kappa_2).$$

Για ιδανικό αγωγό με άπειρη αγωγιμότητα το  $k_2 + i\kappa_2$  γίνεται άπειρο (άρα και το  $\beta$ ) οπότε

$$\tilde{E}_{0,R} = -\tilde{E}_{0,I}, \quad \tilde{E}_{0,T} = 0.$$

Έχουμε δηλαδή πλήρη ανάκλαση του προσπίπτοντος κύματος και δεν υπάρχει διερχόμενο κύμα. Η φάση του ανακλώμενου διαφέρει κατά  $180^\circ$  από τη φάση του προσπίπτοντος.

### 12.7.2 Εξάρτηση από τη συχνότητα

Όπως γνωρίζουμε από την Οπτική, ο δείκτης διάθλασης  $n$  εξαρτάται από το μήκος κύματος της ακτινοβολίας. Ξέρουμε ότι  $n = \sqrt{(1 + \chi_e)(1 + \chi_m)}$ , άρα η ηλεκτρική και η μαγνητική επιδεκτικότητα του μέσου εξαρτώνται γενικά από τη συχνότητα. Το ίδιο παρατηρείται και για την αγωγιμότητα των μέσων. Το φαινόμενο αυτής της εξάρτησης από το  $\omega$  λέγεται *διασπορά*. Σε μέσα που εμφανίζουν διασπορά, η ταχύτητα των μονοχρωματικών κυμάτων διαφέρει καθώς είναι εξαρτώμενη από τη συχνότητα, με αποτέλεσμα μια επαλληλία μονοχρωματικών κυμάτων να μην διατηρεί το σχήμα της κατά τη διάδοση. Ένα κύμα που αποτελείται από πολλά μονοχρωματικά κύματα με διαφορετικό  $\omega$  αλλά με παρόμοια πλάτη ξεκινά πολύ «στενό» και απλώνει κατά τη διάδοση. Αν καθένα από τα μονοχρωματικά κύματα διαδίδεται με ταχύτητα (φάσης)  $v = \omega/k$ , η επαλληλία τους κινείται με ταχύτητα (ομάδας)  $v_g = d\omega/dk$ . Η ενέργεια του κύματος ταξιδεύει με την ταχύτητα ομάδας.

Σε αέρια και σε περιοχές συχνοτήτων του ορατού ισχύει ο τύπος Cauchy για το δείκτη διάθλασης:

$$n = 1 + A \left( 1 + \frac{B}{\lambda^2} \right),$$

με  $\lambda = 2\pi c/\omega$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας,  $A$  ο συντελεστής διάθλασης του μέσου και  $B$  ο συντελεστής διασποράς.

## 12.8 Ασκήσεις—Λύσεις

1. Γράψτε το (πραγματικό) ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο ενός μονοχρωματικού επίπεδου κύματος με πλάτος  $E_0$ , συχνότητα  $\omega$  και σταθερά φάσης 0, που
  - κινείται στα αρνητικά  $x$  και είναι πολωμένο στη διεύθυνση  $z$ .
  - κινείται από την αρχή των αξόνων προς το σημείο  $(1, 1, 1)$ , με πόλωση παράλληλη στο επίπεδο  $x - z$ .

### ΛΥΣΗ

Στην πρώτη περίπτωση το ηλεκτρικό πεδίο κινείται παράλληλα στο  $\hat{k} = (-1, 0, 0)$ . Είναι παράλληλο στο  $\hat{n} = (0, 0, 1)$ . Επομένως

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{n} = E_0 \cos(-kx - \omega t) \hat{z}.$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E} = \frac{1}{c} (-\hat{x}) \times (E_0 \cos(kx + \omega t) \hat{z}) = \hat{y} \frac{1}{c} E_0 \cos(kx + \omega t).$$

Το  $k$  είναι  $\omega/c$ .

Στη δεύτερη περίπτωση, το ηλεκτρικό πεδίο κινείται παράλληλα στο διάνυσμα  $(1, 1, 1) - (0, 0, 0) = (1, 1, 1)$ . Το μοναδιαίο διάνυσμα είναι  $(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ . Επομένως, το διάνυσμα  $\vec{k}$  είναι  $\vec{k} = k(1, 1, 1)/\sqrt{3}$ . Το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο στο διάνυσμα  $\hat{n}$  που βρίσκεται στο επίπεδο  $x - z$ , είναι μοναδιαίο και είναι κάθετο στο  $\vec{k}$ . Επομένως,  $\hat{n} = n_x \hat{x} + n_z \hat{z}$ ,  $n_x^2 + n_z^2 = 1$  και  $\vec{k} \cdot \hat{n} = 0 \Rightarrow n_x + n_z = 0$ . Προκύπτει ότι  $\hat{n} = (1, 0, -1)/\sqrt{2}$ . Τότε

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) \hat{n} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{k(x+y+z)}{\sqrt{3}} - \omega t\right) (\hat{x} - \hat{z}).$$

Το μαγνητικό πεδίο είναι

$$\begin{aligned} \vec{B}(\vec{r}, t) &= \frac{1}{c} \hat{k} \times \vec{E} \\ &= \frac{1}{c} \left( \frac{1}{\sqrt{3}} (\hat{x} + \hat{y} + \hat{z}) \right) \times \left( \frac{E_0}{\sqrt{2}} \cos\left(\frac{k(x+y+z)}{\sqrt{3}} - \omega t\right) (\hat{x} - \hat{z}) \right) \\ &= \frac{E_0}{c\sqrt{6}} \cos\left(\frac{k(x+y+z)}{\sqrt{3}} - \omega t\right) (-\hat{x} + 2\hat{y} - \hat{z}). \end{aligned}$$

Το  $k$  είναι  $\omega/c$ .

2. Η ένταση του ηλιακού φωτός που φτάνει στη Γη είναι περίπου  $1300 \text{ W/m}^2$ . Πόση πίεση ασκεί το φως αν θεωρήσουμε ότι

- απορροφάται πλήρως,
- ανακλάται πλήρως;

Ποιο είναι το ποσοστό της πίεσης της ακτινοβολίας ως προς την ατμοσφαιρική πίεση;

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι η ένταση του φωτός είναι η μέση τιμή του διανύσματος Poynting:

$$I = \langle S \rangle = \frac{1}{2} c \epsilon_0 E_0^2 .$$

Γνωρίζουμε ακόμα ότι η μέση πίεση της ακτινοβολίας με πλήρη απορρόφηση είναι

$$\langle P \rangle = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2 .$$

Επομένως,  $\langle P \rangle = I/c \approx 4.3 \times 10^{-6} \text{ Pa}$ .

Στην περίπτωση πλήρους ανάκλασης, η μέση πίεση διπλασιάζεται,  $\langle P \rangle = 2I/c \approx 8.7 \times 10^{-6} \text{ Pa}$ .

Η ατμοσφαιρική πίεση είναι περίπου  $10^5 \text{ Pa}$ ,  $10^{10}$  φορές μεγαλύτερη.

3. Θεωρούμε ένα σωματίδιο με φορτίο  $q$  και μάζα  $m$ , ελεύθερο να κινηθεί στο επίπεδο  $x - y$  υπό την επίρεια ενός ηλεκτρομαγνητικού κύματος που διαδίδεται στον άξονα  $z$ .

- Αγνοώντας τη μαγνητική δύναμη, βρείτε την ταχύτητα του σωματιδίου συναρτήσει του χρόνου. Υποθέστε ότι η μέση ταχύτητα είναι 0.
- Υπολογίστε τη μαγνητική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο.
- Δείξτε ότι η μέση μαγνητική δύναμη είναι 0.
- Για να υπάρχει απορρόφηση της ενέργειας πρέπει να υπάρχει κάποια αντίσταση στην κίνηση των φορτίων. Ας υποθέσουμε ότι εμφανίζεται δύναμη της μορφής  $-\gamma m \vec{v}$ , με  $\gamma$  σταθερά.
- Επαναλάβετε τους υπολογισμούς με τη νέα δύναμη και βρείτε τη μέση μαγνητική δύναμη.

### ΛΥΣΗ

Το ηλεκτρικό πεδίο έχει εξίσωση  $\vec{E} = E_0 \cos(kz - \omega t) \hat{x}$ . Η δύναμη που ασκεί στο φορτίο είναι  $\vec{F}_E = q \vec{E}$ . Η επιτάχυνσή του είναι

$$\vec{a} = \vec{F}/m = \frac{qE_0}{m} \cos(kz - \omega t) \hat{x} .$$



Στο επίπεδο  $x - y$  έχουμε  $z = 0$ . Επομένως η συντεταγμένη  $v_x$  της ταχύτητας του σωματιδίου ικανοποιεί την εξίσωση

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t) \Rightarrow v_x = \frac{qE_0}{m\omega} \sin(\omega t) + v_0 .$$

Το  $v_0$  είναι η σταθερά ολοκλήρωσης και συμπίπτει με τη μέση ταχύτητα:  $\langle v_x \rangle = \langle \frac{qE_0}{m\omega} \sin(\omega t) + v_0 \rangle = v_0$ . Αυτή είναι 0. Επομένως

$$v_x = \frac{qE_0}{m\omega} \sin(\omega t) .$$

Οι άλλες συνιστώσες της ταχύτητας είναι σταθερές, και καθώς η μέση τιμή της ταχύτητας είναι 0, είναι και αυτές 0. Άρα

$$\vec{v} = \frac{qE_0}{m\omega} \sin(\omega t) \hat{x} .$$

Το μαγνητικό πεδίο έχει εξίσωση

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\hat{k} \times \vec{E}) = \frac{E_0}{c} \cos(kz - \omega t) \hat{y} .$$

Στο επίπεδο  $x - y$  έχουμε  $z = 0$ .

Η μαγνητική δύναμη που δέχεται το σωματίδιο λόγω αυτής της ταχύτητας είναι

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{q^2 E_0^2}{mc\omega} \cos(\omega t) \sin(\omega t) \hat{z} = \frac{q^2 E_0^2}{2mc\omega} \sin(2\omega t) \hat{z} .$$

Η μέση μαγνητική δύναμη είναι

$$\langle F_B \rangle = \frac{q^2 E_0^2}{2mc\omega} \langle \sin(2\omega t) \rangle = \frac{q^2 E_0^2}{2mc\omega} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(2\omega t) dt = 0 .$$

Αν εκτός από την ηλεκτρική δύναμη, το φορτίο δέχεται και την  $-\gamma m \vec{v}$  έχουμε

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qE_0}{m} \cos(\omega t) - \gamma v_x$$

Μπορεί ναδειχθεί ότι η λύση σταθερής κατάστασης αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι

$$v_x = \frac{qE_0}{m\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \cos(\omega t - \theta) ,$$

όπου  $\theta = \tan^{-1} \omega/\gamma$ .

Η μαγνητική δύναμη είναι

$$\vec{F}_B = q\vec{v} \times \vec{B} = \frac{q^2 E_0^2}{mc\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} \cos(\omega t - \theta) \cos(\omega t) \hat{z} .$$

Η μέση τιμή της ποσότητας  $\cos(\omega t - \theta) \cos(\omega t)$  είναι

$$\begin{aligned} \frac{1}{T} \int_0^T \cos(\omega t - \theta) \cos(\omega t) dt &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos(w - \theta) \cos(w) dw \\ &= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_0^{2\pi} (\cos(w - \theta + w) + \cos(w - \theta - w)) dw \right] \\ &= \frac{\cos \theta}{2} . \end{aligned}$$

Αλλά

$$\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} = \frac{\gamma}{\sqrt{\omega^2 + \gamma^2}} .$$

Άρα

$$\langle \vec{F}_B \rangle = \frac{\gamma q^2 E_0^2}{2mc(\omega^2 + \gamma^2)} \hat{z} .$$

4. Επίπεδο μονοχρωματικό κύμα που διαδίδεται στο κενό ( $n_1 = 1$ ) προσπίπτει σε έδρα διαμαντιού. Ο δείκτης διάθλασης του διαμαντιού είναι  $n_2 = 2.42$ . Θεωρήστε  $\mu_2 = \mu_0$ . Υπολογίστε

- τους λόγους των πλατών  $E_{0,R}^{\parallel}/E_{0,I}^{\parallel}$ ,  $E_{0,T}^{\parallel}/E_{0,I}^{\parallel}$ ,  $E_{0,R}^{\perp}/E_{0,I}^{\perp}$ ,  $E_{0,T}^{\perp}/E_{0,I}^{\perp}$  και τους συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης σε γωνία πρόσπτωσης  $\theta_I = 0^\circ$ ,
- τη γωνία Brewster,
- τη γωνία πρόσπτωσης στην οποία  $E_{0,R}^{\parallel} = E_{0,T}^{\parallel}$ .

### ΛΥΣΗ

Οι συντελεστές  $\alpha$ ,  $\beta$  που εμφανίζονται στις εξισώσεις Fresnel είναι  $\alpha = \cos \theta_T / \cos \theta_I$ ,  $\beta = (\mu_1 n_2) / (\mu_2 n_1)$ . Όταν  $\theta_I = 0$ , από το νόμο Snell έχουμε  $\theta_T = 0$ . Επομένως,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = n_2 / n_1 = 2.42$ .

Ξέρουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{E_{0,R}^{\parallel}}{E_{0,I}^{\parallel}} &= \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \approx -0.415 , & \frac{E_{0,T}^{\parallel}}{E_{0,I}^{\parallel}} &= \frac{2}{\alpha + \beta} \approx 0.585 , \\ \frac{E_{0,R}^{\perp}}{E_{0,I}^{\perp}} &= \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \approx -0.415 , & \frac{E_{0,T}^{\perp}}{E_{0,I}^{\perp}} &= \frac{2}{1 + \alpha\beta} \approx 0.585 . \end{aligned}$$

Οι συντελεστές ανάκλασης και διάθλασης είναι

$$\begin{aligned} R_{\parallel} &= \left( \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right)^2 \approx 0.17, \\ R_{\perp} &= \left( \frac{1 - \alpha\beta}{1 + \alpha\beta} \right)^2 \approx 0.17, \\ T_{\parallel} &= 1 - R_{\parallel} \approx 0.83, \\ T_{\perp} &= 1 - R_{\perp} \approx 0.83. \end{aligned}$$

Η γωνία Brewster είναι αυτή για την οποία  $\alpha = \beta$  δηλαδή  $\cos \theta_T = \beta \cos \theta_B$ . Καθώς από το νόμο Snell έχουμε  $n_2 \sin \theta_T = n_1 \sin \theta_B \Rightarrow \sin \theta_T = (\sin \theta_B)/\beta$ , προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \theta_T + \sin^2 \theta_T = \beta^2 \cos^2 \theta_B + \frac{1}{\beta^2} \sin^2 \theta_B = \beta^2(1 - \sin^2 \theta_B) + \frac{1}{\beta^2} \sin^2 \theta_B \\ &= \beta^2 + \sin^2 \theta_B \left( -\beta^2 + \frac{1}{\beta^2} \right) \\ \Rightarrow \sin \theta_B &= \frac{\beta}{\sqrt{1 + \beta^2}} \Rightarrow \tan \theta_B = \beta. \end{aligned}$$

Επομένως,  $\theta_B \approx 67.5^\circ$ .

Τα πλάτη του ανακλώμενου και του διαθλώμενου κύματος είναι ίσα όταν

$$E_{0,R}^{\parallel} = E_{0,T}^{\parallel} \Rightarrow \frac{E_{0,R}^{\parallel}}{E_{0,I}^{\parallel}} = \frac{E_{0,T}^{\parallel}}{E_{0,I}^{\parallel}} \Rightarrow \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} = \frac{2}{\alpha + \beta} \Rightarrow \alpha - \beta = 2.$$

Επομένως πρέπει

$$\frac{\cos \theta_T}{\cos \theta_I} = 2 + \beta.$$

Από το νόμο Snell γνωρίζουμε ότι  $\beta \sin \theta_T = \sin \theta_I$ , άρα

$$\begin{aligned} 1 &= \cos^2 \theta_T + \sin^2 \theta_T = (2 + \beta)^2 \cos^2 \theta_I + \frac{1}{\beta^2} \sin^2 \theta_I \\ &= (2 + \beta)^2(1 - \sin^2 \theta_I) + \frac{1}{\beta^2} \sin^2 \theta_I = (2 + \beta)^2 + \left( \frac{1}{\beta^2} - (2 + \beta)^2 \right) \sin^2 \theta_I \\ \Rightarrow \sin \theta_I &= \sqrt{\frac{\beta^2 - \beta^2(2 + \beta)^2}{1 - \beta^2(2 + \beta)^2}} \approx 0.978 \Rightarrow \theta_I \approx 78^\circ. \end{aligned}$$

5. Τοποθετούμε ελεύθερο φορτίο σε ένα κομμάτι γυαλί ( $n = 1.5$ ,  $\sigma = 10^{-12} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ). Σε πόσο χρόνο θα μετακινηθεί στην επιφάνεια;

**ΛΥΣΗ**

Ξέρουμε ότι ελεύθερο φορτίο με πυκνότητα  $\rho_f$ , σε αγώγιμο υλικό, σχετίζεται με την πυκνότητα ελεύθερου ρεύματος  $\vec{J}_f$  στο υλικό με τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\sigma}{\epsilon} \rho_f = -\frac{\partial \rho_f}{\partial t}.$$

Αυτή η διαφορική εξίσωση έχει λύση την  $\rho_f(t) = \rho_{0,f} e^{-\sigma t/\epsilon}$ . Ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι  $\tau = \epsilon/\sigma$ .

Αν θεωρήσουμε, όπως στα περισσότερα υλικά, ότι  $\mu \approx \mu_0$ , θα έχουμε

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{\epsilon_0\mu_0}} \Rightarrow \epsilon = n^2\epsilon_0 \approx 2 \times 10^{-11} \text{ F/m}.$$

Άρα

$$\tau = \epsilon/\sigma \approx 20 \text{ s}.$$

Σε τόσο χρόνο η πυκνότητα πέφτει στο  $1/e \approx 36\%$  της αρχικής τιμής.

6. Τι πάχος πρέπει να έχει ένα φύλλο άργυρου ( $\sigma \approx 6.25 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon \approx \epsilon_0$ ) για χαμηλές συχνότητες) για να εξασθενήσει αρκετά ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα με συχνότητα  $f = 10^{10} \text{ Hz}$ ;

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι το πλάτος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εξασθενεί κατά ένα παράγοντα  $e^{-\kappa z}$  όσο αυξάνει το  $z$ . Το χαρακτηριστικό μήκος είναι  $d = 1/\kappa$ , όπου

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1}.$$

Θεωρούμε ότι  $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ . Έχουμε  $\omega = 2\pi f \approx 63 \text{ GHz}$ ,  $\epsilon \approx 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ . Άρα  $\kappa \approx 1.57 \times 10^6 \text{ m}^{-1}$  και  $d \approx 6.4 \times 10^{-7} \text{ m}$ . Σε λίγα πολλαπλάσια του  $d$ , σε απόσταση δηλαδή της τάξης του  $1 \mu\text{m}$ , το κύμα έχει αμελητέο πλάτος.

7. Βρείτε το μήκος κύματος και την ταχύτητα διάδοσης στο χαλκό ( $\sigma = 5.8 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon \approx \epsilon_0$ ) για ραδιοκύματα με συχνότητα  $f = 1 \text{ MHz}$ . Συγκρίνετέ τα με τα αντίστοιχα μεγέθη στο κενό.

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι

$$\lambda = \frac{2\pi}{k}, \quad v = \frac{\omega}{k} = \lambda f,$$

όπου

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1}.$$

Θεωρούμε ότι  $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ . Καθώς  $\omega = 2\pi f = 6.28 \times 10^6 \text{ Hz}$  έχουμε  $k \approx 15\,132 \text{ m}^{-1}$ . Επομένως  $\lambda \approx 0.4 \text{ mm}$ ,  $v \approx 400 \text{ m/s}$ .

Στο κενό,  $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ,  $\lambda = c/f \approx 300 \text{ m}$ .

8. Δείξτε ότι το βάθος απομείωσης σε κακό αγωγό ( $\sigma \ll \omega\epsilon$ ) είναι  $(2/\sigma)\sqrt{\epsilon/\mu}$ , ανεξάρτητα από τη συχνότητα. Βρείτε το βάθος για το νερό ( $\sigma = 4 \times 10^{-6} \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $1 + \chi_e \approx 80.1$ ).

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι το πλάτος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εξασθενεί κατά ένα παράγοντα  $e^{-\kappa z}$  όσο αυξάνει το  $z$ . Το χαρακτηριστικό μήκος είναι  $d = 1/\kappa$ , όπου

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1}.$$

Όταν  $x = \sigma/(\omega\epsilon) \ll 1$ , ισχύει

$$\sqrt{1 + x^2} \approx 1 + \frac{x^2}{2}.$$

Τότε

$$\kappa \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\left(1 + \frac{x^2}{2}\right) - 1} = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \frac{x}{\sqrt{2}} = \frac{\omega}{2} \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\sigma}{\omega\epsilon} = \frac{\sigma\sqrt{\mu}}{2\sqrt{\epsilon}}.$$

Επομένως,

$$d = \frac{2\sqrt{\epsilon}}{\sigma\sqrt{\mu}}.$$

Για το νερό έχουμε  $\epsilon = (1 + \chi_e)\epsilon_0 \approx 709 \times 10^{-12} \text{ F/m}$ ,  $\mu \approx \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T} \cdot \text{m/A}$ . Οπότε  $d \approx 11\,900 \text{ m}$ .

9. Δείξτε ότι το βάθος απομείωσης σε καλό αγωγό ( $\sigma \gg \omega\epsilon$ ) είναι  $\lambda/(2\pi)$ , όπου  $\lambda$  το μήκος κύματος της ακτινοβολίας στον αγωγό.

- Βρείτε το βάθος για ένα τυπικό μέταλλο ( $\sigma \approx 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ), στο ορατό ( $\omega \approx 10^{15} \text{ Hz}$ ), θεωρώντας ότι  $\epsilon \approx \epsilon_0$  και  $\mu \approx \mu_0$ .
- Γιατί τα μέταλλα είναι αδιαφανή;
- Βρείτε τη διαφορά φάσης και το λόγο των πλατών ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου σε καλό αγωγό.

**ΛΥΣΗ**

Γνωρίζουμε ότι το πλάτος των ηλεκτρομαγνητικών κυμάτων εξασθενεί κατά ένα παράγοντα  $e^{-\kappa z}$  όσο αυξάνει το  $z$ . Το χαρακτηριστικό μήκος είναι  $d = 1/\kappa$ , όπου

$$\kappa = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} - 1}.$$

Όταν  $x = \sigma/(\omega\epsilon) \gg 1$ , ισχύει

$$1 + x^2 \approx x^2 \Rightarrow \sqrt{1 + x^2} \approx x \Rightarrow \sqrt{\sqrt{1 + x^2} - 1} \approx \sqrt{x}.$$

Επομένως,

$$\kappa \approx \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\frac{\sigma}{\omega\epsilon}} = \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}}.$$

Το μήκος κύματος  $\lambda$  είναι  $2\pi/k$  όπου

$$k = \omega \sqrt{\frac{\epsilon\mu}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2} + 1},$$

Όταν  $x = \sigma/(\omega\epsilon) \gg 1$ , ισχύει  $k \approx \sqrt{\frac{\sigma\omega\mu}{2}} = \kappa$ .

Από τα παραπάνω έχουμε  $d = 1/\kappa = 1/k = \lambda/(2\pi)$ .

Με αντικατάσταση,  $\kappa \approx 8 \times 10^7 \text{ m}^{-1}$ . Άρα  $d = 12.6 \text{ nm}$ . Το ορατό φως επομένως, απορροφάται σε μερικές δεκάδες νανόμετρα και δεν μπορεί να διαπεράσει ένα κομμάτι μετάλλου με μεγαλύτερο πάχος.

