

이산수학 HW#5,

- 교육시스템에 자필로 푼 것을 스캔 또는 사진으로 찍어 제출,
- 만일 여러 페이지 이면 스캔한 다음 하나의 파일로 모아서 제출할 것.

다음 질문에 O, X로 답하시오.

1. 두 집합 A, B 에 대하여 A 로부터 B 로의 이항관계 R 은 두 집합의 곱집합 $A \times B$ 의 부분집합이다. O
2. 관계를 행렬로 나타내었을 때 주대각선의 값이 모두 1이면 반사관계이다. O
3. 집합 A 에 관한 관계 R 이 반사, (대칭) 추이 관계이면 관계 R 을 부분 순서 관계라고 한다. X
반대칭이리
4. 관계 R 에 대한 방향 그래프를 그렸을 때 그래프의 모든 정점에서 자기 자신을 가리키는 화살표가 있는 경우, 대칭관계이다. O
5. 관계 R 이 부분 순서관계일 때, R^{-1} 도 부분 순서 관계이다. O
6. 관계 R 이 정수의 집합 Z 안에서 $x \equiv y \pmod{5}$ 로 정의한 관계라면 R 은 동치관계가 된다. O

다음 질문에 O, X로 답하시오.

7. 자연수의 집합에서 관계 " \sim 은 \sim 보다 작다($<$)"는 부분 순서 관계이다. \bigcirc
8. 관계 R 에서 반사, 대칭, 추이 관계가 모두 성립할 경우를 동치관계라 하며, 이때 동치 관계 R 은 분할 할 수 있다. \bigcirc
9. $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ 일 때, $\{\{1, 3, 5\}, \{2, 6\}, \{4, 8, 9\}\}$ 는 S 의 원소 7이 어떤 부분집합에도 포함되어 있지 않으므로 S 의 분할이 아니다. \bigcirc

10. 정수에 대한 관계 \leq 은 자연수의 경우와 마찬가지로 부분 순서 관계가 될 수 없다. \times

부분 순서 관계이다.

11. $A = \{1, 2, 3\}$ 일 때 $A \times A$ 에서의 관계 $R = \{(1, 1), (2, 2)\}$ 은 대칭적이면서 반대칭적이다. \times

대칭성: $(1, 1) \in R$ 이므로 $(1, 1) \in R$ 에 해당.

$(2, 2) \in R$ 이므로 $(2, 2) \in R$ //

\rightarrow 대칭적. 근데, $(a, b) \in R$ 이면 $(b, a) \notin R$
이라는 반대칭성이 안맞음.

