Домашнее задание 1

Тихонов Сергей

9 сентября 2021

Задача 1

Предположим $C \in \Omega$ ($C > 0$ - зафиксированное значение ξ):

$$X_t = \log(Ct)$$

$$Y_t = t \cdot \log(C)$$

$$Z_t = C \cdot \log(at)$$

Опишем множества траекторий для каждого из процессов:

$$X_t: \ A = \{f(t) : f(t) = \log(Ct) \mid t > 0, C > 0\}$$

$$Y_t: \ B = \{f(t) : f(t) = t\log(C) \mid t > 0, C > 0\}$$

$$Z_t: \ D = \{f(t) : f(t) = C\log(at) \mid t > 0, C > 0, a > 0\}$$

Чтобы ответить на вопрос о совпадении множеств процессов, необходимо проверить, является ли одно множество подмножеством другого:

$$\exists \mathrm{C} = 1 : A \neq B$$

$$\exists \mathrm{C} = 1, a = 1 : B \neq D$$

$$\exists \mathrm{C} = 1, a = 2 : A \neq D$$

Множества траекторий вышеперечисленных случайных процессов не совпадают.

Для каждого процесса X_t, Y_t, Z_t рассчитаем $n-$мерные распределения:

$$\mathbb{P}\{X_{t1} \leq x_1, ..., X_{tk} \leq x_k\} = \mathbb{P}\{\log(a\xi t) \leq x_1, ..., \log(a\xi t) \leq x_k\} = \mathbb{P}\{\xi \leq \frac{e^{x_1}}{at}, ..., \xi \leq \frac{e^{x_k}}{at}\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\xi \leq \min\left(\frac{e^{x_1}}{at}, ..., \frac{e^{x_k}}{at}\right)\} = F_\xi\left(\min\left(\frac{e^{x_1}}{at}, ..., \frac{e^{x_k}}{at}\right)\right)$$

$$\mathbb{P}\{Y_{t1} \le x_1, ..., Y_{tk} \le x_k\} = \mathbb{P}\{\log(\xi^{at}) \le x_1, ..., \log(\xi^{at}) \le x_k\} = \mathbb{P}\{\xi \le e^{\frac{x_1}{at}}, ..., \xi \le e^{\frac{x_k}{at}}\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\xi \le \min\left(e^{\frac{x_1}{at}}, ..., e^{\frac{x_k}{at}}\right)\} = F_\xi\left(\min\left(e^{\frac{x_1}{at}}, ..., e^{\frac{x_k}{at}}\right)\right)$$

$$\mathbb{P}\{Z_{t1} \le x_1, ..., Z_{tk} \le x_k\} = \mathbb{P}\{\log(at)^\xi \le x_1, ..., \log(at)^\xi \le x_k\} = \mathbb{P}\{\xi \le \frac{x_1}{log(at)}, ..., \xi \le \frac{x_k}{log(at)}\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\xi \le \min\left(e^{\frac{x_1}{at}}, ..., e^{\frac{x_k}{at}}\right)\} = F_\xi\left(\min\left(e^{\frac{x_1}{at}}, ..., e^{\frac{x_k}{at}}\right)\right)$$

Несложно заметить, что у вышеперечисленных процессов n-мерные распределения не совпадают.

Задача 2

$$X_t = \sin(t)\xi_1 + \cos(t)\xi_2$$

Зафиксируем $A, B \in \Omega$, тогда:

$$X_t = \sin(t)A + \cos(t)B$$

i) Если $A^2 + B^2 = 0$, тогда:

$$X_t = 0, \forall t$$

Если $A^2 + B^2 \neq 0$, тогда:

$$X_t = \sqrt{A^2+B^2}\left(\sin(t)\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}} + \cos(t)\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\sin(t)\cos\left(\arccos\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)\right)\right.$$
$$\left. + \cos(t)\sin\left(\arccos\left(\frac{A^2+B^2-B^2}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)\right)\right) = \sqrt{A^2+B^2}\left(\sin\left(t + \arccos\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)\right)\right)$$

ii) Процесс X_t представляет собой линейную комбинацию двух независимых нормальных случайных величин. Значит, случайная величина X_t в момент времени t также имеет нормальное распределение. Найдём математическое ожидание и дисперсию X_t:

$$E(X_t) = \sin(t)\mathbb{E}(\xi_1) + \cos(t)\mathbb{E}(\xi_2) = 0$$

$$Var(X_t) = \sin^2(t)\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi_1) + \cos^2(t)\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi_2) = 1$$