Η διαφορά φάσης ηλεκτρικού και μαγνητικού πεδίου γνωρίζουμε ότι είναι  $\phi = \tan^{-1}(\kappa/k)$ . Καθώς  $\kappa \approx k$ ,  $\phi = 45^\circ$ .

Ο λόγος των πλατών είναι

$$\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\epsilon\mu} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\epsilon\omega}\right)^2}} \approx \sqrt{\frac{\mu\sigma}{\omega}}.$$

Με αντικατάσταση,  $B_0/E_0 \approx 10^{-7} \text{ m}^{-1}\text{s}$ .

10. Υπολογίστε το συντελεστή ανάκλασης για ορατό φως με  $\omega = 4 \times 10^{15} \text{ Hz}$  που προσπίπτει κάθετα σε διεπιφάνεια αέρα-αργύρου. Δίνονται  $\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$ ,  $\epsilon_1 = \epsilon_0$ ,  $\sigma_2 \approx 6.25 \times 10^7 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ .

**ΛΥΣΗ**

Ο συντελεστής ανάκλασης είναι

$$R = \frac{I_R}{I_I} = \left| \frac{E_{0,R}}{E_{0,I}} \right|^2 = \left| \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right|^2,$$

με

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} (k_2 + i\kappa_2)$$

όπου

$$k_2 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\epsilon_2 \omega}\right)^2} + 1}, \quad \kappa_2 = \omega \sqrt{\frac{\epsilon_2 \mu_2}{2}} \sqrt{\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma_2}{\epsilon_2 \omega}\right)^2} - 1}.$$

Με αντικατάσταση παρατηρούμε ότι  $\sigma_2/(\epsilon_2 \omega) \approx 1000 \gg 1$  επομένως

$$k_2 \approx \kappa_2 \approx \sqrt{\frac{\omega \mu_2 \sigma_2}{2}} \approx 4 \times 10^8 \text{ m}^{-1}.$$

Άρα

$$\beta = \frac{\mu_1 v_1}{\mu_2 \omega} (k_2 + i\kappa_2) \approx 30(1 + i)$$

και

$$R = \left| \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right|^2 \approx \left( \frac{-29 - i30}{31 + i30} \right)^2 \approx 94\%.$$





**Μέρος V**

**Γεωμετρική Οπτική**



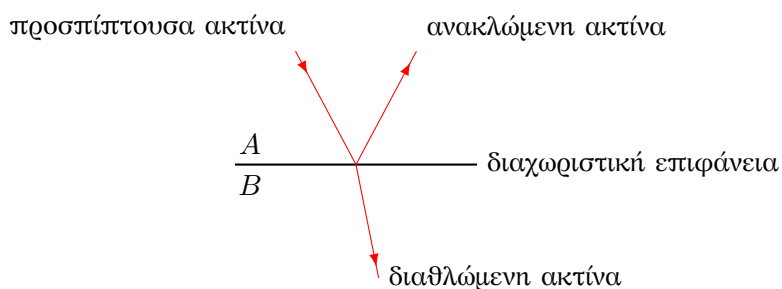
## Κεφάλαιο 13

# Γεωμετρική Οπτική

### 13.1 Διάδοση φωτός

Όταν μια ακτίνα φωτός που διαδίδεται σε ένα υλικό μέσο  $A$  συναντά μια λεία επιφάνεια που διαχωρίζει το μέσο  $A$  από κάποιο άλλο  $B$ , μέρος της ενέργειας που μεταφέρει η ακτίνα *ανακλάται* με τη μορφή νέας ακτίνας στο αρχικό μέσο ενώ η υπόλοιπη ενέργεια *διαθλάται* και διαδίδεται στο μέσο  $B$ .

Η διαχωριστική επιφάνεια θεωρείται λεία αν οι ανωμαλίες σε αυτή είναι πολύ μικρότερες από το μήκος κύματος της προσπίπτουσας ακτίνας.



#### 13.1.1 Ταχύτητα κύματος

Σχέση ταχύτητας κύματος,  $v$ , με μήκος κύματος,  $\lambda$ , και συχνότητα,  $f$ :  $v = \lambda f$ .

#### 13.1.2 Δείκτης διάθλασης

Ο δείκτης διάθλασης,  $n$ , ενός μέσου ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό,  $c$ , προς την ταχύτητα του φωτός στο μέσο,  $v$ :

$$n = \frac{c}{v} .$$

Ο δείκτης διάθλασης είναι αδιάστατο μέγεθος.

Η ταχύτητα του φωτός σε υλικό μέσο είναι μικρότερη από την ταχύτητά του στο κενό. Επομένως, ισχύει  $n > 1$ .

Ο δείκτης διάθλασης του κενού είναι προφανώς 1, ενώ του αέρα είναι πολύ κοντά στο 1 και συνήθως θα τον θεωρούμε ίσο με 1.

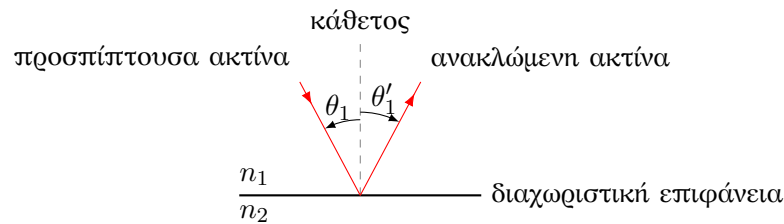
Όταν η ακτίνα που διαδίδεται σε ένα μέσο περάσει σε άλλο, διαφορετικού δείκτη διάθλασης, διατηρεί την ίδια συχνότητα καθώς η ενέργεια που μεταφέρει η ακτίνα συνδέεται με τη συχνότητα του φωτός και δεν έχουμε παραγωγή ή συσσωρευση ενέργειας στη διαχωριστική επιφάνεια των δύο μέσων: ίδια ενέργεια  $\rightarrow$  ίδια συχνότητα. Όμως, κατά τη διέλευση από τη διαχωριστική επιφάνεια αλλάζει η ταχύτητα του φωτός, επομένως αλλάζει το μήκος κύματος της ακτίνας.

### 13.1.3 Νόμος ανάκλασης

Από το πείραμα και τη θεωρία προκύπτει ότι η γωνία πρόσπτωσης,  $\theta_1$ , μιας ακτίνας που συναντά διαχωριστική επιφάνεια δύο μέσων και η γωνία  $\theta'_1$  της ακτίνας που ανακλάται, είναι ίσες:  $\theta_1 = \theta'_1$ .

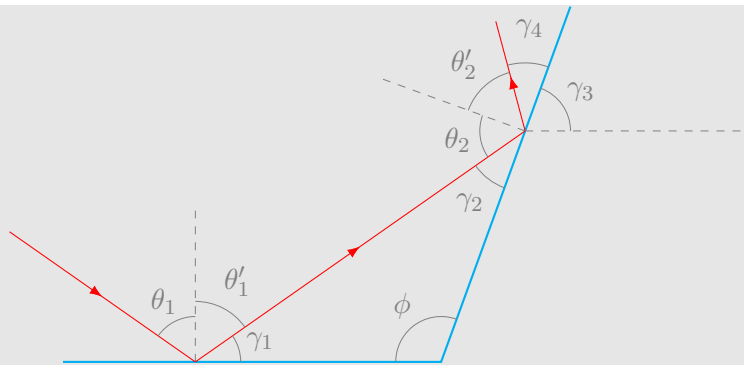
Προσέξτε ότι οι γωνίες μετρώνται ως προς την κάθετο στην επιφάνεια που διαχωρίζει τα δύο μέσα.

Η προσπίπτουσα ακτίνα, η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια και η ανακλώμενη ακτίνα είναι συνεπίπεδες.



#### Παράδειγμα

Δύο επίπεδα κάτοπτρα σχηματίζουν γωνία  $\phi$  μεταξύ τους. Μια ακτίνα προσπίπτει στο πρώτο κάτοπτρο με γωνία  $\theta_1$  ως προς την κάθετο (στο κάτοπτρο). Ανακλάται και προσπίπτει στο δεύτερο κάτοπτρο. Ας βρούμε την κατεύθυνση στην οποία θα ανακλαστεί από το δεύτερο κάτοπτρο.



Σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης, η ανακλώμενη ακτίνα από το πρώτο κάτοπτρο σχηματίζει γωνία  $\theta'_1 = \theta_1$  ως προς την κάθετο στο κάτοπτρο. Οι γωνίες του τριγώνου που σχηματίζεται από την ακτίνα και τα κάτοπτρα είναι  $\gamma_1 = 90^\circ - \theta'_1$  και  $\gamma_2 = 90^\circ - \theta_2$ . Πρέπει να ισχύει

$$\gamma_1 + \gamma_2 + \phi = 180^\circ \Rightarrow 90^\circ - \theta_1 + \phi + 90^\circ - \theta_2 = 180^\circ \Rightarrow \theta_2 = \phi - \theta_1 .$$

Η ακτίνα που ανακλάται από το δεύτερο κάτοπτρο σχηματίζει γωνία  $\theta'_2 = \theta_2 = \phi - \theta_1$  ως προς την κάθετο στο δεύτερο κάτοπτρο.

Η γωνία του δεύτερου κατόπτρου ως προς τον οριζόντιο άξονα εύκολα προκύπτει από το σχήμα ότι είναι  $\gamma_3 = 180^\circ - \phi$ . Η γωνία της δεύτερης ανακλώμενης ακτίνας ως προς το δεύτερο κάτοπτρο είναι  $\gamma_4 = 90^\circ - \theta'_2$ . Επομένως, η γωνία της δεύτερης ανακλώμενης ακτίνας ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι

$$\gamma_3 + \gamma_4 = 270^\circ - 2\phi + \theta_1 .$$

Αυτή προσδιορίζει τη διεύθυνσή της.

Η γωνία της προσπίπτουσας ακτίνας ως προς τον οριζόντιο άξονα είναι  $90^\circ + \theta_1$ .

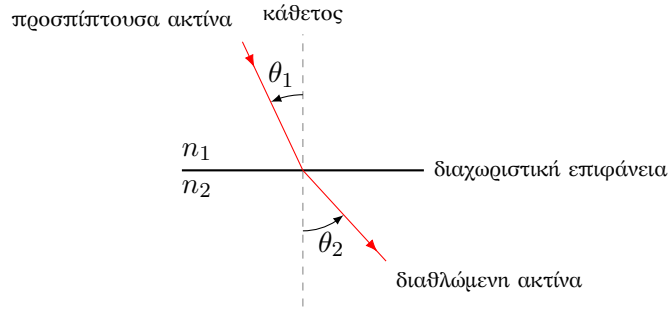
Παρατηρήστε ότι οι γωνίες ως προς τον οριζόντιο άξονα της προσπίπτουσας και της τελικής ανακλώμενης είναι ίσες όταν  $90^\circ + \theta_1 = 270^\circ - 2\phi + \theta_1 \Rightarrow \phi = 90^\circ$ . Επομένως, όταν τα κάτοπτρα είναι κάθετα μεταξύ τους η τελική ανακλώμενη ακτίνα έχει την ίδια διεύθυνση με την προσπίπτουσα (και αντίθετη φορά).

### 13.1.4 Νόμος διάθλασης Snell

Μια ακτίνα φωτός που διαδίδεται σε μέσο με δείκτη διάθλασης  $n_1$  προσπίπτει με γωνία  $\theta_1$  σε διαχωριστική επιφάνεια από μέσο με δείκτη διάθλασης  $n_2$ , διαθλάται σε γωνία  $\theta_2$  που δίνεται από τη σχέση (νόμος Snell)

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 .$$

Η προσπίπτουσα ακτίνα, η κάθετη στη διαχωριστική επιφάνεια και η διαθλώμενη ακτίνα είναι συνεπίπεδες.



### 13.1.5 Ολική εσωτερική ανάκλαση

Όταν μια ακτίνα φωτός που διαδίδεται σε μέσο με δείκτη διάθλασης  $n_1$  συναντά μέσο με *μικρότερο* δείκτη διάθλασης  $n_2 < n_1$ , ο νόμος Snell έχει ένα ενδιαφέρον συμπέρασμα: διάθλαση παρατηρείται αν η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_1$  είναι *μικρότερη* από μια κρίσιμη τιμή. Καθώς πρέπει  $\sin \theta_2 \leq 1$ , προκύπτει ότι

$$n_1 \sin \theta_1 \leq n_2 \Rightarrow \theta_1 \leq \sin^{-1} \left( \frac{n_2}{n_1} \right).$$

Όταν η γωνία της προσπίπτουσας ακτίνας είναι μεγαλύτερη από  $\theta_c = \sin^{-1}(n_2/n_1)$  (με  $n_2 < n_1$ ), δεν υπάρχει διάδοση του φωτός στο δεύτερο μέσο.

## 13.2 Σφαιρικό κάτοπτρο

Κάθε σημείο ενός αντικειμένου που φωτίζεται εκπέμπει φως προς όλες τις διευθύνσεις. Οι ακτίνες από κάθε σημείο που προσπίπτουν σε τμήμα σφαιρικού κατόπτρου ανακλώνται σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης: η γωνία ανάκλασης ως προς την κάθετο στη σφαιρική επιφάνεια στο σημείο πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης. Λόγω του σχήματος του κατόπτρου οι ανακλώμενες ακτίνες (ή οι προεκτάσεις τους) συγκλίνουν σε ένα σημείο (αρκεί να σχηματίζουν μικρή γωνία με τον άξονα του κατόπτρου). Αυτό είναι το σημείο στο είδωλο που αντιστοιχεί στο σημείο του αντικειμένου από το οποίο ξεκίνησαν οι προσπίπτουσες ακτίνες. Κάθε σημείο του αντικειμένου αντιστοιχεί σε διαφορετικό σημείο του ειδώλου. Με τον τρόπο αυτό εμφανίζεται το είδωλο.

*Εστία του κατόπτρου* είναι το σημείο σύγκλισης των ανακλώμενων ακτίνων που είναι παράλληλες στον άξονα.

Για να μελετήσουμε πρακτικά το σχηματισμό ειδώλου από ένα τμήμα σφαιρικού κατόπτρου, κάνουμε τα εξής:

1. Ορίζουμε μια ευθεία με αρχή κάποιο σημείο.
2. Τοποθετούμε κάθετα πάνω στην ευθεία *αριστερά* της αρχής το αντικείμενο, σε *όρθια* θέση. Θα το συμβολίζουμε με  $O$ . Η απόστασή του από την αρχή

της ευθείας θα συμβολίζεται με  $p$  και στους τύπους που θα παρατεθούν παρακάτω θα εμφανίζεται με θετικό πρόσημο. Αν τυχόν χρειαστεί να τοποθετήσουμε το αντικείμενο στα δεξιά της αρχής, η απόστασή του από αυτή θα χρησιμοποιείται με αρνητικό πρόσημο στους τύπους. Αν τυχόν χρειαστεί να τοποθετήσουμε το αντικείμενο σε αντεστραμμένη θέση, το ύψος του στους τύπους θα έχει αρνητικό πρόσημο.

3. Στην αρχή της ευθείας τοποθετούμε το τμήμα σφαιρικού κατόπτρου έτσι ώστε η ευθεία να αποτελεί τον άξονα συμμετρίας του. Η ανακλαστική του επιφάνεια αντικρίζει το αντικείμενο. Το κέντρο του και η εστία του θα συμβολίζονται με  $C$  και  $F$  αντίστοιχα. Τα δύο σημεία θα βρίσκονται πάνω στον άξονα. Οι αποστάσεις των δύο σημείων από την αρχή, η ακτίνα καμπυλότητας δηλαδή και η εστιακή απόσταση, θα συμβολίζονται με  $R$  και  $f$  αντίστοιχα.
4. Αν η ανακλαστική επιφάνεια είναι το εσωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας, το κάτοπτρο είναι κοίλο και το κέντρο και η εστία του βρίσκονται στα αριστερά της αρχής. Οι αποστάσεις  $R$ ,  $f$  στους τύπους που θα παρατεθούν παρακάτω θα εμφανίζονται με θετικό πρόσημο. Αν η ανακλαστική επιφάνεια είναι το εξωτερικό της σφαιρικής επιφάνειας, το κάτοπτρο είναι κυρτό και το κέντρο και η εστία του βρίσκονται στα δεξιά της αρχής. Οι αποστάσεις  $R$ ,  $f$  στους τύπους θα εμφανίζονται με αρνητικό πρόσημο.
5. Το είδωλο θα το συμβολίζουμε με  $I$  και θα βρίσκεται σε απόσταση  $q$  από την αρχή, κάθετα πάνω στον άξονα. Το  $q$  θα προκύπτει από τους τύπους που θα παρατεθούν παρακάτω. Αν έχει αρνητικό πρόσημο, το είδωλο είναι στα δεξιά της αρχής και είναι φανταστικό. Αν έχει θετικό πρόσημο, το είδωλο είναι στα αριστερά της αρχής και είναι πραγματικό.
6. Μπορεί να αποδειχθεί ότι ισχύουν οι σχέσεις

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \text{ όπου } f = R/2.$$

7. Η μεγέθυνση που προκαλεί το κάτοπτρο ορίζεται ως ο λόγος των υψών ειδώλου και αντικειμένου,  $M = h'/h$ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι

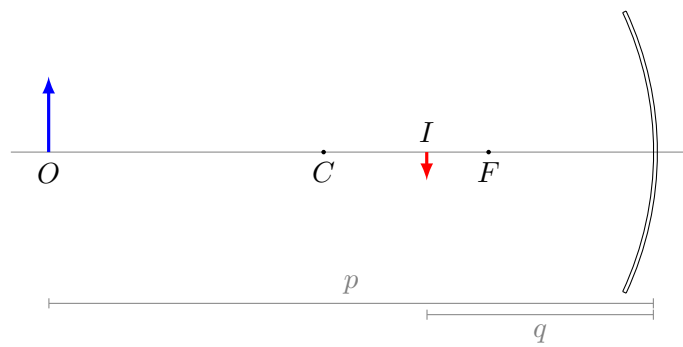
$$M = -\frac{q}{p}.$$

Αν η μεγέθυνση είναι θετική, το είδωλο είναι ορθό (ή γενικότερα, παράλληλο στο αντικείμενο). Αν είναι αρνητική, το είδωλο είναι αντεστραμμένο (ή γενικότερα, αντιπαράλληλο στο αντικείμενο).

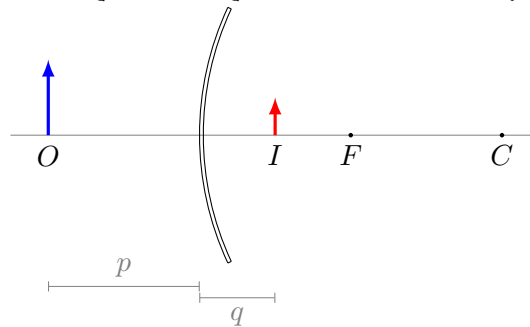
8. Η απόσταση αντικειμένου-ειδώλου είναι  $|p - q|$ .

Αφού προσδιορίσουμε τα  $p$ ,  $q$ ,  $R$ ,  $f$ , μπορούμε να σχεδιάσουμε το σχήμα (Σχήμα 13.1).

Η θέση του ειδώλου, το ύψος του και το αν είναι ορθό ή αντεστραμμένο μπορεί να προσδιοριστεί και από το σχήμα, κάνοντας το διάγραμμα ακτίνων.



(α') Κοίλο κάτοπτρο. C: κέντρο, F: εστία, O: αντικείμενο, I: είδωλο



(β') Κυρτό κάτοπτρο. C: κέντρο, F: εστία, O: αντικείμενο, I: είδωλο

Σχήμα 13.1: Σφαιρικά κάτοπτρα

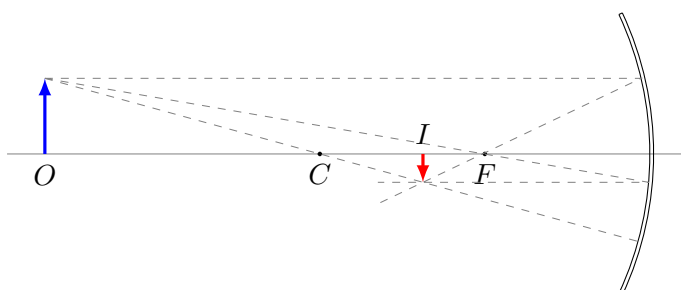


### 13.2.1 Διάγραμμα ακτίνων

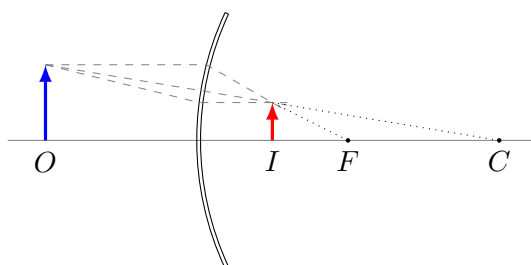
Για να βρούμε από το σχήμα τη θέση του ειδώλου από σφαιρικό κάτοπτρο, το ύψος του και το αν είναι ορθό ή αντεστραμμένο, φέρουμε από την κορυφή του αντικειμένου τουλάχιστον δύο από τις ακόλουθες τρεις ακτίνες:

- παράλληλα στον άξονα προς το κάτοπτρο και, μετά την ανάκλαση, προς την εστία ή μακριά από αυτή,
- προς ή από την εστία και, μετά την ανάκλαση στο κάτοπτρο, παράλληλα στον άξονα,
- από ή προς το κέντρο μέχρι το κάτοπτρο.

Το σημείο τομής τους (λαμβάνοντας υπόψη και την προέκτασή τους) είναι η κορυφή του ειδώλου. Δείτε τα σχήματα 13.2 και 13.3.



Σχήμα 13.2: Κοίλο κάτοπτρο: Διάγραμμα ακτίνων



Σχήμα 13.3: Κυρτό κάτοπτρο: Διάγραμμα ακτίνων

## 13.3 Είδωλο από διάθλαση σε σφαιρική διεπιφάνεια

Η διεπιφάνεια διαχωρίζει δύο μέσα με δείκτες διάθλασης  $n_1$ ,  $n_2$ . Είναι κοίλη ή κυρτή με ακτίνα καμπυλότητας  $R$  ώστε να υπάρχει εστίαση. Η θέση της είναι η αρχή μέτρησης των αποστάσεων. Το αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση  $p$  στο μέσο με δείκτη διάθλασης  $n_1$ . Η απόσταση του αντικειμένου είναι εξ ορισμού θετική,

καθώς αυτό βρίσκεται «μπροστά» από τη διεπιφάνεια. Το είδωλο σχηματίζεται σε απόσταση  $q$  από τη διεπιφάνεια. Οι αποστάσεις του κέντρου καμπυλότητας και του ειδώλου είναι θετικές στην «πίσω» πλευρά της διεπιφάνειας και αρνητικές στην «μπροστά». Το είδωλο είναι φανταστικό όταν το  $q$  είναι αρνητικό και πραγματικό όταν το  $q$  είναι θετικό.

