Домашнее задание 6

Тихонов Сергей

22 ноября 2021

Задача 1

i) e^{X_t} не является гауссовским процессом, поскольку e^{X_t} принимает отрицательные значения с вероятностью 0, поскольку экспонента не может принимать отрицательные значения.

Если уходить в детали, то e^{X_t} в каждый момент времени t представляет собой случайную величину, имеющую логнормальное распределение.

ii) $(X_t + X_1)$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X_{t_i} + X_1) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_1 + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i}$$

- линейная комбинация компонент вектора $\vec{\eta}_1 = (X_1, X_{t_1}, \ldots, X_{t_n})$, причем X_t - гауссовский процесс $\Rightarrow \vec{\eta}_1$ - гауссовский вектор $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (X_{t_i} + X_1) \sim N \Rightarrow X_{t_i} + X_1$ - гауссовский процесс.

iii) $(X_t + \xi)$

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i (X_{t_i} + \xi) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \xi$$

- линейная комбинация компонент вектора $\vec{\eta}_2 = (X_{t_1} + \xi, \ldots, X_{t_n} + \xi)$, причем X_t - гауссовский процесс, а ξ распределено нормально по условию, причём X_t и ξ независимы (а значит $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i X_{t_i}$ и $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \xi$ - независимы) $\Rightarrow \vec{\eta}_2$ - гауссовский вектор $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i (X_{t_i} + \xi) \sim N \Rightarrow X_{t_i} + \xi$ - гауссовский процесс.

Задача 2

(i) $K(t, s) = sin(\lambda(t - s))$

Необходимо проверить свойства симметричности и неотрицательной определённости.

$$K(t, s) = sin(\lambda(t - s)) \neq sin(\lambda(s - t)) = K(s, t)$$

Значит, $K(t, s)$ не является ковариационной функцией.

(ii) $K(t, s) = cos(\lambda(t - s))$

Необходимо проверить свойства симметричности и неотрицательной опр

$$K(t,s) = cos(\lambda(t-s)) = cos\lambda t \cdot cos\lambda s + sin\lambda t \cdot sin\lambda s = cos(\lambda s - \lambda t) = cos(\lambda(s-t)) = K(s,t)$$

Неотрицательная определенность:

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j cos(\lambda(t_i - t_j)) =$$

Раскроем косинус разности по тригонометрическим формулам:

$$cos(\lambda(t_i - t_j)) = cos(\lambda t_i) \cdot cos(\lambda t_j) + sin(\lambda t_i) sin(\lambda t_j)$$

Подставим в изначальное выражение:

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j cos(\lambda t_i) cos(\lambda t_j) + \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j sin(\lambda t_i) sin(\lambda t_j) = (\sum_{i=1}^{n} u_i cos(\lambda t_i))^2 + (\sum_{i=1}^{n} u_i sin(\lambda t_i))^2 \geq 0$$

Следовательно, для такой $K(t,s)$ существует процесс X_t: $K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_s)$

(iii) $K(t,s) = min(t,s) + cos(\lambda(t-s))$

В данном пункте я буду пользоваться наработками из пункта (ii). Симметричность:

$$K(t,s) = min(t,s) + cos(\lambda(t-s)) = min(s,t) + cos(\lambda(t-s)) = K(s,t)$$

Неотрицательная определенность:

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j K(t_i, t_j) = \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j min(t_i, t_j) + \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j cos(\lambda(t_i - t_j)) =$$

Введём следующую функцию: $f_t(x) := Ix \in [0,t]$:

$$\int\limits_{0}^{\infty} f_{t_i}(x) f_{t_j}(x) dx = min(t_i, t_j)$$

Поскольку:

$$f_{t_i}(x) \cdot f_{t_j}(x) = 1 \quad \rightarrow \quad x \in [0, t_i], x \in [0, t_j] \quad \rightarrow \quad x \in [0, min(t_i, t_j)]$$

Раскроем косинус разности аналогично пункту (ii) и воспользуемся введённой функцией:

$$\sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j \int\limits_{0}^{\infty} f_{t_i}(x) \cdot f_{t_j}(x) dx + \sum_{i,j=1}^{n} u_i u_j cos(\lambda(t_i - t_j)) =$$

$$= \int\limits_0^\infty \left(\sum_{i=1}^n u_i f_{t_i}(x)\right)^2 dx + \left(\sum_{i=1}^n u_i cos\lambda t_i\right)^2 + \left(\sum_{i=1}^n u_i sin\lambda t_i\right)^2 \geq 0$$