따라서 대칭적이지만 반대칭적이진 않음

1. 반사성: 모든 정수 a 에 대해 $a \leq a$

2. 반대칭성: if $a \leq b$ 이고 $b \leq a$ 이면, 반드시 $a = b$

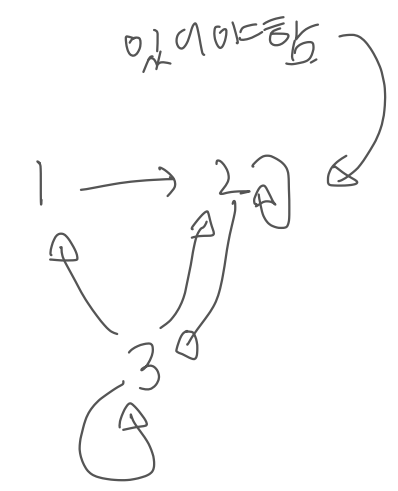
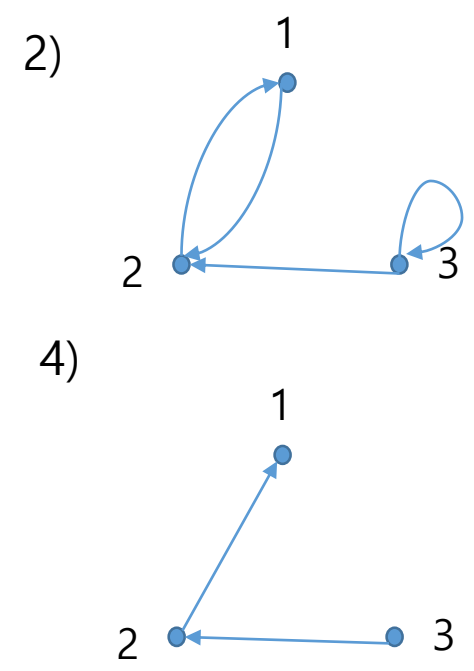
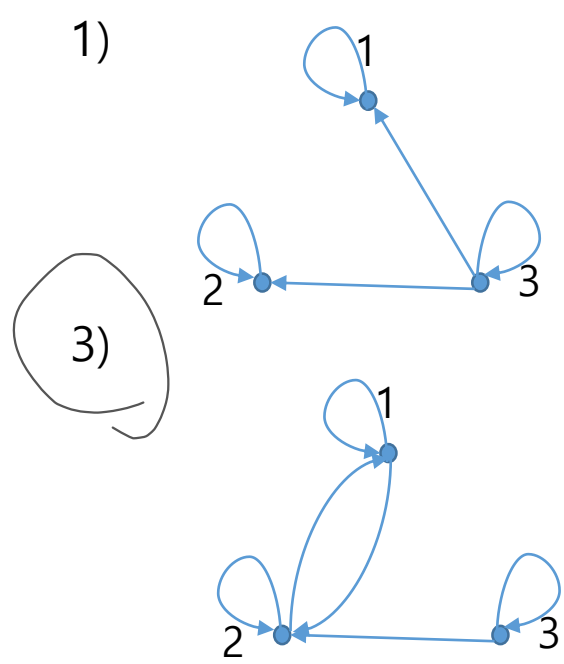
3. 추이성: 만약 $a \leq b$ 이고 $b \leq c$ 이면, $a \leq c$.

첫째를 만족하므로 부분순서 관계임.

12. 집합 $\{1,2,3\}$ 에 대한 관계 R 을 다음과 같이 관계 행렬로 표시하였을 때, ③
 $R \circ R = R^2 = \{(1,1), (2,2), (3,1), (3,2), (3,3)\}$ 이 된다. 이것을 방향그래프로

$$R = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$R^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ → 1에서 2로 화살표,
 2에서 2와 3으로 화살표,
 3에서 1, 2, 3으로 화살표가



13. $R = \{ (a, a), (a, b), (c, b), (b, a) \}$ 일 때, R^{-1} 을 구하라.

$$\begin{array}{cccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ (a, a) & (b, a) & (b, c) & (a, b) \end{array}$$

$$\therefore R^{-1} = \{ (a, a), (b, a), (b, c), (a, b) \}$$

14. 정수에서 정의되는 관계 R 을 $R = \{ (x, y) \mid |y - x| \leq 1 \}$ 이라고 정의할 때, 관계 R 이 만족시키는 성질들만 모아 놓은 것은?

1) 반사, 대칭, 추이 관계

2) 반사, 대칭 관계

$$\text{증거: } |y - x| \leq 1,$$

$$|z - y| \leq 1 \text{ 이면 } |z - x|$$

3) 반사, 추이 관계

4) 대칭, 추이 관계

$$= |z - y + y - x| \leq |z - y| + |y - x|$$

$$\leq 1 + 1 = 2.$$

$$\text{반사: } |x - x| = 0 \leq 1 \quad / \quad \text{대칭: } |y - x| \leq 1 \text{ 이면 } |x - y| \leq 1 \text{ 임. } / \quad \therefore |z - x| \leq 2.$$

15. 다음 중 집합 $\{1,2,3,4,\dots,10\}$ 의 분할이 아닌 것은?

