Домашнее задание 8

Тихонов Сергей

8 декабря 2021

Задача 1

$$\xi \sim exp(\lambda) \qquad \eta \sim U[0, A] \qquad \xi \text{ и } \eta\text{- независимы}$$

$$X_t = \begin{cases} \xi, & t \in [0, 1) \\ \eta, & t \geq 1 \end{cases}$$

Рассчитаем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}\left(\int\limits_0^2 X_t dt\right) = \int\limits_0^2 \mathbb{E}(X_t)dt = \int\limits_0^1 \mathbb{E}(\xi)dt + \int\limits_1^2 \mathbb{E}(\eta)dt = \left(\frac{t}{\lambda}\bigg|_0^1\right) + \left(\frac{At}{2}\bigg|_1^2\right) = \frac{1}{\lambda} + A - \frac{A}{2} = \frac{1}{\lambda} + \frac{A}{2}$$

Теперь рассчитаем дисперсию:

$$\mathbb{V}\text{ar}\left(\int\limits_0^2 X_t dt\right) = \int\limits_0^2 \int\limits_0^2 K(t, s)dsdt =$$

Поскольку случайные величины ξ и η являются независимыми, ковариационная функция имеет вид:

$$K(t, s) = \mathbb{C}\text{ov}(X_t, X_S) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2}, & t \in [0, 1), s \in [0, 1) \\ \frac{A^2}{12}, & t \geq 1, s \geq 1 \\ 0, else \end{cases}$$

Тогда подставим ковариационную функцию для подсчёта дисперсии:

$$= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 \frac{1}{\lambda^2}dsdt + \int\limits_1^2 \int\limits_1^2 \frac{A^2}{12}dsdt = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{A^2}{12}$$

Задача 2

Для начала найдём математическое ожидание:

$$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}\left(\int\limits_0^t W_u^2 du\right) = \int\limits_0^t \mathbb{E}(W_u^2)du = \int\limits_0^t \mathbb{V}\text{ar}(W_u) + (\mathbb{E}(W_u))^2 du = \int\limits_0^t udu = \frac{u^2}{2}\bigg|_0^t = \frac{t^2}{2}$$

Теперь вычислим ковариационную функцию:

$$\mathbb{C}\text{ov}\left(\int\limits_0^t W_u^2 du, \int\limits_0^s W_u^2 du\right) = \int\limits_0^t \int\limits_0^s \mathbb{C}\text{ov}(W_u^2, W_v^2) dvdu$$

Далее необходимо рассчитать ковариационную функцию процесса W_t^2. Будем считать её для случая $t > s$:

$$\mathbb{C}\text{ov}(W_t^2, W_s^2) = \mathbb{C}\text{ov}((W_t - W_s + W_s)^2, W_s^2) = \mathbb{C}\text{ov}((W_t - W_s)^2 + 2W_S(W_t - W_s) + W_s^2, W_s^2) =$$

$$= 0 + 2 \cdot \mathbb{C}\text{ov}(W_s(W_t - W_s), W_s^2) + \mathbb{V}\text{ar}(W_s^2)$$

Отдельно рассмотрим полученные выше слагаемые. Начнём с первого:

$$\mathbb{C}\text{ov}(W_s(W_t - W_s), W_s^2) = \mathbb{E}(W_s(W_t - W_s)W_s^2) - \mathbb{E}(W_s(W_t - W_s)) \cdot \mathbb{E}(W_s^2) =$$

$$= \mathbb{E}(W_s^3) \cdot \mathbb{E}(W_t - W_s) - \mathbb{E}(W_s(W_t - W_s)) \cdot \mathbb{E}(W_s^2) = 0$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое:

$$W_s \overset{d}{=} \sqrt{s} \cdot \xi, \qquad \xi \sim N(0,1)$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(W_s^2) = \mathbb{V}\text{ar}(s \cdot \xi^2) = s^2\, \mathbb{V}\text{ar}(\xi^2) = s^2 \cdot (\mathbb{E}(\xi)^4 - (\mathbb{E}(\xi)^2)^2) = 2 \cdot s^2$$