Ισχύει

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} = \frac{n_2 - n_1}{R} .$$

Η μεγέθυνση, ο λόγος των υψών ειδώλου και αντικειμένου, είναι

$$M = -\frac{n_1 q}{n_2 p} .$$

### 13.3.1 Είδωλο από επίπεδη διεπιφάνεια

Όταν  $R \rightarrow \infty$ , η σφαιρική διεπιφάνεια γίνεται επίπεδη. Τότε

$$\frac{n_1}{p} = -\frac{n_2}{q} , \quad M = 1 .$$

## 13.4 Λεπτός φακός

Ο φακός είναι κάποιο διαφανές υλικό με δείκτη διάθλασης  $n_2$ , που οριοθετείται από δύο διεπιφάνειες με άλλο μέσο που έχει δείκτη διάθλασης  $n_1$ . Αν θεωρήσουμε ότι το είδωλο της πρώτης διεπιφάνειας (σε απόσταση  $q_1$  από αυτή) αποτελεί αντικείμενο για τη δεύτερη διεπιφάνεια (σε απόσταση  $p_2$  από αυτή) και ακόμα ότι ισχύει  $q_1 + p_2 = \tau$ , όπου  $\tau \approx 0$  το πάχος του φακού, η διαδοχική εφαρμογή των τύπων για δύο διεπιφάνειες δίνει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} , \tag{13.1}$$

όπου

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) .$$

Η απόσταση του αντικειμένου από το φακό είναι  $p$  και το είδωλο εμφανίζεται σε απόσταση  $q$ . Τα  $p, q$  είναι θετικά αν βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές του φακού. Το είδωλο είναι πραγματικό αν  $q > 0$  και φανταστικό αν  $q < 0$ . Οι αποστάσεις των δύο εστιών εκατέρωθεν του φακού είναι  $f$ . Συγκλίνοντες φακοί έχουν θετικό  $f$  και είναι παχύτεροι στο κέντρο σε σχέση με τα άκρα τους, ενώ οι αποκλίνοντες έχουν αρνητικό  $f$  και είναι λεπτότεροι στο κέντρο απ' όσο στα άκρα τους. Ο δείκτης διάθλασης του υλικού του φακού είναι  $n_2$ . Ο δείκτης διάθλασης του περιβάλλοντος μέσου είναι  $n_1$ .  $R_1$  και  $R_2$  είναι οι ακτίνες καμπυλότητας των δύο επιφανειών του φακού. Η μεγέθυνση είναι  $M = -q/p$ . Η απόσταση αντικειμένου-ειδώλου είναι  $|p + q|$ .

### 13.4.1 Διάγραμμα ακτίνων

Για να βρούμε τη θέση του ειδώλου από λεπτό φακό, το ύψος του και το αν είναι ορθό ή αντεστραμμένο, φέρουμε από την κορυφή του αντικειμένου τουλάχιστον δύο από τις ακόλουθες τρεις ακτίνες:

- παράλληλα στον άξονα προς το φακό και, μετά τη διάθλαση, από και προς την εστία στο πίσω μέρος του φακού (για συγκλίνοντα) ή την εστία στο εμπρός μέρος του φακού (για αποκλίνοντα).
- από και προς την εστία στο εμπρός μέρος του φακού (για συγκλίνοντα) ή την εστία στο πίσω μέρος του φακού (για αποκλίνοντα) και, μετά τη διάθλαση, παράλληλα στον άξονα,
- από και προς το κέντρο του φακού.

Το σημείο τομής τους είναι η κορυφή του ειδώλου.

### 13.4.2 Συνδυασμός φακών

Όταν δύο ή περισσότεροι φακοί είναι ομοαξονικοί, το είδωλο του πρώτου αποτελεί αντικείμενο του δεύτερου, το είδωλο του δεύτερου αποτελεί αντικείμενο του τρίτου κ.ο.κ. Επομένως, εντοπίζουμε τη θέση του ειδώλου που σχηματίζει ο πρώτος φακός, αγνοώντας τους υπόλοιπους. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία για το δεύτερο, θεωρώντας το είδωλο που προέκυψε από τον πρώτο ως αντικείμενό του και προσέχοντας οι αποστάσεις να μετρώνται από το κέντρο του δεύτερου φακού. Συνεχίζουμε με τους άλλους φακούς μέχρι να πάρουμε το τελικό είδωλο.

Αν το είδωλο που σχηματίζει ένας από τους φακούς προκύψει να είναι στην οπίσθια πλευρά του επόμενου φακού, τότε στην εξίσωση 13.1 το  $p$  είναι αρνητικό.

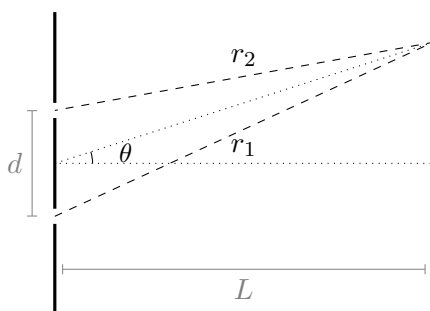
Η συνολική μεγέθυνση  $M$  είναι ο λόγος του ύψους τελικού ειδώλου προς το ύψος του αρχικού αντικειμένου. Εύκολα δείχνεται ότι είναι το γινόμενο των μεγεθύνσεων από κάθε φακό:

$$M = M_1 M_2 \cdots$$

## 13.5 Συμβολή κυμάτων

Κροσσοί συμβολής εμφανίζονται όταν συναντώνται δύο ή περισσότερα κύματα με διαφορά φάσης.

Δύο σχισμές σε απόσταση  $d$  (Σχήμα 13.4), στις οποίες προσπίπτει επίπεδο κύμα με μήκος κύματος  $\lambda$ , αποτελούν πηγές κυλινδρικών κυμάτων με το ίδιο μήκος κύματος. Τα ηλεκτρικά πεδία των κυμάτων κάθετα στις σχισμές είναι  $E_1 = E_0 \sin(kr - \omega t)$ ,  $E_2 = E_0 \sin(kr - \omega t)$ , όπου  $k = 2\pi/\lambda$ . Η διαφορά φάσης των κυμάτων είναι  $\phi = k(r_1 - r_2)$ .



Σχήμα 13.4: Συμβολή από δύο σχισμές

Η συμβολή των κυμάτων σε σημείο με αποστάσεις  $r_1$  και  $r_2$  από τις δύο σχισμές, είναι κύμα με πεδίο  $E = E_0 \sin(kr_1 - \omega t) + E_0 \sin(kr_2 - \omega t)$ . Καθώς ισχύει

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \left( \frac{A+B}{2} \right) \cos \left( \frac{A-B}{2} \right),$$

προκύπτει ότι

$$E = 2E_0 \sin \left( \frac{kr_1 + kr_2}{2} - \omega t \right) \cos \left( \frac{kr_1 - kr_2}{2} \right) = 2E_0 \cos \left( \frac{\phi}{2} \right) \sin \left( \frac{kr_1 + kr_2}{2} - \omega t \right).$$

Το κύμα που προκύπτει έχει πλάτος  $2E_0 \cos(\phi/2)$  και διαφορά φάσης από τα δύο συμβαλλόμενα  $\pm\phi/2$ . Η ένταση του κύματος είναι ανάλογη του τετραγώνου του πλάτους. Επομένως,  $I \propto 4E_0^2 \cos^2(\phi/2)$ .

Έχουμε δημιουργική συμβολή (φωτεινό κροσσό) όταν  $\cos(\phi/2) = \pm 1$  δηλαδή όταν  $\phi = 2m\pi$ ,  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . Επομένως

$$\phi = 2m\pi \Rightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) = 2m\pi \Rightarrow r_1 - r_2 = m\lambda.$$

Καταστρεπτική συμβολή έχουμε όταν  $\cos(\phi/2) = 0$  δηλαδή όταν  $\phi = (2m+1)\pi \Rightarrow r_1 - r_2 = (m+1/2)\lambda$ .

Εύκολα προκύπτει ότι  $r_1 - r_2 \approx d \sin \theta$  όπου  $\theta$  η γωνία της θέσης του κροσσού ως προς τη μεσοκάθετο. Η απόσταση του κροσσού από το κέντρο (τομή μεσοκάθετου με πέτασμα σε απόσταση  $L$ ) είναι  $y = L \tan \theta \approx L \sin \theta$ .

### 13.6 Περίθλαση κύματος

Όταν κύμα περνά από ένα άνοιγμα (ή συναντά μικρό εμπόδιο) εμφανίζεται περίθλαση. Κάθε σημείο του ανοίγματος συμπεριφέρεται ως σημειακή πηγή. Η συμβολή όλων αυτών των πηγών παράγει την εικόνα περίθλασης.

Η συμβολή των κυμάτων από το πάνω μισό της σχισμής με αυτά του κάτω μισού είναι καταστρεπτική όταν  $\frac{d}{2} \sin \theta = (m+1/2)\lambda \Rightarrow \sin \theta = (2m+1)\lambda/d$ .

Μπορεί ναδειχθεί ότι η ένταση είναι

$$I \propto \text{sinc}^2 \left( \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} \right) .$$

Όταν  $\sin \theta = 0$  έχουμε (απόλυτο) μέγιστο (1), όταν  $\pi d \sin \theta / \lambda = m\pi$  έχουμε ελάχιστο (0), και όταν  $x \cos x = \sin x$  έχουμε τα δευτερεύοντα μέγιστα.

## 13.7 Ασκήσεις–Λύσεις

### 13.7.1 Διάδοση φωτός

1. Ένα λέιζερ ήλιου–νέου εκπέμπει ερυθρό φως που έχει μήκος κύματος στον αέρα ίσο με 632.8 nm.

- Ποια είναι η συχνότητά του;
- Ποιο είναι το μήκος κύματος σε γυαλί που έχει δείκτη διάθλασης 1.5;
- Ποια είναι η ταχύτητά του μέσα στο γυαλί;

#### ΛΥΣΗ

Η συχνότητα της ακτινοβολίας είναι  $f = c/\lambda$ . Με αντικατάσταση προκύπτει  $f \approx 473.7 \text{ THz}$ .

Το μήκος κύματος σε γυαλί ( $n = 1.5$ ) προκύπτει ως εξής

$$n = \frac{c}{v} = \frac{c}{\lambda' f} = \frac{\lambda}{\lambda'} \Rightarrow \lambda' = \frac{\lambda}{n} .$$

Με αντικατάσταση,  $\lambda' \approx 421.9 \text{ nm}$ .

Η ταχύτητα μέσα στο γυαλί είναι  $v = c/n$ . Με αντικατάσταση,  $v \approx 2 \times 10^8 \text{ m/s}$ .

2. Φως που διαδίδεται στον αέρα προσπίπτει με γωνία  $50^\circ$  ως προς την κάθετο, στην επιφάνεια κάποιου υλικού. Διαθλάται σε γωνία  $20^\circ$  ως προς την κάθετο. Ποια είναι η ταχύτητα της διαθλώμενης ακτίνας σε σχέση με την ταχύτητα της προσπίπτουσας;

#### ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το νόμο του Snell, η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_1$ , η γωνία διάθλασης  $\theta_2$ , ο δείκτης διάθλασης  $n_1$  του μέσου στο οποίο διαδίδεται η προσπίπτουσα και ο δείκτης διάθλασης  $n_2$  του μέσου στο οποίο διαδίδεται η διαθλώμενη ακτίνα, ικανοποιούν τη σχέση

$$n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2 .$$

Επιπλέον, ο δείκτης διάθλασης  $n$  ενός μέσου ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό,  $c$ , προς την ταχύτητα του φωτός στο μέσο,  $v$ :  $n = c/v$ . Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις προκύπτει ότι

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin \theta_2}{\sin \theta_1} .$$

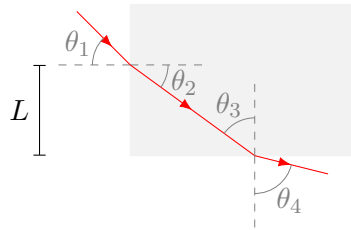
Επομένως, ο λόγος της ταχύτητας της διαθλώμενης ακτίνας προς την ταχύτητα της προσπίπτουσας είναι

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sin(20^\circ)}{\sin(50^\circ)} = 0.446 .$$

3. Μια ακτίνα φωτός εισέρχεται σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο από πλαστικό υπό γωνία  $45^\circ$  και εξέρχεται υπό γωνία  $76^\circ$ .

(α') Βρείτε το δείκτη διάθλασης του πλαστικού υλικού.

(β') Αν η φωτεινή ακτίνα εισέρχεται στο πλαστικό από το σημείο που απέχει  $L = 50\text{ cm}$  από το κάτω άκρο, ποιο είναι το χρονικό διάστημα που χρειάζεται για να διασχίσει το πλαστικό;



### ΛΥΣΗ

Έστω

- $\theta_1$  η γωνία πρόσπτωσης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_2$  η γωνία διάθλασης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_3$  η γωνία πρόσπτωσης στη δεύτερη επιφάνεια,
- $\theta_4$  η γωνία διάθλασης στη δεύτερη επιφάνεια.

Θεωρούμε ότι ο δείκτης διάθλασης του αέρα είναι 1.

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι  $\theta_2 + \theta_3 = 90^\circ$ .

Από το νόμο του Snell για την πρώτη επιφάνεια ισχύει

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 .$$

Από το νόμο του Snell για τη δεύτερη επιφάνεια ισχύει

$$\sin \theta_4 = n \sin \theta_3 = n \cos \theta_2 .$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο τις παραπάνω σχέσεις και προσθέτουμε κατά μέλη:

$$\sin^2 \theta_1 + \sin^2 \theta_4 = n^2(\sin^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_2) = n^2 .$$

Με αντικατάσταση των γνωστών τιμών για τις  $\theta_1$ ,  $\theta_4$  έχουμε  $n = 1.2$ .

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι το μήκος  $D$  του τμήματος που διανύει η διαθλώμενη ακτίνα στο μέσο ικανοποιεί τη σχέση

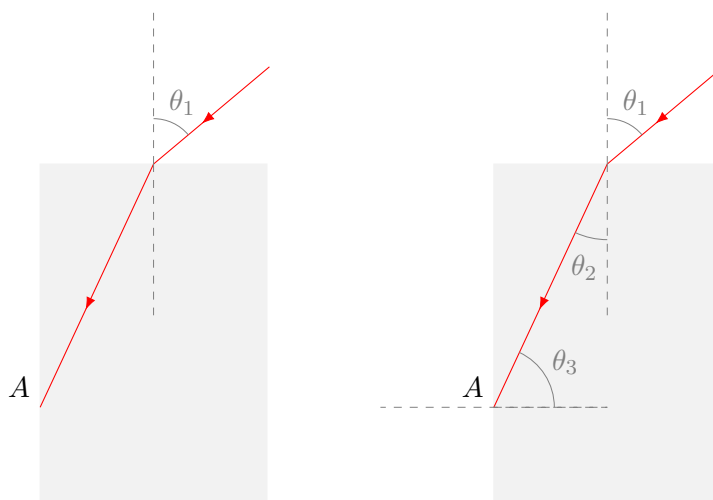
$$\frac{L}{D} = \sin \theta_2 \Rightarrow D = \frac{L}{\sin \theta_2} = \frac{nL}{\sin \theta_1} .$$

Η ταχύτητα του φωτός στο μέσο είναι  $v = c/n$ , από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης. Το φως διανύει το μήκος  $D$  σε χρόνο

$$t = \frac{D}{v} = \frac{n}{c} \frac{nL}{\sin \theta_1}.$$

Με αντικατάσταση,  $t \approx 3.4 \text{ ns}$ .

4. Μια φωτεινή ακτίνα διαδιδόμενη στον αέρα προσπίπτει σε ένα ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο από διαφανές στερεό του οποίου ο δείκτης διάθλασης είναι  $n = 1.38$ . Πόση είναι η μέγιστη γωνία πρόσπτωσης  $\theta_1$  για την οποία θα συμβεί ολική εσωτερική ανάκλαση στην κάθετη έδρα (σημείο  $A$  στο σχήμα).



### ΛΥΣΗ

Σύμφωνα με το νόμο Snell, η ακτίνα που διαδίδεται στον αέρα (δείκτης διάθλασης 1), διαθλάται στο στερεό (με δείκτη διάθλασης  $n$ ), με την διαθλώμενη ακτίνα να σχηματίζει γωνία  $\theta_2$  με την κάθετο. Η  $\theta_2$  ικανοποιεί τη σχέση (νόμος Snell)

$$n \sin \theta_2 = \sin \theta_1. \quad (13.2)$$

Η γωνία πρόσπτωσης  $\theta_3$  στο σημείο  $A$  είναι συμπληρωματική της  $\theta_2$  καθώς είναι γωνίες ορθογώνιου τριγώνου:

$$\theta_3 = 90^\circ - \theta_2.$$

Για να έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση στο σημείο  $A$  της διεπιφάνειας μεταξύ του στερεού (με δείκτη διάθλασης  $n$ ) και του αέρα (με δείκτη διάθλασης 1) πρέπει να ισχύει, σύμφωνα με το νόμο Snell,

$$n \sin \theta_3 \geq 1 \Rightarrow n \cos \theta_2 \geq 1. \quad (13.3)$$



Υψώνουμε στο τετράγωνο και προσθέτουμε τις σχέσεις (13.2) και (13.3):

$$(n \sin \theta_2)^2 + (n \cos \theta_2)^2 \geq \sin^2 \theta_1 + 1 \Rightarrow n^2 \geq \sin^2 \theta_1 + 1 \Rightarrow \sin \theta_1 \leq \sqrt{n^2 - 1} .$$

Επομένως, η μέγιστη γωνία  $\theta_1$  για να έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση είναι

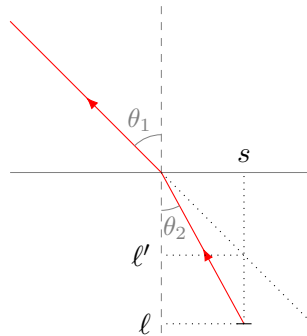
$$\theta_{1,\max} = \sin^{-1} \left( \sqrt{n^2 - 1} \right) .$$

Με αντικατάσταση του  $n = 1.38$ ,  $\theta_{1,\max} \approx 72^\circ$ .

5. Ένα νόμισμα βρίσκεται στον πυθμένα μιας πισίνας βάθους 1 m. Ποιο είναι το φαινομενικό βάθος του νομίσματος για ένα παρατηρητή που βλέπει από πάνω, ως προς την ελεύθερη επιφάνεια του νερού; (δείκτης διάθλασης νερού  $n = 1.33$ .)

### ΛΥΣΗ

Το νόμισμα είναι σε πραγματικό βάθος  $\ell$ , φαινομενικό βάθος  $\ell'$ , και σε από-



σταση  $s$  από την κάθετο στο σημείο πρόσπτωσης. Σύμφωνα με το νόμο του Snell,  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Αλλά,

$$\tan \theta_1 = \frac{s}{\ell'} , \quad \tan \theta_2 = \frac{s}{\ell} .$$

Άρα

$$\ell' = \ell \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \ell \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_2} = \ell \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2} .$$

Αφού οι γωνίες είναι μικρές (ο παρατηρητής βλέπει από πάνω),  $\cos \theta_i \approx 1$ . Επομένως  $\ell' = \ell n_1 / n_2$ .

Με αντικατάσταση,  $\ell' = 0.75$  m.

6. Μια δέσμη φωτός στον αέρα προσπίπτει σε κομμάτι γυαλί (δείκτης διάθλασης  $n = 1.56$ .) Ένα τμήμα ανακλάται και το άλλο διαθλάται. Βρείτε τη γωνία πρόσπτωσης αν η γωνία ανάκλασης είναι διπλάσια της γωνίας διάθλασης.

**ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης, η γωνία ανάκλασης,  $\theta'$ , είναι ίση με τη γωνία πρόσπτωσης,  $\theta$ .

Από το νόμο διάθλασης του Snell γνωρίζουμε ότι η γωνία διάθλασης,  $\theta''$ , σχετίζεται με τη γωνία ανάκλασης και το δείκτη διάθλασης με τη σχέση

$$n \sin \theta'' = \sin \theta'.$$

Ο δείκτης διάθλασης του αέρα θεωρήθηκε 1.

Καθώς  $\theta' = 2\theta''$  προκύπτει

$$n \sin \theta'' = \sin(2\theta'') = 2 \sin \theta'' \cos \theta'' \Rightarrow \cos \theta'' = n/2 \Rightarrow \theta'' = \cos^{-1}(n/2).$$

Επομένως,

$$\theta = \theta' = 2\theta'' = 2 \cos^{-1}(n/2).$$

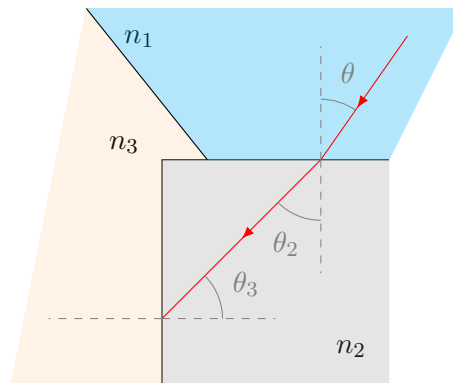
Με αντικατάσταση,  $\theta \approx 77.45^\circ$ .

7. Στο Σχήμα 13.5, φως που βρίσκεται αρχικά στο υλικό 1, διαθλάται στο υλικό 2 (υπάρχει βέβαια και ανάκλαση), διασχίζει το υλικό 2 και στη συνέχεια προσπίπτει με την κρίσιμη γωνία στη διαχωριστική επιφάνεια μεταξύ των υλικών 2 και 3. Οι δείκτες διάθλασης είναι  $n_1 = 1.6$ ,  $n_2 = 1.4$  και  $n_3 = 1.2$ .

(α') Ποια είναι η γωνία  $\theta$ ;

(β') Αν η  $\theta$  αυξηθεί υπάρχει διάθλαση φωτός στο υλικό 3;

(γ') Ποια είναι η ταχύτητα του φωτός στο υλικό 3; (ταχύτητα του φωτός στο κενό  $c = 3 \times 10^8$  m/s).



Σχήμα 13.5: Άσκηση 7

**ΛΥΣΗ**

Η κρίσιμη γωνία για ολική εσωτερική ανάκλαση στη διαχωριστική επιφάνεια των μέσων 2 και 3 είναι, ως γνωστόν,

$$\theta_3^c = \sin^{-1}(n_3/n_2) .$$

Αυτή είναι η γωνία πρόσπτωσης στη διαχωριστική επιφάνεια των μέσων 2 και 3.

Όπως παρατηρούμε από το σχήμα, οι γωνίες  $\theta_2$  και  $\theta_3$  είναι συμπληρωματικές (έχουν άθροισμα  $90^\circ$ ) καθώς είναι γωνίες βάσης ορθογώνιου τριγώνου. Επομένως,  $\theta_2 = 90^\circ - \theta_3^c$ .

Από το νόμο Snell, γνωρίζουμε τη σχέση των γωνιών  $\theta$ ,  $\theta_2$ :

$$n_1 \sin \theta = n_2 \sin \theta_2 = n_2 \cos \theta_3^c = n_2 \sqrt{1 - \sin^2 \theta_3^c} = n_2 \sqrt{1 - (n_3/n_2)^2} = \sqrt{n_2^2 - n_3^2} .$$

Καταλήγουμε επομένως στο

$$\sin \theta = \frac{\sqrt{n_2^2 - n_3^2}}{n_1} .$$

Με αντικατάσταση,  $\sin \theta = 0.325 \Rightarrow \theta \approx 19^\circ$ .

Αν αυξηθεί η γωνία  $\theta$ , αυξάνεται και η  $\theta_2$ , όπως προκύπτει από το νόμο Snell. Καθώς το άθροισμα των  $\theta_2$ ,  $\theta_3$  είναι σταθερό ( $90^\circ$ ), η αύξηση της  $\theta_2$  προκαλεί μείωση της  $\theta_3$ . Καθώς αυτή γίνεται μικρότερη από την κρίσιμη γωνία, θα υπάρχει διάθλαση.

