Домашнее задание 5

Тихонов Сергей

19 октября 2021

Задача 1

(i) Распишем следующую вероятность:

$$\mathbb{P}\{X_n = j | X_{n-1} = i\} = \mathbb{P}\{\max\{\xi_1, \dots, \xi_n\} = j | \max\{\xi_1, \dots, \xi_{n-1}\} = i\} = \begin{cases} \mathbb{P}\{\xi_n = j\}, & j \geq i \\ 0, & else \end{cases}$$

Покажем, что при добавлении предыстории данная вероятность не изменяется, а потому процесс можно считать цепью Маркова:

$$\mathbb{P}\{X_n = j | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} = \mathbb{P}\{\max(X_{n-1}, \xi_n) = j | X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0\} =$$

$$= \mathbb{P}\{\max(i_{n-1}, \xi_n) = j\} = \mathbb{P}\{\max(X_{n-1}, \xi_n) = j | X_{n-1} = i_{n-1}\}$$

(ii) Ранее в семинаре было показано, что $n_k + m_k = n_0 + m_0 - k$. Тогда:

$$s_k := n_k - m_k + \frac{1}{n_k + m_k + 2} = n_k - m_k + \frac{1}{n_0 + m_0 - k + 2} = n_k - m_k + z_k$$

Где z_k является детерминированным процессом. Тогда:

$$\mathbb{P}\{n_k - m_k + z_k = j | n_{k-1} - m_{k-1} = i - z_{k-1}\}$$

Для нахождения вероятности выразим n_{k-1} из системы следующих уравнений:

$$\begin{cases} n_{k-1} - m_{k-1} = i - z_{k-1} \\ n_{k-1} + m_{k-1} = n_0 + m_0 - (k-1) \end{cases}$$

Отсюда n_{k-1} равен:

$$n_{k-1} = \frac{n_0 + m_0 - (k-1) + i - z_{k-1}}{2}$$

В результате, искомая вероятность будет иметь вид:

$$\mathbb{P}\{n_k - m_k + z_k = j | n_{k-1} - m_{k-1} = i - z_{k-1}\} = \begin{cases} \frac{n_0+m_0-(k-1)+i-z_{k-1}}{2(n_0+m_0-(k-1))}, & j - z_k = i - 1 - z_{k-1} \\ \frac{n_0+m_0-(k-1)-i+z_{k-1}}{2(n_0+m_0-(k-1))}, & j - z_k = i + 1 - z_{k-1} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

Если добавляем предысторию, то ничего не изменится, не даётся новой информации на шаге $n-2$ для $n-$го шага:

$$\mathbb{P}\{n_k - m_k + z_k = j | n_{k-1} - m_{k-1} = i - z_{k-1}, n_{k-2} - m_{k-2} = i - z_{k-2}\} = \mathbb{P}\{n_k - m_k + z_k = j | n_{k-1} - m_{k-1} = i - z_{k-1}\}$$

Задача 2

i) Запишем искомую вероятность:

$$\mathbb{P}\{x_n = j | x_{n-1} = i\} = \begin{cases} 0, & \text{else} \\ \frac{i}{10}, & j = i \\ \frac{10-i}{10}, & j = i + 1 \end{cases}$$

Если добавляем предысторию, то ничего не изменится, не даётся новой информации на шаге $n-2$ для $n-$го шага:

$$\mathbb{P}\{x_n = j | x_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, x_0 = i_0\} = \mathbb{P}\{x_n = j | x_{n-1} = i\}$$

$$P = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{9}{10} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \frac{2}{10} & \frac{8}{10} & \ldots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(ii) Тип состояний

Рассмотрим $i = 1$:

$$\exists\, j = 2 : \quad [i \to j], [j \nrightarrow i]$$

Аналогично выполняется $\forall j = i + 1$, где $i \in \{1, \ldots, 8\}$. Значит, все состояния являются несущественными. Что касается состояния $j = 10$, то оно является существенным, поскольку:

$$\forall\, i : \; [i \to j] \Rightarrow [j \to i]$$

(iii) Стационарное состояние:

$$\vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* P$$

$$\begin{cases} \frac{1}{10}\pi_1^* = \pi_1^* \\ \frac{9}{10}\pi_1^* + \frac{2}{10}\pi_2^* = \pi_2^* \\ \ldots \\ \frac{1}{10}\pi_9^* + \pi_{10}^* = \pi_{10}^* \\ \pi_1^* + \ldots + \pi_{10}^* = 1 \end{cases}$$