Следовательно, для такой $K(t,s)$ существует процесс X_t: $K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_s)$

Задача 3

X_t, Y_t - независимые гауссовские процессы. $\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y_t) = m(t)$

$$K_x(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_s), \qquad K_y(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_s)$$

Гауссовские процессы X_t, Y_t, конечномерные распределения которых являются гауссовские векторы $(X_{t_1}, \dots, X_{t_n})$ и $(Y_{t_1}, \dots, Y_{t_n})$ соответственно, являются независимыми и нормально распределёнными случайными величинами в каждый момент времени t. Рассмотрим линейную комбинацию компонент вектора $(X_t + Y_t, X_t - Y_t)$:

$$\lambda_1(X_t + Y_t) + \lambda_2(X_t - Y_t) = (\lambda_1 + \lambda_2)X_t + (\lambda_1 - \lambda_2)Y_t \sim N \qquad \forall t$$

поскольку это линейная комбинация независимых нормально распределённых случайных величин. Значит $(X_t + Y_t, X_t - Y_t)$ - гауссовский вектор. Тогда необходимым и достаточным условием независимости случайных процессов $X_t + Y_t$ и $X_t - Y_t$ будет их некоррелированность:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t + Y_t, X_t - Y_t) = 0$$

Распишем это выражение:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t + Y_t, X_t - Y_t) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_t) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, Y_t) + \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, Y_t) - \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_t) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_t) - \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_t) =$$

$$= K_x(t,t) - K_y(t,t) = 0$$

В результате,

$$K_x(t,t) = K_y(t,t)$$

Задача 4

(i) translation invariance:

1) Покажем, что конечномерное распределение $\widetilde{B}_t$ представляет собой гауссовский вектор:

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i \widetilde{B}_{t_i} = \sum_{i=1}^n \lambda_i (B_{t_i + t_0} - B_{t_0}) = \sum_{i=1}^n \lambda_i (B_{t_i + t_0}) - \left(\sum_{i=1}^n \lambda_i\right) B_{t_0}$$

- линейная комбинация компонент вектора $\vec{\eta} = (B_{t_1 + t_0}, \dots, B_{t_n + t_0}, B_{t_0})$. B_t - гауссовский процесс, значит $\vec{\eta}$ - гауссовский вектор $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{B}_{t_i} \sim N \Rightarrow \widetilde{B}_t$ - гауссовский процесс.

2) Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(\widetilde{B}_t) = \mathbb{E}(B_{t+t_0} - B_{t_0}) = \mathbb{E}(B_{t+t_0}) - \mathbb{E}(B_{t_0}) = 0 - 0 = 0$$

3) Ковариационная функция для случая $t > s \geq 0$:

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\widetilde{B}_t, \widetilde{B}_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{t+t_0} - B_{t_0}, B_{s+t_0} - B_{t_0}) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{t+t_0}, B_{s+t_0}) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{t+t_0}, B_{t_0}) -$$

$$- \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{s+t_0}, B_{t_0}) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(B_{t_0}) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{t+t_0} - B_{s+t_0} + B_{s+t_0}, B_{s+t_0}) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{t+t_0} - B_{t_0} + B_{t_0}, B_{t_0}) -$$

$$- \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{s+t_0} - B_{t_0} + B_{t_0}, B_{t_0}) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(B_{t_0}) = (s + t_0) - t_0 - t_0 + t_0 = s$$

Тогда в общем случае:

$$K(t,s) = min(t,s)$$

Значит, $\widetilde{B}_t$ является Броуновским движением по определению. (ii) scaling invariance:

1) Покажем, что конечномерное распределение $\widetilde{B}_t$ представляет собой гауссовский вектор:

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{B}_{t_i} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \lambda^{-1/2} B_{\lambda t_i}$$

- линейная комбинация компонент вектора $\vec{\eta} = (B_{t_1}, \ldots, B_{t_n})$. B_t - гауссовский процесс, значит $\vec{\eta}$ - гауссовский вектор $\Rightarrow \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \widetilde{B}_{t_i} \sim N \Rightarrow \widetilde{B}_t$ - гауссовский процесс. 2) Математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(\widetilde{B}_t) = \mathbb{E}(\lambda^{-1/2} B) = \lambda^{-1/2} \mathbb{E}(B_{\lambda t}) = 0$$

3) Ковариационная функция для сулчая $t > s \geq 0$:

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\widetilde{B}_t, \widetilde{B}_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\lambda^{-1/2} B_{\lambda t}, \lambda^{-1/2} B_{\lambda s} = \frac{1}{\lambda} \mathbb{C}\mathrm{ov}(B_{\lambda t} - B_{\lambda s} + B_{\lambda s}, B_{\lambda s}) = \frac{1}{\lambda} \mathbb{V}\mathrm{ar}(B_{\lambda s}) = \frac{\lambda}{\lambda} s = s$$

Тогда в общем случае:

$$K(t,s) = min(t,s)$$

Значит, $\widetilde{B}_t$ является Броуновским движением по определению.

