Домашнее задание 8

Тихонов Сергей

8 декабря 2021

Задача 1

$$X_t = cos(wt + \theta) \qquad \theta \sim U[0, 2\pi] \qquad w \in R$$

Найдём математическое ожидание процесса:

$$\mathbb{E}X_t = \mathbb{E}(cos(wt + \theta)) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} cos(wt + x)\frac{1}{2\pi} \cdot I\{\theta \in [0, 2\pi]\}dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{0}^{2\pi} cos(wt + x)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(sin(wt + x)\Big|_0^{2\pi} \right) = 0$$

Найдём ковариационную функцию процесса:

$$K(t, s) = \mathbb{C}\text{ov}(X_t, X_s) = \mathbb{C}\text{ov}(cos(wt+\theta), cos(2s+\theta)) = \mathbb{C}\text{ov}(cos(wt)\cdot cos\theta - sin(wt)\cdot sin\theta, cos(ws)\cdot cos\theta -$$

$$-sin(ws) \cdot sin\theta) = cos(wt) \cdot cos(ws) \cdot \mathbb{V}\text{ar}(cos\theta) - cos(wt) \cdot sin(ws) \cdot \mathbb{C}\text{ov}(cos\theta, sin\theta) -$$

$$-cos(ws) \cdot sin(wt) \cdot \mathbb{C}\text{ov}(cos\theta, sin\theta) + sin(wt) \cdot sin(ws) \cdot \mathbb{V}\text{ar}(sin\theta)$$

Найдём $\mathbb{V}\text{ar}(cos\theta)$, $\mathbb{V}\text{ar}(sin\theta)$, а также $\mathbb{C}\text{ov}(cos\theta, sin\theta)$:

$$\mathbb{V}\text{ar}(cos\theta) = \mathbb{E}(cos\theta)^2 - (\mathbb{E}cos\theta))^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(sin\theta) = \mathbb{E}(sin\theta)^2 - (\mathbb{E}sin\theta))^2 = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{C}\text{ov}(cos\theta, sin\theta) = \mathbb{E}(cos\theta \cdot sin\theta) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} cos(x) \cdot sin(x)dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{(sin(x))^2}{2}\Big|_0^{2\pi} \right) = 0$$

Тогда итоговое выражение для ковариационной функции:

$$K(t, s) = \frac{1}{2} \cdot cos(wt) \cdot cos(ws) + \frac{1}{2} \cdot sin(wt) \cdot sin(ws) = \frac{1}{2} \cdot cos(w(t - s))$$

Легко заметить, что такой процесс является стационарным $\forall w \in R$. Теперь запишем автоковариационную функцию:

$$\gamma(r) = \frac{1}{2} \cdot cos(wr)$$

Поскольку процесс является стационарным в широком смысле, проверим достаточное условие эргодичности:

$$\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{T-1}\frac{1}{2} \cdot cos(wr)$$

Рассмотрим вышеприведённую сумму для $w \neq 2\pi k, k \in Z$:

$$\frac{1}{2}\sum_{r=0}^{T-1}\frac{1}{2} \cdot cos(wr) \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

Теперь рассмотрим при $w = 2\pi k$. По определению:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t = \frac{1}{T}\sum_{t=}^{T} cos(2\pi kt + \theta) = cos(\theta) \neq const$$

А значит, процесс является стационарным в широком смысле и эргодическим при:

$$w \neq 2\pi k, \qquad k \in Z$$

Задача 2

$$\gamma_\xi(h) = \begin{cases} 3 & h = 0 \\ 1 & |h| = 2 \\ 0 & else \end{cases}$$

Запишем спектральную плотность для ξ:

$$g_\xi(x) = \frac{1}{2\pi}\sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-iuh}\cdot\gamma_\xi(h) = \frac{1}{2\pi}\left(3 \cdot 1 + 1 \cdot e^{-2iu} + 1 \cdot e^{2iu}\right) = \frac{1}{2\pi}(3+e^{2iu}+e^{-2iu}) = \frac{1}{2\pi}(3+2\cdot cos(2u))$$

$$\rho(h) = \begin{cases} 3 & h = 0 \\ 2 & h = 1 \\ 1 & h = 2 \end{cases}$$

$$\mathcal{F}[\rho](u) = \sum_{h=-\infty}^{h=+\infty} e^{iuh}\rho(h) = 1 \cdot 3 + e^{iu} \cdot 2 + 1 \cdot e^{2iu} = 3 + 2 \cdot e^{iu} + e^{2iu}$$

$$|\mathcal{F}[\rho](u)|^2 = |3 + 2 \cdot e^{iu} + e^{2iu}|^2 = (3 + 2 \cdot e^{iu} + e^{2iu}) \cdot (3 + 2 \cdot e^{-iu} + e^{-2iu}) =$$

$$= 14+8(cos(u)+i\cdot sin(u))+3(cos(2u)+i\cdot sin(2u))+8(cos(-u)+i\cdot sin(-u))+3(cos(-2u)+i\cdot sin(-2u))$$

$$= 14 + 16 \cdot cos(u) + 6 \cdot cos(2u)$$

Теперь вычислим спектральную плотность для η:

$$g_\eta(u) = g_\xi(u) \cdot |\mathcal{F}[\rho](u)|^2 = \frac{1}{2\pi}(64 \cdot cos(u) + 46 \cdot cos(2u) + 16 \cdot cos(3u) + 6 \cdot cos(4u) + 48)$$

Зная, что:

$$g_\eta(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{+\infty} e^{-iuh} \cdot \gamma_\eta(h)$$

Выпишем автоковариационную функцию для Y:

$$\gamma_\eta(h) = \begin{cases} 48 & h = 0 \\ 32 & |h| = 1 \\ 23 & |h| = 2 \\ 8 & |h| = 3 \\ 3 & |h| = 4 \end{cases}$$