1) $P_1 = \{ \{1,5,9\}, \{2,10,4,7\}, \{8,3,6\} \}$

2) $P_2 = \{ \{7,4,3,8\}, \{1,5,10,9\}, \{2,6\} \}$

3) $P_3 = \{ \{1,3,8\}, \{2,4,6\}, \{5,7,10\}, \{9\} \}$

4) $P_4 = \{ \{4,2\}, \{3,8,9\}, \{6\}, \{1\}, \{10,7\}, \{5\}, \{9\} \}$

4

사실 9가 2개 있음 X.

다
항
집
합
인
것
이
아
니
라
고
생
각
하
고
있
다

16. 집합 $A = \{2, 3, 4, 7\}, B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ 에 대하여 관계 R 가 " B 가 A 로 나누어 떨어진다"로 주어진 경우, 관계 R 을 구하라.

$$R = \{[a, b] \mid a \in A, b \in B, b \% a = 0\}$$

//
B의 모든 원소가 A의 어떤 원소를
나누어 떨어짐.

$$\Rightarrow R = \{(2, 2), (2, 4), (3, 3), (4, 4), (2, 6)\}$$

17. $A = \{1, 2, 3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$ 이고 집합 A 에서 집합 B 로의 관계가 R 과 S 로 다음과 같다.

$$R = \{(1, 2), (1, 3), (2, 2), (3, 1), (4, 2)\}$$

$$S = \{(1, 1), (1, 3), (2, 3), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

다음을 구하시오.

1) $I_A R$ 항등관계.

모든 원소에 대해 자기 자신의 쌍

포함.

$$\Rightarrow \{(1, 1), (2, 2), (3, 3), (4, 4)\}$$

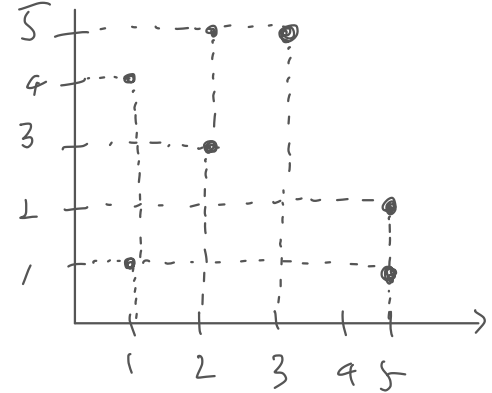
2) $R \circ S$ $A \circ S = \{(a, c) \mid \text{어떤 } b \text{에 대해 } (a, b) \in R \text{ and } (b, c) \in S\}$

이므로

$$A \circ S = \{(1, 3), (2, 7), (3, 3), (4, 1), (4, 4)\}$$

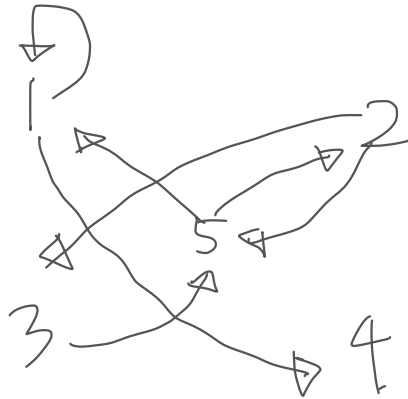
18. $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ 에 대한 관계 R 이 다음과 같이 주어졌다. 이것을 3 가지 표현 방법으로 표현하시오.

$$R = \{(1,1), (1,4), (2,3), (2,5), (3,5), (5,1), (5,2)\}$$



1) 좌표 도표

2) 방향그래프



3) 관계 행렬

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

19. 다음과 같이 주어진 관계들에 대하여, 관계가 반사, 대칭, 반대칭, 추이관계가 되는 지 결정하시오.

