Домашнее задание 7

Тихонов Сергей

30 ноября 2021

Задача 1

$$X_t = \xi B_t, \qquad \xi \sim N(1,1), \qquad \xi \text{ и } B_t \text{ независимы}$$

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\xi B_t) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(B_t) = 1 \cdot 0 = 0$$

Рассмотрим случай $t > s \geq 0$:

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi B_t, \xi B_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi B_t - \xi B_s + \xi B_s, \xi B_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\xi(B_t - B_s), \xi B_s) + \mathbb{V}\mathrm{ar}(\xi B_s) =$$

$$\mathbb{E}(\xi^2 B_s^2) - \mathbb{E}(\xi)\mathbb{E}(B_s) = \mathbb{E}(\xi^2) \cdot \mathbb{E}(B_s^2) = 2s$$

В общем случае

$$K(t,s) = 2\min(t,s)$$

Примером гауссовского процесса является $Y_t := \sqrt{2}B_t$: $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \sqrt{2} B_{t_i}$ - линейная комбинация компонент вектора $\eta = (B_{t_0}, \ldots, B_{t_n})$, поскольку B_t - гауссовский процесс, то $\vec{\eta}$ - гауссовский вектор, а значит $\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i \sqrt{2} B_{t_i} \sim N$, а значит $\sqrt{2}B_t$ - гауссовский процесс.

Проверим его математическое ожидание и ковариационную функцию:

$$\mathbb{E}(Y_t) = \mathbb{E}(\sqrt{2}B_t) = \sqrt{2}\mathbb{E}(B_t) = 0$$

$$\mathbb{C}\mathrm{ov}(Y_t, Y_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\sqrt{2}B_t, \sqrt{2}B_s) = 2\min(t,s)$$

Задача 2

Выпишем ковариационную матрицу для сулчая $t_2 > t_1 > 0$:

$$\Sigma = \begin{pmatrix} t_1 & t_1 \\ t_1 & t_2 \end{pmatrix}$$

Найдём определитель ковариационной матрицы:

$$|\Sigma| = t_1 \cdot t_2 - t_1^2 = t_1(t_2 - t_1)$$

Найдём обратную матрицу для ковариационной:

$$\Sigma^{-1} = \frac{1}{t_1(t_2-t_1)} \begin{pmatrix} t_2 & -t_1 \\ -t_1 & t_1 \end{pmatrix} = \frac{1}{t_2-t_1} \begin{pmatrix} \frac{t_2}{t_1} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Выпишем плотность двумерного нормального распределения:

$$p(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} exp\left(-\frac{1}{2(t_2-t_1)} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \frac{t_2}{t_1} & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} exp\left(-\frac{1}{2(t_2-t_1)} \left(\frac{t_2}{t_1} \cdot x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2\right)\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi\sqrt{t_1(t_2-t_1)}} exp\left(-\frac{1}{2(t_2-t_1)} \cdot (x_2-x_1)^2 - \frac{t_2-t_1}{2(t_2-t_1)t_1} \cdot x_1^2\right) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_2-t_1}} exp\left(-\frac{1}{2(t_2-t_1)} \cdot (x_2-x_1)^2\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{t_1}} exp\left(-\frac{1}{2t_1} \cdot x_1^2\right) =$$

$$= \phi_{(0,t_2-t_1)}(x_2 - x_1) \cdot \phi_{(0,t_1)}(x_1)$$

Задача 3

(i) $\mathbb{E}|\Gamma_t - \Gamma_s|^\alpha \neq C|t-s|^{1+\beta}$ Воспользуемся фактом, что

$$\Gamma_t - \Gamma_s \overset{d}{=} \Gamma_{t-s}$$

А зная, что $\Gamma_{t-s} \sim \Gamma(k(t-s), \theta)$, распишем правую часть через следующий интеграл:

$$\mathbb{E}|\Gamma_t - \Gamma_s|^\alpha = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|x|^\alpha}{\Gamma(k(t-s))\theta^{k(t-s}} \cdot x^{k(t-s)-1} e^{-\frac{x}{\theta}} I\{x > 0\} dx = \frac{1}{\Gamma(k(t-s)) \cdot \theta^{k(t-s)}} \int\limits_0^{+\infty} x^{k(t-s)-1+\alpha} e^{-\frac{x}{\theta}} dx =$$

$$= \frac{\Gamma(k(t-s)+\alpha)\theta^{k(t-s)+\alpha}}{\Gamma(k(t-s))\theta^{k(t-s)}} = \frac{\Gamma(k(t-s)+\alpha)}{\Gamma(k(t-s))} \cdot \theta^\alpha = (k(t-s)+\alpha-1) \cdot (k(t-s)+\alpha-2) \cdot \ldots \cdot k(t-s) \cdot \theta^\alpha$$

