

ΤΜΗΜΑ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΑΣ ΥΛΙΚΩΝ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΡΗΤΗΣ

Εφαρμοσμένα Μαθηματικά

Σημειώσεις Διαλέξεων

ΣΤΑΜΑΤΗΣ ΣΤΑΜΑΤΙΑΔΗΣ

Copyright © 2016–2024 Σταμάτης Σταματιάδης, stamatis@uoc.gr

Το έργο αυτό αδειοδοτείται από την άδεια “Creative Commons Αναφορά Δημιουργού - Μη Εμπορική Χρήση - Παρόμοια Διανομή 4.0 Διεθνές” (CC-BY-NC-SA 4.0). Για να δείτε ένα αντίγραφο της άδειας αυτής, επισκεφτείτε το <http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/deed.el>.

Η στοιχειοθεσία έγινε από το συγγραφέα με τη χρήση του \LaTeX .

Ορισμένα κεφάλαια των σημειώσεων βασίζονται κυρίως στο βιβλίο K. F. Riley, M. P. Hobson, and S. J. Bence, *Mathematical Methods for Physics and Engineering*, Cambridge University Press, Cambridge, England, third edition, 2006.

Τελευταία τροποποίηση του κειμένου έγινε στις 6 Νοεμβρίου 2024.

Η πιο πρόσφατη έκδοση βρίσκεται στο

<https://raw.githubusercontent.com/sstamat/mybooks/main/appliedmath.pdf>

Περιεχόμενα

Περιεχόμενα	i
1 Μιγαδικός αριθμός	1
1.1 Εισαγωγή	1
1.2 Πράξεις	3
1.2.1 Πρόσθεση	3
1.2.2 Αφαίρεση	4
1.2.3 Πολλαπλασιασμός	4
1.2.4 Διαίρεση	6
1.3 Μέτρο και φάση	7
1.4 Μιγαδικός συζυγής	8
1.5 Τριγωνική ανισότητα	9
1.6 Πολική αναπαράσταση	10
1.6.1 Εφαρμογές	12
1.7 Θεώρημα de Moivre	15
1.7.1 Τριγωνομετρικές ταυτότητες	15
1.8 Μιγαδικές επεκτάσεις συναρτήσεων	16
1.8.1 Λογάριθμος	17
1.8.2 Ύψωση σε δύναμη	19
1.8.3 Υπερβολικές συναρτήσεις	20
1.9 Ασκήσεις	22
2 Μιγαδική ανάλυση	25
2.1 Εισαγωγή	25
2.1.1 Πλειότιμη συνάρτηση	26
2.2 Συνέχεια μιγαδικής συνάρτησης	28
2.3 Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης	29
2.3.1 Ορισμός αναλυτικής συνάρτησης	31

2.3.2	Συνθήκες ύπαρξης παραγώγου	31
2.3.3	Κανόνες παραγώγισης	34
2.4	Ιδιόζοντα σημεία	34
2.4.1	Απομονωμένα	35
2.4.2	Μη απομονωμένα	36
2.5	Ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης	37
2.5.1	Παράδειγμα	38
2.6	Θεώρημα Cauchy	41
2.6.1	Εφαρμογή	41
2.7	Ολοκληρωτική αναπαράσταση συνάρτησης	43
2.7.1	Ανισότητα Cauchy	44
2.8	Ανάπτυγμα μιγαδικής συνάρτησης σε δυνάμεις	45
2.8.1	Σειρά Taylor	45
2.8.2	Σειρά Laurent	48
2.9	Θεώρημα των υπολοίπων	51
2.10	Υπολογισμός ολοκληρωμάτων	52
2.10.1	Ολοκλήρωμα τριγωνομετρικής έκφρασης	52
2.10.2	Ολοκλήρωμα με άπειρα όρια ρητής συνάρτησης	53
2.10.3	Ολοκλήρωμα με άπειρα όρια ρητής συνάρτησης με πραγματικό πόλο	55
2.10.4	Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης επί τριγωνομετρική	58
2.11	Συνάρτηση Γ	59
2.11.1	Εφαρμογή	60
2.12	Ασκήσεις	61
3	Διανυσματικοί χώροι	65
3.1	Εισαγωγή	65
3.2	Ορισμός διανυσματικού χώρου	67
3.2.1	Παραδείγματα διανυσματικών χώρων	70
3.3	Εσωτερικό γινόμενο	71
3.4	Χρήσιμες ανισότητες	72
3.4.1	Ανισότητα Cauchy–Schwarz	72
3.4.2	Τριγωνική ανισότητα	74
3.5	Γραμμική ανεξαρτησία	74
3.6	Βάση διανυσματικού χώρου	75
3.6.1	Ορθοκανονική βάση	76
3.6.2	Ορθοκανονικοποίηση βάσης	77
3.7	Τελεστής	82
3.7.1	Γραμμικός Τελεστής	83
3.7.2	Πράξεις	83
3.7.3	Αντίστροφος ενός τελεστή	86
3.7.4	Ανάστροφος συζυγής	87
3.7.5	Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα	87

3.7.6	Ερμιτιανός τελεστής	88
3.7.7	Μοναδιαίος και Ορθογώνιος τελεστής	88
3.7.8	Αναπαράσταση τελεστή σε συγκεκριμένη βάση	89
3.8	Ασκήσεις	91
4	Θεωρία πινάκων	95
4.1	Ορισμός	95
4.2	Παραγόμενοι πίνακες	96
4.2.1	Ανάστροφος πίνακας	96
4.2.2	Συζυγής πίνακας	96
4.2.3	Ανάστροφος συζυγής πίνακας	96
4.3	Πράξεις πινάκων	97
4.3.1	Ισότητα πινάκων	97
4.3.2	Πρόσθεση	97
4.3.3	Αφαίρεση πινάκων	98
4.3.4	Πολλαπλασιασμός με αριθμό	98
4.3.5	Πολλαπλασιασμός πινάκων	99
4.3.6	Διαίρεση πινάκων	102
4.4	Διανυσματικός χώρος πινάκων μιας στήλης	102
4.5	Ειδικές κατηγορίες πινάκων	103
4.5.1	Τετραγωνικός πίνακας	103
4.5.2	Τριγωνικός πίνακας	103
4.5.3	Διαγώνιος πίνακας	103
4.5.4	Βαθμωτός πίνακας	104
4.5.5	Συμμετρικός/Αντισυμμετρικός πίνακας	104
4.5.6	Ερμιτιανός/Αντιερμιτιανός πίνακας	104
4.5.7	Ταυτοτικός πίνακας	105
4.5.8	Αντίστροφος πίνακας	105
4.5.9	Ορθογώνιος πίνακας	106
4.5.10	Μοναδιαίος πίνακας	106
4.5.11	Κανονικός πίνακας	107
4.5.12	Όμοιοι πίνακες	107
4.6	Έχνος τετραγωνικού πίνακα	107
4.7	Ορίζουσα τετραγωνικού πίνακα	108
4.7.1	Εφαρμογή: Ορίζουσα πίνακα 2×2	108
4.7.2	Εφαρμογή: Ορίζουσα πίνακα 3×3	109
4.7.3	Ιδιότητες ορίζουσας	110
4.8	Κατασκευή αντίστροφου πίνακα	112
4.8.1	Εφαρμογή: Αντίστροφος πίνακα 2×2	112
4.8.2	Εφαρμογή: Αντίστροφος πίνακα 3×3	113
4.9	Ιδιοτιμές–Ιδιοδιανύσματα	114
4.9.1	Εύρεση ιδιοτιμών (διαγωνιοποίηση)	115
4.9.2	Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων	116

4.9.3	Ιδιότητες	118
4.10	Θεώρημα Cayley—Hamilton	118
4.10.1	Τύπος του Sylvester	121
4.11	Ασκήσεις	122
5	Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων	125
5.1	Εισαγωγή	125
5.2	Μέθοδος του αντίστροφου πίνακα	126
5.2.1	Εφαρμογή: Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων	126
5.3	Κανόνας Cramer	127
5.4	Απαλοιφή Gauss	128
5.4.1	Τριγωνοποίηση	129
5.4.2	Επίλυση άνω τριγωνικού συστήματος	131
5.4.3	Παρατηρήσεις	133
5.5	Μέθοδος Gauss–Jordan	134
5.6	Ανάλυση LU	134
5.7	Εφαρμογές	136
5.7.1	Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα	136
5.7.2	Υπολογισμός ορίζουσας	138
5.8	Ασκήσεις	139
6	Ανάλυση Fourier	143
6.1	Ορισμοί	143
6.1.1	Συνεχής συνάρτηση	143
6.1.2	Περιοδική συνάρτηση	144
6.1.3	Συνθήκες Dirichlet	144
6.2	Σειρά Fourier	145
6.3	Υπολογισμός συντελεστών της σειράς Fourier	146
6.3.1	Ιδιότητες	147
6.3.2	Παράδειγμα	148
6.3.3	Συντελεστές Fourier συνάρτησης με συμμετρία	149
6.3.4	Παράδειγμα	150
6.4	Φαινόμενο Gibbs	151
6.5	Παραγωγή σειράς Fourier από άλλη	152
6.5.1	Ολοκλήρωση	152
6.5.2	Παραγωγή	153
6.6	Εναλλακτική θεώρηση της σειράς Fourier	153
6.6.1	Ταυτότητα Parseval	154
6.7	Σειρά Fourier για συναρτήσεις σε πεπερασμένο διάστημα	156
6.7.1	Μετατόπιση	156
6.7.2	Κατοπτρισμός ως προς ευθείες	157
6.7.3	Κατοπτρισμός ως προς σημεία	157
6.7.4	Παράδειγμα	158
6.8	Μιγαδική μορφή της σειράς Fourier	161

6.9 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)	163
6.9.1 Γρήγορος υπολογισμός του DFT — Αλγόριθμος FFT	164
6.10 Μετασχηματισμός Fourier	166
6.10.1 Ιδιότητες	167
6.10.2 Συμμετρία	168
6.11 Συνάρτηση δ	170
6.11.1 Ιδιότητες	171
6.11.2 Παράγωγοι της συνάρτησης $\delta(x)$	173
6.11.3 Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\delta(x)$	174
6.11.4 Εφαρμογές στη Φυσική	174
6.12 Συνέλιξη συναρτήσεων	174
6.12.1 Ιδιότητες συνέλιξης	175
6.12.2 Θεώρημα συνέλιξης	176
6.13 Συσχέτιση συναρτήσεων	176
6.13.1 Θεώρημα Wiener–Khinchin	177
6.13.2 Αυτοσυσχέτιση συνάρτησης	178
6.14 Ασκήσεις	178
A' Χρήσιμα ολοκληρώματα	181

Κεφάλαιο 1

Μιγαδικός αριθμός

1.1 Εισαγωγή

Η ανάγκη για χρήση αριθμών που δεν ανήκουν στους πραγματικούς εμφανίζεται σε πολλούς κλάδους των φυσικών επιστημών. Ένας επιστήμονας των Υλικών θα τους συναντήσει σε προβλήματα διάδοσης ηλεκτρομαγνητικών ή μηχανικών κυμάτων, ενώ είναι απαραίτητοι για τη μαθηματική θεμελίωση της κβαντομηχανικής, η οποία αποτελεί τη βάση για τη μελέτη της φυσικής των Υλικών. Πέρα από τις φυσικές επιστήμες, τέτοιοι αριθμοί μπορούν να χρησιμοποιηθούν για διευκόλυνση υπολογισμών παραγώγων και ολοκληρωμάτων.

Ας δούμε το πρόβλημα που μπορεί να συναντήσουμε σε ένα μαθηματικό ζήτημα, την επίλυση μιας δευτεροβάθμιας εξίσωσης, και πώς το αντιμετωπίζουμε με την εισαγωγή της έννοιας των *φανταστικών* και, κατ' επέκταση, των *μιγαδικών* αριθμών.

Επιθυμούμε να βρούμε τις ρίζες ενός πολυωνύμου δεύτερου βαθμού, $p(z) = z^2 - 4z + 5$, δηλαδή τις τιμές του z που ικανοποιούν τη σχέση $p(z) = 0$. Γνωρίζουμε ότι έχει δύο ρίζες, z_1, z_2 , που δίνονται από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{4 + \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = 2 + \frac{\sqrt{-4}}{2}, \\ z_2 &= \frac{4 - \sqrt{(-4)^2 - 4 \times 1 \times 5}}{2 \times 1} = 2 - \frac{\sqrt{-4}}{2}. \end{aligned}$$

Η τετραγωνική ρίζα αρνητικού αριθμού δεν ανήκει στους πραγματικούς αριθμούς. Δεν είναι σωστό όμως να θεωρήσουμε ότι το συγκεκριμένο πολυώνυμο δεν έχει ρίζες· δεν έχει *πραγματικές* ρίζες. Η τετραγωνική ρίζα αρνητικού πραγματικού αριθμού ανήκει στο σύνολο των *φανταστικών* (imaginary) αριθμών. Για την ακρίβεια, το σύνολο αυτό έχει ως μέλη τις τετραγωνικές ρίζες όλων των αρνητικών αριθμών (καθώς και το 0).

Οι δύο λύσεις του πολυωνύμου αποτελούνται από ένα πραγματικό μέρος και ένα φανταστικό και ανήκουν στο σύνολο των *μιγαδικών* (complex) αριθμών. Για να διευκολύνεται η γραφή των μιγαδικών αριθμών έχει εισαχθεί στα μαθηματικά το σύμβολο i για την τετραγωνική ρίζα του -1 . Έτσι, οι δύο ρίζες γράφονται

$$z_{1,2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-4}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{(-1) \times 4}}{2} = 2 \pm \frac{\sqrt{-1}\sqrt{4}}{2} = 2 \pm i.$$

Το πραγματικό μέρος των ριζών είναι το ίδιο, 2, ενώ το φανταστικό τους είναι $+i$ και $-i$.

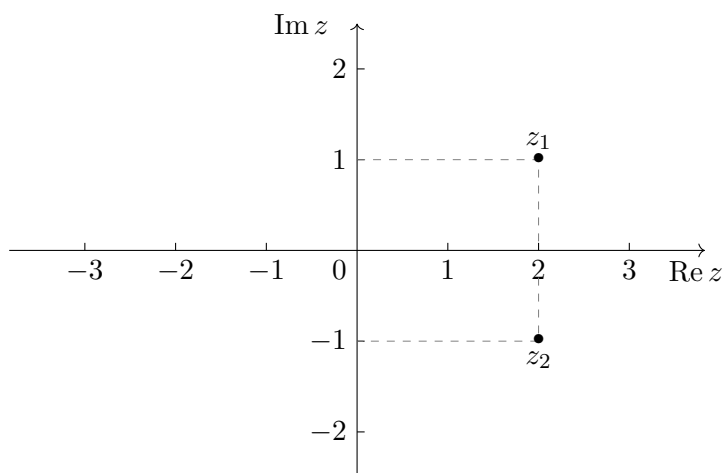
Ένας μιγαδικός αριθμός συχνά συμβολίζεται με z και αποτελείται από δύο μέρη, πραγματικό (α) και φανταστικό (β):

$$z = \alpha + i\beta.$$

Το πραγματικό μέρος του z συμβολίζεται συχνά με $\operatorname{Re} z$ και το φανταστικό με $\operatorname{Im} z$. Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε τον z ως ένα ζεύγος τιμών

$$z = (\alpha, \beta),$$

και να τον χειριστούμε ως ένα σημείο στο επίπεδο με συντεταγμένες (α, β) . Η αναπαράσταση του μιγαδικού αριθμού σε τέτοιο καρτεσιανό διδιάστατο σύστημα, το μιγαδικό επίπεδο, αποτελεί το *διάγραμμα Argand*. Στο Σχήμα 1.1 απεικονίζουμε τις ρίζες του πολυωνύμου $p(z) = z^2 - 4z + 5$ σε τέτοιο διάγραμμα.



Σχήμα 1.1: Αναπαράσταση των $z_{1,2} = 2 \pm i$ σε διάγραμμα Argand

Αντιλαμβανόμαστε εύκολα ότι στους μιγαδικούς αριθμούς περιλαμβάνονται όλοι οι πραγματικοί αριθμοί (έχουν φανταστικό μέρος 0) και όλοι οι φανταστικοί (έχουν πραγματικό μέρος 0).

1.2 Πράξεις

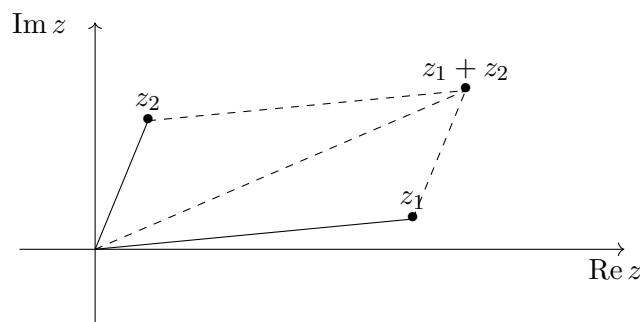
Προτού ορίσουμε πράξεις μεταξύ μιγαδικών αριθμών πρέπει να δώσουμε ένα ορισμό για την ισότητα μιγαδικών: Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι *ίσοι* όταν έχουν ίσα πραγματικά μέρη και ίσα φανταστικά. Ένα ισοδύναμο ορισμό θα διατυπώσουμε σε επόμενη παράγραφο, αφού εισαγάγουμε τις έννοιες του μέτρου και της φάσης.

1.2.1 Πρόσθεση

Το άθροισμα δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ και $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ είναι ένας άλλος μιγαδικός αριθμός, με πραγματικό μέρος το άθροισμα των πραγματικών μερών και φανταστικό το άθροισμα των φανταστικών μερών:

$$z = z_1 + z_2 = \alpha_1 + i\beta_1 + \alpha_2 + i\beta_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2). \quad (1.1)$$

Το διάγραμμα Argand του αθροίσματος των $z_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ και $z_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ δίνεται στο Σχήμα 1.2. Παρατηρήστε ότι οι μιγαδικοί αριθμοί συμπεριφέρονται ως διανύσματα στο μιγαδικό επίπεδο.



Σχήμα 1.2: Αναπαράσταση της πρόσθεσης των $z_1 = (\alpha_1, \beta_1)$ και $z_2 = (\alpha_2, \beta_2)$ σε διάγραμμα Argand

Καθώς το άθροισμα μιγαδικών είναι επίσης μιγαδικός αριθμός λέμε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι *κλειστό* ως προς την πρόσθεση. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η πρόσθεση μιγαδικών έχει:

- την αντιμεταθετική ιδιότητα: για οποιουδήποτε z_1 και z_2 ισχύει

$$z_1 + z_2 = (\alpha_1 + \alpha_2) + i(\beta_1 + \beta_2) = (\alpha_2 + \alpha_1) + i(\beta_2 + \beta_1) = z_2 + z_1,$$

καθώς η πρόσθεση πραγματικών αριθμών είναι αντιμεταθετική.

- την προσεταιριστική ιδιότητα: για οποιουδήποτε z_1, z_2, z_3 ισχύει

$$\begin{aligned} z_1 + (z_2 + z_3) &= (\alpha_1 + (\alpha_2 + \alpha_3)) + i(\beta_1 + (\beta_2 + \beta_3)) \\ &= ((\alpha_1 + \alpha_2) + \alpha_3) + i((\beta_1 + \beta_2) + \beta_3) = (z_1 + z_2) + z_3, \end{aligned}$$

καθώς η πρόσθεση πραγματικών αριθμών έχει την προσεταιριστική ιδιότητα.

Παράδειγμα

Το άθροισμα των $z_1 = 5.2 + i1.9$, $z_2 = -2.7 + i2.4$ και $z_3 = 0.3 - i5.2$ είναι

$$z = z_1 + z_2 + z_3 = (5.2 - 2.7 + 0.3) + i(1.9 + 2.4 - 5.2) = 8.2 - i0.9 .$$

1.2.2 Αφαίρεση

Στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών περιλαμβάνονται:

- το (μοναδικό) ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, ο αριθμός $0 + i0$: για οποιοδήποτε z ισχύει

$$z + (0 + i0) = z .$$

- το (μοναδικό) αντίθετο στοιχείο οποιοδήποτε αριθμού z . Συμβολίζεται με $-z$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$z + (-z) = 0 + i0 .$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι το αντίθετο του $z = \alpha + i\beta$ είναι το $-z = (-\alpha) + i(-\beta)$.

Με τη βοήθεια του αντίθετου μιγαδικού μπορούμε να ορίσουμε την πράξη της αφαίρεσης του μιγαδικού z_2 από το z_1 . Η αφαίρεση ορίζεται ως η πρόσθεση στο z_1 του αντίθετου του z_2 :

$$z_1 - z_2 \equiv z_1 + (-z_2) .$$

1.2.3 Πολλαπλασιασμός

Το γινόμενο δύο μιγαδικών αριθμών $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$ και $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ είναι επίσης μιγαδικός αριθμός:

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= (\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 + i\beta_2) = \alpha_1 \alpha_2 + i\alpha_1 \beta_2 + i\alpha_2 \beta_1 + i^2 \beta_1 \beta_2 \\ &= (\alpha_1 \alpha_2 - \beta_1 \beta_2) + i(\alpha_1 \beta_2 + \alpha_2 \beta_1) . \end{aligned} \quad (1.2)$$

Στην παραπάνω έκφραση χρησιμοποιήθηκε η σχέση $i^2 = -1$. Η (1.2) ορίζει τον πολλαπλασιασμό δύο μιγαδικών αριθμών. Παρατηρούμε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών είναι κλειστό ως προς αυτόν καθώς το γινόμενο είναι μιγαδικός.

Εύκολα αποδεικνύεται με βάση τους ορισμούς και τις ιδιότητες των πραγματικών αριθμών ότι ο πολλαπλασιασμός μιγαδικών έχει

- την αντιμεταθετική ιδιότητα: για οποιουδήποτε z_1 και z_2 ισχύει

$$z_1 z_2 = z_2 z_1 .$$

- την προσεταιριστική ιδιότητα: για οποιουδήποτε z_1, z_2, z_3 ισχύει

$$z_1(z_2 z_3) = (z_1 z_2) z_3 .$$

- την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση μιγαδικών: για οποιουδήποτε z_1, z_2, z_3 ισχύει

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3 .$$

Παράδειγμα

Το γινόμενο των $z_1 = 5.2 + i1.9$, $z_2 = -2.7 + i2.4$ και $z_3 = 0.3 - i5.2$ είναι

$$\begin{aligned} z_1z_2z_3 &= (5.2 + i1.9)((-2.7 \times 0.3 + 2.4 \times 5.2) + i(2.7 \times 5.2 + 2.4 \times 0.3)) \\ &= (5.2 + i1.9)(11.67 + i14.76) \\ &= (5.2 \times 11.67 - 1.9 \times 14.76) + i(5.2 \times 14.76 + 1.9 \times 11.67) \\ &= 32.64 + i98.925 . \end{aligned}$$

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού, το ταυτοτικό στοιχείο, είναι ο αριθμός $1+i0$, καθώς για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό z ισχύει $(1+i0)z = z(1+i0) = z$.

Με τη βοήθεια του ταυτοτικού στοιχείου ορίζεται ο αντίστροφος για κάθε μη μηδενικό μιγαδικό αριθμό. Ο αντίστροφος ενός μιγαδικού αριθμού $z \neq 0 + i0$ συμβολίζεται με z^{-1} και ικανοποιεί τη σχέση

$$zz^{-1} = z^{-1}z = 1 . \quad (1.3)$$

Ας υπολογίσουμε τον αντίστροφο του $z = \alpha + i\beta$: Έστω $z^{-1} = x + iy$. Πρέπει να ισχύει

$$(\alpha + i\beta)(x + iy) = 1 \Rightarrow \alpha x - \beta y + i(\alpha y + \beta x) = 1 + i0 \Rightarrow \begin{cases} \alpha x - \beta y = 1 \\ \alpha y + \beta x = 0 \end{cases} .$$

Αν λύσουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς μία άγνωστη ποσότητα και αντικαταστήσουμε στην πρώτη εξίσωση (ή εφαρμόσουμε τις μεθόδους που θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 5), προκύπτει η ακόλουθη λύση του συστήματος:

$$x = \frac{\alpha}{\alpha^2 + \beta^2} , \quad y = \frac{-\beta}{\alpha^2 + \beta^2} .$$

Ο z^{-1} επομένως είναι

$$z^{-1} = x + iy = \frac{\alpha - i\beta}{\alpha^2 + \beta^2} . \quad (1.4)$$

Όπως θα δούμε στην §1.4, ο αριθμός $\alpha - i\beta$ στον αριθμητή είναι ο μιγαδικός συζυγής του z . Στον παρονομαστή εμφανίζεται το γινόμενό του με τον z :

$$(\alpha - i\beta)(\alpha + i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 .$$

Προφανώς αν $\alpha = \beta = 0$ ο αντίστροφος δεν ορίζεται.

Αντιλαμβανόμαστε εύκολα από τον ορισμό ότι ο αντίστροφος του z^{-1} είναι ο z . Επίσης, εύκολα δείχνεται ότι ο αντίστροφος είναι μοναδικός: αν υπήρχε και δεύτερος, έστω \tilde{z}^{-1} που ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{z}^{-1}z = 1$$

τότε με πολλαπλασιασμό από δεξιά των δύο μελών της εξίσωσης με τον πρώτο αντίστροφο, z^{-1} , δίνει

$$(\tilde{z}^{-1}z)z^{-1} = z^{-1} \Rightarrow \tilde{z}^{-1}(zz^{-1}) = z^{-1} \Rightarrow \tilde{z}^{-1} = z^{-1}.$$

Επομένως, οι δύο αντίστροφοι δεν είναι διαφορετικοί.

1.2.4 Διαίρεση

Ο λόγος δύο μιγαδικών αριθμών, z_1/z_2 , ορίζεται ως το γινόμενο του αριθμητή, z_1 , με τον αντίστροφο του παρονομαστή, z_2^{-1} :

$$\frac{z_1}{z_2} \equiv z_1 z_2^{-1}.$$

Έτσι, αν $z_1 = \alpha_1 + i\beta_1$, $z_2 = \alpha_2 + i\beta_2$ είναι οι δύο μιγαδικοί, ο λόγος z_1/z_2 είναι ο αριθμός

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= (\alpha_1 + i\beta_1) \frac{\alpha_2 - i\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + i(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \\ &= \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} + i \frac{\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2}{\alpha_2^2 + \beta_2^2}. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\alpha_1\alpha_2 + \beta_1\beta_2 + i(\alpha_2\beta_1 - \alpha_1\beta_2)}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} = \frac{(\alpha_1 + i\beta_1)(\alpha_2 - i\beta_2)}{(\alpha_2 + i\beta_2)(\alpha_2 - i\beta_2)}.$$

Επομένως, ο λόγος υπολογίζεται εύκολα αρκεί να πολλαπλασιάσουμε αριθμητή και παρονομαστή με την ποσότητα $\alpha_2 - i\beta_2$, το μιγαδικό συζυγή του παρονομαστή.

Παράδειγμα

Ο λόγος των $z_1 = 3 - i2$, $z_2 = -1 + i4$ βρίσκεται ως εξής

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{3 - i2}{-1 + i4} = \frac{3 - i2}{-1 + i4} \times \frac{-1 - i4}{-1 - i4} = \frac{-11 - i10}{17} = -\frac{11}{17} - i\frac{10}{17}.$$

1.3 Μέτρο και φάση

Το μέτρο ή απόλυτη τιμή ενός μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + i\beta$ συμβολίζεται με $|z|$ και ορίζεται από την έκφραση

$$|z| \equiv \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}. \quad (1.5)$$

Η φάση του μιγαδικού $z = \alpha + i\beta$ συμβολίζεται με $\arg z$ και ορίζεται από την έκφραση

$$\tan(\arg z) = \frac{\beta}{\alpha} \Rightarrow \arg z \equiv \tan^{-1} \left(\frac{\beta}{\alpha} \right), \quad (1.6)$$

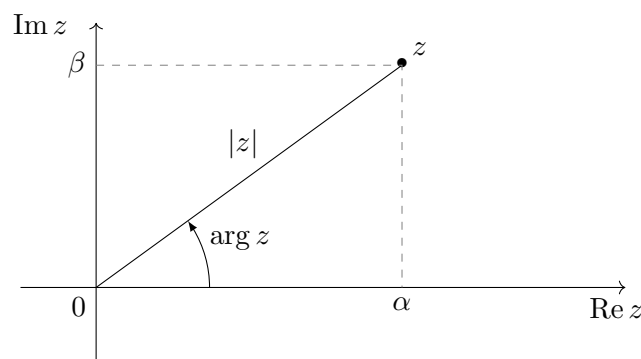
ή τις ισοδύναμες

$$\arg z \equiv \sin^{-1} \left(\frac{\beta}{|z|} \right) \equiv \cos^{-1} \left(\frac{\alpha}{|z|} \right).$$

Τα πρόσημα των α, β καθορίζουν ποια από τις δύο γωνίες στο διάστημα $(-\pi, \pi]$ που υπολογίζουν οι αντίστροφες τριγωνομετρικές συναρτήσεις είναι η κατάλληλη.

Η φάση του μιγαδικού $0 + i0$ είναι αυθαίρετη· μπορούμε να δεχτούμε ότι είναι 0.

Σε διάγραμμα Argand το μέτρο είναι η απόσταση από την αρχή, $(0 + i0)$, του σημείου που αντιπροσωπεύει το μιγαδικό αριθμό. Η φάση είναι η γωνία που σχηματίζει η ευθεία που περνά από το συγκεκριμένο σημείο και την αρχή, με τον άξονα των πραγματικών. Η φορά διαγραφής της γωνίας είναι αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού (Σχήμα 1.3). Όπως αντιλαμβανόμαστε από το σχήμα, η φάση δεν είναι μονότιμη· κάθε γωνία $\arg z + 2k\pi$ με ακέραιο k είναι επίσης φάση του αριθμού. Ως κύρια τιμή της φάσης, $P[\arg z]$, επιλέγουμε τη γωνία που βρίσκεται στο $(-\pi, \pi]$.



Σχήμα 1.3: Μέτρο και φάση του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + i\beta$

Παράδειγμα

Ο μιγαδικός αριθμός $z = -3.7 + i4.6$ έχει μέτρο $|z| = \sqrt{(-3.7)^2 + 4.6^2} \approx 5.903$ και φάση $\arg z = \tan^{-1}(-4.6/3.7) \approx 2.248 \text{ rad} \approx 128.8 \text{ deg}$. Η αναπαράσταση του

z στο διάγραμμα Argand βρίσκεται στο τεταρτημόριο με αρνητικά πραγματικά μέρη και θετικά φανταστικά. Έτσι, ως φάση επιλέχθηκε η γωνία 2.248 rad (και όχι η -0.89 rad) καθώς αυτή βρίσκεται μεταξύ $\pi/2$ και π .

1.4 Μιγαδικός συζυγής

Ο συζυγής ενός μιγαδικού αριθμού z συμβολίζεται με z^* και είναι ο μιγαδικός αριθμός που παράγεται από το z αν αντικαταστήσουμε κάθε εμφάνιση του i σε αυτόν με το $-i$. Έτσι, ο μιγαδικός συζυγής του $z = \alpha + i\beta$ είναι ο $z^* = \alpha - i\beta$. Παρατηρήστε ότι ο μιγαδικός συζυγής έχει μέτρο ίδιο με το z

$$|z^*| = \sqrt{\alpha^2 + (-\beta)^2} = |z| ,$$

και το γινόμενο του με το z είναι πραγματικός αριθμός:

$$zz^* = (\alpha + i\beta)(\alpha - i\beta) = \alpha^2 + \beta^2 + i(\alpha\beta - \beta\alpha) = \alpha^2 + \beta^2 .$$

Παρατηρήστε ακόμα ότι το γινόμενο των z, z^* είναι το τετράγωνο του μέτρου του z (ή του z^*):

$$zz^* = |z|^2 .$$

Παράδειγμα

Ο μιγαδικός συζυγής του $z = 1 + i(4 + i3)$ είναι ο $z^* = 1 - i(4 - i3) = -2 - i4$. Πράγματι, $zz^* = (1 + i(4 + i3))(-2 - i4) = (-2 + i4)(-2 - i4) = 20 = |z|^2$.

Από τον ορισμό του μιγαδικού συζυγούς προκύπτει ότι $(z^*)^* = z$: ο συζυγής του συζυγούς είναι ο αρχικός αριθμός. Επίσης, εύκολα αποδεικνύονται μεταξύ άλλων οι ακόλουθες σχέσεις:

$$z + z^* = 2 \operatorname{Re} z = 2\alpha , \quad (1.7\alpha')$$

$$z - z^* = 2i \operatorname{Im} z = 2i\beta . \quad (1.7\beta')$$

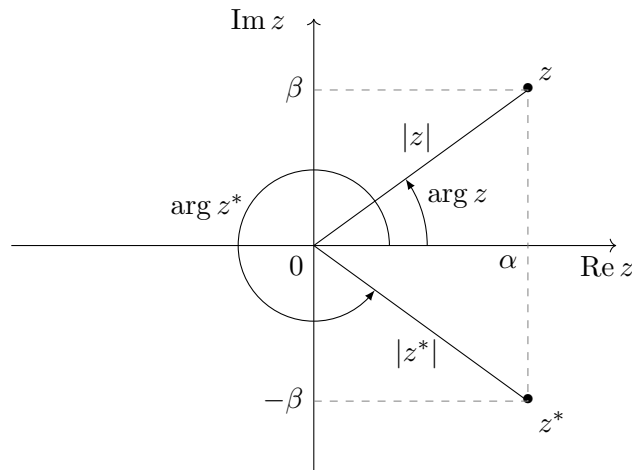
Εύκολα διαπιστώνουμε ακόμα ότι ο μιγαδικός συζυγής αθροίσματος ή διαφοράς ή γινομένου ή λόγου μιγαδικών είναι το άθροισμα ή η διαφορά ή το γινόμενο ή ο λόγος αντίστοιχα, των μιγαδικών συζυγών των δύο μερών της πράξης:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^* ,$$

$$(z_1 - z_2)^* = z_1^* - z_2^* ,$$

$$(z_1 z_2)^* = z_1^* z_2^* ,$$

$$(z_1/z_2)^* = z_1^*/z_2^* .$$



Σχήμα 1.4: Συζυγής του μιγαδικού αριθμού $z = \alpha + i\beta$ στο μιγαδικό επίπεδο

Ο συζυγής ενός μιγαδικού σε διάγραμμα Argand (Σχήμα 1.4), είναι ο συμμετρικός του σε κατοπτρισμό ως προς τον πραγματικό άξονα. Παρατηρήστε ότι οι αριθμοί z , z^* έχουν ίδιο μέτρο και φάσεις που έχουν άθροισμα 2π rad.

Τώρα που γνωρίζουμε τις έννοιες του μιγαδικού συζυγούς και του μέτρου, ας ξαναγράψουμε την εξίσωση (1.4) που υπολογίζει τον αντίστροφο του μιγαδικού αριθμού z :

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2}.$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν ισχύει $|z| = 1$, ο αντίστροφος του z είναι ο συζυγής του.

1.5 Τριγωνική ανισότητα

Η τριγωνική ανισότητα είναι η ακόλουθη

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|. \quad (1.8)$$

Εύκολα διαπιστώνουμε γεωμετρικά από το Σχήμα 1.2 το ένα μέρος της: το άθροισμα των μέτρων δύο μιγαδικών αριθμών είναι μεγαλύτερο ή το πολύ ίσο με το μέτρο του αθροίσματός τους.

Ας αποδείξουμε αλγεβρικά τα δύο μέρη της. Καταρχάς,

$$|z_1 + z_2| = \sqrt{(z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^*}.$$

Αλλά,

$$\begin{aligned} (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* &= (z_1 + z_2)(z_1^* + z_2^*) = z_1 z_1^* + z_1 z_2^* + z_2 z_1^* + z_2 z_2^* \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1 z_2^* + (z_1 z_2^*)^* \\ &= |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2 \operatorname{Re}(z_1 z_2^*). \end{aligned} \quad (1.9)$$

Στην προηγούμενη σχέση χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (1.7α').

Από τον ορισμό του μέτρου, (1.5), προκύπτει

$$\operatorname{Re} z \leq |\operatorname{Re} z| \leq |z| \quad (1.10)$$

και

$$\operatorname{Re} z \geq -|\operatorname{Re} z| \geq -|z| . \quad (1.11)$$

Επομένως, η εξίσωση (1.9) γίνεται

$$(z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \leq |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1 z_2^*| = |z_1|^2 + |z_2|^2 + 2|z_1||z_2| = (|z_1| + |z_2|)^2 ,$$

και

$$(z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \geq |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1 z_2^*| = |z_1|^2 + |z_2|^2 - 2|z_1||z_2| = (|z_1| - |z_2|)^2 .$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, καταλήγουμε στη σχέση

$$(|z_1| - |z_2|)^2 \leq (z_1 + z_2)(z_1 + z_2)^* \leq (|z_1| + |z_2|)^2 .$$

Αν πάρουμε τις τετραγωνικές ρίζες των μελών οδηγούμαστε στη σχέση που θέλουμε να αποδείξουμε.

1.6 Πολική αναπαράσταση

Αν προσδιορίσουμε για ένα μιγαδικό αριθμό το μέτρο και τη φάση του, τις πολικές συντεταγμένες δηλαδή, γνωρίζουμε ακριβώς τη θέση του σε διάγραμμα Argand. Η αναπαράσταση ενός μιγαδικού αριθμού με μέτρο και φάση, η *πολική αναπαράσταση*, διευκολύνει συχνά τους υπολογισμούς, σε σύγκριση με την αναπαράσταση με πραγματικό και φανταστικό μέρος. Η μαθηματική έκφραση βασίζεται στην εκθετική συνάρτηση, e^x , και στα αναπτύγματα Taylor των τριγωνομετρικών συναρτήσεων, $\cos x$, $\sin x$. Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση e^x ορίζεται από τη άπειρη σειρά

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} , \quad (1.12)$$

με πραγματικό x . Ο συγκεκριμένος ορισμός επεκτείνεται και για μιγαδικό όρισμα. Η ύψωση σε ακέραια δύναμη k ενός μιγαδικού z ορίζεται ως το γινόμενο k επαναλήψεων του z :

$$z^k = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{k \text{ φορές}} .$$

Στην περίπτωση που το όρισμα είναι φανταστικός αριθμός, $z = i\theta$, έχουμε

$$\begin{aligned} e^{i\theta} &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^k}{k!} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m}}{(2m)!} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!} + i \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!} . \end{aligned}$$

Όμως, το ανάπτυγμα Taylor για το $\cos \theta$ είναι

$$\cos \theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m}}{(2m)!}$$

ενώ για το $\sin \theta$

$$\sin \theta = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \theta^{2m+1}}{(2m+1)!} .$$

Επομένως,

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta . \quad (1.13)$$

Η έκφραση αυτή είναι ο *τύπος Euler*.

Αν r είναι το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού και θ η φάση του, εύκολα διαπιστώνουμε από το Σχήμα 1.3 ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του είναι τα $r \cos \theta$, $r \sin \theta$ αντίστοιχα. Από τη σχέση (1.13) έχουμε

$$re^{i\theta} = r \cos \theta + ir \sin \theta = \alpha + i\beta ,$$

και συνεπώς, ένας μιγαδικός αριθμός μπορεί να αναπαρασταθεί μαθηματικά στην πολική μορφή ως

$$z = re^{i\theta} . \quad (1.14)$$

Ας δούμε πώς γράφονται κάποιοι μιγαδικοί αριθμοί σε αυτή τη μορφή:

$$\begin{aligned} 1 &= 1 + i0 = \cos 0 + i \sin 0 = e^{i0} , \\ -1 &= -1 + i0 = \cos \pi + i \sin \pi = e^{i\pi} , \\ i &= 0 + i1 = \cos(\pi/2) + i \sin(\pi/2) = e^{i\pi/2} , \\ -i &= 0 - i1 = \cos(3\pi/2) + i \sin(3\pi/2) = e^{i3\pi/2} = e^{-i\pi/2} . \end{aligned}$$

Ο ορισμός για την ισότητα δύο μιγαδικών αριθμών μπορεί να επαναδιατυπωθεί όταν αυτοί εκφράζονται στην πολική τους μορφή: Δύο μιγαδικοί αριθμοί είναι *ίσοι* όταν έχουν ίδιο μέτρο και η φάση τους διαφέρει κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π (καθώς για ακέραιο k ισχύει $e^{i2k\pi} = 1$).

Όπως παρουσιάσαμε παραπάνω, το άθροισμα ή η διαφορά δύο μιγαδικών αριθμών υπολογίζονται εύκολα στην αναπαράσταση με πραγματικό και φανταστικό μέρος. Όμως, το γινόμενο ή ο λόγος τους είναι σχετικά πολύπλοκες εκφράσεις. Ας δούμε πόσο απλά μπορούμε να υπολογίσουμε το γινόμενο δύο μιγαδικών σε πολική μορφή:

$$z_1 z_2 = r_1 e^{i\theta_1} r_2 e^{i\theta_2} = r_1 r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_2)} .$$

Επομένως,

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2| , \quad (1.15\alpha')$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2 + 2k\pi . \quad (1.15\beta')$$

Το k είναι οποιοσδήποτε ακέραιος.

Αντίστοιχα, ο λόγος είναι

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1 e^{i\theta_1}}{r_2 e^{i\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)} .$$

Επομένως, $|z_1/z_2| = |z_1|/|z_2|$ και $\arg(z_1/z_2) = \arg z_1 - \arg z_2 + 2k\pi$.

Από τον ορισμό του μιγαδικού συζυγούς έχουμε για την πολική αναπαράστασή του

$$z = re^{i\theta} \Rightarrow z^* = re^{-i\theta} .$$

Αντίστοιχα, ο αντίστροφος του $z = re^{i\theta}$ με $r \neq 0$ είναι ο

$$z^{-1} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{1}{r} e^{-i\theta} .$$

1.6.1 Εφαρμογές

Ρίζες πολυωνύμων

Μια εφαρμογή της πολικής αναπαράστασης είναι η εύρεση ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων, δηλαδή των σημείων στο μιγαδικό επίπεδο που ικανοποιούν μια σχέση της μορφής

$$z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0 = 0 . \quad (1.16)$$

Σύμφωνα με το θεμελιώδες θεώρημα της άλγεβρας, ένα πολυώνυμο βαθμού n έχει n ρίζες, γενικά μιγαδικές. Ένας τρόπος για να τις εντοπίσουμε είναι να παραγοντοποιήσουμε το πολυώνυμο και να καταλήξουμε να το γράψουμε ως γινόμενο όρων της μορφής $z^m - c$, με $m \leq n$ και c κάποια σταθερά, πραγματική ή μιγαδική (αν οι συντελεστές a_i είναι μιγαδικοί). Κάθε τέτοιος όρος, όταν εξισωθεί με το 0, έχει ως λύσεις m ρίζες του αρχικού πολυωνύμου. Η εύρεση των (μιγαδικών) λύσεων της εξίσωσης

$$z^m - c = 0$$

είναι εύκολη όταν χρησιμοποιήσουμε την πολική τους αναπαράσταση. Έστω ότι $c = \rho e^{i\phi}$ και $z = re^{i\theta}$. Έχουμε

$$(re^{i\theta})^m = c \Rightarrow \begin{cases} r^m = \rho \\ m\theta = \phi + 2k\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{cases} .$$

Η τελευταία σχέση δίνει τις δυνατές τιμές της φάσης θ :

$$\theta_k = \frac{\phi + 2k\pi}{m}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Προσέξτε ότι από τις άπειρες τιμές του k , μονάχα οι $\{0, 1, 2, \dots, m-1\}$ παράγουν ξεχωριστές τιμές του θ . Οι υπόλοιπες ταυτίζονται με κάποια από αυτές (δηλαδή διαφέρουν κατά πολλαπλάσιο του 2π). Π.χ. για $k = m+3$ έχουμε

$$\theta_{m+3} = \frac{\phi + 2(m+3)\pi}{m} = \frac{\phi + 2 \cdot 3\pi}{m} + 2\pi = \theta_3 + 2\pi .$$

Επομένως, το μέτρο και οι φάσεις των m ριζών της $z^m = c$ είναι

$$\begin{aligned} r &= |c|^{1/m} \\ \theta_k &= \frac{\arg c + 2k\pi}{m}, \quad k = 0, \dots, m-1. \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Οι λύσεις της εξίσωσης

$$z^5 - 1 = 0,$$

οι πέμπτες ρίζες της μονάδας δηλαδή, έχουν μέτρο $r = |1|^{1/5} = 1$ και φάση $\theta_k = 2k\pi/5$, με $k = 0, 1, 2, 3, 4$. Είναι οι

$$\begin{aligned} z_0 &= e^{i0} = 1 \\ z_1 &= e^{i2\pi/5} = \cos(2\pi/5) + i \sin(2\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} + i \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}, \\ z_2 &= e^{i4\pi/5} = \cos(4\pi/5) + i \sin(4\pi/5) = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} + i \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \\ z_3 &= e^{i6\pi/5} = \cos(6\pi/5) + i \sin(6\pi/5) = \frac{-\sqrt{5}-1}{4} - i \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}, \\ z_4 &= e^{i8\pi/5} = \cos(8\pi/5) + i \sin(8\pi/5) = \frac{\sqrt{5}-1}{4} - i \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}. \end{aligned}$$

Η γραφική τους παράσταση σε διάγραμμα Argand δίνεται στο Σχήμα 1.5.

Παρατηρήστε ότι η εξίσωση $z^5 = 1$ μπορεί να γραφεί $1 = (z^{-1})^5$. Συνεπώς, αν z είναι μια ρίζα, και το z^{-1} είναι ρίζα, όπως μπορούμε να επιβεβαιώσουμε από τον αναλυτικό υπολογισμό τους.

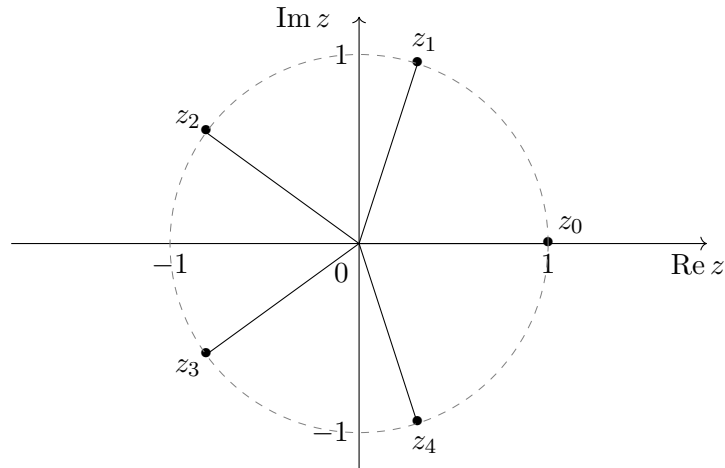
Εύκολα διαπιστώνουμε ότι αν ο μιγαδικός αριθμός z είναι ρίζα ενός πολωνύμου με πραγματικούς συντελεστές, τότε και το z^* είναι ρίζα του. Αν πάρουμε το μιγαδικό συζυγή των δύο μελών της εξίσωσης (1.16), έχουμε

$$\begin{aligned} (z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \dots + a_1z + a_0)^* &= 0^* \Rightarrow \\ (z^*)^n + a_{n-1}(z^*)^{n-1} + \dots + a_1z^* + a_0 &= 0, \end{aligned}$$

δηλαδή το z^* είναι ρίζα. Συνεπώς, οι μη πραγματικές ρίζες ενός πολωνύμου με πραγματικούς συντελεστές εμφανίζονται κατά ζεύγη, η κάθε μια με το συζυγή της, όπως μπορούμε να ελέγξουμε στο προηγούμενο παράδειγμα.

Παράγωγοι/Ολοκληρώματα τριγωνομετρικών συναρτήσεων

Άλλη εφαρμογή του τύπου Euler και της πολικής αναπαράστασης είναι η διευκόλυνση που μας προσφέρει στον υπολογισμό παραγώγων και ολοκληρωμάτων



Σχήμα 1.5: Αναπαράσταση των μιγαδικών αριθμών που αποτελούν τις πέμπτες ρίζες της μονάδας σε διάγραμμα Argand

τριγωνομετρικών συναρτήσεων. Έτσι, έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο ως προς x της

$$f(x) = e^{3x} \cos 4x .$$

Ορίζουμε τη μιγαδική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής

$$z(x) = e^{3x}(\cos 4x + i \sin 4x) = e^{3x} e^{i4x} = e^{x(3+i4)} ,$$

το πραγματικό μέρος της οποίας είναι η $f(x)$. Για την παράγωγο της $z(x)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dz}{dx} &= (3 + i4)e^{x(3+i4)} = (3 + i4)z(x) = (3 + i4)e^{3x}(\cos 4x + i \sin 4x) \\ &= e^{3x}(3 \cos 4x - 4 \sin 4x + i(3 \sin 4x + 4 \cos 4x)) . \end{aligned}$$

Το πραγματικό μέρος της παραγώγου της $z(x)$ είναι η παράγωγος της $f(x)$:

$$f'(x) = (3 \cos 4x - 4 \sin 4x)e^{3x} .$$

Αντίστοιχα, το ολοκλήρωμα της $f(x)$ είναι το πραγματικό μέρος του ολοκληρώματος της $z(x)$:

$$\int f(x) dx = \operatorname{Re} \left[\int z(x) dx \right] .$$

Αλλά

$$\begin{aligned} \int z(x) dx &= \int e^{x(3+i4)} dx = \frac{e^{x(3+i4)}}{3 + i4} + c = \frac{(3 - i4)e^{x(3+i4)}}{25} + c \\ &= \frac{e^{3x}}{25}(3 - i4)e^{i4x} + c = \frac{e^{3x}}{25}(3 - i4)(\cos 4x + i \sin 4x) + c \\ &= \frac{e^{3x}}{25}(3 \cos 4x + 4 \sin 4x + i(3 \sin 4x - 4 \cos 4x)) + c . \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int f(x) dx = \frac{e^{3x}}{25} (3 \cos 4x + 4 \sin 4x) + \text{Re } c .$$

1.7 Θεώρημα de Moivre

Γνωρίζουμε ότι $e^{in\theta} = (e^{i\theta})^n$ για οποιοδήποτε ακέραιο n . Η εφαρμογή του τύπου Euler (1.13) στα δύο μέλη της σχέσης καταλήγει στην έκφραση

$$\cos n\theta + i \sin n\theta = (\cos \theta + i \sin \theta)^n . \quad (1.17)$$

Η εξίσωση αποτελεί το *θεώρημα de Moivre*.

1.7.1 Τριγωνομετρικές ταυτότητες

Μια εφαρμογή του θεωρήματος de Moivre είναι η άμεση παραγωγή τριγωνομετρικών ταυτοτήτων που συνδέουν δυνάμεις τριγωνομετρικών συναρτήσεων (π.χ. $\cos^k \theta$, $\sin^k \theta$) με τριγωνομετρικές συναρτήσεις πολλαπλάσιων τόξων ($\cos k\theta$, $\sin k\theta$). Ας εφαρμόσουμε το θεώρημα για $n = 3$:

$$\begin{aligned} \cos 3\theta + i \sin 3\theta &= (\cos \theta + i \sin \theta)^3 \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta \sin^2 \theta) + i(3 \cos^2 \theta \sin \theta - \sin^3 \theta) \\ &= (\cos^3 \theta - 3 \cos \theta (1 - \cos^2 \theta)) + i(3 \sin \theta (1 - \sin^2 \theta) - \sin^3 \theta) \\ &= (4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta) + i(3 \sin \theta - 4 \sin^3 \theta) . \end{aligned}$$

Η εξίσωση των πραγματικών και των φανταστικών μερών για τα δύο μέλη δίνει

$$\begin{aligned} \cos 3\theta &= 4 \cos^3 \theta - 3 \cos \theta , \\ \sin 3\theta &= -4 \sin^3 \theta + 3 \sin \theta . \end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύονται με εφαρμογή του τύπου (1.13) οι εκφράσεις

$$\begin{aligned} e^{in\theta} + e^{-in\theta} &= 2 \cos n\theta , \\ e^{in\theta} - e^{-in\theta} &= i 2 \sin n\theta , \\ \frac{e^{in\theta} - e^{-in\theta}}{e^{in\theta} + e^{-in\theta}} &= i \tan n\theta . \end{aligned}$$

Οι παραπάνω σχέσεις, γραμμένες για $n = 1$, μας δίνουν εκφράσεις με μιγαδικούς αριθμούς (αλλά πραγματικό αποτέλεσμα εφόσον το θ είναι πραγματικό) για το ημίτονο, το συνημίτονο και την εφαπτομένη:

$$\sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} , \quad (1.18\alpha')$$

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} , \quad (1.18\beta')$$

$$\tan \theta = -i \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{e^{i\theta} + e^{-i\theta}} . \quad (1.18\gamma')$$

Και οι σχέσεις αυτές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την παραγωγή (ή επαλήθευση) τριγωνομετρικών σχέσεων. Π.χ.

$$\begin{aligned}\cos^4 \theta &= \frac{1}{2^4} (e^{i\theta} + e^{-i\theta})^4 = \frac{1}{16} (e^{i4\theta} + 4e^{i2\theta} + 6 + 4e^{-i2\theta} + e^{-i4\theta}) \\ &= \frac{1}{16} (2 \cos 4\theta + 8 \cos 2\theta + 6) = \frac{1}{8} (\cos 4\theta + 4 \cos 2\theta + 3) .\end{aligned}$$

Παράδειγμα

Ας δείξουμε ότι ισχύει

$$\tan 3\theta = \frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} .$$

Για διευκόλυνση των πράξεων θέτουμε $z = e^{i\theta}$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\tan^3 \theta &= \left(-i \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} \right)^3 = i \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right)^3 . \\ \tan^2 \theta &= \left(-i \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} \right)^2 = - \left(\frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} \right)^2 . \\ \tan \theta &= -i \frac{z - \frac{1}{z}}{z + \frac{1}{z}} = -i \frac{z^2 - 1}{z^2 + 1} , \\ \tan 3\theta &= -i \frac{z^3 - z^{-3}}{z^3 + z^{-3}} = -i \frac{z^6 - 1}{z^6 + 1} .\end{aligned}$$

Ξεκινώντας από το δεξί μέλος της σχέσης που θέλουμε να αποδείξουμε, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{3 \tan \theta - \tan^3 \theta}{1 - 3 \tan^2 \theta} &= \frac{-3i \frac{z^2-1}{z^2+1} - i \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^3}{1 + 3 \left(\frac{z^2-1}{z^2+1} \right)^2} = -i \frac{z^2-1}{z^2+1} \times \frac{3(z^2+1)^2 + (z^2-1)^2}{(z^2+1)^2 + 3(z^2-1)^2} \\ &= -i \frac{z^2-1}{z^2+1} \times \frac{z^4 + z^2 + 1}{z^4 - z^2 + 1} = -i \frac{z^6-1}{z^6+1} \\ &= \tan 3\theta .\end{aligned}$$

1.8 Μιγαδικές επεκτάσεις συναρτήσεων

Αναφέραμε ότι μπορούμε εύκολα να ορίσουμε το εκθετικό για μιγαδικό όρισμα από τη σειρά Taylor. Με τη βοήθειά του, μπορούμε να επεκτείνουμε τους ορισμούς των τριγωνομετρικών συναρτήσεων στις εξισώσεις (1.18) και για μιγαδικό όρισμα.

Μέχρι τώρα γνωρίζουμε συναρτήσεις που δέχονται ένα ή περισσότερους πραγματικούς αριθμούς ως ορίσματα και έχουν πραγματικό αποτέλεσμα. Οι πιο πολλές

επιστρέφουν μία τιμή που παράγεται από μία ή περισσότερες για τα ορίσματα· ένα παράδειγμα είναι η συνάρτηση του ημιτόνου, $\sin x$. Ξέρουμε ότι για $x = \theta$, $x = \pi - \theta$, $x = 2\pi + \theta$, $x = -\pi - \theta$ κλπ. το $\sin x$ έχει την ίδια τιμή, $\sin \theta$. Τέτοιες συναρτήσεις, με ένα αποτέλεσμα για κάθε τιμή των ορισμάτων τους, λέγονται *μονότιμες*. Μαθηματικά, αυτός ακριβώς είναι ο ορισμός της έννοιας «συνάρτηση».

Έχουμε συναντήσει όμως και «συναρτήσεις» που δεν είναι μονότιμες. Ένα απλό παράδειγμα είναι οι ρίζες· η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x έχει δύο δυνατές τιμές: $\pm\sqrt{x}$. Άλλο παράδειγμα είναι το τόξο ημιτόνου (αντίστροφο ημίτονο): το $\sin^{-1} x$ για $x \in [-1, 1]$ έχει άπειρες τιμές: αν $\sin \theta = x$ τότε

$$\sin^{-1} x = \begin{cases} \theta + 2k\pi, \\ \pi - \theta + 2k\pi, \end{cases} \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Τέτοιες συναρτήσεις, με πολλές τιμές για συγκεκριμένο σύνολο ορισμάτων, λέγονται *πλειότιμες*. Οι διάφορες δυνατές τιμές ονομάζονται και κλάδοι της συνάρτησης. Μπορούμε να επιλέξουμε μία από τις δυνατές τιμές, εφαρμόζοντας κάποιο κριτήριο. Η τιμή αυτή αποτελεί την *κύρια τιμή* (principal value) της συνάρτησης.

Στη συνέχεια θα παρουσιάσουμε την επέκταση στους μιγαδικούς αριθμούς κάποιων βασικών συναρτήσεων που είναι πλειότιμες. Κάποιες από αυτές, ενώ είναι μονότιμες για πραγματικούς αριθμούς, γίνονται πλειότιμες στους μιγαδικούς.

1.8.1 Λογάριθμος

Με τη βοήθεια της εκθετικής συνάρτησης μπορούμε να ορίσουμε το λογάριθμο ενός μιγαδικού αριθμού. Ως λογάριθμος του z ορίζεται ο μιγαδικός αριθμός w που ικανοποιεί τη σχέση

$$z = e^w.$$

Ας γράψουμε το z σε πολική μορφή, $re^{i\theta}$, και ας εκφράσουμε το w με πραγματικό και φανταστικό μέρος, $x + iy$, τα οποία πρέπει να προσδιορίσουμε:

$$re^{i\theta} = e^{x+iy} = e^x e^{iy}.$$

Ξέρουμε ότι για να είναι ίσοι δυο μιγαδικοί αριθμοί έχουν ίδια μέτρα και φάσεις που διαφέρουν κατά ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π . Συνεπώς,

$$r = e^x \Rightarrow x = \ln r$$

και

$$\theta = y - 2k\pi \Rightarrow y = \theta + 2k\pi,$$

με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ο λογάριθμος του z γίνεται

$$w = \ln r + i(\theta + 2k\pi).$$

Παρατηρούμε ότι ο λογάριθμος είναι μια πλειότιμη συνάρτηση. Από τις άπειρες τιμές του, κατά σύμβαση, κρατάμε ως κύρια αυτή που έχει φανταστικό μέρος στο

διάστημα $(-\pi, \pi]$. Επομένως, η συνάρτηση του λογάριθμου με μιγαδικό όρισμα, $\ln z$, είναι η

$$\ln z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.19)$$

Η κύρια τιμή του είναι αυτή που έχει φανταστικό μέρος τέτοιο ώστε $-\pi < \arg z + 2k\pi \leq \pi$.

Παράδειγμα

Ο λογάριθμος του $-i$ είναι

$$\ln(-i) = \ln \left(\cos \left(\frac{3\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{3\pi}{2} \right) \right) = \ln(1e^{3i\pi/2}) = \ln 1 + i(3\pi/2 + 2m\pi).$$

Η κύρια τιμή του είναι $P[\ln(-i)] = -i\pi/2$.

Παρατηρήστε ότι με τον ορισμό (1.19) οι αρνητικοί αριθμοί έχουν (μιγαδικό) λογάριθμο:

$$\ln(-|m|) = \ln(|m|e^{i\pi}) = \ln|m| + i(\pi + 2k\pi), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Μόνο το $\ln 0$ είναι απροσδιόριστο.