Запишем двумерные невырожденные (коэффициент корреляции по модулю не равен единице) распределения процесса X_t:

$$\mathbb{P}\{X_{t1} \le x_1, X_{t2} \le x_2\} = \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\rho^2}} \int\limits_{-\infty}^{x_1}\int\limits_{-\infty}^{x_2} \exp\left(-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left(u_1^2 - 2\rho u_1 u_2 + u_2^2\right)\right) du_2 du_1$$

Воспользовавшись результатом из пункта 3, найдём ρ:

$$\rho = \frac{cov(X_t, X_s)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_t)\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_s)} = \frac{\sin(t)\sin(s) + \cos(t)\cos(s)}{1 \cdot 1} = \sin(t)\sin(s) + \cos(t)\cos(s)$$

iii) Найдём $K(t,s) = (X_t, X_s)$:

$$K(t,s) = cov(X_t, X_s) = cov(\sin(t)\xi_1 + \cos(t)\xi_2, \sin(s)\xi_1 + \cos(s)\xi_2) = \sin(t)\sin(s)\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi_1) +$$
$$+ \sin(t)\cos(s) cov(\xi_1, \xi_2) + \cos(t)\sin(s) cov(\xi_1, \xi_2) + \cos(t)\cos(s)\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi_2) = \sin(t)\sin(s) + \cos(t)\cos(s)$$

Ответ: $K(t,s) = \sin(t)\sin(s) + \cos(t)\cos(s)$

Задача 3

$$X_t = \xi + Ct$$

Множество траекторий процесса X_t представляет собой лучи, берущие начало от оси ординат. Необходимо найти такие траектории, которые пересекают ось абцисс при $t \in [0,1]$.

Рассмотрим прямую $y = kx + b$ при $x \in [0,1], k \neq 0$:

$$y = kx + b = 0, x \in [0,1]$$

Из полученного выражения выразим x:

$$x = -\frac{b}{k}$$

$$0 \leq -\frac{b}{k} \leq 1$$
$$-k \leq b \leq 0, \quad k > 0$$
$$0 \leq b \leq -k, \quad k < 0$$

Таким образом, получены соотношения углового коэффициента и свободного члена, при которых прямая $y = kx + b$ пересекаетс ось абцисс на отрезке $x \in [0,1]$

Зная функцию распределения непрерывной случайной величины ξ, рассчитаем вероятности при разных C:

$C > 0$

$$\mathbb{P}\{X_t = 0\} = \mathbb{P}\{-C \leq \xi < 0\} = F_\xi(0) - F_\xi(-C)$$

$C < 0$

$$\mathbb{P}\{X_t = 0\} = \mathbb{P}\{0 < \xi \leq C\} = F_\xi(C) - F_\xi(0)$$

$C = 0$

$$\mathbb{P}\{X_t = 0\} = \mathbb{P}\{\xi = 0\} = 0$$

Задача 4

$$X_t = t(\xi_1 + a(\xi_2 + 2a))$$

Множество траекторий процесса X_t представляет собой лучи, проведённые из начала координат. Вопрос задачи можно сформулировать следующим образом:

$$\mathbb{P}\{w : t(\xi_1 + a(\xi_2 + 2a)) \downarrow \text{по t}\} = 0$$

Таким образом, решение задачи сводится к решению квадратного неравенства:

$$\xi_1 + a(\xi_2 + 2a) \geq 0$$

Преобразов неравенство, получим:

$$2a^2 + a\xi_2 + \xi_1 \geq 0$$

Решим неравенство методом интервалов:

$$D = \xi_2^2 - 8\xi_1$$

$$a_{1,2} = \frac{-\xi_2 \pm \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}$$