반사: $(1,1), (2,2), (3,3), (4,4)$ 포함, 반사 O
 대칭: $(1,2), (2,1)$ 존재, $(2,3), (3,2)$ 존재, 대칭 O
 반대칭: $(1,2), (2,1)$ 있지만 $1 \neq 2$, 반대칭 X

1) $\{(1,2), (2,3), (3,2), (2,1), (1,3), (3,1), (4,4)\}$ $(\{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\})$

즉이: $(1,2), (2,3)$ 있으면 $(1,3)$ X.

2) $\{(1,1), (2,2), (3,4), (4,3)\}$ $(\{1,2,3,4\} \rightarrow \{1,2,3,4\})$

즉: 즉이 X

3) $\{(x,y) | x, y \in R, x = y^2\}$ (여기서 R 은 실수의 집합)

반사: 1번과 동일한 이유로 반사 O

대칭: $(3,4)$ 와 $(4,3)$ 대칭 X.

반대칭: $(3,4), (4,3) \rightarrow 4 \neq 3$ 이므로 반대칭 X

즉이: $(3,4), (4,3)$ 가 있으면 $(3,3)$ 없음. 즉: 즉이 X

반사: 모든 실수에 대해 $x = x^2$ 만족 X. 반사 X

대칭: (x,y) 가 $x = y^2$ 이면 (y,x) 도 $y = x^2$ 만족.

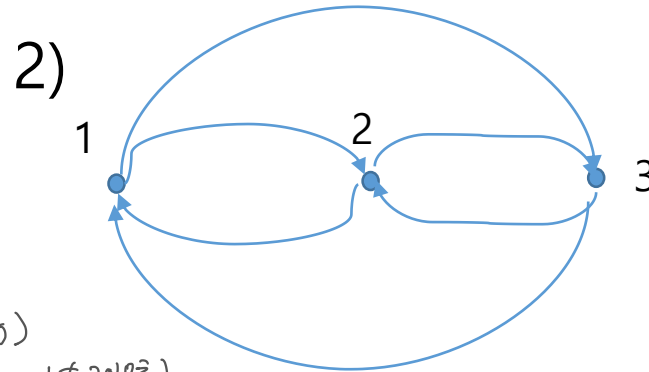
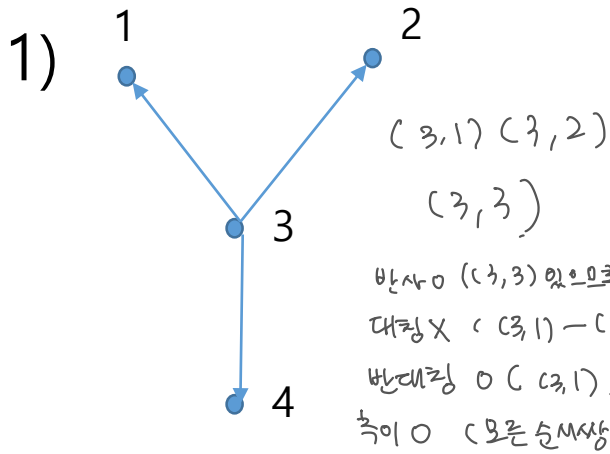
대칭 O

반대칭: (x,y) 가 $x = y^2$ 만족, $y \neq 0$ 일때만 (y,x) 가 $y = x^2$ 이므로 반대칭 O

즉이: $x = y^2, y = z^2$ 이면, $x = (z^2)^2 = z^4$ 임.

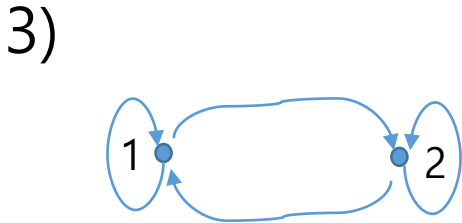
즉이 O

20. 다음과 같은 방향 그래프로 표현된 관계
들에 대하여 각 관계가 반사, 대칭, 반대칭,
추이 관계를 인지할 모두 구분하시오.

