Домашнее задание 4

Тихонов Сергей

12 октября 2021

Задание 1

Формализуем условие:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \sim exp\,(\lambda = 100)$$
$$\eta_1, \eta_2, \ldots \sim exp\left(\alpha = \frac{1}{500}\right)$$
$$\nu_1, \nu_2, \ldots \sim exp\left(\beta = \frac{1}{2000}\right)$$

Тогда:

$$X_t = \sum_{k=1}^{N_t} Y_k = \sum_{k=1}^{N_t} (p\eta_k + (1-p)\nu_k)$$

Для поиска математического ожидания X_t воспользуемся известными формулами:

$$\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y_t) = \lambda t (p\mathbb{E}\eta + (1-p)\mathbb{E}\nu) = \lambda t (p500 + (1-p)2000) = 80000t$$

$$\mathbb{V}\text{ar}(X_t) = \mathbb{E}(Y_t) = \lambda t (p\mathbb{E}\eta^2 + (1-p)\mathbb{E}\nu^2) = \lambda t (p500000 + (1-p)8000000) = 200000000t$$

Проведём преобразование Лапласа:

$$\mathcal{L}[X_t](s) = \mathbb{E}(e^{-sX_t}) = e^{\lambda t(\phi_Y(u)-1)} = e^{\lambda t(\mathbb{E}e^{-sY}-1)}$$

Найдём преобразование Лапдляласа для Y:

$$\mathcal{L}[Y](s) = p\int\limits_0^{+\infty} e^{-x(s+\alpha)}dx + (1-p)\int\limits_0^{+\infty} e^{-x(s+\beta)} = p\alpha\mathcal{L}[1](\alpha+s) + (1-p)\beta\mathcal{L}[1](\beta+s) = p\frac{\alpha}{(\alpha+s)} + \\ + (1-p)\frac{\beta}{(\beta+s)}$$

Вернёмся к преобразованию Лапласа для X_t:

$$\mathcal{L}[X_t](s) = e^{\lambda t(\frac{\alpha}{(\alpha+s)} + (1-p)\frac{\beta}{(\beta+s)} - 1)} = e^{100t(\frac{4}{5}\cdot\frac{1}{500s+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2000s+1} - 1)}$$

Поскольку неоднородный Процесс Пуассона является частным случаем процесса с вознаграждением, можем записать его асимптотическое поведение $t \to \infty$:

$$\frac{X_t}{t} \to \frac{\mathbb{E}Y_1}{\mathbb{E}\xi_1} = \frac{800}{\frac{1}{100}}$$

$$X_t \to 80000t \qquad t \to \infty$$

Задание 2

$$\xi_1, \xi_2, \ldots \sim N(0,1), \qquad Z_t = \sum_{k=1}^{N_t} \xi_k$$

$$X_n \sim N(0,n)$$

В данном решении предлагается посчитать характеристическую функцию от левой и правой части равенства по распределению и в случае, если они совпадают, то равенство по распределению выполнится, поскольку каждой характеристической функции соответствует единственная функция распределения. Начнём с правой части равенства:

$$\phi_{Z_t}(u) = \mathbb{E}e^{iuZ_t} = \mathbb{E}e^{iu\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(e^{iu\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k}|N_t = n)\cdot\mathbb{P}\{N_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(e^{iu\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k})\cdot\mathbb{P}\{N_t = n\}$$

Отдельном рассмотрим $\mathbb{E}\left(e^{iu\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k}\right)$:

$$\mathbb{E}(e^{iu\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k}) = \mathbb{E}(e^{iu(\xi_1+\ldots+\xi_n)}) = \mathbb{E}(e^{iu\xi_1})\cdot\ldots\cdot\mathbb{E}(e^{iu\xi_n}) = e^{-\frac{u^2}{2}}\cdot\ldots\cdot e^{-\frac{u^2}{2}} = \left(e^{-\frac{u^2}{2}}\right)^n = e^{-\frac{u^2 n}{2}}$$