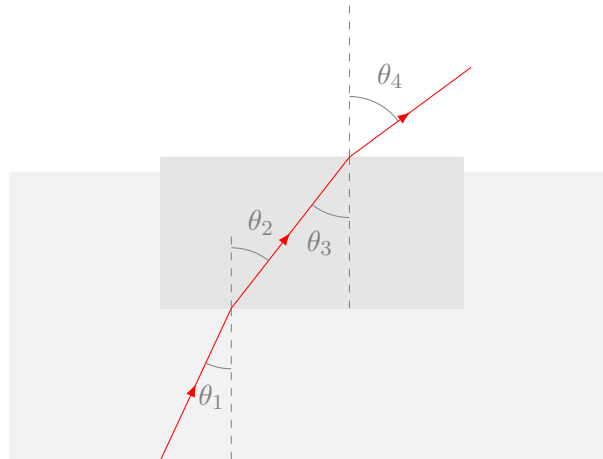
Η ταχύτητα του φωτός  $v_3$  στο υλικό 3 υπολογίζεται από τον ορισμό του δείκτη διάθλασης:

$$n_3 = \frac{c}{v_3} \Rightarrow v_3 = \frac{c}{n_3} .$$

Με αντικατάσταση,  $v_3 = 2.5 \times 10^8$  m/s.

8. Μια λεπτή στρώση πάγου ( $n = 1.309$ ), με τη μορφή ορθογώνιου παραλληλεπίπεδου, επιπλέει στην επιφάνεια του νερού ( $n = 1.333$ ) μέσα σε κάδο. Μια φωτεινή ακτίνα που εκκινεί από τον πυθμένα του κάδου οδεύει προς τα πάνω μέσα στο νερό. Ποια είναι η μέγιστη γωνία ως προς την κάθετο που μπορεί να σχηματίζει η ακτίνα στη διαχωριστική γραμμή πάγου–νερού ώστε να είναι ακόμα δυνατό να εξέρχεται η ακτίνα στον αέρα ( $n = 1$ ) πάνω από τον πάγο;

**ΛΥΣΗ**



Σύμφωνα με το νόμο Snell, η ακτίνα που διαδίδεται στο νερό (με δείκτη διάθλασης  $n_1$ ) και προσπίπτει στη διαχωριστική επιφάνεια με γωνία  $\theta_1$ , διαθλάται στον πάγο (με δείκτη διάθλασης  $n_2$ ), με την διαθλωμένη ακτίνα να σχηματίζει γωνία  $\theta_2$  με την κάθετο που ικανοποιεί τη σχέση

$$n_2 \sin \theta_2 = n_1 \sin \theta_1 .$$

Η διαθλωμένη ακτίνα προσπίπτει στην παράλληλη διαχωριστική επιφάνεια πάγου–αέρα με γωνία  $\theta_3$  που είναι ίση (όπως προκύπτει από το σχήμα) με  $\theta_2$ . Διαθλάται ξανά και συνεχίζει στον αέρα (με δείκτη διάθλασης  $n_3 = 1$ ). Η νέα γωνία διάθλασης ως προς την κάθετο,  $\theta_4$ , ικανοποιεί τη σχέση

$$n_3 \sin \theta_4 = n_2 \sin \theta_3 .$$

Ο συνδυασμός των δύο προηγούμενων εξισώσεων, μαζί με την  $\theta_3 = \theta_2$ , δίνει

$$n_1 \sin \theta_1 = n_3 \sin \theta_4 .$$

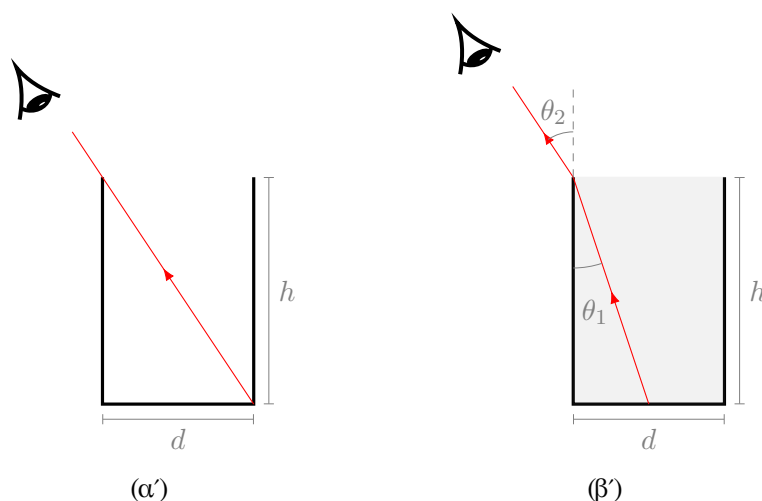
Για να μπορεί να εξέρχεται στον αέρα η ακτίνα πρέπει  $\sin \theta_4 \leq 1$ . Άρα

$$n_1 \sin \theta_1 \leq n_3 \Rightarrow \theta_1 \leq \sin^{-1}(n_3/n_1) .$$

Με αντικατάσταση των  $n_1, n_3$  προκύπτει ότι  $\theta_1 \leq \sin^{-1}(1/1.333) \approx 48.6^\circ$ .

9. Κάποιος κοιτάζει μέσα σε ένα άδειο δοχείο και οριακά μπορεί να δει την απέναντι άκρη του πυθμένα (Σχήμα 13.6α). Το δοχείο έχει ύψος  $h$  και πλάτος  $d$ . Όταν το δοχείο είναι γεμάτο με υγρό που έχει δείκτη διάθλασης  $n$  και ο παρατηρητής το βλέπει υπό ίδια γωνία, μπορεί να δει το κέντρο ενός κέρματος που βρίσκεται στη μέση του πυθμένα (Σχήμα 13.6β). Δείξτε ότι

$$\frac{h}{d} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{4 - n^2}} .$$



Σχήμα 13.6: Άσκηση 9

**ΛΥΣΗ**

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η ακτίνα που ξεκινά από το νόμισμα και συναντά, με γωνία  $\theta_1$  ως προς την κάθετο, τη διαχωριστική επιφάνεια υγρού (δείκτης διάθλασης  $n$ ) και αέρα (δείκτης διάθλασης 1) στο χείλος του δοχείου, διαθλάται με γωνία  $\theta_2$  ως προς την κάθετο και συνεχίζει με την πορεία που θα είχε χωρίς το υγρό. Η σχέση των γωνιών και του δείκτη διάθλασης δίνεται από το νόμο του Snell

$$n \sin \theta_1 = \sin \theta_2 ,$$

Για τη γωνία  $\theta_2$  που σχηματίζει με την κάθετο η ακτίνα, έχουμε από το Σχήμα 13.6α'

$$\tan \theta_2 = \frac{d}{h} .$$

Για τη γωνία  $\theta_1$  έχουμε από το Σχήμα 13.6β'

$$\tan \theta_1 = \frac{d/2}{h} .$$

Όμως,

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}} ,$$

επομένως

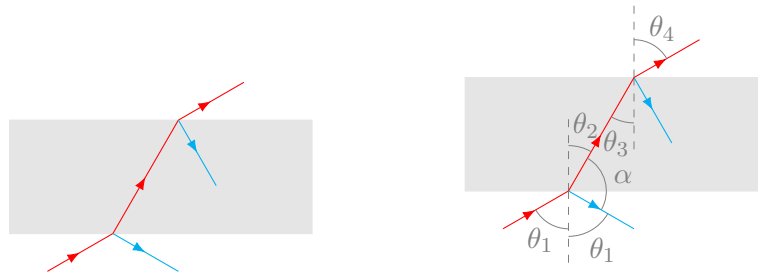
$$\sin \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{(2h/d)^2 + 1}} , \quad \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{(h/d)^2 + 1}} .$$

Με αντικατάσταση στο νόμο Snell προκύπτει

$$\begin{aligned} n\sqrt{(h/d)^2 + 1} &= \sqrt{(2h/d)^2 + 1} \Rightarrow n^2((h/d)^2 + 1) = 4(h/d)^2 + 1 \Rightarrow \\ n^2 - 1 &= (4 - n^2)(h/d)^2 \Rightarrow \frac{h}{d} = \sqrt{\frac{n^2 - 1}{4 - n^2}} . \end{aligned}$$

10. Μια ακτίνα φωτός που διαδίδεται στον αέρα συναντά τη λεία επιφάνεια ενός διαφανούς τούβλου. Μέρος της ενέργειας που μεταφέρει η ακτίνα ανακλάται ενώ η υπόλοιπη ενέργεια διαθλάται. Η διαθλώμενη ακτίνα συναντά την απέναντι πλευρά του γυάλινου τούβλου και υφίσταται και αυτή ανάκλαση και διάθλαση.

Ποια πρέπει είναι η γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας και ο δείκτης διάθλασης του υλικού ώστε η ανακλώμενη και η διαθλώμενη ακτίνα στην πρώτη επιφάνεια να είναι κάθετες και η απόκλιση της διαθλώμενης ακτίνας από την προσπίπτουσα (η διαφορά δηλαδή των γωνιών πρόσπτωσης και διάθλασης) στη δεύτερη επιφάνεια να είναι  $30^\circ$ ;



Σχήμα 13.7: Άσκηση 10

#### ΛΥΣΗ

Η προσπίπτουσα ακτίνα στην πρώτη επιφάνεια σχηματίζει γωνία  $\theta_1$  ως προς την κάθετο. Σύμφωνα με το νόμο της ανάκλασης, η γωνία της ανακλώμενης ακτίνας είναι και αυτή  $\theta_1$ .

Η διαθλώμενη ακτίνα στην πρώτη επιφάνεια σχηματίζει γωνία  $\theta_2$  ως προς την κάθετο. Σύμφωνα με το νόμο Snell

$$1 \sin \theta_1 = n \sin \theta_2 .$$

Η διαθλώμενη ακτίνα προσπίπτει στη δεύτερη επιφάνεια με γωνία  $\theta_3$ . Η γωνία είναι ίση με  $\theta_2$  (είναι εντός εναλλάξ).

Η διαθλώμενη ακτίνα στη δεύτερη επιφάνεια σχηματίζει γωνία  $\theta_4$  ως προς την κάθετο. Σύμφωνα με το νόμο Snell

$$n \sin \theta_3 = 1 \sin \theta_4 .$$

Από τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 = n \sin \theta_3 = \sin \theta_4 .$$

Καθώς οι γωνίες  $\theta_1, \theta_4$  είναι στο διάστημα  $[0, \pi/2]$  και έχουν ίδια ημίτονα, είναι ίσες:  $\theta_1 = \theta_4$ .

Επιπλέον, καθώς  $n > 1$ ,  $\sin \theta_3 < \sin \theta_4$  και συνεπώς, αφού οι γωνίες  $\theta_3, \theta_4$  είναι στο διάστημα  $[0, \pi/2]$ ,  $\theta_3 < \theta_4$ .

Ας έρθουμε τώρα στα δεδομένα της άσκησης: Αν  $\alpha$  η γωνία διαθλώμενης και ανακλώμενης ακτίνας στην πρώτη επιφάνεια, παρατηρούμε από το σχήμα ότι  $\theta_1 + \alpha + \theta_2 = 180^\circ$ . Καθώς η  $\alpha$  θέλουμε να είναι  $90^\circ$ , προκύπτει ότι

$$\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ .$$

Στη δεύτερη επιφάνεια θέλουμε

$$\theta_4 - \theta_3 = 30^\circ \Rightarrow \theta_1 - \theta_2 = 30^\circ .$$

Επομένως,  $\theta_1 = 60^\circ$ ,  $\theta_2 = 30^\circ$ .

Από το νόμο Snell

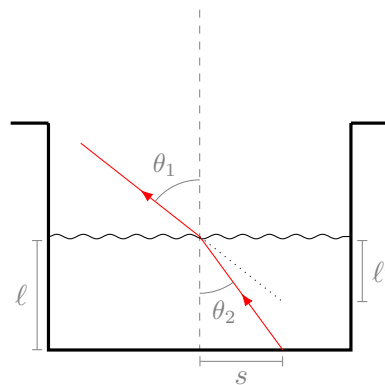
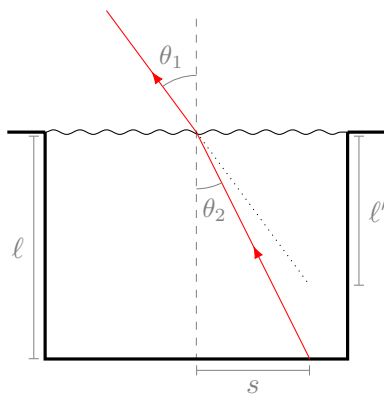
$$n = \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \sqrt{3} \approx 1.73 .$$

11. Το επάνω μέρος μιας πισίνας είναι στο επίπεδο του εδάφους. Αν η πισίνα έχει βάθος 2 m, σε πόση απόσταση από το επίπεδο του εδάφους φαίνεται να βρίσκεται ο πυθμένας της όταν

- είναι γεμάτη με νερό,
- όταν είναι μισογεμάτη με νερό;

Δίνεται ο δείκτης διάθλασης νερού  $n = 1.33$ .

### ΛΥΣΗ



Ένα σημείο του πυθμένα είναι σε πραγματικό βάθος  $\ell$ , φαινομενικό βάθος  $\ell'$ , και σε απόσταση  $s$  από την κάθετο στο σημείο πρόσπτωσης. Σύμφωνα με το νόμο του Snell,  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ . Αλλά,

$$\tan \theta_1 = \frac{s}{\ell'}, \quad \tan \theta_2 = \frac{s}{\ell}.$$

Άρα

$$\ell' = \ell \frac{\tan \theta_2}{\tan \theta_1} = \ell \frac{\sin \theta_2 \cos \theta_1}{\sin \theta_1 \cos \theta_2} = \ell \frac{n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_2}.$$

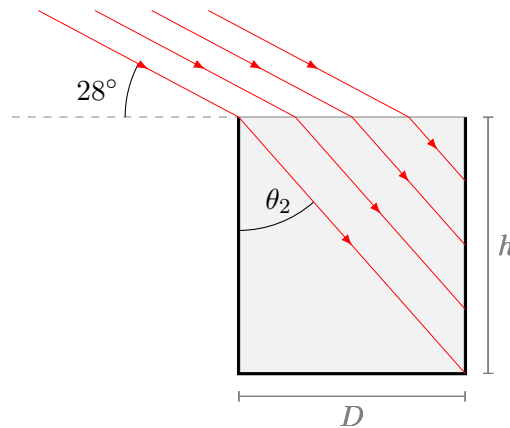
Θεωρούμε ότι οι γωνίες πρόσπτωσης ( $\theta_2$ ) και διάθλασης ( $\theta_1$ ) είναι μικρές (ο παρατηρητής βλέπει από πάνω)<sup>1</sup>. Τότε  $\cos \theta_i \approx 1$ . Επομένως  $\ell' = \ell/n$ .

Στην περίπτωση που η πισίνα είναι γεμάτη, έχουμε  $\ell = 2$  m. Με αντικατάσταση,  $\ell' \approx 1.503$  m.

Στην περίπτωση που η πισίνα είναι μισογεμάτη, έχουμε  $\ell = 1$  m. Με αντικατάσταση,  $\ell' \approx 0.752$  m. Η απόσταση από το έδαφος είναι  $\ell + \ell' = 1.752$  m.

12. Ένα αδιαφανές κυλινδρικό δοχείο, το οποίο έχει ανοικτό το πάνω μέρος του και διάμετρο  $D = 3$  m, είναι γεμάτο με νερό ( $n = 1.333$ ). Όταν ο ήλιος δύοντας φτάσει στις  $28^\circ$  πάνω από τον ορίζοντα, το ηλιακό φως παύει να φωτίζει τον πυθμένα του δοχείου. Πόσο βάθος έχει το δοχείο;

### ΛΥΣΗ



Γωνία πρόσπτωσης  $\phi$  ως προς τον ορίζοντα σημαίνει γωνία πρόσπτωσης  $\theta_1 = \pi/2 - \phi$  ως προς την κάθετο στην επιφάνεια του νερού. Η διαθλώμενη ακτίνα σχηματίζει γωνία  $\theta_2$  που σύμφωνα με το νόμο του Snell είναι

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \Rightarrow \sin \theta_2 = \frac{1}{n} \sin \theta_1 = \frac{\cos \phi}{n}.$$

<sup>1</sup>Για να γίνουν κατανοητά τα σχήματα, δεν τηρήθηκε αυτή η συνθήκη.



Από το σχήμα προκύπτει ότι  $\tan \theta_2 = D/h$  όπου  $D$  η διάμετρος του δοχείου και  $h$  το ύψος του. Άρα

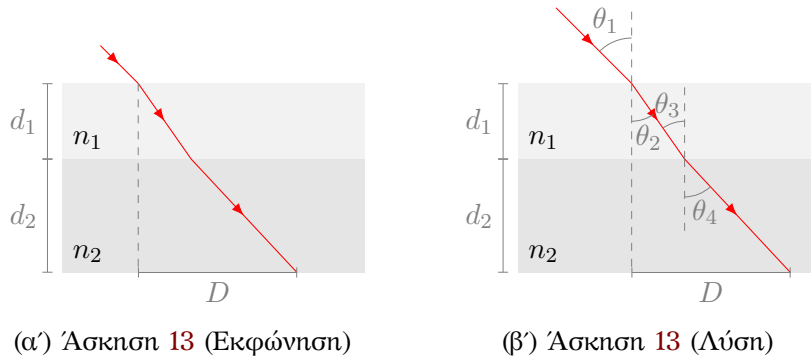
$$\begin{aligned} \frac{D}{h} &= \tan \theta_2 = \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} = \frac{\cos \phi}{\sqrt{n^2 - \cos^2 \phi}} \Rightarrow h = D \frac{\sqrt{n^2 - \cos^2 \phi}}{\cos \phi} \\ &= D \sqrt{\left(\frac{n}{\cos \phi}\right)^2 - 1}. \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση,  $h \approx 3.39$  m.

13. Δέσμη φωτός που διαδίδεται στον αέρα, προσπίπτει με γωνία  $\theta_1$  σε πλαστικό κομμάτι πάχους  $d_1$  και δείκτη διάθλασης  $n_1$ . Το πλαστικό βρίσκεται πάνω σε γυαλί πάχους  $d_2$  και με δείκτη διάθλασης  $n_2$ . Δείξτε ότι η απόσταση  $D$  στο Σχήμα 13.8α' είναι

$$D = \sin \theta_1 \left( \frac{d_1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}} + \frac{d_2}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_1}} \right).$$

Δίνεται ότι  $\tan \theta = \sin \theta / \sqrt{1 - \sin^2 \theta}$  για  $\theta \in [-\pi/2, \pi/2]$ .



Σχήμα 13.8: Άσκηση 13

### ΛΥΣΗ

Η γωνία πρόσπτωσης είναι  $\theta_1$  ως προς την κάθετο. Η ακτίνα διαθλάται στο πρώτο μέσο με γωνία  $\theta_2$ . Ο νόμος του Snell συσχετίζει τις δύο γωνίες:

$$1 \sin \theta_1 = n_1 \sin \theta_2.$$

Η οριζόντια απόσταση που διανύει στο πρώτο μέσο η διαθλώμενη ακτίνα είναι

$$\ell_1 = d_1 \tan \theta_2 = d_1 \frac{\sin \theta_2}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_2}} = d_1 \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}}.$$

Η ακτίνα προσπίπτει στο δεύτερο μέσο με γωνία  $\theta_3$  ως προς την κάθετο. Η γωνία είναι ίση με  $\theta_2$  (είναι εντός εναλλάξ). Η ακτίνα διαθλάται εκ νέου με γωνία  $\theta_4$ . Ο νόμος του Snell συσχετίζει τις δύο γωνίες:

$$n_1 \sin \theta_3 = n_2 \sin \theta_4 .$$

Αλλά  $n_1 \sin \theta_3 = n_1 \sin \theta_2 = \sin \theta_1$ . Επομένως

$$\sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_4 .$$

Η οριζόντια απόσταση που διανύει στο δεύτερο μέσο η διαθλώμενη ακτίνα είναι

$$\ell_2 = d_2 \tan \theta_4 = d_2 \frac{\sin \theta_4}{\sqrt{1 - \sin^2 \theta_4}} = d_2 \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_1}} .$$

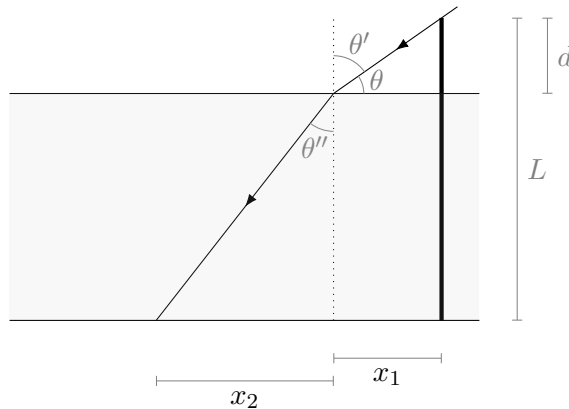
Η συνολική οριζόντια απόσταση από την κάθετο στο αρχικό σημείο πρόσπτωσης έως το τελικό σημείο εξόδου είναι

$$D = \ell_1 + \ell_2 = d_1 \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{n_1^2 - \sin^2 \theta_1}} + d_2 \frac{\sin \theta_1}{\sqrt{n_2^2 - \sin^2 \theta_1}} .$$

14. Κατακόρυφος στύλος μήκους 2 m εκτείνεται από τον πυθμένα μιας πισίνας μέχρι ένα σημείο 50 cm πάνω από το νερό. Το ηλιακό φως προσπίπτει υπό γωνία  $\theta = 45^\circ$ . Πόσο είναι το μήκος της σκιάς του στύλου στον οριζόντιο πυθμένα της πισίνας;

Δίνεται ότι ο δείκτης διάθλασης του νερού είναι  $n = 1.33$ .

#### ΛΥΣΗ



Ο στύλος εξέχει κατά ένα μήκος  $d$  από την επιφάνεια του νερού. Το συνολικό του μήκος είναι  $L$ . Το βάθος της πισίνας είναι  $L - d$ .