Μια από τις ιδιότητες του πραγματικού λογάριθμου είναι ότι

$$\ln(x_1 x_2) = \ln x_1 + \ln x_2.$$

Ας ελέγξουμε αν ισχύει και για το μιγαδικό λογάριθμο. Καθώς

$$\ln(-1) = \ln 1 + i \arg(-1) = \pi i,$$

έχουμε $\ln(-1) + \ln(-1) = 2\pi i$. Όμως, $\ln[(-1)(-1)] = \ln 1 = 0$. Επομένως, ο λογάριθμος μιγαδικού γινομένου δεν είναι το άθροισμα των λογαρίθμων των όρων του γινομένου.

Ας εξετάσουμε τι ακριβώς ισχύει. Με εφαρμογή των εξισώσεων (1.15) έχουμε

$$\begin{aligned} \ln z_1 &= \ln |z_1| + i(\arg z_1 + 2m_1\pi), \\ \ln z_2 &= \ln |z_2| + i(\arg z_2 + 2m_2\pi), \\ \ln(z_1 z_2) &= \ln |z_1 z_2| + i(\arg(z_1 z_2) + 2m\pi) \\ &= \ln |z_1| + \ln |z_2| + i(\arg z_1 + \arg z_2 + 2m\pi), \end{aligned}$$

με οποιουσδήποτε ακέραιους m_1, m_2, m . Επομένως

$$\ln(z_1 z_2) = \ln z_1 + \ln z_2 + i2k\pi, \quad k \equiv m - m_1 - m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Το k δεν είναι πάντα 0 ώστε να ισχύει η ίδια σχέση όπως στους πραγματικούς λογάριθμους. Επακόλουθο των παραπάνω είναι ότι γενικά

$$\ln z^w \neq w \ln z.$$

1.8.2 Ύψωση σε δύναμη

Η ύψωση σε ακέραια δύναμη k ενός μιγαδικού z ορίζεται ως το γινόμενο k επαναλήψεων του z :

$$z^k = \underbrace{z \times z \times \cdots \times z}_{k \text{ φορές}} .$$

Γενικότερα, η ύψωση του z σε πραγματική ρητή δύναμη, p/q , έχει ως αποτέλεσμα ένα μιγαδικό s που ικανοποιεί τη σχέση

$$s = z^{p/q} \Rightarrow s^q = z^p .$$

Εξ ορισμού, η ύψωση ενός μη μηδενικού μιγαδικού αριθμού σε δύναμη 0 έχει αποτέλεσμα 1.

Με τη βοήθεια του λογάριθμου και του εκθετικού μιγαδικών αριθμών, μπορούμε να ορίσουμε την ύψωση ενός μιγαδικού αριθμού z σε μιγαδική δύναμη w :

$$z^w \equiv (e^{\ln z})^w = e^{w \ln z} . \quad (1.20)$$

Καθώς το $\ln z$ είναι πλειότιμη συνάρτηση, το ίδιο είναι και το z^w .

Παράδειγμα

Το i^{-2i} ορίζεται ως εξής:

$$i^{-2i} = e^{-2i \ln i} .$$

Αρχικά υπολογίζουμε το λογάριθμο του i

$$\ln i = \ln |i| + i(\arg i + 2k\pi) = \ln 1 + i\left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right) = i\frac{4k+1}{2}\pi , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Κατόπιν,

$$i^{-2i} = e^{-2i \ln i} = e^{-2i \times i \frac{4k+1}{2}\pi} = e^{(4k+1)\pi} , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots .$$

Από τον ορισμό (1.20) προκύπτουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned} z^{-w} &= \frac{1}{z^w} , \\ z^{p+q} &= z^p z^q , \\ z^{p-q} &= \frac{z^p}{z^q} , \\ (z_1 z_2)^w &= z_1^w z_2^w e^{i2wk\pi} , \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση σημαίνει μεταξύ άλλων ότι γενικά ισχύει

$$\sqrt{z_1 z_2} \neq \sqrt{z_1} \sqrt{z_2} .$$

Παρατηρήστε ότι τα δύο μέλη διαφέρουν κατά $e^{ik\pi}$ με k κάποιο ακέραιο. Έτσι π.χ.

$$\begin{aligned}\sqrt{1 \times 1} &= 1 \\ \sqrt{1}\sqrt{1} &= 1 \times 1 = 1.\end{aligned}$$

Επομένως σε αυτό το παράδειγμα το k είναι άρτιο. Αντίθετα,

$$\begin{aligned}\sqrt{(-1) \times (-1)} &= \sqrt{1} = 1 \\ \sqrt{-1}\sqrt{-1} &= i \times i = -1.\end{aligned}$$

Άρα εδώ το k είναι περιττό.

Άλλη μια σχέση που διαφέρει γενικά από αυτή που θα περιμέναμε για πραγματικούς αριθμούς είναι η

$$(z^{w_1})^{w_2} \neq z^{w_1 w_2}.$$

Π.χ.

$$\begin{aligned}(i^2)^i &= (-1)^i = e^{i \ln(-1)} = e^{-(2k+1)\pi}, \\ i^{2i} &= e^{2i \ln i} = e^{-(4k+1)\pi},\end{aligned}$$

με $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

1.8.3 Υπερβολικές συναρτήσεις

Οι υπερβολικές συναρτήσεις είναι ανάλογες των συνήθων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, και όπως θα δούμε, σχετίζονται με αυτές. Οι βασικές υπερβολικές συναρτήσεις είναι το υπερβολικό ημίτονο, $\sinh x$, και το υπερβολικό συνημίτονο, $\cosh x$. Από αυτές παράγονται η υπερβολική εφαπτομένη, $\tanh x \equiv \sinh x / \cosh x$, η υπερβολική συνεφαπτομένη, $\coth x = \cosh x / \sinh x$, η υπερβολική τέμνουσα, $\operatorname{sech} x \equiv 1 / \cosh x$, και η υπερβολική συντέμνουσα, $\operatorname{csch} x \equiv 1 / \sinh x$.

Το υπερβολικό ημίτονο ορίζεται από τη σχέση

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}. \quad (1.21)$$

Το υπερβολικό συνημίτονο είναι το

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}. \quad (1.22)$$

Από τους παραπάνω ορισμούς μπορούμε να παραγάγουμε τύπους για τις υπόλοιπες υπερβολικές συναρτήσεις. Έτσι, π.χ., η υπερβολική εφαπτομένη είναι η

$$\tanh x \equiv \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}. \quad (1.23)$$

Παρατηρήστε ότι το υπερβολικό συνημίτονο είναι άρτια συνάρτηση (συμμετρική ως προς τον άξονα των y) ενώ το $\sinh x$ και η $\tanh x$ είναι περιττές.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι ισχύει η ακόλουθη σχέση:

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 .$$

Η ταυτότητα αυτή μοιάζει πολύ με την αντίστοιχη για τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις, $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$, και μπορεί να ερμηνευτεί ως εξής: Σε ένα καρτεσιανό επίπεδο, τα σημεία με $x = \cosh \theta$ και $y = \sinh \theta$, για οποιοδήποτε θ , βρίσκονται στην καμπύλη $x^2 - y^2 = 1$, η οποία είναι υπερβολή (με κέντρο την αρχή των αξόνων και ημιάξονες ίσους με 1). Από αυτή την ιδιότητα προέρχεται το όνομα των συναρτήσεων.

Οι υπερβολικές συναρτήσεις ορίζονται καταρχάς για πραγματικό όρισμα, μπορούν όμως να επεκταθούν και για μιγαδικό, αν χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική εκθετική συνάρτηση στον ορισμό τους. Οι μιγαδικοί ορισμοί τους σχετίζονται με αυτούς των αντίστοιχων τριγωνομετρικών συναρτήσεων· αν λάβουμε υπόψη τις εξισώσεις (1.18) προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\sin \theta &= -i \sinh i\theta , \\ \cos \theta &= \cosh i\theta , \\ \tan \theta &= -i \tanh i\theta , \\ \sinh \theta &= -i \sin i\theta \\ \cosh \theta &= \cos i\theta , \\ \tanh \theta &= -i \tan i\theta .\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι εμφανίζεται μεγάλη ομοιότητα μεταξύ των τριγωνομετρικών και υπερβολικών συναρτήσεων. Αυτή παρουσιάζεται και στις ταυτότητες που ικανοποιούν οι υπερβολικές συναρτήσεις, αλλά και σε άλλες ιδιότητές τους. Έτσι, με αντικατάσταση των ορισμών, προκύπτουν μεταξύ άλλων οι ακόλουθες ιδιότητες:

$$\begin{aligned}\cosh^2 x &= \frac{1}{1 - \tanh^2 x} , \\ \sinh^2 x &= \frac{\tanh^2 x}{1 - \tanh^2 x} , \\ \cosh 2x &= \cosh^2 x + \sinh^2 x , \\ \sinh 2x &= 2 \sinh x \cosh x .\end{aligned}$$

Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι για τις παραγώγους των υπερβολικών συναρτήσεων έχουμε

$$\begin{aligned}(\cosh x)' &= \sinh x , \\ (\sinh x)' &= \cosh x , \\ (\tanh x)' &= \frac{1}{\cosh^2 x} .\end{aligned}$$

Η ομοιότητα τριγωνομετρικών ταυτοτήτων και ταυτοτήτων με υπερβολικές συναρτήσεις συνοψίζεται στον κανόνα του Osborn: σύμφωνα με αυτόν, μια τριγωνομετρική σχέση μπορεί να μετατραπεί σε σχέση των υπερβολικών συναρτήσεων αν

αντικαταστήσουμε τις τριγωνομετρικές συναρτήσεις με τις αντίστοιχες υπερβολικές και κατόπιν, αλλάξουμε το πρόσημο κάθε όρου που περιλαμβάνει το γινόμενο δύο υπερβολικών ημιτόνων.

Αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις

Κατ' αναλογία των αντίστροφων τριγωνομετρικών συναρτήσεων, ορίζονται και για τις υπερβολικές συναρτήσεις οι αντίστροφές τους. Με εφαρμογή του ορισμού των υπερβολικών συναρτήσεων μπορούμε να εκφράσουμε τις αντίστροφες με κλειστούς τύπους.

Το αντίστροφο υπερβολικό ημίτονο συμβολίζεται με $\sinh^{-1} x$ ή με $\operatorname{arcsinh} x$. Ας βρούμε τη μαθηματική του έκφραση:

$$y = \sinh^{-1} x \Rightarrow x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2} \Rightarrow e^{2y} - 2xe^y - 1 = 0$$

Η δευτεροβάθμια εξίσωση με άγνωστο το e^y έχει λύση

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1} \Rightarrow y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}).$$

Στη λύση κρατήσαμε μόνο το πρόσημο + καθώς πρέπει $e^y > 0$. Συνεπώς

$$\sinh^{-1} x \equiv \operatorname{arcsinh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}). \quad (1.24)$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \cosh^{-1} x &\equiv \operatorname{arccosh} x = \ln(x + \sqrt{x^2 - 1}), \\ \tanh^{-1} x &\equiv \operatorname{arctanh} x = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{1+x}{1-x} \right). \end{aligned}$$

Οι αντίστροφες υπερβολικές συναρτήσεις υπολογίστηκαν για πραγματικό όρισμα, μπορούν όμως να επεκταθούν για μιγαδικό.

1.9 Ασκήσεις

- Έστω $z_1 = 4 + 3i$ και $z_2 = 1 - 2i$. Αναπαραστήστε σε διάγραμμα Argand τους μιγαδικούς (α') $z_1 + z_2$, (β') $z_1 - z_2$, (γ') $z_1 z_2$, (δ') $z_1^* z_2$, (ε') z_1/z_2 , μαζί με τους συζυγείς τους.
- Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών

$$z_1 = \frac{5}{(1+2i)^2} + i \frac{2-i}{3-i},$$

και

$$z_2 = (3 - i2\sqrt{2}) \frac{1 - i\sqrt{2}}{1 + i\sqrt{2}} - 3 + \frac{4}{i\sqrt{2}}.$$

Σχεδιάστε τους πρόχειρα στο μιγαδικό επίπεδο (διάγραμμα Argand) μαζί με τους συζυγείς τους.

3. Υπολογίστε το μέτρο και την κύρια τιμή της φάσης των μιγαδικών $3+2i$, $-1-i$, $i/2$, $(i-4)/(2i-3)$. Παραστήστε τους γραφικά σε διάγραμμα Argand.
4. Υπολογίστε το μέτρο και την κύρια τιμή της φάσης των μιγαδικών $5e^{-i5\pi/4}$, $2e^\pi$, $-3e^{-i\pi/2}$. Παραστήστε τους γραφικά σε διάγραμμα Argand.
5. Υπολογίστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών $2e^{i\pi/2}$, $-3e^{-i\pi/2}$, $1-2e^{i\pi/4}$, $(3+i2)e^{2-i3}$, $(3+2i)^3$, $\sqrt{2-i}$, $(\cos(\pi/3)-i\sin(\pi/3))^7$.
6. Υπολογίστε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των αριθμών e^{iz}/z και e^{z^2}/z^* , όπου $z = x+iy$, συναρτήσει των x και y .
7. Έστω $z_1 = 3-2i$ και $z_2 = 5+3i$. Αναπαράστήστε σε διάγραμμα Argand τους μιγαδικούς (α') $\ln(z_1 z_2)$, (β') $\ln(z_1) \ln(z_2)$, (γ') $z_1^{z_2}$, (δ') z_2^3 , μαζί με τους συζυγείς τους.
8. Βρείτε το μιγαδικό συζυγή του $w = (x+5i)^{3y+2xi}$ με x, y πραγματικούς, συναρτήσει των x, y . Το ίδιο για το $w = (z+i)^{3z}$ με $z = x+iy$.
9. Βρείτε το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των e^z , e^{z^2} και 2^z , με $z = x+iy$.
10. Αν $z = \alpha+i\beta$, υπολογίστε τις τιμές (α') $\operatorname{Re}(e^{iz})$, (β') $\arg\{z/(z-1)\}$, (γ') $\cosh 2z$.
11. Υπολογίστε τις τιμές (α') $\sqrt{-1+i3}$, (β') $|e^{\sqrt{i}}|$, (γ') e^{i^3} , (δ') i^i , (ε') $\ln((\sqrt{3}+i)^3)$, (στ') $\operatorname{Im}(2^{i+3})$, (ζ') $\ln(-1)$, (η') $\ln(i)$, (θ') $\ln(1+2i)$.
12. Δείξτε ότι δεν υπάρχει μιγαδικός αριθμός z που να ικανοποιεί την εξίσωση $|z| - z = i$.
13. Βρείτε τα σημεία z στο διάγραμμα Argand που ικανοποιούν τις σχέσεις
 - $\operatorname{Im} z^2 = 0$,
 - $\operatorname{Re} z^2 = \operatorname{Im} z^2$,
 - $\operatorname{Im} z^2 = -iz^2$,
 - $z^2 z^* = z$,
 - $|z+3i| = 3|z|$,
 - $\arg(z/(z-1)) = \pi/2$,
 - $(z+1)/(z-1) = e^{i\pi/3}$,
 - $\operatorname{Re} \left[\ln \left(\frac{z-2i}{z+2i} \right) \right] = 3$.

14. Χρησιμοποιώντας τη μιγαδική αναπαράσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων δείξτε τις ακόλουθες ταυτότητες:

$$\begin{aligned} 2 \sin x \sin y &= \cos(x - y) - \cos(x + y) , \\ 2 \cos x \cos y &= \cos(x - y) + \cos(x + y) , \\ 2 \sin x \cos y &= \sin(x - y) + \sin(x + y) , \\ \tan(\alpha + \beta) &= \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} , \\ \tan\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) &= \frac{\sin \alpha + \sin \beta}{\cos \alpha + \cos \beta} , \\ \tan \theta &= \frac{\sin 2\theta}{1 + \cos 2\theta} . \end{aligned}$$

15. Δείξτε ότι

$$\sin 5x = 5 \sin x - 20 \sin^3 x + 16 \sin^5 x .$$

16. Χρησιμοποιήστε τον τύπο Euler στα δύο μέλη της $e^{i(\alpha+\beta)} = e^{i\alpha}e^{i\beta}$ ώστε να δείξετε ότι

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta , \\ \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta . \end{aligned}$$

17. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα de Moivre με $n = 4$ για να αποδείξετε ότι

$$\cos 4\theta = 1 - 8 \cos^2 \theta + 8 \cos^4 \theta .$$

18. Χρησιμοποιήστε το θεώρημα de Moivre για να αποδείξετε ότι

$$\tan 5\theta(5 \tan^4 \theta - 10 \tan^2 \theta + 1) = \tan \theta(\tan^4 \theta - 10 \tan^2 \theta + 5) .$$

19. Υπολογίστε το ημίτονο του $z = \pi/2 - i$. Τι παρατηρείτε;

20. Βρείτε και παραστήστε γραφικά τις λύσεις των εξισώσεων (α') $z^2 + 1 + i = 0$, (β') $z^4 = i$, (γ') $z^4 = -4$, (δ') $z^3 + 8 = 0$.

21. Έστω ότι οι διακριτές λύσεις της εξίσωσης $z^n = 1$ είναι οι z_k , $k = 0, 1, \dots, n-1$. Δείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{n-1} z_k = 0 , \quad \prod_{k=0}^{n-1} z_k = (-1)^{n+1} .$$

22. Βρείτε τον πραγματικό αριθμό α ώστε το $z = -i$ να είναι ρίζα του πολυωνύμου $p(z) = z^3 - z^2 + z + 1 + \alpha$. Για τη συγκεκριμένη τιμή του α βρείτε τις υπόλοιπες ρίζες του $p(z)$.

Κεφάλαιο 2

Μιγαδική ανάλυση

2.1 Εισαγωγή

Έχουμε συναντήσει στο προηγούμενο κεφάλαιο κάποιες μιγαδικές συναρτήσεις ως επέκταση πραγματικών συναρτήσεων. Ας δώσουμε περιγραφικά ένα γενικό ορισμό: η μιγαδική συνάρτηση f μίας μιγαδικής μεταβλητής z είναι μια απεικόνιση/αντιστοίχιση ενός μιγαδικού αριθμού, του z , σε ένα ή περισσότερους μιγαδικούς αριθμούς, τις εικόνες του z . Οι τιμές αυτές συμβολίζονται με $f(z)$. Το σύνολο των δυνατών τιμών του z αποτελεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης και είναι μια περιοχή στο μιγαδικό επίπεδο.

Στη μαθηματική έκφραση που αντιστοιχίζει το z στις εικόνες του, το όρισμα μπορεί να εμφανίζεται με το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του ή εναλλακτικά, με το μέτρο και τη φάση του. Καθώς η τιμή $f(z)$ είναι μιγαδικός αριθμός (ένας ή περισσότεροι), μπορεί να αναπαρασταθεί με το πραγματικό και φανταστικό μέρος της ή με το μέτρο και τη φάση της. Οι ποσότητες αυτές θα είναι πραγματικές συναρτήσεις του z . Έτσι, αν $z = x + iy$, η $f(z)$ μπορεί να γραφεί ως $f(x, y)$ και να αναλυθεί στη μορφή

$$f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y) .$$

Στο παρόν κεφάλαιο θα συμβολίζουμε με u, v το πραγματικό και το φανταστικό μέρος, αντίστοιχα, της f . Επίσης, θα αναφερθούμε κυρίως σε μονότιμες συναρτήσεις, σε αυτές δηλαδή που απεικονίζουν ένα z σε μία τιμή.

Η γραφική παράσταση μιας μιγαδικής συνάρτησης μιγαδικής μεταβλητής είναι ένα σύνολο σημείων σε χώρο τεσσάρων διαστάσεων: χρειάζονται δύο πραγματικές ποσότητες για την περιγραφή του ορίσματος (πραγματικό/φανταστικό μέρος ή μέτρο/φάση) και άλλες δύο για την τιμή της συνάρτησης. Δεν μπορεί επομένως να γίνει σε ένα επίπεδο όπως η γραφική παράσταση πραγματικής συνάρτησης μίας πραγματικής μεταβλητής. Για τη γεωμετρική απεικόνιση της μιγαδικής συνάρτησης

$f(z)$ χρησιμοποιούμε δύο διαγράμματα Argand: ένα για την απεικόνιση του πεδίου ορισμού (τις δυνατές τιμές του z) και ένα για την απεικόνιση του πεδίου τιμών (τις τιμές του $f(z)$).

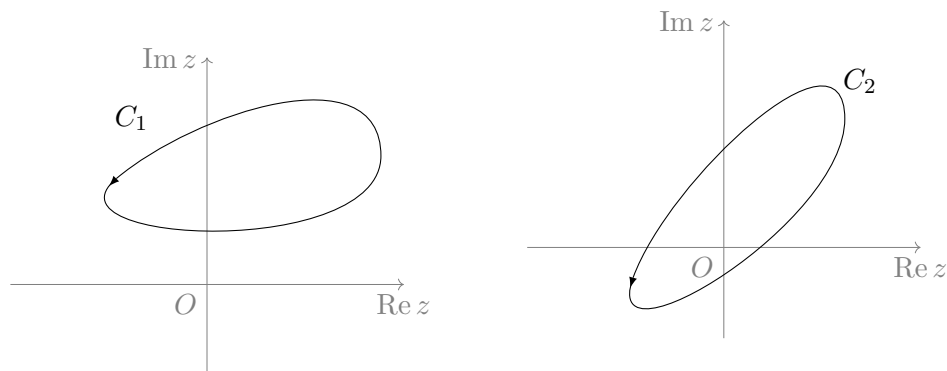
2.1.1 Πλειότιμη συνάρτηση

Μια συνάρτηση λέγεται *μονότιμη* αν η τιμή $f(z)$ είναι μοναδική για κάθε z στο πεδίο ορισμού. Αντίθετα, αν κάποιο z απεικονίζεται σε περισσότερες από μία τιμές, η συνάρτηση λέγεται *πλειότιμη*. Οι διαφορετικές τιμές σε περίπτωση πλειότιμης απεικόνισης λέγονται *κλάδοι* της συνάρτησης. Μία από αυτές τις τιμές μπορεί να επιλεγεί με κάποιο κριτήριο και να αποτελεί την *κύρια τιμή*.

Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση της τετραγωνικής ρίζας, $f(z) = \sqrt{z}$. Έχουμε αναφέρει στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι η συνάρτηση είναι πλειότιμη: για να βρούμε τους κλάδους της ας γράψουμε το z στην πολική του μορφή, $z = re^{i\theta}$. Τότε

$$f(r, \theta) = \sqrt{z} = e^{(\ln z)/2} = \sqrt{r}e^{i(\theta/2+k\pi)}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Παρατηρήστε ότι η συγκεκριμένη συνάρτηση έχει δύο δυνατές τιμές σε κάθε σημείο (r, θ) που προκύπτουν για τις άρτιες και τις περιττές τιμές του k . Λέμε ότι η $f(z) = \sqrt{z}$ έχει δύο κλάδους. Το μοναδικό σημείο στο οποίο δεν έχει δύο τιμές είναι το $z = 0$. Έστω μια κλειστή διαδρομή C_1 στο μιγαδικό επίπεδο (Σχήμα 2.1) που



Σχήμα 2.1: Δύο κλειστές διαδρομές στο μιγαδικό επίπεδο. Η C_1 δεν περικλείει το $z = 0$, η C_2 το περικλείει

δεν περικλείει το σημείο $z = 0$. Μια πλήρης διαγραφή της διαδρομής μεταβάλλει το r μεταξύ r_{\min} και r_{\max} και το θ μεταξύ θ_{\min} και θ_{\max} . Αν ξεκινήσουμε από οποιοδήποτε σημείο πάνω στη διαδρομή, μπορούμε να επανέλθουμε σε αυτό και η συνάρτηση επανέρχεται στην αρχική της τιμή.

Ας δούμε τι συμβαίνει κατά τη διαγραφή μιας κλειστής διαδρομής C_2 (Σχήμα 2.1) γύρω από το σημείο $z = 0$. Μια πλήρης περιστροφή αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού γύρω από αυτό, που π.χ. ξεκινά από το σημείο με κάποιο r και $\theta = 0$ μας μεταφέρει στο σημείο με το ίδιο r αλλά με $\theta = 2\pi$. Στο αρχικό

σημείο η τιμή της συνάρτησης $f(r, \theta)$ ήταν $\sqrt{r}e^{i0/2} = \sqrt{r}$. Στο νέο σημείο η τιμή είναι $\sqrt{r}e^{i\pi} = -\sqrt{r}$. Παρατηρήστε ότι η πλήρης περιστροφή γύρω από το σημείο $z = 0$ δεν επανέφερε τη συνάρτηση στην αρχική της τιμή.

Διαπιστώνουμε ότι η συμπεριφορά της συγκεκριμένης συνάρτησης κατά τη διαγραφή μιας κλειστής καμπύλης είναι διαφορετική ανάλογα με το αν η καμπύλη περικλείει ή όχι το σημείο $z = 0$. Το σημείο αυτό για την πλειότητα συνάρτησης $f(z) = \sqrt{z}$ χαρακτηρίζεται ως *σημείο διακλάδωσης*. Μια πλήρης περιστροφή γύρω από αυτό μας μετακινεί από ένα κλάδο της συνάρτησης σε άλλο. Το σημείο $z = 0$ ανήκει και στους δύο κλάδους.

Παρατηρήστε ότι με δύο πλήρεις περιστροφές γύρω από το $z = 0$, δηλαδή αν ξεκινήσουμε από $\theta = 0$ και καταλήξουμε σε $\theta = 4\pi$, η συνάρτηση επανέρχεται στην αρχική της τιμή:

$$\begin{aligned} f(r, 0) &= \sqrt{r}e^{i0/2} = \sqrt{r}, \\ f(r, 4\pi) &= \sqrt{r}e^{i4\pi/2} = \sqrt{r}. \end{aligned}$$

Γι' αυτό το λόγο, το σημείο διακλάδωσης $z = 0$ της $f(z) = \sqrt{z}$ χαρακτηρίζεται ως τάξης 1. Γενικά, ένα σημείο διακλάδωσης z_0 μιας συνάρτησης $f(z)$ λέμε ότι είναι τάξης n αν ο ελάχιστος αριθμός περιστροφών γύρω από το z_0 που απαιτούνται για να επανέλθει η συνάρτηση στην αρχική της τιμή είναι $n + 1$.

Σε αντίθεση με τους πραγματικούς αριθμούς, στους μιγαδικούς υπάρχει μόνο ένα άπειρο. Η συμπεριφορά μιας συνάρτησης $f(z)$ στο άπειρο προσδιορίζεται από τη συμπεριφορά της $f(1/z)$ στο μηδέν. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f(1/z) = \sqrt{1/z}$ έχει και αυτή σημείο διακλάδωσης το $z = 0$. Επομένως, το $z = \infty$ είναι ένα άλλο σημείο διακλάδωσης της $f(z) = \sqrt{z}$.

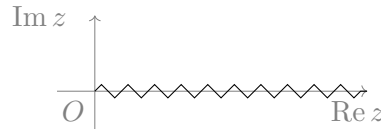
Μια πλειότητα συνάρτησης μπορεί να αντιμετωπιστεί ως μονότιμη αν ορίσουμε την *κλαδική τομή*, μια καμπύλη στο διάγραμμα Argand που συνήθως ενώνει τα σημεία διακλάδωσης. Την τομή συνήθως τη συμβολίζουμε σχηματικά με μια κυματοειδή γραμμή. Αυτή η καμπύλη μπορεί να θεωρηθεί ως ένα τεχνητό φράγμα που δεν επιτρέπεται να διασχίσουμε. Με αυτό τον τρόπο περιοριζόμαστε σε ένα κλάδο της πλειότητας συνάρτησης, μετατρέποντάς τη σε μονότιμη. Για να προσδιορίσουμε ποιος ακριβώς κλάδος της συνάρτησης επιλέγεται, αρκεί να δώσουμε, εκτός από τον τύπο της συνάρτησης, την τιμή της για κάποιο, οποιονδήποτε, μιγαδικό αριθμό z (διαφορετικό από σημείο διακλάδωσης).

Για τη συνάρτηση $f(z) = \sqrt{z}$ οποιαδήποτε καμπύλη ξεκινά από το $z = 0$ και καταλήγει στο ∞ είναι κλαδική τομή. Συνήθως παίρνουμε την ευθεία που ταυτίζεται με το θετικό ημιάξονα του πραγματικού ή του φανταστικού μέρους (Σχήμα 2.2). Ας ορίσουμε το θετικό πραγματικό ημιάξονα ως κλαδική τομή. Η συνάρτηση στο σημείο $z = 0 + i = e^{i\pi/2}$ έχει δύο τιμές:

$$f(i) = e^{i(\pi/4+k\pi)} = \begin{cases} (1+i)/\sqrt{2}, & k = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ -(1+i)/\sqrt{2}, & k = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases}$$

Μπορούμε να τη χειριστούμε ως μονότιμη αν δεχθούμε ότι η $f(z) = f(r, \theta)$ ορίζεται για $\theta \in [0, 2\pi)$ (δηλαδή δεν μπορούμε να διασχίσουμε την κλαδική τομή και ξεπε-

ράσουμε το $\theta = 2\pi$), και επιλέξουμε τον κλάδο στον οποίο το $f(i) = (1+i)/\sqrt{2}$.



Σχήμα 2.2: Μια κλαδική τομή της συνάρτησης $f(z) = \sqrt{z}$

Παράδειγμα

Η πλειότιμη συνάρτηση $f(z) = \sqrt{z^2 + 1}$ μπορεί να γραφεί στη μορφή $f(z) = \sqrt{z+i}\sqrt{z-i}$. Ας ελέγξουμε τα σημεία $z = \pm i$ για το αν είναι σημεία διακλάδωσης. Ορίζουμε $z+i = r_1 e^{i\theta_1}$ και $z-i = r_2 e^{i\theta_2}$. Τότε

$$f(z) = \sqrt{r_1 r_2} e^{i(\theta_1/2 + \theta_2/2)}.$$

Ας δούμε τι συμβαίνει στην τιμή της $f(z)$ όταν κάνουμε μια πλήρη διαγραφή καμπύλης που περικλείει το i (αλλά όχι το $-i$): Η γωνία θ_1 αλλάζει κατά 2π ενώ η θ_2 επανέρχεται στην τιμή της. Συνεπώς η $f(z)$ αλλάζει πρόσημο. Το ίδιο συμβαίνει όταν η κλειστή καμπύλη περικλείει το $-i$ αλλά όχι το i καθώς τότε η θ_2 αλλάζει κατά 2π και η θ_1 μένει η ίδια. Παρατηρήστε ότι αν η καμπύλη δεν περιλαμβάνει κανένα από τα δύο σημεία ή περιλαμβάνει και τα δύο, η $f(z)$ σε μια πλήρη διαγραφή της δεν αλλάζει τιμή. Τα σημεία $\pm i$ είναι επομένως σημεία διακλάδωσης της συγκεκριμένης $f(z)$. Ένα ακόμα σημείο διακλάδωσης μπορεί ναδειχθεί ότι είναι το ∞ .

Μπορούμε να κάνουμε μονότιμη τη συγκεκριμένη συνάρτηση αν ορίσουμε κλαδικές τομές που δεν επιτρέπουν να έχουμε κλειστή καμπύλη σε διαδρομή που θα αλλάξει το πρόσημο της συνάρτησης. Μια τέτοια κλαδική τομή είναι οποιαδήποτε καμπύλη από το $-i$ στο i (μεταξύ, δηλαδή, των σημείων διακλάδωσης). Άλλη τέτοια κλαδική τομή είναι η καμπύλη που έχει δύο τμήματα: από το i στο ∞ και από το ∞ στο $-i$.

2.2 Συνέχεια μιγαδικής συνάρτησης

Ας θυμηθούμε τον ορισμό της συνεχούς πραγματικής συνάρτησης:

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι *συνεχής* σε ένα σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού της αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Σε αυτό τον ορισμό θεωρούμε ότι

- το x_0 δεν είναι απομονωμένο σημείο, έχει δηλαδή, γειτονικά σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού, και

- η τιμή του ορίου είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση από την οποία το σημείο x πλησιάζει το x_0 .

Με απλά λόγια, ο συγκεκριμένος ορισμός σημαίνει ότι το $f(x)$ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στο $f(x_0)$ όταν το x πλησιάζει το x_0 από οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Ισοδύναμα, μια πραγματική συνάρτηση είναι συνεχής σε σημείο x_0 αν τα δύο όριά της, από μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές, ταυτίζονται με την τιμή της στο x_0 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) .$$

Η ιδιότητα της συνέχειας επεκτείνεται και στις μιγαδικές συναρτήσεις. Πρέπει να προσέξουμε ότι στην περίπτωση των συναρτήσεων μιγαδικής μεταβλητής υπάρχουν άπειρες κατευθύνσεις από τις οποίες μπορεί να πλησιάσει κανείς ένα σημείο του μιγαδικού επιπέδου. Για να είναι μια μιγαδική συνάρτηση συνεχής θα πρέπει τα όρια που προκύπτουν από όλες αυτές τις δυνατές κατευθύνσεις να υπάρχουν και να συμπίπτουν. Επομένως, ο μαθηματικός ορισμός της συνέχειας μιας μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$ είναι ο ακόλουθος: η $f(z)$ είναι συνεχής στο σημείο z_0 αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ένα $\delta(\varepsilon) > 0$ έτσι ώστε $|f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$ όταν $|z - z_0| < \delta(\varepsilon)$.

2.3 Παράγωγος μιγαδικής συνάρτησης

Ο ορισμός της παραγώγου που γνωρίζουμε από τις πραγματικές συναρτήσεις επεκτείνεται και στις μιγαδικές. Μια μονότιμη συνάρτηση $f(z)$ λέμε ότι είναι *παραγωγίσιμη* (ή έχει παράγωγο) σε ένα σημείο z_0 αν το όριο της ποσότητας

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

για $z \rightarrow z_0$ υπάρχει και είναι το ίδιο ανεξάρτητα από το πώς πλησιάζει το z στο z_0 , από το ποια διαδρομή, δηλαδή, ακολουθείται. Το όριο αυτό λέγεται *παράγωγος* της $f(z)$ στο σημείο z_0 και συμβολίζεται με $f'(z_0)$ ή $\left. \frac{df}{dz} \right|_{z_0}$. Αν ορίσουμε $\Delta z = z - z_0$, η (πρώτη) παράγωγος της $f(z)$ σε σημείο z_0 δίνεται από τη σχέση

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} . \quad (2.1)$$

Παράδειγμα

Ας προσπαθήσουμε να υπολογίσουμε την παράγωγο της $f(z) = 2y + ix$ σε κάποιο σημείο $z_0 = x_0 + iy_0$ του πεδίου ορισμού της (που είναι όλο το μιγαδικό επίπεδο). Αν θέσουμε $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$ προκύπτει ότι

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{2(y_0 + \Delta y) + i(x_0 + \Delta x) - 2y_0 - ix_0}{\Delta x + i\Delta y} = \frac{2\Delta y + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} .$$

Η παράγωγος είναι το όριο της τελευταίας έκφρασης όταν $\Delta z \equiv \Delta x + i\Delta y \rightarrow 0$, αν αυτό υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να γίνει μηδέν το Δz .

Ας υποθέσουμε ότι μηδενίζουμε πρώτα το Δx και ύστερα το Δy , δηλαδή κινούμαστε αρχικά παράλληλα στον πραγματικό άξονα και μετά παράλληλα στο φανταστικό:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2\Delta y + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{2\Delta y + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta y}{i\Delta y} = -2i.$$

Ας επιλέξουμε τώρα άλλη διαδρομή: μηδενίζουμε πρώτα το Δy και ύστερα το Δx . Δηλαδή

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2\Delta y + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{2\Delta y + i\Delta x}{\Delta x + i\Delta y} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{i\Delta x}{\Delta x} = i.$$

Παρατηρούμε ότι το όριο είναι διαφορετικό για καθεμιά από τις διαδρομές που επιλέξαμε, και μάλιστα αυτό συμβαίνει για οποιοδήποτε z . Επομένως η συνάρτηση δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο του πεδίου ορισμού της.

Παράδειγμα

Έστω η μιγαδική συνάρτηση $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$ με $z = x + iy$ ένα οποιοδήποτε σημείο στο μιγαδικό επίπεδο. Ας υπολογίσουμε την παράγωγό της.

Θέτουμε $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$. Τότε $z + \Delta z = (x + \Delta x) + i(y + \Delta y)$ και

$$\begin{aligned} f(z + \Delta z) - f(z) &= (x + \Delta x)^2 - (y + \Delta y)^2 + i2(x + \Delta x)(y + \Delta y) \\ &\quad - (x^2 - y^2 + i2xy) \\ &= x^2 + 2x\Delta x + (\Delta x)^2 - y^2 - 2y\Delta y - (\Delta y)^2 \\ &\quad + i2xy + i2x\Delta y + i2y\Delta x + i2(\Delta x)(\Delta y) - x^2 + y^2 - i2xy \\ &= 2x\Delta x + i2y\Delta x - 2y\Delta y + i2x\Delta y \\ &\quad + (\Delta x)^2 - (\Delta y)^2 + i2(\Delta x)(\Delta y) \\ &= 2(x + iy)(\Delta x + i\Delta y) + (\Delta x + i\Delta y)^2 \\ &= 2z\Delta z + (\Delta z)^2. \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z\Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z + \Delta z) \\ &= 2z = 2(x + iy). \end{aligned}$$

Το συγκεκριμένο όριο υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να μηδενίσουμε το Δz άρα $f'(z) = 2(x + iy)$.

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση του τελευταίου παραδείγματος είναι η $f(z) = z^2$. Διαπιστώσαμε ήδη ότι $f'(z) = 2z$. Επομένως, φαίνεται ότι ο κανόνας παραγωγής δύναμης που γνωρίζουμε για τις πραγματικές συναρτήσεις ισχύει και για τις μιγαδικές. Θα επανέλθουμε σε επόμενη παράγραφο.

2.3.1 Ορισμός αναλυτικής συνάρτησης

Μια συνάρτηση που είναι μονότιμη και έχει παράγωγο σε κάθε σημείο μιας περιοχής στο μιγαδικό επίπεδο χαρακτηρίζεται ως *αναλυτική* (ή ολόμορφη) στη συγκεκριμένη περιοχή. Μια συνάρτηση είναι αναλυτική σε ένα σημείο αν είναι αναλυτική σε κάποια περιοχή που περιλαμβάνει εσωτερικά το σημείο (π.χ. κάποιος κύκλος με κέντρο το σημείο). Μπορεί να αποδειχθεί ότι στα εσωτερικά σημεία περιοχής στην οποία η συνάρτηση είναι αναλυτική, η παράγωγος της συνάρτησης είναι *συνεχής και παραγωγίσιμη* και συνεπώς, είναι και αυτή αναλυτική. Επομένως, μια αναλυτική συνάρτηση σε κάποια περιοχή έχει στα εσωτερικά σημεία της περιοχής συνεχείς παραγώγους οποιασδήποτε τάξης. Παρατηρήστε ότι δεν ισχύει κάτι ανάλογο στις πραγματικές συναρτήσεις.

Μια συνάρτηση που είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο χαρακτηρίζεται ως *ακέραια* (entire).

2.3.2 Συνθήκες ύπαρξης παραγώγου

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε τις ιδιότητες που πρέπει να έχει μια μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ ώστε να είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο. Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο $z = x + iy$ στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης, ένα γειτονικό του σημείο $z + \Delta z$ με $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, και αναλύουμε τη συνάρτηση $f(z)$ σε πραγματικό και φανταστικό μέρος, $u(x, y)$, $v(x, y)$ αντίστοιχα. Το όριο που εμφανίζεται στον τύπο (2.1) γίνεται

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y + \Delta y) + iv(x + \Delta x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x + i\Delta y}.$$

Για να είναι παραγωγίσιμη η συνάρτηση, δεν πρέπει να εξαρτάται η τιμή του ορίου από το γειτονικό σημείο $z + \Delta z$ ή τη διαδρομή που θα επιλέξουμε για να πλησιάσει αυτό στο z . Έτσι, επιλέγουμε καταρχάς ως γειτονικό σημείο το $z + \Delta x$ (δηλαδή έχουμε $\Delta y = 0$). Το όριο γίνεται

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{u(x + \Delta x, y) + iv(x + \Delta x, y) - u(x, y) - iv(x, y)}{\Delta x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Κατόπιν, υπολογίζουμε ξανά το όριο αλλά πλησιάζοντας το σημείο $z + i\Delta y$ στο z , έχουμε δηλαδή $\Delta x = 0$. Το όριο είναι

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{u(x, y + \Delta y) + iv(x, y + \Delta y) - u(x, y) - iv(x, y)}{i\Delta y} = \frac{\partial v}{\partial y} - i \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Τα δύο όρια που βρήκαμε για τις διαφορετικές διαδρομές πρέπει να είναι ίσα. Άρα

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad (2.2\alpha')$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}. \quad (2.2\beta')$$

Οι μερικές παράγωγοι είναι υπολογισμένες στο σημείο z . Οι εξισώσεις (2.2) αποτελούν τις *συνθήκες Cauchy–Riemann* και πρέπει να ικανοποιούνται από κάθε συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη σε κάποιο σημείο. Δεν αρκούν όμως για να υπάρχει υποχρεωτικά η παράγωγος καθώς καταλήξαμε σε αυτές λαμβάνοντας υπόψη μόνο δύο από τις άπειρες δυνατές διαδρομές που πλησιάζουν το z . Μπορεί να δειχθεί ότι η παράγωγος σε ένα σημείο υπάρχει όταν

- ικανοποιούνται οι εξισώσεις Cauchy–Riemann,
- οι τέσσερις μερικές παράγωγοι (πραγματικού και φανταστικού μέρους της $f(z)$ ως προς το πραγματικό και φανταστικό μέρος του z) υπάρχουν και είναι συνεχείς σε ανοιχτή περιοχή που περιέχει το σημείο (ή ισοδύναμα, οι συναρτήσεις $u(x, y)$, $v(x, y)$ είναι παραγωγίσιμες σε τέτοια περιοχή).

Αν ισχύουν τα παραπάνω, η παράγωγος είναι όπως καταλήξαμε ήδη,

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \text{ή} \quad (2.3\alpha')$$

$$\frac{df}{dz} = -i\left(\frac{\partial u}{\partial y} - i\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -i\frac{\partial f^*}{\partial y}. \quad (2.3\beta')$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(z) = 2y + ix$ έχει $u(x, y) = 2y$ και $v(x, y) = x$. Οι μερικές παράγωγοι είναι

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0.$$

Διαπιστώνουμε ότι δεν ικανοποιούνται συνθήκες Cauchy–Riemann, άρα σωστά βρήκαμε ότι δεν έχει παράγωγο σε προηγούμενο παράδειγμα.

Παράδειγμα

Για την $f(z) = x^2 - y^2 + i2xy$ έχουμε $u(x, y) = x^2 - y^2$, $v(x, y) = 2xy$ και

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x.$$

Η μονότιμη συνάρτηση $f(z)$ ικανοποιεί τις συνθήκες Cauchy–Riemann σε κάθε σημείο οποιασδήποτε περιοχής του μιγαδικού επιπέδου. Επιπλέον, οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς σε όλο το επίπεδο· αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση έχει

παράγωγο παντού, άρα είναι αναλυτική. Έχουμε υπολογίσει σε προηγούμενο παράδειγμα την παράγωγό της.

Εναλλακτικό κριτήριο

Ένα δεύτερο κριτήριο, μια συνοπτική συνθήκη αναγκαία για την ύπαρξη παραγώγου, μπορεί να εξαχθεί ως εξής. Γνωρίζουμε (εξισώσεις 1.7) ότι αν $z = x + iy$ ισχύει

$$x = \frac{z + z^*}{2}, \quad y = \frac{z - z^*}{2i}.$$

Μια συνάρτηση $f(z)$ μπορούμε να την εκφράσουμε ως συνάρτηση του πραγματικού και φανταστικού μέρους του z . Θα έχει τη μορφή $f(x, y)$ και θα γράφεται

$$f(x, y) = f\left(\frac{z + z^*}{2}, \frac{z - z^*}{2i}\right).$$

Ας εξετάσουμε την παράγωγό της ως προς z^* . Έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial z^*} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial z^*} = \frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{i}{2} \frac{\partial f}{\partial y}. \quad (2.4)$$

Αν $f(x, y) = u(x, y) + iv(x, y)$ έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.4) έχουμε

$$2 \frac{\partial f}{\partial z^*} = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} + i \left(\frac{\partial u}{\partial y} + i \frac{\partial v}{\partial y} \right) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) + i \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

Λαμβάνοντας υπόψη τις συνθήκες Cauchy–Riemann διαπιστώνουμε ότι η τελευταία έκφραση είναι 0. Συνεπώς, ισοδύναμη με τις συνθήκες Cauchy–Riemann είναι η συνθήκη

$$\frac{\partial f}{\partial z^*} = 0.$$

Η συγκεκριμένη εξίσωση εκφράζει ότι μια αναγκαία (αλλά όχι ικανή) συνθήκη για να είναι παραγωγίσιμη η f είναι να εξαρτάται η συνάρτηση μόνο από το z και όχι από το z^* .

Παράδειγμα

Ας εξετάσουμε την παραγωγισιμότητα της $f(x, y) = x(1 + i2y)$ με εφαρμογή του τελευταίου κριτηρίου. Η αντικατάσταση των x, y από τα z, z^* μέσω των εξισώσεων 1.7 δίνει

$$f(z, z^*) = \frac{z + z^*}{2}(1 + z - z^*) = \frac{1}{2}(z + z^* + z^2 - (z^*)^2) \Rightarrow \frac{df}{dz^*} = \frac{1}{2} - z^*.$$

Σύμφωνα με το δεύτερο κριτήριο που αναπτύξαμε, η $f(z)$ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη μόνο στο σημείο $z = 1/2$. Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε με τις συνθήκες Cauchy–Riemann.

Καθώς οι τέσσερις μερικές παράγωγοι για τη συγκεκριμένη συνάρτηση είναι συνεχείς παντού, η $f(z)$ είναι παραγωγίσιμη στο $z = 1/2$. Η παράγωγός της εκεί προκύπτει με εφαρμογή του ορισμού (2.1) ή των ισοδύναμων σχέσεων (2.3) ότι είναι 1.

2.3.3 Κανόνες παραγωγίσης

Οι κανόνες παραγωγίσης που γνωρίζουμε για τις συναρτήσεις πραγματικής μεταβλητής ισχύουν και για τις μιγαδικές συναρτήσεις. Μπορούν να αποδειχθούν με χρήση του ορισμού οι ακόλουθοι κανόνες:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dz}(f + g) &= \frac{df}{dz} + \frac{dg}{dz}, \\ \frac{d}{dz}(fg) &= \frac{df}{dz}g + f\frac{dg}{dz}, \\ \frac{d}{dz}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{1}{g^2}\left(\frac{df}{dz}g - f\frac{dg}{dz}\right),\end{aligned}$$

ενώ για σύνθετες συναρτήσεις $h(z) = f(g(z))$ ισχύει

$$\frac{dh}{dz} = \frac{df}{dg} \frac{dg}{dz}.$$

Με εφαρμογή των παραπάνω κανόνων για την παραγωγή δύναμης ή σειράς Taylor, μπορούμε να εξαγάγουμε, μεταξύ άλλων, τις ακόλουθες σχέσεις για τις παραγωγούς μιγαδικών συναρτήσεων. Είναι οι γνωστές από τις πραγματικές συναρτήσεις:

$$\begin{aligned}(z^n)' &= nz^{n-1}, \quad n > 0, \\ (e^z)' &= e^z, \\ (\sin z)' &= \cos z, \\ (\cos z)' &= -\sin z.\end{aligned}$$

2.4 Ιδιάζοντα σημεία

Τα σημεία του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης στα οποία δεν ορίζεται η παράγωγος της συνάρτησης ονομάζονται *ιδιάζοντα* ή *ανώμαλα* σημεία (singularities) της συνάρτησης. Σε αυτά η συνάρτηση δεν είναι αναλυτική. Τα σημεία στα οποία η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη λέγονται *ομαλά*.

Παράδειγμα

Ας βρούμε τα ιδιόζοντα σημεία της $f(z) = 1/(z+1)$. Η παράγωγός της είναι, από τον ορισμό,

$$\begin{aligned} f'(z) &= \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta z} \left(\frac{1}{z + \Delta z + 1} - \frac{1}{z + 1} \right) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{-1}{(z + \Delta z + 1)(z + 1)} \\ &= -\frac{1}{(z + 1)^2}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η παράγωγος είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του Δz και έχει πεπερασμένη τιμή σε κάθε σημείο εκτός από το $z = -1$. Επομένως, η $f(z)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο εκτός από το ιδιόζον σημείο $z = -1$.

Υπάρχουν δύο κατηγορίες ιδιόζοντων σημείων: τα απομονωμένα και τα μη απομονωμένα.

2.4.1 Απομονωμένα

Στην περίπτωση που η $f(z)$ δεν είναι αναλυτική σε κάποιο σημείο a αλλά είναι αναλυτική σε κάποια περιοχή που περιβάλλει το a , τότε το συγκεκριμένο σημείο λέγεται *απομονωμένο ιδιόζον σημείο* της συνάρτησης.

Πόλος

Έστω ότι το a είναι ένα απομονωμένο ιδιόζον σημείο της συνάρτησης $f(z)$. Έστω ακόμα ότι υπάρχει ένας θετικός ακέραιος n τέτοιος ώστε η συνάρτηση

$$g(z) = (z - a)^n f(z) \quad (2.5)$$

να είναι αναλυτική στο $z = a$ και να μη μηδενίζεται. Σε αυτή την περίπτωση το ιδιόζον σημείο a χαρακτηρίζεται ως *πόλος* της $f(z)$, τάξης n .

Παράδειγμα

Σε προηγούμενο παράδειγμα διαπιστώσαμε ότι η $f(z) = 1/(z+1)$ έχει απομονωμένο ιδιόζον σημείο το $z = -1$. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $g(z) = (z - (-1))f(z)$ είναι αναλυτική σε αυτό και δεν μηδενίζεται. Επομένως, το $z = -1$ είναι πόλος πρώτης τάξης για την $f(z)$.

Μπορεί ναδειχθεί ότι η $f(z)$ δεν έχει πεπερασμένη τιμή σε ένα πόλο a , δηλαδή $\lim_{z \rightarrow a} |f(z)| = \infty$. Συνεπώς, τα σημεία στα οποία η $f(z)$ απειρίζεται είναι πιθανοί πόλοι. Αυτό το κριτήριο θα χρησιμοποιούμε για τον εντοπισμό των πόλων.

Οι πόλοι παίζουν καίριο ρόλο στον υπολογισμό του ολοκληρώματος μιας μιγαδικής συνάρτησης, όπως θα παρουσιάσουμε παρακάτω.

Απαλείψιμο ιδιάζον σημείο

Ένα ιδιάζον σημείο a στο οποίο η $f(z)$ έχει απροσδιόριστη τιμή (π.χ. $0/0$) αλλά το $\lim_{z \rightarrow a} f(z)$ υπάρχει, είναι πεπερασμένο και ανεξάρτητο από τη διαδρομή που ακολουθούμε για να πλησιάσουμε το a , χαρακτηρίζεται ως απαλείψιμο ιδιάζον σημείο.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(z) = \sin(z)/z$ έχει απροσδιόριστη τιμή ($0/0$) στο $z = 0$. Η παράγωγός της σε αυτό έχει την ίδια απροσδιοριστία:

$$f'(z) = \frac{z \cos z - \sin z}{z^2}.$$

Το σημείο $z = 0$ είναι (απομονωμένο) ιδιάζον σημείο για το οποίο ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow 0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\sin z}{z} = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{(\sin z)'}{z'} = \lim_{z \rightarrow 0} \cos z = 1.$$

Έγινε χρήση του κανόνα l' Hospital για να άρουμε την απροσδιοριστία $0/0$. Συμπεραίνουμε ότι το $z = 0$ είναι απαλείψιμο.

Ουσιώδες ιδιάζον σημείο

Ένα απομονωμένο ιδιάζον σημείο a που δεν είναι πόλος ή απαλείψιμο της $f(z)$, δεν μπορούμε δηλαδή να βρούμε πεπερασμένο n τέτοιο ώστε η συνάρτηση στην εξίσωση (2.5) να είναι αναλυτική, χαρακτηρίζεται ως ουσιώδες ιδιάζον σημείο της $f(z)$.

Παράδειγμα

Η παράγωγος της συνάρτησης $f(z) = \sin(1/z)$ ορίζεται παντού εκτός από το σημείο $z = 0$. Το 0 είναι απομονωμένο ιδιάζον σημείο και καθώς καμία συνάρτηση της μορφής $z^n f(z)$ δεν έχει παράγωγο σε αυτό, είναι ουσιώδες.

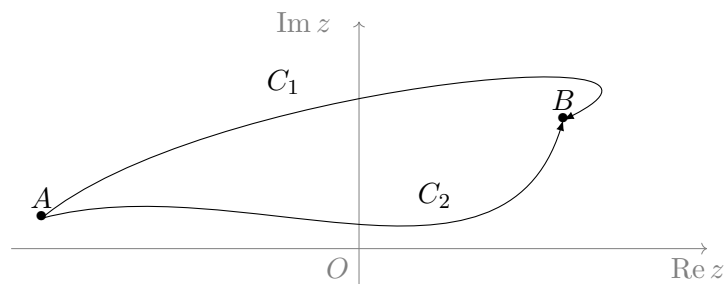
Στο 2.8.2 θα παρουσιάσουμε ένα εναλλακτικό κριτήριο για να διακρίνουμε το είδος ενός απομονωμένου σημείου.

2.4.2 Μη απομονωμένα

Τα σημεία διακλάδωσης και οι κλαδικές τομές μιας πλειότιμης συνάρτησης $f(z)$ δεν είναι εσωτερικά σημεία κάποιου κλάδου και αποτελούν μη απομονωμένα ιδιάζοντα σημεία.

2.5 Ολοκλήρωμα μιγαδικής συνάρτησης

Έστω ότι επιθυμούμε να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας μονότιμης μιγαδικής συνάρτησης $f(z)$, μίας μιγαδικής μεταβλητής, μεταξύ δύο σημείων A και B του μιγαδικού επιπέδου. Θεωρούμε ότι τα σημεία είναι εσωτερικά μιας περιοχής στην οποία η συνάρτηση είναι συνεχής. Το μιγαδικό ολοκλήρωμα ορίζεται παρόμοια με το γνωστό ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης πραγματικής μεταβλητής, με βασική διαφορά ότι ενώ στο πραγματικό ολοκλήρωμα υπάρχει μία διαδρομή που ενώνει τα όρια ολοκλήρωσης (αυτή κατά μήκος του άξονα των πραγματικών), στο μιγαδικό ολοκλήρωμα υπάρχουν άπειρες διαδρομές μεταξύ των A και B (Σχήμα 2.3).



Σχήμα 2.3: Δύο δυνατές διαδρομές μεταξύ δύο σημείων του μιγαδικού επιπέδου

Το μιγαδικό ολοκλήρωμα είναι *επικαμπύλιο* και η τιμή του γενικά εξαρτάται από τη διαδρομή που θα επιλέξουμε για την ολοκλήρωση.

Έστω ότι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος των σημείων μιας συγκεκριμένης διαδρομής C στο μιγαδικό επίπεδο μπορούν να προκύψουν από τις εξισώσεις

$$x = x(t), \quad y = y(t),$$

όπου $x(t)$, $y(t)$ συνεχείς και παραγωγίσιμες πραγματικές συναρτήσεις και t μια πραγματική παράμετρος που παίρνει τιμές στο διάστημα $[\alpha, \beta]$ και έχει τις ιδιότητες

$$x(\alpha) \equiv x_A, \quad y(\alpha) \equiv y_A, \quad x(\beta) \equiv x_B, \quad y(\beta) \equiv y_B.$$

Οι εξισώσεις $x(t)$, $y(t)$ αποτελούν τις παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης C και προσδιορίζουν τα σημεία $z(t) = x(t) + iy(t)$ που την αποτελούν. Το ολοκλήρωμα της $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ κατά μήκος της διαδρομής C είναι

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= \int_C (u + iv)(dx + i dy) = \int_C u dx - \int_C v dy + i \int_C u dy + i \int_C v dx \\ &= \int_\alpha^\beta u x'(t) dt - \int_\alpha^\beta v y'(t) dt + i \int_\alpha^\beta u y'(t) dt + i \int_\alpha^\beta v x'(t) dt. \end{aligned}$$

Επομένως, το μιγαδικό ολοκλήρωμα υπολογίζεται με γενικό τρόπο από τέσσερα πραγματικά ολοκληρώματα. Εναλλακτικά, καθώς $dz = z'(t) dt$, μπορούμε να γρά-

ψουμε

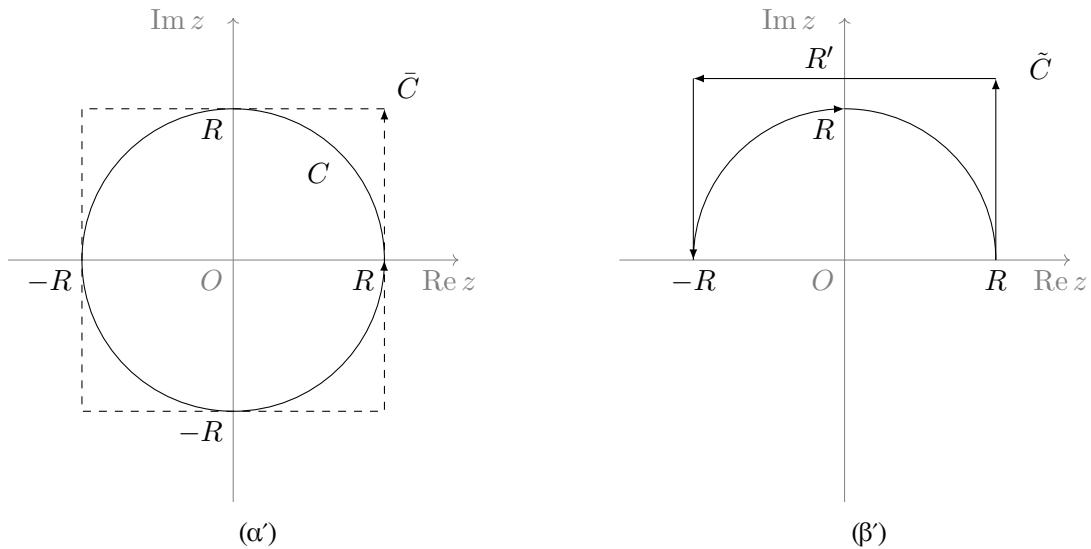
$$\int_C f(z) dz = \int_\alpha^\beta f(z(t)) z'(t) dt .$$

Με αυτό τον τρόπο, το μιγαδικό επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της $f(z)$ μετατρέπεται σε απλό για τη μιγαδική συνάρτηση $g(t) = f(z(t))z'(t)$.

Οι παραμετρικές εξισώσεις της καμπύλης C μπορεί να περιγράφουν τις συντεταγμένες των σημείων της στην πολική αναπαράσταση (μέτρο και φάση): $r = r(t)$, $\theta = \theta(t)$ και $z(t) = r(t)e^{i\theta(t)}$.

2.5.1 Παράδειγμα

Με βάση τα παραπάνω, ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της $f(z) = 1/z$ κατά μήκος του κύκλου C με κέντρο το $0 + i0$ και ακτίνα R , ξεκινώντας και καταλήγοντας στο σημείο $z = R + i0$ δεξιόστροφα (αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού) (Σχήμα 2.4α'). Οι συντεταγμένες των σημείων της διαδρομής C στην



Σχήμα 2.4: Διάφορες κλειστές διαδρομές στο μιγαδικό επίπεδο: (α') κυκλική, C , και τετραγωνική, \tilde{C} , που περιλαμβάνουν το $z = 0$, (β') \tilde{C} που δεν περιλαμβάνει το $z = 0$.