Необходимо доказать, что несуществует такой комбинации параметров α, C и β, что выполнено следующее неравенство:

$$(k(t-s)+\alpha-1) \cdot (k(t-s)+\alpha-2) \cdot \ldots \cdot k(t-s) \cdot \theta^\alpha \leq C|t-s|^{1+\beta}$$

Отметим, что Гамма распределение в таком виде существует только для $t > s$, поэтому рассматриваем именно такие значения. Зная это, раскроем модуль и поделим левую и правую часть на $t - s$:

$$(k(t-s)+\alpha-1)\cdot(k(t-s)+\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(k(t-s)+1)k\cdot\theta^{\alpha} \le C(t-s)^{\beta}$$

Заметим, что произведения в левой части - положительны и больше единицы ($t > s$, k>0, $\alpha \in$ N), а значит справедливо неравенство:

$$(k(t-s)+\alpha-1)\cdot(k(t-s)+\alpha-2)\cdot\ldots\cdot(k(t-s)+1)k\cdot\theta^{\alpha} \le k\cdot\theta^{\alpha}$$

В результате, теорема Колмогорова выполнина для следующих $t > s$:

$$t - s \ge \left(\frac{k\cdot\theta^{\alpha}}{C}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

Но не выполнено для таких $t > s$, что:

$$t - s < \left(\frac{k\cdot\theta^{\alpha}}{C}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

В результате, изначальное неравенство выполнено не для все t, s, а потому условия теоремы нарушены.

(ii) Сначала проверим, является ли процесс Γ_t стационарным в широком смысле. Для этого посчитаем математическое ожидание:

$$\mathbb{E}(\Gamma_t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot\frac{1}{\Gamma(kt)\cdot\theta^{kt}}\cdot x^{kt-1}\cdot e^{-\frac{x}{\theta}} I\{x>0\}dx = \frac{\Gamma(kt+1)\theta^{kt+1}}{\Gamma(kt)\theta^{kt}} = \theta kt$$

Заметим, что математическое ожидание зависит от времени, а потому можно сразу сказать, что процесс Γ_t нестационарный в широком смысле. Поскольку он нестационарный в широком, то он также является нестационарным в узком смысле.

Задача 4

$$X_t = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) z_k \qquad Z_1, Z_2, \ldots \sim N(0,1), \text{ независимы}$$

(i) $\psi_k(t) = t^k$ Рассмотрим математическое ожидание процесса:

$$\mathbb{E}(X_t) = \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{n} \psi_k \cdot Z_k) = \sum_{k=1}^{n} t^k \cdot \mathbb{E}(Z_k) = \frac{t(1-t)^n}{1-t}\cdot\mathbb{E}(Z_1) = 0$$

Рассмотрим ковариационную функцию процесса:

$$K(t,s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(X_t, X_s) = \mathbb{C}\mathrm{ov}(\sum_{k=1}^{n} \psi_k(t) z_k, \sum_{q=1}^{n} \psi_k(s) z_q) = \sum_{k=1}^{n} \psi_k(t)\psi_k(s) \cdot \mathbb{V}\mathrm{ar}(Z_k) = \sum_{k=1}^{n} (t \cdot s)^k \neq \gamma(t-s)$$

Значит, в первом случае процесс X_t не является стационарным в широком смысле. Поскольку он нестационарный в широком, то он также является нестационарным в узком смысле.

(ii) $\psi_k(t) = \begin{cases} cos(kt) & k\text{- четное} \\ sin(kt) & k\text{- нечетное} \end{cases}$, причем n - четное

Рассмотрим конечномерное распределение процесса. Возьмём $t_1 = \pi/2$:

$$X_{\pi/2} = sin(\pi/2)z_1 + cos(\pi)z_2 + sin(3\pi/2)z_3 + cos(4\pi/2)z_4 + \ldots =$$

$$= (-z_2 + z_4 - z_6 + \ldots + (-1)^{n/2} z_n) + (z_1 sin(\pi/2) - z_3 sin(3\pi/2) + \ldots + z_{n-1} sin((n-1)\pi/2)) \sim N(0, n)$$

Возьмём другой момент времени $t_2 = \pi$:

$$X_\pi = sin(\pi)z_1 + cos(2\pi) + sin(3\pi)z_3 + cos(4\pi)z_4 + \ldots =$$

$$= z_2 + z_4 + \ldots + z_n \sim N(0.n/2)$$

Таким образом, $X_{\pi/2} \overset{d}{\neq} X_\pi$, а значит X_t не является стационарным в узком, а значит и в широком смысле.