Η ακτίνα που περνά οριακά από την κορυφή του στύλου προσπίπτει με γωνία  $\theta$  ως προς την επιφάνεια του νερού σε μια απόσταση  $x_1$  από το στύλο. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα ισχύει

$$\tan \theta = \frac{d}{x_1} \Rightarrow x_1 = \frac{d}{\tan \theta} .$$

Ως προς την κάθετο στο σημείο της πρόσπτωσης η ακτίνα σχηματίζει γωνία  $\theta' = \frac{\pi}{2} - \theta$ . Η διαθλώμενη ακτίνα σχηματίζει γωνία  $\theta''$  ως προς την κάθετο. Το μέσο στο οποίο διαδίδεται, το νερό, έχει σχετικό δείκτη διάθλασης  $n$  ως προς το μέσο διάδοσης της προσπίπτουσας, τον αέρα. Ο νόμος Snell συσχετίζει τις δύο γωνίες και το  $n$ :

$$n \sin \theta'' = \sin \theta' \Rightarrow n \sin \theta'' = \sin \left( \frac{\pi}{2} - \theta \right) = \cos \theta . \quad (13.4)$$

Η διαθλώμενη ακτίνα συναντά τον πυθμένα σε απόσταση  $x_2$  από την κάθετο στο σημείο πρόσπτωσης. Όπως παρατηρούμε στο σχήμα ισχύει

$$\tan \theta'' = \frac{x_2}{L - d} \Rightarrow x_2 = (L - d) \tan \theta'' .$$

Η συνολική απόσταση από το στύλο του σημείου στο οποίο η διαθλώμενη ακτίνα συναντά τον πυθμένα είναι  $x = x_1 + x_2$ . Αυτό είναι το μήκος της σκιάς. Συνεπώς

$$x = \frac{d}{\tan \theta} + (L - d) \tan \theta'' . \quad (13.5)$$

Από την εξίσωση (13.4) έχουμε

$$\theta'' = \sin^{-1} \left( \frac{\cos \theta}{n} \right) ,$$

επομένως

$$x = \frac{d}{\tan \theta} + (L - d) \tan \left( \sin^{-1} \left( \frac{\cos \theta}{n} \right) \right) .$$

Η εξίσωση (13.5) μπορεί να απλοποιηθεί χωρίς τη χρήση αντίστροφης τριγωνομετρικής συνάρτησης. Καθώς

$$\tan^2 \theta'' = \frac{\sin^2 \theta''}{1 - \sin^2 \theta''}$$

έχουμε με τη βοήθεια της εξίσωσης (13.4)

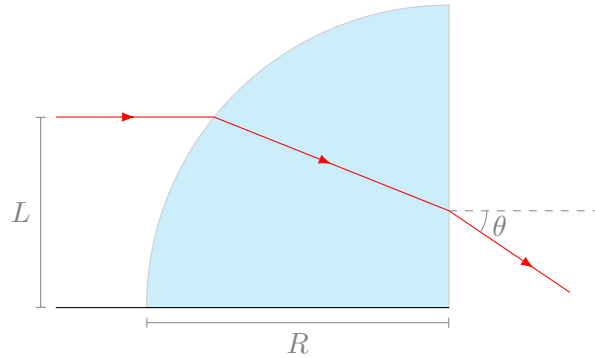
$$\tan^2 \theta'' = \frac{n^2 \sin^2 \theta''}{n^2 - n^2 \sin^2 \theta''} = \frac{\cos^2 \theta}{n^2 - \cos^2 \theta} = \left( \frac{n^2}{\cos^2 \theta} - 1 \right)^{-1} = \frac{1}{n^2 (1 + \tan^2 \theta) - 1} .$$

Άρα

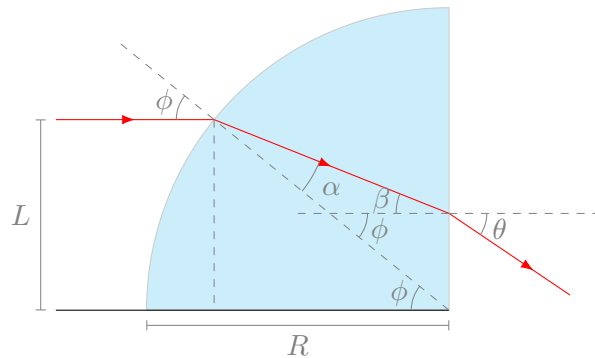
$$x = \frac{d}{\tan \theta} + \frac{L - d}{\sqrt{n^2 (1 + \tan^2 \theta) - 1}} .$$

Με αντικατάσταση των  $\theta = 45^\circ$ ,  $L = 2$  m,  $d = 0.5$  m,  $n = 1.33$  έχουμε  $x \approx 1.442$  m.

15. Ένα υλικό με δείκτη διάθλασης  $n$  βρίσκεται στο κενό και έχει σχήμα τεταρτοκύκλιου με ακτίνα  $R$ . Μια ακτίνα παράλληλη στη βάση του υλικού προσπίπτει από τα αριστερά σε απόσταση  $L$  πάνω από τη βάση και εξέρχεται από το υλικό σε γωνία  $\theta$  ως προς την κάθετο. Βρείτε το  $\theta$  συναρτήσει των  $n$ ,  $R$ ,  $L$ .



## ΛΥΣΗ



Εύκολα φαίνεται από το σχήμα ότι η γωνία πρόσπτωσης της «αρχικής» ακτίνας,  $\phi$ , ικανοποιεί τη σχέση  $\sin \phi = L/R$ . Επομένως

$$\phi = \sin^{-1} \left( \frac{L}{R} \right) .$$

Η γωνία της πρώτης διάθλασης,  $\alpha$ , ικανοποιεί το νόμο Snell:

$$\sin \phi = n \sin \alpha \Rightarrow \sin \alpha = \frac{L}{nR} \Rightarrow \alpha = \sin^{-1} \left( \frac{L}{nR} \right) .$$

Από το σχήμα προκύπτει ότι  $\phi = \alpha + \beta$ , όπου  $\beta$  η γωνία πρόσπτωσης της ακτίνας που διαδίδεται στο μέσο. Αυτή η γωνία και η γωνία  $\theta$  συνδέονται με το νόμο Snell:

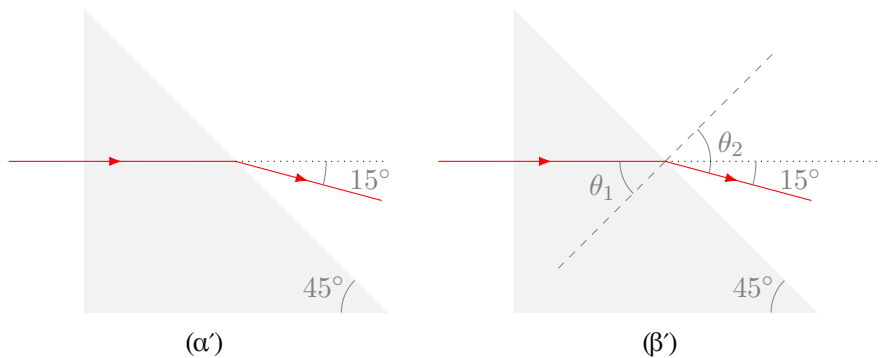
$$n \sin \beta = \sin \theta \Rightarrow n \sin(\phi - \alpha) = \sin \theta .$$

Επομένως,

$$\theta = \sin^{-1} \left[ n \sin \left( \sin^{-1} \left( \frac{L}{R} \right) - \sin^{-1} \left( \frac{L}{nR} \right) \right) \right] .$$

### Πρίσμα

16. Μια δέσμη laser προσπίπτει σε ένα πρίσμα με γωνίες  $45^\circ$ – $45^\circ$ – $90^\circ$ , κάθετα σε μία από της έδρες του (Σχήμα 13.9). Η δέσμη που εξέρχεται από την υποτείνουσα του πρίσματος σχηματίζει γωνία  $15^\circ$  με την κατεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης. Βρείτε το δείκτη διάθλασης του πρίσματος.



Σχήμα 13.9: Άσκηση 16

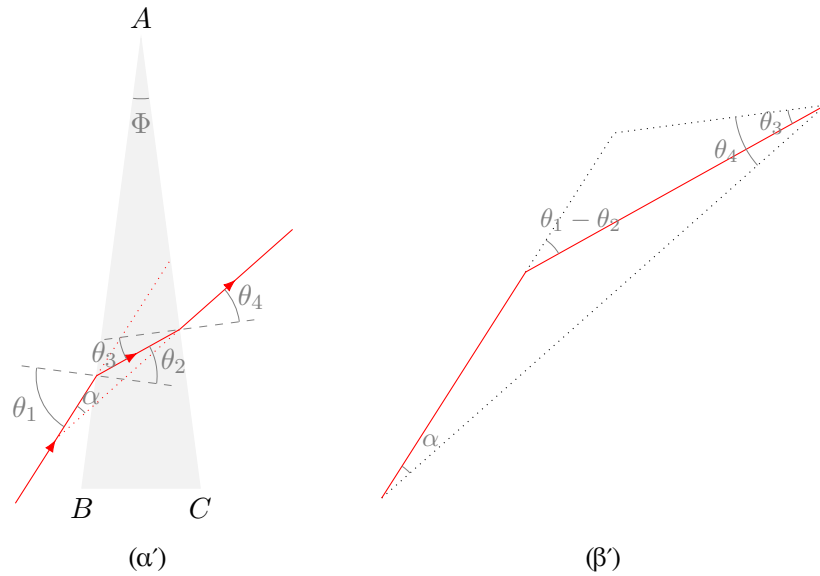
### ΛΥΣΗ

Η κάθετος στην υποτείνουσα σχηματίζει γωνία  $45^\circ$  ως προς τον οριζόντιο άξονα (τη διεύθυνση της προσπίπτουσας δέσμης). Από το σχήμα προκύπτει ότι αυτή είναι η γωνία  $\theta_1$ . Επιπλέον, η κάθετος σχηματίζει γωνία  $\theta_2 = 45^\circ + 15^\circ = 60^\circ$  με την εξερχόμενη δέσμη.

Από το νόμο Snell έχουμε (για διάδοση στον αέρα, με δείκτη διάθλασης 1):

$$n \sin \theta_1 = \sin \theta_2 \Rightarrow n = \frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = \sqrt{\frac{3}{2}} .$$

17. Ένα πρίσμα με δείκτη διάθλασης 1.52 έχει διαθλαστική γωνία  $\Phi$  (η γωνία του πρίσματος) ίση με  $15^\circ$ . Ποια είναι η γωνία ελάχιστης εκτροπής του πρίσματος;



Σχήμα 13.10: Άσκηση 17

**ΛΥΣΗ**

Η γωνία του πρίσματος είναι  $\Phi$ .  $\theta_i$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάδοσης. Η γωνία εκτροπής είναι (από το Σχήμα 13.10β')  $\alpha = |\theta_1 - \theta_2| - |\theta_4 - \theta_3|$ .

Από το νόμο του Snell:  $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ ,  $n_1 \sin \theta_4 = n_2 \sin \theta_3$ . Καθώς  $n_2 > n_1$ ,  $\theta_1 > \theta_2$ ,  $\theta_4 > \theta_3$ . Άρα  $\alpha = \theta_1 - \theta_2 - \theta_4 + \theta_3$ .

Ισχύει

$$\left(\frac{\pi}{2} - \theta_2\right) + \left(\frac{\pi}{2} + \theta_3\right) + \Phi = \pi \Rightarrow \theta_2 - \theta_3 = \Phi.$$

Επομένως

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta_1 - \theta_4 - \Phi \\ &= \sin^{-1}(n \sin \theta_2) - \sin^{-1}(n \sin \theta_3) - \Phi \\ &= \sin^{-1}(n \sin \theta_2) - \sin^{-1}(n \sin(\theta_2 - \Phi)) - \Phi, \end{aligned}$$

όπου  $n = n_2/n_1$ . Το ακρότατο αυτής της συνάρτησης παρουσιάζεται όταν

$$\alpha'(\theta_2) = 0 \Rightarrow \frac{n \cos \theta_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_2}} - \frac{n \cos(\theta_2 - \Phi)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta_2 - \Phi)}} = 0.$$

Η σχέση ικανοποιείται όταν ισχύει

$$\cos \theta_2 = \cos(\theta_2 - \Phi)$$

δηλαδή, όταν ισχύει μία από τις δύο σχέσεις

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_2 - \Phi + 2k\pi \Rightarrow \Phi = 2k\pi \Rightarrow \Phi = 0, \\ \theta_2 &= -(\theta_2 - \Phi) + 2k\pi \Rightarrow \theta_2 = \frac{\Phi}{2} + k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

Για

$$\theta_2 = \frac{\Phi}{2} + k\pi$$

τα ελάχιστα είναι

$$(-1)^k 2 \sin^{-1}(n \sin(\Phi/2)) - \Phi.$$

Η γωνία  $\alpha$  είναι θετική. Η ελάχιστή της τιμή είναι

$$\alpha_{\min} = 2 \sin^{-1}(n \sin(\Phi/2)) - \Phi.$$

Με αντικατάσταση,  $\alpha_{\min} = 7.8868^\circ$ .

18. Αποδείξτε ότι εάν η διαθλαστική γωνία  $\Phi$  ενός πρίσματος είναι μικρή (λεπτό πρίσμα), μία προσεγγιστική τιμή για τη γωνία ελάχιστης εκτροπής είναι  $\delta_n = (n - 1)\Phi$ .

#### ΛΥΣΗ

Αν η γωνία  $\Phi$  είναι μικρή έχουμε

$$\sin(\Phi/2) \approx \Phi/2 \Rightarrow \sin(n\Phi/2) \approx n\Phi/2 \Rightarrow n\Phi/2 \approx \sin^{-1}(n\Phi/2).$$

Από τον τελευταίο τύπο της προηγούμενης άσκησης προκύπτει

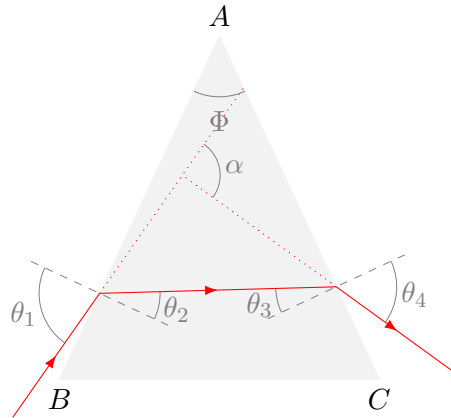
$$\alpha_{\min} \approx 2 \sin^{-1}(n\Phi/2) - \Phi \approx n\Phi - \Phi = (n - 1)\Phi.$$

19. Ένα πρίσμα από κυβική ξηρκονία ( $n = 2.2$ ) έχει γωνία κορυφής  $50^\circ$ . Ποια είναι η ελάχιστη γωνία εκτροπής του;

#### ΛΥΣΗ

Η γωνία του πρίσματος είναι  $\Phi$ . Έστω

- $\theta_1$  η γωνία πρόσπτωσης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_2$  η γωνία διάθλασης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_3$  η γωνία πρόσπτωσης στη δεύτερη επιφάνεια,
- $\theta_4$  η γωνία διάθλασης στη δεύτερη επιφάνεια.



Από το νόμο του Snell για την πρώτη επιφάνεια ισχύει

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 .$$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι  $\theta_2 + \theta_3 = \Phi$ . Οι  $\theta_2, \theta_3$  είναι συμπληρωματικές γωνίες των γωνιών της βάσης στο άνω τρίγωνο.

Από το νόμο του Snell για τη δεύτερη επιφάνεια ισχύει

$$\sin \theta_4 = n \sin \theta_3 .$$

Οι γωνίες της βάσης του πρίσματος θεωρούνται ίσες:  $\Phi_B = \Phi_C = (180 - \Phi)/2$ . Η γωνία που σχηματίζει η εισερχόμενη ακτίνα ως προς τη βάση του πρίσματος είναι  $\Phi_B - (90 - \theta_1)$ . Η γωνία που σχηματίζει η εξερχόμενη ακτίνα ως προς τη βάση του πρίσματος είναι  $-(\Phi_C - (90 - \theta_4)) = 90 - \theta_4 - \Phi_C$ . Η γωνία εκτροπής  $\alpha$  είναι η διαφορά τους:  $\alpha = \Phi_B - (90 - \theta_1) - (90 - \theta_4 - \Phi_C) = \Phi_B + \Phi_C - 180 + \theta_1 + \theta_4 = -\Phi + \theta_1 + \theta_4$ .

Επομένως

$$\begin{aligned} \alpha &= \theta_1 + \theta_4 - \Phi \\ &= \sin^{-1}(n \sin \theta_2) + \sin^{-1}(n \sin \theta_3) - \Phi \\ &= \sin^{-1}(n \sin \theta_2) + \sin^{-1}(n \sin(\Phi - \theta_2)) - \Phi , \end{aligned}$$

Το ακρότατο αυτής της συνάρτησης παρουσιάζεται όταν

$$\alpha'(\theta_2) = 0 \Rightarrow \frac{n \cos \theta_2}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2 \theta_2}} - \frac{n \cos(\theta_2 - \Phi)}{\sqrt{1 - n^2 \sin^2(\theta_2 - \Phi)}} = 0 .$$

Η σχέση ικανοποιείται όταν ισχύει

$$\cos \theta_2 = \cos(\theta_2 - \Phi)$$



δηλαδή, όταν ισχύει μία από τις δύο σχέσεις

$$\begin{aligned}\theta_2 &= \theta_2 - \Phi + 2k\pi \Rightarrow \Phi = 2k\pi \Rightarrow \Phi = 0, \\ \theta_2 &= -(\theta_2 - \Phi) + 2k\pi \Rightarrow \theta_2 = \frac{\Phi}{2} + k\pi.\end{aligned}$$

Για

$$\theta_2 = \frac{\Phi}{2} + k\pi$$

τα ελάχιστα είναι

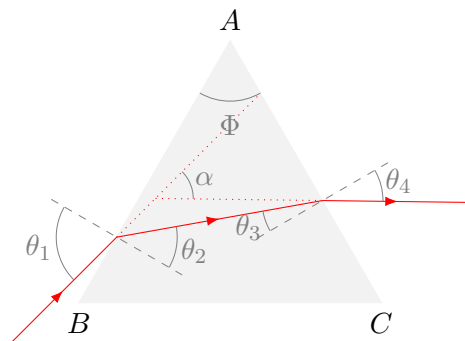
$$(-1)^k 2 \sin^{-1}(n \sin(\Phi/2)) - \Phi.$$

Η γωνία  $\alpha$  είναι θετική. Η ελάχιστή της τιμή είναι

$$\alpha_{\min} = 2 \sin^{-1}(n \sin(\Phi/2)) - \Phi.$$

Με αντικατάσταση,  $\alpha_{\min} \approx 86.8^\circ$ .

20. Ένα τριγωνικό γυάλινο πρίσμα με γωνία κορυφής  $\Phi = 60^\circ$ , έχει δείκτη διάθλασης  $n = 1.5$  και βρίσκεται στο κενό. Ποια είναι η μικρότερη γωνία πρόσπτωσης  $\theta_1$  για την οποία μια ακτίνα φωτός μπορεί να εξέλθει από την άλλη πλευρά;



### ΛΥΣΗ

Έστω

- $\theta_1$  η γωνία πρόσπτωσης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_2$  η γωνία διάθλασης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_3$  η γωνία πρόσπτωσης στη δεύτερη επιφάνεια,
- $\theta_4$  η γωνία διάθλασης στη δεύτερη επιφάνεια.

Από το νόμο του Snell για την πρώτη επιφάνεια ισχύει

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2.$$

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι  $\theta_2 + \theta_3 = \Phi$ . Οι  $\theta_2, \theta_3$  είναι συμπληρωματικές γωνίες των γωνιών της βάσης στο άνω τρίγωνο.

Από το νόμο του Snell για τη δεύτερη επιφάνεια ισχύει

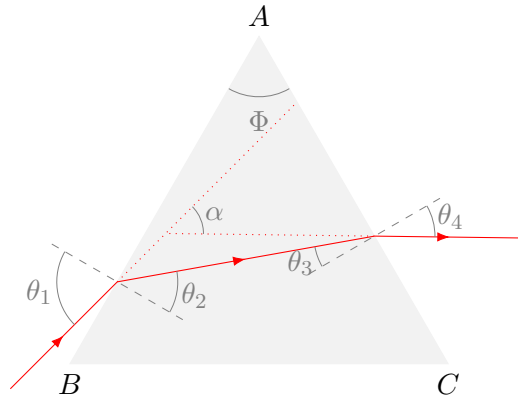
$$\sin \theta_4 = n \sin \theta_3 .$$

Όταν μειώνεται η  $\theta_1$ , μειώνεται η  $\theta_2$ , αυξάνεται η  $\theta_3$  και αυξάνεται η  $\theta_4$ . Για κάποια ελάχιστη τιμή της  $\theta_1$  η  $\theta_4$  γίνεται  $90^\circ$  και δεν υπάρχει εξερχόμενη ακτίνα. Όταν λοιπόν  $\theta_4 = 90^\circ$  τότε  $\sin \theta_3 = 1/n \Rightarrow \theta_3 \approx 41.81^\circ$ . Άρα  $\theta_2 = \Phi - \theta_3 \approx 18.19^\circ$ ,  $\sin \theta_1 \approx 0.4682 \Rightarrow \theta_1 \approx 27.92^\circ$ .

21. Στην έδρα ενός πρίσματος από τηγμένο χαλαζία ( $n = 1.458$  στα  $700 \text{ nm}$ ) προσπίπτει φως με μήκος κύματος  $700 \text{ nm}$  υπό γωνία  $75^\circ$ . Η γωνία κορυφής του πρίσματος είναι  $\Phi = 60^\circ$ . Υπολογίστε τη γωνία

- διάθλασης στην πρώτη επιφάνεια,
- πρόσπτωσης στη δεύτερη επιφάνεια,
- διάθλασης στη δεύτερη επιφάνεια και
- μεταξύ της προσπίπτουσας και εξερχόμενης ακτίνας.

#### ΛΥΣΗ



Έστω

- $\theta_1$  η γωνία πρόσπτωσης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_2$  η γωνία διάθλασης στην πρώτη επιφάνεια,
- $\theta_3$  η γωνία πρόσπτωσης στη δεύτερη επιφάνεια,
- $\theta_4$  η γωνία διάθλασης στη δεύτερη επιφάνεια.

Από το νόμο του Snell ισχύει

$$\sin \theta_1 = n \sin \theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \sin^{-1} \left( \frac{\sin \theta_1}{n} \right) .$$

Με αντικατάσταση,  $\theta_2 \approx 41.49^\circ$ .

Από το σχήμα παρατηρούμε ότι  $\theta_2 + \theta_3 = \Phi$ . Οι  $\theta_2, \theta_3$  είναι συμπληρωματικές γωνίες των γωνιών της βάσης στο άνω τρίγωνο. Επομένως,  $\theta_3 \approx 18.51^\circ$ .

Από το νόμο του Snell ισχύει

$$n \sin \theta_3 = \sin \theta_4 \Rightarrow \theta_4 = \sin^{-1}(n \sin \theta_3) .$$

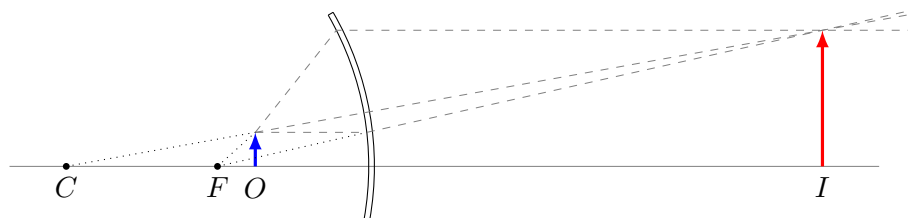
Με αντικατάσταση,  $\theta_4 \approx 27.57^\circ$ .

Το πρίσμα είναι ισόπλευρο και κάθε γωνία του είναι  $60^\circ$ . Η προσπίπτουσα ακτίνα σχηματίζει γωνία  $60 - (90 - \theta_1) = 45^\circ$  ως προς τη βάση του πρίσματος. Η εξερχόμενη ακτίνα σχηματίζει γωνία  $90 - 60 - \theta_4 = 2.43^\circ$  ως προς τη βάση του πρίσματος. Η γωνία μεταξύ τους είναι  $45 - 2.43 = 42.57^\circ$ .

### 13.7.2 Σφαιρικό Κάτοπτρο

1. Κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο έχει εστιακή απόσταση 40 cm. Προσδιορίστε τη θέση του αντικειμένου για την οποία το είδωλο θα είναι όρθιο και τετραπλάσιο από το μέγεθος του αντικειμένου.

**ΛΥΣΗ**



Σχήμα 13.11: Άσκηση 1

Καθώς θέλω  $h' = 4h$  πρέπει

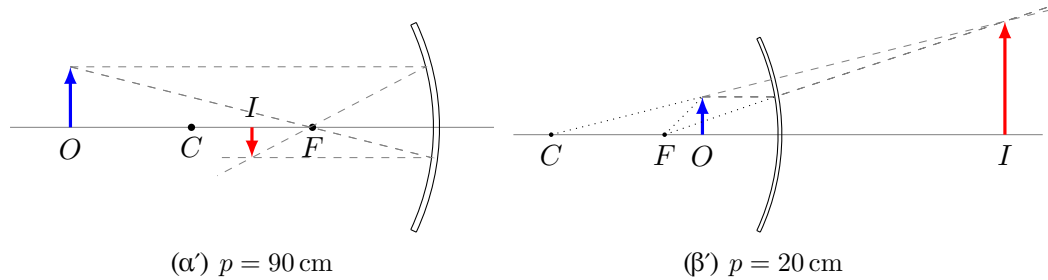
$$M = \frac{h'}{h} = \frac{-q}{p} \Rightarrow q = -4p .$$

Αλλά

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \Rightarrow p = \frac{3f}{4} .$$

Άρα  $p = 30 \text{ cm}$ ,  $q = -120 \text{ cm}$ .

