5. 6g) $q(t) = a\,p(t) + b\,p^2(t) + c\,p^3(t)$ use $\cos(a)\cdot\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$

$p(t) = \cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)$

$q(t) = a\cos(\omega_1 t) + b\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)^2 + c\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(\omega_2 t)\right)^3$

$= a\cos(\omega_1 t) + b\left(\cos^2(\omega_1 t) + \cos^2(\omega_2 t) + 2\cos(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t)\right)$

$+ c\left[\cos^3(\omega_1 t) + \cos^3(\omega_2 t) + 3\cos^2(\omega_1 t)\cos(\omega_2 t) + 3\cos^2(\omega_2 t)\cos(\omega_1 t)\right]$

$= a\cos(\omega_1 t) + b\left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_1 t) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_2 t) + \cos[(\omega_1-\omega_2)t] + \cos[(\omega_1+\omega_2)t]\right]$

$+ c\left[\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_1 t)\right)\left(\cos(\omega_1 t) + 3\cos(\omega_2 t)\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\omega_2 t)\right)\left(\cos(\omega_2 t) + 3\cos(\omega_1 t)\right)\right]$

$= a\cos(\omega_1 t) + b[\ldots]$ ~~$+ c\left[\frac{1}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{3}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{1}{4}(\cos(2\omega_1 t) + \cos(2\omega_2 t))\right.$~~

~~$\ldots + \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{3}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{4}$~~

$\ldots + c\left[\frac{1}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{3}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{1}{4}\left(\cos(\omega_1 t) + \cos(3\omega_1 t)\right) + \frac{3}{4}\left(\cos(2\omega_1-\omega_2) + \cos(2\omega_1+\omega_2)\right)\right.$

$\left.\ldots + \frac{1}{2}\cos(\omega_2 t) + \frac{3}{2}\cos(\omega_1 t) + \frac{1}{4}\left(\cos(\omega_2 t) + \cos(3\omega_2 t)\right) + \frac{3}{4}\left(\cos(2\omega_2-\omega_1) + \cos(2\omega_2+\omega_1)\right)\right]$

$= \cos(\omega_1 t)\left[a + \frac{9c}{4}\right] + \cos(\omega_2 t)\left[a + \frac{9c}{4}\right] + \cos(2\omega_1 t)\left[\frac{b}{2}\right] + \cos(2\omega_2 t)\left[\frac{b}{2}\right]$

$+ \cos((\omega_1-\omega_2)t)[b] + \cos((\omega_1+\omega_2)t)[b] + \cos((2\omega_1-\omega_2)t)\left[\frac{3c}{4}\right] + \cos((2\omega_1+\omega_2)t)\left[\frac{3c}{4}\right]$

$+ \cos((2\omega_2-\omega_1)t)\left[\frac{3c}{4}\right] + \cos((2\omega_2+\omega_1)t)\left[\frac{3c}{4}\right] + \cos(3\omega_1 t)\left[\frac{c}{4}\right] + \cos(3\omega_2 t)\left[\frac{c}{4}\right] + [b]$

Das met Freq. $\{\omega_1, \omega_2, 2\omega_1, 2\omega_2, \omega_1-\omega_2, \omega_1+\omega_2, 2\omega_1-\omega_2, 2\omega_1+\omega_2, 2\omega_2-\omega_1, 2\omega_2+\omega_1, 3\omega_1, 3\omega_2, 0\}$

5.6b) If $p(t) = A\cos(\omega t)$

$$\Rightarrow q(t) = A\cos(\omega t) + A^2\cos^2(\omega t) + A^3\cos^3(\omega t)$$

$$= A\cos(\omega t) + A^2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\omega t)\right) + A^3\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\omega t)\right)\cos(\omega t)$$

$$= A\cos(\omega t) + A^2\left(\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cos(2\omega t)\right) + A^3\left(\tfrac{1}{2}\cos(\omega t) + \tfrac{1}{4}\cos(\omega t) + \tfrac{1}{4}\cos(3\omega t)\right)$$

$$= \cos(\omega t)\left[A + \tfrac{3}{4}A^3\right] + \cos(2\omega t)\left[\tfrac{1}{2}A^2\right] + \cos(3\omega t)\left[\tfrac{1}{4}A^3\right] + \left[\tfrac{1}{2}A^2\right]$$

6.4a) $|A|^2 = AA^+ = \left(ae^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + be^{i(\omega_2 t+\varphi_2)}\right)\left(ae^{-i(\omega_1 t+\varphi_1)} + be^{-i(\omega_2 t+\varphi_2)}\right)$

$$= a^2e^0 + b^2e^0 + ab\left[e^{i[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)]} + e^{-i[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)]}\right]$$

$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$

$$= a^2 + b^2 + 2ab\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)\right]$$

6.4b) $|A|^2 = AA^+ = \left(ae^{i(\omega_1 t+\varphi_1)} + be^{i(\omega_2 t+\varphi_2)} + ce^{i(\omega_3 t+\varphi_3)}\right)\left(ae^{-i(\omega_1 t+\varphi_1)} + be^{-i(\omega_2 t+\varphi_2)} + ce^{-i(\omega_3 t+\varphi_3)}\right)$

$$= a^2e^0 + b^2e^0 + c^2e^0 + ab\left[e^{i[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)]} + e^{-i[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)]}\right]$$

$$+ ac\left[e^{i[(\omega_1-\omega_3)t + (\varphi_1-\varphi_3)]} + e^{-i[(\omega_1-\omega_3)t + (\varphi_1-\varphi_3)]}\right]$$

$$+ bc\left[e^{i(\omega_2-\omega_3)t + (\varphi_2-\varphi_3)} + e^{-i[(\omega_2-\omega_3)t + (\varphi_2-\varphi_3)]}\right]$$

$$= a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos\left[(\omega_1-\omega_2)t + (\varphi_1-\varphi_2)\right] + 2ac\cos\left[(\omega_1-\omega_3)t + (\varphi_1-\varphi_3)\right] + 2bc\cos\left[(\omega_2-\omega_3)t + (\varphi_2-\varphi_3)\right]$$