πολική αναπαράσταση είναι

$$x(t) = R \cos t, \quad y(t) = R \sin t,$$

με $t \in [0, 2\pi]$. Άρα

$$x'(t) = -R \sin t, \quad y'(t) = R \cos t.$$

Η συνάρτηση κατά μήκος της διαδρομής έχει τιμές

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{zz^*} = \frac{1}{R^2}(R \cos t - iR \sin t) = \frac{1}{R}(\cos t - i \sin t).$$

Επομένως

$$\int_C f(z) dz = \int_0^{2\pi} \frac{1}{R} (\cos t - i \sin t) (-R \sin t + iR \cos t) dt = 2\pi i .$$

Παρατηρήστε ότι η τιμή του ολοκληρώματος δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακτίνας της κυκλικής διαδρομής.

Εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι σε μια κλειστή διαδρομή δεν παίζει ρόλο το αρχικό και το τελικό σημείο. Αν επιλέγαμε διαφορετικό σημείο αρχής και τέλους από το $R+i0$, τα όρια ολοκλήρωσης της παραμέτρου t θα άλλαζαν αλλά θα είχαν πάντα διαφορά 2π και τα ολοκληρώματα θα είχαν την ίδια τιμή.

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα της ίδιας συνάρτησης,

$$f(z) = \frac{1}{z} = \frac{z^*}{|z|^2} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2} ,$$

αλλά σε άλλη διαδρομή \bar{C} (Σχήμα 2.4α'), στο τετράγωνο με κορυφές τα σημεία $\pm R \pm iR$, ξεκινώντας από το σημείο $R - iR$ και προχωρώντας δεξιόστροφα. Εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι πρέπει να υπολογίσουμε τέσσερα ολοκληρώματα, ένα για κάθε πλευρά του τετραγώνου.

Στο τμήμα \bar{C}_1 , από το $R - iR$ ως το $R + iR$, τα σημεία έχουν πραγματικό μέρος $x(t) = R$ και φανταστικό $y(t) = t$ με $-R \leq t \leq R$. Η συνάρτηση έχει την τιμή $f(z) = (R - it)/(R^2 + t^2)$ ενώ το διαφορικό είναι $dz = d(R + it) = i dt$. Επομένως,

$$I_1 \equiv \int_{\bar{C}_1} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{R - it}{R^2 + t^2} i dt = \int_{-R}^R \frac{t + iR}{R^2 + t^2} dt .$$

Στο τμήμα \bar{C}_2 , από το $R + iR$ ως το $-R + iR$, έχουμε $x(t) = t$, $y(t) = R$ με t από R έως $-R$. Άρα $f(z) = (t - iR)/(t^2 + R^2)$, $dz = dt$ και

$$I_2 \equiv \int_{\bar{C}_2} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{t - iR}{t^2 + R^2} dt \stackrel{t \rightarrow -w}{=} - \int_{-R}^R \frac{-w - iR}{w^2 + R^2} dw = I_1 .$$

Στο τμήμα \bar{C}_3 , από το $-R + iR$ ως το $-R - iR$, έχουμε $x(t) = -R$, $y(t) = t$ με t από R έως $-R$, $f(z) = (-R - it)/(R^2 + t^2)$ και $dz = i dt$:

$$I_3 \equiv \int_{\bar{C}_3} f(z) dz = \int_R^{-R} \frac{-R - it}{R^2 + t^2} i dt = \int_R^{-R} \frac{t - iR}{R^2 + t^2} dt = I_2 .$$

Τέλος, στο τμήμα \bar{C}_4 , από το $-R - iR$ ως το $R - iR$, έχουμε $x(t) = t$, $y(t) = -R$ με t από $-R$ έως R , $f(z) = (t + iR)/(t^2 + R^2)$ και $dz = dt$:

$$I_4 \equiv \int_{\bar{C}_4} f(z) dz = \int_{-R}^R \frac{t + iR}{t^2 + R^2} dt = I_1 .$$

Συνολικά,

$$\int_{\tilde{C}} f(z) dz = \int_{\tilde{C}_1} f(z) dz + \int_{\tilde{C}_2} f(z) dz + \int_{\tilde{C}_3} f(z) dz + \int_{\tilde{C}_4} f(z) dz = 4I_1 .$$

Αλλά

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-R}^R \frac{t + iR}{R^2 + t^2} dt = \int_{-R}^R \frac{t}{R^2 + t^2} dt + iR \int_{-R}^R \frac{1}{R^2 + t^2} dt \\ &= 0 + 2iR \int_0^R \frac{1}{R^2 + t^2} dt \stackrel{t \rightarrow w/R}{=} 2i \int_0^1 \frac{1}{1 + w^2} dw \stackrel{w \rightarrow \tan \theta}{=} i \frac{\pi}{2} . \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\tilde{C}} f(z) dz = 2\pi i .$$

Καταλήξαμε στο αποτέλεσμα που βρήκαμε και στη διαδρομή C . Πάλι είναι ανεξάρτητο από τις διαστάσεις της τετραγωνικής διαδρομής. Μπορεί ναδειχθεί ότι οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή και να επιλέξουμε, αν περικλείει το σημείο $z = 0$, το ίδιο αποτέλεσμα θα βρούμε για το ολοκλήρωμα της $1/z$.

Ας υπολογίσουμε τώρα το ολοκλήρωμα της ίδιας συνάρτησης στη διαδρομή \tilde{C} του Σχήματος (2.4β'). Είναι κλειστή αλλά δεν περιλαμβάνει το σημείο $z = 0$.

Στο ημικύκλιο, \tilde{C}_1 , το ολοκλήρωμα είναι

$$\int_{\tilde{C}_1} \frac{dz}{z} = \int_{\pi}^0 \frac{z'(t)}{z(t)} dt = - \int_0^{\pi} \frac{R(-\sin t + i \cos t)}{R(\cos t + i \sin t)} dt = -\pi i .$$

Στα τρία ευθύγραμμα τμήματα, \tilde{C}_2 από $R + i0$ έως $R + iR'$, \tilde{C}_3 από $R + iR'$ έως $-R + iR'$, \tilde{C}_4 από $-R + iR'$ έως $-R + i0$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}_2} f(z) dz &= \int_0^{R'} \frac{R - it}{R^2 + t^2} i dt , \\ \int_{\tilde{C}_3} f(z) dz &= \int_R^{-R} \frac{t - iR'}{t^2 + R'^2} dt = 2i \int_0^R \frac{R'}{t^2 + R'^2} dt , \\ \int_{\tilde{C}_4} f(z) dz &= \int_{R'}^0 \frac{-R - it}{R^2 + t^2} i dt = \int_0^{R'} \frac{R + it}{R^2 + t^2} i dt . \end{aligned}$$

Συνολικά

$$\begin{aligned} \int_{\tilde{C}} f(z) dz &= \int_{\tilde{C}_1} \frac{dz}{z} + \int_{\tilde{C}_2} \frac{dz}{z} + \int_{\tilde{C}_3} \frac{dz}{z} + \int_{\tilde{C}_4} \frac{dz}{z} \\ &= -\pi i + 2i \int_0^{R'} \frac{R}{R^2 + t^2} dt + 2i \int_0^R \frac{R'}{t^2 + R'^2} dt \\ &= -\pi i + 2i \int_0^{R'/R} \frac{1}{1 + w^2} dw + 2i \int_0^{R/R'} \frac{1}{w^2 + 1} dw \\ &= -\pi i + 2i (\tan^{-1}(R'/R) + \tan^{-1}(R/R')) \\ &= -\pi i + \pi i = 0 . \end{aligned}$$

Στην προηγούμενη εξίσωση χρησιμοποιήθηκε η τριγωνομετρική ιδιότητα

$$\tan^{-1} x + \tan^{-1}(1/x) = \pi/2, \quad \text{αν } x \geq 0.$$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι το ολοκλήρωμα της $1/z$ σε οποιαδήποτε κλειστή διαδρομή που δεν περικλείει το σημείο $z = 0$ είναι 0. Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει από το θεώρημα Cauchy που θα δούμε αμέσως.

2.6 Θεώρημα Cauchy

Έστω ότι η μιγαδική συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε μια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου. Σύμφωνα με το θεώρημα του Cauchy, το ολοκλήρωμά της σε οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη C που βρίσκεται εξ ολοκλήρου στην περιοχή αναλυτικότητας είναι 0:

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Ισχύει και το αντίστροφο: αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι συνεχής σε μια περιοχή και σε κάθε κλειστή καμπύλη εντός αυτής το ολοκλήρωμα της $f(z)$ είναι 0, η συνάρτηση είναι αναλυτική στην περιοχή (θεώρημα Morera).

Αποδεικνύεται εύκολα, με χρήση του θεωρήματος, ότι αν η διαδρομή C δεν είναι κλειστή, το ολοκλήρωμα της $f(z)$ εξαρτάται μόνο από το αρχικό, A , και το τελικό, B , σημείο και όχι από τα ενδιάμεσα: ας υποθέσουμε ότι τα A και B συνδέονται με δύο διαφορετικές διαδρομές, C_1 , C_2 , εξ ολοκλήρου μέσα στην περιοχή που η $f(z)$ είναι αναλυτική (Σχήμα 2.3). Έστω

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{C_1} f(z) dz \\ I_2 &= \int_{C_2} f(z) dz = - \int_{B \rightarrow A} f(z) dz. \end{aligned}$$

Τότε

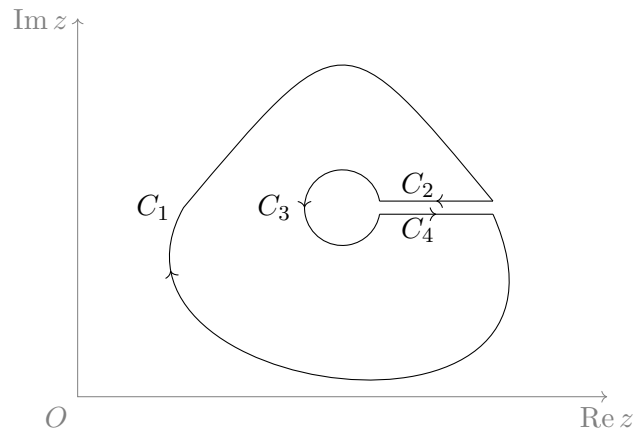
$$I_1 - I_2 = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{B \rightarrow A} f(z) dz = \oint_{C_1 + C_2} f(z) dz.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy, το ολοκλήρωμα στην κλειστή καμπύλη $C_1 + C_2$ είναι 0. Συνεπώς $I_1 = I_2$, ή αλλιώς, η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από την καμπύλη μεταξύ αρχικού και τελικού σημείου.

2.6.1 Εφαρμογή

Το συμπέρασμα στο οποίο καταλήξαμε στην προηγούμενη παράγραφο μας δίνει τη δυνατότητα να «παραμορφώσουμε» σε ολοκλήρωμα την καμπύλη ολοκλήρωσης με συνεχή τρόπο και πάντα μέσα στην περιοχή αναλυτικότητας της $f(z)$ χωρίς να επηρεάζεται η τιμή του ολοκληρώματος.

Θεωρήστε την κλειστή διαδρομή στο Σχήμα 2.5: αποτελείται από δύο σχεδόν κλειστές καμπύλες, τις C_1 και C_3 , που η μια περικλείει την άλλη. Ενώνονται με δύο καμπύλες (τις C_2, C_4) που έχουν ίδια άκρα αλλά αντίθετη φορά. Η συνολική διαδρομή βρίσκεται ολόκληρη σε περιοχή που η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική. Προσέξτε ότι η περιοχή αυτή δεν είναι απαραίτητο να περιλαμβάνει το «εσωτερικό» της εσωτερικής καμπύλης, C_3 : η C_3 μπορεί να περικλείει ιδιάζοντα σημεία. Σύμφωνα



Σχήμα 2.5: Μια κλειστή διαδρομή στο μιγαδικό επίπεδο

με το θεώρημα Cauchy, το ολοκλήρωμα της $f(z)$ στη συνολική διαδρομή είναι 0. Αλλά τότε

$$\oint_{C_1+C_2+C_3+C_4} f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_3} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz = 0 .$$

Οι διαδρομές C_2 και C_4 οριακά αποτελούν μια κλειστή διαδρομή σε περιοχή που η συνάρτηση είναι αναλυτική. Σύμφωνα με το θεώρημα Cauchy πρέπει να ισχύει

$$\oint_{C_2+C_4} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_4} f(z) dz = 0 .$$

Συνεπώς

$$\oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_3} f(z) dz = 0 .$$

Η φορά διαγραφής της C_1 είναι αντίθετη από τη συμβατική (η οποία είναι η αντίθετη από τη φορά των δεικτών του ρολογιού). Η αλλαγή της φοράς αλλάζει πρόσημο στο ολοκλήρωμα. Συνεπώς, αν διαγράψουμε με ίδια φορά τις δύο καμπύλες προκύπτει ότι

$$\oint_{C_1} f(z) dz = \oint_{C_3} f(z) dz . \quad (2.6)$$

Ένα πολύ σημαντικό συμπέρασμα που εξάγεται από την προηγούμενη ανάλυση είναι ότι μια κλειστή διαδρομή μπορεί να «συρρικνωθεί» με συνεχή τρόπο σε άλλη

χωρίς να επηρεαστεί η τιμή του ολοκληρώματος κατά μήκος αυτής, αρκεί να μην περάσει από ιδιάζον σημείο. Συνεπώς, αν στο εσωτερικό μιας κλειστής διαδρομής υπάρχει ένα μόνο απομονωμένο ιδιάζον σημείο, το ολοκλήρωμα κατά μήκος αυτής είναι ίσο με το ολοκλήρωμα κατά μήκος ενός κύκλου με οσοδήποτε μικρή ακτίνα και κέντρο το ιδιάζον σημείο.

Στην περίπτωση που μια κλειστή διαδρομή C περικλείει περισσότερα του ενός απομονωμένα ιδιάζοντα σημεία, με παρόμοια απόδειξη καταλήγουμε ότι το ολοκλήρωμα κατά μήκος της C ισούται με το άθροισμα των ολοκληρωμάτων κατά μήκος ισάριθμων κλειστών καμπυλών C_1, C_2, \dots που περικλείουν από ένα ιδιάζον σημείο η καθεμία:

$$\oint_C f(z) dz = \oint_{C_1} f(z) dz + \oint_{C_2} f(z) dz + \dots \quad (2.7)$$

2.7 Ολοκληρωτική αναπαράσταση συνάρτησης

Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε μια κλειστή καμπύλη C καθώς και στην περιοχή που περικλείεται από αυτή, και z_0 είναι ένα εσωτερικό σημείο αυτής της περιοχής, ισχύει ότι

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz. \quad (2.8)$$

Η σχέση (2.8) αποτελεί την *εξίσωση Cauchy*. Σύμφωνα με αυτή, αν γνωρίζουμε τις τιμές μιας αναλυτικής συνάρτησης σε όλα τα σημεία κάποιας κλειστής καμπύλης που περικλείει ένα σημείο z_0 , μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της συνάρτησης στο z_0 . Η διαγραφή της καμπύλης C γίνεται δεξιόστροφα.

Αποδεικνύεται σχετικά εύκολα: εφόσον η συνάρτηση είναι αναλυτική στο εσωτερικό της κλειστής καμπύλης C , μπορούμε να συρρικνώσουμε την (τυχαία) καμπύλη C σε κύκλο \bar{C} με ακτίνα ρ γύρω από το σημείο z_0 . Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τα ολοκληρώματα στις καμπύλες C, \bar{C} είναι ίσα.

Τα σημεία της καμπύλης \bar{C} είναι τα $z = z_0 + \rho e^{i\theta}$ με θ κάθε γωνία στο $[0, 2\pi)$. Πάνω στην καμπύλη ισχύει

$$dz = d(z_0 + \rho e^{i\theta}) = \rho e^{i\theta} i d\theta.$$

Επομένως,

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \oint_{\bar{C}} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \rho e^{i\theta})}{\rho e^{i\theta}} \rho e^{i\theta} i d\theta = i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \rho e^{i\theta}) d\theta.$$

Η τιμή του ολοκληρώματος είναι ανεξάρτητη από την ακτίνα ρ . Μπορούμε να θέσουμε $\rho = 0$. Τότε

$$\oint_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = i \int_0^{2\pi} f(z_0) d\theta = i f(z_0) \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi i f(z_0).$$

Καταλήγουμε έτσι στην εξίσωση (2.8).

Η παραγωγή της εξίσωσης (2.8) ως προς z_0 εξάγει τη σχέση που συνδέει την παράγωγο της αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ σε ένα σημείο z_0 με τις τιμές της σε μια καμπύλη C που περικλείει το σημείο:

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz .$$

Γενικότερα, εύκολα αποδεικνύεται ότι για την n -οστή παράγωγο της αναλυτικής συνάρτησης $f(z)$ ισχύει

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz , \quad n \geq 0 . \quad (2.9)$$

Θεωρούμε ότι $f^{(0)}(z) \equiv f(z)$.

2.7.1 Ανισότητα Cauchy

Έστω ότι μια συνάρτηση $f(z)$ κατά μήκος μιας διαδρομής C είναι φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, με όριο τη σταθερή τιμή M . ικανοποιεί δηλαδή τη σχέση $|f(z)| \leq M$. Ισχύει ότι

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq \int_C |f(z)| |dz| = M \int_C d\ell = ML ,$$

όπου L το μήκος της καμπύλης.

Έστω ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε ένα κυκλικό δίσκο με ακτίνα R και κέντρο ένα σημείο z_0 και ακόμα είναι φραγμένη πάνω στο σύνορο (τον κύκλο με ακτίνα R) κατ' απόλυτη τιμή με όριο τη σταθερή τιμή M . Στον κύκλο με κέντρο το z_0 και ακτίνα R ισχύει $z = z_0 + Re^{i\theta}$. Επομένως, κατά μήκος του κύκλου

$$\left| \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \right| = \left| \frac{f(z)}{R^{n+1}e^{i(n+1)\theta}} \right| = \frac{|f(z)|}{R^{n+1}} \leq \frac{M}{R^{n+1}} .$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω προκύπτει ότι

$$|f^n(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \frac{M}{R^{n+1}} 2\pi R = \frac{n!M}{R^n} .$$

Η σχέση

$$\left| f^{(n)}(z_0) \right| \leq \frac{n!M}{R^n} , \quad (2.10)$$

λέγεται ανισότητα Cauchy.

Αν η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο και φραγμένη κατ' απόλυτη τιμή, η ανισότητα Cauchy ισχύει για οποιοδήποτε κύκλο. Θέτουμε $R \rightarrow \infty$. Για οποιοδήποτε $n > 0$ το δεξί μέλος της ανισότητας τείνει στο 0. Επομένως, κάθε παράγωγος της $f(z_0)$ είναι 0 οπότε η $f(z)$ σε οποιοδήποτε σημείο z_0 είναι σταθερή. Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί το θεώρημα Liouville.

2.8 Ανάπτυγμα μιγαδικής συνάρτησης σε δυνάμεις

2.8.1 Σειρά Taylor

Κατ' αναλογία του αναπτύγματος Taylor μιας συνεχούς και παραγωγίσιμης πραγματικής συνάρτησης μπορούμε να γράφουμε τη σειρά Taylor μιας μιγαδικής συνάρτησης. Αν η $f(z)$ είναι αναλυτική συνάρτηση σε περιοχή με όριο μια κλειστή καμπύλη C και τα z και z_0 είναι δύο οποιαδήποτε εσωτερικά σημεία της περιοχής, τότε

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z - z_0)^n, \quad (2.11)$$

όπου

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}, \quad n \geq 0. \quad (2.12)$$

Το $f^{(n)}(z)$ συμβολίζει τη n -οστή παράγωγο της $f(z)$. Η «μηδενική» παράγωγος είναι η ίδια η συνάρτηση.

Χρησιμοποιώντας την ολοκληρωτική αναπαράσταση της παραγώγου (2.9), οι συντελεστές γράφονται εναλλακτικά

$$\alpha_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz, \quad n \geq 0. \quad (2.13)$$

Το συγκεκριμένο ανάπτυγμα σε δυνάμεις του $z - z_0$ ισχύει για οποιοδήποτε z στο οποίο η συνάρτηση είναι αναλυτική και είναι μοναδικό για κάθε σημείο z_0 . Αν η συνάρτηση έχει στο πεδίο ορισμού της σημεία που δεν είναι αναλυτική, το ανάπτυγμα Taylor συγκλίνει στη συνάρτηση (δηλαδή πιο απλά, ταυτίζεται με τη συνάρτηση) σε όλα τα σημεία z τα οποία απέχουν από το z_0 λιγότερο από όσο απέχει από αυτό το κοντινότερό του ιδιάζον σημείο της $f(z)$. Η απόσταση του z_0 από το κοντινότερό του ιδιάζον σημείο ονομάζεται *ακτίνα σύγκλισης* της σειράς.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(z) = e^z$ είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο. Οι παράγωγοί της στο σημείο $z = 0$ είναι $f^{(n)}(z) = e^z$ για $n \geq 0$. Επομένως $f^{(n)}(0) = 1$. Το ανάπτυγμα Taylor στο $z = 0$ είναι

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Παράδειγμα

Το ανάπτυγμα Taylor της συνάρτησης $f(z) = 1/z$ στο $z_0 = 1$ προκύπτει ως εξής:

Η συνάρτηση έχει απομονωμένο ιδιάζον σημείο το $z = 0$ (και είναι πόλος

πρώτης τάξης). Στο $z_0 = 1$ είναι αναλυτική. Μπορούμε να την αναπτύξουμε σε σειρά με δυνάμεις του $z - 1$. Αυτή θα συγκλίνει στην $f(z)$ σε όλα τα σημεία που είναι πιο κοντά στο z_0 απ' ό,τι ο πόλος, δηλαδή, σε όλα τα z που ικανοποιούν τη σχέση $|z - 1| < 1$.

Για τις παραγώγους της $f(z) = 1/z$ έχουμε

$$\begin{aligned} f'(z) &= -1/z^2, \\ f''(z) &= +2/z^3, \\ &\vdots \\ f^{(n)}(z) &= (-1)^n n! / z^{n+1}. \end{aligned}$$

Οι συντελεστές της σειράς Taylor είναι

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \frac{(-1)^n}{z_0^{n+1}} = (-1)^n, \quad n \geq 0.$$

Άρα η συνάρτηση μπορεί να γραφεί για $|z - 1| < 1$

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (z - 1)^n = 1 - (z - 1) + (z - 1)^2 - (z - 1)^3 + \dots.$$

Το ανάπτυγμα Taylor μιας γενικά πολύπλοκης συνάρτησης μπορεί να μας διευκολύνει στον υπολογισμό των τιμών της, του ολοκληρώματος ή της παραγώγου της κλπ.

Απόδειξη σύγκλισης

Η σύγκλιση στην $f(z)$ μπορεί να αποδειχθεί αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (2.9) για τη νιοστή παράγωγο της $f(z)$. Ορίζουμε στην περιοχή της αναλυτικότητας ένα κύκλο C με κέντρο το σημείο z_0 . Σύμφωνα με όσα αναπτύξαμε στην §2.6, οποιαδήποτε άλλη κλειστή καμπύλη να επιλέγαμε θα μπορούσε να συρρικνωθεί στον συγκεκριμένο κύκλο χωρίς να αλλάξει η τιμή του ολοκληρώματος στον τύπο της παραγώγου. Με αντικατάσταση, το δεξί μέλος της (2.11) γίνεται

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{n!} \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Ας υπολογίσουμε τον όρο

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\xi - z_0} \right)^n.$$

Προσέξτε ότι το σημείο ξ βρίσκεται πάνω στον κύκλο C και το z είναι στο εσωτερικό της: το ξ έχει μεγαλύτερη απόσταση από το κέντρο (z_0) παρά οποιοδήποτε εσωτερικό σημείο. Αυτό σημαίνει ότι αν θέσουμε $r = (z - z_0)/(\xi - z_0)$ ισχύει $|r| < 1$. Ο όρος που πρέπει να υπολογίσουμε γίνεται

$$\frac{1}{\xi - z_0} \sum_{n=0}^{\infty} r^n .$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} r \sum_{n=0}^N r^n &= \sum_{n=0}^N r^{n+1} = \sum_{n=1}^{N+1} r^n = \sum_{n=0}^N r^n - 1 + r^{N+1} \Rightarrow \\ (1-r) \sum_{n=0}^N r^n &= 1 - r^{N+1} \Rightarrow \sum_{n=0}^N r^n = \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{n=0}^N r^n = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1 - r^{N+1}}{1 - r} = \frac{1}{1 - r} .$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει καθώς για $|r| < 1$ το $\lim_{N \rightarrow \infty} r^{N+1}$ είναι 0. Επομένως,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z - z_0)^n}{(\xi - z_0)^{n+1}} = \frac{1}{\xi - z_0} \frac{1}{1 - (z - z_0)/(\xi - z_0)} = \frac{1}{\xi - z} .$$

Επιστρέφουμε στο δεξί μέλος της σειράς Taylor:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{1}{\xi - z} f(\xi) d\xi = f(z) .$$

Στην τελευταία σχέση χρησιμοποιήθηκε η (2.8). Καταλήξαμε στο αριστερό μέλος του αναπτύγματος Taylor.

Ταυτοτικό θεώρημα

Έστω ότι δύο συναρτήσεις $f(z)$, $g(z)$ είναι αναλυτικές σε μια περιοχή R και ταυτίζονται ($f(z) = g(z)$) σε μια υποπεριοχή S που περιλαμβάνεται στην R . Θα δείξουμε ότι ισχύει $f(z) = g(z)$ σε όλη την περιοχή R .

Επιλέγουμε ένα οποιοδήποτε σημείο z_0 στο εσωτερικό της S . Οι συναρτήσεις $f(z)$, $g(z)$, όπως προκύπτει από τον ορισμό της παραγώγου (2.1), εκτός από την ίδια τιμή στο z_0 έχουν και ίδια παράγωγο. Οι παράγωγοί τους, εκτός από ίσες, είναι αναλυτικές συναρτήσεις σε οποιοδήποτε σημείο της S άρα και οι δεύτερες παράγωγοι ταυτίζονται και, κατ' επέκταση, όλες οι παράγωγοι των δύο συναρτήσεων είναι ίσες στο σημείο z_0 . Αυτό όμως σημαίνει ότι οι σειρές Taylor των $f(z)$, $g(z)$ στο σημείο z_0 είναι ίδιες και συνεπώς η τιμή των συναρτήσεων είναι ίδια σε οποιοδήποτε σημείο της R .

2.8.2 Σειρά Laurent

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική σε κάθε σημείο μιας περιοχής εκτός από το σημείο z_0 το οποίο αποτελεί πόλο τάξης p για τη συνάρτηση. Η μη ύπαρξη παραγώγων στο z_0 δεν μας επιτρέπει να γράψουμε το ανάπτυγμα Taylor για την $f(z)$. Παρατηρήστε όμως ότι, από τον ορισμό του πόλου, η συνάρτηση $g(z) = (z - z_0)^p f(z)$ είναι αναλυτική. Το δικό της ανάπτυγμα Taylor είναι

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n .$$

Όμως η εξίσωση (2.9) για το σύνορο C της περιοχής αναλυτικότητας δίνει για τις παραγώγους της $g(z)$

$$g^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1}} d\xi = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1-p}} d\xi .$$

Η σειρά Taylor της $g(z)$ γίνεται

$$(z - z_0)^p f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1-p}} d\xi \right) (z - z_0)^n .$$

Συνοπώς

$$\begin{aligned} f(z) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{n+1-p}} d\xi \right) (z - z_0)^{n-p} \\ &\stackrel{m \equiv n-p}{=} \sum_{m=-p}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{m+1}} d\xi \right) (z - z_0)^m . \end{aligned}$$

Αν θέσουμε

$$\alpha_m = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\xi)}{(\xi - z_0)^{m+1}} d\xi , \quad m \geq -p , \quad (2.14)$$

έχουμε ένα ανάπτυγμα για την $f(z)$ που επεκτείνει τη σειρά Taylor καθώς περιλαμβάνει και αρνητικές δυνάμεις του $z - z_0$:

$$f(z) = \sum_{m=-p}^{\infty} \alpha_m (z - z_0)^m . \quad (2.15)$$

Η σειρά αυτή λέγεται *σειρά Laurent*. Συγκλίνει στη συνάρτηση για όλα τα σημεία που είναι πιο κοντά στο z_0 από άλλο ιδιάζον σημείο. Παρατηρήστε ότι ο τύπος (2.14) είναι ουσιαστικά ο τύπος στην εξίσωση (2.13).

Η σειρά Laurent, το ανάπτυγμα δηλαδή της συνάρτησης $f(z)$ γύρω από κάποιο απομονωμένο ιδιάζον σημείο z_0 , σε άθροισμα θετικών, μηδενικής και αρνητικών δυνάμεων του $(z - z_0)$ μπορεί να χρησιμοποιηθεί για το χαρακτηρισμό του σημείου. Έτσι, αν δεν περιλαμβάνει αρνητικές δυνάμεις, το z_0 είναι απαλείψιμο σημείο, αν έχει πεπερασμένο πλήθος p τέτοιων δυνάμεων είναι πόλος τάξης p και αν έχει άπειρο πλήθος είναι ουσιώδες ιδιάζον σημείο.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(z) = e^{1/z}$ δεν είναι αναλυτική στο $z = 0$. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα σε δυνάμεις του z αν θυμηθούμε ότι το ανάπτυγμα Taylor της e^w είναι

$$e^w = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{n!}.$$

Αν θέσουμε $w = 1/z$ έχουμε

$$e^{1/z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{-n}}{n!},$$

που αποτελεί τη σειρά Laurent της $f(z)$. Παρατηρήστε ότι αποτελείται από άπειρους όρους με αρνητικές δυνάμεις και έτσι το $z = 0$ είναι ουσιώδες ιδιάζον σημείο της $e^{1/z}$.

Υπόλοιπο

Στην περίπτωση που ένα ιδιάζον σημείο μιας συνάρτησης $f(z)$ είναι πόλος τάξης p , ο συντελεστής α_{-1} της σειράς Laurent (και όχι ο α_{-p} , όπως ίσως θα περιμέναμε) λέγεται *υπόλοιπο* της $f(z)$ στον πόλο $z = z_0$ και συμβολίζεται με $\mathcal{R}(z_0)$.

Από την (2.14) προκύπτει ένας εναλλακτικός ορισμός, μέσω ολοκληρώματος: το υπόλοιπο είναι

$$\mathcal{R}(z_0) \equiv \alpha_{-1} = \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi, \quad (2.16)$$

όπου C οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη που το μόνο ιδιάζον σημείο που περικλείει είναι ο πόλος z_0 .

Ένας τρίτος ορισμός, μέσω παραγώγου, για το υπόλοιπο σε πόλο τάξης p προκύπτει από την προηγούμενη σχέση αν θέσουμε $f(z) = g(z)/(z - z_0)^p$. Ο συνδυασμός της με την (2.9) (γραμμένης για την αναλυτική συνάρτηση $g(z)$) είναι

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(z_0) &= \frac{1}{2\pi i} \oint_C f(\xi) d\xi = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z_0)^p} d\xi \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{g(\xi)}{(\xi - z_0)^p} d\xi \\ &= \frac{1}{(p-1)!} g^{(p-1)}(z_0) \\ &= \frac{1}{(p-1)!} \frac{d^{p-1}}{dz^{p-1}} [(z - z_0)^p f(z)] \Big|_{z=z_0}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Στην περίπτωση που ο πόλος z_0 είναι απλός ($p = 1$) προκύπτει ότι

$$\mathcal{R}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0) f(z)]. \quad (2.18)$$

Αυτή είναι η πιο απλή σχέση για τον υπολογισμό του $\mathcal{R}(z_0)$ σε απλό πόλο.

Για να βρούμε τη σειρά Laurent μιας συνάρτησης πρέπει κανονικά να εφαρμόσουμε την εξίσωση (2.14) για να βρούμε τους συντελεστές της. Αν η συνάρτηση έχει κατάλληλη μορφή μπορούμε να καταλήξουμε στο ανάπτυγμα Laurent με πιο απλό τρόπο: αν το σημείο z_0 είναι πόλος τάξης n της $f(z)$, αναπτύσσουμε σε σειρά Taylor τη συνάρτηση $g(z) = (z - z_0)^n f(z)$ και κατόπιν διαιρούμε με $(z - z_0)^n$.

Παράδειγμα

Ας βρούμε τη σειρά Laurent της συνάρτησης $f(z) = \frac{1}{z(z-2)^3}$ στα δύο απομονωμένα ιδιάζοντα σημεία, $z = 0$ και $z = 2$.

Το σημείο $z = 0$ είναι απλός πόλος καθώς η $g(z) = zf(z) = 1/(z-2)^3$ είναι αναλυτική σε αυτό και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο του επιπέδου εκτός από το $z = 2$: συνεπώς μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Taylor στα εσωτερικά σημεία ενός κυκλικού δίσκου με κέντρο το $z = 0$ και ακτίνα 2.

Το ανάπτυγμα Taylor στο $z_0 = 0$ είναι

$$\frac{1}{(z-2)^3} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n z^n,$$

με

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{(z-2)^3} \right) \Big|_{z=0} = \frac{1}{n!} \left((-1)^n \frac{(n+2)!}{2^{n+3}} \right) \Big|_{z=0} = -\frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{z} \frac{1}{(z-2)^3} = -\frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} z^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{2^{n+4}} z^{n-1} \\ &= -\frac{1}{8} z^{-1} - \frac{3}{16} - \frac{3}{16} z - \frac{5}{32} z^2 - \dots \end{aligned}$$

Καθώς το ανάπτυγμα σε δυνάμεις του $(z-0)$ έχει όρο ανάλογο του z^{-1} και όχι πιο αρνητικής τάξης, επιβεβαιώνουμε ότι το ιδιάζον σημείο $z = 0$ είναι πόλος πρώτης τάξης. Το υπόλοιπο της $f(z)$ σε αυτό είναι ο συντελεστής του όρου που έχει το z^{-1} , δηλαδή $-1/8$. Η ίδια τιμή προκύπτει για το υπόλοιπο εφαρμόζοντας τη σχέση (2.18):

$$\mathcal{R}(z_0) = \lim_{z \rightarrow 0} [zf(z)] = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{(z-2)^3} = -\frac{1}{8}.$$

Για το σημείο $z = 2$ ακολουθούμε ανάλογο σκεπτικό: το ανάπτυγμα Taylor της αναλυτικής συνάρτησης $g(z) = 1/z$ στο $z = 2$, συγκλίνει στην $g(z)$ σε κάθε σημείο του κυκλικού δίσκου με κέντρο το $z = 2$ και ακτίνα 2 (μέχρι δηλαδή το

δικό της ιδιάζον σημείο $z = 0$) και είναι

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-2)^n ,$$

με

$$\alpha_n = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{dz^n} \left(\frac{1}{z} \right) \Big|_{z=2} = \frac{1}{n!} \left((-1)^n \frac{n!}{z^{n+1}} \right) \Big|_{z=2} = \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} .$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} f(z) &= \frac{1}{(z-2)^3} \frac{1}{z} = \frac{1}{(z-2)^3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{n+1}} (z-2)^{n-3} \\ &= \frac{1}{2} (z-2)^{-3} - \frac{1}{4} (z-2)^{-2} + \frac{1}{8} (z-2)^{-1} - \frac{1}{16} + \frac{1}{32} (z-2) - \dots . \end{aligned}$$

Από το ανάπτυγμα Laurent γύρω από το $z = 2$ συμπεραίνουμε ότι το ιδιάζον σημείο $z = 2$ είναι πόλος τρίτης τάξης με υπόλοιπο της $f(z)$ σε αυτό ίσο με $1/8$.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση

$$f(z) = \frac{e^{iz}}{(z^2 + 1)^2}$$

έχει ιδιάζοντα σημεία τα $z = \pm i$ καθώς $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$. Είναι δεύτερης τάξης πόλοι καθώς οι συναρτήσεις $g(z) = (z \mp i)^2 f(z)$ είναι αναλυτικές στα $z = \pm i$. Τα υπόλοιπα μπορούν να βρεθούν εύκολα από την εξίσωση (2.17):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\pm i) &= \frac{d}{dz} [(z \mp i)^2 f(z)] \Big|_{z=\pm i} = \frac{d}{dz} \left[\frac{e^{iz}}{(z \pm i)^2} \right] \Big|_{z=\pm i} = e^{iz} \frac{zi \mp 1 - 2}{(z \pm i)^3} \Big|_{z=\pm i} \\ &= e^{\mp 1} \frac{1 \pm 1}{4i} . \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$\mathcal{R}(i) = -\frac{i}{2e} , \quad \mathcal{R}(-i) = 0 .$$

2.9 Θεώρημα των υπολοίπων

Ας προσέξουμε την εξίσωση (2.16): συσχετίζει το υπόλοιπο μιας συνάρτησης σε ένα πόλο της με το ολοκλήρωμά της κατά μήκος μιας κλειστής καμπύλης C που το μόνο ιδιάζον σημείο που περικλείει είναι ο πόλος z_0 . Μπορεί να χρησιμοποιηθεί

για να βρούμε την τιμή του συγκεκριμένου ολοκληρώματος αν έχουμε υπολογίσει την τιμή του υπολοίπου με κάποιο άλλο τρόπο:

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \mathcal{R}(z_0) .$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα μπορούμε να καταλήξουμε με απευθείας ολοκλήρωση της σειράς Laurent.

Στην εξίσωση (2.7) οι καμπύλες C_i περικλείουν από ένα πόλο της συνάρτησης $f(z)$, z_i , $i = 1, 2, \dots$. Η εφαρμογή της σχέσης που μόλις καταλήξαμε για ολοκλήρωμα σε τέτοια καμπύλη οδηγεί στο ακόλουθο *θεώρημα των υπολοίπων*:

Έστω ότι C είναι κλειστή καμπύλη, πάνω στην οποία και στο εσωτερικό αυτής μια συνάρτηση $f(z)$ είναι αναλυτική εκτός από πεπερασμένο αριθμό εσωτερικών σημείων z_i που είναι πόλοι. Τότε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z)$ κατά μήκος της C υπολογίζεται από τη σχέση

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_i \mathcal{R}(z_i) . \quad (2.19)$$

Προσέξτε ότι λαμβάνουμε υπόψη μόνο τους πόλους που περικλείονται από την καμπύλη C .

2.10 Υπολογισμός ολοκληρωμάτων

Μιγαδικά ολοκληρώματα σε κλειστή καμπύλη είναι σχετικά εύκολο να υπολογιστούν με χρήση του θεωρήματος των υπολοίπων. Η διαδικασία αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον εύκολο υπολογισμό ολοκληρώματος πραγματικής συνάρτησης, αρκεί αυτό να έχει κατάλληλη μορφή. Θα δούμε παρακάτω τον τρόπο υπολογισμού ολοκληρωμάτων τριγωνομετρικών εκφράσεων και ολοκληρωμάτων με άπειρα όρια.

2.10.1 Ολοκλήρωμα τριγωνομετρικής έκφρασης

Μια έκφραση που περιλαμβάνει τριγωνομετρικές συναρτήσεις μιας γωνίας θ μπορεί εύκολα να ολοκληρωθεί στο διάστημα $[0, 2\pi]$ αν χρησιμοποιήσουμε τις σχέσεις (1.18). Η αντικατάσταση των τριγωνομετρικών συναρτήσεων με όρους εξαρτώμενους από το $e^{i\theta}$ και η επακόλουθη αλλαγή μεταβλητής $z = e^{i\theta}$ καταλήγει σε ολοκληρωτέα ποσότητα που είναι συνάρτηση της μιγαδικής ποσότητας z κατά μήκος κλειστής διαδρομής, ενός κύκλου με ακτίνα 1 και κέντρο το 0. Το ολοκλήρωμα της μιγαδικής συνάρτησης και συνεπώς, το αρχικό ολοκλήρωμα, υπολογίζεται εύκολα αν βρούμε τα υπόλοιπα στους πόλους της συνάρτησης εντός του μοναδιαίου κύκλου και εφαρμόσουμε την εξίσωση (2.19).

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 - 3 \sin \theta} d\theta .$$

Η εφαρμογή της εξίσωσης (1.18α') μετατρέπει το ολοκλήρωμα στο

$$\int_0^{2\pi} \frac{2i}{10i - 3(e^{i\theta} - e^{-i\theta})} d\theta .$$

Με την αντικατάσταση $z = e^{i\theta}$ και καθώς $dz = iz d\theta$, καταλήγουμε στο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{2}{-3z^2 + 10iz + 3} dz ,$$

όπου C ο μοναδιαίος κύκλος με κέντρο την αρχή (το σημείο $0 + i0$).

Η συνάρτηση $f(z) = 2/(-3z^2 + 10iz + 3)$ έχει δύο πόλους, τις ρίζες του παρονομαστή: $z_1 = i/3$, $z_2 = 3i$. Από τα δύο, μόνο το πρώτο σημείο είναι στο εσωτερικό του μοναδιαίου κύκλου C (έχει μέτρο μικρότερο από 1). Είναι πόλος πρώτης τάξης για την $f(z)$ καθώς η συνάρτηση $g(z) = (z - z_1)f(z) = 2/(9i - 3z)$ είναι αναλυτική στο z_1 . Το υπόλοιπο της $f(z)$ στο z_1 προκύπτει από την εξίσωση (2.18) ότι είναι

$$\mathcal{R}(z_1) = \lim_{z \rightarrow z_1} [(z - z_1)f(z)] = \lim_{z \rightarrow i/3} \frac{2}{9i - 3z} = \frac{1}{4i} .$$

Επομένως, το μιγαδικό (και το αρχικό μας) ολοκλήρωμα είναι ίσο με $2\pi i/(4i) = \pi/2$. Παρατηρήστε ότι προέκυψε πραγματικό αποτέλεσμα, όπως αναμένουμε για ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης.

2.10.2 Ολοκλήρωμα με άπειρα όρια ρητής συνάρτησης

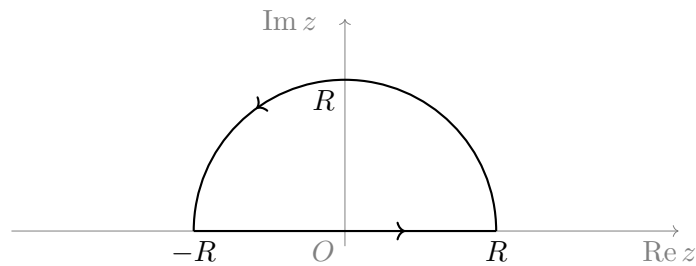
Ας εξετάσουμε πώς και υπό ποιες συνθήκες μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα των υπολοίπων για να υπολογίσουμε ολοκλήρωμα πραγματικής συνάρτησης με άπειρα όρια, δηλαδή της μορφής

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx ,$$

όπου η $f(x)$ είναι ρητή συνάρτηση, δηλαδή λόγος πολωνύμων, $p(x)/q(x)$, που δεν μπορεί να αναχθεί περισσότερο (τα $p(x)$, $q(x)$ δεν έχουν κοινό παράγοντα). Καταρχάς επεκτείνουμε την πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής στο μιγαδικό επίπεδο, δηλαδή θέτουμε όπου x το z και όπου $f(x)$ το $f(z)$. Έστω ότι η $f(z)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

- είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο με $\text{Im } z \geq 0$ εκτός ίσως από απομονωμένα ιδιάζοντα σημεία εκτός του πραγματικού άξονα (δηλαδή με θετικό φανταστικό μέρος) με πεπερασμένο πλήθος.
- Η συνάρτηση $zf(z)$ τείνει στο 0 όταν $|z| \rightarrow \infty$ (ή, πιο αυστηρά, η μέγιστη τιμή ως προς θ του μέτρου της $f(z)$ για $z = Re^{i\theta}$ επί R τείνει στο 0 όταν το R τείνει στο άπειρο).
- Τα ολοκληρώματα $\int_0^{+\infty} f(x) dx$ και $\int_{-\infty}^0 f(x) dx$ υπάρχουν και είναι πεπερασμένα.

Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να συμπληρώσουμε την ανοιχτή διαδρομή ολοκλήρωσης (που είναι ο πραγματικός άξονας) με ένα ημικύκλιο με κέντρο το $0 + i0$ και ακτίνα $R \rightarrow \infty$ στο θετικό ημιεπίπεδο που η συνάρτηση είναι αναλυτική, όπως στο Σχήμα 2.6. Η δεύτερη συνθήκη εξασφαλίζει ότι στο συγκεκριμένο ημικύκλιο, C_R ,



Σχήμα 2.6: Επέκταση διαδρομής ολοκλήρωσης με ημικύκλιο στο άπειρο

το ολοκλήρωμα είναι 0. Συγκεκριμένα, καθώς

$$\left| \int_{C_R} f(z) dz \right| \leq \max |f(z)| \pi R ,$$

η συνθήκη $\max |f(z)| R \rightarrow 0$ μηδενίζει το ολοκλήρωμα στην C_R . Επομένως, χωρίς να αλλάξει η τιμή του ζητούμενου ολοκληρώματος, έχουμε μεταβάλει τη διαδρομή ολοκλήρωσης από ανοιχτή (τον πραγματικό άξονα) σε κλειστή (τον πραγματικό άξονα και το ημικύκλιο). Με αυτή την τροποποίηση μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα υπολοίπων και συνεπώς ισχύει

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \oint_C f(z) dz = 2\pi i \sum_i \mathcal{R}(z_i) ,$$

όπου στο άθροισμα των υπολοίπων λαμβάνονται υπόψη μόνο οι πόλοι στο θετικό ημιεπίπεδο που η συνάρτηση είναι αναλυτική (δηλαδή μόνο αυτοί με $\text{Im } z_i > 0$).

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_0^{\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^4} dx, \quad \alpha > 0.$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συμμετρική οπότε μπορούμε εύκολα να αλλάξουμε τα όρια του ολοκληρώματος σε $\pm\infty$:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(x^2 + \alpha^2)^4} dx.$$

Η επέκταση στο μιγαδικό επίπεδο δίνει την ολοκληρωτέα συνάρτηση

$$f(z) = \frac{1}{2(z^2 + \alpha^2)^4}.$$

Είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τις ρίζες του $z^2 + \alpha^2$. Τα σημεία $z_1 = \alpha i$ και $z_2 = -\alpha i$ είναι πόλοι τέταρτης τάξης. Η συμπλήρωση της διαδρομής ολοκλήρωσης με ημικύκλιο στο ημιεπίπεδο με θετικό φανταστικό μέρος δίνει

$$I = \oint_C \frac{1}{2(z^2 + \alpha^2)^4} dz.$$

Σύμφωνα με το θεώρημα υπολοίπων, $I = 2\pi i \mathcal{R}(z_1)$. Από τη σχέση (2.17) έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{R}(\alpha i) &= \frac{1}{3!} \frac{d^3}{dz^3} \left[(z - \alpha i)^4 \frac{1}{2(z^2 + \alpha^2)^4} \right] \Big|_{z=\alpha i} = \frac{1}{6} \frac{d^3}{dz^3} \left[\frac{1}{2(z + \alpha i)^4} \right] \Big|_{z=\alpha i} \\ &= \frac{1}{12} \left[\frac{(-4)(-5)(-6)}{(z + \alpha i)^7} \right] \Big|_{z=\alpha i} = \frac{5}{64i\alpha^7}. \end{aligned}$$

Άρα το ολοκλήρωμα είναι

$$I = \frac{5\pi}{32\alpha^7}.$$

2.10.3 Ολοκλήρωμα με άπειρα όρια ρητής συνάρτησης με πραγματικό πόλο

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση έχει επιπλέον ένα απλό πόλο πάνω στον άξονα των πραγματικών, έστω στο σημείο $\bar{z} = \bar{x}$. Το ολοκλήρωμα που έχουμε να υπολογίσουμε, το

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx,$$

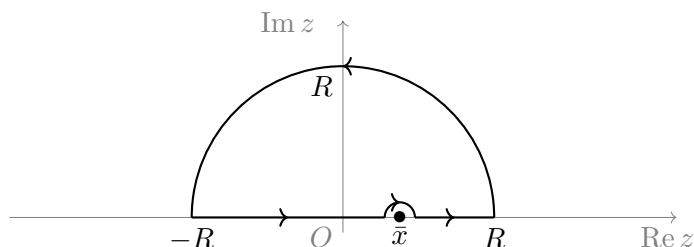
δεν ορίζεται παρά μόνο μέσω του παρακάτω ορίου:

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \left[\int_{-\infty}^{\bar{x}-\rho} f(x) dx + \int_{\bar{x}+\rho}^{+\infty} f(x) dx \right].$$

Η τιμή που προκύπτει αποτελεί την *κύρια τιμή* κατά Cauchy του ολοκληρώματος και συμβολίζεται με

$$P \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right].$$

Για τον υπολογισμό της μπορούμε να ακολουθήσουμε τη διαδικασία (και τις προϋποθέσεις) που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά τώρα η κλειστή διαδρομή ολοκλήρωσης της μιγαδικής επέκτασης πρέπει να παρακάμψει τον πόλο στον πραγματικό άξονα. Μπορούμε να επιλέξουμε ημικυκλική καμπύλη γύρω από το \bar{x} με ακτίνα ρ , δηλαδή τη μορφή της καμπύλης στο Σχήμα 2.7, και να θεωρήσουμε ότι $R \rightarrow \infty$, $\rho \rightarrow 0$. Η συνολική καμπύλη ολοκλήρωσης C αποτελείται



Σχήμα 2.7: Παράκαμψη πόλου στον πραγματικό άξονα

από τα δύο τμήματα στον πραγματικό άξονα, $C_1 \equiv [-R, \bar{x} - \rho]$, $C_2 \equiv [\bar{x} + \rho, +R]$, την ημικυκλική παράκαμψη του πόλου, C_ρ , και το ημικύκλιο με ακτίνα R , C_R . Ισχύει ότι

$$\oint_C f(z) dz = \int_{C_1} f(z) dz + \int_{C_2} f(z) dz + \int_{C_\rho} f(z) dz + \int_{C_R} f(z) dz.$$

Όταν $R \rightarrow \infty$ και $\rho \rightarrow 0$ οι δύο πρώτοι όροι του αθροίσματος συναποτελούν την κύρια τιμή του ολοκληρώματος που πρέπει να υπολογίσουμε. Επίσης, σε αυτά τα όρια ισχύει $\int_{C_R} f(z) dz \rightarrow 0$. Άρα

$$P \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = \lim_{R \rightarrow \infty, \rho \rightarrow 0} \left[\oint_C f(z) dz - \int_{C_\rho} f(z) dz \right].$$

Το πρώτο ολοκλήρωμα, στην κλειστή καμπύλη C , υπολογίζεται από το θεώρημα υπολοίπων. Απομένει να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στο ημικύκλιο παράκαμψης του πραγματικού απλού πόλου. Η σειρά Laurent για τη συνάρτηση $f(z)$ στο \bar{z} μπορεί να γραφεί ως άθροισμα μιας αναλυτικής συνάρτησης, $\phi(z)$, που περιλαμβάνει τους όρους μηδενικής και θετικών δυνάμεων του $(z - \bar{z})$, και του όρου $1/(z - \bar{z})$:

$$f(z) = \phi(z) + \frac{a_{-1}}{z - \bar{z}}.$$

Το ολοκλήρωμα της $\phi(z)$ στο C_ρ όταν $\rho \rightarrow 0$ τείνει στο 0 καθώς η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι συνεχής και πεπερασμένη και το μήκος της καμπύλης ολοκλήρωσης τείνει στο 0. Επομένως

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} \frac{a-1}{z-\bar{z}} dz .$$

Ας θέσουμε $z = \bar{z} + \rho e^{i\theta}$. Η ολοκλήρωση στην καμπύλη C_ρ γίνεται ολοκλήρωση από π έως το 0 για τη μεταβλητή θ :

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{C_\rho} f(z) dz = \lim_{\rho \rightarrow 0} \int_{\pi}^0 \frac{a-1}{\rho e^{i\theta}} i \rho e^{i\theta} d\theta = -\pi a_{-1} i = -\pi i \mathcal{R}(\bar{z}) .$$

Συνολικά καταλήγουμε ότι

$$P \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = 2\pi i \sum_i \mathcal{R}(z_i) + \pi i \mathcal{R}(\bar{z}) ,$$

όπου z_i οι πόλοι που περικλείονται από την κλειστή καμπύλη.

Εύκολα αντιλαμβανόμαστε ότι σε περίπτωση που η συνάρτηση έχει περισσότερους από ένα απλούς πόλους στον πραγματικό άξονα, \bar{z}_k , θα έχουμε περισσότερα ημικύκλια παράκαμψης στην κλειστή καμπύλη και ο τύπος υπολογισμού της κύριας τιμής του ζητούμενου ολοκληρώματος γίνεται

$$P \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx \right] = 2\pi i \sum_i \mathcal{R}(z_i) + \pi i \sum_k \mathcal{R}(\bar{z}_k) . \quad (2.20)$$

Παράδειγμα

Το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 - \alpha^2} dx ,$$

με $\alpha > 0$, δεν ορίζεται καθώς η ολοκληρωτέα συνάρτηση απειρίζεται στο $x = 0$. Ας υπολογίσουμε όμως την κύρια τιμή του ολοκληρώματος:

Η μιγαδική επέκταση της ολοκληρωτέας ποσότητας, $f(z) = 1/(z^2 - \alpha^2)$, είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία $\bar{z}_1 = \alpha$ και $\bar{z}_2 = -\alpha$. Τα σημεία αυτά είναι απλοί πόλοι της συνάρτησης με υπόλοιπα $1/(2\alpha)$ και $-1/(2\alpha)$ αντίστοιχα. Η συνάρτηση $zf(z)$ τείνει στο 0 όταν το z απειρίζεται, επομένως μπορούμε να εφαρμόσουμε την εξίσωση (2.20) για τον υπολογισμό της κύριας τιμής του ζητούμενου ολοκληρώματος. Προκύπτει ότι

$$P \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + \alpha^2} dx \right] = \pi i \mathcal{R}(\alpha) + \pi i \mathcal{R}(-\alpha) = \pi i \left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{2\alpha} \right) = 0 .$$

2.10.4 Ολοκλήρωμα ρητής συνάρτησης επί τριγωνομετρική

Αν η ολοκληρωτέα συνάρτηση $f(x)$ είναι της μορφής $\cos(\alpha x) g(x)$ ή $\sin(\alpha x) g(x)$ με $g(x)$ ρητή συνάρτηση, μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα υπολοίπων για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος. Θυμηθείτε ότι

$$\cos \theta = \operatorname{Re}[e^{i\theta}] , \quad \sin \theta = \operatorname{Im}[e^{i\theta}] ,$$

οπότε το ολοκλήρωμα της $f(x)$ ανάγεται στο

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} g(x) dx . \quad (2.21)$$

Θεωρούμε ότι το α είναι θετικός· αν όχι, είναι τετριμμένη η τροποποίηση που πρέπει να κάνουμε για να γίνει θετικός: με $\alpha < 0$ έχουμε

$$\cos(\alpha x) = \cos(|\alpha| x) , \quad \sin(\alpha x) = -\sin(|\alpha| x) .$$

Για τον υπολογισμό του ολοκληρώματος (2.21) χρειαζόμαστε το *λήμμα του Jordan*: Αν η μιγαδική επέκταση της $g(x)$, η συνάρτηση $g(z)$,

- είναι αναλυτική στο ημιεπίπεδο $\operatorname{Im} z \geq 0$ εκτός ίσως από απομονωμένα ιδιάζοντα σημεία με πεπερασμένο πλήθος,
- τείνει στο 0 όταν $|z| \rightarrow \infty$ ή, πιο αυστηρά, η μέγιστη τιμή ως προς θ του μέτρου της $g(z)$ για $z = Re^{i\theta}$ τείνει στο 0 όταν το R τείνει στο άπειρο,

τότε το ολοκλήρωμα της $f(z)$ στο ημικύκλιο C_R στο θετικό ημιεπίπεδο, με κέντρο το $0 + i0$ και ακτίνα που τείνει στο άπειρο, μηδενίζεται:

$$\int_{C_R} e^{i\alpha z} g(z) dz \rightarrow 0 , \quad \text{όταν } R \rightarrow \infty .$$

Με τις παραπάνω συνθήκες,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{i\alpha x} g(x) dx = \oint_C e^{i\alpha z} g(z) dz ,$$

όπου C η κλειστή καμπύλη στο Σχήμα 2.6. Το τελευταίο ολοκλήρωμα υπολογίζεται με το θεώρημα υπολοίπων.

Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε το

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx , \quad \text{με } \alpha > 0 .$$

Το ολοκλήρωμα επεκτείνεται εύκολα στο διάστημα $(-\infty, \infty)$:

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos(\alpha x)}{x^2 + 1} dx .$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι το πραγματικό μέρος του

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx .$$

Η συνάρτηση $g(z) = 1/(z^2 + 1)$ είναι αναλυτική παντού εκτός από τα σημεία $z_{\pm} = \pm i$ που είναι απλοί πόλοι. Επίσης, ισχύει

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{1}{z^2 + 1} = 0 .$$

Επομένως, ικανοποιεί τις συνθήκες του λήμματος Jordan.

Η συνάρτηση $e^{i\alpha z}/(z^2 + 1)$ έχει υπόλοιπο $e^{-\alpha}/(2i)$ στο $z_+ = i$. Το ολοκλήρωμα είναι

$$I = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{i\alpha x}}{x^2 + 1} dx \right] = \frac{1}{2} \operatorname{Re}[2\pi i \mathcal{R}(i)] = \pi e^{-\alpha}/2 .$$

2.11 Συνάρτηση Γ

Θυμηθείτε ότι το παραγοντικό ενός ακέραιου αριθμού n ορίζεται από τη σχέση

$$n! = \begin{cases} 1 \times 2 \times \cdots \times (n-1) \times n , & n > 0 , \\ 1 , & n = 0 . \end{cases}$$

Η συνάρτηση $\Gamma(n)$ ορίζεται ως η επέκταση του παραγοντικού σε πραγματικό ή μιγαδικό όρισμα. Αν το όρισμα n είναι ακέραιο, ισχύει

$$\Gamma(n) = (n-1)! .$$

Για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό z με $\operatorname{Re}(z) > 0$, η συνάρτηση $\Gamma(z)$ μπορεί να οριστεί μέσω ολοκληρώματος:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt . \quad (2.22)$$

Η συνάρτηση $\Gamma(z)$ είναι αναλυτική σε όλο το μιγαδικό επίπεδο εκτός από τα σημεία $z = 0, -1, -2, \dots$. Το υπόλοιπο στο σημείο $z = -k$ είναι

$$\mathcal{R}(-k) = \frac{(-1)^k}{k!} .$$

Από τον ορισμό μπορούμε να εξαγάγουμε τις ακόλουθες ιδιότητες, μεταξύ άλλων:

$$\begin{aligned} \Gamma(1+z) &= z\Gamma(z) , \\ \Gamma(1-z) &= -z\Gamma(-z) , \\ \Gamma(z)\Gamma(-z) &= -\frac{\pi}{z \sin(\pi z)} , \end{aligned}$$

ενώ μπορούμε να υπολογίσουμε ότι $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

2.11.1 Εφαρμογή

Η χρήση της συνάρτησης $\Gamma(x)$ διευκολύνει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx$$

με ακέραιο n ως εξής: παρατηρούμε καταρχάς ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx = 2 \int_0^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx .$$

Κατόπιν, κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = x^2$ οπότε το αρχικό ολοκλήρωμα γίνεται

$$2 \int_0^{\infty} t^n e^{-t} \frac{1}{2\sqrt{t}} dt = \int_0^{\infty} t^{n-1/2} e^{-t} dt = \int_0^{\infty} t^{n+1/2-1} e^{-t} dt = \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) .$$

Ξέρουμε όμως ότι

$$\begin{aligned} \Gamma(n+z) &= \Gamma(1+(n-1+z)) = (n-1+z)\Gamma(n-1+z) \\ &= (n-1+z)(n-2+z)\Gamma(n-2+z) = \dots \\ &= (n-1+z)(n-2+z) \dots z\Gamma(z) \\ &= \Gamma(z) \prod_{k=0}^{n-1} (k+z) . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-x^2} dx &= \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \prod_{k=0}^{n-1} \left(k + \frac{1}{2}\right) \\ &= \sqrt{\pi} \prod_{k=0}^{n-1} \frac{2k+1}{2} = \sqrt{\pi} \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n} . \end{aligned}$$

Ενδεικτικές τιμές:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx &= \sqrt{\pi} , \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-x^2} dx &= \frac{1}{2}\sqrt{\pi} , \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-x^2} dx &= \frac{3}{4}\sqrt{\pi} , \\ \int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-x^2} dx &= \frac{15}{8}\sqrt{\pi} . \end{aligned}$$

Αν ο εκθέτης του x είναι περιττός αριθμός, το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-x^2} dx$$

είναι 0.