2. Κοίλο κάτοπτρο έχει ακτίνα καμπυλότητας 60 cm. Υπολογίστε τη θέση ενός ειδώλου και τη μεγέθυνση ενός αντικειμένου που τοποθετείται μπροστά από το κάτοπτρο σε αποστάσεις (α') 90 cm και (β') 20 cm. Σχεδιάστε ένα διάγραμμα φωτεινών ακτίνων ώστε να προσδιορίσετε το είδωλο σε κάθε περίπτωση.

**ΛΥΣΗ**

Σχήμα 13.12: Άσκηση 2

Καθώς  $R = 60 \text{ cm} \Rightarrow f = 30 \text{ cm}$ .

Ισχύει

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f}.$$

Αν  $p = 90 \text{ cm}$  έχουμε  $q = 45 \text{ cm}$ . Μεγέθυνση  $M = -q/p = -0.5$ . Είδωλο αντεστραμμένο και στο μισό.

Αν  $p = 20 \text{ cm}$  έχουμε  $q = -60 \text{ cm}$ . Μεγέθυνση  $M = -q/p = 3$ . Είδωλο όρθιο και τριπλάσιο.

3. Ένα κυρτό σφαιρικό κάτοπτρο έχει εστιακή απόσταση ίση με  $-20 \text{ cm}$ . Προσδιορίστε τη θέση ενός αντικειμένου για την οποία το είδωλο θα έχει μέγεθος ίσο με το μισό του αντικειμένου.

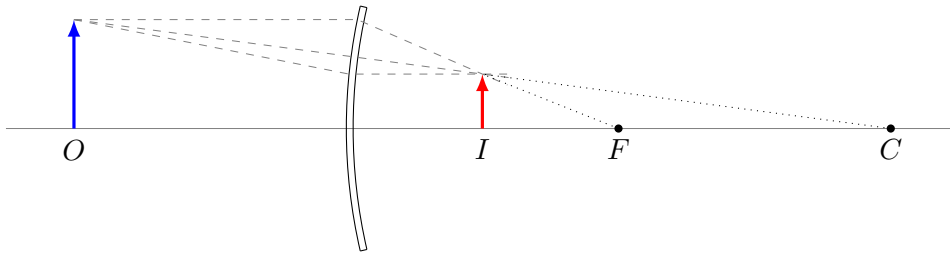
**ΛΥΣΗ**

Έχουμε  $M = h'/h = -q/p \Rightarrow 0.5 = -q/p \Rightarrow p = -2q$ . Ισχύει

$$\frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{q} - \frac{1}{2q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = f/2.$$

Άρα  $q = -10 \text{ cm}$ ,  $p = 20 \text{ cm}$ .

4. Ένα σφαιρικό κάτοπτρο σχηματίζει ένα ορθό είδωλο με πενταπλάσιο μέγεθος από το αντικείμενο, επάνω σε μια οθόνη που απέχει 5 m από το αντικείμενο. Σχεδιάστε το σχηματισμό του ειδώλου.



Σχήμα 13.13: Άσκηση 3

- Πού πρέπει να βρίσκεται το αντικείμενο σε σχέση με το κάτοπτρο;
- Το είδωλο είναι πραγματικό ή φανταστικό;
- Το κάτοπτρο πρέπει να είναι κοίλο ή κυρτό;
- Υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας του κατόπτρου.

**ΛΥΣΗ**

Έστω  $p$ ,  $q$  οι αποστάσεις του αντικειμένου και του ειδώλου αντίστοιχα, από το κάτοπτρο. Το  $p$  θεωρείται πάντα θετικό.

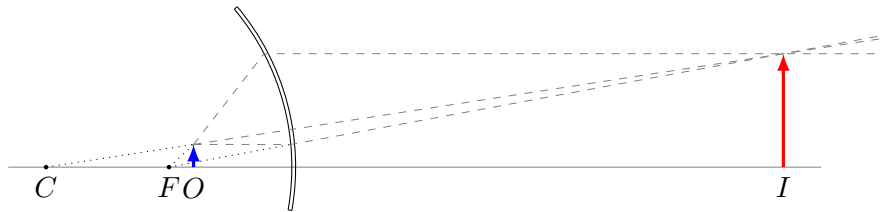
Εφόσον η μεγέθυνση είναι 5, πρέπει και  $-q/p = 5 \Rightarrow q = -5p$ . Αφού  $q < 0$ , το είδωλο βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του κατόπτρου από το αντικείμενο και είναι φανταστικό.

Η απόσταση αντικειμένου–ειδώλου είναι  $|p - q| = 6p = 5 \text{ m}$ . Επομένως,  $p = 5/6 \text{ m}$ ,  $q = -25/6 \text{ m}$ .

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Άρα  $f = 25/24 \text{ m}$  και η ακτίνα καμπυλότητας  $R = 2f = 25/12 \text{ m}$ . Το κάτοπτρο είναι κοίλο καθώς έχει θετική ακτίνα καμπυλότητας.



5. Ένα κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο σχηματίζει ένα ανεστραμμένο είδωλο, 4 φορές μεγαλύτερο από το αντικείμενο.

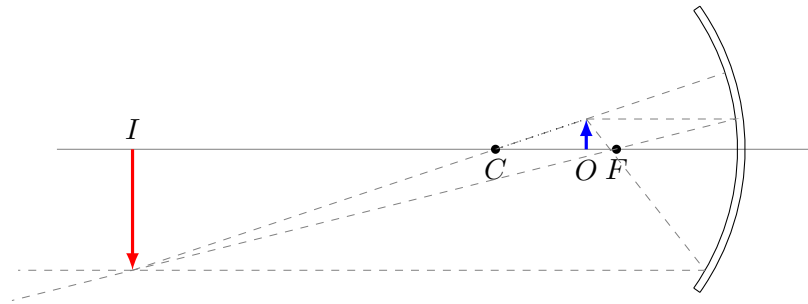
- Αν η απόσταση του αντικειμένου από το είδωλο είναι 0.6 m, βρείτε την εστιακή απόσταση του κατόπτρου.

- Έστω ότι κάτοπτρο είναι κυρτό. Η απόσταση του ειδώλου από το αντικείμενο είναι ίδια όπως το ερώτημα (α) αλλά το είδωλο έχει το μισό μέγεθος του αντικειμένου. Βρείτε την εστιακή απόσταση του κατόπτρου.

**ΛΥΣΗ**

Έστω  $p$ ,  $q$  οι αποστάσεις του αντικειμένου και του ειδώλου αντίστοιχα, από το κάτοπτρο. Το  $p$  θεωρείται πάντα θετικό.

**Για κοίλο κάτοπτρο** Από την εκφώνηση έχουμε ότι η μεγέθυνση είναι  $M = -4$ . Επομένως,  $-q/p = -4 \Rightarrow q = 4p$ . Αφού  $q > 0$ , το είδωλο βρίσκεται στην ίδια πλευρά του κατόπτρου με το αντικείμενο και είναι πραγματικό. Αν η απόσταση του αντικειμένου από το είδωλο,  $|p - q|$ , είναι 60 cm, και καθώς  $q > p$ , προκύπτει ότι  $q - p = 3p = 60 \text{ cm} \Rightarrow p = 20 \text{ cm}$  και  $q = 4p = 80 \text{ cm}$ .

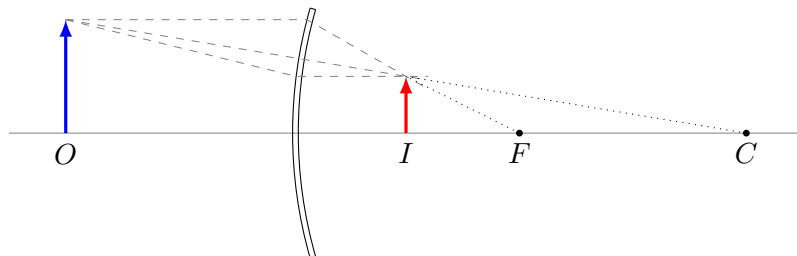


Για την εστιακή απόσταση  $f$  έχουμε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = 16 \text{ cm}.$$

**Για κυρτό κάτοπτρο** Από την εκφώνηση έχουμε ότι η μεγέθυνση είναι  $M = 0.5$ . Επομένως,  $-q/p = 0.5 \Rightarrow q = -p/2$ . Αφού  $q < 0$ , το είδωλο βρίσκεται σε διαφορετική πλευρά του κατόπτρου από το αντικείμενο και είναι φανταστικό.

Αν η απόσταση του αντικειμένου από το είδωλο,  $|p - q|$ , είναι 60 cm, προκύπτει ότι  $|p - q| = 3p/2 = 60 \text{ cm} \Rightarrow p = 40 \text{ cm}$ , και  $q = -20 \text{ cm}$ .



Για την εστιακή απόσταση  $f$  έχουμε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = -40 \text{ cm} .$$

6. Ένα αντικείμενο ύψους 10 cm είναι τοποθετημένο στην ένδειξη 0 ενός ξύλινου μέτρου. Ένα σφαιρικό κάτοπτρο που βρίσκεται σε κάποιο σημείο του ξύλινου μέτρου δημιουργεί ένα όρθιο είδωλο του αντικειμένου, το οποίο έχει ύψος 4 cm και βρίσκεται στην ένδειξη των 42 cm.

- Το κάτοπτρο είναι κυρτό ή κοίλο;
- Πού βρίσκεται το κάτοπτρο;
- Πόση είναι η εστιακή απόσταση του κατόπτρου;

#### ΛΥΣΗ

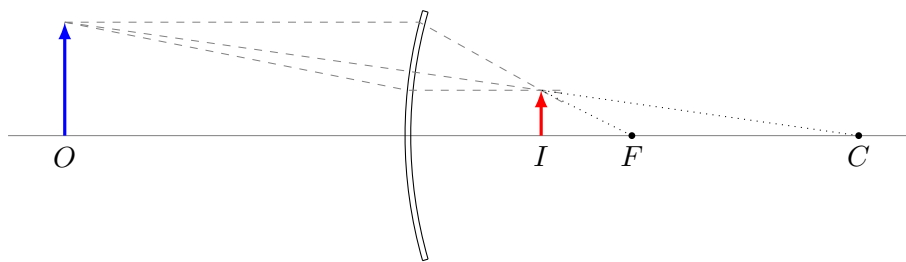
Από την εκφώνηση έχουμε ότι η μεγέθυνση είναι  $M = h'/h = 0.4$ . Αλλά ισχύει  $M = -q/p \Rightarrow q = -0.4p$ .

Η απόσταση αντικείμενου–ειδώλου δίνεται ότι είναι  $p - q = 42 \text{ cm} \Rightarrow 1.4p = 42 \text{ cm} \Rightarrow p = 30 \text{ cm}$  και  $q = -12 \text{ cm}$ . Σε απόσταση  $p = 30 \text{ cm}$  από το αντικείμενο είναι η αρχή του κατόπτρου.

Για την εστιακή απόσταση  $f$  έχουμε

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow f = -20 \text{ cm} .$$

Καθώς  $f < 0$  το κάτοπτρο είναι κυρτό.



7. Ένα κοίλο σφαιρικό κάτοπτρο έχει ακτίνα καμπυλότητας 20 cm.

- Βρείτε τη θέση του ειδώλου όταν το αντικείμενο που κατοπτρίζεται βρίσκεται σε απόσταση (α') 40 cm, (β') 20 cm και (γ') 10 cm.
- Για κάθε περίπτωση αναφέρετε αν το είδωλο είναι πραγματικό ή φανταστικό και όρθιο ή ανεστραμμένο.
- Βρείτε τη μεγέθυνση σε κάθε περίπτωση.

**ΛΥΣΗ**

Καθώς το κάτοπτρο είναι κοίλο με  $R = 20\text{ cm}$ , η εστιακή απόσταση  $f$  είναι  $f = R/2 = 10\text{ cm}$ .

Έστω ότι το αντικείμενο είναι σε απόσταση  $p$  από την αρχή του κατόπτρου. Το είδωλο είναι σε απόσταση  $q$  που προκύπτει από τη σχέση

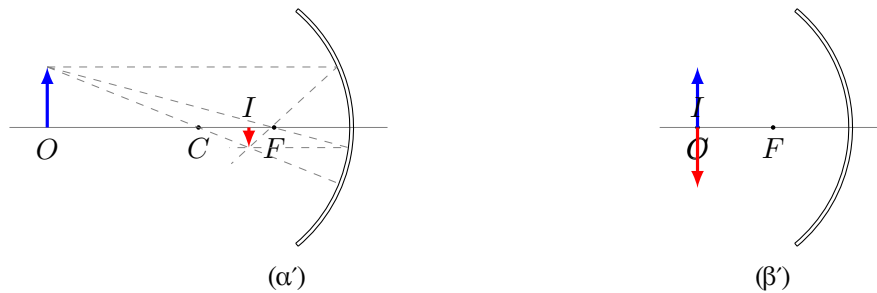
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = \frac{fp}{p - f}.$$

Η μεγέθυνση είναι  $M = -q/p = f/(f - p)$ .

Στην πρώτη περίπτωση (Σχήμα 13.14α') με  $p = 40\text{ cm}$  έχουμε  $q = 40/3\text{ cm}$  και  $M = -1/3$ . Καθώς  $q > 0$ , το είδωλο είναι μπροστά από το κάτοπτρο (άρα είναι πραγματικό). Καθώς  $M < 0$  το είδωλο είναι ανεστραμμένο.

Στη δεύτερη περίπτωση (Σχήμα 13.14β') με  $p = 20\text{ cm}$  έχουμε  $q = 20\text{ cm}$  και  $M = -1$ . Καθώς  $q > 0$ , το είδωλο είναι μπροστά από το κάτοπτρο (άρα είναι πραγματικό). Καθώς  $M < 0$  το είδωλο είναι ανεστραμμένο.

Στην τρίτη περίπτωση με  $p = 10\text{ cm}$  έχουμε  $q = +\infty$ . Το είδωλο δεν σχηματίζεται (σχηματίζεται στο άπειρο) καθώς το αντικείμενο βρίσκεται στην εστία.



Σχήμα 13.14: Άσκηση 7

8. Ένα αντικείμενο ύψους  $2\text{ cm}$  είναι τοποθετημένο σε απόσταση  $30\text{ cm}$  από ένα κυρτό σφαιρικό κάτοπτρο με εστιακή απόσταση  $10\text{ cm}$ .

- Βρείτε τη θέση του ειδώλου.
- Αναφέρατε αν το είδωλο είναι όρθιο ή ανεστραμμένο.
- Βρείτε το ύψος του ειδώλου.
- Σχεδιάστε το διάγραμμα των ακτίνων.

**ΛΥΣΗ**

Καθώς έχουμε κυρτό κάτοπτρο (Σχήμα 13.15), η εστιακή απόσταση είναι  $f = -10\text{ cm}$  (αρνητική θα εμφανίζεται στους τύπους), άρα η ακτίνα είναι  $R = 2f =$

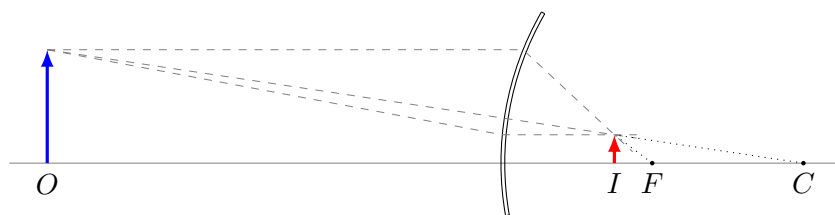


−20 cm. Η απόσταση του αντικειμένου από την αρχή είναι  $p = 30$  cm άρα η θέση του ειδώλου είναι

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow q = -7.5 \text{ cm} .$$

Καθώς  $q < 0$ , το είδωλο είναι πίσω από το κάτοπτρο (άρα είναι φανταστικό).

Η μεγέθυνση είναι  $M = -q/p = 0.25$ . Καθώς είναι θετική, το είδωλο είναι όρθιο. Το ύψος του είναι  $h' = Mh = 0.5$  cm.



Σχήμα 13.15: Άσκηση 8

9. Είδωλο ύψους 6 cm βρίσκεται 1 m *πίσω* από σφαιρικό κάτοπτρο εστιακής απόστασης 50 cm.

- Βρείτε τη θέση και το ύψος του αντικείμενου.
- Βρείτε την απόσταση αντικείμενου–ειδώλου.
- Σχεδιάστε το διάγραμμα ακτίνων.

#### ΛΥΣΗ

Αν με  $p$  και  $q$  συμβολίσουμε τις αποστάσεις του αντικείμενου και του ειδώλου από κάτοπτρο εστιακής απόστασης  $f$ , ισχύει

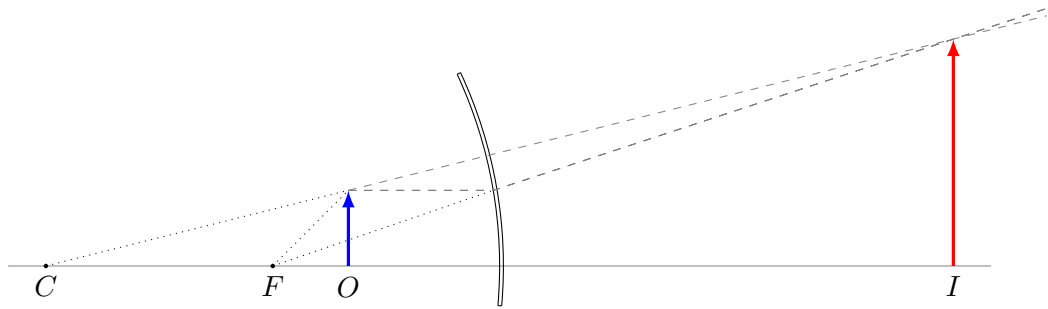
$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} .$$

Το  $f$  είναι 0.5 m. Το  $q$  είναι −1 m αφού το είδωλο βρίσκεται *πίσω από το κάτοπτρο*. Επομένως  $p \approx 0.33$  m. Το αντικείμενο βρίσκεται *μπροστά* από το κάτοπτρο.

Η απόσταση αντικείμενου–ειδώλου είναι  $|p - q| \approx 1.33$  m.

Αν  $h$  και  $h'$  είναι τα ύψη αντικείμενου και ειδώλου αντίστοιχα, η μεγέθυνση είναι  $M = h'/h = -q/p = 3$ . Επομένως  $h = h'/3 = 2$  cm.

Το διάγραμμα ακτίνων δίνεται στο Σχήμα 13.16.



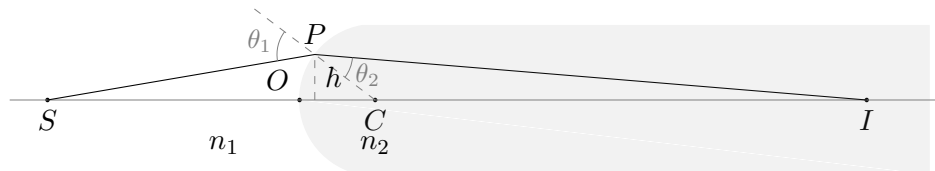
Σχήμα 13.16: Άσκηση 9

### 13.7.3 Σφαιρική διεπιφάνεια

1. Το ένα άκρο μίας γυάλινης ράβδου ( $n = 1.5$ ) έχει διαμορφωθεί σε σχήμα κυρτής επιφάνειας ακτίνας 6 cm. Ένα αντικείμενο βρίσκεται στον αέρα κατά μήκος του άξονα της ράβδου. Βρείτε τις θέσεις των ειδώλων που αντιστοιχούν σε αποστάσεις του αντικειμένου (α') 20 cm, (β') 10 cm, (γ') 3 cm από το άκρο της ράβδου.

#### ΛΥΣΗ

Ορίζουμε με  $S$  τη θέση του αντικειμένου· βρίσκεται σε απόσταση  $p$  από την αρχή,  $O$ .  $C$  είναι το κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας,  $I$  η θέση στην οποία σχηματίζεται το είδωλο, σε απόσταση  $q$  από την αρχή.  $\theta_1$  και  $\theta_2$  είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης. Όλες οι γωνίες θεωρούνται πολύ μικρές ώστε  $\tan \theta \approx \sin \theta \approx \theta$ .



Από το τρίγωνο PCO έχουμε  $\sin(\widehat{PCO}) = h/R \Rightarrow \widehat{PCO} \approx h/R$ .

Από το τρίγωνο PSO έχουμε  $\tan(\widehat{PSO}) \approx h/p \Rightarrow \widehat{PSO} \approx h/p$ .

Από το τρίγωνο PIO έχουμε  $\tan(\widehat{PIO}) \approx h/q \Rightarrow \widehat{PIO} \approx h/q$ .

Θεωρήσαμε ότι η προβολή του  $P$  στον άξονα είναι πολύ κοντά στο  $O$ .

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\theta_1 = \widehat{PSO} + \widehat{PCO} \Rightarrow \theta_1 \approx h \left( \frac{1}{p} + \frac{1}{R} \right).$$

Επίσης,

$$\theta_2 = \widehat{PCO} - \widehat{PIO} \Rightarrow \theta_2 \approx h \left( \frac{1}{R} - \frac{1}{q} \right).$$

Από το νόμο Snell έχουμε

$$n_1\theta_1 \approx n_2\theta_2 \Rightarrow n_1h\left(\frac{1}{p} + \frac{1}{R}\right) \approx n_2h\left(\frac{1}{R} - \frac{1}{q}\right) \Rightarrow \frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{q} \approx \frac{n_2 - n_1}{R}.$$

Άρα

$$q \approx \frac{n_2}{\frac{n_2 - n_1}{R} - \frac{n_1}{p}}.$$

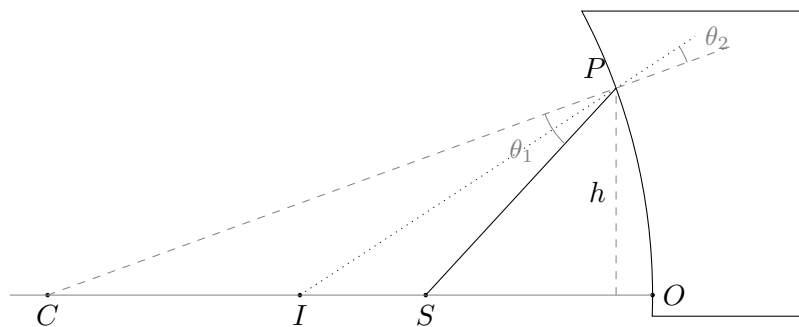
Με αντικατάσταση,  $q_1 \approx 45$  cm,  $q_2 \approx -90$  cm,  $q_3 \approx -6$  cm.

2. Ένα αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση  $s$  από γυαλί που σχηματίζει κοίλη σφαιρική επιφάνεια με ακτίνα καμπυλότητας  $R$ . Αποδείξτε ότι το είδωλο σχηματίζεται μπροστά από την επιφάνεια του γυαλιού σε απόσταση  $s'$  που μπορεί να υπολογισθεί από τη σχέση

$$\frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} = \frac{n_1 - n_2}{R},$$

όπου  $n_1, n_2$  οι δείκτες διάθλασης του αέρα και του γυαλιού αντίστοιχα.

#### ΛΥΣΗ



Ορίζουμε με  $S$  τη θέση του αντικειμένου· βρίσκεται σε απόσταση  $s$  από την αρχή,  $O$ .  $C$  είναι το κέντρο της σφαιρικής επιφάνειας,  $I$  η θέση στην οποία σχηματίζεται το είδωλο, σε απόσταση  $s'$  από την αρχή.  $\theta_1$  και  $\theta_2$  είναι οι γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης. Οι γωνίες θεωρούνται πολύ μικρές ώστε  $\tan \theta_i \approx \sin \theta_i \approx \theta_i$ .

