Einführung

Unser Ziel in diesem Kurs ist es, Funktionen $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ zu untersuchen, die entweder auf der ganzen komplexen Ebene $\mathbb{C}$ oder auf einer offenen Teilmenge der komplexen Ebene definiert sind. Wir werden sehen, dass die Untersuchung komplexwertiger Funktionen nicht einfach die Untersuchung reellwertiger Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ ist. In vielerlei Hinsicht werden wir tatsächlich feststellen, dass die Theorie der Funktionen einer oder mehrerer reeller Variablen komplizierter ist als die Theorie komplexer Funktionen. Um eine Vorstellung davon zu geben, was damit gemeint ist, führen wir einige Beispiele an:

1. Wir können leicht eine Funktion einer reellen Variablen aufschreiben, die n-mal differenzierbar, aber nicht unendlich oft differenzierbar ist. Betrachte

   $$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\left(\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Dann ist f überall differenzierbar, aber ihre Ableitung ist nicht stetig. Folglich ist f nicht zweimal differenzierbar. Durch $n-1$-maliges Integrieren dieser Funktion erhält man eine Funktion, die n-mal differenzierbar, aber nicht $(n+1)$-mal differenzierbar ist. Im Gegensatz dazu werden wir sehen, dass, wenn eine Funktion einmal komplex differenzierbar ist, sie automatisch unendlich oft komplex differenzierbar ist.

2. Es gibt viele Funktionen einer reellen Variablen, die glatt sind (d.h. unendlich oft differenzierbar), aber nicht analytisch (d.h. die Taylorreihe stellt die Funktion nicht dar). Ein Beispiel ist:

   $$f(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{1}{x^2}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

   Diese Funktion ist unendlich oft differenzierbar, aber an der Stelle 0 gilt $f^{(n)}(0) = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Folglich ist die Taylorreihe identisch null:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n = 0$$

   und kann f um 0 nicht darstellen. Im Gegensatz dazu werden wir sehen, dass, wenn eine Funktion einmal komplex differenzierbar ist, sie automatisch analytisch ist (d.h. durch eine Potenzreihe dargestellt werden kann).

3. Es gibt viele Beispiele für C^∞-Funktionen über $\mathbb{R}$, die beschränkt sind, z.B. die oben genannten Beispiele oder $\sin(x)$, $\cos(x)$. Im Gegensatz dazu werden wir sehen, dass, wenn eine komplex differenzierbare Funktion beschränkt ist, sie konstant sein muss. Dies wird die Aussage des Satzes von Liouville sein.

4. Zwei reellwertige Funktionen f, g können auf einer offenen Menge übereinstimmen, ohne gleich zu sein. Im Gegensatz dazu gilt: Wenn f und g zwei komplex differenzierbare Funktionen sind, die auf einer beliebig kleinen offenen Menge übereinstimmen, müssen sie identisch sein. Dies ist die Kernidee des Prinzips der analytischen Fortsetzung.

Die Stärke der Funktionentheorie kommt von dieser “Robustheit”, die wir oben bereits erahnen konnten. In gewisser Weise ist die Funktionentheorie ein Fachgebiet, in dem Analysis, Geometrie und Algebra zusammenkommen.

Woche 2

1 Komplexe Zahlen & Holomorphe Funktionen

1.1 Komplexe Zahlen (Wiederholung)

Definition 1.1: Die komplexen Zahlen, Real- & Imaginärteil

Die Menge der komplexen Zahlen / die komplexe Ebene ist definiert als:

$$\mathbb{C} := \{x + iy \mid x, y \in \mathbb{R}, i^2 = -1\}$$

Wir können die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in die komplexen Zahlen einbetten via

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{C}, \quad r \mapsto r + 0i$$

Für $z = x + iy \in \mathbb{C}$ definieren wir

1. Den Realteil von z als: $\mathrm{Re}(z) = x$
2. Den Imaginärteil von z als: $\mathrm{Im}(z) = y$

Definition 1.2: Komplex Konjugierte

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy$ definieren wir die komplex Konjugierte von z als

$$\bar{z} = x - iy$$

Mithilfe der komplexen Konjugation können wir folgende Ausdrücke für den Real- und Imaginärteil einer komplexen Zahl finden:

Übung 1.3

Beweisen sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Lösung: Siehe A.1.

Wir können mithilfe der komplexen Konjugation auch charakterisieren, ob eine komplexe Zahl in $\mathbb{R}$ oder in $i\mathbb{R}$ liegt (real oder rein imaginär):

$$z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}, \qquad z \in i\mathbb{R} \iff z = -\bar{z}$$

Wir können die komplexen Zahlen auch als geordnete Paare in $\mathbb{R}^2$ darstellen, nämlich durch $z = (x, y)$ wobei $z = w$ für ein $w = (u, v)$ dann und nur dann wenn $x = u$ und $y = v$.