В общем случае:

$$K(t,s) = 2(min(t,s))^2$$

Вернёмся к ковариационной функции X_t:

$$\int\limits_0^t \int\limits_0^s \mathbb{C}\text{ov}(W_u^2, W_v^2) dvdu = \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^u 2 \cdot (\min(u,v))^2 dv + \int\limits_u^s 2 \cdot (\min(u,v))^2 dv\right) du =$$

$$= \int\limits_0^t \left(\int\limits_0^u 2v^2 dv + \int\limits_u^s 2u^2 dv\right) du = \int\limits_0^t \frac{2}{3}u^3 + 2u^2 s - 2u^3 du = -\frac{1}{3}u^4 + \frac{2}{3}u^3 s\bigg|_0^t = -\frac{1}{3}t^4 + \frac{2}{3}t^3 s$$

Задача 4

Начнём рассуждения с интеграла в левой части. Поскольку интеграл является Винеровским, то справедливо:

$$\int\limits_0^t (2t-u)dW_u \sim N\left(0, \int\limits_0^t (2t-u)^2 du\right)$$

Известно, что функции $m(t)$ и $K(t,s)$ полностью определяют гауссовский процесс. Поскольку $m(t) = 0$ для любого Винеровского интеграла, остаётся найти $K(t,s)$:

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\int\limits_0^t (2t-u)dW_u, \int\limits_0^s (2s-u)dW_u\right) =$$

$$= \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\int\limits_0^{max(t,s)} (2t-u)I\{u \in [0,t]\}dW_u, \int\limits_0^{max(t,s)} (2s-u)I\{u \in [0,s]\}dW_u\right) =$$

Воспользуемся свойством изометрии:

$$= \int\limits_0^{max(t,s)} (2t-u)(2s-u) \cdot I\{u \in [0, min(t,s)]\}du = \int\limits_0^{min(t,s)} (2t-u)(2s-u)du =$$

Рассмотрим случай $t < s$:

$$= 4ts^2 - ts^2 - s^3 + \frac{s^3}{3} = 3s^2t - \frac{2}{3}s^3$$

Аналогичным образом, рассмотрим правую часть равенства:

$$\int\limits_0^t (3t-4u)dW_u \sim N\left(0, \int\limits_0^t (3t-4u)^2 du\right)$$

Как и в предыдущем случае, для Винеровского интеграла $m(t) = 0$. Аналогичным образом, рассчитаем $K(t,s)$:

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\int\limits_0^t (3t-4u)dW_u, \int\limits_0^s (3s-4u)dW_u\right) =$$

$$= \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\int\limits_0^{max(t,s)} (3t-4u)I\{u \in [0,t]\}dW_u, \int\limits_0^{max(t,s)} (3s-4u)I\{u \in [0,s]\}dW_u\right) =$$

Воспользуемся свойством изометрии:

$$= \int\limits_0^{max(t,s)} (3t-4u)(3s-4u)\cdot I\{u\in[0,min(t,s)]\}du = \int\limits_0^{min(t,s)} (3t-4u)(3s-4u)du =$$

Рассмотрим случай, когда $t<s$:

$$= 9ts^2 - 6ts^2 - 6s^3 + 16\frac{s^3}{3} = 3s^2t - \frac{2}{3}s^2$$

В результате, в левой и правой части стоят Винеровские интегралы, имеющие нормальное распределение с одинаковыми $m(t)$ и $K(t,s)$, а значит равными по распределению.