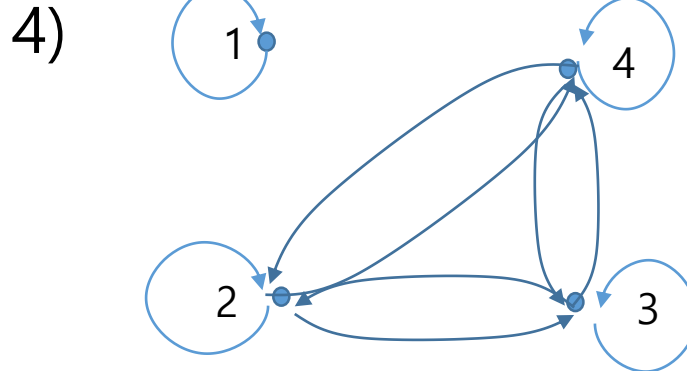


$(1,2) (1,3)$
 $(2,1) (2,3)$
 $(3,1) (3,2)$

반사 \times ($(1,1) (2,2) \dots$ 없음)
 대칭 \circ ($(1,2) - (2,1) / (1,3) - (3,1)$)
 반대칭 \times ($(1,2) - (2,1)$ 이고 $1 \neq 2$ 이므로)
 추이 \times ($(1,1)$ 없음)



반사 \circ (모든 순서쌍 (a,a) 있음으로)
 대칭 \circ ($(1,2) (2,1)$)
 반대칭 \times 추이 \times
 \hookrightarrow 2번이랑 동일함



$(1,1) (2,2) (2,3) (2,4)$

$(3,2) (3,3) (3,4)$

$(4,2) (4,3) (4,4)$

반사 \circ (모든 순서쌍 (a,a) 있음으로)

대칭 \circ ($(2,4) - (4,2)$ 등 만족)

반대칭 \circ (대칭이고 모든 순서쌍이 같음으로 가짐으로)

추이 \circ ($(a,b), (b,c)$ 이면 (a,c) 만족함)

21. 집합 $A = \{1, 2, \dots, 10\}$ 에 대한 관계 R 이 다음과 같을 때, R 의 순서 쌍을 구하시오.

$$a, b \in A, aRb \Leftrightarrow -2 \leq a - b \leq 2$$

$$a=1 \text{ 이면 } b=1, 2, 3 \quad / \quad (1,1) (1,2) (1,3)$$

$$a=10, b=8, 9, 10$$

$$a=2 \text{ 이면 } b=1, 2, 3, 4 \quad / \quad (2,1) (2,2) (2,3) (2,4) \quad / \quad (10,8) (10,9) (10,10)$$

$$a=3, b=1, 2, 3, 4, 5 \quad / \quad (3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5)$$

$$a=4, b=2, 3, 4, 5, 6 \quad / \quad (4,2) (4,3) (4,4) (4,5) (4,6)$$

$$a=5, b=3, 4, 5, 6, 7 \quad / \quad (5,3) (5,4) (5,5) (5,6) (5,7)$$

$$a=6, b=4, 5, 6, 7, 8 \quad / \quad (6,4) (6,5) (6,6) (6,7) (6,8)$$

$$a=7, b=5, 6, 7, 8, 9 \quad / \quad (7,5) (7,6) (7,7) (7,8) (7,9)$$

$$a=8, b=6, 7, 8, 9, 10 \quad / \quad (8,6) (8,7) (8,8) (8,9) (8,10)$$

$$a=9, b=7, 8, 9, 10 \quad / \quad (9,7) (9,8) (9,9) (9,10)$$

22. 두 집합 A, B 가 $A = \{a, b\}, B = \{1, 2\}$ 일 때, 집합 A 에서 집합 B 로의 관계는 몇 개가 있는지를 밝히고 그 관계를 모두 구해 보시오.

$A \times B$ 의 모든 원소.

$$\Rightarrow A \times B = \{(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)\}$$

총 네개의 순서쌍이 있으므로, 4개의 관계가 존재함.

$(a, 1), (a, 2), (b, 1), (b, 2)$ 의