2.12 Ασκήσεις

1. Βρείτε το πραγματικό μέρος της συνάρτησης $f(z) = (z+i)/(z-i)$ που ορίζεται σε κάθε σημείο του μιγαδικού επιπέδου εκτός από το i . Δείξτε ότι γίνεται 0 όταν $|z| = 1$.
2. Βρείτε το πραγματικό και φανταστικό μέρος $u(x, y)$, $v(x, y)$ αντίστοιχα, της συνάρτησης $f(z) = \sin z^*$.
3. Σε ποια περιοχή του μιγαδικού επιπέδου είναι αναλυτική η $f(z) = |x| - i|y|$;
4. Χρησιμοποιήστε τις συνθήκες Cauchy–Riemann για να εξετάσετε την παραγωγισιμότητα και να βρείτε την παράγωγο της συνάρτησης $f(z) = e^z$.
5. Να βρεθούν όλα τα σημεία του μιγαδικού επιπέδου στα οποία η $f(z) = \sin z^*$ είναι παραγωγίσιμη και να υπολογιστεί η παράγωγος. Σε ποια σημεία η $f(z)$ είναι αναλυτική;

6. Έστω η συνάρτηση

$$f(z) = \begin{cases} (z^*)^2/z, & z \neq 0, \\ 0, & z = 0. \end{cases}$$

Εξετάστε αν έχει παράγωγο στο $z = 0$.

7. Εξετάστε αν είναι αναλυτικές οι συναρτήσεις $f(z) = x$ και $g(z) = 2x + 2ixy$.
8. Είναι η $f(z) = z - z^*$ αναλυτική σε ολόκληρο το μιγαδικό επίπεδο;
9. Βρείτε μια αναλυτική συνάρτηση που το φανταστικό της μέρος είναι $v(x, y) = (y \cos y + x \sin y)e^x$.
10. Βρείτε την παράγωγο των $\cosh z$ και $\sinh z$.
11. Βρείτε και χαρακτηρίστε τα ιδιάζοντα σημεία των συναρτήσεων
 - $f(z) = (1 - z)^{-1} - (z + 1)^{-1}$,
 - $f(z) = 1/(z - 1)^2$,
 - $f(z) = e^{iz}$,
 - $f(z) = \sqrt{z - 1}$,
 - $f(z) = \tan z$,
 - $f(z) = \tanh z$.
12. Βρείτε το ολοκλήρωμα της $f(z) = \operatorname{Re} z$ στις κλειστές διαδρομές του Σχήματος 2.4α'.
13. Εφαρμόστε το θεώρημα και την εξίσωση Cauchy για να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα της $f(z) = e^z/z$ κατά μήκος κλειστής διαδρομής που (α') περικλείει το μηδέν, (β') δεν περικλείει το μηδέν.

14. Με τη βοήθεια της εξίσωσης Cauchy υπολογίστε το ολοκλήρωμα της $f(z) = 1/(z^2 - 4z + 5)$ στην κυκλική διαδρομή με κέντρο το $\bar{z} = 1 + i$ και ακτίνα 2.
15. Υπολογίστε τα ολοκληρώματα των συναρτήσεων $f_1(z) = z^2 - 1$ και $f_2(z) = 1/z^2$ με διαδρομή ολοκλήρωσης τον κύκλο με κέντρο την αρχή και ακτίνα R .
16. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα της συνάρτησης $f(z) = \operatorname{Im} z$ όταν η διαδρομή ολοκλήρωσης είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο με κορυφές τα σημεία $-2+i$, $2+i$, $2-i$ και $-2-i$.
17. Βρείτε τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων
- $f(z) = e^{iz}$ στο $z_0 = 0$,
 - $f(z) = \cos z$ στο $z_0 = 0$,
 - $f(z) = [z(z-1)]^{-1}$ στο $z_0 = i$.
18. Γράψτε τους τέσσερις πρώτους όρους της σειράς Taylor της συνάρτησης e^z γύρω από το $z = i$ και γύρω από το $z = 1$, και τους τρεις πρώτους όρους της σειράς Taylor της συνάρτησης $\sin z$ γύρω από το 0.
19. Βρείτε τις σειρές Laurent των συναρτήσεων
- e^z/z^2 ,
 - $e^z/(z-1)$,
- στα ιδιάζοντα σημεία τους.
20. Αναπτύξτε το $\cos z$ σε δυνάμεις του z και δείξτε ότι
- $$\cos i = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}.$$
21. Βρείτε το ανάπτυγμα Laurent των συναρτήσεων
- $f(z) = [(z-2)(z+1)]^{-1}$ στο $z_0 = 2$,
 - $f(z) = e^{iz}/z$ στο $z_0 = 0$,
 - $f(z) = e^{iz}/z^2$ στο $z_0 = 0$.
22. Βρείτε τους πόλους και υπολογίστε εκεί τα υπόλοιπα των συναρτήσεων
- $f(z) = (z^2 + 2)/(z-1)$,
 - $f(z) = (z/(2z+1))^3$,
 - $f(z) = e^z/(z^2 + \pi^2)$,
 - $f(z) = z/\cos z$.

Κατόπιν, υπολογίστε τα ολοκληρώματά τους στον κύκλο με κέντρο την αρχή και ακτίνα 4.

23. Υπολογίστε στο $[0, 2\pi]$ τα ολοκληρώματα ως προς θ των συναρτήσεων

- $f(\theta) = \cos \theta / (5 - 4 \cos \theta)$
- $f(\theta) = \cos 2\theta / (\alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta \cos \theta)$ με $\beta > \alpha > 0$.

24. Υπολογίστε την κύρια τιμή των ολοκληρωμάτων στο $(-\infty, +\infty)$ ως προς x των συναρτήσεων

- $f(x) = e^{ix} / (x - 1)$,
- $f(x) = e^{ix} / (x^2 + 4)$,
- $f(x) = \cos x / (x^2 + 4)$,
- $f(x) = e^{-i2x} / (x^2 + 4)$.

25. Υπολογίστε με χρήση μιγαδικής ολοκλήρωσης τα εξής ολοκληρώματα:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{1 + \cos^2 \theta} d\theta, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx, \quad \int_0^{\infty} \frac{\cos(2x)}{1 + x^2} dx, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(2x)}{x^2 - 1} dx.$$

26. Υπολογίστε με χρήση μιγαδικής ολοκλήρωσης το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{z - i} dz.$$

Κεφάλαιο 3

Διανυσματικοί χώροι

3.1 Εισαγωγή

Πολλά μεγέθη στα Μαθηματικά, τη Φυσική αλλά και την καθημερινή μας ζωή, προσδιορίζονται πλήρως από ένα αριθμό. Τα μεγέθη αυτά μπορεί να είναι *αδιάστατα*, όπως ο λόγος της περιφέρειας ενός κύκλου προς τη διάμετρό του· όπως γνωρίζουμε έχει τιμή $3.14159\dots$. Συχνά, ο αριθμός που εκφράζει ένα μέγεθος συνοδεύεται από κάποια μονάδα μέτρησης. Έτσι, η θερμοκρασία ενός τόπου μπορεί να είναι 29°C ή ο όγκος ενός μπουκαλιού νερού να είναι 500 mL . Τέτοια μεγέθη, που χρειάζονται μόνο ένα αριθμό για να γνωρίζουμε πλήρως την κατάστασή τους, χαρακτηρίζονται ως *βαθμωτά* (scalar).

Πολλά άλλα μεγέθη προσδιορίζονται από μια αριθμητική τιμή (το *μέτρο* τους), μια ευθεία στο χώρο (τη *διεύθυνσή* τους), και την κατεύθυνσή τους πάνω στην ευθεία (τη *φορά* τους). Τα μεγέθη αυτά χαρακτηρίζονται ως *διανυσματικά* (vector) και αναπαριστώνται σχηματικά από βέλος συγκεκριμένου μήκους στον τριδιάστατο χώρο. Παράδειγμα διανυσματικής ποσότητας είναι η επιτάχυνση που δέχεται ένα σώμα στο βαρυτικό πεδίο της γης: λέμε ότι η τιμή της είναι περίπου 9.81 m/s^2 , η διεύθυνσή της είναι στην ευθεία που περνά από το σώμα και το κέντρο της γης και η φορά της είναι από το σώμα προς τη γη.

Η αναπαράσταση ενός διανύσματος ως βέλος στον χώρο είναι ανεξάρτητη από συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς. Για να μπορέσουμε όμως να αναπτύξουμε και να γενικεύσουμε τη μαθηματική έννοια του διανύσματος, πρέπει να το περιγράψουμε με τις *συνιστώσες* του σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Ας θυμηθούμε ότι ένα τριδιάστατο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων ορίζεται από τρεις διαφορετικούς άξονες που τέμνονται σε ένα σημείο και είναι ανά δύο κάθετοι μεταξύ τους. Ένα διάνυσμα σε τέτοιο σύστημα περιγράφεται πλήρως αν προσδιορίσουμε τα μήκη των κάθετων προβολών του στους τρεις άξονες, τις συνιστώσες του δηλαδή. Μια

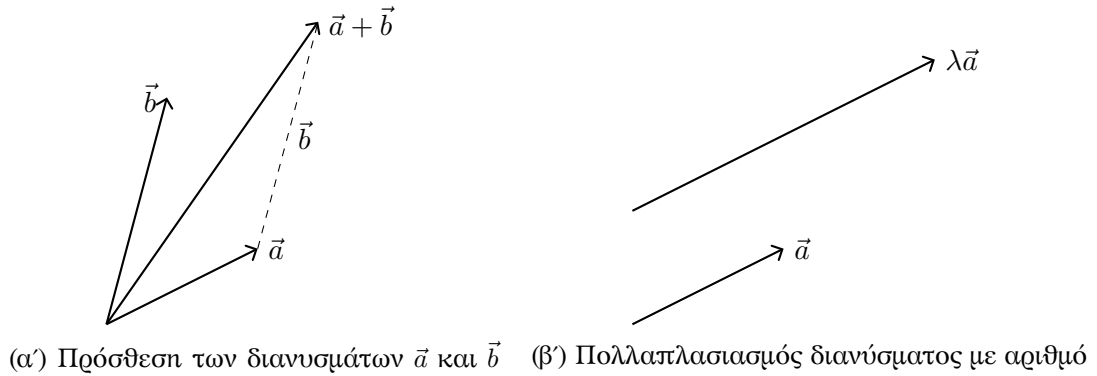
συνιστώσα μπορεί να είναι αρνητική αν η προβολή του διανύσματος έχει αντίθετη φορά από τον αντίστοιχο άξονα. Αν \hat{i} , \hat{j} , \hat{k} είναι τα μοναδιαία διανύσματα στους τρεις άξονες, οι συνιστώσες ενός διανύσματος \vec{a} είναι οι a_1 , a_2 , a_3 ώστε

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k} .$$

Μπορούμε να συμβολίσουμε ένα διάνυσμα στον τριδιάστατο χώρο με διατεταγμένη παράθεση των συνιστωσών του σε συγκεκριμένο σύστημα:

$$\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3) .$$

Θυμηθείτε πώς ορίζουμε την πρόσθεση δύο διανυσμάτων \vec{a} , \vec{b} , με την οποία προκύπτει το $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, και τον πολλαπλασιασμό ενός διανύσματος \vec{a} με ένα πραγματικό αριθμό λ . Σχηματικά παρουσιάζονται στο Σχήμα 3.1.



Σχήμα 3.1: Θεμελιώδεις πράξεις διανυσμάτων

Χρησιμοποιώντας τις συνιστώσες μπορούμε να εκφράσουμε ποσοτικά τις πράξεις των διανυσμάτων. Όπως γνωρίζουμε, σε καρτεσιανό σύστημα η πρόσθεση δύο διανυσμάτων δίνει διάνυσμα με συνιστώσες τα αθροίσματα των αντίστοιχων συνιστωσών των διανυσμάτων:

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1, a_2, a_3) + (b_1, b_2, b_3) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3) .$$

Το γινόμενο πραγματικού αριθμού με διάνυσμα σε καρτεσιανό σύστημα είναι διάνυσμα με συνιστώσες τις συνιστώσες του αρχικού, πολλαπλασιασμένες με τον αριθμό:

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_1, a_2, a_3) = (\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3) .$$

Η γεωμετρική αντίληψη του διανύσματος σε τρεις διαστάσεις μπορεί να γενικευτεί ώστε να αναφερόμαστε σε διάνυσμα που υπάρχει σε χώρο N διαστάσεων. Μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε ως «βέλος» σε πολυδιάστατο χώρο, ανεξάρτητα δηλαδή από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων αλλά και ως μια διατεταγμένη N -άδα πραγματικών αριθμών, των συνιστωσών του σε κάποιο σύστημα:

$$\vec{a} \equiv (a_1, a_2, a_3, \dots, a_N) .$$

Για παράδειγμα, ο χώρος φάσεων ενός σωματιδίου που κινείται σε τριδιάστατο χώρο είναι το σύνολο των δυνατών τιμών των τριών συνιστωσών της θέσης και των τριών συνιστωσών της ταχύτητας του σωματιδίου. Είναι ένας εξαδιάστατος χώρος, κάθε σημείο του οποίου περιγράφεται από έξι αριθμούς: x, y, z, v_x, v_y, v_z . Μια τέτοια διατεταγμένη εξάδα ορίζει ένα διάνυσμα στο χώρο φάσεων.

Στο καρτεσιανό N -διάστατο σύστημα η πρόσθεση διανυσμάτων και το γινόμενο αριθμού με διάνυσμα ορίζονται εύκολα, γενικεύοντας τους ορισμούς που αναφέραμε για τον τριδιάστατο χώρο. Έτσι η πρόσθεση των διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} ορίζεται

- σχηματικά: θέτουμε ως αρχή του διανύσματος \vec{b} το τέλος του \vec{a} . Το διάνυσμα με αρχή την αρχή του \vec{a} και τέλος το τέλος του \vec{b} αποτελεί το άθροισμά τους.
- με συνιστώσες:

$$\vec{a} + \vec{b} \equiv (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, \dots, a_N + b_N) .$$

Ο πολλαπλασιασμός αριθμού λ με διάνυσμα \vec{a} είναι ένα νέο διάνυσμα με μέτρο λ φορές το μέτρο του \vec{a} , διεύθυνση ίδια με το \vec{a} και φορά ίδια με το \vec{a} αν $\lambda > 0$ και αντίθετη αν $\lambda < 0$. Οι συνιστώσες του γινομένου $\lambda\vec{a}$ είναι $(\lambda a_1, \lambda a_2, \lambda a_3, \dots, \lambda a_N)$.

3.2 Ορισμός διανυσματικού χώρου

Ας εξετάσουμε τις μαθηματικές ιδιότητες του συνόλου των διανυσμάτων ενός N -διάστατου χώρου, με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα που αναφέραμε.

Για την πρόσθεση δύο διανυσμάτων ισχύουν τα εξής:

- Το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε διανυσμάτων \vec{a} και \vec{b} του συνόλου είναι διάνυσμα \vec{c} που συμβολίζεται με

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

και που ανήκει στο ίδιο σύνολο διανυσμάτων στο οποίο ανήκουν τα \vec{a} και \vec{b} . Όπως αλλιώς λέμε, το σύνολο είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

- Η πρόσθεση έχει την μεταθετική ιδιότητα: για οποιαδήποτε \vec{a} και \vec{b} ισχύει

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} .$$

- Η πρόσθεση έχει την προσεταιριστική ιδιότητα: για οποιαδήποτε $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ ισχύει

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} .$$

- Στο σύνολο των διανυσμάτων περιλαμβάνεται το (μοναδικό) ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης, το διάνυσμα $\vec{0}$: για οποιοδήποτε \vec{a} ισχύει

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a} .$$

- Στο σύνολο των διανυσμάτων περιλαμβάνεται το (μοναδικό) αντίθετο στοιχείο οποιουδήποτε διανύσματος \vec{a} . Συμβολίζεται με $-\vec{a}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}.$$

Για τον πολλαπλασιασμό πραγματικού αριθμού με διάνυσμα ισχύουν τα ακόλουθα:

- Το γινόμενο οποιουδήποτε αριθμού λ με οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{a} είναι διάνυσμα \vec{b} που ανήκει στο ίδιο σύνολο με το \vec{a} . Συμβολίζεται με

$$\vec{b} = \lambda \vec{a}.$$

Το σύνολο διανυσμάτων είναι κλειστό ως προς τον πολλαπλασιασμό αριθμού με διάνυσμα.

- Για οποιουδήποτε αριθμούς λ, μ και διάνυσμα \vec{a} ισχύει

$$\lambda(\mu \vec{a}) = (\lambda\mu)\vec{a}.$$

- Υπάρχει και περιλαμβάνεται στο σύνολο των αριθμών το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Είναι μοναδικό και συμβολίζεται με το 1. Ο πολλαπλασιασμός του με οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{a} ικανοποιεί τη σχέση

$$1\vec{a} = \vec{a}.$$

- Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση διανυσμάτων: για οποιαδήποτε λ, \vec{a} και \vec{b} ισχύει

$$\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}.$$

- Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση αριθμών: για οποιαδήποτε λ, μ και \vec{a} ισχύει

$$(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}. \quad (3.1)$$

Παρατηρήστε ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{a} ,

$$\vec{a} + 0\vec{a} = 1\vec{a} + 0\vec{a} = (1 + 0)\vec{a} = 1\vec{a} = \vec{a}.$$

Άρα το διάνυσμα $0\vec{a}$ είναι το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης:

$$\vec{0} \equiv 0\vec{a},$$

ή, αλλιώς, το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό οποιουδήποτε διανύσματος με το 0.

Αν θέσουμε $\lambda = 1$, $\mu = -1$ στην (3.1) έχουμε

$$(1 - 1)\vec{a} = 1\vec{a} + (-1)\vec{a} \Rightarrow \vec{0} = \vec{a} + (-1)\vec{a}.$$

Αλλά ισχύει $\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$. Επομένως, για οποιοδήποτε διάνυσμα \vec{a} ισχύει

$$(-1)\vec{a} \equiv -\vec{a}.$$

Δηλαδή, το αντίθετο ενός διανύσματος προκύπτει από το διάνυσμα με πολλαπλασιασμό με το -1 .

Το σύνολο των διανυσμάτων ενός N -διάστατου χώρου, με τις πράξεις της πρόσθεσης διανυσμάτων και του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού με διάνυσμα όπως ορίστηκαν παραπάνω, λέμε ότι αποτελεί ένα (γραμμικό) *διανυσματικό χώρο*.

Χρησιμοποιώντας την πράξη της πρόσθεσης μπορούμε να ορίσουμε την αφαίρεση ενός διανύσματος \vec{a} από κάποιο άλλο διάνυσμα \vec{b} :

$$\vec{b} - \vec{a} \equiv \vec{b} + (-\vec{a}).$$

Η αφαίρεση του \vec{a} από το \vec{b} ορίζεται δηλαδή ως η πρόσθεση στο \vec{b} του αντίθετου διανύσματος του \vec{a} .

Ανάλογα, η πράξη της διαίρεσης διανύσματος με αριθμό διάφορο του μηδενός ορίζεται ως ο πολλαπλασιασμός του αντίστροφου του αριθμού με το διάνυσμα:

$$\vec{a}/\lambda \equiv (1/\lambda)\vec{a}.$$

Ορίσαμε το διανυσματικό χώρο έχοντας ως παράδειγμα τα διανύσματα στον τριδιάστατο ευκλείδειο χώρο και τη γενίκευσή τους σε N διαστάσεις. Όμως, η έννοια του διανυσματικού χώρου είναι πολύ πιο γενική· τα μέλη του δεν περιορίζονται στα συνήθη διανύσματα του τριδιάστατου ή πολυδιάστατου χώρου. Κάθε σύνολο αντικειμένων στο οποίο ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης μεταξύ των μελών του και του πολλαπλασιασμού αριθμού με αντικείμενο, και, επιπλέον, οι συγκεκριμένες πράξεις έχουν τις ιδιότητες που παρατέθηκαν παραπάνω, αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο. Για τα μέλη του χρησιμοποιείται ο όρος «διάνυσμα». Συμβολίζονται με \vec{a} ή a ή, στη Μαθηματική Φυσική, $|a\rangle$. Τον τελευταίο συμβολισμό θα χρησιμοποιούμε εφεξής.

Ο αριθμός με τον οποίο πολλαπλασιάζεται το «διάνυσμα» πρέπει να είναι μέλος ενός αλγεβρικού σώματος· τότε λέμε ότι ο διανυσματικός χώρος ορίζεται πάνω στο συγκεκριμένο σώμα. Το αλγεβρικό σώμα είναι ένα σύνολο στο οποίο έχουν οριστεί οι πράξεις της πρόσθεσης (με την μεταθετική ιδιότητα, τη μεταβατική ιδιότητα, το ουδέτερο και το αντίθετο στοιχείο) και του πολλαπλασιασμού (με την μεταθετική ιδιότητα, τη μεταβατική ιδιότητα, την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση, το ουδέτερο και το αντίστροφο στοιχείο). Τέτοια σύνολα αριθμών είναι π.χ. οι πραγματικοί και οι μιγαδικοί αριθμοί.

3.2.1 Παραδείγματα διανυσματικών χώρων

Το σύνολο των μιγαδικών αριθμών

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το σύνολο των μιγαδικών αριθμών με τις γνωστές πράξεις πρόσθεσης μιγαδικών και πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού με μιγαδικό αριθμό αποτελεί το μιγαδικό διανυσματικό χώρο. Θυμίζουμε ότι αν $z_1 = x_1 + iy_1$ και $z_2 = x_2 + iy_2$ είναι δύο οποιοιδήποτε μιγαδικοί αριθμοί, το άθροισμά τους είναι

$$z_3 = z_1 + z_2 \equiv (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2) .$$

Το άθροισμά τους είναι μιγαδικός αριθμός, η πρόσθεση έχει την μεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα και το ουδέτερο στοιχείο της είναι το $0 + i0$.

Ο πολλαπλασιασμός πραγματικού αριθμού λ με μιγαδικό αριθμό $z = x + iy$ ορίζεται από τη σχέση

$$\lambda z \equiv (\lambda x) + i(\lambda y) .$$

Το γινόμενο είναι προφανώς μιγαδικός αριθμός. Επιπλέον, για οποιαδήποτε πραγματικούς λ, μ και οποιοδήποτε μιγαδικό $z = x + iy$ ισχύει ότι

$$\lambda(\mu z) = \lambda((\mu x) + i(\mu y)) = (\lambda \mu x) + i(\lambda \mu y) = (\lambda \mu)z .$$

Το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού πραγματικού αριθμού με μιγαδικό είναι το 1 καθώς

$$1z = 1(x + iy) = (1x) + i(1y) = x + iy = z .$$

Εύκολα δείχνεται ότι ο πολλαπλασιασμός είναι επιμεριστικός ως προς την πρόσθεση

$$\begin{aligned} \lambda(z_1 + z_2) &= \lambda((x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)) = \lambda(x_1 + x_2) + i\lambda(y_1 + y_2) \\ &= (\lambda x_1 + \lambda x_2) + i(\lambda y_1 + \lambda y_2) = (\lambda x_1 + i\lambda y_1) + (\lambda x_2 + i\lambda y_2) \\ &= \lambda(x_1 + iy_1) + \lambda(x_2 + iy_2) \\ &= \lambda z_1 + \lambda z_2 , \end{aligned}$$

και ότι η πράξη της πρόσθεσης είναι επιμεριστική ως προς τον πολλαπλασιασμό: για οποιαδήποτε πραγματικά λ, μ και μιγαδικό $z = x + iy$ ισχύει

$$\begin{aligned} (\lambda + \mu)z &= (\lambda + \mu)x + i(\lambda + \mu)y = (\lambda x + \mu x) + i(\lambda y + \mu y) \\ &= (\lambda x + i\lambda y) + (\mu x + i\mu y) = \lambda(x + iy) + \mu(x + iy) \\ &= \lambda z + \mu z . \end{aligned}$$

Το σύνολο των πολυωνύμων βαθμού μέχρι n

Έστω το σύνολο των πολυωνύμων της πραγματικής μεταβλητής x , που έχουν τη μορφή

$$y_n(x) = y_0 + y_1x + y_2x^2 + \cdots + y_nx^n ,$$

με πραγματικούς συντελεστές y_i . Ορίζουμε την πρόσθεση δύο οποιωνδήποτε μελών του

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

και

$$q_n(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$$

με τη σχέση

$$p_n(x) + q_n(x) \equiv (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2 + \cdots + (a_n + b_n)x^n .$$

Επιπλέον, ορίζουμε τον πολλαπλασιασμό ενός πραγματικού αριθμού λ με οποιοδήποτε πολυώνυμο

$$p_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$$

με τη σχέση

$$\lambda p_n(x) \equiv (\lambda a_0) + (\lambda a_1)x + (\lambda a_2)x^2 + \cdots + (\lambda a_n)x^n .$$

Εύκολα δείχνεται ότι οι συγκεκριμένοι ορισμοί πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού έχουν τις αναγκαίες ιδιότητες ώστε το σύνολο των πραγματικών πολυωνύμων με βαθμό μικρότερο ή ίσο με n να αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο.

Συναρτήσεις με πεδίο ορισμού το $[a, b]$

Το σύνολο των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων, μίας πραγματικής μεταβλητής, που παίρνουν τιμές στο διάστημα $[a, b]$, είναι διανυσματικός χώρος αν ορίσουμε ότι

- το άθροισμα δύο οποιωνδήποτε μελών του, $f(x)$, $g(x)$, είναι μια συνάρτηση $h(x)$ του ίδιου συνόλου με τιμή σε κάθε σημείο x το άθροισμα των τιμών των δύο συναρτήσεων:

$$h(x) = f(x) + g(x) .$$

- Το γινόμενο πραγματικού αριθμού λ με ένα μέλος $f(x)$ του χώρου είναι συνάρτηση του χώρου με τιμή σε κάθε x

$$h(x) = \lambda f(x) .$$

Αποδείξτε ότι ικανοποιούν τις απαιτούμενες ιδιότητες!

3.3 Εσωτερικό γινόμενο

Σε ένα διανυσματικό χώρο μπορούμε να ορίσουμε το *εσωτερικό γινόμενο* δύο μελών του. Γνωρίζουμε ήδη το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \vec{a} , \vec{b} του τριδιάστατου χώρου. Ο ορισμός που είναι ανεξάρτητος από συγκεκριμένο σύστημα συντεταγμένων είναι ο ακόλουθος:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta . \quad (3.2)$$

Με $\|\vec{a}\|$ συμβολίζουμε το μέτρο του διανύσματος \vec{a} και με θ τη γωνία μεταξύ των διανυσμάτων. Αν χρησιμοποιήσουμε τις συνιστώσες σε καρτεσιανές συντεταγμένες για τα διανύσματα, a_i και b_i ($i = 1, 2, 3$) αντίστοιχα, το εσωτερικό γινόμενο εκφράζεται από τη σχέση

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 .$$

Η σχέση αυτή γενικεύεται για τα διανύσματα σε χώρο N διαστάσεων:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^N a_i b_i .$$

Μπορούμε να γενικεύσουμε το εσωτερικό γινόμενο σε κάθε διανυσματικό χώρο ως εξής: το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $|a\rangle, |b\rangle$ συμβολίζεται με $\langle a|b\rangle$ (στη Μαθηματική Φυσική) και είναι μια συνάρτηση των δύο διανυσμάτων με αριθμητική τιμή. Η συνάρτηση αυτή πρέπει να ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις

$$\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle^* , \quad (3.3\alpha')$$

$$\langle a|b+c\rangle = \langle a|b\rangle + \langle a|c\rangle , \quad (3.3\beta')$$

$$\langle a|\lambda b\rangle = \lambda \langle a|b\rangle , \quad (3.3\gamma')$$

$$\langle a|a\rangle > 0 , \quad \text{αν } |a\rangle \neq |0\rangle , \quad (3.3\delta')$$

$$\langle a|a\rangle = 0 , \quad \text{αν } |a\rangle = |0\rangle , \quad (3.3\epsilon')$$

για οποιαδήποτε διανύσματα $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$ και οποιοδήποτε αριθμό λ . Το $*$ συμβολίζει το μιγαδικό συζυγή.

Συνέπεια των παραπάνω ιδιοτήτων είναι ότι για οποιαδήποτε διανύσματα $|a\rangle, |b\rangle, |c\rangle$ και οποιουδήποτε αριθμούς λ, μ ισχύει

$$\langle a|\lambda b + \mu c\rangle = \langle a|\lambda b\rangle + \langle a|\mu c\rangle = \lambda \langle a|b\rangle + \mu \langle a|c\rangle ,$$

$$\langle \lambda b + \mu c|a\rangle = \langle a|\lambda b + \mu c\rangle^* = \lambda^* \langle a|b\rangle^* + \mu^* \langle a|c\rangle^* = \lambda^* \langle b|a\rangle + \mu^* \langle c|a\rangle .$$

Το αριστερό διάνυσμα του εσωτερικού γινομένου λέγεται bra ($\langle a|$) και το δεξιό ket ($|a\rangle$) έτσι ώστε το εσωτερικό γινόμενο να λέγεται bracket (παρένθεση).

Δύο διανύσματα $|a\rangle, |b\rangle$ λέγονται *ορθογώνια* αν ισχύει $\langle a|b\rangle = 0$. Το μέτρο ενός διανύσματος $|a\rangle$ συμβολίζεται με $\|a\|$ και ορίζεται ως η τετραγωνική ρίζα του εσωτερικού γινομένου του $|a\rangle$ με τον εαυτό του:

$$\|a\| \equiv \sqrt{\langle a|a\rangle} . \quad (3.4)$$

3.4 Χρήσιμες ανισότητες

3.4.1 Ανισότητα Cauchy–Schwarz

Η ανισότητα Cauchy–Schwarz είναι η ακόλουθη

$$|\langle a|b\rangle| \leq \|a\| \|b\| . \quad (3.5)$$

Προσέξτε ότι εμφανίζεται η *απόλυτη τιμή* ενός (γενικά μιγαδικού) αριθμού, του $\langle a|b \rangle$, και τα *μέτρα* των διανυσμάτων $|a\rangle$, $|b\rangle$.

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα αποδεικνύεται εύκολα στην περίπτωση του χώρου με μέλη τα συνήθη διανύσματα στις τρεις διαστάσεις: το εσωτερικό γινόμενο δίνεται από τη σχέση (3.2) και για κάθε γωνία θ ισχύει $|\cos \theta| \leq 1$.

Στη γενική περίπτωση ενός οποιουδήποτε διανυσματικού χώρου με εσωτερικό γινόμενο, αποδεικνύεται ως εξής: Έστω ότι το διάνυσμα $|b\rangle$ είναι το μηδενικό. Εύκολα δείχνεται σε αυτή την περίπτωση ότι η έκφραση (3.5) ισχύει (και είναι ισότητα): Έχουμε

$$\begin{aligned} \|b\| &= 0, \\ |\langle a|b \rangle| &= |\langle a|0\rangle| = |\langle a|00\rangle| = 0 |\langle a|0\rangle| = 0. \end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι $|b\rangle \neq |0\rangle$. Κατασκευάζουμε το διάνυσμα $|a + \lambda b\rangle$ με οποιαδήποτε $|a\rangle$, $|b\rangle$ (εκτός του $|0\rangle$) και λ . Τότε, με χρήση των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου, προκύπτει ότι

$$\langle a + \lambda b | a + \lambda b \rangle = \langle a | a \rangle + \lambda \langle a | b \rangle + \lambda^* \langle b | a \rangle + \lambda \lambda^* \langle b | b \rangle. \quad (3.6)$$

Γνωρίζουμε ότι για οποιοδήποτε διάνυσμα, το εσωτερικό γινόμενο με τον εαυτό του είναι μη αρνητικός πραγματικός αριθμός. Επομένως, $0 \leq \langle a + \lambda b | a + \lambda b \rangle$. Η (3.6) γίνεται

$$0 \leq \langle a | a \rangle + \lambda \langle a | b \rangle + \lambda^* \langle b | a \rangle + \lambda \lambda^* \langle b | b \rangle. \quad (3.7)$$

Ο πολλαπλασιασμός των δύο μελών της ανισότητας με το θετικό αριθμό $\langle b | b \rangle$ δίνει

$$0 \leq \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle + \lambda \langle b | b \rangle \langle a | b \rangle + \lambda^* \langle b | b \rangle \langle b | a \rangle + \lambda \lambda^* \langle b | b \rangle^2. \quad (3.8)$$

Θυμίζουμε ότι η ανισότητα (3.8) ισχύει για οποιοδήποτε λ . Επιλέγουμε

$$\lambda = -\frac{\langle b | a \rangle}{\langle b | b \rangle}$$

και το αντικαθιστούμε στην ανισότητα (3.8). Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle - \langle b | a \rangle \langle a | b \rangle - \langle b | a \rangle^* \langle b | a \rangle + \langle b | a \rangle \langle b | a \rangle^* \Rightarrow \\ \langle a | a \rangle \langle b | b \rangle &\geq \langle a | b \rangle \langle b | a \rangle. \end{aligned}$$

Καθώς

$$\langle a | b \rangle \langle b | a \rangle \equiv \langle a | b \rangle \langle a | b \rangle^* \equiv |\langle a | b \rangle|^2$$

και

$$\langle a | a \rangle \langle b | b \rangle \equiv \|a\|^2 \|b\|^2,$$

καταλήγουμε ότι

$$\|a\|^2 \|b\|^2 \geq |\langle a | b \rangle|^2$$

ή, παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες των δύο μελών, στην (3.5).

3.4.2 Τριγωνική ανισότητα

Η τριγωνική ανισότητα είναι η ακόλουθη

$$| \|a\| - \|b\| | \leq \|a + b\| \leq \|a\| + \|b\| . \quad (3.9)$$

Η δεύτερη ανισότητα στη σχέση αυτή είναι προφανής από το Σχήμα 3.1α'. Επίσης, έχουμε αποδείξει και τις δύο ανισότητες στην περίπτωση των μιγαδικών αριθμών (§1.5). Ας την αποδείξουμε για οποιοδήποτε διανυσματικό χώρο:

$$\begin{aligned} \|a + b\|^2 &\equiv \langle a + b | a + b \rangle \\ &= \langle a | a \rangle + \langle a | b \rangle + \langle b | a \rangle + \langle b | b \rangle \\ &= \langle a | a \rangle + \langle a | b \rangle + \langle a | b \rangle^* + \langle b | b \rangle \\ &= \langle a | a \rangle + 2 \operatorname{Re}[\langle a | b \rangle] + \langle b | b \rangle \\ &\leq \langle a | a \rangle + 2 |\langle a | b \rangle| + \langle b | b \rangle . \end{aligned}$$

Στην προηγούμενη σχέση χρησιμοποιήσαμε την εξίσωση (1.10) για το μιγαδικό αριθμό $z = \langle a | b \rangle$. Με τη χρήση της ανισότητας (3.5) έχουμε

$$\langle a | a \rangle + 2 \|a\| \|b\| + \langle b | b \rangle = \|a\|^2 + 2 \|a\| \|b\| + \|b\|^2 = (\|a\| + \|b\|)^2 .$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις καταλήγουμε στην

$$\|a + b\|^2 \leq (\|a\| + \|b\|)^2 ,$$

ή, παίρνοντας τις τετραγωνικές ρίζες των δύο μελών, στη δεύτερη ανισότητα της (3.9).

Αν χρησιμοποιήσουμε την εξίσωση (1.11) κατά την απόδειξη, όπως κάναμε στην §1.5, θα καταλήξουμε στην πρώτη ανισότητα που έχουμε να αποδείξουμε.

3.5 Γραμμική ανεξαρτησία

Ένα σύνολο K διανυσμάτων $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_K\rangle\}$ ενός διανυσματικού χώρου μπορεί να παραγάγει άπειρα διανύσματα $|x\rangle$ με γραμμικό συνδυασμό των μελών του:

$$|x\rangle = \lambda_1 |a_1\rangle + \lambda_2 |a_2\rangle + \dots + \lambda_K |a_K\rangle .$$

Οι αριθμοί λ_i με $i = 1, \dots, K$ έχουν άπειρες δυνατές τιμές. Εύκολα δείχνεται ότι αν όλοι οι λ_i είναι 0, το διάνυσμα $|x\rangle$ είναι το $|0\rangle$. Αν υπάρχουν κάποιες τιμές $\{\bar{\lambda}_1, \bar{\lambda}_2, \dots, \bar{\lambda}_K\}$, όχι όλες μηδενικές, για τις οποίες το διάνυσμα $|x\rangle$ είναι πάλι το μηδενικό, δηλαδή αν ισχύει

$$|0\rangle = \bar{\lambda}_1 |a_1\rangle + \bar{\lambda}_2 |a_2\rangle + \dots + \bar{\lambda}_K |a_K\rangle , \quad (3.10)$$

με ένα τουλάχιστον $\bar{\lambda}_i$ μη μηδενικό, τα διανύσματα $\{|a_1\rangle, |a_2\rangle, \dots, |a_K\rangle\}$ χαρακτηρίζονται ως γραμμικώς εξαρτημένα. Σε αυτή την περίπτωση, τουλάχιστον ένα από αυτά μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων. Αν $\bar{\lambda}_j \neq 0$ τότε

$$|a_j\rangle = -\frac{\bar{\lambda}_1}{\bar{\lambda}_j} |a_1\rangle - \frac{\bar{\lambda}_2}{\bar{\lambda}_j} |a_2\rangle \cdots - \frac{\bar{\lambda}_{j-1}}{\bar{\lambda}_j} |a_{j-1}\rangle - \frac{\bar{\lambda}_{j+1}}{\bar{\lambda}_j} |a_{j+1}\rangle \cdots - \frac{\bar{\lambda}_K}{\bar{\lambda}_j} |a_K\rangle .$$

Αντίθετα, αν πρέπει όλα τα $\bar{\lambda}_i$ να είναι 0 για να ισχύει η σχέση (3.10), τα διανύσματα είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

3.6 Βάση διανυσματικού χώρου

Ένας διανυσματικός χώρος στον οποίο υπάρχουν N , αλλά όχι περισσότερα, γραμμικώς ανεξάρτητα μέλη του, λέγεται ότι έχει διάσταση N , ή αλλιώς, η διάσταση του χώρου είναι το μέγιστο πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων. Οποιοδήποτε σύνολο N γραμμικώς ανεξάρτητων διανυσμάτων αποτελεί βάση του χώρου στον οποίο ανήκουν τα διανύσματα. Προφανώς, όλα τα διανύσματα μιας βάσης είναι μη μηδενικά (αν κάποιο ήταν το $|0\rangle$ δεν θα ήταν γραμμικώς ανεξάρτητα και η διάσταση του χώρου θα ήταν μικρότερη).

Έστω $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$ μια βάση και $|a\rangle$ ένα οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου. Τα $N + 1$ διανύσματα $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle, |a\rangle\}$ πρέπει να είναι γραμμικώς εξαρτημένα (αλλιώς η διάσταση του χώρου θα ήταν μεγαλύτερη από N). Επομένως, στη σχέση

$$|0\rangle = \lambda_1 |e_1\rangle + \lambda_2 |e_2\rangle + \cdots + \lambda_N |e_N\rangle + \mu |a\rangle$$

ένας τουλάχιστον συντελεστής από τους λ_i, μ πρέπει να είναι μη μηδενικός. Ο μ δεν μπορεί να είναι 0 γιατί τότε πρέπει τουλάχιστον ένα από τα λ_i να είναι μη μηδενικό και η σχέση

$$|0\rangle = \lambda_1 |e_1\rangle + \lambda_2 |e_2\rangle + \cdots + \lambda_N |e_N\rangle + 0 |a\rangle$$

θα σήμαινε ότι τα διανύσματα βάσης δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Άρα, με $\mu \neq 0$ έχουμε

$$|a\rangle \equiv a_1 |e_1\rangle + a_2 |e_2\rangle + \cdots + a_N |e_N\rangle ,$$

με $a_i = -\lambda_i/\mu$. Η τελευταία σχέση σημαίνει ότι οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων μιας βάσης του χώρου. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι ο χώρος παράγεται από τα $\{|e_i\rangle\}$.

Οι συντελεστές a_i αποτελούν τις συνιστώσες του διανύσματος $|a\rangle$ στη βάση $\{|e_i\rangle\}$. Είναι μοναδικοί για κάθε βάση: ας υποθέσουμε ότι στη βάση $\{|e_i\rangle\}$ το $|a\rangle$ έχει δύο σύνολα συνιστωσών: $\{a_i\}$ και $\{\bar{a}_i\}$. Αυτό σημαίνει ότι ισχύουν ταυτόχρονα οι σχέσεις

$$\begin{aligned} |a\rangle &\equiv a_1 |e_1\rangle + a_2 |e_2\rangle + \cdots + a_N |e_N\rangle , \\ |a\rangle &\equiv \bar{a}_1 |e_1\rangle + \bar{a}_2 |e_2\rangle + \cdots + \bar{a}_N |e_N\rangle . \end{aligned}$$

Η αφαίρεση της δεύτερης από την πρώτη δίνει

$$|0\rangle = (a_1 - \bar{a}_1)|e_1\rangle + (a_2 - \bar{a}_2)|e_2\rangle + \cdots + (a_N - \bar{a}_N)|e_N\rangle .$$

Καθώς τα διανύσματα $|e_i\rangle$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πρέπει να ισχύει $a_i = \bar{a}_i$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, N$.

3.6.1 Ορθοκανονική βάση

Μια βάση $\{|e_i\rangle\}$ ενός διανυσματικού χώρου χαρακτηρίζεται ως *ορθοκανονική* αν κάθε διάνυσμά της είναι ορθογώνιο με οποιοδήποτε άλλο διάνυσμά της και, επιπλέον, έχει μέτρο 1. Συνοπτική μαθηματική έκφραση για αυτές τις ιδιότητες είναι η

$$\langle e_i | e_j \rangle = \delta_{ij} , \quad i, j = 1, 2, \dots, N , \quad (3.11)$$

όπου δ_{ij} το δέλτα του *Kronecker*. Αυτό έχει τιμή 1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$.

Ας αναπτύξουμε δύο διανύσματα $|a\rangle$ και $|b\rangle$ σε μια ορθοκανονική βάση του χώρου στον οποίο ανήκουν, $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$:

$$|a\rangle = \sum_{i=1}^N a_i |e_i\rangle , \quad |b\rangle = \sum_{j=1}^N b_j |e_j\rangle .$$

Παρατηρήστε ότι

$$\langle e_j | a \rangle = \left\langle e_j \left| \sum_{i=1}^N a_i e_i \right. \right\rangle = \sum_{i=1}^N a_i \langle e_j | e_i \rangle = \sum_{i=1}^N a_i \delta_{ji} = a_j , \quad (3.12)$$

για κάθε $j = 1, \dots, N$. Επομένως, οι συνιστώσες ενός διανύσματος σε μια ορθοκανονική βάση υπολογίζονται εύκολα από το εσωτερικό του γινόμενο με τα διανύσματα βάσης.

Το εσωτερικό γινόμενο των $|a\rangle$ και $|b\rangle$ είναι

$$\langle a | b \rangle = \left\langle \sum_{i=1}^N a_i e_i \left| \sum_{j=1}^N b_j e_j \right. \right\rangle .$$

Με εφαρμογή των ιδιοτήτων του εσωτερικού γινομένου προκύπτει ότι

$$\langle a | b \rangle = \sum_{j=1}^N b_j \left\langle \sum_{i=1}^N a_i e_i \left| e_j \right. \right\rangle = \sum_{j=1}^N b_j \sum_{i=1}^N a_i^* \langle e_i | e_j \rangle . \quad (3.13)$$

Η εξίσωση (3.11) απλοποιεί την παραπάνω έκφραση:

$$\langle a | b \rangle = \sum_{j=1}^N b_j \sum_{i=1}^N a_i^* \delta_{ij} = \sum_{j=1}^N a_j^* b_j . \quad (3.14)$$

Καταλήξαμε στη γενίκευση σε διανύσματα με γενικά μιγαδικές συνιστώσες, της γνωστής μορφής του εσωτερικού γινομένου για δύο διανύσματα \vec{a}, \vec{b} του (πραγματικού) τριδιάστατου ευκλείδειου χώρου.

Παράδειγμα

Έστω ένας διανυσματικός χώρος που έχει μια ορθοκανονική βάση, $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$. Τα διανύσματα $|v_1\rangle = i|e_1\rangle + 2|e_2\rangle$, $|v_2\rangle = |e_1\rangle - i|e_2\rangle$ είναι

γραμμικώς ανεξάρτητα: ένας γραμμικός συνδυασμός τους που ισούται με το $|0\rangle$ είναι ο

$$|0\rangle = \lambda_1 |v_1\rangle + \lambda_2 |v_2\rangle = (\lambda_1 i + \lambda_2) |e_1\rangle + (2\lambda_1 - i\lambda_2) |e_2\rangle .$$

Καθώς τα $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα πρέπει

$$\lambda_1 i + \lambda_2 = 0 , \quad 2\lambda_1 - i\lambda_2 = 0 .$$

Η λύση του συστήματος δίνει $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.

μη ορθογώνια:

$$\langle v_1 | v_2 \rangle = (-i) \cdot 1 + 2 \cdot (-i) = -3i \neq 0 .$$

με μέτρο διάφορο του 1:

$$\langle v_1 | v_1 \rangle = (-i) \cdot i + 2 \cdot 2 = 5 \Rightarrow \|v_1\| = \sqrt{5} \neq 1 .$$

$$\langle v_2 | v_2 \rangle = 1 \cdot 1 + i \cdot (-i) = 2 \Rightarrow \|v_2\| = \sqrt{2} \neq 1 .$$

Το σύνολο $\{|v_1\rangle, |v_2\rangle\}$ αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα και έχει ίδιο αριθμό μελών με τη βάση $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$. Επομένως, αποτελεί μια άλλη βάση του χώρου.

3.6.2 Ορθοκανονικοποίηση βάσης

Η παρακάτω διαδικασία ορθοκανονικοποίησης (μέθοδος Gram–Schmidt) παράγει μια ορθοκανονική βάση ενός διανυσματικού χώρου από μια άλλη βάση που δεν είναι ορθοκανονική. Έστω ότι η αρχική βάση είναι η $\{|d_1\rangle, |d_2\rangle, \dots, |d_N\rangle\}$ και η $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$ η βάση που θα προκύψει από τη διαδικασία.

Σύμφωνα με τη συγκεκριμένη μέθοδο, αναπτύσσουμε τα διανύσματα της νέας βάσης στην αρχική βάση ως εξής

$$\begin{aligned} |e_1\rangle &= \alpha_1 |d_1\rangle , \\ |e_2\rangle &= \alpha_2 |d_2\rangle + \lambda_{21} |e_1\rangle , \\ |e_3\rangle &= \alpha_3 |d_3\rangle + \lambda_{31} |e_1\rangle + \lambda_{32} |e_2\rangle , \\ &\vdots \\ |e_N\rangle &= \alpha_N |d_N\rangle + \lambda_{N1} |e_1\rangle + \lambda_{N2} |e_2\rangle + \dots + \lambda_{N,N-1} |e_{N-1}\rangle . \end{aligned}$$

Οι συντελεστές α_i και λ_{ij} είναι άγνωστοι και θα προσδιοριστούν από την απαίτηση τα διανύσματα $|e_i\rangle$ να έχουν μέτρο 1 και να είναι ορθογώνια ως προς τα υπόλοιπα διανύσματα της νέας βάσης. Έτσι, για το πρώτο διάνυσμα έχουμε

$$\|e_1\| = 1 \Leftrightarrow \langle e_1|e_1\rangle = 1 \Leftrightarrow \alpha_1\alpha_1^* \langle d_1|d_1\rangle .$$

Επομένως,

$$|\alpha_1| = \frac{1}{\|d_1\|} .$$

Η απαίτηση να είναι ορθογώνιο το δεύτερο διάνυσμα στο πρώτο, δίνει

$$\begin{aligned} \langle e_1|e_2\rangle = 0 &\Leftrightarrow \lambda_{21} \langle e_1|e_1\rangle + \alpha_2 \langle e_1|d_2\rangle = 0 \\ &\Leftrightarrow \lambda_{21} = -\alpha_2 \langle e_1|d_2\rangle . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$|e_2\rangle = \alpha_2(|d_2\rangle - \langle e_1|d_2\rangle |e_1\rangle) .$$

Ας θέσουμε

$$|p_{21}\rangle = \langle e_1|d_2\rangle |e_1\rangle .$$

Η απαίτηση $\|e_2\| = 1$ οδηγεί στον προσδιορισμό του $|\alpha_2|$ από τη σχέση

$$|\alpha_2| = \frac{1}{\| |d_2\rangle - |p_{21}\rangle \|} .$$

Το τρίτο διάνυσμα πρέπει να ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\begin{aligned} \langle e_1|e_3\rangle &= 0 , \\ \langle e_2|e_3\rangle &= 0 , \\ \langle e_3|e_3\rangle &= 1 . \end{aligned}$$

Οι δύο πρώτες εξισώσεις καταλήγουν στις

$$\begin{aligned} \lambda_{31} &= -\alpha_3 \langle e_1|d_3\rangle , \\ \lambda_{32} &= -\alpha_3 \langle e_2|d_3\rangle . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$|e_3\rangle = \alpha_3(|d_3\rangle - \langle e_1|d_3\rangle |e_1\rangle - \langle e_2|d_3\rangle |e_2\rangle) .$$

Ας θέσουμε

$$\begin{aligned} |p_{31}\rangle &= \langle e_1|d_3\rangle |e_1\rangle , \\ |p_{32}\rangle &= \langle e_2|d_3\rangle |e_2\rangle . \end{aligned}$$

Η απαίτηση να είναι μοναδιαίο το διάνυσμα $|e_3\rangle$ προσδιορίζει το $|\alpha_3|$:

$$|\alpha_3| = \frac{1}{\| |d_3\rangle - |p_{31}\rangle - |p_{32}\rangle \|} .$$

Προχωρώντας με όμοιο τρόπο, διαδοχικά στα επόμενα διανύσματα προκύπτει η γενική σχέση

$$|e_j\rangle = \alpha_j \left(|d_j\rangle - \sum_{k=1}^{j-1} |p_{jk}\rangle \right) \quad j = 1, 2, \dots, N,$$

όπου

$$|p_{jk}\rangle = \langle e_k | d_j \rangle |e_k\rangle$$

και

$$|\alpha_j| = \left\| |d_j\rangle - \sum_{k=1}^{j-1} |p_{jk}\rangle \right\|^{-1}.$$

Στα αθροίσματα θεωρούμε ότι δεν λαμβάνεται υπόψη κανένας όρος όταν $j = 1$.

Παρατηρήστε ότι για τους (γενικά μιγαδικούς) συντελεστές α_j προσδιορίζουμε μόνο το μέτρο τους. Όμως μπορούμε να θεωρήσουμε ότι έχουν οποιαδήποτε φάση. Ορίζουμε επομένως ότι η φάση τους είναι 0, δηλαδή είναι πραγματικοί. Τότε, $\alpha_j \equiv |\alpha_j|$.

Παράδειγμα

Έστω ένας διανυσματικός χώρος που έχει μια ορθοκανονική βάση, $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$. Εύκολα μπορούμε να ελέγξουμε ότι τα διανύσματα $|v_1\rangle = 3|e_1\rangle + |e_2\rangle$, $|v_2\rangle = 2|e_1\rangle + 2|e_2\rangle$ είναι

- γραμμικώς ανεξάρτητα,
- μη ορθογώνια,
- με μέτρο διάφορο του 1.

Ας κατασκευάσουμε μια νέα ορθοκανονική βάση:
Για το πρώτο της διάνυσμα έχουμε

$$|u_1\rangle = \alpha_1 |v_1\rangle.$$

Η απαίτηση να έχει μέτρο 1 καταλήγει στο

$$|\alpha_1| = \frac{1}{\sqrt{\langle v_1 | v_1 \rangle}} = \frac{1}{\sqrt{10}}.$$

Επιλέγοντας πραγματικό συντελεστή α_1 προκύπτει ότι

$$|u_1\rangle = \frac{3}{\sqrt{10}} |e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}} |e_2\rangle.$$

Για το δεύτερο διάνυσμα της βάσης έχουμε

$$|\mathbf{u}_2\rangle = \alpha_2 |\mathbf{v}_2\rangle + \lambda_{21} |\mathbf{u}_1\rangle .$$

Είναι ορθογώνιο στο $|\mathbf{u}_1\rangle$ όταν

$$\lambda_{21} = -\alpha_2 \langle \mathbf{u}_1 | \mathbf{v}_2 \rangle = -\alpha_2 \frac{8}{\sqrt{10}} .$$

Άρα

$$|\mathbf{u}_2\rangle = \alpha_2 \left(-\frac{2}{5} |\mathbf{e}_1\rangle + \frac{6}{5} |\mathbf{e}_2\rangle \right) .$$

Για να έχει μέτρο 1 πρέπει

$$\sqrt{\langle \mathbf{u}_2 | \mathbf{u}_2 \rangle} = 1 \Rightarrow |\alpha_2| \sqrt{\frac{8}{5}} = 1 .$$

Επιλέγοντας πραγματικό συντελεστή α_2 προκύπτει ότι

$$|\mathbf{u}_2\rangle = -\frac{1}{\sqrt{10}} |\mathbf{e}_1\rangle + \frac{3}{\sqrt{10}} |\mathbf{e}_2\rangle .$$

Παράδειγμα

Ας εξετάσουμε το σύνολο των πολυωνύμων μέχρι δεύτερου βαθμού με πραγματικούς συντελεστές, $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$, με τις πράξεις πρόσθεσης και πολλαπλασιασμού με πραγματικό αριθμό που ορίσαμε στην §3.2.1. Το σύνολο αυτό αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο και τα μέλη του ορίζονται στο διάστημα $(-\infty, \infty)$. Μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο μελών του («διανυσμάτων») $|\mathbf{p}\rangle$, $|\mathbf{q}\rangle$ ως εξής

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} p(x) q(x) dx .$$

Παρατηρήστε ότι τα διανύσματα $\{1, x, x^2\}$ παράγουν με κατάλληλο γραμμικό συνδυασμό τους κάθε μέλος του συγκεκριμένου διανυσματικού χώρου. Επιπλέον, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: κανένα δεν μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων δύο. Επομένως, αποτελούν μια βάση του διανυσματικού χώρου. Όμως, η βάση αυτή δεν είναι ορθοκανονική για το εσωτερικό γινόμενο που ορίσαμε· π.χ.

$$\langle 1 | x^2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \frac{1}{2} \neq 0 .$$

Ας εφαρμόσουμε τη μέθοδο Gram–Schmidt για να παραγάγουμε μια ορθοκα-

νονική βάση. Για το πρώτο διάνυσμά της έχουμε

$$|e_1\rangle = \alpha_1 |1\rangle .$$

Η απαίτηση $\langle e_1 | e_1 \rangle = 1$ δίνει

$$1 = \alpha_1^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \alpha_1^2 \Rightarrow \alpha_1 = 1 .$$

Άρα

$$|e_1\rangle = 1 .$$

Για το δεύτερο διάνυσμα έχουμε

$$|e_2\rangle = \alpha_2 |x\rangle + \lambda_{21} |e_1\rangle .$$

Για να είναι ορθογώνιο στο $|e_1\rangle$ πρέπει

$$\langle e_1 | e_2 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x dx + \lambda_{21} \langle e_1 | e_1 \rangle = 0 \Rightarrow \lambda_{21} = 0 .$$

Το μέτρο του είναι 1 όταν

$$\alpha_2^2 \langle x | x \rangle = 1 \Rightarrow \alpha_2^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx = \alpha_2^2 \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \alpha_2 = \sqrt{2} .$$

Επομένως

$$|e_2\rangle = \sqrt{2}x .$$

Για το τρίτο διάνυσμα βάσης έχουμε

$$|e_3\rangle = \alpha_3 |x^2\rangle + \lambda_{31} |e_1\rangle + \lambda_{32} |e_2\rangle .$$

Είναι ορθογώνιο προς τα $|e_1\rangle, |e_2\rangle$ όταν

$$\langle e_1 | e_3 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_3 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^2 dx + \lambda_{31} = 0 \Rightarrow \lambda_{31} = -\alpha_3/2 .$$

$$\langle e_2 | e_3 \rangle = 0 \Rightarrow \alpha_3 \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^3 dx + \lambda_{32} = 0 \Rightarrow \lambda_{32} = 0 .$$

Επομένως, μέχρι στιγμής,

$$|e_3\rangle = \alpha_3 \left(x^2 - \frac{1}{2} \right) .$$

Το μέτρο του είναι 1 όταν

$$\alpha_3^2 \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 dx = 1 \Rightarrow \alpha_3^2 \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \alpha_3 = \sqrt{2}.$$

Άρα

$$|e_3\rangle = \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{2}}.$$

Τα πολυώνυμα $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ της ορθοκανονικής βάσης στην οποία καταλήξαμε, είναι ουσιαστικά τα πρώτα μέλη της οικογένειας των πολυωνύμων Hermite (διαφέρουν στο μέτρο).

Οι συνιστώσες του πολυωνύμου $q(x) = 5x^2 - 2x + 7$ σε αυτή τη βάση είναι

$$\begin{aligned} q_1 &= \langle e_1 | q(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} q(x) dx = \frac{19}{2}, \\ q_2 &= \langle e_2 | q(x) \rangle = \sqrt{2} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} q(x) x dx = -\sqrt{2}, \\ q_3 &= \langle e_3 | q(x) \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} q(x) (2x^2 - 1) dx = \frac{5}{\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Άρα

$$q(x) = \frac{19}{2} \times 1 - \sqrt{2} \times \sqrt{2}x + \frac{5}{\sqrt{2}} \times \frac{2x^2 - 1}{\sqrt{2}}.$$

3.7 Τελεστής

Σε ένα διανυσματικό χώρο υπάρχει η δυνατότητα να ορίσουμε μια αντιστοίχιση ενός μέλους του, έστω $|x\rangle$, σε κάποιο άλλο διάνυσμα του ίδιου χώρου, έστω $|y\rangle$. Η διαδικασία αυτή μπορεί συμβολικά να γραφεί

$$\mathcal{T} |x\rangle = |y\rangle.$$

Ο τελεστής \mathcal{T} συμβολίζει την απεικόνιση ενός διανύσματος σε άλλο και λέμε ότι δρα στο $|x\rangle$ και το αντιστοιχίζει στο $|y\rangle$.

Παρατηρήστε ότι η δράση ενός τελεστή είναι ανεξάρτητη από οποιαδήποτε βάση του χώρου· δεν χρησιμοποιούμε για τον ορισμό του \mathcal{T} τις συνιστώσες κάποιου διανύσματος. Μπορούμε να θεωρούμε ότι ο τελεστής «μετασχηματίζει» ένα διάνυσμα σε άλλο.

Παραδείγματα

Στο χώρο των διανυσμάτων του τριδιάστατου ευκλείδειου χώρου μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή \mathcal{T}_λ που όταν δρα σε ένα διάνυσμα \vec{r} το αντιστοιχίζει στο διάνυσμα $\lambda \vec{r}$, δηλαδή στο διάνυσμα που προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό

του αρχικού διανύσματος με λ :

$$\mathcal{T}_\lambda \vec{r} = \lambda \vec{r} .$$

Άλλος τελεστής στον ίδιο χώρο είναι ο τελεστής προβολής στο επίπεδο $x - y$:

$$\mathcal{P}_{xy} \vec{r} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{k}) \hat{k} ,$$

όπου \hat{k} το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο $x - y$ (δηλαδή, το μοναδιαίο στον άξονα των z). Ο συγκεκριμένος τελεστής απεικονίζει οποιοδήποτε διάνυσμα του χώρου σε διάνυσμα του επιπέδου $x - y$.

