3 Theory

3.1 Composing Filters

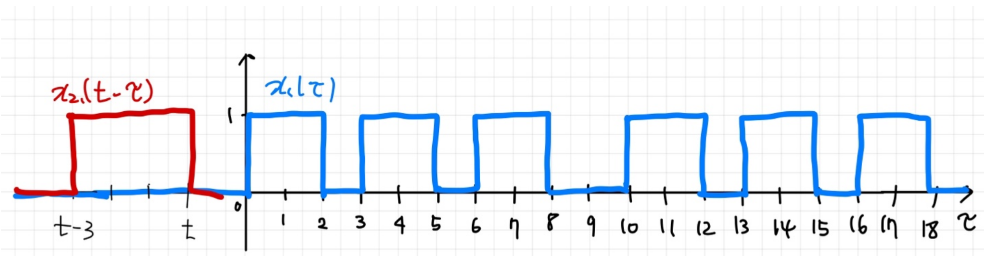
세 가지의 filter G, E 그리고 M 이 있다. G 를 Gaussian smoothing kernel, E 를 Sobel edge detector 에 사용되는 linear kernel, 그리고 M 을 median filter 라고 하자. G 와 E 의 경우는 linear 한 filtering 이기 때문에 convolution 연산을 수행할 수 있다. M 은 non-linear 하기 때문에 convolution 연산을 할 수 없다는 차이점이 있다.

먼저 G 와 E 사이의 filtering 적용 순서에 따른 차이에 대해 알아보자. G 와 E 는 convolution 의 연산이 가능하기 때문에 Convolution 의 성질 중 교환 법칙을 만족한다. 교환 법칙에 의하면 convolution 연산 순서와 무관하게 같은 연산 결과를 보이므로 G 와 E 는 적용 순서에 상관없이 같은 결과를 도출한다. (Yes)

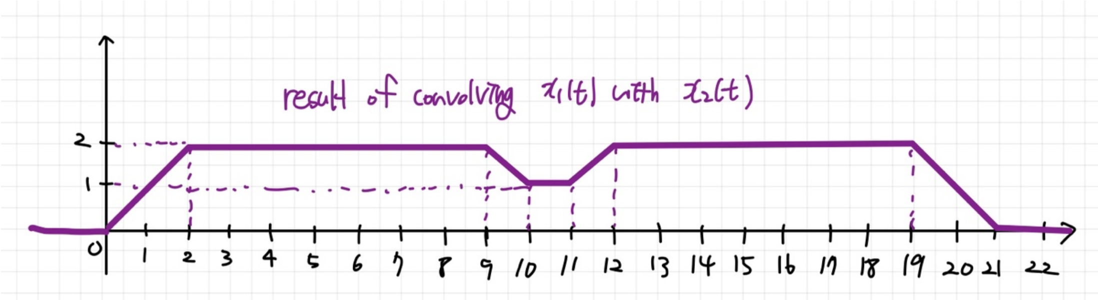
G 와 M 사이의 filtering 적용 순서에 따른 차이에 대해 알아보자. M 은 G 와 E 랑은 달리 convolution 연산이 불가하다. 반례를 통해 다르다는 것을 증명하자. (0, 0, 1, 2, 3, 0, 0)인 image f 가 있다고 가정하자 G = (1,2,1)이라 하고 median filter 는 3 개의 median 이라고 하자. G(M(f))의 경우는 G(0, 1, 2, 2, 0) = (4, 7, 6)이다. M(G(f))의 경우는 M(1, 4, 8, 8, 3) = (4, 8, 8)이다. 연산 순서에 따른 결과가 다르다. 즉 적용 순서가 다르면 꼭 연산 결과가 같지 않다는 것을 알 수 있다. (No)

3.2 Convolution

Convolution 결과 h(t) = $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau$ 이므로 아래의 $x_2(t-\tau)$의 t 의 범위에 따라 적분해주면 된다.



그 결과 아래와 같은 결과가 나왔다. 범위 이외의 부분의 함수 값은 0 이다.



