Домашнее задание 3

Тихонов Сергей

3 октября 2021

Задание 1

i) $X_t = N_t - tN_1, \quad t \in [0,1]$

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(N_t - tN_1, N_s - sN_1) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(N_t - N_s + N_s - tN_1, N_s - sN_1) =$$
$$= \mathbb{C}\mathrm{ov}(N_t - N_s, N_s - N_0) - s\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(N_t - N_s, N_1) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(N_s - tN_1, N_s - sN_1)$$

Рассмотрим ковариации:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(N_t - N_s, N_s - N_0) = 0$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(N_t - N_s, N_1 - N_0) = cov(N_t - N_s, N_1 - N_t + N_t - N_s + N_s - N_0) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(N_t - N_s) = \lambda(t-s)$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(N_s - tN_1, N_s - sN_1) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(N_s) - s\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(N_s, N_1) - t\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(N_s, N_1) + ts\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_1) =$$
$$= \lambda s + \lambda ts - (t+s)\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(N_s - N_0, N_1 - N_s + N_s - N_0) = \lambda(s + ts) - (t+s)\lambda s =$$
$$= \lambda(t + ts - ts - s^2) = \lambda s(1-s)$$

В результате,

$$K(t,s) = -\lambda s(t-s) + \lambda s(1-s) = \lambda s(1 - s - t + s) = \lambda s(1-t), \quad t > s \geq 0$$

В общем случае, ковариационная функция имеет вид:

$$K(t,s) = \begin{cases} \lambda s(1-t) & t > s \geq 0 \\ \lambda t(1-s) & s > t \geq 0 \end{cases}$$

ii) $X_t = N_t^2$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(N_t^2, N_s^2) = \mathbb{E}(N_t^2 N_s^2) - \mathbb{E}(N_t^2)E(N_s^2) = \mathbb{E}((N_t - N_s + N_s)^2 N_s^2) =$$
$$= \mathbb{E}((N_t^2 - 2N_tN_s + N_s^2)N_s^2) - \mathbb{E}(N_s^4) + 2E(N_tN_s^3) - \mathbb{E}(N_t^2)\mathbb{E}(N_s^2)$$

Распишем каждое слагаемое отдельно:

$$\mathbb{E}((N_t^2 - 2N_tN_s + N_s^2)N_s^2) = \mathbb{E}(N_t - N_s)^2\mathbb{E}(N_s)^2 = \left(\mathbb{V}\mathrm{ar}(N_{t-s}) + \mathbb{E}(N_{t-s})^2\right) = \\ = (\lambda(t-s) + \lambda^2(t-s)^2)\lambda s(1+\lambda s)$$

$$2\mathbb{E}(N_tN_s^3) - \mathbb{E}(N_s^4) = 2\mathbb{E}((N_t - N_s)N_s^3) + 2\mathbb{E}(N_s^4) - \mathbb{E}(N_s^4) = 2\mathbb{E}(N_t - N_s)\mathbb{E}(N_s^3) + \mathbb{E}(N_s^4)$$

Рассчитаем 3-ий и 4-ый моменты распределения Пуассона:

$$\mathbb{E}(X(X-1)(X-2)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)(x-2)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda^3 e^{-\lambda}\sum_{x=3}^{\infty}\frac{\lambda^{x-3}}{(x-3)!} = \lambda^3 e^{-\lambda}\sum_{y=0}^{\infty}\frac{\lambda^y}{y} = \lambda^3$$

Воспользуемся свойством, что математическое ожидание суммы есть сумма математических ожиданий:

$$\mathbb{E}(X^3) - 3\mathbb{E}(X^2) + 2\mathbb{E}(X) = \lambda^3$$

$$\mathbb{E}(X^3) = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

Аналогичным образом:

$$\mathbb{E}(X(X-1)(X-2)(X-3)) = \sum_{x=0}^{\infty} x(x-1)(x-2)(x-3)e^{-\lambda}\frac{\lambda^x}{x!} = \lambda^4 e^{-\lambda}\sum_{x=4}^{\infty}\frac{\lambda^{x-4}}{(x-4)!} = \lambda^4$$