Definition 1.4: Addition & Multiplikation

Seien $z = x + iy$ und $w = u + iv$ zwei komplexe Zahlen. Dann addieren wir diese wie folgt:

$$z + w = (x + u) + i(y + v)$$

Falls wir die komplexen Zahlen als geordnete Paare darstellen, so addieren wir komponentenweise:

$$z + w = (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v)$$

Die Multiplikation ist definiert durch:

$$z \cdot w = (x + iy)(u + iv) := (xu - yv) + i(xv + yu)$$

Falls wir die komplexen Zahlen als geordnete Paare darstellen haben wir:

$$z \cdot w = (x, y) \cdot (u, v) = (xu - yv, xv + yu)$$

Damit erhalten wir, dass $\mathbb{R}^2$ mit diesen zwei Operationen "+ünd "·äus Definition 1.4 ein Körper ist. Das heisst $(\mathbb{R}^2, +)$ ist eine abelsche Gruppe, $(\mathbb{R}^2 \setminus (0,0), \cdot)$ ist ebenfalls eine abelsche Gruppe mit multiplikativer Einheit $(1, 0)$ und wir haben Distributivität:

$$z_1 \cdot (z_2 + z_3) = z_1 \cdot z_2 + z_1 \cdot z_3$$

Wir haben also gesehen, dass $\mathbb{C}$ mit der Addition und Multiplikation aus 1.4 einen Körper bildet. Dann stellt sich die Frage nach Additiven und Multiplikativen Inversen.

Übung 1.5

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Was ist das additive und was ist das multiplikative Inverse von z?

Lösung: Siehe A.2.

Definition 1.6: Additives & multiplikatives Inverses

Für eine komplexe Zahl $z = x + iy \in \mathbb{C}$ ist das additive Inverse gegeben durch $-z$. Falls z von Null verschieden ist, so ist das multiplikative Inverse gegeben durch:

$$z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

Wobei $|z| := \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z \cdot \bar{z}}$ der Betrag von z ist. Falls wir die komplexe Zahl z als geordnetes Paar (x, y) schreiben, so erhalten wir:

$$(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$$

Eine andere Darstellung der komplexen Zahlen ist die sogenannte polare Darstellung. Für ein $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir z in Polarform so wie in Abbildung 1.

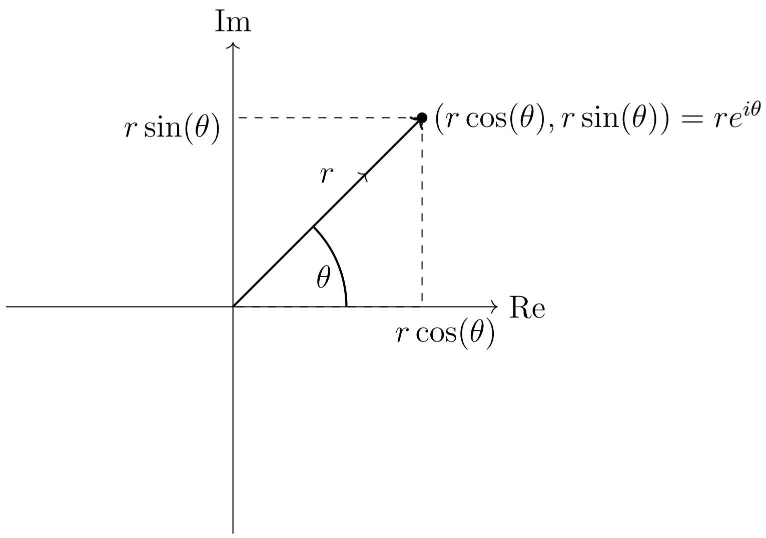

Abbildung 1: Die Polardarstellung der komplexen Zahlen

Wir schreiben $z = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$, wobei $r = |z|$. Hier müssen wir vorsichtig sein: die Polardarstellung (für $z \neq 0$) ist **nicht eindeutig** ausser wir beschränken θ auf $\theta \in (-\pi, \pi]$.