Задача 5

Нужно доказать следующее утверждение:

$$\mathbb{P}\{\max_{t\in\mathbb{R}_+} X_t > x\} - \max_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{P}\{X_t > x\} = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\max_{t\in\mathbb{R}_+} \mathbb{P}\{X_t > x\} = \max_{t\in\mathbb{R}_+} \left(1 - \mathbb{P}\{\frac{\xi_0 + \psi(t)\xi_1}{\sqrt{\xi_0 + \psi(t)\xi_1}} \leq \frac{x}{\xi_0 + \psi(t)\xi_1}\}\right) = \max_{t\in\mathbb{R}_+} \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1+\psi^2(t)}}\right)\right) =$$

$$= 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{1 + \max_{t\in\mathbb{R}_+} \psi^2(t)}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)$$

Рассмотрим первое слагаемое.

$$\mathbb{P}\{\max_{t\in\mathbb{R}_+} X_t > x\} = 1 - \mathbb{P}\{\max_{t\in\mathbb{R}_+} X_t \leq x\}$$

Если $\xi_1 > 0$, то:

$$\max_{t\in\mathbb{R}_+}(\xi_0 + \psi(t)\xi_1) = \xi_0 + \xi_1 \max_{t\in\mathbb{R}_+}\psi(t) = \xi_0 + \xi_1$$

Если же $\xi_1 < 0$, то:

$$\max_{t\in\mathbb{R}_+}(\xi_0 + \psi(t)\xi_1) = \xi_0 + \xi_1 \min_{t\in\mathbb{R}_+}\psi(t) = \xi_0 - \xi_1$$

Тогда искомая вероятность раскладывается на сумму непересекающихся событий:

$$\mathbb{P}\{\xi_0 + \xi_1 \le x | \xi_1 > 0\} \cdot \mathbb{P}\{\xi_1 > 0\} + \mathbb{P}\{\xi_0 - \xi_1 \le x | \xi_1 < 0\} \cdot \mathbb{P}\{\xi_1 < 0\} =$$

Заметим, что эти вероятности одинаковые:

$$2 \cdot \mathbb{P}\{\xi_0 + \xi_1 \le x | \xi_1 > 0\} \cdot \mathbb{P}\{\xi_1 > 0\} = 2\mathbb{P}\{\xi_0 + \xi_1 \le x, \xi_1 \ge 0\} =$$

$$\begin{pmatrix} \xi_0 + \xi_1 \\ \xi_1 \end{pmatrix} \sim N\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$= 2\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) dx_2 dx_1$$

Сначала рассмотрим внутренний интеграл:

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{1}{2}(x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2)\right) dx_2 = \frac{1}{2\pi} exp\left(-\frac{1}{2}x_1^2\right) \int\limits_{0}^{+\infty} exp\left(-\frac{1}{2}(2x_2^2 - 2x_1x_2)\right) dx_2 =$$

Проведём замену: $u = \frac{2x_2 - x_1}{2}, du = dx_2$:

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} exp\left(-\frac{1}{4}x_1^2\right) \int\limits_{-x_1/2}^{+\infty} \frac{2}{\sqrt{\pi}} exp\{-u^2\} du =$$

Также воспользуемся свойством функции ошибок $erf(-x) = -erf(x)$:

$$= \frac{1}{4\sqrt{\pi}} exp\left(-\frac{1}{4}x_1^2\right) \cdot \left(1 - erf\left(-\frac{x_1}{2}\right)\right) = \frac{1}{4\sqrt{\pi}} exp\left(-\frac{1}{4}x_1^2\right) \cdot \left(1 + erf\left(\frac{x_1}{2}\right)\right)$$

Перейдём к вычислению второго интеграла:

$$2\int\limits_{-\infty}^{x} \frac{1}{4\sqrt{\pi}} exp\left(-\left(\frac{x_1}{2}\right)^2\right) \cdot \left(1 + erf\left(\frac{x_1}{2}\right)\right) dx_1 =$$

Проведём замену $u = erf(\frac{x_1}{2}) + 1$, $du = \frac{e^{-\frac{x_1^2}{4}}}{\sqrt{\pi}}dx_1$:

$$= 2\int \frac{1}{4}udu = 2 \cdot \frac{u^2}{8}\Bigg| = \frac{\left(erf\left(\frac{x_1}{2}\right)) + 1\right)^2}{8}\Bigg|_{-\infty}^{x_1} = 2 \cdot \left(\frac{\left(erf\left(\frac{x_1}{2}\right) + 1\right)^2}{8} - 0\right) = \frac{\left(erf\left(\frac{x_1}{2}\right) + 1\right)^2}{4}$$