Από το τρίγωνο PCO έχουμε  $\sin(\widehat{PCO}) = h/R \Rightarrow \widehat{PCO} \approx h/R$ .

Από το τρίγωνο PSO έχουμε  $\tan(\widehat{PSO}) \approx h/s \Rightarrow \widehat{PSO} \approx h/s$ .

Από το τρίγωνο PIO έχουμε  $\tan(\widehat{PIO}) \approx h/s' \Rightarrow \widehat{PIO} \approx h/s'$ .

Θεωρήσαμε ότι η προβολή του  $P$  στον άξονα είναι πολύ κοντά στο  $O$ .

Από το σχήμα προκύπτει ότι

$$\widehat{PSO} = \theta_1 + \widehat{PCO} \Rightarrow \theta_1 \approx h \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right) .$$

Επίσης,

$$\widehat{PIO} = \theta_2 + \widehat{PCO} \Rightarrow \theta_2 \approx h \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right) .$$

Από το νόμο Snell έχουμε

$$n_1 \theta_1 \approx n_2 \theta_2 \Rightarrow n_1 h \left( \frac{1}{s} - \frac{1}{R} \right) \approx n_2 h \left( \frac{1}{s'} - \frac{1}{R} \right) \Rightarrow \frac{n_1}{s} - \frac{n_2}{s'} \approx \frac{n_1 - n_2}{R} .$$

3. Κυρτό κάτοπτρο με ακτίνα καμπυλότητας 1 m, σχηματίζει είδωλο με ύψος τέσσερις φορές μικρότερο από το ύψος του αντικειμένου. Σε ποιες αποστάσεις από το κάτοπτρο βρίσκονται το αντικείμενο και το είδωλο;

#### ΛΥΣΗ

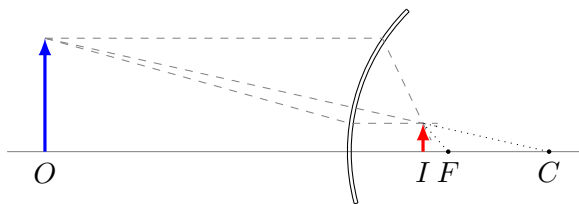
Το κάτοπτρο είναι κυρτό. Η ακτίνα καμπυλότητας και η εστιακή απόσταση θα εμφανιστούν στους τύπους με αρνητικό πρόσημο. Καθώς  $R = -1$  m έχουμε εστιακή απόσταση  $f = -0.5$  m. Επιπλέον, καθώς η μεγέθυνση είναι  $M = h'/h = 0.25$ , η απόσταση του ειδώλου,  $q$ , και η απόσταση του αντικειμένου,  $p$ , συνδέονται με τη σχέση  $M = -q/p \Rightarrow 0.25 = -q/p \Rightarrow q = -0.25p$ . Καθώς ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} ,$$

έχουμε

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{0.25p} = -\frac{1}{0.5} \Rightarrow p = 1.5 \text{ m} .$$

Η απόσταση του ειδώλου είναι  $q = -p/4 = -0.375$  m. Το είδωλο είναι φανταστικό.



4. Ένα είδωλο που παράγεται από κοίλο κάτοπτρο είναι αντεστραμμένο με ύψος το  $1/4$  του ύψους του αντικειμένου. Αν το αντικείμενο μετακινηθεί κατά 5 cm προς το κάτοπτρο, το είδωλο θα είναι πάλι αντεστραμμένο και θα έχει το μισό ύψος του αντικειμένου. Βρείτε την εστιακή απόσταση του κατόπτρου.

**ΛΥΣΗ**

Με  $p$  και  $q$  θα συμβολίζουμε τις αποστάσεις του αντικειμένου και του ειδώλου από κάτοπτρο εστιακής απόστασης  $f$ . Στην αρχική θέση του αντικειμένου έχουμε  $M = -0.25$ . Καθώς  $M = -q/p$ , προκύπτει ότι  $q = p/4$ .

Μετά τη μετακίνηση του αντικειμένου βρίσκεται σε απόσταση  $p' = p - 5$ . Το είδωλο σχηματίζεται σε απόσταση  $q'$  και η μεγέθυνση είναι τώρα  $M' = -0.5$ . Συνεπώς,  $q' = 0.5p'$ .

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Επομένως,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{0.25p} = \frac{1}{f} \Rightarrow p/5 = f.$$

Η εστιακή απόσταση του κατόπτρου φυσικά δεν αλλάζει. Έτσι

$$\frac{1}{p'} + \frac{1}{q'} = \frac{1}{f} \Rightarrow \frac{1}{p'} + \frac{1}{0.5p'} = \frac{1}{f} \Rightarrow p'/3 = f.$$

Επομένως,

$$\frac{p}{5} = \frac{p'}{3} \Rightarrow 3p = 5(p - 5) \Rightarrow p = 12.5 \text{ cm}.$$

Καθώς  $f = p/5$ , η εστιακή απόσταση είναι  $f = 2.5 \text{ cm}$ .

**13.7.4 Λεπτός Φακός**

1. Είδωλο βρίσκεται 1 m πίσω από φακό εστιακής απόστασης 50 cm. Βρείτε την απόσταση του αντικειμένου.

**ΛΥΣΗ**

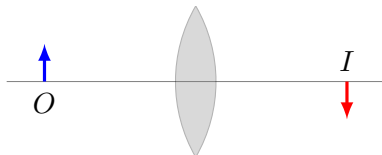
Για λεπτούς φακούς γνωρίζουμε ότι η απόσταση του αντικειμένου,  $p$ , η απόσταση του ειδώλου,  $q$ , και η εστιακή απόσταση  $f$ , συνδέονται με τη σχέση

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Τα  $p$ ,  $q$  είναι θετικά αν βρίσκονται σε διαφορετικές πλευρές του φακού, όπως στην άσκηση. Επομένως,

$$p = \frac{qf}{q - f}.$$

Με αντικατάσταση,  $p = 1 \text{ m}$ .



2. Ένας συγκλίνων φακός έχει εστιακή απόσταση 10 cm. Βρείτε τη θέση του αντικειμένου αν το πραγματικό είδωλο βρίσκεται σε απόσταση (α') 20 cm, (β') 50 cm από το φακό. Επαναλάβετε τους υπολογισμούς αν το είδωλο είναι φανταστικό και βρίσκεται σε απόσταση (α') 20 cm, (β') 50 cm από το φακό.

**ΛΥΣΗ**

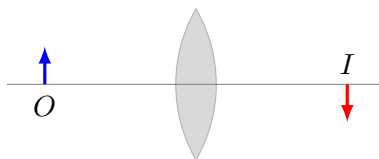
Για λεπτούς φακούς ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \Rightarrow p = \frac{qf}{q - f},$$

όπου  $f$  η εστιακή απόσταση,  $p$  η απόσταση του αντικειμένου από το φακό και  $q$  η απόσταση του ειδώλου.

Η  $f$  είναι 10 cm. Άρα

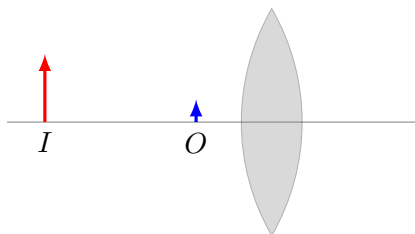
- Αν  $q = 20$  cm τότε  $p = 20$  cm.



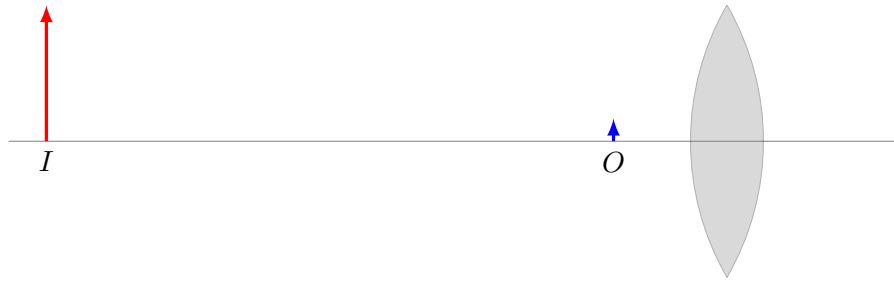
- Αν  $q = 50$  cm τότε  $p = 12.5$  cm.



- Αν  $q = -20$  cm τότε  $p \approx 6.67$  cm.



- Αν  $q = -50$  cm τότε  $p \approx 8.33$  cm.



3. Ένας συγκλίνων φακός έχει εστιακή απόσταση 14 cm. Για ένα αντικείμενο σε δύο διαφορετικές αποστάσεις, 18 cm και 7 cm αριστερά του φακού, προσδιορίστε

- τη θέση του ειδώλου,
- τη μεγέθυνση,
- αν το είδωλο είναι πραγματικό ή φανταστικό,
- αν το είδωλο είναι ορθό ή αντεστραμμένο.

Σχεδιάστε ένα διάγραμμα των ακτίνων για κάθε περίπτωση.

#### ΛΥΣΗ

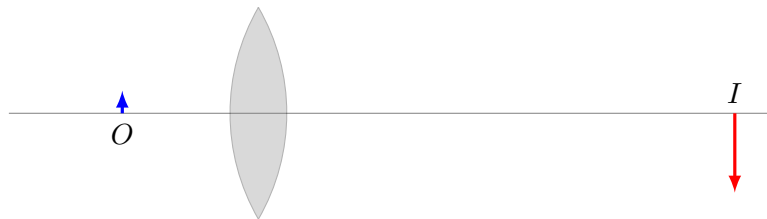
Για λεπτούς φακούς ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

όπου  $f$  η εστιακή απόσταση,  $p$  η απόσταση του αντικειμένου από το φακό και  $q$  η απόσταση του ειδώλου. Αν γνωρίζουμε τα  $f$ ,  $p$ , η απόσταση του ειδώλου είναι  $q = pf/(p - f)$ . Η μεγέθυνση είναι  $M = -q/p$ .

(α') Αν  $p = 18$  cm:

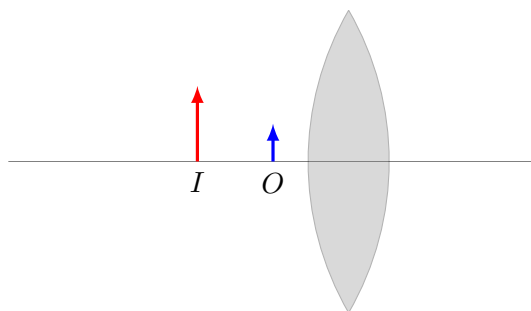
- το είδωλο είναι σε απόσταση  $q = 63$  cm. Το είδωλο είναι πραγματικό ( $q > 0$ ).
- η μεγέθυνση είναι  $M = -63/18 = -3.5$ . Το είδωλο είναι αντεστραμμένο.



(β') Αν  $p = 7$  cm:

- το είδωλο είναι σε απόσταση  $q = -14$  cm. Το είδωλο είναι φανταστικό ( $q < 0$ ).

- η μεγέθυνση είναι  $M = 14/7 = 2$ . Το είδωλο είναι ορθό.



4. Ένας φακός επαφής είναι κατασκευασμένος από πλαστικό με δείκτη διάθλασης 1.5. Ο φακός έχει εξωτερική και εσωτερική ακτίνα καμπυλότητας 2 cm και 2.5 cm αντίστοιχα. Ποια είναι η εστιακή απόσταση του φακού;

#### ΛΥΣΗ

Ξέρουμε ότι

$$\frac{1}{f} = \frac{n_2 - n_1}{n_1} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \Rightarrow f = \frac{1}{n - 1} \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1},$$

όπου  $n = n_2/n_1$  ο σχετικός δείκτης διάθλασης. Με αντικατάσταση,  $f = 20$  cm.

5. Ένας προβολέας διαφανειών διαθέτει ένα μόνο λεπτό φακό. Μια διαφάνεια ύψους 24 mm πρέπει να προβληθεί έτσι ώστε το είδωλό της να γεμίσει μια οθόνη ύψους 1.8 m. Η απόσταση διαφάνειας-οθόνης είναι 3 m.

- Βρείτε την εστιακή απόσταση του φακού.
- Σε πόση απόσταση από τη διαφάνεια πρέπει να τοποθετηθεί ο φακός του προβολέα για να σχηματίσει το είδωλο πάνω στην οθόνη;

#### ΛΥΣΗ

Έστω  $p$ ,  $q$  οι αποστάσεις από το φακό του αντικείμενου και του ειδώλου αντίστοιχα. Ξέρουμε ότι η μεγέθυνση είναι  $M = -q/p$ . Αφού το αντικείμενο και το είδωλο είναι στις δύο πλευρές του φακού, δηλαδή,  $p > 0$ ,  $q > 0$ , προκύπτει ότι  $M < 0$ . Αυτό σημαίνει ότι για να έχουμε όρθιο το είδωλο στην οθόνη, πρέπει το αντικείμενο να είναι αντεστραμμένο.

Θέλουμε το αντικείμενο ύψους  $h = -24$  mm να φαίνεται με ύψος  $h' = 1.8$  m. Η μεγέθυνση είναι  $M = h'/h = -75$ . Επομένως,  $q = 75p$ .

Καθώς η απόσταση διαφάνειας-οθόνης είναι  $p + q = 3$  m προκύπτει ότι  $p = 3/76$  m  $\approx 3.95$  cm.



Για το φακό ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$

Συνεπώς,  $f = pq/(p + q) \approx 3.895 \text{ cm}$ .

6. Μια αντιλόπη απέχει 20 m από έναν συγκλίνοντα φακό με εστιακή απόσταση 30 cm. Ο φακός σχηματίζει το είδωλο του ζώου.

- Αν η αντιλόπη απομακρύνεται από τον φακό με ταχύτητα 5 m/s, πόσο γρήγορα κινείται το είδωλο;
- Το είδωλο πλησιάζει ή απομακρύνεται από τον φακό;

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι για λεπτό φακό με εστιακή απόσταση  $f$  ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}, \quad (13.6)$$

όπου  $p$  η απόσταση του αντικειμένου και  $q$  η απόσταση του ειδώλου. Επομένως, η απόσταση του ειδώλου από το φακό είναι

$$q = \frac{pf}{p - f}.$$

Για την ταχύτητα του ειδώλου έχουμε

$$\dot{q} \equiv \frac{dq}{dt} = - \left( \frac{f}{p - f} \right)^2 \frac{dp}{dt}.$$

Από τα δεδομένα έχουμε  $p = 20 \text{ m}$ ,  $f = 30 \text{ cm}$ ,  $\dot{p} = 5 \text{ m/s}$ . Επομένως  $q \approx 30.46 \text{ cm}$  και  $\dot{q} \approx -1.16 \text{ mm/s}$ . Καθώς η ταχύτητα είναι αρνητική, το  $q$  μειώνεται, δηλαδή το είδωλο πλησιάζει στο φακό. Σε αυτό το συμπέρασμα μπορούμε να καταλήξουμε από τον τύπο 13.6: όταν αυξάνει το  $p$ , μικραίνει το  $1/p$ , μεγαλώνει το  $1/q$  αφού το άθροισμα με το  $1/p$  πρέπει να είναι σταθερό, μικραίνει το  $q$ .

7. Η απόσταση ενός αντικειμένου από το όρθιο είδωλό του είναι 20 cm. Αν η μεγέθυνση είναι 0.5, πόση είναι η εστιακή απόσταση του φακού που σχηματίζει το είδωλο;

### ΛΥΣΗ

Γνωρίζουμε ότι για λεπτό φακό με εστιακή απόσταση  $f$  ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

όπου  $p$  η απόσταση του αντικειμένου και  $q$  η απόσταση του ειδώλου. Άρα η εστιακή απόσταση είναι

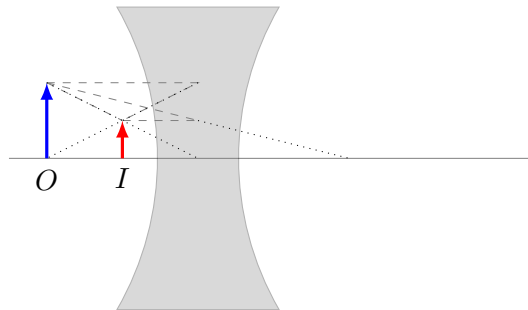
$$f = \frac{pq}{p+q}.$$

Επίσης, η μεγέθυνση είναι  $M = h'/h = -q/p$ , όταν το αντικείμενο έχει ύψος  $h$  και το είδωλο  $h'$ .

Καθώς θέλουμε η μεγέθυνση να είναι  $M = +0.5$ , πρέπει  $q = -0.5p$ . Η απόσταση αντικειμένου–ειδώλου είναι  $p + q = 0.5p$ . Επομένως,  $p = 40$  cm.

Η εστιακή απόσταση είναι

$$f = \frac{pq}{p+q} = -p = -40 \text{ cm}.$$



Σχήμα 13.17: Άσκηση 7

8. Δύο συγκλίνοντες φακοί με εστιακές αποστάσεις  $f_1 = 10$  cm και  $f_2 = 20$  cm, τοποθετούνται ομοαξονικά σε απόσταση  $d = 50$  cm. Ένα αντικείμενο τοποθετείται αριστερά, σε απόσταση  $p$  από το κέντρο του πρώτου φακού, και το είδωλο του συστήματος σχηματίζεται σε απόσταση  $x = 30$  cm δεξιά του πρώτου φακού.

- Πόσο είναι το  $p$ ;
- Ποια είναι η μεγέθυνση;
- Το είδωλο είναι ορθό ή αντεστραμμένο;
- Το είδωλο είναι πραγματικό ή φανταστικό;

#### ΛΥΣΗ

Το είδωλο από τον πρώτο φακό έχει απόσταση  $q_1$  από αυτόν η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1} \Rightarrow p = \frac{q_1 f_1}{q_1 - f_1}.$$

Το είδωλο στη θέση  $q_1$  αποτελεί το αντικείμενο του δεύτερου φακού. Απέχει από το κέντρο του απόσταση (με πιθανό πρόσημο)  $p_2 = d - q_1$ . Το είδωλο από το δεύτερο φακό, το είδωλο του συστήματος φακών, είναι σε απόσταση  $q_2$  από το κέντρο του δεύτερου φακού, η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}.$$

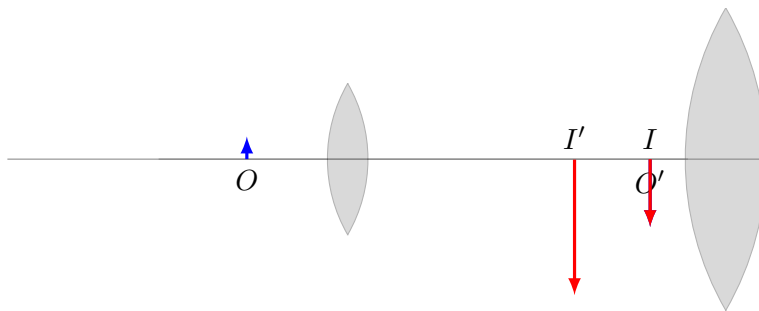
Από τον πρώτο φακό το είδωλο απέχει  $x = d + q_2$ . Επομένως,

$$\frac{1}{d - q_1} + \frac{1}{x - d} = \frac{1}{f_2} \Rightarrow q_1 = d - \frac{(x - d)f_2}{x - d - f_2}.$$

Με αντικατάσταση,  $q_1 = 40$  cm. Από την πρώτη εξίσωση προκύπτει ότι  $p = 40/3 \approx 13.33$  cm.

Η μεγέθυνση από τον πρώτο φακό είναι  $M_1 = -q_1/p = -3$ . Η μεγέθυνση από το δεύτερο φακό είναι  $M_2 = -q_2/p_2 = (d - x)/(d - q_1) = 2$ . Η συνολική μεγέθυνση είναι  $M = M_1 M_2 = -6$ . Το συνολικό είδωλο είναι αντεστραμμένο καθώς  $M < 0$ .

Αφού το είδωλο σχηματίζεται στα αριστερά του δεύτερου, δεξιού φακού, είναι φανταστικό. Έχει απόσταση από αυτόν  $q_2 = x - d < 0$ .



9. Ένα αντικείμενο βρίσκεται σε απόσταση 12 cm αριστερά από ένα αποκλίνοντα φακό με εστιακή απόσταση  $-6$  cm. Σε απόσταση  $d$  δεξιά από τον αποκλίνοντα φακό έχει τοποθετηθεί ένας συγκλίνων φακός με εστιακή απόσταση 12 cm. Πόση πρέπει να είναι η απόσταση  $d$  έτσι ώστε το τελικό είδωλο να βρίσκεται σε άπειρη απόσταση προς τα δεξιά;

#### ΛΥΣΗ

Για λεπτό φακό με εστιακή απόσταση  $f$  ισχύει

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f},$$

όπου  $p$  η απόσταση του αντικειμένου και  $q$  η απόσταση του ειδώλου.

Για τον πρώτο (αποκλίνοντα) φακό έχουμε  $p_1 = 12 \text{ cm}$ . Άρα  $q_1 = p_1 f_1 / (p_1 - f_1) = -4 \text{ cm}$ .

Το είδωλο του πρώτου φακού είναι μπροστά από το φακό και αποτελεί το αντικείμενο του δεύτερου (συγκλίνοντος) φακού. Η απόσταση  $p_2$  είναι  $d + |q_1|$ . Καθώς θέλουμε το είδωλο του δεύτερου φακού να εστιάζεται στο άπειρο, πρέπει το αντικείμενο να βρίσκεται στην εστία του. Πρέπει δηλαδή να ισχύει  $p_2 = f_2 \Rightarrow d = f_2 - |q_1| = 8 \text{ cm}$ .

10. Ένα αντικείμενο με ύψος  $3 \text{ mm}$  τοποθετείται  $40 \text{ cm}$  αριστερά από ένα συγκλίνοντα φακό με εστιακή απόσταση  $30 \text{ cm}$ . Ένας αποκλίνων φακός με εστιακή απόσταση  $-24 \text{ cm}$  βρίσκεται  $60 \text{ cm}$  δεξιά του πρώτου φακού. Ποια είναι η θέση και το ύψος του τελικού ειδώλου;

### ΛΥΣΗ

Έστω  $p_1, q_1$  οι αποστάσεις του αντικειμένου και του «ενδιάμεσου» ειδώλου αντίστοιχα, από τον αριστερό φακό.

Έστω  $p_2, q_2$  οι αποστάσεις του «ενδιάμεσου» ειδώλου, και του τελικού ειδώλου αντίστοιχα, από τον δεξιό φακό. Το «ενδιάμεσο» είδωλο αποτελεί το αντικείμενο του δεύτερου φακού.

Έστω  $f_1, f_2$  οι εστιακές αποστάσεις των δύο φακών.

Έστω  $h, h', h''$  τα ύψη του αντικειμένου, του «ενδιάμεσου» ειδώλου και του τελικού ειδώλου αντίστοιχα.

Από τα δεδομένα της άσκησης έχουμε  $p_1 = 40 \text{ cm}$ ,  $f_1 = 30 \text{ cm}$ . Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{q_1} = \frac{1}{f_1}.$$

Επομένως,

$$q_1 = \frac{p_1 f_1}{p_1 - f_1} = 120 \text{ cm}.$$

Η μεγέθυνση από τον αριστερό φακό είναι  $M_1 = h'/h = -q_1/p_1 = -3$ .