Задача 5

Для начала покажем, что процесс X_t имеет нормальное распределение с нулевым математическим ожидаем:

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_0^{t_i} \left(a_0 + a_1\cdot\frac{u}{t_i} + \ldots + a_n\frac{u^n}{t_i^n}\right)dW_u = \int\limits_0^{t_i}\sum_{i=1}^n \lambda_i(a_0 + a_1\cdot\frac{u}{t_i} + \ldots + a_n\frac{u^n}{t_i^n})dW_u =$$

$$= \int\limits_0^T \sum_{i=1}^n (a_0 + a_1\cdot\frac{u}{t_i} + \ldots + a_n\frac{u^n}{t_i^n})I\{u\in[0,t_i]\}dW_u \sim N(0,\ldots)$$

Поскольку любой винеровский интеграл имеет нормальное распределение причём с $m(t)=0$. Теперь осталось показать, что $K(t,s)=min(t,s)$:

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t,X_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\int\limits_0^t a_0 + a_1\cdot\frac{u}{t} + \ldots + a_n\cdot\frac{u^n}{t^n}dW_u, \int\limits_0^s a_0 + a_1\cdot\frac{u}{s} + \ldots + a_n\cdot\frac{u^n}{s^n}dW_u\right) =$$

$$= \mathbb{C}\mathrm{ov}\left(\int\limits_0^{max(t,s)} \sum_{i=0}^n a_i\left(\frac{u}{t}\right)^i I\{u\in[0,t]\}dW_u, \int\limits_0^{max(t,s)} \sum_{i=0}^n a_i\left(\frac{u}{s}\right)^i I\{u\in[0,s]\}dW_u\right) =$$

Воспользуемся свойством изометрии:

$$= \int\limits_0^{max(t,s)} \sum_{i=0}^n a_i\left(\frac{u}{s}\right)^i \cdot \sum_{i=0}^n a_i\left(\frac{u}{t}\right)^i \cdot I\{u\in[0,min(t,s)]\}du = \int\limits_0^{min(t,s)} \sum_{i=0}^n a_i\left(\frac{u}{s}\right)^i \cdot \sum_{i=0}^n a_i\left(\frac{u}{t}\right)^i du =$$

Далее будем рассматривать случай, когда $s<t$:

$$= \sum_{i=1}^n a_i^2\cdot\frac{s^{2i+1}}{2i+1}\cdot\frac{1}{(st)^i} + \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=1}^n a_ia_j\cdot\frac{s^{j+1}}{j+1}\cdot\left(\frac{1}{t^j}+\frac{1}{s^j}\right) = \ldots$$

Задача 6

$$\int\limits_a^b W_t^2 dW_t = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}}^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})$$

Можно показать, что правая часть эквивалентна левой:

$$3\sum_{i=1}^n (W_{t_{i-1}})^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = W_b^3 - W_a^3 - \sum_{i=1}^n (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^3 - 3\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{t_i} - W_{t_{i-1}})^2$$

Начнём с рассмотрения первой суммы. Для начала, упомянем тот факт, что $\mathbb{E}|W_t - W_s|^6 = (6-1)!!\sqrt{t-s}^6 = 15|t-s|^3$. Тогда справедливо следующее равенство, причём сходимость понимается в смысле среднего квадратического:

$$\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n (W_{ti} - W_{t_{i-1}})^3|^2 = 15\sum_{i=1}^n (t_i - t_{i-1})^3 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Теперь рассмотрим вторую сумму. Здесь подразумевается, что вторая сумма сходится к $\int\limits_a^b W_t dt$:

$$\mathbb{E}|\sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}} (W_{ti} - W_{t_{i-1}})^2 - \sum_{i=1}^n W_{t_{i-1}(t_i - t_{i-1})}|^2 \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

Вернёмся к изначальному выражению:

$$3\sum_{i=1}^n (W_{t_{i-1}})^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = W_b^3 - W_a^3 - 3\int\limits_a^b W_t dt$$

Поделим обе части на 3:

$$\sum_{i=1}^n (W_{t_{i-1}})^2 (W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) = \frac{1}{3}(W_b^3 - W_a^3) - \int\limits_a^b W_t dt$$

Наконец, запишем итоговое выражение:

$$\int\limits_a^b W_t^2 dW_t = \frac{1}{3}(W_b^3 - W_a^3) - \int\limits_a^b W_t dt$$