Отсюда получаем стационарное распределение:

$$\vec{\pi}^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Задача 3

(i) Для определения классов эквивалентности, типов состояния и периода состояний изобразим Марковскую цепь в графическом виде:

Марковская цепь шрёдингера

Классы эквивалентности:

Поскольку $\forall i, j \in \{1, 2, 3\} i \to j, j \to i$, то есть являются сообщающимися. Тогда выполняется отношение эквивалентности, и все состояния $\{1, 2, 3\}$ находятся в одном классе эквивалентности.

Типы состояний:

$$\forall j : [i \to j] \Rightarrow [j \to i]$$

Значит, все состояния $\{1, 2, 3\}$ являются существенными.

Наконец, расчитаем период состояния:

$$d(1) = d(3) = \text{НОД}(1, 2, 3, \ldots) = 1$$

$$d(2) = \text{НОД}(1, 3, \ldots) = 1$$

В результате, цепь имеет один класс эквивалентности, все типы состояний являются существенными и непириодическими, а значит цепь является эргодической.

(ii) Проведём спектральное разложение матрицы, где u - матрица, состоящая из собственных векторов в порядке, соответствующем порядку собственных чисел.

$$P = u \begin{pmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{pmatrix} u^{-1}$$

Найдём собственные значения:

$$\det\begin{pmatrix}1/3-\lambda & 0 & 2/3\\ 1/3 & 2/3-\lambda & 0\\ 1/3 & 1/3 & 1/3-\lambda\end{pmatrix}=0$$

$$9\lambda(3\lambda^2-4\lambda+1)=0$$

$$\lambda_1=0,\quad \lambda_2=\frac{1}{3},\quad \lambda_3=1$$

Выпишем собственные векторы, соответствующие собственным значениям:

$$\lambda_1=0\quad\to\quad \vec{u}_1=\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\lambda_2=\frac{1}{3}\quad\to\quad \vec{u}_2=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

$$\lambda_3=1\quad\to\quad \vec{u}_3=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

Тогда, пользуясь свойством, что $p^{(n)}=p^n$, запишем матрицу перехода на n шагов:

$$P^n=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1/3 & -1/3 & 2/3\\ 0 & 1 & -1\\ 1/3 & 1/3 & 1/3\end{pmatrix}$$

Выразим искомые вероятности:

$$p_{11}=\frac{1}{3},\quad p_{12}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3^n},\quad p_{13}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^n}$$

(iii) В пункте (i) было показано, что цепь является эргодической, тогда справедливо следствие: стационарное состояние единственное и задаётся следующим образом:

$$\lim_{n\to\infty}\pi_j(n)=\pi_j^*$$

Найдём стационарное состояние:

$$\vec{\pi}^*=\vec{\pi}^*P$$

$$\begin{cases} \pi_1^* = \frac{1}{3}\pi_1^* + \frac{1}{3}\pi_2^* + \frac{1}{3}\pi_3^* \\ \pi_2^* = \frac{2}{3}\pi_2^* + \frac{1}{3}\pi_3^* \\ \pi_3^* = \frac{2}{3}\pi_1^* + \frac{1}{3}\pi_3^* \\ \frac{1}{3}\pi_1^* + \frac{1}{3}\pi_2^* + \frac{1}{3}\pi_3^* = 1 \end{cases}$$

Решим систему:

$$\begin{cases} \pi_1^* = \frac{1}{3} \\ \pi_2^* = \frac{1}{3} \\ \pi_3^* = \frac{1}{3} \end{cases}$$

В результате, получаем $\vec{\pi}^* = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, тогда запишем искомые вероятности:

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 1\} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 2\} = \frac{1}{3} \qquad \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}\{X_n = 3\} = \frac{1}{3}$$

