Домашнее задание 2

Тихонов Сергей

27 сентября 2021

Задача 1

$f_1(x) = e^{-ax}\sin(bx)$

$$\mathcal{L}[f_1](s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\sin(bx)e^{-sx}dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x(a+s)}\sin(bx)dx = -\frac{1}{a+s}\sin(bx)e^{-x(a+s)}\Big|_0^{+\infty} +$$

$$+\frac{b}{a+s}\int\limits_0^{+\infty}\cos(bx)e^{-x(a+s)}dx = \frac{b}{a+s}\left(-\frac{1}{a+s}\cos(bx)e^{-x(a+s)}\Big|_0^{+\infty}\right) - \frac{b}{a+s}\cdot\frac{b}{a+s}\int\limits_0^{+\infty}\sin(bx)e^{-x(a+s}dx =$$

$$= \frac{b}{(a+s)^2} - \frac{b^2}{(a+s)^2}\int\limits_0^{+\infty}\sin(bx)e^{-x(a+s)}dx$$

Пусть $A = \int\limits_0^{+\infty}\sin(bx)e^{-x(a+s)}dx$, тогда:

$$A\left(1+\left(\frac{b}{a+s}\right)^2\right) = \frac{b}{(a+s)^2}$$

$$A = \frac{b}{(a+s)^2+b^2}$$

Ответ: $\mathcal{L}[f_1](s) = \frac{b}{(a+s)^2+b^2}$

$f_2(x) = e^{-ax}cos(bx)$

$$\mathcal{L}[f_2](s) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-ax}\cos(bx)e^{-sx}dx = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x(a+s)}\cos(bx)dx = -\frac{1}{a+s}\cos(bx)e^{-x(a+s)}\Big|_0^{+\infty} - \frac{b}{a+s}$$

$$\int\limits_0^{+\infty}\sin(bx)e^{-x(a+s)}dx = \frac{1}{a+s} - \frac{b}{a+s}\left(-\frac{1}{a+s}\sin(bx)e^{-x(a+s)}\Big|_0^{+\infty}\right) - \frac{b}{a+s}\cdot\frac{b}{a+s}\int\limits_0^{+\infty}\cos(bx)e^{-x(a+s}dx =$$

$$= \frac{1}{a+s} - \frac{b^2}{(a+s)^2}\int\limits_0^{+\infty}\cos(bx)e^{-x(a+s)}dx$$

Пусть $A = \int\limits_0^{+\infty} \cos(bx)e^{-x(a+s)}dx$, тогда:

$$A\left(1+\left(\frac{b}{a+s}\right)^2\right) = \frac{1}{a+s}$$

$$A = \frac{a+s}{(a+s)^2+b^2}$$

Ответ: $\mathcal{L}[f_2](s) = \frac{a+s}{(a+s)^2+b^2}$

Задача 2

По определению $N_t = \max\{k : S_k \le t\}$ В нашем случае, необходимо найти N_t при $t = 3$:

$$N_3 = \max\{k : S_k \le 3\}$$

С учётом того, что ξ_i принимает значения:

$$\xi_i = \begin{cases} 1, & 1/2 \\ 2, & 1/2 \end{cases}$$

Возможно сделать перебор всех возможных ситуаций и найти искомое математическое ожидание. Рассмотрим случаи:

ξ_1	ξ_2	ξ_3	S_1	S_2	S_3	$\max\{k : S_k \le 3\}$	$\mathbb{P}$
1	1	1	1	2	3	3	0.125
1	2	any	1	3	any	2	0.25
2	1	any	2	3	any	2	0.25
2	2	any	2	4	any	1	0.25
1	1	2	1	2	4	2	0.125

Посчитаем математическое ожидание:

$$E(N_3) = max\{k : S_k \le 3\} = 3\frac{1}{8} + 2\frac{5}{8} + 1\frac{1}{4} = 1.875$$

Ответ $E(N_3) = 1.875$

Задача 3

i) $E(N_t)$

$$f_\xi(x) = \frac{1}{2}e^{-x}(x+1), x > 0$$

Сначала найдём преобразование Лапласа для плотности f:

$$\mathcal{L}[f](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-x}x](s) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-x}](s) = \frac{1}{2}\mathcal{L}[x](s+1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[e^{-x}](s) = \frac{1}{2(s+1)^2} + \frac{1}{2(s+1)} = \frac{s+2}{2(s+1)^2}$$

Воспользуемся фактом с лекции, найдём преобразование Лапласа для U:

$$\mathcal{L}[U](s) = \frac{\mathcal{L}[f](s)}{s(1-\mathcal{L}[f](s))} = \frac{\frac{s+2}{2(s+1)^2}}{s(1-\frac{s+2}{2(s+1)^2})} = \frac{\frac{s+2}{2(s+1)^2}}{\frac{s(2(s+1)^2-s-2}{2(s+1)^2}} = \frac{s+2}{s^2(2s+3)}$$

Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:

$$\frac{s+2}{s^2(2s+3)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s^2} + \frac{C}{2s+3}$$

$$As(2s+3) + B(2s+3) + Cs^2 = s+2$$

$$\begin{cases} 2A + C = 0 \\ 3A + 2B = 1 \\ 3B = 2 \end{cases}$$

Тогда:

$$\frac{s+2}{s^2(2s+3)} = -\frac{1}{9s} + \frac{2}{3s^2} + \frac{2}{9(2s+3)}$$

Подберём U:

$$U = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3s} + \frac{1}{9}e^{-\frac{3}{2}s}$$

Тогда искомое математическое ожидание имеет вид:

$$E(N_t) = -\frac{1}{9} + \frac{2}{3t} + \frac{1}{9}e^{-\frac{3}{2}t}$$

ii) t - детерменировано. Запишем тождество Вальда:

$$E(\xi_1 + \cdots + \xi_{N_t+1}) = E(\xi_1)E(N_t+1), \text{ где } \xi_1 + ... + \xi_{N_t+1} = S_{N_t+1}$$

Процесс времени ожидания имеет вид: $Y_t := S_{N_t+1} - t$ Вычтем из обоих частей t:

$$E(S_{N_t+1}) - t = E(\xi_1)E(N_t+1), \text{где } \xi_1 + ... + \xi_{N_t+1} = S_{N_t+1} - t$$

Сначала посчитаем $E(\xi_1)$ с помощью плотности f_xi:

$$E(\xi_1) = \int_0^\infty x\frac{1}{2}e^{-x}(x+1)dx = \frac{1}{2}\int_0^\infty e^{-x}x^2dx + \frac{1}{2}\int_0^\infty xe^{-x}dx = \frac{1}{2}\mathcal{L}[x^2](1) + \frac{1}{2}\mathcal{L}[x](1) = \frac{1}{2}\frac{2}{1^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{1^2} = \frac{3}{2}$$

В результате:

$$E(S_{N_t+1} - t) = E(\xi_1)E(N_t + 1) - t$$

$$E(S_{N_t+1} - t) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{3t} + \frac{1}{9}e^{-\frac{3}{2}t} + 1\right) - t$$

Ответ: $E(S_{N_t+1} - t) = \frac{3}{2}\left(-\frac{1}{9} + \frac{2}{3t} + \frac{1}{9}e^{-\frac{3}{2}t} + 1\right) - t$

Задача 4

Формализуем условия задачи на математическом языке:

$\xi_1, \xi_2, ...$ - время между поломками.

$$E(\xi_1) = 18$$

$\eta_1, \eta_2, ...$ - сколько стоит самостоятельный ремонт.

$$E(\eta_1) = m$$

$\zeta_1, \zeta_2, ... \sim U[m, M]$ - сколько стоит ремонт в автосервисе.

$$E(\zeta_1) = \frac{m + M}{2}$$

χ - случайная величина, характеризующая возможность починить машину самостоятельно:

$$\chi_i = \begin{cases} 1, & p \\ 0, & 1 - p \end{cases}$$

ν - случайная величина, характеризующая случай, когда самостоятельный ремонт оказывается некачественным:

$$\nu_i = \begin{cases} 1, & q \\ 0, & 1 - q \end{cases}$$

i) Определим суммарные затраты на *некачественный самостоятельный* ремонт как R_i:

$$R_i = \chi_i \left(\eta_i \nu_i + \nu_i \zeta_i\right)$$

Тогда:

$$E(R_1) = pq\frac{3m + M}{2}$$

ЗБЧ для данной задачи имеет вид при $t \to \infty$:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N_t} R_n}{t} \to \frac{E(R_1)}{E(\xi_1)} = \frac{pq(3m+M)}{36}$$

Тогда ассимптотическое поведение суммарных затрат при $t \to \infty$ имеет вид:

$$\sum_{n=1}^{N_t} R_n \to \frac{pq(3m+M)}{36} \cdot t$$

ii) R_i - затраты при самостоятельном ремонте

W_i - затраты на ремонт в автосервисе

Тогда искомое соотношение имет вид:

$$\sum_{n=1}^{N_t} R_n < \sum_{n=1}^{N_t} W_n$$

Затраты при самостоятельном ремонте с учётом возможного некачественного ремонта:

$$R_i = \chi_i(1-\eta_i)\nu_i + \chi_i\eta_i(\nu_i + \zeta_i) + (1-\chi_i)\zeta_i$$

$$E(R_1) = p(1-q)m + pq(m + \frac{m+M}{2}) + (1-p)\frac{m+M}{2}$$

Затраты при ремонте в автосервисе:

$$W_i = \zeta_i$$

$$E(W_1) = \frac{m+M}{2}$$

При $t \to \infty$ запишем ЗБЧ, предвраительно разделив искомое соотношение на t:

$$\frac{\sum\limits_{n=1}^{N_t} R_n}{t} < \frac{\sum\limits_{n=1}^{N_t} W_n}{t}$$

$$\frac{E(R_1)}{E(\xi_1)} < \frac{E(W_1)}{E(\xi_1)}$$

$$p(1-q)m + pq\left(m + \frac{m+M}{2}\right) + (1-p)\frac{m+M}{2} < \frac{m+M}{2}$$