Στο χώρο των συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, που ορίζονται σε κάποιο διάστημα, μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή παραγωγίσης, $\mathcal{D} = d/dx$. Η δράση του σε μια συνάρτηση παράγει άλλη (την παράγωγό της).

Αν $|a\rangle$, $|b\rangle$ είναι δύο μέλη διανυσματικού χώρου μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $\mathcal{T}_{a \otimes b} = |a\rangle \langle b|$. Η δράση του σε οποιοδήποτε διάνυσμα $|x\rangle$ περιγράφεται από τη σχέση

$$(|a\rangle \langle b|) |x\rangle = \langle b|x\rangle |a\rangle , \quad (3.15)$$

παράγει δηλαδή ένα πολλαπλάσιο του διανύσματος $|a\rangle$. Ο συγκεκριμένος τελεστής ορίζει το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων.

3.7.1 Γραμμικός Τελεστής

Ένας τελεστής \mathcal{T} χαρακτηρίζεται ως γραμμικός αν ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\mathcal{T}(|a\rangle + |b\rangle) = \mathcal{T}|a\rangle + \mathcal{T}|b\rangle , \quad (3.16\alpha')$$

$$\mathcal{T}(\lambda |a\rangle) = \lambda (\mathcal{T}|a\rangle) , \quad (3.16\beta')$$

για οποιαδήποτε διανύσματα $|a\rangle$, $|b\rangle$ και για οποιοδήποτε αριθμό (πραγματικό ή μιγαδικό) λ . Επακόλουθη σχέση είναι η

$$\mathcal{T}(\lambda |a\rangle + \mu |b\rangle) = \lambda \mathcal{T}|a\rangle + \mu \mathcal{T}|b\rangle ,$$

για οποιαδήποτε $|a\rangle$, $|b\rangle$, λ , μ .

Εύκολα μπορείτε να ελέγξετε ότι οι τελεστές \mathcal{T}_λ , \mathcal{P}_{xy} , \mathcal{D} , $\mathcal{T}_{a \otimes b}$ που είδαμε στα παραδείγματα, είναι γραμμικοί τελεστές.

3.7.2 Πράξεις

Δύο τελεστές \mathcal{A} , \mathcal{B} είναι ίσοι αν η δράση τους σε οποιοδήποτε μέλος $|x\rangle$ ενός διανυσματικού χώρου είναι ίδια:

$$\mathcal{A}|x\rangle = \mathcal{B}|x\rangle , \forall |x\rangle \Leftrightarrow \mathcal{A} = \mathcal{B} .$$

Η πρόσθεση τελεστών, ο πολλαπλασιασμός τελεστή με αριθμό και ο πολλαπλασιασμός τελεστών ορίζονται απο τις παρακάτω σχέσεις

$$(\mathcal{A} + \mathcal{B})|x\rangle = \mathcal{A}|x\rangle + \mathcal{B}|x\rangle, \quad (3.17\alpha')$$

$$(\lambda\mathcal{A})|x\rangle = \lambda(\mathcal{A}|x\rangle), \quad (3.17\beta')$$

$$(\mathcal{A}\mathcal{B})|x\rangle = \mathcal{A}(\mathcal{B}|x\rangle), \quad (3.17\gamma')$$

με λ οποιοδήποτε αριθμό και $|x\rangle$ ένα οποιοδήποτε διάνυσμα.

Η πρόσθεση τελεστών έχει την μεταθετική και την προσεταιριστική ιδιότητα καθώς ανάγεται σε πρόσθεση διανυσμάτων. Το γινόμενο (δηλαδή η διαδοχική δράση) δύο τελεστών δεν έχει γενικά την μεταθετική ιδιότητα, δηλαδή για δύο οποιουσδήποτε τελεστές \mathcal{A} , \mathcal{B} γενικά ισχύει

$$\mathcal{A}\mathcal{B}|x\rangle \neq \mathcal{B}\mathcal{A}|x\rangle.$$

Για κάθε τελεστή \mathcal{T} μπορούμε να ορίσουμε τον αντίθετό του. Τον συμβολίζουμε με $-\mathcal{T}$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$(-\mathcal{T})|x\rangle = -(\mathcal{T}|x\rangle)$$

για οποιοδήποτε διάνυσμα $|x\rangle$.

Με τη βοήθεια του αντίθετου τελεστή μπορούμε να ορίσουμε την πράξη της αφαίρεσης τελεστών. Η αφαίρεση ενός τελεστή \mathcal{B} από ένα τελεστή \mathcal{A} ορίζεται ως η πρόσθεση στον \mathcal{A} του αντίθετου του \mathcal{B} :

$$\mathcal{A} - \mathcal{B} \equiv \mathcal{A} + (-\mathcal{B}).$$

Άλλοι τελεστές είναι

- ο *μηδενικός τελεστής* \mathcal{O} , η δράση του οποίου σε οποιοδήποτε διάνυσμα παράγει το $|0\rangle$,
- ο *ταυτοτικός τελεστής* \mathcal{I} , που αντιστοιχίζει οποιοδήποτε διάνυσμα στον εαυτό του, $\mathcal{I}|x\rangle = |x\rangle$.

Εύκολα διαπιστώνουμε από τις ιδιότητες που ικανοποιεί ένας γραμμικός τελεστής, τις εξισώσεις (3.16), ότι ο μηδενικός και ο ταυτοτικός τελεστής είναι γραμμικοί.

Συμβολική αναπαράσταση ταυτοτικού τελεστή

Ένα διάνυσμα $|x\rangle$ έχει συνιστώσες x_i στην ορθοκανονική βάση $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$ που υπολογίζονται από τις σχέσεις (3.12):

$$x_i = \langle e_i | x \rangle, \quad i = 1, \dots, N.$$

Η ανάπτυξη του $|x\rangle$ στη συγκεκριμένη βάση είναι

$$|x\rangle = \sum_{i=1}^N x_i |e_i\rangle = \sum_{i=1}^N \langle e_i | x \rangle |e_i\rangle = \sum_{i=1}^N |e_i\rangle \langle e_i | x \rangle.$$

Παρατηρήστε ότι ο τελεστής

$$\sum_{i=1}^N |e_i\rangle \langle e_i| \quad (3.18)$$

δρα συμβολικά σε οποιοδήποτε διάνυσμα $|x\rangle$ και το αντιστοιχίζει στο ίδιο διάνυσμα $|x\rangle$:

$$\left(\sum_{i=1}^N |e_i\rangle \langle e_i| \right) |x\rangle = |x\rangle .$$

Είναι επομένως ο ταυτοτικός τελεστής.

Η συγκεκριμένη αναπαράσταση του ταυτοτικού τελεστή διευκολύνει συχνά τις πράξεις. Έτσι

$$\begin{aligned} \langle a|b\rangle &= \langle a|\mathcal{I}b\rangle = \langle a|\left(\sum_{i=1}^N |e_i\rangle \langle e_i|\right)|b\rangle = \sum_{i=1}^N \langle a|e_i\rangle \langle e_i|b\rangle = \sum_{i=1}^N \langle e_i|a\rangle^* \langle e_i|b\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N a_i^* b_i . \end{aligned}$$

Μεταθέτης και Αντιμεταθέτης

Αν \mathcal{A}, \mathcal{B} είναι δύο τελεστές που δρουν στον ίδιο διανυσματικό χώρο, ο *μεταθέτης* τους είναι τελεστής, συμβολίζεται με $[\mathcal{A}, \mathcal{B}]$ και ορίζεται από τη σχέση

$$[\mathcal{A}, \mathcal{B}] = \mathcal{A}\mathcal{B} - \mathcal{B}\mathcal{A} .$$

Μπορούν εύκολα να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες του μεταθέτη για οποιουσδήποτε τελεστές $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} [\mathcal{A} + \mathcal{B}, \mathcal{C}] &= [\mathcal{A}, \mathcal{C}] + [\mathcal{B}, \mathcal{C}] , \\ [\mathcal{A}, \mathcal{A}] &= 0 , \\ [\mathcal{A}, \mathcal{B}] &= -[\mathcal{B}, \mathcal{A}] , \\ [\mathcal{A}, [\mathcal{B}, \mathcal{C}]] + [\mathcal{B}, [\mathcal{C}, \mathcal{A}]] + [\mathcal{C}, [\mathcal{A}, \mathcal{B}]] &= 0 , \\ [\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{C}] &= [\mathcal{A}, \mathcal{B}]\mathcal{C} + \mathcal{B}[\mathcal{A}, \mathcal{C}] . \end{aligned}$$

Ο *αντιμεταθέτης* των \mathcal{A}, \mathcal{B} συμβολίζεται με $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ και ορίζεται από τη σχέση

$$\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} = \mathcal{A}\mathcal{B} + \mathcal{B}\mathcal{A} .$$

Για τον αντιμεταθέτη μπορούν να αποδειχθούν οι ακόλουθες ιδιότητες, για οποιουσδήποτε τελεστές $\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\} &= \{\mathcal{B}, \mathcal{A}\} , \\ \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\mathcal{C}\} &= \{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}\mathcal{C} + \mathcal{B}[\mathcal{A}, \mathcal{C}] , \\ [\mathcal{A}\mathcal{B}, \mathcal{C}] &= \mathcal{A}\{\mathcal{B}, \mathcal{C}\} - \{\mathcal{A}, \mathcal{C}\}\mathcal{B} . \end{aligned}$$

3.7.3 Αντίστροφος ενός τελεστή

Για ένα τελεστή \mathcal{T} είναι δυνατό να υπάρχει ο *αντίστροφος* του, ο οποίος συμβολίζεται με \mathcal{T}^{-1} . Η δράση του αντίστροφου τελεστή, \mathcal{T}^{-1} , σε οποιοδήποτε διάνυσμα που παράγεται από τη δράση του τελεστή \mathcal{T} , αναιρεί τη δράση του \mathcal{T} , δηλαδή

$$\mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}|x\rangle) = |x\rangle . \quad (3.19)$$

Αν θέσουμε

$$\mathcal{T}|x\rangle = |y\rangle$$

τότε η εξίσωση (3.19) γίνεται

$$\mathcal{T}^{-1}|y\rangle = |x\rangle . \quad (3.20)$$

Παρατηρήστε στην εξίσωση (3.19) ότι η διαδοχική δράση των \mathcal{T} , \mathcal{T}^{-1} ισοδυναμεί με τη δράση του ταυτοτικού τελεστή, \mathcal{I} :

$$\mathcal{T}^{-1}\mathcal{T} \equiv \mathcal{I} .$$

Αντίστοιχα, η δράση του \mathcal{T} στα δύο μέλη της εξίσωσης (3.20) μας οδηγεί εύκολα στη σχέση

$$\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1} \equiv \mathcal{I} ,$$

δηλαδή, ότι ο αντίστροφος του \mathcal{T}^{-1} είναι ο \mathcal{T} .

Εύκολα δείχνεται ότι ο αντίστροφος ενός τελεστή (αν υπάρχει) είναι μοναδικός. Έστω ότι υπάρχουν δύο αντίστροφοι, \mathcal{T}_1^{-1} , \mathcal{T}_2^{-1} , του τελεστή \mathcal{T} . Θα πρέπει να ισχύει

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T} = \mathcal{I} &\Rightarrow (\mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{T})\mathcal{T}_2^{-1} = \mathcal{I}\mathcal{T}_2^{-1} \Rightarrow \mathcal{T}_1^{-1}(\mathcal{T}\mathcal{T}_2^{-1}) = \mathcal{I}\mathcal{T}_2^{-1} \Rightarrow \mathcal{T}_1^{-1}\mathcal{I} = \mathcal{I}\mathcal{T}_2^{-1} \\ &\Rightarrow \mathcal{T}_1^{-1} = \mathcal{T}_2^{-1} . \end{aligned}$$

Αν ο τελεστής \mathcal{T} είναι γραμμικός τότε και ο αντίστροφός του, αν υπάρχει, είναι γραμμικός. Η εξίσωση (3.16α') για τον \mathcal{T}^{-1} προκύπτει με χρήση της γραμμικότητας του \mathcal{T} ως εξής

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}(|a\rangle + |b\rangle) &= \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{I}|a\rangle + \mathcal{I}|b\rangle) = \mathcal{T}^{-1}(\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}|a\rangle + \mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}|b\rangle) \\ &= \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\mathcal{T}^{-1}|a\rangle + \mathcal{T}^{-1}|b\rangle) = \mathcal{I}(\mathcal{T}^{-1}|a\rangle + \mathcal{T}^{-1}|b\rangle) \\ &= \mathcal{T}^{-1}|a\rangle + \mathcal{T}^{-1}|b\rangle . \end{aligned}$$

Εύκολα καταλήγουμε και στην εξίσωση (3.16β'):

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^{-1}(\lambda|a\rangle) &= \mathcal{T}^{-1}(\lambda\mathcal{I}|a\rangle) = \mathcal{T}^{-1}(\lambda\mathcal{T}\mathcal{T}^{-1}|a\rangle) \\ &= \mathcal{T}^{-1}\mathcal{T}(\lambda\mathcal{T}^{-1}|a\rangle) = \mathcal{I}(\lambda\mathcal{T}^{-1}|a\rangle) \\ &= \lambda\mathcal{T}^{-1}|a\rangle . \end{aligned}$$

Από τους τελεστές που είδαμε στα παραδείγματα, μόνο¹ ο τελεστής \mathcal{T}_λ έχει αντίστροφο, τον $\mathcal{T}_{1/\lambda}$, και μόνο αν $\lambda \neq 0$:

$$(\mathcal{T}_{1/\lambda} \mathcal{T}_\lambda) |x\rangle = \mathcal{T}_{1/\lambda} (\mathcal{T}_\lambda |x\rangle) = \mathcal{T}_{1/\lambda} (\lambda |x\rangle) = \frac{1}{\lambda} (\lambda |x\rangle) = |x\rangle .$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $|x\rangle$, επομένως, $\mathcal{T}_{1/\lambda} \mathcal{T}_\lambda = \mathcal{I}$.

Ας υπολογίσουμε μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα γινομένου δύο τελεστών \mathcal{A} , \mathcal{B} που έχουν αντίστροφους:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= \mathcal{A} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A} \mathcal{I} \mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A} (\mathcal{B} \mathcal{B}^{-1}) \mathcal{A}^{-1} \\ &= (\mathcal{A} \mathcal{B}) (\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}^{-1}) . \end{aligned}$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνεται ότι

$$\mathcal{I} = (\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}^{-1}) (\mathcal{A} \mathcal{B}) .$$

Οι παραπάνω σχέσεις δηλώνουν ότι ο $\mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}^{-1}$ δρα ως αντίστροφος του τελεστή $\mathcal{A} \mathcal{B}$:

$$(\mathcal{A} \mathcal{B})^{-1} = \mathcal{B}^{-1} \mathcal{A}^{-1} .$$

3.7.4 Ανάστροφος συζυγής

Αν \mathcal{T} είναι τελεστής που δρα στα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών, ο *ανάστροφος* (ή *ερμιτιανός*) *συζυγής* του συμβολίζεται με \mathcal{T}^\dagger και είναι ο τελεστής που για οποιαδήποτε διανύσματα $|a\rangle$, $|b\rangle$ ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle a | \mathcal{T} b \rangle = \langle \mathcal{T}^\dagger a | b \rangle .$$

3.7.5 Ιδιοτιμές και Ιδιοδιανύσματα

Στο διανυσματικό χώρο στον οποίο ορίζεται ένας τελεστής \mathcal{T} μπορεί να ανήκει ένα μη μηδενικό διάνυσμα $|x\rangle$ που να έχει την ακόλουθη ιδιότητα: η δράση του τελεστή \mathcal{T} σε αυτό το αντιστοιχίζει στον εαυτό του, πολλαπλασιασμένο με ένα μιγαδικό αριθμό λ . Δηλαδή,

$$\mathcal{T} |x\rangle = \lambda |x\rangle . \quad (3.21)$$

Το $|x\rangle$ με αυτή την ιδιότητα λέγεται *ιδιοδιάνυσμα* του τελεστή \mathcal{T} ενώ το λ είναι η αντίστοιχη *ιδιοτιμή*. Παρατηρήστε ότι το $|x\rangle$ δεν είναι μοναδικό καθώς οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του ικανοποιεί την (3.21).

Παράδειγμα

Στο χώρο των συνεχών και παραγωγίσιμων συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, ορίζουμε τον τελεστή παραγώγισης, $\mathcal{D} = d/dx$. Τα ιδιοδιανύσματά

¹Ο τελεστής $\mathcal{T}_{a \otimes b}$ έχει αντίστροφο μόνο αν η διάσταση του χώρου είναι 1.

του, $|f(x)\rangle$, βρίσκονται από την εξίσωση

$$\frac{d}{dx} |f(x)\rangle = \lambda |f(x)\rangle \Rightarrow f' = \lambda f \Rightarrow \frac{df}{f} = \lambda dx \Rightarrow \ln f = \lambda x + c \Rightarrow f(x) = e^c e^{\lambda x}.$$

Οι συναρτήσεις της μορφής $e^{\lambda x}$ και τα πολλαπλάσιά τους είναι ιδιοδιανύσματα του τελεστή παραγωγίσης με ιδιοτιμή λ .

3.7.6 Ερμιτιανός τελεστής

Ένας τελεστής \mathcal{T} χαρακτηρίζεται ως *ερμιτιανός* αν για οποιαδήποτε μέλη $|a\rangle, |b\rangle$ ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle a | \mathcal{T} b \rangle = \langle \mathcal{T} a | b \rangle.$$

Ισοδύναμος ορισμός είναι ο ακόλουθος: Ένας τελεστής \mathcal{T} είναι *ερμιτιανός* αν είναι ίσος με τον ανάστροφο συζυγή του, \mathcal{T}^\dagger .

Για ένα ερμιτιανό τελεστή

- οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί: αν λ είναι μια ιδιοτιμή του \mathcal{T} και $|x\rangle$ το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα, ισχύει

$$\mathcal{T} |x\rangle = \lambda |x\rangle \Rightarrow \lambda = \langle x | \mathcal{T} x \rangle = \langle \mathcal{T} x | x \rangle = \langle x | \mathcal{T} x \rangle^* = \lambda^*.$$

- τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια: αν λ_1, λ_2 είναι δύο διαφορετικές ιδιοτιμές του \mathcal{T} και $|x_1\rangle, |x_2\rangle$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα, ισχύει

$$\begin{aligned} \langle x_2 | \mathcal{T} x_1 \rangle &= \lambda_1 \langle x_2 | x_1 \rangle, \\ \langle \mathcal{T} x_2 | x_1 \rangle &= \lambda_2^* \langle x_2 | x_1 \rangle. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$(\lambda_2^* - \lambda_1) \langle x_2 | x_1 \rangle = 0 \Rightarrow \langle x_2 | x_1 \rangle = 0.$$

Οι ερμιτιανοί τελεστές βρίσκουν ιδιαίτερη εφαρμογή στην Κβαντική Φυσική καθώς όλα τα φυσικά μεγέθη αναπαριστώνται σε αυτή με τέτοιους τελεστές.

3.7.7 Μοναδιαίος και Ορθογώνιος τελεστής

Ένας τελεστής \mathcal{T} χαρακτηρίζεται ως *μοναδιαίος* αν για οποιαδήποτε μέλη $|a\rangle, |b\rangle$ ενός διανυσματικού χώρου πάνω στο σώμα των μιγαδικών αριθμών ικανοποιεί τη σχέση

$$\langle \mathcal{T} a | \mathcal{T} b \rangle = \langle a | b \rangle.$$

Αν το σώμα πάνω στο οποίο ορίζεται ο διανυσματικός χώρος είναι οι πραγματικοί αριθμοί, ο τελεστής με την παραπάνω ιδιότητα χαρακτηρίζεται *ορθογώνιος*.

Ισοδύναμος ορισμός είναι ο ακόλουθος: ένας τελεστής \mathcal{T} είναι μοναδιαίος (ή για τους πραγματικούς, ορθογώνιος) αν ο ανάστροφός συζυγής του είναι ίσος με τον αντίστροφό του, καθώς

$$\langle \mathcal{T}a | \mathcal{T}b \rangle = \langle a | b \rangle \Leftrightarrow \langle \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T}a | b \rangle = \langle a | b \rangle \Leftrightarrow \mathcal{T}^\dagger \mathcal{T} = \mathcal{I} \Leftrightarrow \mathcal{T}^\dagger = \mathcal{T}^{-1} .$$

Ας εξετάσουμε τις ιδιοτιμές ενός μοναδιαίου τελεστή \mathcal{T} . Αν $\mathcal{T}|x\rangle = \lambda|x\rangle$, με $|x\rangle \neq |0\rangle$, τότε από τον ορισμό

$$\langle x | x \rangle = \langle \mathcal{T}x | \mathcal{T}x \rangle = \langle \lambda x | \lambda x \rangle = \lambda^* \lambda \langle x | x \rangle \Rightarrow |\lambda|^2 = 1 .$$

Συνεπώς, κάθε ιδιοτιμή του μοναδιαίου τελεστή \mathcal{T} έχει μέτρο 1.

3.7.8 Αναπαράσταση τελεστή σε συγκεκριμένη βάση

Ένας τελεστής ορίζεται όταν προσδιορίζεται το αποτέλεσμα της δράσης του σε οποιοδήποτε μέλος ενός διανυσματικού χώρου. Σε ορισμένους τελεστές είναι εύκολο να περιγραφεί μαθηματικά η δράση τους σε οποιοδήποτε διάνυσμα· είδαμε μερικούς ως παραδείγματα. Γενικά όμως, δεν είναι απλός ένας τέτοιος προσδιορισμός.

Στην περίπτωση ενός γραμμικού τελεστή \mathcal{T} , η δράση του σε ένα τυχαίο διάνυσμα μπορεί να προσδιοριστεί μαθηματικά αν γνωρίζουμε τη δράση του στα διανύσματα μιας ορθοκανονικής βάσης. Ας δούμε πώς.

Έστω $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$ είναι ορθοκανονική βάση ενός N -διάστατου διανυσματικού χώρου και $|x\rangle$ ένα οποιοδήποτε διάνυσμα με συνιστώσες $\{x_i\}$ σε αυτή. Ας συμβολίσουμε με $|y\rangle$ το αποτέλεσμα της δράσης του γραμμικού τελεστή \mathcal{T} στο διάνυσμα $|x\rangle$: $|y\rangle = \mathcal{T}|x\rangle$. Το $|y\rangle$ είναι μέλος του ίδιου χώρου με συνιστώσες $\{y_i\}$ που επιδιώκουμε να προσδιορίσουμε:

$$|y\rangle = \mathcal{T}|x\rangle = \mathcal{T} \sum_{j=1}^N x_j |e_j\rangle = \sum_{j=1}^N x_j \mathcal{T}|e_j\rangle \Rightarrow \sum_{i=1}^N y_i |e_i\rangle = \sum_{j=1}^N x_j \mathcal{T}|e_j\rangle . \quad (3.22)$$

Στην παραπάνω σχέση χρειάζεται να γνωρίζουμε τα διανύσματα

$$|\xi_j\rangle = \mathcal{T}|e_j\rangle , \quad j = 1, \dots, N .$$

Τα $|\xi_j\rangle$, ως διανύσματα του χώρου, μπορούν να αναπτυχθούν στη βάση $\{|e_i\rangle\}$:

$$|\xi_j\rangle = \sum_{i=1}^N \tau_{ij} |e_i\rangle .$$

Επομένως,

$$\mathcal{T}|e_j\rangle = \sum_{i=1}^N \tau_{ij} |e_i\rangle \Rightarrow \tau_{ij} = \langle e_i | \mathcal{T} | e_j \rangle . \quad (3.23)$$

Οι αριθμοί τ_{ij} αποτελούν την αναπαράσταση του τελεστή \mathcal{T} στην ορθοκανονική βάση $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, \dots, |e_N\rangle\}$. Προφανώς, εξαρτώνται από την επιλεγμένη βάση και μεταβάλλονται αν την αλλάξουμε.

Ο συνδυασμός των εξισώσεων (3.22) και (3.23) δίνει

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N y_i |e_i\rangle &= \sum_{j=1}^N x_j \mathcal{T} |e_j\rangle = \sum_{j=1}^N x_j \sum_{i=1}^N \tau_{ij} |e_i\rangle = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_j \tau_{ij} |e_i\rangle \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\sum_{j=1}^N \tau_{ij} x_j \right) |e_i\rangle . \end{aligned}$$

Η τελευταία σχέση καταλήγει στον προσδιορισμό των συνιστωσών του $|y\rangle$:

$$y_i = \sum_{j=1}^N \tau_{ij} x_j, \quad i = 1, \dots, N .$$

Συνεπώς, αν γνωρίζουμε την αναπαράσταση του τελεστή και τις συνιστώσες του διανύσματος στο οποίο δρα, μπορούμε να υπολογίσουμε τις συνιστώσες του αποτελέσματος.

Σε μορφή πινάκων (που θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο) η τελευταία σχέση γράφεται

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \cdots & \tau_{1N} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \cdots & \tau_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tau_{N1} & \tau_{N2} & \cdots & \tau_{NN} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{bmatrix} .$$

Παράδειγμα

Ο χώρος των γεωμετρικών διανυσμάτων στο επίπεδο $x-y$ παράγεται από την ορθοκανονική βάση $\{\hat{i}, \hat{j}\}$. Μπορούμε να ορίσουμε τον τελεστή $\mathcal{R}_{\pi/2}$ που δρα σε ένα διάνυσμα και το στρέφει κατά $\pi/2$ rad δεξιόστροφα. Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_{\pi/2} \hat{i} &= \hat{j} = 0\hat{i} + 1\hat{j} , \\ \mathcal{R}_{\pi/2} \hat{j} &= -\hat{i} = -1\hat{i} + 0\hat{j} . \end{aligned}$$

Επομένως, οι συνιστώσες r_{ij} του τελεστή $\mathcal{R}_{\pi/2}$ στη βάση $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ είναι

$$r_{11} = 0 , \quad r_{12} = -1 , \quad r_{21} = 1 , \quad r_{22} = 0 .$$

Η δράση του $\mathcal{R}_{\pi/2}$ σε ένα διάνυσμα $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j}$ είναι το διάνυσμα με συνιστώσες

$$\begin{aligned} x' &= 0 \cdot x - 1 \cdot y = -y , \\ y' &= 1 \cdot x + 0 \cdot y = x . \end{aligned}$$

Ο αντίστροφος του τελεστή μετασχηματίζει το διάνυσμα $x'\hat{i} + y'\hat{j}$ στο $x\hat{i} + y\hat{j}$ με

$$x = y' , \quad y = -x' .$$

Επομένως, ο $\mathcal{R}_{\pi/2}^{-1}$ έχει συνιστώσες

$$r_{11}^{-1} = 0 , \quad r_{12}^{-1} = 1 , \quad r_{21}^{-1} = -1 , \quad r_{22}^{-1} = 0 .$$

Ο τελεστής $\mathcal{R}_{\pi/2}$ (και ο αντίστροφός του) είναι μοναδιαίος: για οποιαδήποτε διανύσματα $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j}$ και $\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j}$ έχουμε

$$\mathcal{R}_{\pi/2}\vec{a} = -a_2\hat{i} + a_1\hat{j} .$$

$$\mathcal{R}_{\pi/2}\vec{b} = -b_2\hat{i} + b_1\hat{j} .$$

Τα εσωτερικά γινόμενα $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ και $\langle \mathcal{R}_{\pi/2}\mathbf{a} | \mathcal{R}_{\pi/2}\mathbf{b} \rangle$ είναι

$$\langle \mathcal{R}_{\pi/2}\mathbf{a} | \mathcal{R}_{\pi/2}\mathbf{b} \rangle = (-a_2)(-b_2) + a_1b_1 ,$$

$$\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle = a_1b_1 + a_2b_2 .$$

Η ισότητα τους αποδεικνύει ότι ο τελεστής $\mathcal{R}_{\pi/2}$ είναι μοναδιαίος.

3.8 Ασκήσεις

1. Στο χώρο των γεωμετρικών διανυσμάτων στις τρεις διαστάσεις, τα διανύσματα $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ αποτελούν μια ορθοκανονική βάση. Δείξτε ότι και τα διανύσματα

$$\hat{e}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} + \frac{1}{2}\hat{j} - \frac{1}{2}\hat{k} , \quad \hat{e}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{j} + \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{k} , \quad \hat{e}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{i} - \frac{1}{2}\hat{j} + \frac{1}{2}\hat{k} ,$$

είναι άλλη ορθοκανονική βάση.

2. Ελέγξτε αν τα διανύσματα

$$|\mathbf{a}\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}|e_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|e_2\rangle , \quad |\mathbf{b}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|e_1\rangle - \frac{i}{\sqrt{2}}|e_2\rangle$$

είναι ορθοκανονικά. Δίνεται ότι η βάση $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle\}$ του χώρου στον οποίο ανήκουν τα $|\mathbf{a}\rangle, |\mathbf{b}\rangle$ είναι ορθοκανονική.

3. Αν η βάση $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ είναι ορθοκανονική, είναι τα διανύσματα $|\mathbf{a}\rangle = |e_1\rangle + |e_3\rangle$, $|\mathbf{b}\rangle = 2|e_1\rangle + |e_2\rangle$, $|\mathbf{c}\rangle = |e_1\rangle - 3|e_3\rangle$ γραμμικώς ανεξάρτητα;
4. Υπολογίστε το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{a} | \mathbf{b} \rangle$ όπου $\mathbf{a} = 3|e_1\rangle + 2|e_2\rangle + |e_3\rangle$, $\mathbf{b} = 2|e_1\rangle - |e_2\rangle + 2|e_3\rangle$, αν η βάση $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ του χώρου στον οποίο ανήκουν τα $|\mathbf{a}\rangle, |\mathbf{b}\rangle$ είναι ορθοκανονική.

5. Δίνονται τα διανύσματα $|\mathbf{f}_1\rangle = \xi |e_1\rangle + |e_2\rangle$, $|\mathbf{f}_2\rangle = |e_1\rangle + \xi |e_2\rangle + |e_3\rangle$, $|\mathbf{f}_3\rangle = |e_2\rangle + \xi |e_3\rangle$, όπου $|e_1\rangle$, $|e_2\rangle$, $|e_3\rangle$ ορθοκανονικά διανύσματα, και ξ πραγματικός αριθμός. Για ποιες τιμές του ξ τα $|\mathbf{f}_1\rangle$, $|\mathbf{f}_2\rangle$, $|\mathbf{f}_3\rangle$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα; Για ποιες είναι γραμμικώς εξαρτημένα;
6. Έστω ότι η $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση ενός διανυσματικού χώρου. Έστω ακόμα τα διανύσματα $|\mathbf{v}_1\rangle = (-1 - \sqrt{2}, -1 - \sqrt{2}, 1)$, $|\mathbf{v}_2\rangle = (0, 1, 2)$, $|\mathbf{v}_3\rangle = (-1 + \sqrt{2}, -1 + \sqrt{2}, 1)$, εκφρασμένα με τις συνιστώσες τους στη συγκεκριμένη βάση. Είναι τα $|\mathbf{v}_1\rangle$, $|\mathbf{v}_2\rangle$, $|\mathbf{v}_3\rangle$ γραμμικώς ανεξάρτητα; Είναι ορθογώνια μεταξύ τους;
- Αναπτύξτε το διάνυσμα $|\mathbf{x}\rangle = (-1, 1, 1)$ στη βάση $\{|\mathbf{v}_1\rangle, |\mathbf{v}_2\rangle, |\mathbf{v}_3\rangle\}$.
7. Το σύνολο των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων, μίας πραγματικής μεταβλητής, που παίρνουν τιμές στο διάστημα $[a, b]$, με τις πράξεις που ορίστηκαν στο §3.2.1, αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο. Ορίζουμε το εσωτερικό γινόμενο από τη σχέση

$$\langle f(x) | g(x) \rangle = \int_a^b f^*(x)g(x) dx .$$

Δείξτε ότι πράγματι έχει τις ιδιότητες στις εξισώσεις (3.3).

8. Το σύνολο των συνεχών, πραγματικών συναρτήσεων, μίας πραγματικής μεταβλητής, που παίρνουν τιμές στο διάστημα $[a, b]$, με τις πράξεις που ορίστηκαν στο §3.2.1, αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο. Ελέγξτε αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα τα διανύσματα

- $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = x$, $f_2(x) = x^2$, $f_3(x) = x^3$,
- $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = 1 - x + x^2$, $f_2(x) = x - x^2 + 2x^3$, $f_3(x) = 1 + x^3$.

9. Να αποδείξετε τη σχέση

$$\|\mathbf{a} + \mathbf{b}\|^2 + \|\mathbf{a} - \mathbf{b}\|^2 = 2(\|\mathbf{a}\|^2 + \|\mathbf{b}\|^2) .$$

10. Αν $\{|e_1\rangle, |e_2\rangle, |e_3\rangle\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση, δείξτε ότι τα διανύσματα $|\mathbf{a}\rangle = |e_1\rangle + |e_3\rangle$, $|\mathbf{b}\rangle = 5|e_1\rangle + |e_2\rangle$, $|\mathbf{c}\rangle = 3|e_1\rangle - 2|e_3\rangle$, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αλλά όχι ορθοκανονικά. Εφαρμόστε τη μέθοδο Gram–Schmidt για να παραγάγετε μια ορθοκανονική βάση.
11. Βρείτε μια βάση του χώρου των πολυωνύμων έως τρίτου βαθμού με πεδίο ορισμού το $[0, +\infty)$ και εσωτερικό γινόμενο δύο μελών του χώρου $p(x)$, $q(x)$ το

$$\langle \mathbf{p} | \mathbf{q} \rangle = \int_0^\infty e^{-x} p(x) q(x) dx .$$

Τα πολυώνυμα της βάσης στην οποία θα καταλήξετε είναι τα πρώτα πολυώνυμα Laguerre.

Βρείτε τις συνιστώσες του πολυωνύμου $4x^3 - 5x^2 + 6$ σε αυτή τη βάση.

12. Βρείτε μια βάση του χώρου των πολυωνύμων έως τρίτου βαθμού με πεδίο ορισμού το $(-1, 1)$ και εσωτερικό γινόμενο δύο πολυωνύμων $p(x)$, $q(x)$ το

$$\langle p | q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x) dx .$$

Τα πολυώνυμα της βάσης στην οποία θα καταλήξετε είναι ουσιαστικά τα πρώτα πολυώνυμα Legendre (διαφέρουν στο μέτρο).

Βρείτε τις συνιστώσες του πολυωνύμου $4x^3 - 5x^2 + 6$ σε αυτή τη βάση.

13. Βρείτε την αναπαράσταση στη βάση $\{\hat{i}, \hat{j}\}$ του τελεστή \mathcal{R}_ϕ που στρέφει δεξιόστροφα ένα διάνυσμα του επιπέδου $x - y$ κατά γωνία ϕ . Δείξτε ότι είναι ορθογώνιος τελεστής.

14. Ο τελεστής \mathcal{P}_{xy} που προβάλλει στο επίπεδο $x - y$ ένα γεωμετρικό διάνυσμα \vec{r} , ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{P}_{xy}\vec{r} = \vec{r} - (\vec{r} \cdot \hat{k})\hat{k} .$$

Βρείτε την αναπαράστασή του στην ορθοκανονική βάση $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$.

15. Ο τελεστής $\mathcal{P}_{\vec{a}}$ που προβάλλει στο γεωμετρικό διάνυσμα \vec{a} ένα διάνυσμα \vec{r} , ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{P}_{\vec{a}}\vec{r} = \frac{\vec{r} \cdot \vec{a}}{\vec{a} \cdot \vec{a}} \vec{a} .$$

Βρείτε την αναπαράστασή του στην ορθοκανονική βάση $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ αν $\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$. Δείξτε ότι είναι ερμιτιανός τελεστής.

Κεφάλαιο 4

Θεωρία πινάκων

4.1 Ορισμός

Πίνακας στη γραμμική άλγεβρα ονομάζεται η ορθογώνια διδιάστατη διάταξη αριθμών (ή αριθμητικών εκφράσεων), η παράθεσή τους δηλαδή σε γραμμές και στήλες, για την οποία ορίζονται κάποιες πράξεις (πρόσθεση, πολλαπλασιασμός, κλπ.) που θα αναφέρουμε παρακάτω. Οι αριθμοί αποτελούν τα *στοιχεία* του πίνακα και μπορεί να είναι ακέραιοι, πραγματικοί ή μιγαδικοί. Τα πλήθη των γραμμών και στηλών αποτελούν τις *διαστάσεις* του πίνακα. Παράδειγμα πίνακα με πραγματικά στοιχεία είναι το ακόλουθο:

$$A = \begin{bmatrix} 2.3 & -9.1 & 8.4 \\ -1.8 & 7.3 & 6.4 \end{bmatrix}.$$

Για διευκόλυνσή μας μπορούμε να συμβολίσουμε ένα πίνακα με κάποιο γράμμα, όπως κάναμε στο παράδειγμα (A). Στο εξής θα χρησιμοποιούμε κεφαλαία λατινικά γράμματα για τον συμβολισμό πινάκων. Ο συγκεκριμένος πίνακας στο παράδειγμα παραθέτει τα στοιχεία του σε δύο γραμμές και τρεις στήλες, και όπως συνήθως λέμε, έχει διαστάσεις 2×3 . Ο πίνακας A και οι διαστάσεις του μπορούν να γραφούν συνοπτικά ως $A_{2 \times 3}$.

Το στοιχείο στην γραμμή i και στήλη j ενός πίνακα A θα το συμβολίζουμε με a_{ij} , θα χρησιμοποιούμε δηλαδή το πεζό γράμμα που αντιστοιχεί στο σύμβολο του πίνακα. Έτσι, το στοιχείο a_{12} του πίνακα στο παράδειγμα είναι το -9.1 .

Σε ένα πίνακα $A_{m \times n}$ τα στοιχεία a_{ii} , με $i = 1, 2, \dots, \min\{m, n\}$ αποτελούν την *κύρια διαγώνιο* του.

Ένας πίνακας με μία στήλη και πολλές γραμμές ή με μία γραμμή και πολλές στήλες ονομάζεται *διάνυσμα* (στήλης ή γραμμής). Ως σύμβολο διανύσματος θα χρησιμοποιούμε στο εξής πεζό γράμμα. Έτσι, ένα διάνυσμα της γραμμικής άλγεβρας

με πραγματικά στοιχεία είναι το

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 8.3 \\ 2.8 \\ -7.4 \end{bmatrix}.$$

Το στοιχείο $x_2 \equiv x_{21}$ είναι το 2.8.

4.2 Παραγόμενοι πίνακες

4.2.1 Ανάστροφος πίνακας

Ο *ανάστροφος* ενός πίνακα \mathbf{A} με m γραμμές και n στήλες, είναι ένας πίνακας που συμβολίζεται με \mathbf{A}^T , έχει n γραμμές και m στήλες και προκύπτει από τον \mathbf{A} γράφοντας ως στήλες του τις γραμμές του \mathbf{A} . Επομένως, τα στοιχεία των \mathbf{A} , \mathbf{A}^T ικανοποιούν τη σχέση

$$a_{ij}^T = a_{ji}.$$

Παράδειγμα

Ο ανάστροφος του πίνακα 2×3

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2.3 & -9.1 & 8.4 \\ -1.8 & 7.3 & 6.4 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας 3×2

$$\mathbf{A}^T = \begin{bmatrix} 2.3 & -1.8 \\ -9.1 & 7.3 \\ 8.4 & 6.4 \end{bmatrix}.$$

4.2.2 Συζυγής πίνακας

Ο *συζυγής* ενός πίνακα \mathbf{A} με μιγαδικά στοιχεία συμβολίζεται με \mathbf{A}^* , είναι πίνακας ίδιων διαστάσεων με τον \mathbf{A} και έχει στοιχεία τους μιγαδικούς συζυγείς των στοιχείων του \mathbf{A} .

4.2.3 Ανάστροφος συζυγής πίνακας

Ο *ανάστροφος συζυγής* (ή, όπως λέγεται στη Μαθηματική Φυσική, ο *ερμιτιανός συζυγής*) του πίνακα \mathbf{A} συμβολίζεται με \mathbf{A}^\dagger ή \mathbf{A}^H και είναι ο μιγαδικός συζυγής του ανάστροφου, $(\mathbf{A}^T)^*$, ή, τελείως ισοδύναμα, ο ανάστροφος του μιγαδικού συζυγούς του \mathbf{A} , $(\mathbf{A}^*)^T$.

4.3 Πράξεις πινάκων

4.3.1 Ισότητα πινάκων

Δύο πίνακες A, B είναι ίσοι αν έχουν ίδιες διαστάσεις και τα αντίστοιχα στοιχεία τους είναι ίσα:

$$A_{m \times n} = B_{m \times n} \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}, \quad \forall i, j \quad \text{με } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

4.3.2 Πρόσθεση

Η πράξη της πρόσθεσης δύο πινάκων A, B , με ίδιες διαστάσεις $m \times n$, συμβολίζεται με $A + B$ και γίνεται κατά στοιχεία: το άθροισμα των A, B είναι ένας πίνακας C με διαστάσεις $m \times n$ και στοιχεία που είναι το άθροισμα των αντίστοιχων στοιχείων των A, B :

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad \forall i, j \quad \text{με } 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n.$$

Επομένως, το σύνολο των πινάκων με διαστάσεις $m \times n$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Παράδειγμα

Το άθροισμα των πινάκων

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 11 & 13 & 15 \\ 12 & 14 & 16 \end{bmatrix}$$

είναι ο πίνακας

$$C = \begin{bmatrix} 12 & 16 & 20 \\ 14 & 18 & 22 \end{bmatrix}$$

Εύκολα αποδεικνύεται από τον ορισμό ότι η πράξη της πρόσθεσης πινάκων με συμβατές διαστάσεις έχει

- την αντιμεταθετική ιδιότητα: για οποιαδήποτε A και B με ίδιες διαστάσεις ισχύει

$$A + B = B + A.$$

- την προσεταιριστική ιδιότητα: για οποιουσδήποτε συμβατούς πίνακες A, B, C ισχύει

$$A + (B + C) = (A + B) + C.$$

Υπάρχει ένας και μοναδικός πίνακας O με διαστάσεις $m \times n$, που όταν προστεθεί σε οποιοδήποτε πίνακα A με τις συγκεκριμένες διαστάσεις δίνει ως αποτέλεσμα τον πίνακα A :

$$A + O = A.$$

Από τον ορισμό της πρόσθεσης προκύπτει ότι τα στοιχεία του πίνακα O ικανοποιούν τη σχέση

$$a_{ij} + o_{ij} = a_{ij} .$$

Επομένως, ο πίνακας O έχει όλα του τα στοιχεία ίσα με το μηδέν. Αυτός ο *μηδενικός* πίνακας αποτελεί το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης πινάκων.

Εύκολα δείχνεται ότι ο ανάστροφος ή ο συζυγής ή ο ανάστροφος συζυγής του αθροίσματος δύο πινάκων είναι το άθροισμα των αναστροφών ή των συζυγών ή των αναστροφών συζυγών πινάκων αντίστοιχα Π.χ.

$$(A + B)^T = A^T + B^T$$

καθώς

$$C = A + B \Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \Rightarrow c_{ji}^T = a_{ji}^T + b_{ji}^T \Rightarrow C^T = A^T + B^T .$$

Αντίθετος πίνακας

Για κάθε πίνακα A υπάρχει ένας και μοναδικός πίνακας με ίδιες διαστάσεις, που όταν προστεθεί στον A έχει ως αποτέλεσμα τον μηδενικό πίνακα. Λέγεται *αντίθετος* πίνακας του A , συμβολίζεται με $-A$ και τα στοιχεία του προφανώς ικανοποιούν τη σχέση

$$a_{ij} + (-a)_{ij} = 0 \Rightarrow (-a)_{ij} = -a_{ij} ,$$

προκύπτουν δηλαδή από τα στοιχεία του A αλλάζοντας πρόσημο.

Εύκολα δείχνεται ότι ο αντίθετος πίνακας του αθροίσματος των πινάκων A, B είναι το άθροισμα των αντίθετων πινάκων, $-A, -B$:

$$\begin{aligned} C = A + B &\Rightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij} \\ &\Rightarrow (-c)_{ij} = -c_{ij} = -(a_{ij} + b_{ij}) = -a_{ij} - b_{ij} = (-a)_{ij} + (-b)_{ij} \\ &\Rightarrow -C = (-A) + (-B) . \end{aligned}$$

4.3.3 Αφαίρεση πινάκων

Η πράξη της *αφαίρεσης* ενός πίνακα B από ένα πίνακα A , ίδιων διαστάσεων, ορίζεται ως η πρόσθεση στον A του αντίθετου πίνακα του B :

$$A - B \equiv A + (-B) .$$

4.3.4 Πολλαπλασιασμός με αριθμό

Μπορούμε να ορίσουμε τον πολλαπλασιασμό αριθμού (πραγματικού ή μιγαδικού) με πίνακα ως εξής: Το γινόμενο ενός αριθμού λ με ένα πίνακα A με διαστάσεις

$m \times n$ είναι ένας άλλος πίνακας B , με διαστάσεις πάλι $m \times n$ και στοιχεία ίσα με τα στοιχεία του A πολλαπλασιασμένα με λ :

$$B = \lambda A \Rightarrow b_{ij} = \lambda a_{ij} .$$

Επομένως, το σύνολο των πινάκων με διαστάσεις $m \times n$ είναι κλειστό ως προς τη συγκεκριμένη πράξη.

Αποδεικνύεται εύκολα από τον ορισμό ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού αριθμού με πίνακα έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- Για οποιουδήποτε αριθμούς λ, μ και πίνακα A ισχύει

$$\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A .$$

- Υπάρχει και περιλαμβάνεται στο σύνολο των αριθμών το ουδέτερο στοιχείο του πολλαπλασιασμού. Είναι μοναδικό και συμβολίζεται με το 1. Ο πολλαπλασιασμός του με οποιοδήποτε πίνακα A ικανοποιεί τη σχέση

$$1A = A .$$

- Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση πινάκων: για οποιαδήποτε λ, A και B ισχύει

$$\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B .$$

- Η πράξη του πολλαπλασιασμού είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση αριθμών: για οποιαδήποτε λ, μ και A ισχύει

$$(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A .$$

Παρατηρήστε ότι

- ο αντίθετος ενός πίνακα προκύπτει από τον πίνακα με πολλαπλασιασμό με το -1 , καθώς τα στοιχεία του $(-1)A$ είναι τα $-a_{ij}$.
- ο μηδενικός πίνακας προκύπτει από τον πολλαπλασιασμό οποιουδήποτε πίνακα με το 0 καθώς τότε τα στοιχεία του είναι όλα 0.

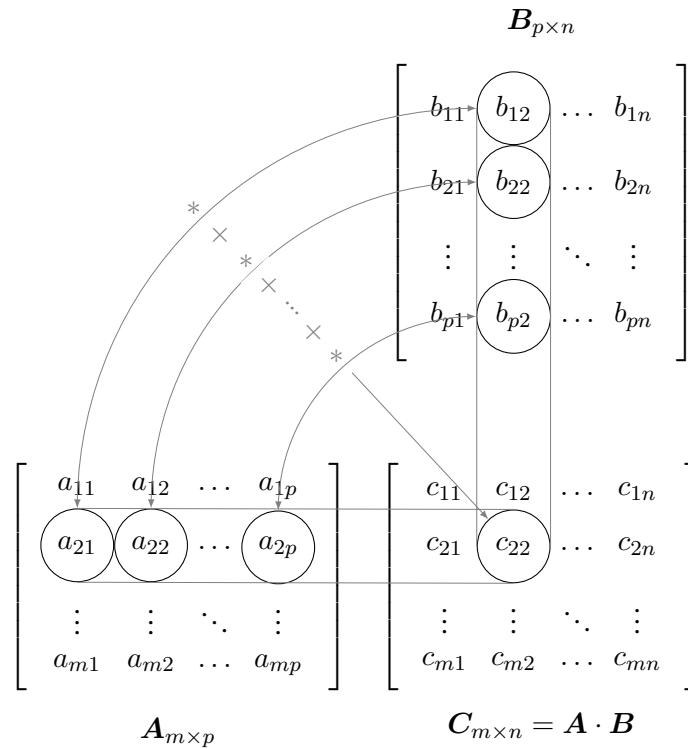
4.3.5 Πολλαπλασιασμός πινάκων

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων ορίζεται ως εξής: Έστω A ένας πίνακας με διαστάσεις $m \times p$ και B ένας πίνακας με διαστάσεις $p \times n$. Το γινόμενο τους συμβολίζεται με $A \cdot B$ και είναι ένας πίνακας C με διαστάσεις $m \times n$ και στοιχεία που προκύπτουν από τη σχέση:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj} . \quad (4.1)$$

Προσέξτε ότι για να πολλαπλασιάσουμε δύο πίνακες πρέπει το πλήθος των *στηλών* του πρώτου να είναι ίσο με το πλήθος των *γραμμών* του δεύτερου. Τότε οι πίνακες είναι συμβατοί για να πολλαπλασιαστούν.

Η σχέση παραγωγής των στοιχείων του γινομένου εκφράζει ότι για να υπολογίσουμε το στοιχείο του στη γραμμή i και στήλη j πολλαπλασιάζουμε τη γραμμή i του πίνακα A με τη στήλη j του πίνακα B κατά στοιχεία και αθροίζουμε τα αποτελέσματα· υπολογίζουμε δηλαδή ένα εσωτερικό γινόμενο για κάθε στοιχείο του πίνακα C · δείτε το Σχήμα 4.1.



Σχήμα 4.1: Σχηματική αναπαράσταση πολλαπλασιασμού πινάκων

Παράδειγμα

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -5 & 3 \\ 3 & -7 \end{bmatrix}.$$

Ο A έχει διαστάσεις 2×3 και ο B 3×2 . Το γινόμενό τους $C = A \cdot B$ έχει

διαστάσεις 2×2 . Τα στοιχεία του είναι

$$\begin{aligned} c_{11} &= 0 \times (-1) + 1 \times (-5) + 2 \times 3 = 1, \\ c_{12} &= 0 \times (-2) + 1 \times 3 + 2 \times (-7) = -11, \\ c_{21} &= 5 \times (-1) + 3 \times (-5) + 1 \times 3 = -17, \\ c_{22} &= 5 \times (-2) + 3 \times 3 + 1 \times (-7) = -8. \end{aligned}$$

Ο C είναι

$$C = \begin{bmatrix} 1 & -11 \\ -17 & -8 \end{bmatrix}.$$

Εύκολα αποδεικνύεται από τον ορισμό ότι η πράξη του πολλαπλασιασμού πινάκων

- έχει την προσεταιριστική ιδιότητα: για οποιαδήποτε A , B και C , με κατάλληλες, συμβατές διαστάσεις, ισχύει

$$A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C.$$

- είναι επιμεριστική ως προς την πρόσθεση πινάκων: για οποιαδήποτε A , B και C , με κατάλληλες, συμβατές διαστάσεις, ισχύει

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$$

και

$$(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C.$$

Επίσης, εύκολα αποδεικνύεται ότι

$$\lambda(A \cdot B) = (\lambda A) \cdot B = A \cdot (\lambda B).$$

για οποιοδήποτε αριθμό λ και συμβατούς πίνακες A , B .

Παρατηρήστε ότι για δύο πίνακες A και B με διαστάσεις $m \times n$ και $p \times q$ αντίστοιχα, το γινόμενο $A \cdot B$ ορίζεται μόνο όταν $n = p$ και έχει διαστάσεις $m \times q$, το γινόμενο $B \cdot A$ ορίζεται μόνο όταν $m = q$ και έχει διαστάσεις $p \times n$, και για να υπάρχει περίπτωση τα γινόμενα να είναι ίσα πρέπει $m = n = p = q$. Όπως θα δούμε στο §4.5.1 τέτοιοι πίνακες λέγονται τετραγωνικοί. Ακόμα και όταν ισχύει κάτι τέτοιο, έχουμε γενικά

$$\sum_k a_{ik} b_{kj} \neq \sum_k b_{ik} a_{kj}.$$

Συνεπώς, ο πολλαπλασιασμός πινάκων δεν έχει γενικά την αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$A \cdot B \neq B \cdot A.$$

Παραγόμενοι πίνακες γινομένου πινάκων

Προσέξτε την ακόλουθη σχέση για τον ανάστροφο γινομένου πινάκων:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T ,$$

όπου A, B οποιοιδήποτε συμβατοί πίνακες. Αποδεικνύεται ως εξής: ο ανάστροφος του πίνακα $(A \cdot B)$ έχει στοιχεία

$$(A \cdot B)_{ij}^T = (A \cdot B)_{ji} = \sum_k a_{jk} b_{ki} .$$

Το γινόμενο των αναστροφών των B, A έχει στοιχεία

$$(B^T \cdot A^T)_{ij} = \sum_k b_{ik}^T a_{kj}^T = \sum_k b_{ki} a_{jk} .$$

Η ισότητα των τελευταίων μελών των δύο εξισώσεων επαληθεύει τη σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε.

Ο συζυγής του γινομένου δύο μιγαδικών πινάκων A, B , εύκολα αποδεικνύεται με εφαρμογή του ορισμού ότι είναι το γινόμενο των συζυγών πινάκων:

$$(A \cdot B)^* = A^* \cdot B^* .$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω προκύπτει ότι ο ανάστροφος συζυγής γινομένου υπολογίζεται από τη σχέση:

$$(A \cdot B)^\dagger = B^\dagger \cdot A^\dagger .$$

4.3.6 Διαίρεση πινάκων

Διαίρεση πινάκων δεν ορίζεται. Θα δούμε παρακάτω ότι, υπό προϋποθέσεις, μπορούμε να βρούμε τον πίνακα X που ικανοποιεί τη σχέση $A \cdot X = B$.

4.4 Διανυσματικός χώρος πινάκων μιας στήλης

Το σύνολο των πινάκων με διαστάσεις $n \times 1$ (διανυσμάτων) με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού αριθμού με διάνυσμα, όπως τις ορίσαμε, αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο με διάσταση n . Σε αυτόν μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο ως εξής:

- στην περίπτωση των διανυσμάτων με πραγματικά στοιχεία:

$$\langle x | x \rangle \equiv x^T \cdot x .$$

- σε διανύσματα με μιγαδικά στοιχεία:

$$\langle x | x \rangle \equiv x^\dagger \cdot x .$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι το εσωτερικό γινόμενο είναι πίνακας 1×1 , δηλαδή αριθμός, και έχει τις απαιτούμενες ιδιότητες (εξισώσεις (3.3)).

Στο διανυσματικό χώρο των πινάκων μίας στήλης, οι πίνακες $n \times n$ συμπεριφέρονται ως τελεστές: όταν πολλαπλασιάζουν ένα διάνυσμα παράγεται άλλο διάνυσμα.

4.5 Ειδικές κατηγορίες πινάκων

4.5.1 Τετραγωνικός πίνακας

Ένας πίνακας χαρακτηρίζεται ως *τετραγωνικός* αν έχει ίσο αριθμό γραμμών και στήλών. Το πλήθος των γραμμικά ανεξάρτητων γραμμών (ή στήλών) ενός τετραγωνικού πίνακα αποτελεί την *τάξη* του.

Σε ένα τετραγωνικό πίνακα $A_{n \times n}$ τα στοιχεία $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ αποτελούν την *κύρια διαγώνιο* του ενώ τα $a_{1n}, a_{2,n-1}, \dots, a_{n1}$ τη *δευτερεύουσα διαγώνιο* ή *αντιδιαγώνιο*.

4.5.2 Τριγωνικός πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A_{n \times n}$ που έχει μηδενικά στοιχεία κάτω από την κύρια διαγώνιο, δηλαδή ισχύει

$$a_{ij} = 0, \quad \forall i, j \text{ με } i > j,$$

ενώ πάνω από τη διαγώνιο έχει τουλάχιστον ένα μη μηδενικό στοιχείο, χαρακτηρίζεται ως *άνω τριγωνικός*. Η μορφή του είναι

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

Ανάλογα ορίζεται ο *κάτω τριγωνικός*.

4.5.3 Διαγώνιος πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας $A_{n \times n}$ που τα μόνα μη μηδενικά στοιχεία του βρίσκονται στην κύρια διαγώνιο του, λέγεται *διαγώνιος*. Ο διαγώνιος πίνακας

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{bmatrix}$$

συνήθως συμβολίζεται με $D(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$.

4.5.4 Βαθμωτός πίνακας

Ένας διαγώνιος πίνακας που έχει όλα τα στοιχεία της διαγωνίου του ίσα, χαρακτηρίζεται ως *βαθμωτός*.

4.5.5 Συμμετρικός/Αντισυμμετρικός πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας A με διαστάσεις $n \times n$, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν τη σχέση

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad \text{με } 1 \leq i, j \leq n,$$

χαρακτηρίζεται ως *συμμετρικός*. Η συμμετρία εμφανίζεται γύρω από την κύρια διαγώνιο. Όπως αντιλαμβανόμαστε από την παραπάνω συνθήκη, σε συμμετρικό πίνακα τα στοιχεία της γραμμής k ($k = 1, 2, \dots, n$) είναι κατά σειρά ίσα με τα στοιχεία της στήλης k . Παρατηρήστε ότι μπορούμε να ορίσουμε εναλλακτικά το συμμετρικό πίνακα ως τον τετραγωνικό πίνακα που είναι ίσος με τον ανάστροφό του, $A = A^T$.

Αντισυμμετρικός χαρακτηρίζεται ένας τετραγωνικός πίνακας $A_{n \times n}$ όταν τα στοιχεία του ικανοποιούν τη σχέση

$$a_{ij} = -a_{ji}, \quad \text{με } 1 \leq i, j \leq n.$$

Ισοδύναμα, ισχύει $A = -A^T$. Παρατηρήστε ότι σε αντισυμμετρικό πίνακα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου ικανοποιούν τη σχέση $a_{kk} = -a_{kk}$ για κάθε k με $1 \leq k \leq n$, και συνεπώς είναι μηδενικά.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι αν ο A είναι οποιοσδήποτε τετραγωνικός πίνακας, χωρίς ιδιαίτερη συμμετρία, ο πίνακας $A + A^T$ είναι συμμετρικός και ο $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός. Επιπλέον, παρατηρούμε ότι ο πίνακας A μπορεί πάντα να εκφραστεί ως το άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού πίνακα:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T).$$

4.5.6 Ερμιτιανός/Αντιερμιτιανός πίνακας

Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A με διαστάσεις $n \times n$, τα στοιχεία του οποίου ικανοποιούν τη σχέση

$$a_{ij} = a_{ji}^*, \quad \text{με } 1 \leq i, j \leq n,$$

χαρακτηρίζεται ως *ερμιτιανός*. Αποτελεί την επέκταση της έννοιας του πραγματικού συμμετρικού πίνακα στους μιγαδικούς πίνακες. Ισοδύναμα, ερμιτιανός είναι ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A που είναι ίσος με τον ανάστροφο συζυγή του, A^\dagger .

Ένας πίνακας που ικανοποιεί τη σχέση $A = -A^\dagger$, και συνεπώς για τα στοιχεία του ισχύει $a_{ij} = -a_{ji}^*$, λέγεται *αντιερμιτιανός*.

Εύκολα αποδεικνύεται ότι τα διαγώνια στοιχεία ενός ερμιτιανού πίνακα είναι πραγματικά ενώ σε αντιερμιτιανό πίνακα τα διαγώνια στοιχεία είναι φανταστικά.

Παράδειγμα

Ο τετραγωνικός πίνακας 3×3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & i & 3-2i \\ -i & -1 & -2+i \\ 3+2i & -2-i & 7 \end{bmatrix}$$

έχει ανάστροφο τον

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & -i & 3+2i \\ i & -1 & -2-i \\ 3-2i & -2+i & 7 \end{bmatrix}.$$

Ο μιγαδικός συζυγής του τελευταίου αποτελεί τον ανάστροφο συζυγή του A και είναι ο

$$A^\dagger = \begin{bmatrix} 1 & i & 3-2i \\ -i & -1 & -2+i \\ 3+2i & -2-i & 7 \end{bmatrix}.$$

Καθώς $A = A^\dagger$, ο A είναι ερμιτιανός πίνακας.