X 축 t, y 축 convolving $x_1(t)$ with $x_2(t)$

3.3 Decomposing a Steerable Filter

$\mathrm{G}(\mathrm{x},\mathrm{y}) = \frac{1}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2\sigma^2}\right)$ 는 2D Gaussian kernel 이다. 2D Gaussian kernel 을 이용하여 image f 를 convolution 연산 결과는 g(x,y) = $\frac{1}{2\pi\sigma^2}\sum_{m=1}\sum_{n=1}\exp\left(-\frac{m^2+n^2}{2\sigma^2}\right)f(x-m,y-n)$ 이다. g(x,y)를 정리하면 g(x,y) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\sum_{m=1}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{m^2}{2\sigma^2}\right)\sum_{n=1}\exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma^2}\right)f(x-m,y-n)$이다. 1D Gaussian kernel G1(x) 이라 하면 $\mathrm{G_x}$ = $\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)$ 이므로 G 를 이용하여 convolution 하는 것과 $\mathrm{G_y}$ 를 이용하여 convolution 한 결과에 $\mathrm{G_x}$를 이용하여 convolution 한 결과와 같다는 것을 알 수 있다.

연산속도 측면에서 살펴보자. Image 가 mXn 이고 filter 의 크기가 pXq 이면 convolution 의 시간복잡도는 O(mnpq)이다. G 를 이용한 1 step convolution 연산의 시간복잡도는 O(mnpq)이다. $\mathrm{G_x}$와 $\mathrm{G_y}$ 를 이용하여 2 step convolution 연산을 하면 O(mnp)+O(mnq)이므로 O(mn(p+q))이다. 그러므로 $\mathrm{G_x}$와 $\mathrm{G_y}$를 이용하여 2 step convolution 연산이 G 를 이용한 1 step convolution 보다 더 좋다.

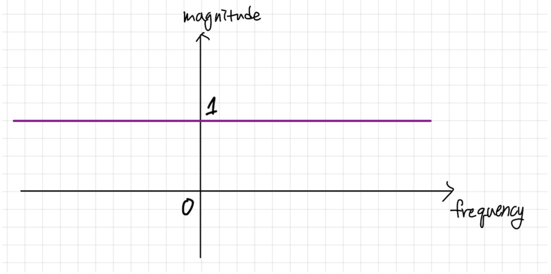
3.4 Fourier Transform

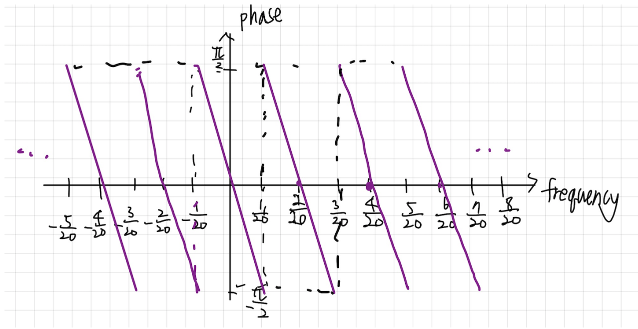
a)

x = t-5 라고 가정하자.

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty}\delta(t-5)exp(-i\omega t)\,dt$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)exp\big(-i\omega(x+5)\big)\,dx$$
$$= exp(-5i\omega)\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)exp(-i\omega x)\,dx = exp(-5i\omega)\ \left(by\ \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)exp(-i\omega x)\,dx\ =\ 1\right)$$
$$\therefore F(\omega) = exp(-5i\omega) = \cos(5\omega) - \mathrm{i}\sin(5\omega)$$

Magnitude and phase as f function of frequency 그래프는 아래 그림과 같다. Magnitude 그래프는 범위 이외의 함수 값은 1 이고, phase 그래프는 주기 0.1 인 함수를 그린 것이다. $|F(\omega)| = 1, \angle F(\omega) = arctan\big(tan(-5\omega)\big),\ \omega = 2\pi$f.(f : frequency)





b)

$$X_3(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x_3(t)exp(-i\omega t)dt$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} (ax_1(t) + bx_2(t))exp(-i\omega t)dt$$

$$= a\int_{-\infty}^{\infty} x_1(t)exp(-i\omega t)dt \ + \ b\int_{-\infty}^{\infty} x_2(t)exp(-i\omega t)dt = aX_1(\omega) + bX_2(\omega)$$