Упростим выражение, в результате получим следующее соотношение параметров:

$$\frac{m}{M} < \frac{1-q}{1+q}$$

Задание 5

$$y'' - 6y' + 8y = e^{-4x}$$

$$y(0) = 1, y'(0) = 3$$

Возьмём преобразование Лапласа от правой и левой части:

$$\mathcal{L}[y''](s) - 6\mathcal{L}[y'](s) + 8\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[e^{-4x}](1)$$

Избавимся от преобразований Лапласа для производных:

$$s^2\mathcal{L}[y](s) - sy(0) - y'(0) - 6s\mathcal{L}[y](s) + 6y(0) + 8\mathcal{L}[y](s) = \mathcal{L}[e^{-4x}](1)$$

Выразим преобразование Лапласа для функции y:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{s^2 + s - 11}{(s-4)(s+4)(s-2)}$$

Воспользуемся методом неопределённых коэффициентов:

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{A}{s-4} + \frac{B}{s+4} + \frac{C}{s-2}$$

$$\begin{cases} A + B + C = 1 \\ 2A - 6C = 1 \\ -8A - 16B + 8C = -11 \end{cases}$$

Искомые коэффициенты:

$$A = \frac{27}{48}, B = \frac{20}{48}, C = \frac{1}{48}$$

$$\mathcal{L}[y](s) = \frac{27}{48(s-4)} + \frac{20}{48(s+4)} + \frac{1}{48(s-2)}$$

Подберём y:

$$y = \frac{27}{48}e^{4x} + \frac{20}{48}e^{2x} + \frac{1}{48}e^{-4x}$$

Ответ: $y = \frac{27}{48}e^{4x} + \frac{20}{48}e^{2x} + \frac{1}{48}e^{-4x}$

Задача 6

i) Тождество Вальда имеет вид:

$$\mathbb{E}(S_{N_t+1}) = \mu\mathbb{E}(N_t + 1)$$

Легко заметить на графике, что $\mathbb{E}(S_{N_t+1} > t$, поскольку S_{N_t+1} - следующая эпоха после t.

$$\mu\mathbb{E}(N_t + 1) > t$$

Преобразуем выражение и получим искомый результат:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} > \frac{1}{\mu} - \frac{1}{t}$$

ii) $b-$ константа, $b > 0$

$\breve{\xi} = \min(b, \xi)$ причём $\breve{\xi}_1, \breve{\xi}_2$ – i.i.d. Заметим, что $\breve{\xi} \leq \xi \ \forall i$, следовательно $\breve{S}_n \leq S_n \forall n$. Воспользуемся известным факторм, что $\{S_n \leq t\} = \{N_t \geq n\}$. Следовательно, $\breve{N}_t \geq N_t$, а значит и $\mathbb{E}(\breve{N}_t) \geq \mathbb{E}(N_t)$.

Далее, воспользуемся уже известным приёмом из пункта (i):

$$\breve{S}_{\breve{N}_t+1} \leq t + b$$

$$\mathbb{E}(\breve{S}_{\breve{N}_t+1}) \leq t + b$$

Учитывая вышеполученные неравенства, получим:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leq \frac{\mathbb{E}(\breve{N}_t)}{t} = \frac{\mathbb{E}(\breve{S}_{N_t+1})}{t\breve{\mu}(b)} - \frac{1}{t} \leq \frac{t+b}{t\breve{\mu}(b)}$$

Подставим $b = \sqrt{t}$:

$$\frac{\mathbb{E}(N_t)}{t} \leq \frac{\mathbb{E}(\breve{N}_t)}{t} \leq \frac{t+\sqrt{t}}{t\breve{\mu}(\sqrt{t})} = \frac{1}{\breve{\mu}(\sqrt{t})} + \frac{1}{\sqrt{t}\breve{\mu}(\sqrt{t})}$$

iii) Теперь докажем, что $\breve{\mu}(\sqrt{t}) \to \mu$ при $t \to \infty$.

Для этого воспользуемся известным:) фактом из теории вероятности, с учётом того факта, что $\xi \geq 0$:

$$\breve{\mu}(b) = \mathbb{E}(\breve{\xi}_n(b)) = \int\limits_0^b [1 - F_\xi(x)]\, dx$$

Подставим $b = \sqrt{t}$:

$$\breve{\mu}(\sqrt{t}) = \int\limits_0^{\sqrt{t}} [1 - F_\xi(x)]\, dx$$

$$\lim_{t\to\infty} \breve{\mu}(\sqrt{t}) = \lim_{t\to\infty} \int\limits_0^{\sqrt{t}} [1 - F_\xi(x)]\, dx = \int\limits_0^{\infty} [1 - F_\xi(x)]\, dx = \mu$$