Задача 4

Найдём стационарное состояние:

$$\vec{\pi}^* = \vec{\pi}^* P$$

Для этого решим систему уравнений:

$$\begin{cases} \pi_1^* = \frac{1}{5}\pi_3^* \\ \pi_2^* = \frac{1}{2}\pi_1^* + \frac{1}{5}\pi_3^* + \frac{1}{2}\pi_4^* + \frac{1}{2}\pi_5^* \\ \pi_3^* = \pi_2^* + \frac{1}{5}\pi_3^* + \frac{1}{2}\pi_5^* \\ \pi_4^* = \frac{1}{5}\pi_3^*\pi_5^* = \frac{1}{2}\pi_1^* + \frac{1}{5}\pi_3^*\frac{1}{2}\pi_4^* \\ \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* + \pi_4^* + \pi_5^* = 1 \end{cases}$$

Выразим все π_i^* через π_3^*:

$$\begin{cases} \pi_1^* = \frac{1}{5}\pi_3^* \\ \pi_2^* = \frac{3}{2}\pi_3^* \\ \pi_5^* = \frac{2}{5}\pi_3^* \\ \pi_4^* = \frac{1}{5}\pi_3^* \\ \pi_1^* + \pi_2^* + \pi_3^* + \pi_4^* + \pi_5^* = 1 \end{cases}$$

Подставим в последнее уравнение:

$$\frac{2}{5}\pi_3^* + \frac{3}{5}\pi_3^* + \pi_3^* + \frac{2}{5}\pi_3^* = 1$$

$$\begin{cases} \pi_1^* = \frac{1}{12} \\ \pi_2^* = \frac{3}{12} \\ \pi_3^* = \frac{5}{12} \\ \pi_4^* = \frac{1}{12} \\ \pi_5^* = \frac{2}{12} \end{cases}$$

Итогвоое стационарное распределение имеет вид:

$$\vec{\pi}^* = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{12} & \dfrac{3}{12} & \dfrac{5}{12} & \dfrac{1}{12} & \dfrac{2}{12} \end{pmatrix}$$

Задача 5

Для Марковской цепи должно быть справедливо Марковское свойство:

$$\mathbb{P}\{\eta_n = j | \eta_{n-1} = i_{n-1}, \ldots, \eta_0 = i_0\} = \mathbb{P}\{\eta_n = j | \eta_{n-1} = i_{n-1}\}$$

То есть процесс η_n в текущий момент времени n зависит только от предыдущего момента времени $n-1$. Тогда если

$$\mathbb{P}\{\eta_n = j | \eta_{n-1} = i, \eta_{n-2} = k_1\} \neq \mathbb{P}\{\eta_n = j | \eta_{n-1} = i, \eta_{n-2} = k_2\}$$

то Марковское свойство не выполняется, а значит процесс η_n не является цепью Маркова. Важно отметить, что условия не должны конфликтовать (чтобы избежать пустого множества). Распишем вышеописанный случай для данного процесса:

Предположим дополнительно, что $\xi_1, \xi_2, \ldots \sim Be(p = 1/4)$. Тогда рассмотрим несколько частных случаев условия, описанного выше:

$$\begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + \xi_2 = 0 \\ \eta_2 = \eta_2 + \eta_3 = 1 \\ \eta_3 = \xi_3 + \xi_4 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \eta_1 = \xi_1 + \xi_2 = 2 \\ \eta_2 = \eta_2 + \eta_3 = 1 \\ \eta_3 = \xi_3 + \xi_4 = 1 \end{cases}$$

Распишем эти вероятности:

$$\mathbb{P}\{\eta_3 = 1 | \eta_{n-1} = 1, \eta_{n-2} = 0\} = \mathbb{P}\{\xi_3 + \xi_4 = 1 | \xi_2 + \xi_3 = 1, \xi_1 + \xi_2 = 0\} = \mathbb{P}\{\xi_4 = 0\} = \frac{3}{4}$$

$$\mathbb{P}\{\eta_3 = 1 | \eta_{n-1} = 1, \eta_{n-2} = 2\} = \mathbb{P}\{\xi_3 + \xi_4 = 1 | \xi_2 + \xi_3 = 1, \xi_1 + \xi_2 = 2\} = \mathbb{P}\{\xi_4 = 1\} = \frac{1}{4}$$