Подставим полученный результат в $\phi_{Z_t}(u)$:

$$\phi_{Z_t}(u) = \mathbb{E}e^{iuZ_t} = \mathbb{E}e^{iu\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k} = \sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(e^{iu\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k}|N_t = n)\cdot\mathbb{P}\{N_t = n\} = \sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{u^2 n}{2}}\cdot\mathbb{P}\{N_t = n\}$$

Теперь рассмотрим левую часть равенства, обозначим распределения:

$$X_n \sim N(0,n)$$

$$Y_t = X_{N_t} \sim N(0, N_t)$$

Функцию ϕ_{X_n} для $X_n \sim N(0,n)$ будем считать известной:

$$\phi_{X_n}(u) = e^{-\frac{u^2}{2}n}$$

$$\phi_Y(u)=\mathbb{E}e^{iuZ}=\mathbb{E}e^{iuY}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(e^{iuX_n}|N_{t=n})\cdot\mathbb{P}\{N_t=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}\mathbb{E}(e^{iuX_n})\cdot\mathbb{P}\{N_t=n\}=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-\frac{u^2n}{2}}\mathbb{P}\{N_t=n\}$$

Таким образом, $\phi_Z(u)$ и $\phi_Y(u)$ совпадают, а значит выполнено равенство по распределению:

$$Y_t\stackrel{d}{=}\sum_{k=1}^{N_t}\xi_k$$

Задание 3

Рассмотрим различные случаи соотношения детерминированного времени t и случайной величины η. Математические ожидания будут вычислены с помощью law of total expectation. Начнём со случая, когда $t<\eta$:

$$\mathbb{E}(N_t)=\int\limits_0^t\mathbb{E}(N_t-N_0|\eta=s)\cdot\frac{1}{10}dt=\int\limits_0^t\Lambda(t)\cdot\frac{1}{10}dt$$

Для случая $t>\eta+1$:

$$\mathbb{E}(N_t)=\int\limits_0^t\mathbb{E}(N_t-N_{\eta+1}+N_\eta-N_0|\eta=s)\frac{1}{10}dt=\int\limits_0^t(\Lambda(t)-\Lambda(s+1)+\Lambda(s))\cdot\frac{1}{10}ds$$

Для случая $\eta\le t\le\eta+1$:

$$\mathbb{E}(N_t)=\int\limits_0^t\mathbb{E}(N_\eta-N_0|\eta=s)ds=\int\limits_0^t\Lambda(s)ds$$

Все краевые случаи включаются в вышеописанные.

Задание 4

$$S_k:=min\{t:N_t=k\}$$

$$\xi_k=S_k-S_{k-1}\qquad\lambda(t)=\Lambda'(t)$$

i) База индукции.

$$\mathbb{P}\{S_1\le t\}=\mathbb{P}\{N_t\ge1\}=1-\mathbb{P}\{N_t=0\}=1-e^{-\Lambda(t)}\cdot\frac{(\Lambda(t))^0}{1}=1-e^{-\Lambda(t)}=S_{S_1}(t)$$

$$f_{S_1}(t)=\frac{\partial}{\partial t}F_{S_1}(t)=\lambda(t)e^{-\Lambda(t)}$$

Шаг индукции. Предположим, что $f_{S_n} = e^{-\Lambda(t)}\frac{(\Lambda(t))^{k-1}}{(k-1)!}\lambda(t)$. Докажем для шага $k+1$:

$$\mathbb{P}\{S_{k+1} \leq t\} = \mathbb{P}\{S_k \leq t\} - \mathbb{P}\{N_t = k\} = F_{S_k}(t) - e^{-\Lambda(t)}\frac{(\Lambda(t))^k}{k!}$$