Выразим четвёртый момент Пуассоновского распределения:

$$\mathbb{E}(X^4) = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

Подставим найденные моменты:

$$(\lambda(t-s) + \lambda^2(t-s)^2)\lambda s(1+\lambda s) + \lambda^4 s^4 + 6\lambda^3 s^3 + 7\lambda^2 s^2 + \lambda s + 2(\lambda(t-s))(\lambda^3 s^3 + 3\lambda^2 s^2 + \lambda s) - \\ - \lambda s(1+\lambda s)\lambda t(1+\lambda t)$$

Пропустим все промежуточные вычисления и запишем ответ:

$$K(t,s) = \begin{cases} 4\lambda^3 s^2 t + 4\lambda^2 s^2 + 2\lambda^2 st + \lambda s & t > s \geq 0 \\ 4\lambda^3 t^2 s + 4\lambda^2 t^2 + 2\lambda^2 ts + \lambda t & s > t \geq 0 \end{cases}$$

Задание 2

Распишем вероятность по формуле условной вероятности. Важно, что $n \leq m$, поскольку если за первые 10 часов позвонили m раз: то за первые 2 часа не могут более позвонить более

m раз:

$$\mathbb{P}\{N_2 = n | N_{10} = m\} = \frac{\mathbb{P}\{N_2 = n, N_{10} = m\}}{\mathbb{P}\{N_{10} = m\}}$$

Посчитаем вероятность в числителе, пользуясь фактом о независимости приращений:

$$\mathbb{P}\{N_2 = n, N_{10} = m\} = \mathbb{P}\{N_2 = n, N_{10} - N_2 = m - n\} = e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!}e^{-8\lambda}\frac{(8\lambda)^{m-n}}{(m-n)!}$$

Посчитаем вероятность в знаменателе:

$$\mathbb{P}\{N_{10} = m\} = e^{-10\lambda}\frac{(10\lambda)^m}{m!}$$

$$\mathbb{P}\{N_2 = n | N_{10} = m\} = \frac{e^{-2\lambda}\frac{(2\lambda)^n}{n!}e^{-8\lambda}\frac{(8\lambda)^{m-n}}{(m-n)!}}{e^{-10\lambda}\frac{(10\lambda)^m}{m!}} = \frac{m!}{n!(m-n)!}\cdot\frac{(2\lambda)^n(8\lambda)^{m-n}}{(10\lambda)^m} = \binom{m}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{m-n}$$

Ответ: $\binom{m}{n}\left(\frac{1}{5}\right)^n\left(\frac{4}{5}\right)^{m-n}$

Задание 3

В среднем за 10 минут приходит 1 клиент:

$$t = 10: \quad 10\lambda = 1 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{10}$$

Время ожидания первого клиента + время стрижки имеет вид:

$$\xi_1 + \eta \sim exp(\mu = \frac{1}{25})$$

Время прихода каждого клиента:

$$\xi_1, \xi_2, ... \sim exp(\lambda = \frac{1}{10})$$

Формализуем задачу на математическом языке:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 + \xi_2 < \xi_1 + \eta\}$$

Используя формулу свёртки для двух экспоненциальных случайных величин, рассчитаем плотность $\xi_1 + \xi_2$:

$$f_{\xi_1+\xi_2}(x) = \int\limits_0^x f_{\xi_1}(x-y)f_{\xi_2}(y)dy = \int\limits_0^x \frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}(x-y)}\frac{1}{10}e^{-\frac{1}{10}y}dy = \frac{x}{100}e^{-\frac{1}{10}x}$$

Заметим, что $\xi_1 + \xi_2$ и $\xi_1 + \eta$ независимы по условию, а значит их совместная плотность представима в виде произведения частных плотностей. Искомая вероятность:

$$\mathbb{P}\{\xi_1 + \xi_2 < \xi_1 + \eta\} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^v \frac{1}{2500} u e^{-\frac{1}{10}u} e^{-\frac{1}{25}v} du dv = \frac{1}{2500} \int\limits_0^\infty (-10ve^{-\frac{7}{50}v} - 100e^{-\frac{7}{50}v} + 100e^{-\frac{1}{25}v}) dv =$$

$$= -\frac{10}{49} - \frac{2}{7} + 1 = \frac{25}{49}$$

Часть арифметических выкладок в задании была пропущена в целях экономии сил!