4.5.7 Ταυτοτικός πίνακας

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A υπάρχει ένας τετραγωνικός πίνακας I που ο πολλαπλασιασμός του με τον A , είτε από αριστερά είτε από δεξιά, αφήνει τον A αναλλοίωτο:

$$I \cdot A = A \cdot I = A.$$

Ο πίνακας αυτός λέγεται *ταυτοτικός*. Εύκολα επαληθεύεται ότι ο διαγώνιος πίνακας με διαστάσεις ίδιες με τον πίνακα A και με όλα τα στοιχεία της διαγωνίου ίσα με 1, ικανοποιεί την παραπάνω σχέση. Είναι μοναδικός καθώς αν υπήρχε και άλλος πίνακας, έστω ο I' , με αυτή την ιδιότητα θα έπρεπε να ισχύει

$$I \cdot A = A = I' \cdot A \Rightarrow (I - I') \cdot A = O.$$

Η σχέση στην οποία καταλήξαμε πρέπει να ισχύει για οποιονδήποτε πίνακα A οπότε καταλήγουμε ότι $I - I' = O \Rightarrow I = I'$.

4.5.8 Αντίστροφος πίνακας

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A μπορεί να υπάρχει ένας τετραγωνικός πίνακας που έχει την ιδιότητα όταν πολλαπλασιάζει τον A , είτε από δεξιά είτε από αριστερά, να δίνει ως αποτέλεσμα τον ταυτοτικό πίνακα. Τον συμβολίζουμε με A^{-1} και πρέπει να ικανοποιεί τη σχέση

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I. \quad (4.2)$$

Αν υπάρχει ο A^{-1} , είναι μοναδικός και ονομάζεται *αντίστροφος* του A . Ο πίνακας A στην περίπτωση που υπάρχει ο αντίστροφός του χαρακτηρίζεται ως *αντιστρέψιμος*. Από τον ορισμό του αντίστροφου πίνακα προκύπτει ότι ο αντίστροφος του A^{-1} είναι ο A .

Θα δούμε σε επόμενη παράγραφο τις συνθήκες ύπαρξης του αντίστροφου ενός πίνακα.

Για τον αντίστροφο γινομένου τετραγωνικών πινάκων ισχύει η παρακάτω σχέση:

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}.$$

Η προσεταιριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού και ο ορισμός του αντίστροφου πίνακα αποδεικνύουν εύκολα τη συγκεκριμένη σχέση:

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = B^{-1} \cdot (A^{-1} \cdot A) \cdot B = B^{-1} \cdot I \cdot B = B^{-1} \cdot B = I$$

και

$$(A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = A \cdot (B \cdot B^{-1}) \cdot A^{-1} = A \cdot I \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I.$$

Επομένως ικανοποιείται ο ορισμός (4.2):

$$(B^{-1} \cdot A^{-1}) \cdot (A \cdot B) = (A \cdot B) \cdot (B^{-1} \cdot A^{-1}) = I.$$

Επιπλέον, εύκολα δείχνεται ότι $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$ και $(A^\dagger)^{-1} = (A^{-1})^\dagger$.

4.5.9 Ορθογώνιος πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας A που ο αντίστροφός του υπάρχει και είναι ίσος με τον ανάστροφό του, δηλαδή ισχύει $A^T = A^{-1}$, λέγεται *ορθογώνιος*. Τέτοιοι πίνακες έχουν μεταξύ άλλων τις ακόλουθες ιδιότητες:

- διατηρούν το γινόμενο $x^T \cdot y$ όπου x, y οποιαδήποτε διανύσματα στήλης, δηλαδή, αν ο A είναι ορθογώνιος, ικανοποιεί τη σχέση

$$(A \cdot x)^T \cdot (A \cdot y) = x^T \cdot A^T \cdot A \cdot y = x^T \cdot I \cdot y = x^T \cdot y.$$

- Οι στήλες ή οι γραμμές ενός πραγματικού ορθογώνιου πίνακα $n \times n$ αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις (§3.6.1) του διανυσματικού χώρου των πινάκων $n \times 1$ με πραγματικά στοιχεία.

4.5.10 Μοναδιαίος πίνακας

Ένας τετραγωνικός μιγαδικός πίνακας A που ο αντίστροφός του υπάρχει και είναι ίσος με τον ανάστροφο συζυγή του, δηλαδή ισχύει $A^\dagger = A^{-1}$, λέγεται *μοναδιαίος*. Παρατηρήστε ότι ένας πραγματικός ορθογώνιος πίνακας είναι και μοναδιαίος. Αντίστοιχα με τις ιδιότητες που έχει ο ορθογώνιος πίνακας, ο μοναδιαίος ικανοποιεί τη σχέση

$$(A \cdot x)^\dagger \cdot (A \cdot y) = x^\dagger \cdot y,$$

όπου x, y διανύσματα στήλης με μιγαδικά στοιχεία. Επίσης, οι στήλες ή οι γραμμές ενός μοναδιαίου πίνακα $n \times n$ αποτελούν ορθοκανονικές βάσεις ως προς το εσωτερικό γινόμενο $x^\dagger \cdot y$ του διανυσματικού χώρου των πινάκων $n \times 1$ με μιγαδικά στοιχεία.

4.5.11 Κανονικός πίνακας

Ένας τετραγωνικός πίνακας A που μετατίθεται με τον ανάστροφο συζυγή του, δηλαδή ικανοποιεί τη σχέση

$$A \cdot A^\dagger = A^\dagger \cdot A ,$$

χαρακτηρίζεται ως *κανονικός*. Προφανώς, μεταξύ άλλων, οι ερμιτιανοί, οι πραγματικοί συμμετρικοί, οι μοναδιαίοι, οι πραγματικοί ορθογώνιοι πίνακες είναι κανονικοί.

Το άθροισμα ή το γινόμενο δύο κανονικών πινάκων που μετατίθενται είναι κανονικοί πίνακες.

4.5.12 Όμοιοι πίνακες

Έστω P ένας πίνακας που έχει αντίστροφο. Δύο τετραγωνικοί πίνακες A, B που συνδέονται με τη σχέση

$$B = P^{-1} \cdot A \cdot P$$

λέγονται *όμοιοι* πίνακες. Η αντιστοίχιση $A \rightarrow P^{-1} \cdot A \cdot P$ λέγεται *μετασχηματισμός ομοιότητας*.

4.6 Ίχνος τετραγωνικού πίνακα

Το άθροισμα των στοιχείων της κύριας διαγωνίου ενός τετραγωνικού πίνακα αποτελεί το *ίχνος* του πίνακα, ένα χαρακτηριστικό αριθμό για τον πίνακα. Το ίχνος (trace) του πίνακα A συμβολίζεται με $\text{Tr}(A)$.

Ένας πίνακας και ο ανάστροφός του έχουν το ίδιο ίχνος καθώς έχουν ίδια διαγώνια στοιχεία.

Το ίχνος αθροίσματος δύο πινάκων A, B ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{Tr}(A + B) = \sum_i (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_i a_{ii} + \sum_i b_{ii} = \text{Tr}(A) + \text{Tr}(B) .$$

Το ίχνος γινομένου αριθμού λ με πίνακα A ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{Tr}(\lambda A) = \sum_i \lambda a_{ii} = \lambda \sum_i a_{ii} = \lambda \text{Tr}(A) .$$

Το ίχνος γινομένου δύο πινάκων A, B ικανοποιεί τη σχέση

$$\text{Tr}(A \cdot B) = \sum_i \sum_k a_{ik} b_{ki} = \sum_k \sum_i b_{ki} a_{ik} = \text{Tr}(B \cdot A) ,$$

ακόμα και αν οι πίνακες δεν μετατίθενται, δηλαδή ακόμα και όταν ισχύει $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Γενικότερα, ισχύει

$$\text{Tr}(A \cdot B \cdot C) = \text{Tr}(C \cdot A \cdot B) = \text{Tr}(B \cdot C \cdot A)$$

δηλαδή, το ίχνος γινομένου πολλών πινάκων είναι αναλλοίωτο σε *κυκλική* εναλλαγή της σειράς πολλαπλασιασμού. Αυτό σημαίνει ότι αν $C = A^{-1} \cdot B \cdot A$, δηλαδή, αν οι C και B είναι όμοιοι πίνακες, ισχύει $\text{Tr}(C) = \text{Tr}(B)$.

4.7 Ορίζουσα τετραγωνικού πίνακα

Η *ορίζουσα* (determinant) ενός τετραγωνικού πίνακα είναι ένας συγκεκριμένος αριθμός που υπολογίζεται από τα στοιχεία του και έχει, όπως θα δούμε παρακάτω, μεγάλη σημασία. Η ορίζουσα του πίνακα A συμβολίζεται με $\det(A)$ ή $|A|$. Αν ο πίνακας A έχει διαστάσεις $n \times n$, η ορίζουσά του μπορεί να υπολογιστεί από τον *τύπο του Leibniz* ως ένα άθροισμα όλων των γινομένων που μπορούμε να σχηματίσουμε με n στοιχεία του. Κάθε όρος στο άθροισμα έχει συντελεστή ± 1 ή 0 σύμφωνα με κάποιο κανόνα (που δεν θα αναφέρουμε). Το συγκεκριμένο άθροισμα δεν αποτελεί πρακτικό τρόπο υπολογισμού της ορίζουσας.

Εναλλακτικά, μπορούμε να υπολογίσουμε την ορίζουσα από τον *τύπο του Laplace*: η ορίζουσα εκφράζεται ως ανάπτυγμα κατά κάποια στήλη j της επιλογής μας με την αναδρομική σχέση

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A_{ij}), \quad (4.3)$$

όπου A_{ij} είναι ο πίνακας διαστάσεων $(n-1) \times (n-1)$ που προκύπτει από τον A διαγράφοντας τη γραμμή i και τη στήλη j . Ο τύπος αυτός ισχύει για $n > 1$ και είναι ανεξάρτητος από την επιλογή του j . Αντίστοιχος τύπος προκύπτει με ανάπτυξη κατά γραμμή. Επιπλέον, η ορίζουσα ενός πίνακα 1×1 είναι το μοναδικό στοιχείο του.

Η στήλη ή η γραμμή που έχει τα περισσότερα στοιχεία ίσα με 0 είναι καλύτερη επιλογή καθώς το ανάπτυγμα κατά αυτή έχει τις λιγότερες πράξεις.

Προσέξτε στον τύπο το συντελεστή $(-1)^{i+j}$ που πολλαπλασιάζει το a_{ij} . Έχει τις τιμές ± 1 εναλλάξ, ξεκινώντας με θετικό πρόσημο για το στοιχείο a_{11} . Διευκολύνεται έτσι ο υπολογισμός του αναπτύγματος γιατί δε χρειάζεται να υπολογίζουμε κάθε φορά το συντελεστή.

4.7.1 Εφαρμογή: Ορίζουσα πίνακα 2×2

Η ορίζουσα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

αν αναπτύξουμε κατά την 1η στήλη, είναι

$$\det(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^2 (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\mathbf{A}_{i1}) = (-1)^2 a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}) + (-1)^3 a_{21} \det(\mathbf{A}_{21}) .$$

Οι υποπίνακες που εμφανίζονται στον τύπο είναι οι $\mathbf{A}_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} \end{bmatrix}$ και $\mathbf{A}_{21} = \begin{bmatrix} a_{12} \end{bmatrix}$, με ορίζουσες $\det(\mathbf{A}_{11}) = a_{22}$ και $\det(\mathbf{A}_{21}) = a_{12}$. Επομένως,

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} .$$

4.7.2 Εφαρμογή: Ορίζουσα πίνακα 3×3

Η ορίζουσα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} ,$$

αν αναπτύξουμε κατά την 1η στήλη, είναι

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= \sum_{i=1}^3 (-1)^{i+1} a_{i1} \det(\mathbf{A}_{i1}) \\ &= (-1)^2 a_{11} \det(\mathbf{A}_{11}) + (-1)^3 a_{21} \det(\mathbf{A}_{21}) + (-1)^4 a_{31} \det(\mathbf{A}_{31}) . \end{aligned}$$

Οι υποπίνακες που εμφανίζονται στον τύπο και οι ορίζουσές τους είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} , & \det(\mathbf{A}_{11}) &= a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} , \\ \mathbf{A}_{21} &= \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} , & \det(\mathbf{A}_{21}) &= a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13} , \\ \mathbf{A}_{31} &= \begin{bmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} , & \det(\mathbf{A}_{31}) &= a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} . \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}) &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) \\ &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &\quad - a_{11}a_{32}a_{23} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} . \end{aligned}$$

Παράδειγμα

Η ορίζουσα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

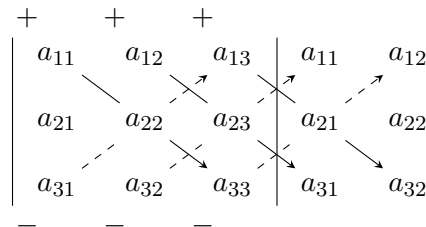
υπολογίζεται με ανάπτυξη κατά την πρώτη γραμμή, ως εξής:

$$\begin{aligned}\det(A) &= +(-1) \times \det \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} - (1) \times \det \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix} + (-1) \times \det \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ &= -(5 \times 7 - 0 \times 5) - (3 \times 7 - 0 \times 0) - (3 \times 5 - 0 \times 5) \\ &= -71 .\end{aligned}$$

Οποιαδήποτε στήλη ή γραμμή να επιλέγαμε για την ανάπτυξη, το αποτέλεσμα θα ήταν το ίδιο.

Κανόνας του Sarrus

Ειδικά για πίνακα 3×3 υπάρχει ο μνημονικός κανόνας του Sarrus (Σχήμα 4.2) για τον υπολογισμό της ορίζουσας: Επαναλαμβάνουμε τις δύο πρώτες στήλες ως



Σχήμα 4.2: Μνημονικός κανόνας του Sarrus για τον υπολογισμό ορίζουσας 3×3

τέταρτη και πέμπτη στον πίνακα. σχηματίζουμε τα γινόμενα των στοιχείων που συνδέονται με τα βέλη και προσθέτουμε όσα γινόμενα είναι «παράλληλα» στην κύρια διαγώνιο και αφαιρούμε όσα είναι «παράλληλα» στη δευτερεύουσα διαγώνιο:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} .$$

4.7.3 Ιδιότητες ορίζουσας

Με εφαρμογή του ορισμού (4.3) εύκολα αποδεικνύονται πολλές από τις ιδιότητες που θα παραθέσουμε. Οποιαδήποτε ιδιότητα αναφέρεται σε γραμμή ισχύει και για στήλη.

1. Αν πολλαπλασιάσουμε μια γραμμή ενός πίνακα με τον αριθμό λ , η ορίζουσά του πολλαπλασιάζεται με λ . Ισοδύναμα, κοινός παράγων μιας γραμμής βγαίνει εκτός ορίζουσας πολλαπλασιαστικά.
2. Πίνακας με τα στοιχεία μιας γραμμής όλα μηδενικά έχει ορίζουσα 0.
3. Η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού (και φυσικά διαγώνιου ή βαθμωτού καθώς είναι τριγωνικοί) πίνακα είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων.

4. Εναλλαγή γραμμών σε πίνακα αλλάζει πρόσημο στην ορίζουσά του.
5. Πίνακας με δύο γραμμές, όχι απαραίτητα γειτονικές, ίσες ή κατά στοιχείο ανάλογες με ίδιο συντελεστή αναλογίας, έχει ορίζουσα 0.
6. Η ορίζουσα πίνακα που μια γραμμή του γράφεται ως άθροισμα δύο προσθετέων, ισούται με το άθροισμα των οριζουσών δύο πινάκων που προκύπτουν από το αρχικό: ο ένας έχει στη θέση της γραμμής τον ένα προσθετέο και ο δεύτερος έχει τον άλλο προσθετέο:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} + c_{21} & b_{22} + c_{22} & b_{23} + c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

7. Η ορίζουσα ενός πίνακα δεν μεταβάλλεται αν προσθέσουμε σε μια γραμμή του το πολλαπλάσιο άλλης γραμμής του.
8. Η ορίζουσα του γινομένου αριθμού λ με πίνακα $\mathbf{A}_{n \times n}$ ισούται με $\lambda^n \det(\mathbf{A})$.
9. Η ορίζουσα του γινομένου πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων: $\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B})$.
10. Η ορίζουσα του ανάστροφου ενός πίνακα είναι ίση με την ορίζουσα του πίνακα: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$.
11. Η ορίζουσα του μιγαδικού συζυγούς ενός πίνακα είναι ίση με το μιγαδικό συζυγή της ορίζουσας του πίνακα: $\det(\mathbf{A}^*) = \det(\mathbf{A})^*$.
12. Η ορίζουσα του ανάστροφου συζυγούς ενός πίνακα είναι ίση με το μιγαδικό συζυγή της ορίζουσας του πίνακα: $\det(\mathbf{A}^\dagger) = \det(\mathbf{A})^*$.
13. Η ορίζουσα του αντίστροφου ενός πίνακα είναι ο αντίστροφος αριθμός της ορίζουσας του πίνακα:

$$\det(\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \det(\mathbf{I}) = 1 \\ \det(\mathbf{A}^{-1}) \det(\mathbf{A}) \end{array} \right\} \Rightarrow \det(\mathbf{A}^{-1}) = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}.$$

Οι γραμμές ή οι στήλες ενός τετραγωνικού πίνακα με ορίζουσα 0 αποτελούν γραμμικώς εξαρτημένα διανύσματα. Αν η ορίζουσα είναι μη μηδενική, οι γραμμές ή οι στήλες είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

Η τάξη πίνακα με διαστάσεις $n \times n$ και μη μηδενική ορίζουσα είναι n . Αν η ορίζουσα είναι μηδενική, η τάξη του μεγαλύτερου τετραγωνικού υποπίνακα με μη μηδενική ορίζουσα αποτελεί την τάξη του πίνακα.

Ένας τετραγωνικός πίνακας έχει αντίστροφο αν και μόνο αν η ορίζουσά του δεν είναι 0.

Πίνακας με μηδενική ορίζουσα χαρακτηρίζεται ως ιδιάζων.

Παρατήρηση: Ο τύπος Laplace (ή ο τύπος Leibniz) δεν χρησιμοποιούνται στην πράξη παρά μόνο για υπολογισμό ορίζουσας πίνακα μικρής διάστασης ή ειδικής μορφής. Η ορίζουσα γενικού πίνακα υπολογίζεται αριθμητικά με λιγότερες πράξεις αν ο πίνακας πρώτα μετατραπεί σε τριγωνικό με μετασχηματισμούς που διατηρούν την ορίζουσα (ή απλά της αλλάζουν πρόσημο). Κατόπιν υπολογίζουμε την ορίζουσα του τριγωνικού (όπως αναφέραμε, είναι το γινόμενο των διαγώνιων στοιχείων). Θα δούμε αυτή τη μέθοδο στο επόμενο κεφάλαιο.

4.8 Κατασκευή αντίστροφου πίνακα

Ο αντίστροφος ενός πίνακα $A_{n \times n}$, με $n > 1$, μπορεί να κατασκευαστεί ως εξής: υπολογίζουμε τους αριθμούς

$$\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} \det(A_{ij}), \quad 1 \leq i, j \leq n, \quad (4.4)$$

όπου A_{ij} είναι ο πίνακας διαστάσεων $(n-1) \times (n-1)$ που προκύπτει από τον A διαγράφοντας τη γραμμή i και τη στήλη j . Μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι τιμές Δ_{ij} αποτελούν στοιχεία ενός πίνακα Δ . Τότε, ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \Delta^T,$$

με την προϋπόθεση ότι $\det(A) \neq 0$.

Προφανώς, ο αντίστροφος ενός πίνακα $A_{1 \times 1} = [a_{11}]$ είναι ο $A^{-1} = [1/a_{11}]$, με την προϋπόθεση ότι $a_{11} \neq 0$.

Παρατήρηση: Ο τύπος (4.4) απαιτεί πολλές πράξεις και δεν χρησιμοποιείται στην πράξη παρά μόνο για μικρούς πίνακες. Θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο πιο γρήγορη μέθοδο υπολογισμού του αντίστροφου πίνακα.

4.8.1 Εφαρμογή: Αντίστροφος πίνακα 2×2

Για να κατασκευάσουμε τον αντίστροφο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

υπολογίζουμε τα Δ_{ij} :

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \det(A_{11}) = a_{22}, \\ \Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \det(A_{12}) = -a_{21}, \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} \det(A_{21}) = -a_{12}, \\ \Delta_{22} &= (-1)^{2+2} \det(A_{22}) = a_{11}. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του \mathbf{A} είναι $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$. Επομένως

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix},$$

αρκεί να ισχύει $a_{11}a_{22} \neq a_{12}a_{21}$.

Επαληθεύστε το! (Υπολογίστε το γινόμενο αυτού του πίνακα με τον \mathbf{A}).

Παράδειγμα

Ο αντίστροφος του

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

είναι

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{2 \times 5 - 1 \times 4} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -4 & 2 \end{bmatrix}.$$

4.8.2 Εφαρμογή: Αντίστροφος πίνακα 3×3

Ο αντίστροφος του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

προκύπτει ως εξής: καταρχάς υπολογίζουμε τα στοιχεία Δ_{ij} ,

$$\begin{aligned} \Delta_{11} &= (-1)^{1+1} \det(\mathbf{A}_{11}) = a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}, \\ \Delta_{12} &= (-1)^{1+2} \det(\mathbf{A}_{12}) = a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}, \\ \Delta_{13} &= (-1)^{1+3} \det(\mathbf{A}_{13}) = a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}, \\ \Delta_{21} &= (-1)^{2+1} \det(\mathbf{A}_{21}) = a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33}, \\ \Delta_{22} &= (-1)^{2+2} \det(\mathbf{A}_{22}) = a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31}, \\ \Delta_{23} &= (-1)^{2+3} \det(\mathbf{A}_{23}) = a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32}, \\ \Delta_{31} &= (-1)^{3+1} \det(\mathbf{A}_{31}) = a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22}, \\ \Delta_{32} &= (-1)^{3+2} \det(\mathbf{A}_{32}) = a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23}, \\ \Delta_{33} &= (-1)^{3+3} \det(\mathbf{A}_{33}) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \end{aligned}$$

Η ορίζουσα του \mathbf{A} είναι

$$\det(\mathbf{A}) = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) + a_{12}(a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33}) + a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}).$$

Αν είναι διάφορη του μηδέν, έχουμε

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})} \begin{bmatrix} a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23} & a_{13}a_{32} - a_{12}a_{33} & a_{12}a_{23} - a_{13}a_{22} \\ a_{23}a_{31} - a_{21}a_{33} & a_{11}a_{33} - a_{13}a_{31} & a_{13}a_{21} - a_{11}a_{23} \\ a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31} & a_{12}a_{31} - a_{11}a_{32} & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα

Ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix}$$

είναι, σύμφωνα με τα προηγούμενα,

$$A^{-1} = -\frac{1}{71} \begin{bmatrix} 35 & -12 & 5 \\ -21 & -7 & -3 \\ 15 & 5 & -8 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε το! Πρέπει να ισχύει $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$.

4.9 Ιδιοτιμές–Ιδιοδιανύσματα

Έστω ένας τετραγωνικός πίνακας A με διαστάσεις $n \times n$. Αν υπάρχει ένας αριθμός λ , εν γένει μιγαδικός, και ένα διάνυσμα (πίνακας–στήλη) x , διάφορο του $[0, 0, \dots, 0]^T$, για τα οποία ισχύει

$$A \cdot x = \lambda x, \quad (4.5)$$

τότε το x λέγεται *ιδιοδιάνυσμα* του A ενώ το λ είναι η αντίστοιχη *ιδιοτιμή*.

Τα ιδιοδιανύσματα και οι ιδιοτιμές παίζουν κεντρικό ρόλο σε προβλήματα Φυσικής και Επιστήμης Υλικών. Εκεί οι ιδιοτιμές μπορεί να εκφράζουν, π.χ., τις επιτρεπτές τιμές ενέργειας ή ορμής ή στροφορμής των ηλεκτρονίων σε ένα άτομο, τις συχνότητες ταλάντωσης ενός συστήματος συζευγμένων ταλαντωτών (π.χ. ταλαντούμενων ατόμων) κ.ο.κ.

Παρατηρήστε ότι ένα ιδιοδιάνυσμα x δεν είναι μοναδικό καθώς οποιοδήποτε πολλαπλάσιό του αποτελεί επίσης λύση της εξίσωσης (4.5) για την ίδια ιδιοτιμή. Συνήθως επιλέγουμε για ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε μια ιδιοτιμή αυτό που έχει μέτρο 1: επιλέγουμε δηλαδή την πολλαπλασιαστική σταθερά c στο διάνυσμα cx να είναι τέτοια ώστε

$$(cx)^\dagger \cdot (cx) = 1 \Rightarrow |c| = \frac{1}{x^\dagger \cdot x}.$$

Τη φάση της γενικά μιγαδικής ποσότητας c μπορούμε να την πάρουμε αυθαίρετα ίση με 0, καταλήγοντας σε πραγματική c . Η διαδικασία αυτή λέγεται *κανονικοποίηση*.

Έστω ότι έχουμε υπολογίσει τα n κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα x_i ενός πίνακα $A_{n \times n}$ με μη μηδενική ορίζουσα. Τα n διανύσματα $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αν δημιουργήσουμε τον πίνακα B με στήλες αυτά τα διανύσματα

και το διαγώνιο πίνακα D με διαγώνια στοιχεία τις αντίστοιχες ιδιοτιμές, εύκολα δείχνεται ότι ισχύει $D = B^{-1} \cdot A \cdot B$ ή $A = B \cdot D \cdot B^{-1}$. Η εύρεση ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων λέγεται *διαγωνοποίηση* του πίνακα καθώς καθίσταται όμοιος με διαγώνιο πίνακα.

4.9.1 Εύρεση ιδιοτιμών (διαγωνοποίηση)

Η (4.5) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$A \cdot x = \lambda x \Rightarrow A \cdot x = \lambda I \cdot x \Rightarrow (A - \lambda I) \cdot x = 0. \quad (4.6)$$

Η εξίσωση έχει μοναδική λύση, την $x = [0, 0, \dots, 0]^T$, αν και μόνο αν ο πίνακας $A - \lambda I$ αντιστρέφεται. Καθώς δεν ενδιαφερόμαστε για τη μηδενική λύση, οδηγούμαστε στην απαίτηση να ισχύει $\det(A - \lambda I) = 0$. Παρατηρήστε ότι σύμφωνα με τον τύπο (4.3) η έκφραση $\det(A - \lambda I)$ είναι ένα πολυώνυμο βαθμού n ως προς λ που ονομάζεται *χαρακτηριστικό πολυώνυμο* του A . Οι n γενικά μιγαδικές ρίζες του (οι τιμές του λ που το μηδενίζουν) αποτελούν τις ιδιοτιμές του A .

Έστω ότι οι συντελεστές του χαρακτηριστικού πολυωνύμου είναι πραγματικοί αριθμοί μ_i (κάτι που συμβαίνει όταν ο πίνακας είναι πραγματικός και όχι μόνο). Η σχέση

$$\mu_n \lambda^n + \mu_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \mu_1 \lambda + \mu_0 = 0$$

συνεπάγεται την

$$\begin{aligned} (\mu_n \lambda^n + \mu_{n-1} \lambda^{n-1} + \dots + \mu_1 \lambda + \mu_0)^* &= 0 \Rightarrow \\ \mu_n (\lambda^*)^n + \mu_{n-1} (\lambda^*)^{n-1} + \dots + \mu_1 \lambda^* + \mu_0 &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως, αν λ είναι μια ρίζα του πολυωνύμου τότε και το λ^* είναι ρίζα του. Οι μιγαδικές ρίζες δηλαδή, ενός χαρακτηριστικού πολυωνύμου με πραγματικούς συντελεστές εμφανίζονται κατά ζεύγη (η καθεμιά με τη συζυγή της).

Το σύνολο των ιδιοτιμών ενός πίνακα λέγεται *φάσμα* του πίνακα.

Παράδειγμα

Οι ιδιοτιμές του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

υπολογίζονται ως εξής:

1. Σχηματίζουμε τον πίνακα $A - \lambda I$:

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3-\lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

2. Υπολογίζουμε την ορίζουσά του:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) &= \begin{vmatrix} -3 - \lambda & 0 & 2 \\ 1 & -1 - \lambda & 0 \\ -2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} \\ &= (-3 - \lambda) \begin{vmatrix} -1 - \lambda & 0 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & -1 - \lambda \\ -2 & -1 \end{vmatrix} \\ &= (-3 - \lambda)(\lambda(1 + \lambda)) + 2(-1 - 2(1 + \lambda)) \\ &= -\lambda^3 - 4\lambda^2 - 7\lambda - 6.\end{aligned}$$

3. Επιλύουμε την εξίσωση $\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) = 0$.

Η εξίσωση

$$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 7\lambda + 6 = 0 \Rightarrow (\lambda + 2)((\lambda + 1)^2 + 2) = 0$$

έχει μία πραγματική λύση, την $\lambda_1 = -2$, και δύο μιγαδικές, οι οποίες είναι συζυγείς: $\lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$. Αυτές είναι οι τρεις ιδιοτιμές του πίνακα \mathbf{A} . Παρατηρούμε ότι $\text{Tr}(\mathbf{A}) = -4 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$. Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε (θέτοντας $\lambda = 0$ στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο) ότι $\det(\mathbf{A}) = -6 = \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3$.

4.9.2 Εύρεση ιδιοδιανυσμάτων

Αφού προσδιοριστούν οι ιδιοτιμές ενός πίνακα από το χαρακτηριστικό πολυώνυμο, μπορούμε να προσδιορίσουμε τα ιδιοδιανύσματα με επίλυση του γραμμικού συστήματος της εξίσωσης (4.6). Σε αυτό, τουλάχιστον μία από τις εξισώσεις μπορεί να παραχθεί με γραμμικό συνδυασμό των υπολοίπων. Αυτό σημαίνει ότι το σύστημα έχει άπειρες λύσεις, οπότε (τουλάχιστον) μία από τις συνιστώσες του διανύσματος x δεν μπορεί να προσδιοριστεί. Η συγκεκριμένη συνιστώσα μπορεί να τεθεί αυθαίρετα 1 και να προχωρήσουμε στην επίλυση του συστήματος. Οι υπόλοιπες συνιστώσες του x εκφράζονται συναρτήσει αυτής. Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η καθεμία είναι πολλαπλάσιο της «ελεύθερης» συνιστώσας.

Αφού προσδιοριστεί το διάνυσμα x με την αυθαίρετη επιλογή μιας συνιστώσας του, μπορούμε να το κανονικοποιήσουμε, να το διαιρέσουμε δηλαδή με το μέτρο του. Το κανονικοποιημένο διάνυσμα αποτελεί τη βάση του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στη συγκεκριμένη ιδιοτιμή: κάθε πολλαπλάσιό του αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του πίνακα \mathbf{A} .

Στην περίπτωση που κατά την επίλυση καταλήξουμε σε δύο (ή περισσότερες) εξισώσεις της μορφής $0x_k = 0$, θα έχουμε διπλή (ή πολλαπλή) ελευθερία στην επιλογή των συνιστωσών του x . Μπορούμε να προσδιορίσουμε τα δύο (ή περισσότερα) μοναδιαία διανύσματα βάσης του χώρου των ιδιοδιανυσμάτων που αντιστοιχούν στην ιδιοτιμή λ ως εξής: επιλέγουμε τις ελεύθερες συνιστώσες ώστε, διαδοχικά, μία από αυτές να είναι 1 και οι υπόλοιπες 0. Ο προσδιορισμός των υπόλοιπων

συνιστωσών του \mathbf{x} θα μας δώσει διαδοχικά, τα διανύσματα βάσης (τα οποία θα πρέπει να κανονικοποιηθούν). Οποιοσδήποτε γραμμικός συνδυασμός αυτών αποτελεί ιδιοδιάνυσμα του \mathbf{A} .

Παράδειγμα

Στο προηγούμενο παράδειγμα υπολογίσαμε ότι ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

έχει ιδιοτιμή το $\lambda = -2$. Το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί σε αυτή την τιμή βρίσκεται ως εξής: Η εξίσωση (4.6) γράφεται

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \cdot \mathbf{x} &= 0 \Rightarrow \\ \left(\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix} - (-2) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= 0 \Rightarrow \\ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_3 &= 0, \\ x_1 + x_2 &= 0, \\ -2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Η λύση του συστήματος δίνει

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix}.$$

Το x_3 είναι απροσδιόριστη ποσότητα, γενικά μιγαδική. Αν κανονικοποιήσουμε το διάνυσμα μπορούμε να την καθορίσουμε:

$$\mathbf{x}^\dagger \cdot \mathbf{x} = 1 \Rightarrow \begin{bmatrix} 2x_3^* & -2x_3^* & x_3^* \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2x_3 \\ -2x_3 \\ x_3 \end{bmatrix} = 1 \Rightarrow 9|x_3|^2 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{3}.$$

Συνεπώς, το

$$x = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

είναι το ιδιοδιάνυσμα με μέτρο 1 που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda = -2$.

4.9.3 Ιδιότητες

Για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα οποιουδήποτε πίνακα ισχύουν τα εξής:

- Το *άθροισμα* των ιδιοτιμών ενός πίνακα ισούται με το *ίχνος* του (το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του). Αυτό *δεν σημαίνει* ότι τα διαγώνια στοιχεία *είναι* οι ιδιοτιμές.
- Το *γινόμενο* των ιδιοτιμών ενός πίνακα ισούται με την *ορίζουσά* του.
- Τα ιδιοδιανύσματα οποιουδήποτε πίνακα, που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές, είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Για τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα *κανονικού* πίνακα με διαστάσεις $n \times n$ ισχύουν τα εξής:

- Ο πίνακας έχει n γραμμικά ανεξάρτητα ιδιοδιανύσματα.
- Τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν σε διαφορετικές ιδιοτιμές είναι ορθογώνια ως προς το εσωτερικό γινόμενο $x^\dagger \cdot y$. Αυτά που αντιστοιχούν στην ίδια ιδιοτιμή δεν είναι οπωσδήποτε ορθογώνια αλλά μπορούν να γίνουν με τη μέθοδο ορθοκανονικοποίησης Gram–Schmidt (§3.6.2).
- Τα ιδιοδιανύσματά του αποτελούν πλήρες σύστημα και, δεδομένου ότι είναι γραμμικά ανεξάρτητα, αποτελούν βάση του διανυσματικού χώρου των πινάκων με διαστάσεις $n \times 1$ (δηλαδή, των διανυσμάτων του n -διάστατου χώρου).
- Ειδικά για ερμιτιανό πίνακα, οι ιδιοτιμές του είναι πραγματικοί αριθμοί.
- Ειδικά για αντιερμιτιανό πίνακα, οι ιδιοτιμές του είναι φανταστικοί αριθμοί.
- Ειδικά για μοναδιαίο πίνακα, οι ιδιοτιμές του έχουν μέτρο μονάδα.

4.10 Θεώρημα Cayley–Hamilton

Αν αντικαταστήσουμε στο χαρακτηριστικό πολυώνυμο το λ με τον πίνακα A , ερμηνεύσουμε τις δυνάμεις του A που εμφανίζονται με τη σχέση

$$A^k = \underbrace{A \cdot A \cdots A}_{k \text{ φορές}},$$

και θεωρήσουμε ότι ο σταθερός όρος πολλαπλασιάζει τον ταυτοτικό πίνακα, θα έχουμε ως αποτέλεσμα τον μηδενικό πίνακα. Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί το *θεώρημα Cayley—Hamilton*.

Για ένα πίνακα $A_{n \times n}$ το χαρακτηριστικό πολυώνυμο είναι βαθμού n . Σύμφωνα με το θεώρημα Cayley—Hamilton, ο πίνακας A^n γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των δυνάμεων $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A^0$. Το ίδιο ισχύει και για οποιαδήποτε δύναμη του A με εκθέτη μεγαλύτερο του n : ο πίνακας A^{k+n} γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων A^0 έως A^{k+n-1} . Όσοι από αυτούς έχουν εκθέτη μεγαλύτερο από $n-1$ γράφονται ως γραμμικοί συνδυασμοί μικρότερων δυνάμεων του A κοκ. Επομένως για οποιοδήποτε m έχουμε

$$A^m = \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i A^i$$

με κατάλληλους συντελεστές μ_i .

Οποιαδήποτε αναλυτική συνάρτηση $f(x)$ μίας μεταβλητής μπορεί να οριστεί και για πίνακες αν στο ανάπτυγμα Taylor αυτής στο $x = 0$,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} g_k x^k,$$

αντικαταστήσουμε το x με A και τις δυνάμεις του x με γινόμενα του πίνακα. Συνέπεια του θεωρήματος Cayley—Hamilton είναι ότι κάθε τέτοια συνάρτηση είναι ίση με κάποιο γραμμικό συνδυασμό των δυνάμεων $A^{n-1}, A^{n-2}, \dots, A^0$:

$$f(A) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k. \quad (4.7)$$

Οι συντελεστές μπορούν να προκύψουν με τον διαδοχικό πολλαπλασιασμό από δεξιά της παραπάνω έκφρασης με τα ιδιοδιάνυσμα: αν x είναι το ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ , το αριστερό μέλος της εξίσωσης (4.7), όταν πολλαπλασιάσει το ιδιοδιάνυσμα x γίνεται

$$f(A) \cdot x = \sum_{k=0}^{\infty} g_k A^k \cdot x = \sum_{k=0}^{\infty} g_k \lambda^k x = f(\lambda) x.$$

Για το δεξί μέλος της εξίσωσης (4.7), όταν πολλαπλασιάσει το ιδιοδιάνυσμα x , έχουμε

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k A^k \cdot x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda^k x.$$

Συνεπώς, για κάθε ιδιοτιμή λ_i από τις n έχουμε

$$f(\lambda_i) x = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda_i^k x \Rightarrow f(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda_i^k,$$

ή με μορφή πινάκων,

$$\mathbf{\Lambda} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{f}, \quad (4.8)$$

όπου $\mathbf{\Lambda}$ ο πίνακας $n \times n$ με στοιχεία $\Lambda_{ij} = \lambda_i^{j-1}$, \mathbf{c} το διάνυσμα των άγνωστων συντελεστών c_k και \mathbf{f} το διάνυσμα των τιμών $f(\lambda_i)$. Η επίλυση του γραμμικού συστήματος μας δίνει τα c_k , δηλαδή τους συντελεστές των δυνάμεων A^k στο ανάπτυγμα της $f(A)$.

Παρατήρηση: Αν ο πίνακας έχει ιδιοτιμή με πολλαπλότητα $m > 1$, οι εξισώσεις

$$f(\lambda_i) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda_i^k, \quad i = 1, \dots, n$$

δεν είναι ανεξάρτητες. Μπορούμε αντικαταστήσουμε $m - 1$ από αυτές με τις εξισώσεις

$$f'(\lambda_i) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda_i^k \right)', \quad f''(\lambda_i) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda_i^k \right)'', \dots, f^{(m-1)}(\lambda_i) = \left(\sum_{k=0}^{n-1} c_k \lambda_i^k \right)^{(m-1)}.$$

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -2 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνάρτηση $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}}$.

Όπως βρήκαμε σε προηγούμενο παράδειγμα, οι ιδιοτιμές του πίνακα είναι $\lambda_1 = -2$, $\lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$. Ο πίνακας $\mathbf{\Lambda}$ είναι

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 + i\sqrt{2} & -1 - i2\sqrt{2} \\ 1 & -1 - i\sqrt{2} & -1 + i2\sqrt{2} \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα \mathbf{f} είναι

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} e^{\lambda_1} \\ e^{\lambda_2} \\ e^{\lambda_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{-2} \\ e^{-1+i\sqrt{2}} \\ e^{-1-i\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Η λύση του συστήματος (4.8) δίνει

$$\begin{aligned} c_0 &= e^{-1}(e^{-1} + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2})) \approx 0.64923, \\ c_1 &= e^{-1}(4e^{-1} - 4 \cos(\sqrt{2}) + 5\sqrt{2} \sin(\sqrt{2}))/6 \approx 0.480224, \\ c_2 &= e^{-1}(2e^{-1} - 2 \cos(\sqrt{2}) + \sqrt{2} \sin(\sqrt{2}))/6 \approx 0.111638. \end{aligned}$$

Εύκολα υπολογίζουμε ότι

$$\mathbf{A}^2 \equiv \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & -6 \\ -4 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}} &= c_0 \mathbf{I} + c_1 \mathbf{A} + c_2 \mathbf{A}^2 = \begin{bmatrix} 5c_2 - 3c_1 + c_0 & -2c_2 & -6c_2 + 2c_1 \\ -4c_2 + c_1 & c_2 - c_1 + c_0 & 2c_2 \\ 5c_2 - 2c_1 & c_2 - c_1 & -4c_2 + c_0 \end{bmatrix} \\ &\approx \begin{bmatrix} -0.23325 & -0.223276 & 0.290619 \\ 0.0336713 & 0.280645 & 0.223276 \\ -0.402257 & -0.368586 & 0.202678 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

4.10.1 Τύπος του Sylvester

Μια αναλυτική συνάρτηση f ενός πίνακα $\mathbf{A}_{n \times n}$ μπορεί να προκύψει και με άλλο τρόπο, πέρα από τη διαδικασία που περιγράψαμε. Σύμφωνα με τον *τύπο του Sylvester*, ο πίνακας $f(\mathbf{A})$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των πινάκων

$$\mathbf{A}_i = \prod_{j=1, j \neq i}^n \frac{1}{\lambda_i - \lambda_j} (\mathbf{A} - \lambda_j \mathbf{I}), \quad i = 1, 1, 2, \dots, n,$$

με συντελεστές τις ποσότητες $f(\lambda_i)$. Επομένως,

$$f(\mathbf{A}) = \sum_{i=1}^n f(\lambda_i) \mathbf{A}_i, \quad i = 1, 1, 2, \dots, n.$$

Παράδειγμα

Η συνάρτηση $f(\mathbf{A}) = e^{\mathbf{A}}$ για τον πίνακα του προηγούμενου παραδείγματος μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Σχηματίζουμε τους πίνακες $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \mathbf{A}_3$, τους αντίστοιχους στις ιδιοτιμές $\lambda_1 = -2, \lambda_{2,3} = -1 \pm i\sqrt{2}$:

$$\mathbf{A}_1 = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} (\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_3} (\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_2 &= \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_3}(\mathbf{A} - \lambda_3 \mathbf{I}) \\
&= \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 2 + 4i\sqrt{2} & 4 + 2i\sqrt{2} & 4 - 4i\sqrt{2} \\ 4 - i\sqrt{2} & 2 - 2i\sqrt{2} & -4 - 2i\sqrt{2} \\ -2 + 5i\sqrt{2} & 2 + 4i\sqrt{2} & 8 - 2i\sqrt{2} \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} + i \frac{\sqrt{2}}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_3 &= \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{I}) \frac{1}{\lambda_3 - \lambda_2}(\mathbf{A} - \lambda_2 \mathbf{I}) = (\mathbf{A}_2)^* \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} - i \frac{\sqrt{2}}{12} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}
e^{\mathbf{A}} &= e^{-2} \mathbf{A}_1 + e^{-1+i\sqrt{2}} \mathbf{A}_2 + e^{-1-i\sqrt{2}} \mathbf{A}_3 = e^{-1} (e^{-1} \mathbf{A}_1 + e^{i\sqrt{2}} \mathbf{A}_2 + e^{-i\sqrt{2}} \mathbf{A}_3) \\
&= e^{-1} \left(e^{-1} \mathbf{A}_1 + 2 \cos(\sqrt{2}) \operatorname{Re}(\mathbf{A}_2) - 2 \sin(\sqrt{2}) \operatorname{Im}(\mathbf{A}_2) \right) \\
&= \frac{e^{-1}}{3} \left(e^{-1} \begin{bmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} + \cos(\sqrt{2}) \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 4 \end{bmatrix} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\sin(\sqrt{2})}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -4 \\ -1 & -2 & -2 \\ 5 & 4 & -2 \end{bmatrix} \right) \approx \begin{bmatrix} -0.23325 & -0.223276 & 0.290619 \\ 0.0336713 & 0.280645 & 0.223276 \\ -0.402257 & -0.368586 & 0.202678 \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

4.11 Ασκήσεις

1. Βρείτε τους πίνακες \mathbf{A}^T , \mathbf{A}^* , \mathbf{A}^\dagger αν

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & i \\ -i & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

2. Υπολογίστε το γινόμενο $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}^T$ όπου $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \\ -1 \end{bmatrix}$.

3. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & i \\ -i & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -i \\ 2 & i & 1+i \\ -3 & 2+i & -4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{c} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Μπορείτε να υπολογίσετε τους πίνακες (α') $A+B$, (β') $2A-B^T$, (γ') $A \cdot B - 2I$, (δ') $B^\dagger \cdot A^*$, (ε') $c^T \cdot B \cdot c - A \cdot c$;

4. Ποιες αλλαγές πρέπει να κάνετε στα στοιχεία a_{ij} με $i > j$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & i \\ -i & 0 & 4 \\ -3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

ώστε αυτός να γίνει (α') συμμετρικός, (β') ερμιτιανός, (γ') κάτω τριγωνικός;

5. Υπολογίστε το ίχνος, την ορίζουσα και τον αντίστροφο πίνακα του

$$B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -i \\ 2 & i & 1+i \\ -3 & 2+i & -4 \end{bmatrix}.$$

6. Δείξτε ότι αν ο πίνακας A είναι συμμετρικός και ο πίνακας B είναι αντισυμμετρικός ισχύει

$$\text{Tr}(A \cdot B) = 0.$$

7. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

υπολογίστε τις ορίζουσες των πινάκων A , B .

8. Αποδείξτε τις ιδιότητες των οριζουσών.
 9. Δείξτε ότι η ορίζουσα ορθογώνιου πίνακα είναι ± 1 .
 10. Δείξτε ότι η ορίζουσα μοναδιαίου πίνακα έχει μέτρο 1.
 11. Κατασκευάστε τον αντίστροφο του πίνακα $D(a_1, a_2, a_3, a_4)$.
 12. Υπολογίστε τις ιδιοτιμές του αντιστρόφου ενός πίνακα συναρτήσει των ιδιοτιμών του πίνακα.
 13. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2-3i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

14. Βρείτε το ημίτονο του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2-3i \\ 1-i & 4 \end{bmatrix}.$$

Κεφάλαιο 5

Επίλυση Γραμμικών Συστημάτων

5.1 Εισαγωγή

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε μεθόδους για την εύρεση της λύσης γενικών γραμμικών συστημάτων $n \times n$:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (5.1\alpha')$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (5.1\beta')$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n. \quad (5.1\gamma')$$

Οι συντελεστές a_{ij} και οι σταθεροί όροι b_i είναι γνωστοί, ενώ τα n x_i είναι άγνωστα και προς εύρεση.

Το σύστημα μπορεί να εκφραστεί με την βοήθεια των πινάκων και διανυσμάτων $\mathbf{A}_{n \times n} = [a_{ij}]$, $\mathbf{x}_{n \times 1} = [x_i]$ και $\mathbf{b}_{n \times 1} = [b_i]$ ως εξής

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}. \quad (5.2)$$

Αν όλα τα b_i είναι 0, το σύστημα χαρακτηρίζεται ως *ομογενές*.

Ένα σύστημα έχει *μοναδική* λύση όταν υπάρχει ο αντίστροφος του πίνακα \mathbf{A} , δηλαδή όταν η ορίζουσα του \mathbf{A} είναι μη μηδενική.

Τις βασικές μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων τις διακρίνουμε σε απευθείας και σε επαναληπτικές. Θα αναφερθούμε μόνο στις πρώτες. Αυτές δίνουν την

ακριβή λύση (με κάποιο σφάλμα στρογγύλευσης) σε συγκεκριμένο και εκ των προτέρων υπολογίσιμο αριθμόβημάτων/πράξεων. Θα παρουσιάσουμε παρακάτω τέτοιες μεθόδους.

5.2 Μέθοδος του αντίστροφου πίνακα

Μια εύκολη στην αντίληψη αλλά χρονοβόρα στην υλοποίηση μέθοδος απαιτεί τον υπολογισμό του αντίστροφου πίνακα του A (αρκεί αυτός να υπάρχει) ώστε η επίλυση του $A \cdot x = b$ να δίνει $x = A^{-1} \cdot b$. Γνωρίζουμε (§4.8) πώς να κατασκευάζουμε τον αντίστροφο πίνακα και θα παρουσιάσουμε σε επόμενη παράγραφο μια μέθοδο υπολογισμού του. Και οι δύο τρόποι χρειάζονται πολλές πράξεις για την εύρεση του αντίστροφου πίνακα, επομένως η συγκεκριμένη μέθοδος δεν χρησιμοποιείται συχνά για την επίλυση συστήματος καθώς υπάρχουν πιο γρήγορες μέθοδοι. Ας δούμε όμως την εφαρμογή της σε ένα παράδειγμα.

5.2.1 Εφαρμογή: Επίλυση συστήματος γραμμικών εξισώσεων

Στο κύκλωμα του σχήματος έχουμε $\mathcal{E}_1 = 5 \text{ V}$, $\mathcal{E}_2 = 10 \text{ V}$, $R_1 = 3 \Omega$, $R_2 = 5 \Omega$, $R_3 = 7 \Omega$. Οι κανόνες Kirchhoff προσδιορίζουν τις εξισώσεις που ικανοποιούν τα άγνωστα ρεύματα I_1, I_2, I_3 :

$$\begin{aligned} -I_1 + I_2 - I_3 &= 0, \\ R_1 I_1 + R_2 I_2 &= \mathcal{E}_1, \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 &= \mathcal{E}_2. \end{aligned}$$

Ας γράψουμε τους συντελεστές των άγνωστων ποσοτήτων σε ένα πίνακα 3×3 ,

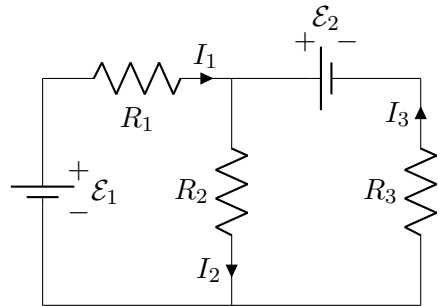
$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ R_1 & R_2 & 0 \\ 0 & R_2 & R_3 \end{bmatrix},$$

τους άγνωστους σε ένα πίνακα-στήλη 3×1 ,

$$x = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix},$$

και τους σταθερούς όρους των εξισώσεων σε άλλο πίνακα-στήλη:

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{E}_1 \\ \mathcal{E}_2 \end{bmatrix}.$$



Παρατηρήστε ότι το σύστημα εξισώσεων ισοδυναμεί με την εξίσωση πινάκων

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b} .$$

Έστω ότι γνωρίζουμε τον αντίστροφο πίνακα του \mathbf{A} . Αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέρη της εξίσωσης από αριστερά με \mathbf{A}^{-1} έχουμε

$$\mathbf{A}^{-1} \cdot (\mathbf{A} \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow (\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A}) \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{I} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} \Rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} .$$

Επομένως, μπορούμε να βρούμε τη λύση του συστήματος αν πολλαπλασιάσουμε τον αντίστροφο του πίνακα \mathbf{A} με το διάνυσμα \mathbf{b} .

Ας αντικαταστήσουμε τις τιμές των $R_{1,2,3}$ και $\mathcal{E}_{1,2}$:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 3 & 5 & 0 \\ 0 & 5 & 7 \end{bmatrix} \text{ και } \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} .$$

Ο αντίστροφος του \mathbf{A} είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1} &= -\frac{1}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3} \begin{bmatrix} R_2 R_3 & -R_2 - R_3 & R_2 \\ -R_1 R_3 & -R_3 & -R_1 \\ R_1 R_2 & R_2 & -R_1 - R_2 \end{bmatrix} \\ &= -\frac{1}{71} \begin{bmatrix} 35 & -12 & 5 \\ -21 & -7 & -3 \\ 15 & 5 & -8 \end{bmatrix} . \end{aligned}$$

Η επίλυση του συστήματος $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ δίνει

$$\mathbf{x} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{b} = -\frac{1}{71} \begin{bmatrix} 35 & -12 & 5 \\ -21 & -7 & -3 \\ 15 & 5 & -8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 10 \end{bmatrix} = \frac{5}{71} \begin{bmatrix} 2 \\ 13 \\ 11 \end{bmatrix} .$$

Άρα $I_1 = 10/71\text{A}$, $I_2 = 65/71\text{A}$, $I_3 = 55/71\text{A}$.

5.3 Κανόνας Cramer

Ο κανόνας Cramer προσδιορίζει τη λύση του γραμμικού συστήματος $\mathbf{A} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$ ως εξής:

$$x_j = \frac{\det(\mathbf{B}_j)}{\det(\mathbf{A})} , \quad j = 1, 2, \dots, n ,$$

όπου ο πίνακας \mathbf{B}_j προκύπτει από τον \mathbf{A} αν αντικαταστήσουμε την στήλη j του \mathbf{A} με το διάνυσμα \mathbf{b} .

Ας αποδείξουμε την πρώτη από τις σχέσεις. Θυμηθείτε ότι η ορίζουσα πίνακα που μια στήλη του γράφεται ως άθροισμα προσθετέων, ισούται με το άθροισμα των

οριζουσών που προκύπτουν από την αρχική, η κάθε μία με ένα όρο στη στήλη. Έτσι, αν στην ορίζουσα του B_1 αντικαταστήσουμε τα b_i με τις αριστερά μέλη των εξισώσεων (5.1) έχουμε

$$\begin{aligned} \det(B_1) &= \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} a_{11}x_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}x_1 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}x_1 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12}x_2 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{22}x_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n2}x_2 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \cdots \\ &\quad \cdots + \begin{vmatrix} a_{1n}x_n & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{2n}x_n & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{nn}x_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Όλες οι ορίζουσες στις οποίες καταλήξαμε, εκτός από την πρώτη, είναι μηδέν καθώς έχουν δύο στήλες ανάλογες. Από την πρώτη μπορούμε να βγάλουμε κοινό παράγοντα το x_1 οπότε απομένει η ορίζουσα του A . Καταλήγουμε στη σχέση που θέλαμε να αποδείξουμε:

$$\det(B_1) = x_1 \det(A).$$

Ο υπολογισμός των οριζουσών μπορεί να γίνει με τον ορισμό (4.3) ή με τις μεθόδους που παρουσιάζονται στην §5.7.2.

Η λύση ενός γενικού γραμμικού συστήματος με τον κανόνα Cramer και απλοϊκό υπολογισμό των οριζουσών, απαιτεί αριθμό πράξεων της τάξης του $(n+1)!$ και γι' αυτό δεν εφαρμόζεται στην πράξη για $n \geq 4$. Επιπλέον, η μέθοδος είναι αριθμητικά ασταθής για πίνακα A με ορίζουσα πολύ κοντά στο 0 καθώς ο υπολογισμός της ακυρώνει τα σημαντικά ψηφία των συντελεστών του πίνακα. Ας αναφέρουμε ότι έχει αναπτυχθεί πολύπλοκη μέθοδος¹ που υπολογίζει τις ορίζουσες σε λιγότερες πράξεις, κατεβάζοντας το συνολικό αριθμό απαιτούμενων πράξεων σε ανάλογο του n^3 .

5.4 Απαλοιφή Gauss

Μια απλή μέθοδος επίλυσης είναι η μέθοδος αντικατάστασης: λύνουμε την πρώτη εξίσωση ως προς την πρώτη μεταβλητή και την αντικαθιστούμε στις επόμενες. Κατόπιν λύνουμε τη δεύτερη εξίσωση ως προς τη δεύτερη μεταβλητή και την αντικαθιστούμε στις επόμενες, κοκ. Η συστηματική εφαρμογή της αποτελεί ουσιαστικά τη μέθοδο απαλοιφής Gauss.

¹<http://dx.doi.org/10.1016/j.jda.2011.06.007>

Η μέθοδος της απαλοιφής Gauss αποτελείται από δύο στάδια:

1. Μετατρέπουμε, με κατάλληλους μετασχηματισμούς, το γενικό γραμμικό σύστημα (5.1) σε άνω τριγωνικό:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \quad (5.3\alpha')$$

$$a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \quad (5.3\beta')$$

$$a_{33}x_3 + \cdots + a_{3n}x_n = b_3 \quad (5.3\gamma')$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$a_{n-1,n-1}x_{n-1} + a_{n-1,n}x_n = b_{n-1} \quad (5.3\delta')$$

$$a_{nn}x_n = b_n \quad (5.3\varepsilon')$$

Οι μετασχηματισμοί είναι τέτοιοι ώστε να διατηρούν τη λύση.

2. Επιλύουμε το άνω τριγωνικό σύστημα. Η λύση τριγωνικών συστημάτων εκφράζεται με «κλειστούς» τύπους.

5.4.1 Τριγωνοποίηση

Σε ένα γραμμικό σύστημα μπορούμε να εκτελέσουμε τους παρακάτω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς χωρίς να επηρεαστεί η λύση του:

- Εναλλαγή της σειράς δύο εξισώσεων,
- Πρόσθεση σε μία εξίσωση μιας άλλης,
- Πολλαπλασιασμός μιας εξίσωσης με ένα μη μηδενικό αριθμό.

Οι δύο τελευταίοι μετασχηματισμοί έχουν ως συνέπεια ότι μπορούμε να προσθέσουμε στην εξίσωση p το πολλαπλάσιο της εξίσωσης q χωρίς να αλλάξει η λύση. Ας συμβολίσουμε αυτό το μετασχηματισμό με $[p] \leftarrow [p] + \lambda[q]$.

Πρώτη στήλη

Ας δούμε με ποιους μετασχηματισμούς μπορούμε να μηδενίσουμε τους όρους κάτω από τη διαγώνιο στην πρώτη στήλη: για να είμαστε συστηματικοί, επιλέγουμε την πρώτη εξίσωση και την προσθέτουμε σε κάθε επόμενη, πολλαπλασιασμένη με κατάλληλους αριθμούς. Έτσι έχουμε

$$[2] \leftarrow [2] + \lambda_2[1],$$

$$[3] \leftarrow [3] + \lambda_3[1],$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$[n] \leftarrow [n] + \lambda_n[1].$$

Ο μετασχηματισμός σε κάθε εξίσωση $i = 2, 3, \dots, n$ δίνει

$$\begin{aligned} a_{ij} &\leftarrow a_{ij} + \lambda_i a_{1j}, & j = 1, 2, \dots, n \\ b_i &\leftarrow b_i + \lambda_i b_1. \end{aligned}$$

Καθώς θέλουμε να έχουμε μετά το μετασχηματισμό $a_{i1} = 0$, πρέπει να ισχύει $\lambda_i = -a_{i1}/a_{11}$. Θεωρούμε ότι $a_{11} \neq 0$. Θα εξετάσουμε παρακάτω τι πρέπει να κάνουμε αν δεν ισχύει αυτό.

Συνοψίζοντας, μηδενίζουμε τους συντελεστές της πρώτης στήλης κάτω από τη διαγώνιο με τις εξής πράξεις:

$$\lambda_i = -a_{i1}/a_{11} \quad (5.4\alpha')$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + \lambda_i a_{1j}, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (5.4\beta')$$

$$b_i \leftarrow b_i + \lambda_i b_1, \quad (5.4\gamma')$$

για $i = 2, 3, \dots, n$.