Задача 3

$$X_t = c \cdot W_t + \xi \cdot cos(\frac{\pi t}{6}) \qquad \xi \sim N(0, 1)$$

Проверим эргодичность процесса:

$$\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t = \frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} W_t + \xi \cdot \sum_{t=1}^{T} cos(\frac{\pi t}{6})$$

Поскольку выполнены следующие пункты:

1. W_t - гауссовский процесс, а значит $\frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} W_t \sim N$
2. $\xi \sim N$, а значит $\left(\sum_{t=1}^{T} cos(\frac{\pi t}{6})\right) \xi \sim N$
3. ξ и W_t независимы, а значит $\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$

Найдём параметры нормального распределения:

$$\mathbb{E}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) = \mathbb{E}\left(\frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} W_t + \frac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) = \frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} \mathbb{E}(W_t) + \frac{1}{T}\mathbb{E}(\xi)\sum_{t=1}^{T} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right) = 0$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T} X_t\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} W_t + \frac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right) = \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} W_t\right) + \mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{\xi}{T}\sum_{t=1}^{T} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)$$

Рассмотрим первое слагаемое. Для этого воспользуемся фактом с семинара:

$$\sum_{t=1}^{T} W_t = \sum_{k=1}^{T} k \cdot \xi_k, \qquad\qquad \xi_k \sim N(0,1)$$

Тогда окончательное выражение для дисперсии:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{c}{T}\sum_{t=1}^{T} W_t\right) = \frac{c^2}{T^2}\,\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\sum_{k=1}^{T} k \cdot \xi_k\right) = \frac{c^2}{T^2}\sum_{k=1}^{T} k^2\,\mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi_k) = \frac{c^2}{T^2}\sum_{k=1}^{T} k^2 = \frac{c^2}{6}\cdot\frac{T(T+1)(2T+1)}{T^2}$$

Выражение для дисперсии конечно только при $c = 0$. Теперь рассмотрим второе слагаемое дисперсии:

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}\left(\frac{1}{T}\left(\sum_{t=1}^{T} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)\xi\right) = \frac{1}{T^2}\cdot\left(\sum_{t=1}^{T} cos\left(\frac{\pi t}{6}\right)\right)^2 \cdot 1 \leq \frac{1}{T^2}\cdot\left(\frac{1}{sin\left(\frac{\pi}{12}\right)}\right)^2 \xrightarrow{T\to\infty} 0$$

Задача 4

$$\mathbb{E}(Y_t) = \alpha + \beta \cdot t \qquad\qquad \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_{t+h}) = e^{-\lambda h}$$

Найдём математическое ожидание и ковариационную функцию процесса X_t:

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(Y_{t+1} - Y_t) = \mathbb{E}(Y_{t+1}) - \mathbb{E}(Y_t) = \alpha + \beta(t+1) - \alpha - \beta t = \beta$$

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_{t+1} - Y_t, Y_{s+1} - Y_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_{t+1}, Y_{s+1}) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_{s+1}) - \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_s, Y_{t+1}) =$$

$$+\,\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_s) = 2 \cdot e^{-\lambda(t-s)} - 2 \cdot e^{-\lambda(t-s-1)} = \gamma(t-s)$$

Значит, процесс Y_t является стационарным в широком смысле. Запишем его автоковариационную функцию:

$$\gamma(h) = 2 \cdot e^{-\lambda|h|} - e^{-\lambda|h-1|} - e^{-\lambda|h+1|}$$

Запишем предел автоковариационной функции при $h \to \infty$:

$$\lim_{h\to\infty}(2 \cdot e^{-\lambda|h|} - e^{-\lambda|h-1|} - e^{-\lambda|h+1|}) = 0$$

Задача 5

$$Y_t = X_t + X_{t-1} + X_{t-2} = \xi_{t+2} + \xi_t + \xi_{t-2}$$

Найдём ковариационную функцию Y_t:

$$\gamma(0) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_t) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(Y_t) = \mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi_{t+2} + \xi_t + \xi_{t-2}) = 3$$

$$\gamma(1) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_{t-1}) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi_{t+2} + \xi_t + \xi_{t-2}, \xi_{t+1} + \xi_{t-1} + \xi_{t-1}) = 0$$

$$\gamma(2) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_{t-2}) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi_{t+2} + \xi_t + \xi_{t-2}, \xi_t + \xi_{t-2} + \xi_{t-4}) = 2$$

$$\gamma(3) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_{t-3}) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi_{t+2} + \xi_t + \xi_{t-2}, \xi_{t-1} + \xi_{t-3} + \xi_{t-5}) = 0$$

$$\gamma(4) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_{t-4}) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi_{t+2} + \xi_t + \xi_{t-2}, \xi_{t-2} + \xi_{t-4} + \xi_{t-6}) = 1$$

$$\gamma(n) = 0, \qquad \forall n \neq 0, \pm 2, \pm 4$$

В результате, автоковариационная функция имеет вид:

$$\gamma_(h) = \begin{cases} 3, & h = 0 \\ 2, & |h| = 2 \\ 1, & |h| = 4 \\ 0, & else \end{cases}$$

Запишем спектральную плотность для Y:

$$g_Y(u) = \frac{1}{2\pi} \sum_{h=-\infty}^{-\infty} e^{-iuh} \cdot \gamma_Y(h) = \frac{1}{2\pi}(3 \cdot 1 + 2 \cdot e^{2iu} + 2 \cdot e^{-2iu} + 1 \cdot e^{4iu} + 1 \cdot e^{-4iu}) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}(3 + 4 \cdot cos(2u) + 2 \cdot cos(4u))$$