Задача 5

(i) Поскольку (X, Y) - гауссовский вектор, то воспользуемся свойством многомерного нормального распределения: X независимо $(Y - \alpha X) \Leftrightarrow \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y - \alpha X) = 0$. Распишем это выражение:

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y - \alpha X) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) - \alpha \, \mathbb{V}\mathrm{ar}(X) = 0$$

Поскольку X неявляется вырожденой, то $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X) \neq 0$:

$$\alpha = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$$

(ii) Найдём условное распределение $Y|X$ с помощью плотности:

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{Y,X}(y,x)}{f_X(x)} = \frac{\frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y}\frac{1}{\sqrt{1-\rho^2}}exp\{-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{1-\rho^2}\left(\frac{(x-\mu_x)^2}{\sigma_x^2} - \rho\cdot\frac{2(x-\mu_x)(y-\mu_y)}{\sigma_x\sigma_y} + \frac{(y-\mu_y)^2}{\sigma_y^2}\right)\}}{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\cdot\frac{1}{\sigma_x}exp\{-\frac{1}{2\sigma_x}(x-\mu_x)^2\}} =$$

Сократим множители, воспользуемся свойствами экспоненты и в полученном выражении выделим полный квадрат:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{1-\rho^2}\sigma_y}\cdot exp\{-\frac{1}{2\sigma_y^2(1-\rho^2)}\cdot\left(y-\mu_y-\rho\sigma_y\cdot\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}\right)^2\}$$

В результате имеем, что $Y|X \sim N(\mu_y + \rho\cdot\frac{x-\mu_x}{\sigma_x}, \sigma_y^2(1-\rho^2))$.

$$\mathbb{E}(Y|X) = \mu_y + \rho\sigma_y\cdot\frac{x-\mu_x}{\sigma_x} = \mathbb{E}(Y) + \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}}\cdot\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(Y)}\cdot\frac{X-\mathbb{E}(X)}{\sqrt{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}} =$$

$$= \mathbb{E}(Y) + \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}\cdot(X-\mathbb{E}(X))$$

где $\alpha = \frac{\mathbb{C}\mathrm{ov}(X,Y)}{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X)}$ - совпало с первым пунктом.

Задача 6

$f(t,s) = e^{-|t-s|}$ $\forall (t_1, ..., t_n) \in R^n$ нужно доказать, что матрица $M_n = (e^{-|t_i-t_j|})_{i,j=1}^n$ является неотрицательно определённой.

Для этого воспользуемся критерием сильвестра и с помощью индукции покажем, что $detM_n > 0$.

Будем считать, что $t_1 < t_2 < ... < t_n$, иначе переставим строки и столбцы матрицы M_n так, чтобы это условие выполнялось:

$$\begin{pmatrix} e^{-|t_1-t_1|} & e^{-|t_1-t_1|} & \dots & e^{-|t_1-t_n|} \\ e^{-|t_2-t_1|} & e^{-|t_2-t_2|} & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ e^{-|t_n-t_1|} & \dots & \dots & e^{-|t_n-t_n|} \end{pmatrix}$$

Умножим каждую i-ую строку на e^{t_i}, затем разделим каждый столбец на e^{t_j}, причем учитывая, что $t_1 < \ldots < t_n$, раскроем модули:

$$\begin{pmatrix} 1 & e^{2(t_1-t_2)} & \ldots & e^{2(t_1-t_n)} \\ 1 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & e^{2(t_{n-1}-t_n)} \\ 1 & \ldots & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Вычтем предпоследнюю строку из последней и разложим определитель по последней строке:

$$detM_n = (1 - e^{2(t_{n-1}-t_n})\cdot detM_{n-1}$$

Повторим вышеописанные действия:

$$detM_n = \prod_{i=2}^{n}(1 - e^{2(t_{i-1}-t_i)}) \geq 0$$

А значит, $f(t,s) = e^{-|t-s|}$ - неотрицательно определена.