Ο δεξιός, αποκλίνων, φακός απέχει  $\ell = 60 \text{ cm}$  από τον αριστερό φακό, επομένως, το «ενδιάμεσο» είδωλο βρίσκεται σε απόσταση  $q_1 - \ell = 60 \text{ cm}$ , στα δεξιά του αποκλίνοντος φακού. Άρα  $p_2 = -60 \text{ cm}$ .

Γνωρίζουμε ότι

$$\frac{1}{p_2} + \frac{1}{q_2} = \frac{1}{f_2}.$$

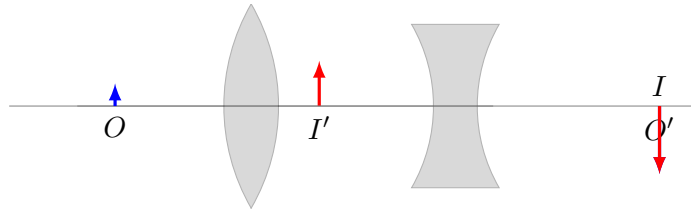
Το  $f_2$  είναι  $-24 \text{ cm}$ . Προκύπτει ότι

$$q_2 = \frac{p_2 f_2}{p_2 - f_2} = -40 \text{ cm}.$$

Το τελικό είδωλο βρίσκεται μεταξύ των δύο φακών.

Η μεγέθυνση από τον δεξιό φακό είναι  $M_2 = h''/h' = -q_2/p_2 = -2/3$ .

Η συνολική μεγέθυνση είναι  $M = M_1 M_2 = 2$ . Επομένως, το ύψος του τελικού ειδώλου είναι  $h'' = 2h = 6 \text{ mm}$ . Το τελικό είδωλο είναι όρθιο.



### 13.7.5 Συμβολή

1. Φως με μήκος κύματος  $\lambda = 620 \text{ nm}$  προσπίπτει σε μια διπλή σχισμή και ο πρώτος φωτεινός κροσσός της εικόνας συμβολής σχηματίζει γωνία  $15^\circ$  κατά την οριζόντιο. Βρείτε την απόσταση μεταξύ των σχισμών.

#### ΛΥΣΗ

Ξέρουμε από τη θεωρία ότι έχουμε δημιουργική συμβολή των κυμάτων από τις δύο σχισμές όταν  $r_1 - r_2 = m\lambda$ . Επίσης, από το σχήμα 13.4 προκύπτει ότι  $r_1 - r_2 \approx d \sin \theta$ . Επομένως, η απόσταση  $d$  των σχισμών είναι  $d = m\lambda / \sin \theta$ . Με αντικατάσταση ( $m = 1$ ,  $\lambda = 620 \text{ nm}$ ,  $\theta = 15^\circ$ ) έχουμε  $d \approx 2.4 \mu\text{m}$ .

2. Διεξάγετε το πείραμα διπλής σχισμής του Young με φως μήκους κύματος  $589 \text{ nm}$ . Η απόσταση των σχισμών από την οθόνη είναι  $2 \text{ m}$ . Το δέκατο ελάχιστο συμβολής εμφανίζεται σε απόσταση  $7.26 \text{ mm}$  από το κεντρικό μέγιστο. Βρείτε την απόσταση μεταξύ των σχισμών.

#### ΛΥΣΗ

Για το ύψος  $y$  και τη γωνία  $\theta$  στην οποία παρουσιάζεται ο δέκατος σκοτεινός κροσσός (δηλαδή με  $m = 9$ ) ισχύει

$$y = L \tan \theta \Rightarrow \theta = \tan^{-1}(y/L) \approx 3.63 \times 10^{-3} \text{ rad}.$$

Για τόσο μικρή γωνία ισχύει  $\sin \theta \approx \tan \theta$ .

Ξέρουμε από τη θεωρία ότι έχουμε καταστρεπτική συμβολή των κυμάτων από τις δύο σχισμές όταν  $r_1 - r_2 = (m + 1/2)\lambda$ . Επίσης, από το σχήμα 13.4 προκύπτει ότι  $r_1 - r_2 \approx d \sin \theta$ . Επομένως, η απόσταση  $d$  των σχισμών είναι  $d = (m + 1/2)\lambda / \sin \theta$ . Με αντικατάσταση έχουμε  $d \approx 1.54 \text{ mm}$ .

3. Στο πρόβλημα 1, θεωρήστε τώρα  $d = 0.25 \text{ cm}$ ,  $\lambda = 600 \text{ nm}$ ,  $L = 120 \text{ cm}$ . Υπολογίστε την απόσταση  $y$  πάνω από το κεντρικό μέγιστο, όπου η μέση ένταση στο πέτασμα είναι το 75% της μέγιστης.

**ΛΥΣΗ**

Για την ένταση ισχύει  $I = I_{\max} \cos^2(\phi/2)$ . Το μέγιστο της έντασης το έχουμε όταν  $\phi = 0$ , δηλαδή στο κέντρο. Πέφτει στο 75% όταν  $\cos^2(\phi/2) = 0.75 \Rightarrow \phi = 60^\circ = \pi/3 \text{ rad}$ . Αλλά

$$\phi = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \Rightarrow \sin \theta = \frac{\lambda \phi}{2\pi d} = 4 \times 10^{-5}.$$

Για την απόσταση έχουμε  $y = L \tan \theta \approx L \sin \theta = 48 \mu\text{m}$ .

4. Μέσα από ένα σύστημα διπλής σχισμής διέρχεται φως με μήκος κύματος  $442 \text{ nm}$ . Η απόσταση μεταξύ των σχισμών είναι  $d = 0.4 \text{ mm}$ . Βρείτε πόσο μακριά πρέπει να τοποθετηθεί η οθόνη έτσι ώστε οι σκοτεινοί κροσσοί να εμφανιστούν ακριβώς απέναντι από τις δύο σχισμές, έχοντας μόνο ένα φωτεινό κροσσό ανάμεσα τους.

**ΛΥΣΗ**

Σκοτεινούς κροσσούς έχουμε όταν  $r_1 - r_2 = d \sin \theta = (m + 1/2)\lambda$ . Οι δύο πλησιέστεροι στο κέντρο έχουν  $m = -1$  και  $m = 0$ . Εμφανίζονται σε γωνίες  $\sin \theta_{-1} = -\lambda/(2d)$  και  $\sin \theta_0 = \lambda/(2d)$ . Για μικρές γωνίες ισχύει  $\tan \theta \approx \sin \theta$ . Επομένως, οι αποστάσεις στις οποίες εμφανίζονται οι σκοτεινοί κροσσοί είναι  $y_{-1} = L \tan \theta_{-1} = -L\lambda/(2d)$  και  $y_0 = L \tan \theta_0 = L\lambda/(2d)$ . Η μεταξύ τους απόσταση είναι  $\Delta y = L\lambda/d$ . Αν θέλουμε αυτή να είναι  $d$  πρέπει να ισχύει  $L = d^2/\lambda$ . Με αντικατάσταση,  $L \approx 362 \text{ mm}$ .

5. Δύο λεπτές παράλληλες σχισμές που απέχουν μεταξύ τους  $d = 0.25 \text{ mm}$ , φωτίζονται με την πράσινη συνιστώσα του φωτός μιας λυχνίας ατμών υδραργύρου ( $\lambda = 546.1 \text{ nm}$ ). Η εικόνα της συμβολής παρατηρείται σε ένα πέτασμα σε απόσταση  $L = 1.2 \text{ m}$  από το επίπεδο των παράλληλων σχισμών. Υπολογίστε την απόσταση  $y$

- από τον κεντρικό μέγιστο κροσσό, της πρώτης φωτεινής περιοχής εκατέρωθεν του κεντρικού μέγιστου,
- μεταξύ του πρώτου και δεύτερου κροσσού.

**ΛΥΣΗ**

Φωτεινούς κροσσούς έχουμε σε γωνίες  $\theta_m$  που ικανοποιούν τη σχέση  $d \sin \theta_m = m\lambda$ . Η απόσταση  $y_1$  του πρώτου φωτεινού κροσσού από τον κεντρικό (στη θέση  $y = 0$ ) είναι  $y_1 = L \tan \theta_1$ . Για τη γωνία  $\theta_1$  στην οποία εμφανίζεται ο πρώτος φωτεινός κροσσός ( $m = 1$ ) ισχύει  $\sin \theta_1 = \lambda/d \Rightarrow \tan \theta_1 \approx \lambda/d$ . Άρα  $y_1 \approx L\lambda/d$ . Με αντικατάσταση,  $y_1 \approx 5.24 \text{ mm}$ .

Για την απόσταση του δεύτερου κροσσού από τον κεντρικό έχουμε  $y_2 = L \tan \theta_2 \approx L \sin \theta_2 = 2L\lambda/d$ . Η απόσταση πρώτου-δεύτερου είναι  $y_2 - y_1 \approx L\lambda/d$ . Με αντικατάσταση,  $y_2 - y_1 \approx 2.62 \text{ mm}$ .

## 13.7.6 Περίθλαση

1. Θεωρήστε περίθλαση Fraunhofer από μονοχρωματική πηγή με μήκος κύματος  $\lambda = 460 \text{ nm}$  μέσω ορθογώνιας σχισμής πλάτους  $d = 0.5 \text{ mm}$  και μεγάλου μήκους.
  - Βρείτε την τιμή της γωνίας περίθλασης  $\theta$  που αντιστοιχεί στο δεύτερο σκοτεινό κροσσό ως προς το κεντρικό μέγιστο,
  - Αν το πέτασμα παρατήρησης απέχει  $120 \text{ cm}$  από τη σχισμή, ποια είναι η απόσταση  $y$  από το κέντρο του κεντρικού μεγίστου έως το δεύτερο σκοτεινό κροσσό;

## ΛΥΣΗ

Ο δεύτερος σκοτεινός κροσσός εμφανίζεται όταν

$$\sin \theta = 2 \frac{\lambda}{d}.$$

Με αντικατάσταση,  $\sin \theta = 1.84 \times 10^{-3} \approx \theta$ .

Η απόσταση από το κέντρο είναι  $y = L \tan \theta \approx L \sin \theta$ . Με αντικατάσταση,  $y \approx 2.208 \text{ mm}$ .

2. Ο δεύτερος φωτεινός κροσσός σε μια μορφή περίθλασης Fraunhofer από μια σχισμή βρίσκεται σε απόσταση  $1.4 \text{ mm}$  από το μέσο του κεντρικού μεγίστου. Η οθόνη απέχει  $80 \text{ cm}$  από τη σχισμή που έχει άνοιγμα  $0.8 \text{ mm}$ . Υποθέστε ότι το προσπίπτον φως είναι μονοχρωματικό και υπολογίστε το μήκος κύματος.

## ΛΥΣΗ

Οι φωτεινοί κροσσοί εμφανίζονται μεταξύ των σκοτεινών άρα

- ο μηδενικός είναι στο  $\sin \theta = 0$ ,
- για τον πρώτο ισχύει

$$\frac{\lambda}{d} < \sin \theta < 2 \frac{\lambda}{d},$$

- για τον δεύτερο ισχύει

$$2 \frac{\lambda}{d} < \sin \theta < 3 \frac{\lambda}{d},$$

κλπ.

Οι ακριβείς τιμές για τα δευτερεύοντα μέγιστα της έντασης στην περίθλαση από σχισμή εμφανίζονται στις ρίζες της συνάρτησης  $x \cos x = \sin x$  όπου  $x = \pi d \sin \theta / \lambda$ . Επομένως Ο φωτεινός κροσσός τάξης  $m$  εμφανίζεται στο

$$\sin \theta \approx \rho_m \frac{\lambda}{d},$$

όπου  $\rho_0 = 0$ ,  $\rho_1 \approx 1.4303$ ,  $\rho_2 \approx 2.4590$ , κλπ.

Η απόσταση του δεύτερου από τον μηδενικό είναι  $y = L \tan \theta \Rightarrow \tan \theta = y/L \approx 1.75 \times 10^{-3} \approx \sin \theta$ .

Άρα  $1.75 \times 10^{-3} \approx \rho_2 \lambda / d \Rightarrow \lambda \approx 569 \text{ nm}$ .

3. Θεωρήστε περίθλαση Fraunhofer από μονοχρωματική πηγή με μήκος κύματος  $\lambda$  μέσω ορθογώνιας σχισμής πλάτους  $d$  και μεγάλου μήκους.

- Αποδείξτε ότι η ένταση της εικόνας του  $m$ -στού παράπλευρου φωτεινού κροσσού είναι

$$I_m = \frac{4I_0}{\pi^2(1+2m)^2}.$$

όπου  $I_0$  είναι η ένταση του κεντρικού κροσσού. Ποια είναι η αντίστοιχη γωνία περίθλασης  $\theta$ ; Πώς το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να εξηγήσει τις συνθήκες κατά τις οποίες η διάδοση του φωτός μέσω της σχισμής είναι ευθύγραμμη;

- Εξετάστε τη συμπεριφορά του πρώτου παράπλευρου κροσσού ( $m = 1$ ) όταν το πλάτος της σχισμής  $d$  μειώνεται. Τι συμβαίνει όταν  $d \ll \lambda$ ;

#### ΛΥΣΗ

Τα δευτερεύοντα μέγιστα της  $\sin x/x$  εμφανίζονται κατά προσέγγιση στα  $x = (m + 1/2)\pi$ . Η ένταση σε αυτά τα σημεία είναι

$$I_m = I_0 \left( \frac{\sin((m+0.5)\pi)}{(m+0.5)\pi} \right)^2 = I_0 \left( \frac{(-1)^m}{(m+0.5)\pi} \right)^2 = I_0 \frac{4}{\pi^2(2m+1)^2}.$$

β) Αν  $\pi d \sin \theta / \lambda = (m + 0.5)\pi \Rightarrow \sin \theta = (m + 0.5)\lambda / d$ . Όταν  $\lambda \ll d$  τότε  $\sin \theta \approx \theta \approx 0$ .

γ) Ο πρώτος κροσσός είναι όταν  $\sin \theta = 1.5\lambda/d$ . Όταν το  $d$  μικραίνει το  $\theta$  μεγαλώνει (και παύουμε να έχουμε περίθλαση Fraunhofer και γίνεται Fresnel).

4. Ποια είναι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο σημείων που θα μας επιτρέψει να τα διαχωρίζουμε μεταξύ τους σε απόσταση 1 km

- χρησιμοποιώντας ένα επίγειο τηλεσκόπιο με αντικειμενικό φακό διαμέτρου 6.5 cm (υποθέστε  $\lambda = 550 \text{ nm}$ ) και
- χρησιμοποιώντας γυμνό οφθαλμό (υποθέστε διάμετρο κόρης 2.5 mm);

#### ΛΥΣΗ

Η διακριτική ικανότητα για μήκος κύματος  $\lambda$  αν έχουμε οπή διαμέτρου  $D$  είναι  $\theta_{\min} = 1.22\lambda/D$ . Αν δύο πηγές με ίδιο  $\lambda$  βρίσκονται σε απόσταση  $L$  από την οπή και μεταξύ τους απέχουν (οι ακτίνες τους)  $y$  τότε  $\theta_{\min} \approx y/L \Rightarrow y = 1.22L\lambda/D$ . Με αντικατάσταση, α) 1.03 cm β) 26.84 mm.



5. Φως από σωλήνα εκκενώσεως υδρογόνου αφού περάσει από τη σχισμή του ευθυγραμμιστή, προσπίπτει κάθετα σε ένα φράγμα περίθλασης. Το προσπίπτον φως περιλαμβάνει τέσσερις συνιστώσες με μήκη κύματος  $\lambda_1 = 410.1 \text{ nm}$ ,  $\lambda_2 = 434.0 \text{ nm}$ ,  $\lambda_3 = 486.1 \text{ nm}$ ,  $\lambda_4 = 656.3 \text{ nm}$ . Το φράγμα έχει 410 χαραγές/mm. Υπολογίστε τη γωνία μεταξύ

- των  $\lambda_1$  και  $\lambda_4$  στο φάσμα πρώτης τάξης,
- των  $\lambda_1$  και  $\lambda_3$  στο φάσμα τρίτης τάξης.

#### ΛΥΣΗ

Σε φράγμα περίθλασης έχουμε ενισχυτική συμβολή όταν

$$d \sin \theta = m\lambda, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Με 410 χαραγές ανά mm, η απόσταση διαδοχικών χαραγών είναι  $1/410 \text{ mm}$ .

Το  $\lambda_i$  έχει φάσμα πρώτης τάξης σε γωνία  $\sin \theta_i = \lambda_i/d$ . Επομένως,  $\sin \theta_1 = 0.168141 \Rightarrow \theta_1 = 0.16894 \text{ rad}$ ,  $\sin \theta_4 = 0.269083 \Rightarrow \theta_4 = 0.27244 \text{ rad}$ . Η διαφορά είναι  $0.1035 \text{ rad}$ .

Για το φάσμα τρίτης τάξης ( $m = 3$ ):

$$\begin{aligned} \sin \theta_1 &= 3\lambda_1/d \Rightarrow \theta_1 = 0.52871 \text{ rad} \\ \sin \theta_3 &= 3\lambda_3/d \Rightarrow \theta_3 = 0.64088 \text{ rad} . \end{aligned}$$

Η διαφορά  $\theta_3 - \theta_1 = 0.11217 \text{ rad}$ .



**Μέρος VI**

**Παραρτήματα**



## Παράρτημα Α΄

# Υπολογισμός Ολοκληρωμάτων

Θα υπολογίσουμε τα ακόλουθα ολοκληρώματα:

•

$$I_1 = \int_a^b \frac{dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}} .$$

Θέτω  $x = y \tan \theta$ . Τα όρια γίνονται  $\theta_1 = \tan^{-1}(a/y)$  και  $\theta_2 = \tan^{-1}(b/y)$  και  $dx = \frac{y}{\cos^2 \theta} d\theta$ . Επομένως

$$I_1 = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{y/\cos^2 \theta d\theta}{y^3/\cos^3 \theta} = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\cos \theta d\theta}{y^2} = \frac{1}{y^2} \sin \theta \Big|_{\theta_1}^{\theta_2} = \frac{\sin \theta_2 - \sin \theta_1}{y^2} .$$

Ισχύει ότι

$$\sin \theta = \frac{\tan \theta}{\sqrt{1 + \tan^2 \theta}}$$

επομένως

$$I_1 = \frac{1}{y^2} \left( \frac{b/y}{\sqrt{1 + (b/y)^2}} - \frac{a/y}{\sqrt{1 + (a/y)^2}} \right) = \frac{1}{y^2} \left( \frac{b}{\sqrt{y^2 + b^2}} - \frac{a}{\sqrt{y^2 + a^2}} \right) .$$

- Αν  $a = -\infty$ ,  $b = +\infty$ ,  $I_1 = 2/y^2$ .

- Αν  $a = -b$ ,

$$I_1 = \frac{2b}{y^2 \sqrt{y^2 + b^2}} .$$

- Αν  $a = -\infty$ ,  $b = 0$ ,  $I_1 = 1/y^2$ .

•

$$I_2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} .$$

Θέτω  $x = a \tan \theta$ . Τα όρια γίνονται  $\pm \pi/2$  και  $dx = \frac{a}{\cos^2 \theta} d\theta$ . Επομένως

$$I_2 = \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{a / \cos^2 \theta d\theta}{a^2 / \cos^2 \theta} = \frac{\pi}{|a|}.$$

•

$$I_3 = \int_{x_0}^{+\infty} \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}},$$

με  $x_0 \geq 0$ .

Θέτω  $y = x^2 + a^2$ . Τότε τα όρια γίνονται  $x_0^2 + a^2$  και  $+\infty$ , και  $dy = 2x dx$ . Άρα

$$I_3 = \int_{x_0^2+a^2}^{+\infty} \frac{dy}{2y^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{y}} \Big|_{x_0^2+a^2}^{+\infty} = \frac{1}{\sqrt{x_0^2+a^2}}.$$

•

$$I_4 = \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + R^2}}.$$

Κάνουμε αλλαγή μεταβλητής από  $x$  σε  $\theta$ , όπου  $x = R \sinh \theta$ . Τότε  $dx = R \cosh \theta d\theta$  και τα όρια γίνονται  $\theta_a = \sinh^{-1}(a/R)$  και  $\theta_b = \sinh^{-1}(b/R)$ . Το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + R^2}} = \int_{\theta_a}^{\theta_b} R \cosh \theta d\theta \frac{1}{\sqrt{R^2(1 + \sinh^2 \theta)}}.$$

Αλλά  $1 + \sinh^2 \theta = \cosh^2 \theta$  οπότε το ολοκλήρωμα γίνεται

$$\begin{aligned} \int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x^2 + R^2}} &= \int_{\theta_a}^{\theta_b} d\theta = \theta_b - \theta_a = \sinh^{-1}(b/R) - \sinh^{-1}(a/R) \\ &= \ln \left( \frac{(b/R) + \sqrt{(b/R)^2 + 1}}{(a/R) + \sqrt{(a/R)^2 + 1}} \right) = \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + R^2}}{a + \sqrt{a^2 + R^2}} \right). \end{aligned}$$

•

$$I_5 = \int_0^b dx \left( \frac{1}{\sqrt{x^2 + R^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + Q^2}} \right).$$

Από το προηγούμενο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\begin{aligned} I &= \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + R^2}}{|R|} \right) - \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + Q^2}}{|Q|} \right) = \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + R^2}}{|R|} \cdot \frac{|Q|}{b + \sqrt{b^2 + Q^2}} \right) \\ &= \ln \left| \frac{Q}{R} \right| + \ln \left( \frac{b + \sqrt{b^2 + R^2}}{b + \sqrt{b^2 + Q^2}} \right) \\ &= \ln \left| \frac{Q}{R} \right| + \ln \left( \frac{1 + \sqrt{1 + (R/b)^2}}{1 + \sqrt{1 + (Q/b)^2}} \right). \end{aligned}$$

Αν  $b \rightarrow \infty$ ,

$$\lim_{b \rightarrow \infty} I = \ln \left| \frac{Q}{R} \right|.$$

•

$$I_6 = \int_a^b \frac{x \, dx}{(x^2 + y^2)^{3/2}}.$$

Θέτω  $z = x^2 + y^2$ . Τότε τα όρια γίνονται  $a^2 + y^2$  και  $b^2 + y^2$ , και  $dz = 2x \, dx$ .  
Άρα

$$I_5 = \int_{a^2+y^2}^{b^2+y^2} \frac{dz}{2z^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{z}} \Big|_{a^2+y^2}^{b^2+y^2} = \frac{1}{\sqrt{a^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{b^2+y^2}}.$$

•

$$I_6 = \int_{-a}^a dx \frac{a-x}{\sqrt{c^2 + (a-x)^2}}$$

με  $a, c > 0$ . Θέτω  $y = a - x$ . Τότε

$$I_6 = - \int_{2a}^0 dy \frac{y}{\sqrt{c^2 + y^2}}.$$

Θέτω  $z = y^2 + c^2$ . Τότε

$$I_6 = \frac{1}{2} \int_{c^2}^{4a^2+c^2} \frac{dz}{\sqrt{z}} = \sqrt{z} \Big|_{c^2}^{4a^2+c^2} = \sqrt{4a^2 + c^2} - c.$$

• Αντίστοιχα,

$$I_7 = \int_{-a}^a dx \frac{a+x}{\sqrt{c^2 + (a+x)^2}} = \sqrt{4a^2 + c^2} - c.$$





# Ευρετήριο

διάνυσμα

άθροισμα, **7**

γινόμενο

εξωτερικό, **14**

εσωτερικό, **11**

με πραγματικό αριθμό, **8**

γωνίες διεύθυνσης, **13**

διεύθυνση, **3**

μέτρο, **3**

ορθογώνια διανύσματα, **11**

συνιστώσες, **4**

συντελεστές διεύθυνσης, **13**

φορά, **3**

μέγεθος

βαθμωτό, **3**

διανυσματικό, **3**

ταυτότητα Jacobi, **18**