В результате разложения на множители, неравенство имеет вид:

$$2\left(a + \frac{\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}\right) \cdot \left(a + \frac{\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}\right) \geq 0$$

Решением неравенства является объединение двух закрытых лучей:

$$a \in \left(-\infty, \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}\right] \cup \left[\frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4}, +\infty\right)$$

Зная, что $\xi_1, \xi_2 \sim U[-1, 1]$, необходимо исследовать область значений границ найденного выше объединения закрытых лучей:

$$-\frac{1}{4} \leq \frac{-\xi_2 + \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4} \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{-\xi_2 - \sqrt{\xi_2^2 - 8\xi_1}}{4} \leq \frac{1}{4}$$

Для решения неравенства нам подходит верхняя граница первого неравенства и нижняя граница второго неравенства. В итоге получаем, что почти все траектории процесса X_t возрастют

при
$$a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$$
Ответ: $a \in (-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$

Задача 5

$$M_n = max(X_1, ..., X_n)$$

$$\mathbb{P}\{M_{n_1} \le x_1, ..., M_{n_k} \le x_k\} = \mathbb{P}\{M_{n_1} \le \min(x_1, ..., x_k), ..., M_{n_k} \le x_k\} =$$
$$= \mathbb{P}\{\max(X_1, ..., X_{n_1}) \le \min(x_1, ..., x_k), ..., \max(X_1, ..., X_{n_k}) \le x_k\} =$$
$$= \mathbb{P}\{X_1 \le \min(x_1, ..., x_k), ..., X_{n_1} \le \min(x_1, ..., x_k), ..., X_1 \le x_k, ..., X_{n_k} \le x_k\} =$$
$$= \mathbb{P}\{X_1 \le \min(x_1, ..., x_k)\} \cdot ... \cdot \mathbb{P}\{X_{n_1} \le \min(x_1, ..., x_k)\} \cdot ... \cdot \mathbb{P}\{X_{n_k+1} \le x_k\} \cdot ... \cdot \mathbb{P}\{X_{n_k} \le x_k\} =$$
$$= \prod_{n=1}^{n_1} \mathbb{P}\{X_i \le \min(x_1, ..., x_k)\} \cdot ... \cdot \prod_{n=n_{k-1}+1}^{n_k} \mathbb{P}\{X_i \le x_k\} =$$
$$= (\mathbb{P}\{X_1 \le \min(x_1, ..., x_k)\})^{n_1} \cdot ... \cdot (\mathbb{P}\{X_1 \le x_k\})^{n_k - n_{k-1}} = F^{n_1}(\min(x_1, ..., x_k)) \cdot ... \cdot F^{n_k - n_{k-1}}(x_k)$$

Задача 6

ξ - случайная величина, показывающая число этажей без остановки лифта. $\xi = \xi_2 + .. + \xi_{12}$, где ξ_i - индикатор, что лифт не остановится на $i-$ом этаже:

$$\xi_i = \begin{cases} 1 & \text{лифт не остановился} \\ 0 & \text{лифт остановился} \end{cases}$$

Посчитаем соответствующие вероятности:

$$\mathbb{P}\{\xi_i = 1\} = \left(\frac{11}{12}\right)^{10}$$

$$\mathbb{P}\{\xi_i = 0\} = 1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{10}$$

$$E(\xi_i) = \left(\frac{11}{12}\right)^{10} \cdot 1 + \left(1 - \left(\frac{11}{12}\right)^{10}\right) \cdot 0 = \left(\frac{11}{12}\right)^{10}$$

Посчитаем математическое ожидание числа остановок лифта:

$$E(\xi) = E(\xi_2 + ... + \xi_{12}) = 11 \cdot E(\xi_i) = 11 \cdot \left(\frac{11}{12}\right)^{10} = 4.607$$

Ответ: $E(\xi) = 4.607$