Το σύστημα (5.1) θα γίνει

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \quad \quad \quad \vdots \\ a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n &= b_n. \end{aligned}$$

Δεύτερη στήλη

Ας δούμε πώς μηδενίζουμε τα στοιχεία της δεύτερης στήλης, κάτω από τη διαγώνιο. Επιλέγουμε τη *δεύτερη* γραμμή και την προσθέτουμε σε κάθε *επόμενη*, πολλαπλασιασμένη με κατάλληλους αριθμούς. Επομένως

$$\begin{aligned} [3] &\leftarrow [3] + \lambda_3[2], \\ [4] &\leftarrow [4] + \lambda_4[2], \\ &\quad \quad \quad \vdots \\ [n] &\leftarrow [n] + \lambda_n[2]. \end{aligned}$$

Ο μετασχηματισμός σε κάθε εξίσωση $i = 3, 4, \dots, n$ δίνει

$$\begin{aligned} a_{ij} &\leftarrow a_{ij} + \lambda_i a_{2j}, & j = 2, 3, \dots, n \\ b_i &\leftarrow b_i + \lambda_i b_2. \end{aligned}$$

Προσέξτε ότι ο δείκτης j ξεκινά από το 2 (είναι περιττό να ξεκινήσουμε από το 1 καθώς οι συντελεστές a_{i1} κάθε γραμμής i με $i = 3, 4, \dots, n$ είναι 0).

Καθώς θέλουμε να έχουμε μετά το μετασχηματισμό $a_{i2} = 0$, προκύπτει ότι πρέπει να ισχύει $\lambda_i = -a_{i2}/a_{22}$ με $i = 3, 4, \dots, n$.

Συνοψίζοντας, μηδενίζουμε τους συντελεστές της δεύτερης στήλης κάτω από τη διαγώνιο με τις εξής πράξεις:

$$\lambda_i = -a_{i2}/a_{22} \quad (5.5\alpha')$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + \lambda_i a_{2j}, \quad j = 2, 3, \dots, n \quad (5.5\beta')$$

$$b_i \leftarrow b_i + \lambda_i b_2, \quad (5.5\gamma')$$

για $i = 3, 4, \dots, n$.

Γενικοί Τύποι

Από τους τύπους που βγάλαμε για την πρώτη και δεύτερη στήλη, μπορούμε να εξαγάγουμε τους γενικούς τύπους για κάθε στήλη, δηλαδή τον αλγόριθμο που μετατρέπει ένα γενικό γραμμικό σύστημα σε άνω τριγωνικό. Έτσι, αν ο δείκτης που είναι 1 στις εξισώσεις (5.4) γίνεται 2 στις (5.5), συμπεραίνουμε ότι θα γίνεται k για την στήλη k :

$$\lambda_i = -a_{ik}/a_{kk} \quad (5.6\alpha')$$

$$a_{ij} \leftarrow a_{ij} + \lambda_i a_{kj}, \quad j = k, k+1, \dots, n \quad (5.6\beta')$$

$$b_i \leftarrow b_i + \lambda_i b_k, \quad (5.6\gamma')$$

με $i = k+1, \dots, n$ (ο δείκτης i χρησιμοποιείται για να διατρέξουμε τις επόμενες εξισώσεις από την k).

Τις εξισώσεις (5.6) θα τις εκτελέσουμε διαδοχικά για $k = 1, 2, \dots, n-1$ (η στήλη $k = n$ δεν έχει στοιχεία κάτω από τη διαγώνιο). Στο τέλος της διαδικασίας, το γενικό γραμμικό σύστημα θα έχει μετατραπεί σε άνω τριγωνικό.

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που κάποιος συντελεστής a_{kk} είναι ή γίνει κατά την εφαρμογή του αλγορίθμου ίσος με 0, δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τις εξισώσεις (5.6) για την εξίσωση K ως έχει. Πρέπει να εναλλάξουμε την επίμαχη εξίσωση K με κάποια από τις επόμενες της ώστε να έρθει στη διαγώνιο ένας μη μηδενικός συντελεστής. Κατόπιν, μπορούμε να συνεχίσουμε τη διαδικασία.

Αν δεν μπορούμε να βρούμε μη μηδενικό συντελεστή στη στήλη K , στις επόμενες του K γραμμές, προχωρούμε τη διαδικασία κανονικά στο επόμενο k . Το τριγωνικό σύστημα που θα προκύψει, όπως θα δούμε παρακάτω, δεν θα έχει μοναδική λύση.

5.4.2 Επίλυση άνω τριγωνικού συστήματος

Η εύρεση της λύσης ενός άνω τριγωνικού συστήματος, (5.3), γίνεται με τη μέθοδο οπισθοδρόμησης, από την τελευταία προς την πρώτη εξίσωση. Έχουμε διαδοχικά

για την τελευταία, προτελευταία, κλπ. πρώτη εξίσωση

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{a_{nn}} b_n, \\ x_{n-1} &= \frac{1}{a_{n-1,n-1}} (b_{n-1} - a_{n-1,n} x_n), \\ &\vdots \\ x_1 &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2 - a_{13} x_3 - \cdots - a_{1n} x_n). \end{aligned}$$

Ο γενικός τύπος είναι

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (5.7)$$

Στον υπολογισμό του αθροίσματος χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σύμβαση: όταν το κάτω όριο του δείκτη άθροισης είναι μεγαλύτερο από το άνω (επομένως, στην περίπτωση μας, όταν $i = n$), το άθροισμα είναι 0.

Παρατήρηση: Άς θυμηθούμε πώς επιλύεται μια γραμμική εξίσωση μίας μεταβλητής, $ax = b$:

- Αν $a \neq 0$ η εξίσωση έχει μία λύση, την $x = b/a$.
- Αν $a = 0$ εξετάζουμε το b :

§ Αν $b \neq 0$ η εξίσωση δεν έχει λύση.

§ Αν $b = 0$ η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις (κάθε x ικανοποιεί την $0x = 0$).

Σύμφωνα με τα παραπάνω, αν κάποιος συντελεστής a_{II} είναι 0, εξετάζουμε τον αριθμητή στη σχέση (5.7):

- αν

$$b_I - \sum_{j=I+1}^n a_{Ij} x_j = 0$$

το σύστημα έχει άπειρες λύσεις. Τα x_i με $i < I$ θα εκφράζονται ως συναρτήσεις του x_I , δεν θα μπορούν να πάρουν συγκεκριμένη αριθμητική τιμή. Το x_I θα είναι ελεύθερη ποσότητα που θα μπορεί να πάρει οποιαδήποτε τιμή θέλουμε.

- αν

$$b_I - \sum_{j=I+1}^n a_{Ij} x_j \neq 0$$

το σύστημα δεν έχει λύση.

Παράδειγμα

Το σύστημα

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix} .$$

επιλύεται ως εξής:

1. Καθώς $a_{11} = 0$ και $a_{21} \neq 0$ εναλλάσσουμε τις δύο πρώτες εξισώσεις

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} .$$

2. Η δεύτερη εξίσωση έχει ήδη $a_{21} = 0$, όπως επιδιώκουμε. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη εξίσωση με $-2/5$ και την προσθέτουμε στην τρίτη, ώστε να μηδενιστεί και το νέο a_{31} :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3.2 & 0.6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 4.4 \end{bmatrix} .$$

3. Συνεχίζουμε με τη δεύτερη στήλη: Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη εξίσωση με 3.2 και την προσθέτουμε στην τρίτη ώστε να μηδενιστεί και το νέο a_{32} :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 14 \end{bmatrix} .$$

4. Ο πίνακας έχει έρθει σε άνω τριγωνική μορφή. Με οπισθοδρόμηση έχουμε

$$\begin{aligned} 7x_3 = 14 &\Rightarrow x_3 = 2 , \\ x_2 + 2x_3 = 3 &\Rightarrow x_2 = 3 - 2x_3 = -1 , \\ 5x_1 + 3x_2 + x_3 = 4 &\Rightarrow x_1 = (4 - x_3 - 3x_2)/5 = 1 . \end{aligned}$$

5.4.3 Παρατηρήσεις**Απαιτήσεις πράξεων**

Η μέθοδος Gauss χρειάζεται, στη γενική περίπτωση, $n(n+1)/2$ διαιρέσεις, $n(n-1)(2n+5)/6$ πολλαπλασιασμούς και $n(n-1)(2n+5)/6$ αφαιρέσεις. Συνολικά, περίπου $2n^3/3$ πράξεις, πολύ λιγότερες από τις $(n+1)!$ που απαιτεί η μέθοδος Cramer.

Πολλαπλά δεξιά μέλη, $b = B_{n \times m}$

Όταν θέλουμε να επιλύσουμε πολλές φορές το σύστημα με ίδιο πίνακα A αλλά m διαφορετικά δεξιά μέλη b , είναι προτιμότερο να εκτελέσουμε συγχρόνως τη διαδικασία για όλα τα b , δηλαδή, να σχηματίσουμε ένα πίνακα B με m στήλες και να επεκτείνουμε τις πράξεις που υπαγορεύει ο αλγόριθμος για το b σε όλες τις στήλες του.

5.5 Μέθοδος Gauss-Jordan

Μια άλλη μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων, παραλλαγή της μεθόδου Gauss, είναι η μέθοδος Gauss-Jordan. Σε αυτή, η διαδικασία της απαλοιφής των συντελεστών κάθε στήλης δεν περιορίζεται στις γραμμές κάτω από τη διαγώνιο αλλά εφαρμόζεται και πάνω από αυτή. Επομένως, με αυτή τη διαδικασία, ένα σύστημα της μορφής

$$A \cdot x = B$$

γίνεται

$$A' \cdot x = B',$$

όπου ο A' είναι διαγώνιος πίνακας. Με πολύ απλό μετασχηματισμό μπορεί να γίνει ο ταυτοτικός, οπότε

$$I \cdot x = B''.$$

Η μέθοδος αυτή παράγει απευθείας τη λύση του συστήματος, απαιτεί όμως περίπου 50% περισσότερες πράξεις από την τριγωνοποίηση σε συνδυασμό με την οπισθοδρόμηση, και γι' αυτό δεν θα πρέπει να χρησιμοποιείται.

5.6 Ανάλυση LU

Ας υποθέσουμε ότι ο πίνακας A στην (5.2) μπορεί να γραφεί ως εξής

$$A = L \cdot U,$$

όπου L ένας κάτω τριγωνικός πίνακας (έχει δηλαδή μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και κάτω από αυτή) και U ένας άνω τριγωνικός πίνακας (έχει δηλαδή μη μηδενικά στοιχεία στη διαγώνιο και πάνω από αυτή):

$$L = \begin{bmatrix} \ell_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \ell_{21} & \ell_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \ell_{n1} & \ell_{n2} & \ell_{n3} & \cdots & \ell_{nn} \end{bmatrix}$$

και

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}.$$

Η εξίσωση (5.2) μπορεί να γραφεί

$$A \cdot x = b \Rightarrow L \cdot (U \cdot x) = b.$$

Το διάνυσμα $y = U \cdot x$ μπορεί να προσδιοριστεί λύνοντας την εξίσωση $L \cdot y = b$. Καθώς ο πίνακας L είναι κάτω τριγωνικός, η λύση εύκολα δείχνεται ότι είναι

$$y_i = \frac{1}{\ell_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} \ell_{ij} y_j \right), \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Στον υπολογισμό του αθροίσματος χρησιμοποιούμε την ακόλουθη σύμβαση: όταν το κάτω όριο του δείκτη άθροισης είναι μεγαλύτερο από το άνω (επομένως, στην περίπτωση μας, όταν $i = 1$), το άθροισμα είναι 0.

Αφού προσδιορίσουμε το διάνυσμα y , η επίλυση του άνω τριγωνικού συστήματος $U \cdot x = y$ σύμφωνα με την §5.4.2 θα μας δώσει τη λύση του αρχικού. Επομένως

$$x_i = \frac{1}{u_{ii}} \left(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij} x_j \right), \quad i = n, n-1, \dots, 1.$$

Νοείται ότι όταν $i = n$ το άθροισμα είναι 0.

Κάθε αντιστρέψιμος πίνακας μπορεί να αναλυθεί σε γινόμενο δύο τριγωνικών πινάκων L , U αρκεί να είναι μη μηδενικές οι ορίζουσες όλων των τετραγωνικών υπο-πινάκων του με πάνω αριστερό στοιχείο το $(1, 1)$ και κάτω δεξιό το (i, i) , για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$. Αν δεν ισχύει κάτι τέτοιο, μπορούμε πάντα να εναλλάξουμε τις γραμμές του πίνακα ώστε οι ορίζουσες να γίνουν μη μηδενικές. Σε αυτή την περίπτωση η ανάλυση LU θα αφορά τον τροποποιημένο πίνακα και θα πρέπει να «μεταφέρουμε» τις εναλλαγές και στο διάνυσμα b .

Οι πράξεις που απαιτούνται για την εύρεση της λύσης ενός γραμμικού συστήματος $n \times n$ μέσω της ανάλυσης LU είναι περίπου $2n^3/3$, όσες περίπου και στη μέθοδο απαλοιφής Gauss. Το πλεονέκτημα της μεθόδου LU είναι ότι, αφού προσδιοριστεί η ανάλυση του πίνακα A σε L , U , μπορεί να εφαρμοστεί για να επιλυθεί γρήγορα το γραμμικό σύστημα $A \cdot x = b$ με πολλαπλά δεξιά μέλη, να βρεθεί εύκολα ο αντίστροφος A^{-1} , να υπολογιστεί η ορίζουσα του A , κλπ. όπως θα δούμε παρακάτω στις εφαρμογές. Συνεπώς, η ανάλυση ενός πίνακα σε γινόμενο L , U είναι προτιμότερη και χρησιμοποιείται περισσότερο από τη διαδικασία απαλοιφής Gauss.

5.7 Εφαρμογές

Η διαδικασία τριγωνοποίησης με τη μέθοδο απαλοιφής Gauss (§5.4.1) και γενικότερα, η επίλυση γραμμικών συστημάτων, βρίσκει εφαρμογή και σε άλλα προβλήματα γραμμικής άλγεβρας.

5.7.1 Υπολογισμός του αντίστροφου πίνακα

Κάθε μέθοδος επίλυσης γραμμικού συστήματος της μορφής $A \cdot x = b$ παράγει τελικά το

$$x = A^{-1} \cdot b.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε για διάνυσμα b διαδοχικά τα n διανύσματα

$$b_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, b_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, b_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \dots, b_n = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix},$$

θα έχουμε ως λύσεις τις αντίστοιχες στήλες του πίνακα A^{-1} . Η μέθοδος αυτή για την εύρεση του αντιστρόφου ενός (τετραγωνικού) πίνακα $A_{n \times n}$ απαιτεί την επίλυση n γραμμικών συστημάτων με διαφορετικά δεξιά μέλη. Αν επιλέξουμε για την επίλυσή τους τη διαδικασία της τριγωνοποίησης, οποιαδήποτε μεταβολή των συστημάτων καθορίζεται αποκλειστικά από τα στοιχεία του A και, συνεπώς, μπορούν να επιλυθούν ταυτόχρονα.

Παράδειγμα

Ο αντίστροφος του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

βρίσκεται ως εξής:

Συμπληρώνουμε τον πίνακα A με τις στήλες του ταυτοτικού πίνακα:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

Εκτελούμε την τριγωνοποίηση στο αριστερό μέρος και, συγχρόνως, εφαρμό-

ζουμε τις εναλλαγές, προσθέσεις και πολλαπλασιασμούς γραμμών που υπαγορεύονται από την τριγωνοποίηση, στο δεξί μέρος:

1. Επιδιώκουμε να μηδενίσουμε τους συντελεστές της πρώτης στήλης κάτω από τη διαγώνιο. Στο συγκεκριμένο πίνακα τα a_{21} και a_{31} είναι ήδη 0. Αφαιρούμε την πρώτη από την τέταρτη γραμμή:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

2. Προχωρούμε στη δεύτερη στήλη. Εναλλάσσουμε τη δεύτερη γραμμή με την τρίτη ώστε να έρθει στη διαγώνιο μη μηδενικό στοιχείο:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right].$$

3. Προσθέτουμε τη δεύτερη στην τέταρτη γραμμή:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

4. Προχωρούμε στην τρίτη στήλη: Πολλαπλασιάζουμε την τρίτη γραμμή με 2 και την αφαιρούμε από την τέταρτη:

$$\left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right].$$

Η άνω τριγωνοποίηση του αριστερού τμήματος ολοκληρώθηκε.

Αν θέσουμε

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

έχουμε καταλήξει σε 4 συστήματα με διαφορετικά δεξιά μέλη:

$$\mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Προχωρούμε στην οπισθοδρόμηση (§5.4.2) για κάθε σύστημα χωριστά. Οι λύσεις τους είναι

$$\mathbf{X}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_2 = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_3 = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X}_4 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Τα \mathbf{X}_i είναι οι στήλες του αντίστροφου πίνακα του \mathbf{A} , επομένως

$$\mathbf{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

5.7.2 Υπολογισμός ορίζουσας

Μια μέθοδος για να υπολογίσουμε την ορίζουσα, εκτός από την εφαρμογή του τύπου (4.3), ξεκινά με τη μετατροπή του αρχικού πίνακα σε ένα τριγωνικό (άνω ή κάτω). Η πρόσθεση σε μια γραμμή ενός (τετραγωνικού) πίνακα του πολλαπλασίου μιας άλλης είναι διαδικασία που διατηρεί την ορίζουσα. Ο άνω τριγωνικός πίνακας που παράγεται με την απαλοιφή Gauss, αν η τριγωνοποίηση περιοριστεί μόνο σε τέτοιες μεταβολές, έχει ίδια ορίζουσα με τον αρχικό. Προσέξτε ότι σε περίπτωση που εφαρμόσουμε οδήγηση (δηλαδή εναλλαγή γραμμών ή στηλών), πρέπει να λάβουμε υπόψη ότι κάθε τέτοια μεταβολή αλλάζει το πρόσημο της ορίζουσας.

Η ορίζουσα ενός άνω ή κάτω τριγωνικού πίνακα υπολογίζεται πολύ εύκολα. Η εφαρμογή της σχέσης (4.3), με ανάπτυξη κατά την πρώτη στήλη, δίνει ως ορίζουσα το γινόμενο των διαγωνίων στοιχείων του:

$$\det(\mathbf{A}) = \prod_{i=1}^n a'_{ii}.$$

Προσέξτε ότι τα στοιχεία a'_{ii} είναι τα διαγώνια στοιχεία του τριγωνικού πίνακα.

Επομένως, η ορίζουσα $\det(\mathbf{A})$ μπορεί να υπολογιστεί ως το γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου του τελικού πίνακα (μετά την άνω ή κάτω τριγωνοποίηση), \mathbf{A}' , επί $(-1)^s$ όπου s είναι ο συνολικός αριθμός εναλλαγών γραμμών (ή στηλών) που έγιναν κατά την απαλοιφή.

Παράδειγμα

Η ορίζουσα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

υπολογίζεται ως εξής:

Καθώς $a_{11} = 0$ και $a_{21} \neq 0$ εναλλάσσουμε τις δύο πρώτες γραμμές

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \end{bmatrix} .$$

Η δεύτερη γραμμή έχει ήδη $a_{21} = 0$, όπως επιδιώκουμε. Πολλαπλασιάζουμε την πρώτη γραμμή με $-2/5$ και την προσθέτουμε στην τρίτη, ώστε να μηδενιστεί και το νέο a_{31} :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -3.2 & 0.6 \end{bmatrix} .$$

Συνεχίζουμε με τη δεύτερη στήλη: Πολλαπλασιάζουμε τη δεύτερη γραμμή με 3.2 και την προσθέτουμε στην τρίτη ώστε να μηδενιστεί και το νέο a_{32} :

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} .$$

Ο πίνακας είναι πλέον τριγωνικός με γινόμενο διαγώνιων στοιχείων το 35. Κατά τη διαδικασία της τριγωνοποίησης έγινε μία εναλλαγή γραμμών ($s = 1$) άρα

$$\det \mathbf{A} = -35 .$$

Αν έχουμε ήδη υπολογίσει την ανάλυση του \mathbf{A} σε \mathbf{L} , \mathbf{U} (§5.6), η ορίζουσα υπολογίζεται εύκολα

$$\det(\mathbf{A}) = \det(\mathbf{L}) \det(\mathbf{U}) = \left(\prod_{i=1}^n \ell_{ii} \right) \left(\prod_{i=1}^n u_{ii} \right) .$$

5.8 Ασκήσεις

1. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_3 &= 1 , \\ x_2 - x_3 &= 0 , \\ x_1 - 2x_2 &= 1 . \end{aligned}$$

Έχει το σύστημα μοναδική λύση για τα x_1, x_2, x_3 ; Αν ναι, βρείτε τη με τη μέθοδο Cramer.

2. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 0, \\3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 1.\end{aligned}$$

Έχει το σύστημα μοναδική λύση για τα x_1, x_2, x_3 ; Αν ναι, βρείτε τη με τη μέθοδο Cramer. Αν όχι, εφαρμόστε την απαλοιφή Gauss για να διαπιστώστε αν έχει άπειρες λύσεις (τις οποίες να βρείτε) ή καμία.

3. Δίνεται το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}kx - y &= 1, \\4x - ky &= \eta.\end{aligned}$$

Για ποιες τιμές των παραμέτρων k και η το σύστημα έχει μοναδική λύση για τα x, y ; Για ποιες έχει άπειρες λύσεις; Για ποιες είναι αδύνατο;

Για κάθε μία από τις πιο πάνω περιπτώσεις βρείτε τη λύση ή τις λύσεις του συστήματος (σε κάποιες περιπτώσεις θα πρέπει να τις βρείτε συναρτήσει των k και η).

4. Να προσδιορίσετε τις ιδιοτιμές και τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & 1 \\ 4 & 7 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

5. Να προσδιορίσετε μια ιδιοτιμή και το αντίστοιχο ιδιοδιάνυσμα του πίνακα

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 7 & 2 \end{bmatrix}.$$

6. Δίνεται ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

- Υπολογίστε το χαρακτηριστικό του πολυώνυμο.
- Υπολογίστε τα ιδιοδιανύσματα και τις ιδιοτιμές του.
- Είναι τα ιδιοδιανύσματα του A γραμμικά ανεξάρτητα;

7. Βρείτε τον αντίστροφο του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 \\ 3 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Επαληθεύστε ότι ο πίνακας που βρήκατε όντως ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{I}$.

8. Έστω

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -4 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Υπολογίστε τα (α') $\det(2\mathbf{A}^2 \cdot \mathbf{B})$, (β') $\det(4\mathbf{A} + \mathbf{B})$, (γ') $\det(2\mathbf{A}^3 \cdot (\mathbf{B}^{-1})^2)$.

9. Βρείτε τις πραγματικές τιμές του t ώστε ο πίνακας

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & t \\ t & t+2 & 1 & t+2 \\ t+1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & t \end{bmatrix}$$

να μην αντιστρέφεται.

10. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα κανονικοποιημένα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Δείξτε ότι τα ιδιοδιανύσματα αποτελούν ορθοκανονική βάση στο χώρο των πινάκων 3×1 . Αναπτύξτε το διάνυσμα $\mathbf{x} = [2 \ 5 \ 3]^T$ σε αυτή τη βάση και με τη βοήθεια του αναπτύγματος υπολογίστε το $\mathbf{A}^{10} \cdot \mathbf{x}$, όπου

$$\mathbf{A}^k = \underbrace{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \dots \cdot \mathbf{A}}_{k \text{ φορές}}.$$

11. Βρείτε τις ιδιοτιμές και τα ιδιοδιανύσματα του πίνακα

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Είναι τα ιδιοδιανύσματα γραμμικώς ανεξάρτητα; Είναι ορθοκανονικά;

Αναπτύξτε στα ιδιοδιανύσματα το διάνυσμα $\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Υπολογίστε με τη βοήθεια του αναπτύγματος το

$$\boldsymbol{y} = e^{\boldsymbol{A}} \cdot \boldsymbol{v} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \boldsymbol{A}^k \cdot \boldsymbol{v} ,$$

όπου

$$\boldsymbol{A}^k = \underbrace{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \dots \cdot \boldsymbol{A}}_{k \text{ φορές}} .$$

Κεφάλαιο 6

Ανάλυση Fourier

Πολλά προβλήματα στη Φυσική αφορούν ταλαντώσεις και κύματα. Ένα ηλεκτρομαγνητικό κύμα (ακτινοβολία), το εναλλασσόμενο ρεύμα σε ένα ηλεκτρικό κύκλωμα, η δόνηση μιας χορδής ή ενός μέσου (ήχος) είναι γενικά μια επαλληλία κυμάτων, το καθένα με συγκεκριμένη συχνότητα. Η ανάλυση Fourier μας δίνει τη δυνατότητα να αναπτύξουμε τέτοιες περιοδικές (αλλά και μη περιοδικές) συναρτήσεις του χρόνου ή κάποιας απόστασης, στα κύματα που τις αποτελούν. Επιπλέον, η ανάλυση Fourier βρίσκει εφαρμογή στη Μαθηματική Φυσική για την επίλυση διαφορικών εξισώσεων.

6.1 Ορισμοί

6.1.1 Συνεχής συνάρτηση

Μια συνάρτηση $f(x)$ είναι *συνεχής* σε ένα σημείο x_0 στο πεδίο ορισμού της αν ικανοποιεί τη σχέση

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) . \quad (6.1)$$

Σε αυτό τον ορισμό θεωρούμε ότι

- το x_0 δεν είναι απομονωμένο σημείο, έχει δηλαδή, γειτονικά σημεία που ανήκουν στο πεδίο ορισμού, και
- η τιμή του ορίου είναι ανεξάρτητη από την κατεύθυνση από την οποία το σημείο x πλησιάζει το x_0 .

Ο συγκεκριμένος ορισμός με απλά λόγια σημαίνει ότι το $f(x)$ πλησιάζει όσο κοντά θέλουμε στο $f(x_0)$ όταν το x πλησιάζει το x_0 από οποιαδήποτε κατεύθυνση.

Ισοδύναμα, μια συνάρτηση είναι συνεχής σε σημείο x_0 αν τα δύο όριά της, από μικρότερες και μεγαλύτερες τιμές, ταυτίζονται με την τιμή της στο x_0 :

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 - \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} f(x_0 + \varepsilon) = f(x_0) .$$

6.1.2 Περιοδική συνάρτηση

Μια συνεχής συνάρτηση $f(x)$ λέγεται *περιοδική* με (μη μηδενική) περίοδο L , αν ικανοποιεί τη σχέση

$$f(x + L) = f(x) , \quad (6.2)$$

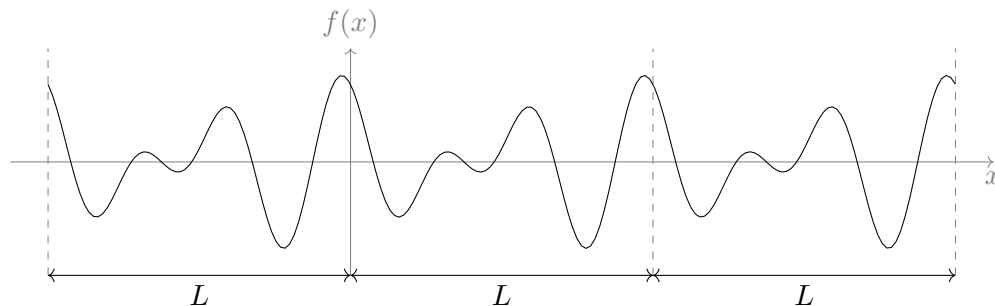
για όλα τα σημεία x που ανήκουν στο πεδίο ορισμού της. Αν το L είναι το μικρότερο διάστημα που ικανοποιεί τη σχέση (6.2), τότε εύκολα δείχνεται ότι κάθε πολλαπλάσιο του L είναι επίσης περίοδος:

$$f(x + mL) \equiv f(x + (m - 1)L + L) = f(x + (m - 1)L) = \cdots = f(x) ,$$

όπου m θετικός ακέραιος. Παρατηρήστε ακόμα ότι αν μια συνάρτηση έχει περίοδο υποπολλαπλάσιο του L , L/m , τότε το L είναι επίσης περίοδός της.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση στο Σχήμα 6.1 είναι περιοδική.



Σχήμα 6.1: Περιοδική συνάρτηση με περίοδο L

6.1.3 Συνθήκες Dirichlet

Μια πραγματική συνάρτηση πραγματικής μεταβλητής $f(x)$, που είναι περιοδική, λέμε ότι ικανοποιεί τις *συνθήκες Dirichlet* αν σε οποιοδήποτε πεπερασμένο διάστημα στο πεδίο ορισμού της:

- Είναι μονότιμη και συνεχής, εκτός ίσως από πεπερασμένο πλήθος διακριτών σημείων στα οποία εμφανίζει ασυνέχεια, χωρίς όμως να απειρίζεται.
- Έχει πεπερασμένο πλήθος μέγιστων και ελάχιστων.

- Ορίζεται και έχει πεπερασμένη τιμή το ολοκλήρωμα της $|f(x)|$ (όπως λέμε, η $f(x)$ είναι απόλυτα ολοκληρώσιμη).

Οι συνθήκες αυτές είναι πολύ γενικές και οι περιοδικές συναρτήσεις που θα συναντήσουμε σε ρεαλιστικές εφαρμογές τις ικανοποιούν.

Παράδειγμα

Η συνάρτηση στο Σχήμα 6.1 ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet.

6.2 Σειρά Fourier

Μια περιοδική συνάρτηση $f(x)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet μπορεί να αναπαρασταθεί ως άθροισμα άπειρων τριγωνομετρικών συναρτήσεων (ημίτονων και συνημίτονων) με κατάλληλα πλάτη και φάσεις. Το άθροισμα αυτό συγκλίνει στην $f(x)$ σε κάθε σημείο που αυτή είναι συνεχής.

Οι όροι του αθροίσματος είναι της μορφής

$$A_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \quad \text{ή} \quad B_m \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right),$$

με m μη αρνητικό ακέραιο¹. Παρατηρήστε ότι κάθε τέτοιος όρος είναι μια περιοδική συνάρτηση με περίοδο L/m . Το άθροισμα τέτοιων συναρτήσεων, με διάφορα πλάτη A_m , B_m και περιόδους υποπολλαπλάσιες του L (L , $L/2$, $L/3$, ...), αποτελεί τη *σειρά Fourier* για μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet και είναι περιοδική με περίοδο L . Δηλαδή

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{A_0}{2} \\ &\quad + A_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + B_1 \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \\ &\quad + A_2 \cos\left(2\frac{2\pi x}{L}\right) + B_2 \sin\left(2\frac{2\pi x}{L}\right) \\ &\quad + A_3 \cos\left(3\frac{2\pi x}{L}\right) + B_3 \sin\left(3\frac{2\pi x}{L}\right) \\ &\quad \vdots \\ &= \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right). \end{aligned} \quad (6.3)$$

¹Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή x είναι μήκος, η περίοδος L λέγεται μήκος κύματος και συμβολίζεται συνήθως με το λ . Η ποσότητα $2\pi/\lambda$ λέγεται (γωνιακός) κυματάριθμος και συμβολίζεται συχνά με το k . Αν η ανεξάρτητη μεταβλητή συμβολίζει χρόνο, η περίοδος L συμβολίζεται με το T . Η ποσότητα $2\pi/T$ λέγεται γωνιακή συχνότητα και συμβολίζεται με το ω .

Οι συντελεστές A_m, B_m εξαρτώνται από την $f(x)$ και θα υπολογιστούν στην επόμενη παράγραφο. Εκεί θα φανεί και ο λόγος της ιδιαίτερης μορφής του σταθερού όρου, $A_0/2$.

Παρατηρήστε ότι η σειρά Fourier είναι παντού συνεχής ενώ η $f(x)$ μπορεί να έχει σημεία ασυνέχειας. Σε αυτά τα σημεία, η τιμή που παίρνει η σειρά Fourier είναι ο μέσος όρος του δεξιού και του αριστερού ορίου της $f(x)$:

$$\frac{1}{2} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (f(x_0 - \varepsilon) + f(x_0 + \varepsilon)) .$$

6.3 Υπολογισμός συντελεστών της σειράς Fourier

Οι άγνωστοι συντελεστές $A_0, A_1, \dots, B_1, \dots$ στην εξίσωση (6.3) λέγονται *συντελεστές Fourier* και υπολογίζονται ως εξής:

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της (6.3) με την ποσότητα $\cos(2n\pi x/L)$ και ολοκληρώνουμε σε διάστημα μίας περιόδου:

$$\begin{aligned} \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x) dx &= \frac{A_0}{2} \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας σχέσεις από το τυπολόγιο στο Παράρτημα Α' προκύπτει ότι

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x) dx = A_n \frac{L}{2} , \quad n \geq 0 .$$

Παρατηρήστε ότι η επιλογή να έχει ο σταθερός όρος τη μορφή $A_0/2$ δίνει ενιαία μορφή στο γενικό τύπο για τα A_n , για κάθε n .

Αντίστοιχα, αν πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της (6.3) με την ποσότητα $\sin(2n\pi x/L)$ και ολοκληρώσουμε στο διάστημα $[0, L]$, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x) dx &= \frac{A_0}{2} \int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας σχέσεις από το τυπολόγιο στο Παράρτημα Α' προκύπτει ότι

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x) dx = B_n \frac{L}{2} , \quad n > 0 .$$

Συγκεντρωτικά, για τους πραγματικούς συντελεστές A_n, B_n έχουμε

$$A_n = \frac{2}{L} \int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x) dx, \quad n \geq 0, \quad (6.4\alpha')$$

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) f(x) dx, \quad n > 0. \quad (6.4\beta')$$

Παρατήρηση: Οι συναρτήσεις $f(x)$, $\cos(2n\pi x/L)$, $\sin(2n\pi x/L)$ που εμφανίζονται στα ολοκλήρωματα είναι περιοδικές με περίοδο L :

$$\begin{aligned} f(x+L) &= f(x), & (\text{εξ ορισμού}) \\ \cos(2n\pi(x+L)/L) &= \cos(2n\pi x/L + 2n\pi) = \cos(2n\pi x/L), \\ \sin(2n\pi(x+L)/L) &= \sin(2n\pi x/L + 2n\pi) = \sin(2n\pi x/L). \end{aligned}$$

Επομένως και οι συναρτήσεις $\cos(2n\pi x/L)f(x)$ και $\sin(2n\pi x/L)f(x)$ είναι περιοδικές με την ίδια περίοδο.

Ένα ολοκλήρωμα μιας περιοδικής συνάρτησης $g(x)$ σε μήκος ίσο με την περίοδό της, L , είναι το ίδιο, ανεξάρτητα από την αρχή (το κάτω όριο) της ολοκλήρωσης: έστω a αυθαίρετο σημείο στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης. Τότε

$$\int_a^{a+L} g(x) dx = \int_a^L g(x) dx + \int_L^{a+L} g(x) dx.$$

Όμως

$$\int_L^{a+L} g(x) dx \stackrel{y=x-L}{=} \int_0^a g(y+L) dy = \int_0^a g(y) dy.$$

Η τελευταία ισότητα προέκυψε από την περιοδικότητα (εξίσωση (6.2)) της $g(x)$. Συνολικά έχουμε

$$\int_a^{a+L} g(x) dx = \int_a^L g(x) dx + \int_0^a g(y) dy = \int_0^L g(x) dx.$$

Επομένως, σε ολοκλήρωμα περιοδικής συνάρτησης σε μία περίοδό της μπορούμε να επιλέξουμε το διάστημα ολοκλήρωσης να είναι $[0, L]$ ή $[-L/2, L/2]$ ή οποιοδήποτε άλλο μας διευκολύνει, αρκεί να έχει μήκος μία περίοδο. Η τιμή του ολοκληρώματος θα είναι η ίδια ανεξάρτητα από την αρχή του διαστήματος.

6.3.1 Ιδιότητες

Εύκολα μπορούμε να δούμε από τους ορισμούς των συντελεστών Fourier, (6.4α') και (6.4β'), ότι:

- Αν η συνάρτηση $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, έχει περίοδο L και συντελεστές Fourier A_m, B_m , η συνάρτηση $\lambda f(x)$ με λ πραγματική σταθερά, ικανοποιεί επίσης τις συνθήκες Dirichlet, έχει περίοδο L και αναπτύσσεται σε σειρά Fourier με συντελεστές $\lambda A_m, \lambda B_m$.

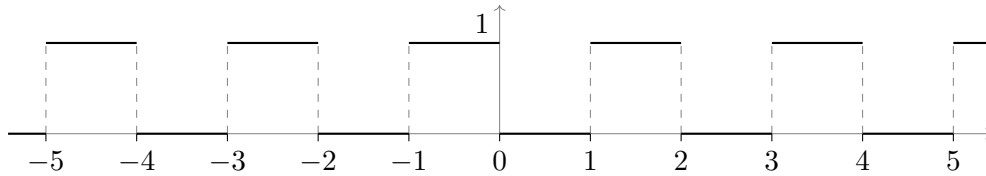
- Αν δύο συναρτήσεις $f_1(x)$ και $f_2(x)$ ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, έχουν ίδια περίοδο L και συντελεστές Fourier $A_m^{(1)}, B_m^{(1)}$ και $A_m^{(2)}, B_m^{(2)}$ αντίστοιχα, τότε και το άθροισμά τους, $f_1(x) + f_2(x)$, ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet, έχει ίδια περίοδο L και συντελεστές Fourier $A_m = A_m^{(1)} + A_m^{(2)}$ και $B_m = B_m^{(1)} + B_m^{(2)}$.

6.3.2 Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση (τετραγωνικός παλμός)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1, \\ 1, & 1 \leq x < 2, \end{cases} \quad (6.5)$$

που επαναλαμβάνεται για $x \geq 2$ και $x < 0$ ώστε $f(x + 2m) = f(x)$ με οποιοδήποτε θετικό ή αρνητικό ακέραιο m . Η γραφική της παράσταση δίνεται στο Σχήμα 6.2.



Σχήμα 6.2: Τετραγωνικός παλμός, εξίσωση (6.5)

Η συγκεκριμένη συνάρτηση είναι συνεχής με πεπερασμένες ασυνέχειες στα σημεία 0, 1 και είναι περιοδική με περίοδο $L = 2$. Το ολοκλήρωμα της $|f(x)|$ στο $[0, 2)$ ορίζεται και είναι πεπερασμένο:

$$\int_0^2 |f(x)| dx = 1.$$

Η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet οπότε μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier:

$$f(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(m\pi x) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(m\pi x),$$

με συντελεστές που υπολογίζονται από τους τύπους (6.4α'), (6.4β'):

$$\begin{aligned} A_m &= \int_0^2 \cos(m\pi x) f(x) dx = \int_1^2 \cos(m\pi x) dx = \delta_{m0}, \quad m \geq 0, \\ B_m &= \int_0^2 \sin(m\pi x) f(x) dx = \int_1^2 \sin(m\pi x) dx = \frac{(-1)^m - 1}{m\pi} \\ &= \begin{cases} 0, & m = 2, 4, 6, \dots, \\ -\frac{2}{m\pi}, & m = 1, 3, 5, \dots \end{cases} \end{aligned}$$

Στο A_m χρησιμοποιήθηκε το δέλτα του Kronecker, δ_{ij} . Αυτό έχει τιμή 1 αν $i = j$ και 0 αν $i \neq j$.

Επομένως, ο συγκεκριμένος τετραγωνικός παλμός αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως εξής

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(k\pi x) = \frac{1}{2} - 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{(2j+1)\pi} \\ &= \frac{1}{2} - 2 \left(\frac{\sin(\pi x)}{\pi} + \frac{\sin(3\pi x)}{3\pi} + \frac{\sin(5\pi x)}{5\pi} + \frac{\sin(7\pi x)}{7\pi} + \dots \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Παρατηρήστε ότι στα σημεία ασυνέχειας της $f(x)$, στα 0 και 1, η σειρά Fourier είναι συνεχής και έχει τιμή $1/2$, όσο το ημίαθροισμα του δεξιού και του αριστερού ορίου της $f(x)$ σε καθένα από τα δύο σημεία.

6.3.3 Συντελεστές Fourier συνάρτησης με συμμετρία

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $c(x) = \cos(2n\pi x/L)$ στην εξίσωση (6.4α') είναι συμμετρική ως προς το $x = L/2$: αν \bar{x} ένα οποιοδήποτε μήκος, ισχύει

$$c\left(\frac{L}{2} - \bar{x}\right) = c\left(\frac{L}{2} + \bar{x}\right).$$

Αντίστοιχα, η συνάρτηση $s(x) = \sin(2n\pi x/L)$ της εξίσωσης (6.4β') είναι αντισυμμετρική ως προς το $x = L/2$:

$$s\left(\frac{L}{2} - \bar{x}\right) = -s\left(\frac{L}{2} + \bar{x}\right).$$

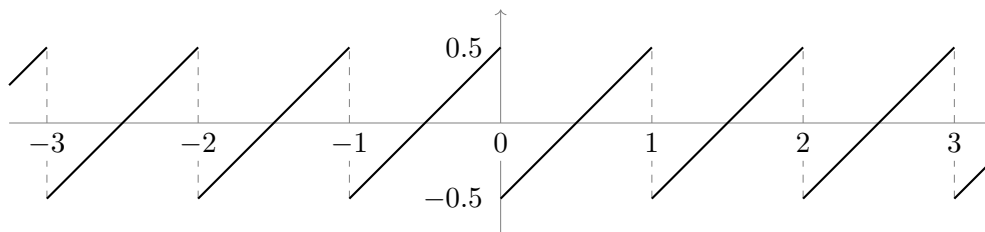
Επομένως, ο υπολογισμός των ολοκληρωμάτων που εκφράζουν τους συντελεστές Fourier απλοποιείται όταν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική ως προς το $x = L/2$ (ή γενικότερα, το μέσο οποιουδήποτε διαστήματος με μήκος L). Αν είναι συμμετρική, τότε $B_n = 0$ και η σειρά Fourier περιέχει μόνο συνημίτονα (και σταθερό όρο), δηλαδή, τους συμμετρικούς όρους. Αν είναι αντισυμμετρική, έχουμε $A_n = 0$ και η σειρά περιέχει μόνο ημίτονα, δηλαδή τους αντισυμμετρικούς όρους της. Στην περίπτωση που η $f(x)$ δεν έχει συγκεκριμένη συμμετρία ως προς το $L/2$, η σειρά περιλαμβάνει γενικά όλους τους όρους.

Με βάση τα παραπάνω, η σειρά Fourier του τετραγωνικού παλμού στην εξίσωση (6.5), που δεν παρουσιάζει κάποια συμμετρία ως προς τη μέση του διαστήματος $[0, 2)$, είναι αναμενόμενο να μην έχει μόνο όρους συγκεκριμένης συμμετρίας. Προσέξτε όμως ότι η συνάρτηση $g(x) = f(x) - 1/2$ είναι αντισυμμετρική σε αυτό το διάστημα, γύρω από το $x = 1$. Το ανάπτυγμα Fourier της $g(x)$ αναμένουμε να έχει μόνο τους όρους των ημιτόνων. Εύκολα επιβεβαιώνεται αυτό από το ανάπτυγμα της $f(x)$.

Γενικά, μια κατάλληλη μετατόπιση της συνάρτησης ή της ανεξάρτητης μεταβλητής κατά ένα σταθερό όρο μπορεί να αναδείξει τη συμμετρία της συνάρτησης, αν υπάρχει, και επομένως να απλοποιήσει τη σειρά Fourier.

6.3.4 Παράδειγμα

Ας δούμε άλλο παράδειγμα με εξαρχής αντισυμμετρική συνάρτηση. Έστω η συνάρτηση στο Σχήμα 6.3 (πριονωτός παλμός, εξίσωση (6.7))



Σχήμα 6.3: Πριονωτός παλμός, εξίσωση (6.7)

$$f(x) = (x \bmod 1) - \frac{1}{2}. \quad (6.7)$$

Η έκφραση $x \bmod 1$ σημαίνει ότι προσθέτουμε ή αφαιρούμε το 1 στο x όσες φορές χρειάζεται ώστε το αποτέλεσμα να είναι στο διάστημα $[0, 1)$.

Η συνάρτηση είναι περιοδική με περίοδο $L = 1$, συνεχής με πεπερασμένες ασυνέχειες στα σημεία $x = m$ ($m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). Το ολοκλήρωμα της $|f(x)|$ στο $[0, 1)$ ορίζεται και είναι πεπερασμένο:

$$\int_0^1 |f(x)| \, dx = \frac{1}{4}.$$

Η $f(x)$ ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet οπότε μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier. Επιπλέον, είναι αντισυμμετρική ως προς το $x = 1/2$ (το μέσο μιας περιόδου) οπότε η σειρά Fourier έχει μόνο τους όρους των ημιτόνων:

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(2m\pi x).$$

Οι συντελεστές B_m υπολογίζονται από τον τύπο (6.4β):

$$B_m = 2 \int_0^1 \sin(2m\pi x) \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = -\frac{1}{m\pi}, \quad m > 0. \quad (6.8)$$

Οι συντελεστές A_m είναι 0.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, ο συγκεκριμένος πριονωτός παλμός αναπτύσσεται σε σειρά Fourier ως εξής

$$f(x) = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m\pi x)}{m\pi}. \quad (6.9)$$

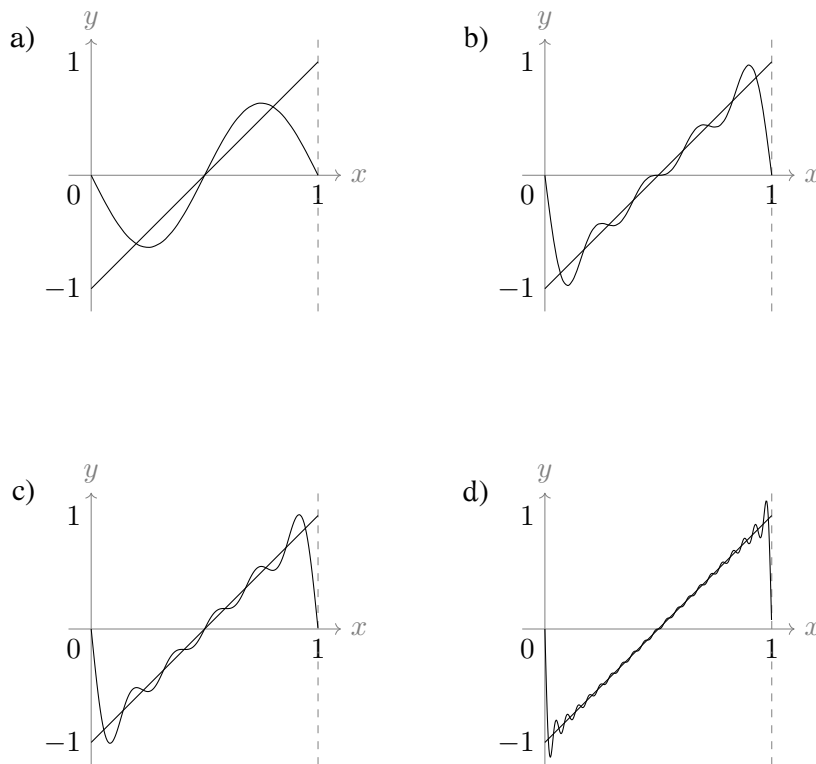
Παρατηρήστε ότι όταν το x παίρνει ακέραιες τιμές, δηλαδή στα σημεία ασυνέχειας της $f(x)$, η σειρά Fourier είναι συνεχής και έχει τιμή 0, όσο το ημίαθροισμα του δεξιού και του αριστερού ορίου της $f(x)$ σε αυτά τα σημεία.

6.4 Φαινόμενο Gibbs

Στο Σχήμα 6.4 βλέπουμε πώς προσεγγίζει τον τριγωνικό παλμό της εξίσωσης (6.7) η σειρά Fourier της εξίσωσης (6.9) με M όρους, δηλαδή το μερικό άθροισμα

$$f_M(x) = - \sum_{m=1}^M \frac{\sin(2m\pi x)}{m\pi}, \quad (6.10)$$

για διάφορες τιμές του M . Παρατηρήστε ότι η σειρά Fourier παρουσιάζει ταλαντώσεις πλησιάζοντας σε σημείο ασυνέχειας της συνάρτησης, ανεξάρτητα από το πλήθος των όρων που θα λάβουμε υπόψη. Αυτή η συμπεριφορά είναι ανεξάρτητη από τη συνάρτηση που προσεγγίζεται και ονομάζεται φαινόμενο Gibbs. Λόγω των ταλαντώσεων η σειρά μπορεί να ξεπεράσει τη μέγιστη/ελάχιστη τιμή της συνάρτησης και να παρουσιάσει «αφύσικο» ακρότατο.



Σχήμα 6.4: Γραφική παράσταση της συνάρτησης $f_M(x)$ (εξίσωση (6.10)) για a) $M = 1$, b) $M = 4$, c) $M = 5$, d) $M = 20$

6.5 Παραγωγή σειράς Fourier από άλλη

6.5.1 Ολοκλήρωση

Ας υπολογίσουμε το αόριστο ολοκλήρωμα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$:

$$\begin{aligned} \int f(x) dx + c &= \int \frac{A_0}{2} dx + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \int \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \int \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) dx \\ &= \frac{A_0}{2} x + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{L}{2m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{L}{2m\pi} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right). \end{aligned}$$

Η ποσότητα c είναι η σταθερά ολοκλήρωσης. Παρατηρήστε ότι το δεξί μέλος περιέχει τον όρο $A_0 x/2$ που, αν $A_0 \neq 0$, δεν είναι περιοδικός. Η σειρά στο δεξί μέλος δεν αποτελεί σειρά Fourier. Όμως

$$\int f(x) dx - \frac{A_0}{2} x + c = \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{L}{2m\pi} \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) - \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{L}{2m\pi} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right).$$

Από την παραπάνω σχέση προκύπτει η σειρά Fourier της

$$F(x) = \int \left(f(x) - \frac{A_0}{2} \right) dx$$

με προσέγγιση μιας προσθετικής σταθεράς c , η οποία μπορεί να προσδιοριστεί από τις τιμές της $F(x)$ και της σειράς Fourier σε συγκεκριμένο σημείο.

Παράδειγμα

Το αόριστο ολοκλήρωμα του τετραγωνικού παλμού, (6.5), είναι

$$\int f(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \leq x < 1, \\ x, & 1 \leq x < 2, \end{cases}$$

με επανάληψη έξω από το διάστημα $[0, 2)$ ή γενικά

$$\int f(x) dx = \begin{cases} 1, & 0 \leq x - 2m < 1, \\ x - 2m, & 1 \leq x - 2m < 2, \end{cases}$$

για το διάστημα $[2m, 2m + 2)$ με οποιοδήποτε ακέραιο m .

Το αόριστο ολοκλήρωμα της αντίστοιχης σειράς Fourier, (6.6), είναι

$$\int \left[\frac{1}{2} - 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\sin((2j+1)\pi x)}{(2j+1)\pi} \right] dx = \frac{x}{2} + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\pi x)}{((2j+1)\pi)^2}.$$

Τα δύο ολοκληρώματα διαφέρουν κατά μια προσθετική σταθερά. Η τιμή του πρώτου στο $x = 1/2$ είναι 1· η τιμή του δεύτερου είναι $1/4$. Άρα

$$\int f(x) dx - \frac{3}{4} = \frac{x}{2} + 2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\pi x)}{((2j+1)\pi)^2}.$$

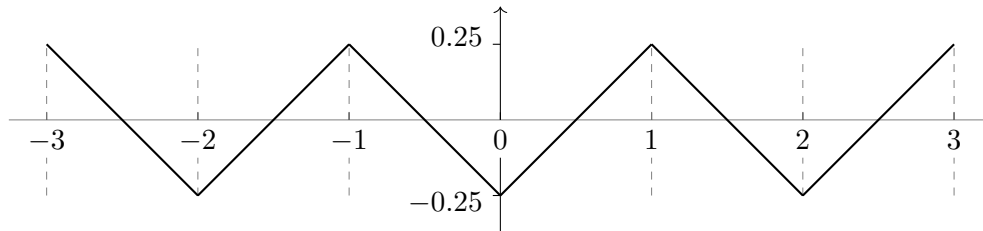
Συνεπώς, η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$\int f(x) dx - \frac{3}{4} - \frac{x}{2} = \begin{cases} (1-2x)/4, & 0 \leq x < 1, \\ (2x-3)/4, & 1 \leq x < 2, \end{cases} \quad (6.11)$$

που επαναλαμβάνεται περιοδικά και δίνεται γραφικά στο Σχήμα 6.5, είναι

$$2 \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\cos((2j+1)\pi x)}{((2j+1)\pi)^2}.$$

Μπορείτε να το επαληθεύσετε υπολογίζοντας τη σειρά Fourier της (6.11);



Σχήμα 6.5: Τριγωνικός παλμός, εξίσωση (6.11)

6.5.2 Παραγωγή

Αν έχουμε υπολογίσει τη σειρά Fourier, (6.3), για μια περιοδική συνάρτηση $f(x)$ με περίοδο L , μπορούμε να την παραγωγίσουμε ως προς x , όρο-όρο:

$$- \sum_{m=1}^{\infty} A_m \frac{2m\pi}{L} \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \frac{2m\pi}{L} \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right).$$

Η σειρά που προκύπτει, περιέχει στη γενική περίπτωση, άπειρους όρους ημιτόνων και συνημιτόνων κατάλληλης μορφής, αποτελεί τη σειρά Fourier της $f'(x)$ και θα συγκλίνει σε αυτή, με την προϋπόθεση ότι η παράγωγος είναι περιοδική και ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet. Θα δούμε ένα παράδειγμα σε επόμενη παράγραφο.

6.6 Εναλλακτική θεώρηση της σειράς Fourier

Το σύνολο των συναρτήσεων μίας πραγματικής μεταβλητής, που είναι περιοδικές με περίοδο L και ικανοποιούν τις συνθήκες Dirichlet, εφοδιασμένο με τις

γνωστές πράξεις της πρόσθεσης συναρτήσεων και του πολλαπλασιασμού αριθμού με συνάρτηση, αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο. Σε αυτόν, μπορούμε να ορίσουμε το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων $\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle$ ως εξής:

$$\langle \mathbf{f} | \mathbf{g} \rangle \equiv \frac{2}{L} \int_0^L f(x)^* g(x) dx .$$

Ο συγκεκριμένος ορισμός έχει τις ιδιότητες στις εξισώσεις (3.3).

Μια βάση του χώρου αυτού, στην περίπτωση που οι συναρτήσεις είναι πραγματικές, είναι το σύνολο

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right), \cos\left(\frac{2\pi 2x}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi 2x}{L}\right), \dots, \right. \\ \left. \cos\left(\frac{2\pi mx}{L}\right), \sin\left(\frac{2\pi mx}{L}\right), \dots \right\}$$

με άπειρα διανύσματα που είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Με τη βοήθεια των ολοκληρωμάτων στο Παράρτημα Α' προκύπτει ότι η βάση είναι ορθοκανονική. Οι συντελεστές του αναπτύγματος οποιουδήποτε μέλους του διανυσματικού χώρου σε αυτή τη βάση δίνονται, σύμφωνα με την (3.12), από τις σχέσεις

$$\begin{aligned} a_0 &= \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}} \middle| \mathbf{f} \right\rangle , \\ a_m &= \left\langle \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \middle| \mathbf{f} \right\rangle , \quad m > 0 , \\ b_m &= \left\langle \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) \middle| \mathbf{f} \right\rangle , \quad m > 0 . \end{aligned}$$

Το ανάπτυγμα είναι

$$|\mathbf{f}\rangle = a_0 \frac{1}{\sqrt{2}} + \sum_{m=1}^{\infty} a_m \cos\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin\left(\frac{2m\pi x}{L}\right) ,$$

δηλαδή ουσιαστικά η σειρά Fourier: οι συντελεστές της είναι $A_0 = \sqrt{2}a_0$, $A_m = a_m$, $B_m = b_m$, $m \geq 1$.

6.6.1 Ταυτότητα Parseval

Το εσωτερικό γινόμενο δύο περιοδικών συναρτήσεων $|\mathbf{f}^{(1)}\rangle$ και $|\mathbf{f}^{(2)}\rangle$, που είναι μέλη του χώρου, μπορεί να εκφραστεί με τους συντελεστές αυτών στην ορθοκανονική βάση, $\{a_0^{(1)}, a_1^{(1)}, \dots, b_1^{(1)}, \dots\}$ και $\{a_0^{(2)}, a_1^{(2)}, \dots, b_1^{(2)}, \dots\}$, σύμφωνα με την (3.14):

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{f}^{(1)} | \mathbf{f}^{(2)} \rangle &= a_0^{(1)} a_0^{(2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(a_m^{(1)} a_m^{(2)} + b_m^{(1)} b_m^{(2)} \right) \\ &= \frac{1}{2} A_0^{(1)} A_0^{(2)} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(A_m^{(1)} A_m^{(2)} + B_m^{(1)} B_m^{(2)} \right) . \end{aligned}$$

Στην τελευταία έκφραση εμφανίζονται οι συντελεστές Fourier των δύο συναρτήσεων.

Αν $|\mathbf{f}^{(1)}\rangle = |\mathbf{f}^{(2)}\rangle = |\mathbf{f}\rangle$ η τελευταία σχέση γίνεται

$$\frac{2}{L} \int_0^L f(x)^2 dx = \frac{A_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^2 + B_m^2) . \quad (6.12)$$

Η εξίσωση αυτή είναι η ταυτότητα Parseval.

Η μέση τιμή μιας συνάρτησης $f(x)$ σε ένα διάστημα $[a, b]$ συμβολίζεται με $\langle f \rangle$ (ή με \bar{f}) και ορίζεται από τη σχέση

$$\langle f \rangle \equiv \frac{\int_a^b f(x) dx}{\int_a^b dx} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx .$$

Σύμφωνα με την ταυτότητα Parseval, η μέση τιμή της συνάρτησης $f(x)^2$ στο $[0, L]$ μπορεί να υπολογιστεί από τους συντελεστές Fourier της $f(x)$:

$$\langle f^2 \rangle \equiv \frac{1}{L} \int_0^L f(x)^2 dx = \frac{A_0^2}{4} + \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^2 + B_m^2) .$$

Παράδειγμα

ΑΣ υπολογίσουμε την ταυτότητα Parseval για τη συνάρτηση $f(x) = x - 1/2$ που ορίζεται στο διάστημα $[0, 1]$ και επαναλαμβάνεται περιοδικά έξω από αυτό, Σχήμα 6.3, με περίοδο $L = 1$, δηλαδή του προιονωτού παλμού (εξίσωση (6.7)).

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης (6.12) δίνει

$$\frac{2}{L} \int_0^L f(x)^2 dx = 2 \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{1}{6} .$$

Βρήκαμε προηγουμένως τους συντελεστές Fourier για τη συγκεκριμένη συνάρτηση (εξίσωση (6.8)). Το άθροισμα στο δεξί μέλος της εξίσωσης (6.12) είναι

$$\frac{A_0^2}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} (A_m^2 + B_m^2) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2 \pi^2} .$$

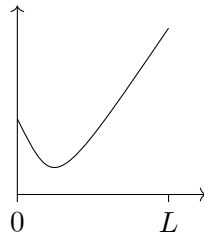
Η ταυτότητα Parseval γίνεται

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} \Rightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots = \frac{\pi^2}{6} .$$

6.7 Σειρά Fourier για συναρτήσεις σε πεπερασμένο διάστημα

Η συνάρτηση $f(x)$ δεν είναι απαραίτητο να είναι περιοδική για να αναπτυχθεί σε σειρά Fourier· μπορεί να ορίζεται και να ικανοποιεί τις συνθήκες Dirichlet σε ένα πεπερασμένο διάστημα μήκους L και να την επεκτείνουμε πέρα από αυτό. Κατόπιν, μπορούμε να υπολογίσουμε το ανάπτυγμα Fourier.

Ας εξετάσουμε τη συνάρτηση στο Σχήμα 6.6. Θα παρουσιάσουμε τις δυνατότητες

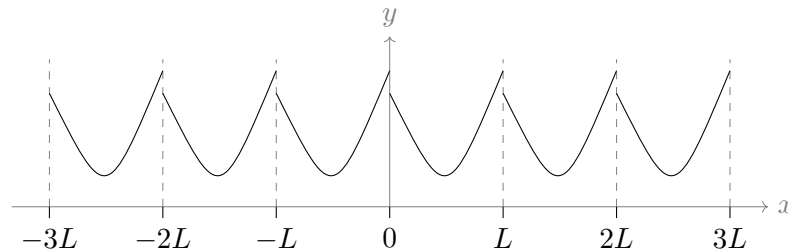


Σχήμα 6.6: Μη περιοδική συνάρτηση στο $[0, L]$

που έχουμε για την επέκτασή της έξω από το πεδίο ορισμού της.