Воспользуемся переходом от функции ошибок к функции стандартного нормального распределения:

$$\Phi(x) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

В нашем случае:

$$\frac{\left(erf\left(\frac{x_1}{2}\right) + 1\right)^2}{4} = \left(\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

В результате, первое слагаемое имеет следующий вид:

$$\mathbb{P}\{\max_{t\in\mathbb{R}_+} X_t > x\} = 1 - \mathbb{P}\{\max_{t\in\mathbb{R}_+} X_t \leq x\} = 1 - \left(\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2$$

Совместим первое и второе слагаемое, тем самым докажем формулу:

$$\mathbb{P}\{\max_{t\in\mathbb{R}_+} X_t > x\} - \max_{t\in\mathbb{R}_+}\mathbb{P}\{X_t > x\} = 1 - \left(\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)^2 - 1 + \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) = \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(1 - \Phi\left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right)$$

Задача 6

Необходимо найти вероятность, то есть вероятность события, что момент времени, когда процесс X_t^1 достигнет точки a, наступит раньше, чем момент времени, когда процесс X_t^2 достигнет a.

$$\mathbb{P}\{\tau_a^1 < \tau_a^2\}$$

Данное событие эквивалентно событию, что максимум процесса X_s^2 на промежутке $0 \leq s \leq \tau_a^1$, поэтому вероятности можно переписать в следующем виде:

$$\mathbb{P}\{\tau_a^1 < \tau_a^2\} = \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq \tau_a^1} X_s^2 < a\} = 1 - \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq \tau_a^1} X_s^2 \geq a\}$$

Распишем по формуле полной вероятности:

$$\mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq \tau_a^1} X_s^2 \geq a\} = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq \tau_a^1} X_s^2 \geq a | \tau_a^1 = x\} \cdot f_{\tau_a^1}(x)dx = \int\limits_0^\infty \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq x} X_s^2 \geq a\} f_{\tau_a^1}(x)dx$$

Сначала найдём вероятность того, что максимум процесса X_s^2 превышает значение a:

$$\mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq x} X_s^2 \geq a\} = \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq x} 2\sigma B_s^2 \geq a\} = \mathbb{P}\{\max_{0\leq s\leq x} B_s^2 \geq \frac{a}{2\sigma}\} = 2\mathbb{P}\{B_x^2 \geq \frac{a}{2\sigma}\} = 2\mathbb{P}\{\sqrt{x}\xi \geq \frac{a}{2\sigma}\} =$$

$$= 2\left(1 - \mathbb{P}\{\xi \le \frac{a}{2\sigma\sqrt{x}}\}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sigma\sqrt{x}}\right)\right)$$

Теперь найдём функцию распределения τ_a^1:

$$\mathbb{P}\{\tau_a^1 < x\} = \mathbb{P}\{\max_{0\le s\le x} X_s^1 > a\} = \mathbb{P}\{\max_{0\le s\le x} \sigma B_s^1 > a\} = \mathbb{P}\{\max_{0\le s\le x} B_s^1 > \frac{a}{\sigma}\} = 2\mathbb{P}\{\sqrt{x}\xi > \frac{a}{\sigma}\} =$$

$$= 2\left(1 - \mathbb{P}\{\xi \le \frac{a}{\sigma\sqrt{x}}\}\right) = 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{\sigma\sqrt{x}}\right)\right)$$

Найдём плотность распределения τ_a^1:

$$p_{\tau_a^1}(x) = \frac{d}{dx}P\{\tau_a^1 < x\} = \frac{a}{\sqrt{x^3}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{a^2/\sigma^2 x}{2\sigma^2}} = \frac{a}{\sqrt{x^3}}\phi_{(0,\sigma^2)}(a/\sigma\sqrt{x})$$

Подставим найденные компоненты в формулу полной вероятности:

$$\mathbb{P}\{\tau_a^1 < \tau_a^2\} = \mathbb{P}\{\max_{0\le s\le x} X_s^1 < a\} = 1 - \mathbb{P}\{\max_{0\le s\le x} X_s^1 \ge a\} = 1 - \int_0^\infty 2\left(1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sigma\sqrt{x}}\right)\right)\phi_{(0,\sigma^2)}(a/\sigma\sqrt{x})\frac{a}{\sqrt{x^2}}dx =$$

Воспользуемся интегралом Плахина:

$$= 1 - \frac{2}{\pi}arctg\left(\frac{a/\sigma}{a/2\sigma}\right) = 1 - \frac{2}{\pi}arctg(2) \approx 0.3$$

Что логично, поскольку у процесса X_t^2 стандартное отклонение в два раза больше, чем у X_t^1, поэтому второй процесс достигает точки a примерно в два раза чаще.