Ответ: $\mathbb{P}\{\xi_1 + \xi_2 < \xi_1 + \eta\} = \frac{25}{49}$

Задание 4

x - время до следующего автобуса

$\xi \sim exp(\lambda)$

$N_\xi \sim Pois(\mu\xi)$

i) Рассчитаем искомую вероятность:

$$\mathbb{P}\{N_\xi = n | \xi = x\} = e^{-\mu x} \frac{(\mu x)^n}{n!}$$

ii) Разделим временной промежуток на два временных отрезка:

10:30 - 11:00. Вероятность появления n пассажиров в данный промежуток времени равна:

$$\mathbb{P}\{N_{11} - N_{10.5} = n\} = \mathbb{P}\{N_{0.5} = n\} = e^{-0.5\mu} \frac{(0.5\mu)^n}{n!}$$

11:00 - далее. Запустим процесс появления автобусов заново, начиная с $t = 10.5$, так как приращения независимы. Вероятность появления n пассажиров до прибытия автобуса:

$$\mathbb{P}\{N_{10.5+\xi} - N_{11} = n | \xi > 0.5\} = \mathbb{P}\{N_{\xi - 0.5} = n | \xi > 0.5\} = \mathbb{P}\{N_\xi = n\}$$

Пользуясь фактом, что $\xi \sim exp(\lambda)$ и вероятностью, посчитанной в пункте (i), посчитаем вероятность по формуле полной вероятности:

$$\mathbb{P}\{N_\xi = n\} = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}\{N_\xi = n | \xi = x\} f_\xi(x) dx = \int\limits_0^\infty e^{-\mu x} \frac{\mu^n}{n!} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \frac{mu^n}{n!} \int\limits_0^\infty x^n e^{-(\lambda + \mu)x} dx =$$

$$= \lambda \frac{\mu^n}{n!} \mathcal{L}[x^n](\lambda + \mu) = \lambda \frac{\mu^n}{n!} \cdot \frac{n!}{(\lambda + \mu)^{n+1}} = \frac{\lambda \mu^n}{(\lambda + \mu)^{n+1}}$$

Требуется найти вероятность $\mathbb{P}\{N_{10.5+\xi} - N_{10.5} = n | \xi > 0.5\}$, которая представляет собой сумму двух независимых случайных величин $N_{11} - N_{10.5}$ и $N_{10.5+\xi} - N_{11}$ при $\xi > 0.5$. Воспользуемся формулой свёртки:

$$\mathbb{P}\{N_{10.5+\xi} - N_{10.5} = n | \xi > 0.5\} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda \mu^k}{(\lambda+\mu)^{k+1}} \frac{(\mu/2)^{n-k}}{(n-k)!} e^{-\frac{\mu}{2}}$$

Задание 5

Рассмотрим $g(0) = 0$. Тогда:

$$g(0) = g(0+0) = g(0) + g(0) \Rightarrow g(0) = 0$$

Более того, $\forall x \in \mathbb{R}$:

$$0 = g(0) = g(x - x) = g(x) + g(-x) \Rightarrow g(-x) = -g(x)$$

Теперь рассмотрим $n \in \mathrm{Z}$:

$$g(nx) = g(x + ... + x) = g(x) + ... + g(x) = ng(x)$$

Пусть $n \neq 0$. Тогда для $m \in Z, n \in N$ имеем $\frac{m}{n} \in Q$:

$$g(\frac{m}{n}x) = \frac{n}{n}g(\frac{m}{n}x) = \frac{1}{n}g(mx) = \frac{m}{n}g(x)$$

Любое иррациональное число можно представить в виде бесконечной последовательности рациональных чисел (Riemann series theorem). Учитывая, что функция $g(x)$ является непрерывной, запишем предел по Гейне:

$$\lim_{n\to\infty} f(a_n x) = f(\lim_{n\to\infty} a_n x) = f(ax) = af(x), \quad \forall a \in \mathbb{R}$$