6.7.1 Μετατόπιση

Μπορούμε να την επαναλάβουμε αυτούσια στα διαστήματα $[L, 2L)$, $[2L, 3L)$, κλπ. όπως και στα $[-L, 0)$, $[-2L, L)$, κλπ. όπως στο Σχήμα 6.7. Δημιουργούμε επο-

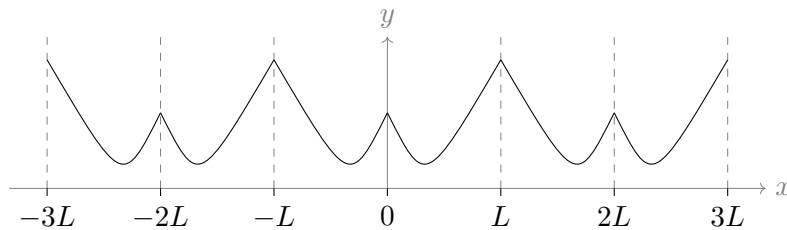


Σχήμα 6.7: Επέκταση μη περιοδικής συνάρτησης με επανάληψη

μένως μια νέα συνάρτηση που είναι περιοδική με περίοδο L . Προσέξτε ότι αν η μη περιοδική συνάρτηση έχει διαφορετικές τιμές στα άκρα του διαστήματος $0, L$, η επέκτασή της με αυτό τον τρόπο δημιουργεί σημεία πεπερασμένης ασυνέχειας (τα $0, \pm L, \pm 2L \dots$). Η σειρά Fourier ορίζεται για τη νέα συνάρτηση και συγκλίνει στην αρχική μας στο πεδίο ορισμού της, το $[0, L)$, εκτός από τα σημεία ασυνέχειας σε αυτό (0 και L). Επομένως, αν η μη περιοδική συνάρτηση $f(x)$ που ορίζεται στο $[0, L)$ ικανοποιεί τη σχέση $\lim_{x \rightarrow L} f(x) \neq f(0)$, καλό είναι να αποφεύγουμε αυτό τον τρόπο επέκτασης.

6.7.2 Κατοπτρισμός ως προς ευθείες

Δεύτερος τρόπος επέκτασης μιας μη περιοδικής συνάρτησης $f(x)$ είναι με κατοπτρισμό ως προς τις ευθείες $x = 0$, $x = \pm L$, $x = \pm 2L$ κλπ., δηλαδή, στο διάστημα $[-L, 0)$ έχουμε $f(x) = f(-x)$, στο διάστημα $[L, 2L)$ έχουμε $f(x) = f(2L - x)$, κλπ., όπως στο Σχήμα 6.8: Με αυτή την επιλογή επέκτασης δημιουργούμε μια νέα συ-

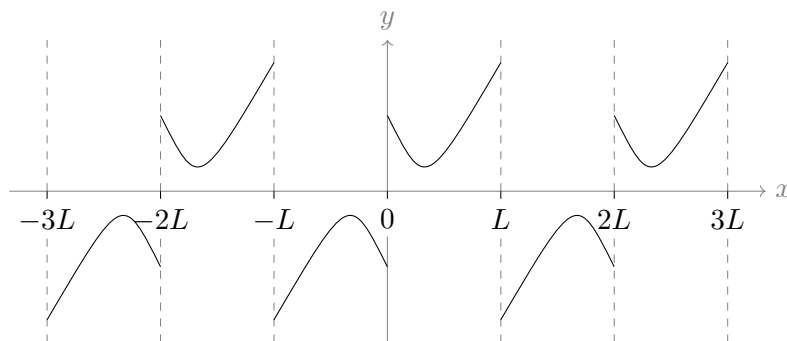


Σχήμα 6.8: Επέκταση μη περιοδικής συνάρτησης με κατοπτρισμό

νάρτηση που είναι περιοδική με περίοδο $2L$ και δεν εισάγουμε σημεία ασυνέχειας. Επιπλέον, η νέα συνάρτηση είναι συμμετρική, οπότε η σειρά Fourier για αυτή δεν θα περιλαμβάνει όρους με ημίτονα. Το ανάπτυγμα Fourier που θα προκύψει, συγκλίνει στην αρχική μας συνάρτηση στο διάστημα $[0, L)$.

6.7.3 Κατοπτρισμός ως προς σημεία

Τρίτος τρόπος επέκτασης μιας μη περιοδικής συνάρτησης $f(x)$ είναι με κατοπτρισμό ως προς τα σημεία $(0, 0)$, $(\pm L, 0)$, $(\pm 2L, 0)$, κλπ. Αυτό σημαίνει ότι στο διάστημα $[-L, 0)$ θέτουμε $f(x) = -f(-x)$ και σε οποιοδήποτε άλλο σημείο έξω από το $[-L, L)$ θέτουμε $f(x + 2L) = f(x)$. Με αυτή την επιλογή επέκτασης δημιουργούμε μια νέα συνάρτηση που είναι περιοδική με περίοδο $2L$ (Σχήμα 6.9) και αντισυμμετρική. Παρατηρήστε ότι αν η $f(x)$ στα άκρα του διαστήματος ορισμού



Σχήμα 6.9: Επέκταση μη περιοδικής συνάρτησης με ανάκλαση ως προς σημεία

της δεν έχει τιμή (ή όριο) το 0, ο συγκεκριμένος τρόπος επέκτασής της δημιουργεί σημεία πεπερασμένης ασυνέχειας. Η σειρά Fourier της περιοδικής επέκτασης θα

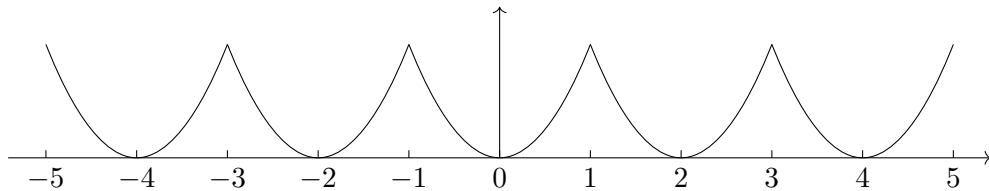
περιέχει μόνο όρους με ημίτονα και θα συγκλίνει στην $f(x)$ στο πεδίο ορισμού της εκτός από τα σημεία ασυνέχειας, είτε αυτά που προκαλέσαμε με την επέκταση είτε αυτά που έχει εγγενώς η συνάρτηση.

6.7.4 Παράδειγμα

Ας υπολογίσουμε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = x^2$ που ορίζεται στο διάστημα $[0, 1)$.

Κατοπτρισμός ως προς την ευθεία $y = 0$

Επιλέγουμε καταρχάς να επεκτείνουμε τη συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 0)$ συμμετρικά ώστε να μην εισαχθούν σημεία ασυνέχειας. Εκεί $f(x) = f(-x) = x^2$. Κατόπιν, επαναλαμβάνουμε τη συνάρτηση $g(x) = x^2$ με $-1 \leq x < 1$ έξω από το διάστημα $[-1, 1)$, ώστε να κατασκευάσουμε συνάρτηση περιοδική με περίοδο 2 (Σχήμα 6.10).



Σχήμα 6.10: Επέκταση της $f(x) = x^2$ συμμετρικά

Η νέα συνάρτηση, $g(x)$, είναι συμμετρική σε διάστημα μιας περιόδου, $[-1, 1)$, ως προς το μέσο του, οπότε οι συντελεστές B_m στην εξίσωση (6.4β') είναι 0. Για τους A_m έχουμε

$$A_m = \int_{-1}^1 \cos(m\pi x) x^2 dx, \quad m \geq 0.$$

Το διάστημα ολοκλήρωσης επελέγη να είναι το $[-1, 1)$. Όπως αναφέραμε, αρκεί να έχει μήκος μία περίοδο. Ο υπολογισμός των A_m δίνει μετά από πράξεις,

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_m = (-1)^m \frac{4}{m^2 \pi^2}, \quad m > 0.$$

Επομένως,

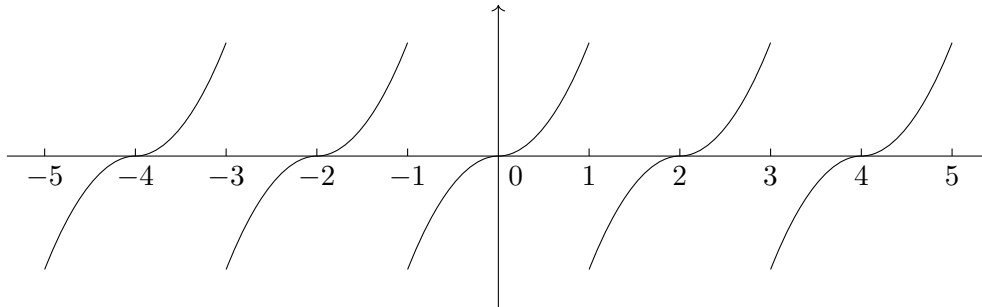
$$f(x) = \frac{1}{3} + 4 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m \cos(m\pi x)}{m^2 \pi^2}, \quad 0 \leq x < 1.$$

Ποιες τιμές έχει η σειρά Fourier στα $x = 0$ και $x = 1$;

Κατοπτρισμός ως προς την αρχή

Ας επεκτείνουμε τώρα τη συνάρτηση στο διάστημα $[-1, 0)$ αντισυμμετρικά με κατοπτρισμό ως προς το σημείο $(0, 0)$. Στο $[-1, 0]$ θεωρούμε ότι $f(x) = -f(-x) =$

$-x^2$. Κατόπιν, επαναλαμβάνουμε τη νέα συνάρτηση έξω από το διάστημα $[-1, 1)$, ώστε να κατασκευάσουμε συνάρτηση περιοδική με περίοδο 2 (Σχήμα 6.11). Καθώς $f(0) = 0$ το $x = 0$ και το $\pm 2, \pm 4, \dots$ δεν είναι σημεία ασυνέχειας. Τα $x = \pm 1, \pm 3 \dots$ είναι.



Σχήμα 6.11: Επέκταση της $f(x) = x^2$ αντισυμμετρικά

Η νέα συνάρτηση είναι αντισυμμετρική σε διάστημα μιας περιόδου, $[-1, 1)$, ως προς το μέσο του, οπότε οι συντελεστές A_m είναι 0. Για τους B_m έχουμε

$$B_m = 2 \int_0^1 \sin(m\pi x) x^2 dx, \quad m > 0.$$

Μετά από πράξεις,

$$\begin{aligned} B_{2k} &= -\frac{1}{k\pi} \quad k > 0, \\ B_{2k+1} &= \frac{1}{(k+1/2)\pi} - \frac{1}{(k+1/2)^3\pi^3} \quad k > 0. \end{aligned}$$

Επομένως,

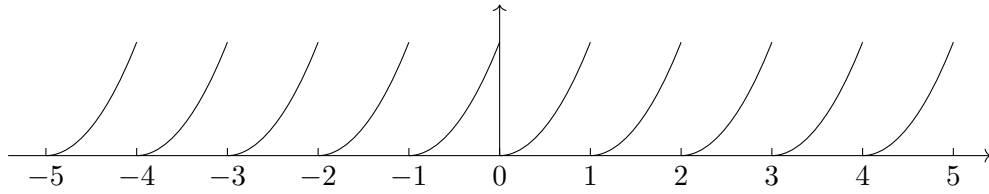
$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k} \sin(2k\pi x) + \sum_{k=1}^{\infty} B_{2k+1} \sin((2k+1)\pi x), \quad 0 \leq x < 1.$$

Μετατόπιση

Ας επιλέξουμε να επαναλάβουμε την $f(x) = x^2$ αυτούσια έξω από το διάστημα $[0, 1)$ ώστε να δημιουργήσουμε περιοδική συνάρτηση με περίοδο 1. Η συγκεκριμένη επιλογή εισάγει τα σημεία ασυνέχειας $x = j$ με j οποιοδήποτε ακέραιο. Σε αυτά, η σειρά Fourier δεν θα συγκλίνει στην περιοδική συνάρτηση.

Ο υπολογισμός των συντελεστών A_m από την εξίσωση (6.4α') δίνει

$$A_0 = \frac{2}{3}, \quad A_m = \frac{1}{m^2\pi^2}, \quad m > 0.$$

Σχήμα 6.12: Επέκταση της $f(x) = x^2$ με επανάληψη

Οι συντελεστές B_m της σχέσης (6.4β') είναι

$$B_m = -\frac{1}{m\pi}, \quad m > 0.$$

Επομένως, η σειρά Fourier είναι

$$\frac{1}{3} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\cos(2m\pi x)}{m^2\pi^2} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m\pi x)}{m\pi}.$$

και συγκλίνει στην $f(x) = x^2$ στο διάστημα $(0, 1)$ (παραλείπουμε το σημείο $x = 0$ που είναι σημείο ασυνέχειας).

Παρατηρήστε ότι αν παραγωγίσουμε την $f(x)$ και τη σειρά Fourier έχουμε

$$2x = -2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m\pi x)}{m\pi} - 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\pi x).$$

Επομένως,

$$x - \frac{1}{2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin(2m\pi x)}{m\pi} - \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\pi x) - \frac{1}{2}.$$

Συγκρίνετε την τελευταία σχέση με τη σειρά Fourier του πριονωτού παλμού, (6.9). Ταυτίζονται αν για οποιοδήποτε σημείο του $(0, 1)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\pi x) &= -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2 \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\pi x) + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\pi x) + \sum_{m=-1}^{-\infty} \cos(-2m\pi x) + \cos(2\pi x \cdot 0) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m\pi x) + \sum_{m=-1}^{-\infty} \cos(2m\pi x) = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{m=-\infty}^{\infty} \cos(2m\pi x) = 0. \end{aligned}$$

Πράγματι ισχύει, αλλά δεν είναι του παρόντος η σχετική απόδειξη²³.

Παρατήρηση: Όπως είδαμε στα παραδείγματα, η ίδια μη περιοδική συνάρτηση, στο ίδιο διάστημα, μπορεί να έχει σειρές Fourier με διαφορετική μορφή, ανάλογα με τον τρόπο επέκτασής της. Βέβαια, η τιμή των διαφορών σειρών στο ίδιο σημείο είναι η ίδια.

6.8 Μιγαδική μορφή της σειράς Fourier

Η σειρά Fourier μπορεί να γραφεί σε πιο συνοπτική μορφή αν θυμηθούμε ότι

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta .$$

Εύκολα προκύπτει ότι

$$\cos \theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} , \quad \sin \theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} .$$

Η αντικατάσταση των παραπάνω σχέσεων στην (6.3) δίνει τη σειρά Fourier στην εκθετική μορφή

$$f(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_m \exp \left(i \frac{2m\pi x}{L} \right) , \quad (6.13)$$

όπου οι μιγαδικοί, πλέον, συντελεστές C_m συνδέονται με τους πραγματικούς A_m , B_m με τις σχέσεις

$$C_0 = \frac{A_0}{2} , \quad (6.14\alpha')$$

$$C_m = \frac{A_m - iB_m}{2} , \quad m > 0 , \quad (6.14\beta')$$

$$C_{-m} = \frac{A_m + iB_m}{2} = C_m^* , \quad m > 0 . \quad (6.14\gamma')$$

²σε οποιοδήποτε σημείο x το τελευταίο άθροισμα είναι $2\pi\delta(x)$. Είναι 0 για $x \neq 0$. Η συνάρτηση $\delta(x)$ παρουσιάζεται στο §6.11.

³Προσέξτε ότι

$$\sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\pi x) = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \cos(2m\pi x) = 1 - \frac{1}{2} \Leftrightarrow \sum_{m=0}^{\infty} \cos(2m\pi x) = \frac{1}{2} .$$

Όταν $x = 1/2$, η τελευταία έκφραση γίνεται

$$\sum_{m=0}^{\infty} \cos(m\pi) = \frac{1}{2} \Rightarrow \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m = \frac{1}{2} \Rightarrow 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots = \frac{1}{2} .$$

Η σειρά στο αριστερό μέλος είναι γνωστή ως σειρά Grandi, και η τιμή της, με συγκεκριμένο ορισμό για την άθροιση, είναι όντως $1/2$, όσο παράδοξο και αν φαίνεται.

Πολύ εύκολα προκύπτει και η αντίστροφη σχέση που προσδιορίζει τα A_m, B_m όταν είναι γνωστά τα C_m :

$$A_m = C_m + C_{-m}, \quad m \geq 0, \quad (6.15\alpha')$$

$$B_m = i(C_m - C_{-m}), \quad m > 0. \quad (6.15\beta')$$

Συνδυάζοντας τις (6.4α'), (6.4β'), (6.14) προκύπτει ότι

$$C_m = \frac{1}{L} \int_0^L \exp\left(-i \frac{2m\pi x}{L}\right) f(x) dx, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.16)$$

Με τους μιγαδικούς συντελεστές Fourier η ταυτότητα Parseval (εξίσωση (6.12)) γίνεται

$$\begin{aligned} \langle f | f \rangle &\equiv \frac{2}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx = 2C_0^2 + 4 \sum_{m=1}^{\infty} (C_m^* C_m) \Rightarrow \\ \frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx &= |C_0|^2 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} |C_m|^2. \end{aligned}$$

Καθώς $|C_{-m}| = |C_m|$, η προηγούμενη σχέση καταλήγει στην ταυτότητα Parseval με τους μιγαδικούς συντελεστές

$$\frac{1}{L} \int_0^L |f(x)|^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_m|^2. \quad (6.17)$$

Άμεση συνέπεια της σχέσης αυτής είναι η έκφραση για τη μέση τιμή της ποσότητας $|f(x)|^2$:

$$\langle |f(x)|^2 \rangle = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_m|^2.$$

Παράδειγμα

Η μιγαδική μορφή της σειράς Fourier για τον πριονωτό παλμό, (6.7), στο διάστημα $[0, 1)$, έχει συντελεστές

$$C_0 = \int_0^1 \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = 0, \quad (6.18\alpha')$$

$$C_m = \int_0^1 e^{-i2m\pi x} \left(x - \frac{1}{2}\right) dx = \frac{i}{2m\pi}, \quad m = \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.18\beta')$$

Μπορείτε εύκολα να επαληθεύσετε ότι $C_{-m} = C_m^*$ και ότι $C_m \equiv (A_m - iB_m)/2$ για τους συντελεστές στην (6.8).

Επομένως, η μιγαδική σειρά Fourier που προκύπτει από την (6.13) είναι

$$- \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{e^{i2m\pi x}}{i2m\pi} .$$

Η ταυτότητα Parseval δίνει

$$\int_0^1 f(x)^2 dx = \sum_{m=-\infty}^{\infty} |C_m|^2 = \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} \frac{1}{4m^2\pi^2} = \frac{1}{2\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^2} .$$

6.9 Διακριτός μετασχηματισμός Fourier (DFT)

Οι συντελεστές A_m , B_m (ή C_m) της σειράς Fourier μπορούν να υπολογιστούν από τα αντίστοιχα ολοκληρώματα, είτε ακριβώς (με αναλυτικό υπολογισμό) είτε προσεγγιστικά με αριθμητικές μεθόδους. Στην περίπτωση που από τη συνάρτηση $f(x)$ έχουμε μόνο κάποιες τιμές της σε συγκεκριμένα σημεία μπορούμε να έχουμε μόνο προσεγγιστικό υπολογισμό των συντελεστών.

Ας εφαρμόσουμε τον προσεγγιστικό υπολογισμό ολοκληρώματος από άθροισμα για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα στην (6.16): Χωρίζουμε το διάστημα ολοκλήρωσης $[0, L]$ σε n ίσα διαστήματα μήκους $h = L/n$ το καθένα. Τα $n+1$ σημεία στα οποία θα υπολογίσουμε την ολοκληρωτέα ποσότητα είναι τα $x_j = jh$, $j = 0, 1, \dots, n$. Η διακριτοποίηση της ολοκληρωτέας ποσότητας δίνει τη σχέση

$$C_m \approx \frac{h}{L} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi jh}{L}\right) f(jh) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi j}{n}\right) f_j$$

για τους συντελεστές της σειράς Fourier, όπου $f_j \equiv f(jh)$. Στην ίδια έκφραση καταλήγουμε και στην περίπτωση που οι τιμές της συνάρτησης είναι γνωστές μόνο σε n ισαπέχοντα σημεία (π.χ. από πειραματικές μετρήσεις).

Η σχέση

$$\bar{C}_m = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi j}{n}\right) f_j, \quad m = 0, 1, \dots, n-1, \quad (6.19)$$

αποτελεί το διακριτό μετασχηματισμό Fourier (DFT) της διακριτοποιημένης συνάρτησης $f(x)$. Οι συντελεστές \bar{C}_m που ορίζονται από αυτή τη σχέση προσεγγίζουν τους συντελεστές C_m στη σειρά Fourier.

Παρατηρήστε ότι η διακριτοποίηση διατηρεί μόνο n συντελεστές \bar{C}_m καθώς ισχύει η σχέση

$$\bar{C}_{m+n} \equiv \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i \frac{2(m+n)\pi j}{n}\right) f_j = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi j}{n}\right) f_j \equiv \bar{C}_m. \quad (6.20)$$

Ο αντίστροφος διακριτός μετασχηματισμός Fourier ορίζεται ως

$$\bar{f}_j = \sum_{m=0}^{n-1} \exp\left(i \frac{2j\pi m}{n}\right) \bar{C}_m, \quad j = 0, 1, \dots, n-1. \quad (6.21)$$

και προσεγγίζει τις τιμές f_j της συνάρτησης.⁴

Η μέση τιμή της διακριτοποιημένης συνάρτησης $|f(x)|^2$ είναι προφανώς

$$\langle f^2 \rangle = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f_j|^2.$$

Η ταυτότητα Parseval γίνεται

$$\frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} |f_j|^2 = \sum_{m=0}^{n-1} |\bar{C}_m|^2. \quad (6.22)$$

Μπορεί να αποδειχθεί αν αντικαταστήσουμε στο δεξί της μέλος την έκφραση για τα \bar{C}_m από τη σχέση (6.19).

6.9.1 Γρήγορος υπολογισμός του DFT – Αλγόριθμος FFT

Υπάρχουν διάφοροι αλγόριθμοι που μπορούν να υπολογίσουν ταυτόχρονα όλους τους συντελεστές Fourier, ιδιαίτερα γρήγορα, εκμεταλλευόμενοι τις συμμετρίες που εμφανίζονται, χωρίς να χρειάζεται να υπολογίσουν κάθε άθροισμα ξεχωριστά. Παρακάτω θα δούμε τον πιο βασικό.

Ας υποθέσουμε ότι το πλήθος n των όρων στο άθροισμα της (6.19) είναι δύναμη του 2. Τότε, ο υπολογισμός του μπορεί να γίνει χωρίζοντάς το σε αθροίσματα των όρων με άρτιο και περιττό δείκτη j :

$$\begin{aligned} & \sum_{j=0}^{n-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi j}{n}\right) f_j \\ &= \sum_{r=0}^{n/2-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi 2r}{n}\right) f_{2r} + \sum_{r=0}^{n/2-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi (2r+1)}{n}\right) f_{2r+1} \\ &= \sum_{r=0}^{n/2-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi r}{n/2}\right) f_{2r} + \exp\left(-i \frac{2m\pi}{n}\right) \sum_{r=0}^{n/2-1} \exp\left(-i \frac{2m\pi r}{n/2}\right) f_{2r+1}. \end{aligned}$$

⁴Ο παράγοντας $1/n$ που πολλαπλασιάζει το άθροισμα στην (6.19) είναι θέμα σύμβασης. Το γινόμενο των συντελεστών πριν τα αθροίσματα στις εξισώσεις (6.19) και (6.21) πρέπει να είναι $1/n$, οι ακριβείς τιμές τους είναι απροσδιόριστες. Για λόγους συμμετρίας των σχέσεων (6.19, 6.21), οι μετασχηματισμοί μπορούν να οριστούν με ένα παράγοντα $1/\sqrt{n}$ που πολλαπλασιάζει το άθροισμα του καθενός.

Παρατηρήστε ότι οι όροι

$$\sum_{r=0}^{n/2-1} \exp\left(-i\frac{2m\pi r}{n/2}\right) f_{2r} \quad \text{και} \quad \sum_{r=0}^{n/2-1} \exp\left(-i\frac{2m\pi r}{n/2}\right) f_{2r+1}$$

είναι ουσιαστικά οι διακριτοί μετασχηματισμοί Fourier για δύο σύνολα τιμών της διακριτοποιημένης $f(x)$: το ένα αποτελείται από τα σημεία f_j με άρτιο δείκτη και το άλλο από τα σημεία με περιττό δείκτη. Το πλήθος των σημείων σε κάθε σύνολο είναι $n/2$.

Ας συμβολίσουμε με \bar{C}_m^e , \bar{C}_m^o τους συντελεστές στους δύο μετασχηματισμούς Fourier, τον «άρτιο» και τον «περιττό» αντίστοιχα. Η προηγούμενη σχέση δίνει

$$\bar{C}_m = \frac{1}{n} \left(\frac{n}{2} \bar{C}_m^e + \frac{n}{2} \exp\left(-i\frac{2m\pi}{n}\right) \bar{C}_m^o \right) = \frac{1}{2} \left(\bar{C}_m^e + e^{-i2m\pi/n} \bar{C}_m^o \right), \quad (6.23)$$

για $m = 0, 1, \dots, n-1$.

Παρατηρήστε ότι, λόγω της (6.20), έχουμε $\bar{C}_{m+n/2}^{e,o} = \bar{C}_m^{e,o}$. Επίσης ισχύει ότι

$$\exp\left(-i\frac{2(m+n/2)\pi}{n}\right) = -\exp\left(-i\frac{2m\pi}{n}\right).$$

Επομένως, η σχέση (6.23) μπορεί να ξαναγραφεί ως εξής

$$\bar{C}_m = \frac{1}{2} \left(\bar{C}_m^e + e^{-i2m\pi/n} \bar{C}_m^o \right), \quad (6.24\alpha')$$

$$\bar{C}_{m+n/2} = \frac{1}{2} \left(\bar{C}_m^e - e^{-i2m\pi/n} \bar{C}_m^o \right), \quad (6.24\beta')$$

για $m = 0, 1, \dots, n/2 - 1$.

Η εξίσωση (6.23) (ή, ισοδύναμα, η εξίσωση (6.24)) εκφράζει ότι ο υπολογισμός του DFT n σημείων απαιτεί τον υπολογισμό δύο DFT των $n/2$ σημείων ο καθένας. Η συγκεκριμένη ανάλυση μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τον υπολογισμό των νέων DFT αναπτύσσοντάς τους σε τέσσερις συνολικά DFT των $n/4$ σημείων ο καθένας. Η διαδικασία αυτή επαναλαμβάνεται έως ότου καταλήξουμε σε n DFT του ενός σημείου ο καθένας. Ο υπολογισμός του DFT ενός σημείου είναι πολύ εύκολος: από τη (6.19) προκύπτει ότι ο (μοναδικός) συντελεστής της σειράς Fourier είναι ίσος με την τιμή της συνάρτησης στο σημείο.

Η επαναληπτική διαδικασία που περιγράψαμε είναι η βάση των αλγορίθμων Fast Fourier Transform (FFT). Σε αυτή, ο συντελεστής \bar{C}_m απαιτεί για τον υπολογισμό του συνολικά $2 \log_2 n$ μιγαδικούς πολλαπλασιασμούς. Επομένως, οι n συντελεστές χρειάζονται $2n \log_2 n$ πράξεις για τον υπολογισμό τους.

Αν επιλέγαμε να υπολογίσουμε το άθροισμα στην (6.19) απευθείας, χρειαζόμαστε n πολλαπλασιασμούς για τον κάθε συντελεστή: συνολικά, δηλαδή, n^2 πράξεις. Το κέρδος σε ταχύτητα είναι σημαντικό: αν π.χ. έχουμε $n = 1024$ ο αλγόριθμος FFT χρειάζεται 20480 πράξεις ενώ χωρίς αυτόν θα κάναμε 1048576 πράξεις.

6.10 Μετασχηματισμός Fourier

Έχουμε παρουσιάσει μέχρι τώρα την προσέγγιση με σειρά Fourier για περιοδικές συναρτήσεις και για συναρτήσεις που ορίζονται σε πεπερασμένο διάστημα, είναι μη περιοδικές, αλλά επεκτείνονται περιοδικά εκτός αυτού. Θα αναφερθούμε τώρα στην περίπτωση των μη περιοδικών συναρτήσεων που ορίζονται σε άπειρο διάστημα και στο πώς αναλύονται σε επαλληλία περιοδικών κυμάτων. Για τις συγκεκριμένες συναρτήσεις απαιτούμε μόνο να ορίζεται και να είναι πεπερασμένο το ολοκλήρωμα της απόλυτης τιμής τους στο πεδίο ορισμού τους.

Μια μη περιοδική συνάρτηση σε άπειρο διάστημα μπορεί να αντιμετωπιστεί ως περιοδική με περίοδο L που τείνει στο άπειρο. Ας γράψουμε τη μιγαδική σειρά Fourier για κάποιο L , (6.13), με αντικατάσταση των συντελεστών από την εξίσωση (6.16) και ας βρούμε το όριο της όταν $L \rightarrow \infty$:

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{L} \int_{-L/2}^{L/2} \exp\left(-i \frac{2m\pi y}{L}\right) f(y) dy \right] \exp\left(i \frac{2m\pi x}{L}\right).$$

Για διευκόλυνση, θέτουμε $k_m = m2\pi/L$. Η απόσταση διαδοχικών σημείων $k_{m+1} - k_m$ είναι $\Delta k = 2\pi/L$. Αναζητούμε το όριο της έκφρασης όταν $\Delta k \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{\Delta k}{2\pi} \left[\int_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} \exp(-iyk_m) f(y) dy \right] \exp(ik_m x) \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\exp(ik_m x) \int_{-\pi/\Delta k}^{\pi/\Delta k} \exp(-iyk_m) f(y) dy \right] \Delta k. \end{aligned}$$

Θυμηθείτε τον ορισμό του ολοκληρώματος:

$$\lim_{\Delta k \rightarrow 0} \sum_{m=-\infty}^{\infty} g(k_m) \Delta k = \int_{-\infty}^{\infty} g(k) dk.$$

Επομένως,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y) dy \right] e^{ikx} dk. \quad (6.25)$$

Η ποσότητα

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} f(y) dy \quad (6.26)$$

αποτελεί το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x)$. Είναι συνεχής ποσότητα, αντίστοιχη των συντελεστών Fourier στην περίπτωση περιοδικής συνάρτησης. Εναλλακτικός συμβολισμός της $\hat{f}(k)$ θα είναι ο $\mathcal{F}[f(x)]$.

Η σχέση

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk \quad (6.27)$$

αποτελεί τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier*. Είναι αντίστοιχη της σειράς Fourier στην περίπτωση περιοδικής συνάρτησης.

Παρατηρήστε ότι η επιλογή των συντελεστών πριν το ολοκλήρωμα σε καθεμιά από τις εξισώσεις (6.26, 6.27) είναι σχετικά ελεύθερη. Η μόνη υποχρέωση είναι το γινόμενο των συντελεστών να έχει τιμή $\frac{1}{2\pi}$. Επιλέξαμε να γίνει συμμετρικός διαχωρισμός και γι' αυτό οι συντελεστές είναι $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ σε κάθε εξίσωση.

Όπως θα δούμε στα παραδείγματα του κεφαλαίου, όσο πιο «εντοπισμένη» (περιορισμένη στα x) είναι μια συνάρτηση, τόσο πιο «εκτεταμένος» είναι ο μετασχηματισμός Fourier της.

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0) \quad .$$

Καταρχάς, το ολοκλήρωμα της απόλυτης τιμής της $f(x)$ στο πεδίο ορισμού της υπάρχει και είναι πεπερασμένο:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| \, dx = \int_0^{\infty} e^{-\lambda x} \, dx = \frac{1}{\lambda} \, .$$

Μπορούμε επομένως να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της: από τον ορισμό (6.26) έχουμε

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-iky} e^{-\lambda y} \, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}(\lambda + ik)} \, .$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} \, dk = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda + ik} e^{ikx} \, dk \, .$$

6.10.1 Ιδιότητες

Με εφαρμογή του ορισμού του μετασχηματισμού Fourier μπορούν να αποδειχθούν μεταξύ άλλων οι επόμενες ιδιότητες του:

- $\mathcal{F}[af(x)] = a\hat{f}(k)$, για οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό a ,
- $\mathcal{F}[f(x) + g(x)] = \hat{f}(k) + \hat{g}(k)$,
- $\mathcal{F}[f'(x)] = ik\hat{f}(k)$,
- $\mathcal{F}[f(ax)] = \frac{1}{a}\hat{f}\left(\frac{k}{a}\right)$,

- $\mathcal{F}[f(x+a)] = e^{iak} \hat{f}(k),$
- $\mathcal{F}[e^{ax} f(x)] = \hat{f}(k+ia),$
- $\mathcal{F}[f^*(x)] = [\hat{f}(-k)]^*.$

Επιπλέον, εύκολα δείχνεται ότι το εσωτερικό γινόμενο δύο μη περιοδικών συναρτήσεων, που είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες, είναι ίσο με το εσωτερικό γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier τους (δηλαδή, ο μετασχηματισμός Fourier διατηρεί το εσωτερικό γινόμενο):

$$\int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} [\hat{f}(k)]^* \hat{g}(k) dk. \quad (6.28)$$

Αντίστοιχα, η ταυτότητα Parseval γενικεύεται στο *θεώρημα Plancherel*:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{f}(k)|^2 dk. \quad (6.29)$$

6.10.2 Συμμετρία

Ο μετασχηματισμός Fourier απλοποιείται αν η συνάρτηση $f(x)$ είναι συμμετρική ή αντισυμμετρική ως προς το $x = 0$. Συγκεκριμένα, ο μετασχηματισμός Fourier γράφεται

$$\begin{aligned} \hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} f(x) dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos(kx) - i \sin(kx)) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx - i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \sin(kx) dx. \end{aligned}$$

Αν για τη συνάρτηση ισχύει $f(-x) = f(x)$, η έκφραση $f(x) \sin(kx)$ είναι αντισυμμετρική. Το ολοκλήρωμά της σε συμμετρικό διάστημα είναι 0. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx.$$

Παρατηρήστε ότι η $\hat{f}(k)$ είναι και αυτή συμμετρική: ισχύει $\hat{f}(-k) = \hat{f}(k)$. Επομένως, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) e^{ikx} dk = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(k) \cos(kx) dk \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos(kx) dk. \end{aligned}$$

Ανάλογα ισχύουν αν η $f(x)$ είναι αντισυμμετρική, δηλαδή ισχύει $f(-x) = -f(x)$. Ο μετασχηματισμός Fourier είναι⁵

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \sin(kx) dx$$

και είναι αντισυμμετρικός. Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \sin(kx) dk .$$

Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση

$$f(x) = \begin{cases} 0, & |x| > \alpha \\ 1, & |x| \leq \alpha \end{cases} .$$

Η $f(x)$ έχει πεπερασμένη τιμή του ολοκληρώματος της απόλυτης τιμής της:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\alpha}^{\alpha} dx = 2\alpha .$$

Επομένως, έχει νόημα να υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier αυτής. Προσέξτε ότι είναι συμμετρική ως προς το $x = 0$ άρα

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(x) \cos(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\alpha} \cos(kx) dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k\alpha)}{k} .$$

Η τιμή στο $k = 0$ της $\hat{f}(k)$ είναι πεπερασμένη:

$$\hat{f}(0) = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin(k\alpha)}{k} = \lim_{k \rightarrow 0} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{k\alpha}{k} = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \alpha .$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier είναι

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \hat{f}(k) \cos(kx) dk = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(k\alpha)}{k} \cos(kx) dk .$$

⁵ Αν κάνετε τις πράξεις, εμφανίζεται η πολλαπλασιαστική σταθερά $-i$ στο μετασχηματισμό Fourier και η i στον αντίστροφο μετασχηματισμό. Τις παραλείψαμε καθώς το γινόμενο των σταθερών όρων πριν τα ολοκληρώματα έχει σημασία. Χωρίσαμε το γινόμενο, δηλαδή την ποσότητα $2/\pi$, σε δύο πραγματικούς όρους.

6.11 Συνάρτηση δ

Ας ξαναγράψουμε την εξίσωση (6.25) (ουσιαστικά τον αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier μιας συνάρτησης $f(x)$), αναδιατάσσοντας τους όρους της:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(y-x)} dk \right] f(y) dy .$$

Θέτουμε

$$\delta(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikx} dk , \quad (6.30)$$

οπότε, για οποιαδήποτε απόλυτα ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x)$, έχουμε

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y-x) f(y) dy .$$

Η παραπάνω σχέση δείχνει με χαρακτηριστικό τρόπο τη συμπεριφορά της έκφρασης που ονομάσαμε συνάρτηση δ : διαλέγει σε ένα ολοκλήρωμα μια τιμή της (υπόλοιπης) ολοκληρωτέας ποσότητας. Γενικότερα, η σχέση

$$\int_a^b \delta(x-x_0) f(x) dx = \begin{cases} f(x_0) , & \text{αν } a < x_0 < b , \\ 0 , & \text{σε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \quad (6.31)$$

αποτελεί ένα από τους ισοδύναμους ορισμούς της συνάρτησης δ . Στην παραπάνω σχέση θεωρήσαμε ότι $a < b$.

Δεν είναι μαθηματικά ακριβής περιγραφή αλλά βοηθά να αντιληφθούμε τη συνάρτηση $\delta(x)$ αν θεωρήσουμε ότι

- απειρίζεται στο $x = 0$,
- μηδενίζεται σε $x \neq 0$,
- το ολοκλήρωμά της στο $(-\infty, \infty)$ είναι 1.

Καμία συνάρτηση με τη συνήθη έννοια του όρου δεν έχει τις παραπάνω ιδιότητες· γι' αυτό, η συνάρτηση $\delta(x)$ θεωρείται γενικευμένη συνάρτηση που ορίζεται μέσω της συμπεριφοράς της σε ολοκλήρωμα.

Ένας ορισμός της συνάρτησης $\delta(x)$, ισοδύναμος της (6.31), προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση βήματος

$$H(x) = \begin{cases} 1 , & x > 0 \\ 0 , & x < 0 \end{cases} .$$

Η συνάρτηση $\delta(x)$ μπορεί να οριστεί ως η παράγωγος της $H(x)$:

$$\delta(x) = \frac{d}{dx} H(x) .$$

Πράγματι, το $H'(x)$ συμπεριφέρεται όπως η συνάρτηση $\delta(x)$ σε ολοκλήρωμα. Καταρχάς,

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)H'(x) \, dx &= \int_a^b f(x) \, d[H(x)] \\ &= [f(x)H(x)] \Big|_a^b - \int_a^b H(x)f'(x) \, dx \\ &= f(b)H(b) - f(a)H(a) - \int_a^b H(x)f'(x) \, dx .\end{aligned}$$

Από τη διερεύνηση της τελευταίας σχέσης για διάφορες τιμές των a, b (για τα οποία θεωρούμε ότι $a < b$) προκύπτει ότι:

- αν $0 < a < b$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)H'(x) \, dx &= f(b) \cdot 1 - f(a) \cdot 1 - \int_a^b 1 \cdot f'(x) \, dx \\ &= f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0 .\end{aligned}$$

- αν $a < b < 0$

$$\int_a^b f(x)H'(x) \, dx = f(b) \cdot 0 - f(a) \cdot 0 - \int_a^b 0 \cdot f'(x) \, dx = 0 .$$

- αν $a < 0$ και $b > 0$

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)H'(x) \, dx &= f(b) \cdot 1 - f(a) \cdot 0 - \int_0^b 1 \cdot f'(x) \, dx \\ &= f(b) - (f(b) - f(0)) = f(0) .\end{aligned}$$

Άρα, για οποιαδήποτε $f(x)$

$$\int_a^b f(x)H'(x) \, dx = \begin{cases} f(0) , & \text{αν } a < 0 < b , \\ 0 , & \text{σε άλλη περίπτωση.} \end{cases}$$

Από τη σύγκριση με την (6.31) προκύπτει ότι η παράγωγος της συνάρτησης βήματος είναι η συνάρτηση $\delta(x)$.

6.11.1 Ιδιότητες

Αποδεικνύεται εύκολα από τον ορισμό της ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ ικανοποιεί τις ακόλουθες σχέσεις:

- $\delta^*(x) = \delta(x)$.

Απόδειξη: για οποιαδήποτε $f(x)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta^*(x) f(x) dx &= \left(\int_a^b \delta(x) f^*(x) dx \right)^* \\ &= \begin{cases} [f^*(0)]^* , & \text{αν } a < 0 < b , \\ 0 , & \text{σε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \\ &= \int_a^b \delta(x) f(x) dx . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό (6.31). Καθώς η $f(x)$ είναι αυθαίρετη, διαπιστώνουμε ότι το $\delta^*(x)$ συμπεριφέρεται όπως το $\delta(x)$. Επομένως, η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι πραγματική.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν επεξεργαστούμε την αναπαράστασή της με σειρά, (6.30), ή, ακόμα πιο απλά, αν παρατηρήσουμε ότι είναι παράγωγος πραγματικής συνάρτησης (της συνάρτησης βήματος).

- $\delta(-x) = \delta(x)$.

Απόδειξη: για οποιαδήποτε $f(x)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(-x) f(x) dx &= - \int_{-a}^{-b} \delta(y) f(-y) dy = \int_{-b}^{-a} \delta(y) f(-y) dy \\ &= \begin{cases} f(0) , & \text{αν } -b < 0 < -a , \\ 0 , & \text{σε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \\ &= \int_a^b \delta(x) f(x) dx . \end{aligned}$$

Σε συνδυασμό με τον ορισμό (6.31) και καθώς η $f(x)$ είναι αυθαίρετη, διαπιστώνουμε ότι το $\delta(-x)$ συμπεριφέρεται όπως το $\delta(x)$. Επομένως, η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι συμμετρική.

Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε αν επεξεργαστούμε την αναπαράστασή της με σειρά, (6.30).

- $x^n \delta(x) = 0$, με $n \geq 1$.

Απόδειξη:

$$\int_a^b x^n \delta(x) f(x) dx = \begin{cases} 0 \cdot f(0) , & \text{αν } a < 0 < b , \\ 0 , & \text{σε άλλη περίπτωση.} \end{cases} = 0 .$$

Η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $f(x)$ και οποιαδήποτε όρια a, b . Για να ικανοποιείται πρέπει να ισχύει $x^n \delta(x) = 0$.

- $\delta(\lambda x) = \frac{1}{|\lambda|} \delta(x)$ με $\lambda \neq 0$.

Απόδειξη: για οποιαδήποτε $f(x)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_a^b \delta(\lambda x) f(x) dx &= \int_a^b \delta(\pm |\lambda| x) f(x) dx = \int_a^b \delta(|\lambda| x) f(x) dx \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \int_{a|\lambda|}^{b|\lambda|} \delta(y) f(y/|\lambda|) dy \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \begin{cases} f(0), & \text{αν } a|\lambda| < 0 < b|\lambda|, \\ 0, & \text{σε άλλη περίπτωση.} \end{cases} \\ &= \frac{1}{|\lambda|} \int_a^b \delta(x) f(x) dx. \end{aligned}$$

Γενικότερα, αν x_i είναι τα σημεία που μια συνάρτηση $h(x)$ μηδενίζεται (αλλά δεν μηδενίζεται σε αυτά η παράγωγός της), ισχύει

$$\delta(h(x)) = \sum_i \frac{\delta(x - x_i)}{|h'(x_i)|}.$$

- $\int_0^a \delta(1/x) dx = 0$, με a μη αρνητική, πεπερασμένη τιμή.

Απόδειξη:

$$\int_0^a \delta\left(\frac{1}{x}\right) dx = \int_{\infty}^{1/a} \delta(y) \frac{-1}{y^2} dy = 0.$$

6.11.2 Παράγωγοι της συνάρτησης $\delta(x)$

Για την πρώτη παράγωγο της συνάρτησης $\delta(x)$ ισχύει

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta'(x-a) dx &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y+a) d[\delta(y)] \\ &= [f(y+a)\delta(y)]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \delta(y) f'(y+a) dy \\ &= -f'(a). \end{aligned}$$

Ανάλογες σχέσεις ισχύουν και για ανώτερες παραγώγους. Μπορεί ναδειχθεί ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta^{(k)}(x-a) dx = (-1)^k f^{(k)}(a).$$

Εύκολα μπορεί να αποδείξει κανείς ότι

- $\delta'(-x) = -\delta'(x)$,
- $x\delta'(x) = -\delta(x)$ και γενικότερα, $x^n \delta^{(n)}(x) = (-1)^n n! \delta(x)$,
- $x^n \delta'(x) = 0$, με $n \geq 1$.

6.11.3 Μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης $\delta(x)$

Η συνάρτηση $\delta(x)$ έχει πεπερασμένο ολοκλήρωμα της απόλυτής της τιμής σε οποιοδήποτε διάστημα. Επομένως, ορίζεται ο μετασχηματισμός Fourier, ο οποίος είναι

$$\hat{\delta}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \delta(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-ik \cdot 0} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier αυτής της σταθερής συνάρτησης δίνεται στην εξίσωση (6.30) και είναι η συνάρτηση $\delta(x)$. Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ προκύπτει από την επαλληλία κυμάτων με όλα τα μήκη κύματος και σταθερό πλάτος.

Η συνάρτηση $\delta(x)$ είναι η πιο εντοπισμένη συνάρτηση που μπορεί να υπάρξει. Προσέξτε ότι μετασχηματισμός Fourier της είναι η πιο εκτεταμένη συνάρτηση: έχει παντού την ίδια τιμή.

6.11.4 Εφαρμογές στη Φυσική

Η συνάρτηση $\delta(x)$ χρησιμοποιείται στη Φυσική για να εκφράσει, για παράδειγμα, την κατανομή στο χώρο μιας σημειακής ποσότητας. Έτσι, μια σημειακή μάζα m στο σημείο x_0 στον άξονα των x αντιστοιχεί σε γραμμική κατανομή μάζας

$$\rho(x) \equiv \frac{dm}{dx} = m\delta(x - x_0).$$

Πράγματι, η συνολική μάζα στον άξονα των x επαληθεύεται ότι είναι m :

$$\int dm = \int_{-\infty}^{\infty} \rho(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} m\delta(x - x_0) dx = m.$$

Γενικεύεται εύκολα στις τρεις διαστάσεις: μια σημειακή μάζα στο $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ έχει πυκνότητα

$$\rho(x, y, z) = m\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0).$$

Έτσι, η συνολική μάζα σε ένα όγκο V είναι

$$\iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz = \begin{cases} m, & \text{αν το } \vec{r}_0 \text{ είναι στον όγκο } V, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

6.12 Συνέλιξη συναρτήσεων

Η *συνέλιξη* (*convolution*) δύο συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$ που ορίζονται στο $(-\infty, \infty)$ είναι μια νέα συνάρτηση που συμβολίζεται με $f * g$ και ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$[f * g](x) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x - y) dy. \quad (6.32)$$

Επομένως, είναι το ολοκλήρωμα της πρώτης συνάρτησης με συνάρτηση βάρους τη δεύτερη, αντεστραμμένη και μετατοπισμένη. Για να ορίζεται το ολοκλήρωμα πρέπει οι δύο συναρτήσεις f, g να «σβήνουν» αρκετά γρήγορα στο $\pm\infty$.

6.12.1 Ιδιότητες συνέλιξης

Εύκολα μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι η συνέλιξη έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- αντιμεταθετική: $f * g = g * f$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} [f * g](x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy \\ &\stackrel{z \leftarrow x-y}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f(x-z)g(z) dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)f(x-z) dz \\ &\equiv [g * f](x) . \end{aligned}$$

- προσεταιριστική: $f * (g * h) = (f * g) * h$.

Απόδειξη:

$$\begin{aligned} [f * (g * h)](x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(y) \int_{-\infty}^{\infty} g(z)h(x-y-z) dz dy \\ &\stackrel{w \leftarrow y+z}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(w-y) dy h(x-w) dw \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(w)h(x-w) dw \\ &\equiv [(f * g) * h](x) . \end{aligned}$$

- επιμεριστική ως προς την πρόσθεση: $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

$$\begin{aligned} [f * (g + h)](x) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} f(y)(g(x-y) + h(x-y)) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y) dy + \int_{-\infty}^{\infty} f(y)h(x-y) dy \\ &\equiv [f * g](x) + [f * h](x) . \end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύονται επιπλέον οι ιδιότητες

- $a \cdot (f * g) = (a \cdot f) * g = f * (a \cdot g)$, με οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό a ,
- $(f * g)^* = f^* * g^*$, για τη μιγαδική συζυγή,
- $(f * g)' = f' * g = f * g'$, για την παράγωγο.

Παρατηρήστε ότι

$$[f * \delta](x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(x-y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\delta(y-x) dy = f(x) .$$

Από το αποτέλεσμα αυτό, σε συνδυασμό με την αντιμεταθετική ιδιότητα, συνάγουμε ότι η συνάρτηση $\delta(x)$ δρα ως ουδέτερη συνάρτηση στην πράξη της συνέλιξης.

6.12.2 Θεώρημα συνέλιξης

Ας υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $h = f * g$:

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} h(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(y-z) dz dy .$$

Θέτουμε $y = w + z$. Τότε

$$\begin{aligned} \hat{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(w+z)} f(z) g(w) dz dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikz} f(z) dz \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikw} g(w) dw \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \sqrt{2\pi} \hat{g}(k) \\ &= \sqrt{2\pi} \hat{f}(k) \hat{g}(k) . \end{aligned} \quad (6.33)$$

Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της συνέλιξης δύο συναρτήσεων είναι το γινόμενο των μετασχηματισμών Fourier των συναρτήσεων επί $\sqrt{2\pi}$. Το συμπέρασμα αυτό αποτελεί το *θεώρημα συνέλιξης*.

Με εφαρμογή του θεωρήματος συνέλιξης μπορούμε να βρούμε εύκολα το μετασχηματισμό Fourier μιας άγνωστης συνάρτησης $f(x)$ αν γνωρίζουμε τους μετασχηματισμούς Fourier των συναρτήσεων $h(x) = (f * g)(x)$ και $g(x)$:

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\hat{h}(k)}{\hat{g}(k)} .$$

Κατόπιν, ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier (6.27) ανασυνθέτει την $f(x)$. Η διαδικασία αυτή, η *αποσυνέλιξη* (deconvolution), βρίσκει εφαρμογή κατά την επεξεργασία σημάτων ή εικόνων στη σεισμολογία, αστρονομία, οπτική, κλπ.

6.13 Συσχέτιση συναρτήσεων

Η *ετερο-συσχέτιση* (cross-correlation) δύο συναρτήσεων $f(x)$ και $g(x)$, γενικά μιγαδικών, που ορίζονται στο $(-\infty, \infty)$, είναι μια νέα συνάρτηση που συνήθως συμβολίζεται με $f \otimes g$ και ορίζεται από την ακόλουθη σχέση:

$$[f \otimes g](z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) g(x+z) dx . \quad (6.34)$$

Η ετερο-συσχέτιση δίνει ένα μέτρο της ομοιότητας που έχουν οι δύο συναρτήσεις όταν η μία είναι μετατοπισμένη ως προς την άλλη. Παίρνει «μεγάλη» τιμή για μια μετατόπιση z όταν η $f(x)$ και η $g(x+z)$ είναι παρόμοιες για κάθε x ενώ η τιμή της

είναι «μικρή» για μετατόπιση z που καθιστά τις δύο συναρτήσεις αρκετά διαφορετικές. Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η ετερο-συσχέτιση δύο συναρτήσεων συνδέεται με τη συνέλιξή τους με τη σχέση:

$$f \otimes g = f^*(-x) * g.$$

Από το ορισμό μπορούμε να δούμε ότι η ετερο-συσχέτιση έχει

- την προσεταιριστική ιδιότητα: $f \otimes (g \otimes h) = (f \otimes g) \otimes h$.
- την επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση: $f \otimes (g + h) = (f \otimes g) + (f \otimes h)$.

Προσέξτε ότι δεν έχει την αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\begin{aligned} [f \otimes g](z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x)g(x+z) dx \\ &\stackrel{y \leftarrow x+z}{=} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(y-z)g(y) dy = \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(y-z)g^*(y) dy \right]^* \\ &= [g \otimes f]^*(-z). \end{aligned}$$

Εύκολα αποδεικνύονται επιπλέον οι ιδιότητες

- $a(f \otimes g) = (a^* f) \otimes g = f \otimes (a g)$, με οποιοδήποτε μιγαδικό αριθμό a ,
- $(f \otimes g)^* = f^* \otimes g^*$, για τη μιγαδική συζυγή,
- $(f \otimes g)' = f \otimes g' = -[g \otimes f']^*$, για την παράγωγο.
- $(f \otimes g) \otimes (f \otimes g) = (f \otimes f) \otimes (g \otimes g)$.

6.13.1 Θεώρημα Wiener-Khinchin

Ας υπολογίσουμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $h = f \otimes g$:

$$\hat{h}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} h(y) dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-iky} \int_{-\infty}^{\infty} f^*(z)g(z+y) dz dy.$$

Θέτουμε $w = y + z$. Τότε

$$\begin{aligned} \hat{h}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(w-z)} f^*(z)g(w) dz dw \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikz} f^*(z) dz \right] \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ikw} g(w) dw \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} [\hat{f}(k)]^* \sqrt{2\pi} \hat{g}(k) \\ &= \sqrt{2\pi} [\hat{f}(k)]^* \hat{g}(k). \end{aligned} \tag{6.35}$$

Η τελευταία έκφραση για το μετασχηματισμό Fourier της ετερο-συσχέτισης αποτελεί το *θεώρημα Wiener-Khinchin*.

Με ανάλογο τρόπο μπορούμε να αποδείξουμε τη σχέση

$$\mathcal{F}[f^*(x)g(x)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \hat{f}(k) \otimes \hat{g}(k).$$

6.13.2 Αυτοσυσχέτιση συνάρτησης

Αν στον ορισμό της ετερο-συσχέτισης (6.34) θέσουμε $g = f$, παράγουμε τη συνάρτηση αυτοσυσχέτισης (autocorrelation) για τη συνάρτηση $f(x)$:

$$[f \otimes f](z) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} f^*(x) f(x+z) dx. \quad (6.36)$$

Ο μετασχηματισμός Fourier της συνάρτησης αυτοσυσχέτισης είναι, σύμφωνα με το θεώρημα Wiener-Khinchin (6.35):

$$\mathcal{F}[f \otimes f] = \sqrt{2\pi} \left| \hat{f}(k) \right|^2.$$

Η ποσότητα $\left| \hat{f}(k) \right|^2$ αποτελεί τη φασματική πυκνότητα ενέργειας της συνάρτησης $f(x)$ στον κυματάριθμο k . Η ποσότητα $\left| \hat{f}(k) \right|^2 dk$ αντιπροσωπεύει την «ενέργεια» που συνεισφέρουν οι συνιστώσες με κυματάριθμους στο διάστημα $[k, k + dk]$. Ως συνολική «ενέργεια» ορίζουμε την έκφραση

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx.$$

Ο ορισμός της $\left| \hat{f}(k) \right|^2$ ως πυκνότητας ενέργειας σημαίνει ότι η συνολική ενέργεια μπορεί να υπολογιστεί από το ολοκλήρωμα

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{f}(k) \right|^2 dk,$$

δηλαδή καταλήξαμε με άλλο τρόπο στο θεώρημα Plancherel (6.29).

6.14 Ασκήσεις

1. Ποιες από τις επόμενες συναρτήσεις μπορούν να αναπτυχθούν σε σειρά Fourier; σε ποια σημεία δεν θα συγκλίνει η σειρά στη συνάρτηση;

- $\tanh^{-1} x$,
- $\tan x$,
- $1/\sqrt{|\sin x|}$.

2. Βρείτε τη σειρά Fourier που προσεγγίζει την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1/2, \\ 1, & 1/2 \leq x < 3/2, \\ 0, & 3/2 \leq x < 2. \end{cases}$$

Θεωρούμε ότι η συνάρτηση επαναλαμβάνεται για $x \geq 2$ και $x < 0$ ώστε $f(x + 2k) = f(x)$ με οποιοδήποτε ακέραιο k .

3. Βρείτε τη σειρά Fourier της $f(x) = x$ στο διάστημα $[-\pi, \pi)$. Κατόπιν, δείξτε ότι

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

4. Βρείτε τη σειρά Fourier της συνάρτησης $f(t) = |\sin(\omega t)|$ με $-\pi < \omega t < \pi$. Ποιες συχνότητες έχουν μη μηδενικό πλάτος και πόσο;

5. Βρείτε τη μιγαδική σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = |x|$ με $-\pi < x < \pi$. Κατόπιν, δείξτε ότι

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \frac{\pi^2}{8}.$$

6. Επεκτείνετε (α') συμμετρικά (β') αντισυμμετρικά την $f(x) = 1 - x$ που ορίζεται στο $[0, 1)$. Βρείτε τις αντίστοιχες σειρές Fourier.

7. Βρείτε τη σειρά Fourier της $f(x) = x^3$ στο διάστημα $[0, 2)$.

8. Βρείτε τη σειρά Fourier της $f(x) = x^2$ στο διάστημα $[-2, 2)$. Δείξτε ότι

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \cdots = \frac{\pi^4}{90}.$$

9. Βρείτε τη σειρά Fourier της $f(x) = e^x$ στο διάστημα $[-1, 1)$. Ποια τιμή έχει η σειρά στο $x = 2$;

10. Δείξτε ότι η σειρά Fourier της συνάρτησης $f(x) = |x|$ στο διάστημα $[-\pi, \pi)$ είναι

$$|x| = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos(2m+1)x}{(2m+1)^2}.$$

Ολοκληρώστε τη συγκεκριμένη σειρά Fourier και βρείτε έτσι τη συνάρτηση που έχει σειρά Fourier

$$\frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{(2m+1)^3}.$$

στο συγκεκριμένο διάστημα.

11. Μπορείτε να βρείτε από τα αποτελέσματα της άσκησης 10 την τιμή του αθροίσματος

$$1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \cdots ;$$

12. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης $f(x) = x \exp(-x^2)$ με x στο διάστημα $(-\infty, +\infty)$.

13. Δείξτε ότι

$$\delta(x^2 - a^2) = \frac{1}{2|a|} (\delta(x+a) + \delta(x-a)).$$

14. Βρείτε τη συνέλιξη των συναρτήσεων $f(x) = \delta(x + a) + \delta(x - a)$ και $g(x) = \exp(-x^2)$.
15. Βρείτε το μετασχηματισμό Fourier της συνέλιξης των συναρτήσεων $f(x) = \delta(x + a) + \delta(x - a)$ και $g(x) = \exp(-x^2)$ με και χωρίς τη χρήση του θεωρήματος συνέλιξης.

Παράρτημα Α΄

Χρήσιμα ολοκληρώματα

Γνωρίζουμε ότι ισχύουν οι ακόλουθες τριγωνομετρικές σχέσεις:

$$\begin{aligned}\sin x \sin y &= \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2}, \\ \cos x \cos y &= \frac{\cos(x-y) + \cos(x+y)}{2}, \\ \sin x \cos y &= \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}.\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x \, dx = \sin x + c.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές, εύκολα μπορούν ναδειχθούν οι παρακάτω σχέσεις (για ακέραιο $n \geq 0$). Αποδείξτε τις!

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (\text{A.1})$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} L, & n=0 \\ 0, & n>0 \end{cases}, \quad (\text{A.2})$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx = 0, \quad (\text{A.3})$$

$$\int_0^L \cos\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ L, & n = k = 0 \\ L/2, & n = k > 0 \end{cases}, \quad (\text{A.4})$$

$$\int_0^L \sin\left(\frac{2n\pi x}{L}\right) \sin\left(\frac{2k\pi x}{L}\right) dx = \begin{cases} 0, & n \neq k \\ 0, & n = k = 0 \\ L/2, & n = k > 0 \end{cases}. \quad (\text{A.5})$$