Продифференцируем левую и правую часть:

$$f_{S_{k+1}}(t) = f_{S_k}(t) + \lambda e^{-\Lambda(t)}\frac{(\Lambda(t))^k}{k!} - e^{-\Lambda(t)}\frac{k(\Lambda(t))^{k-1}}{k!}\lambda(t) =$$
$$= e^{-\Lambda(t)}\lambda(t)\left(\frac{(\Lambda(t))^{k-1}}{(k-1)!} + \frac{\Lambda(t)^k}{k!} - \frac{k\Lambda(t)^{k-1}}{k!}\right) = e^{-\Lambda(t)}\lambda(t)\cdot\frac{\Lambda(t)^k}{k!}$$

ii) Посчитаем искомую функцию распределения для k, где $k \geq 2$:

$$F_{\xi_k} = \mathbb{P}\{\xi_k \leq t\} = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}(\xi_t \leq t | S_{k-1} = s) f_{s_{k-1}} ds = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}\{N_{t+s} - N_s \geq 1\} f_{S_{k-1}}(s) ds =$$
$$= \int\limits_0^\infty \left(1 - e^{-(\Lambda(t+s)-\Lambda(s))}\frac{(\Lambda(t+s)-\Lambda(s))^0}{1}\right) e^{-\Lambda(s)}\cdot\frac{\Lambda(s)^{k-2}}{(k-2)!}\lambda(s)ds = \int\limits_0^\infty e^{-\Lambda(s)}\cdot\frac{\Lambda(s)^{k-2}}{(k-2)!}\lambda(s)ds -$$
$$- \int\limits_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)}\cdot\frac{\Lambda(s)^{k-2}}{(k-2)!}\lambda(s)ds = 1 - \int\limits_0^\infty e^{-\Lambda(t+s)}\cdot\frac{\Lambda(s)^{k-2}}{(k-2)!}\lambda(s)ds$$

Задание 5

i) $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k(\phi_1(u))^k$

$$\hat{\phi}(u) = \sum_{k=1}^\infty a_k(\phi_1(u))^k = \sum_{k=1}^\infty a_k e^{iux_k k}$$

Тогда, зная что $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k = 1$ и $a_1, a_2, \ldots \geq 0$, можем заключить, что $\hat{\phi}(u)$ - характеристическая функция дискретной случайной величины, которая принимает значения $x_1, 2x_2, 3x_3, \ldots$ с вероятностями $\mathbb{P}\{\xi = k\} = a_k$.

ii) $\sum\limits_{k=1}^\infty a_k\phi_k(u)$ Заметим, что $\phi_k(u)$ - равномерно непрерывная функция $u \in \mathbb{R}$, а значит и линейная комбинация непрерывных функций $\phi_k(u)$ тоже является непрерывной функцией.Более того, $\hat{\phi}_k(0) = \sum\limits_{k=1}^\infty a_k\phi_k(0) = \sum\limits_{k=1}^\infty a_k = 1$.

Поскольку вышеописанные условия выполнены, воспользуемся теоремой Боккера - Хинчина:

$$\sum_{k,l=1}^n \phi(t_k - t_l)\lambda_n\bar{\lambda}_l \geq 0$$

Поскольку $\phi_k(u)$ - характеристическая функция, для неё выполнена положительная определённость, а веса $a_1, a_2, \ldots > 0 \Rightarrow$ неравенство выполнено для любой пары k, l. Значит, $\hat{\phi}(u)$ тоже является характеристической функцией.

iii) $\frac{2}{2-\phi_1(u)} - 1$

$$\hat{\phi}(u) = \frac{2}{2-\phi_1(u)} - 1 = \frac{1}{1-\frac{\phi_1(u)}{2}} - 1 = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\phi_1(u)}{2}\right)^n - 1 = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\phi_1(u)^n}{2^n} =$$
$$= \frac{\phi_1(u)}{2} + \frac{\phi_2(u)^2}{4} + \ldots = \frac{e^{iux_1}}{2} + \frac{e^{iux_2}}{4} + \ldots$$

Значит, имеем некоторую дискретную случайную величину, принимающую значения $X_1, 2X_2, \ldots$ с вероятностями $\mathbb{P}\{\xi = n\} = \frac{1}{2^n}$