Der Winkel θ heisst auch Argument der komplexen Zahl z und ist (bis auf Multiplikation mit 2π) eindeutig bestimmt durch z. Wir schreiben

Woche 2

$$\arg(z) := \{\theta \in \mathbb{R} \mid z = |z|e^{i\theta}\}$$

Genau genommen ist das Argument einer komplexen Zahl also nicht ein Element von $\mathbb{R}$, sondern eine Teilmenge. Das Argument von z welches wir im Intervall $(-\pi, \pi]$ wählen, heisst Hauptzweig des Arguments und wir schreiben:

$$\mathrm{Arg}(z) = \arg(z) \cap (-\pi, \pi]$$

Als Beispiel erhalten wir $\mathrm{Arg}(i) = \frac{\pi}{2}$ und $\mathrm{Arg}(-c) = \pi$ für $c \in \mathbb{R}_{>0}$. Wir bemerken weiterhin, dass $0 \in \mathbb{C}$ kein Argument zugeschrieben wird. Wir können auch eine explizite Formel für den Hauptzweig des Arguments angeben. Sei $z = x + iy \neq 0$, dann

$$\mathrm{Arg}(z) = \begin{cases} \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right) & \text{if } x \geq 0 \\ \pi - \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right) & \text{if } x < 0 \text{ and } y \geq 0 \\ -\pi - \arcsin\left(\frac{y}{|z|}\right) & \text{if } x < 0 \text{ and } ay < 0 \end{cases}$$

Wir beschreiben noch einige Identitäten für das Argument einer komplexen Zahl, die im Allgemeinen nicht gelten für den Hauptzweig des Arguments:

$$\arg(z^{-1}) = -\arg(z)$$

$$\arg(zw) = \arg(z) + \arg(w)$$

aber $\mathrm{Arg}(-0.5) = \pi \neq -\mathrm{Arg}(-2) = -\pi$.

Wir geben nun noch einige grundlegende Rechenregeln für den Betrag einer komplexen Zahl.

Lemma 1.7: Grundlegende Ungleichungen für den Betrag

Für komplexe Zahlen $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ gilt:

1. $|z| = 0 \iff z = 0$
2. $||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 - z_2|$
3. $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$
4. $|z_1 \cdot z_2| = |z_1| \cdot |z_2|$
5. $|\bar{z}| = |z|$
6. $|\operatorname{Re}(z)| \leq |z|, \ |\operatorname{Im}(z)| \leq |z|$

Übung 1.8

Zeigen sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 \quad \text{(Parallelogramm-Identität)} \tag{1}$$

und

$$|z + w| \leq |z| + |w| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{2}$$

Lösung: Siehe A.3

Übung 1.9

Zeigen sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \tag{3}$$

Lösung: Siehe A.4.

Wir wiederholen eine Definition aus der Analysis:

Definition 1.10: Offene und abgeschlossene Bälle

Für den offenen Ball mit Radius r und Mittelpunkt $z \in \mathbb{C}$ schreiben wir

$$B_r(z) := \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| < r\}$$

Der abgeschlossene Ball mit Radius r und Mittelpunkt z ist der Abschluss von $B_r(z)$ und wir haben:

$$\overline{B_r(z)} = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| \leq r\}$$

Der Rand von $B_r(z)$ ist der Kreis:

$$\partial B_r(z) = C_r(z) = \{w \in \mathbb{C} \mid |w - z| = r\}$$

Woche 2

1.2 Möbiustransformationen & Riemann'sche Zahlenkugel

1.2.1 Riemann'sche Zahlenkugel

Wenn wir mit komplexen Zahlen in der komplexen Ebene arbeiten, dann ist es manchmal nützlich '∞' zur komplexen Ebene dazuzunehmen. Dies erleichtert gewisse Definitionen, zum Beispiel für meromorphe Funktionen. Wir schreiben also

$$\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$$

In der Sprache der Topologie lässt sich $\overline{\mathbb{C}}$ auch als Einpunktkompaktifizierung von $\mathbb{C}$ verstehen.

Wir wollen nun zunächst einmal definieren, was die Topologie (also die Menge der offenen Mengen) auf $\overline{\mathbb{C}}$ ist.

Definition 1.11: Topologie auf $\overline{\mathbb{C}}$

Eine Teilmenge $U \subseteq \overline{\mathbb{C}}$ ist offen, falls sie eine der folgenden Bedingungen erfüllt:

(i) $\infty \notin U$: und U ist eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$.

(ii) $\infty \in U$: und $K := \overline{\mathbb{C}} \setminus U$ ist eine kompakte Teilmenge von $\mathbb{C}$.

Woche 2

Wir definieren nun die 2-Sphäre:

$$S^2 := \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1\}.$$

Indem wir $(x_1, x_2, 0)$ mit $\mathbb{C}$ identifizieren, können wir $\mathbb{C}$ als die (x_1, x_2)-Ebene in $\mathbb{R}^3$ auffassen. Sei nun $N = (0, 0, 1)$ der "Nordpol" der Sphäre und definiere die Abbildung

$$\phi : S^2 \setminus N \longrightarrow \mathbb{C}$$

wie folgt: Für $p \in S^2$ (mit $p \neq N$) sei $\phi(p)$ der Schnittpunkt von $\mathbb{C}$ mit dem Strahl in $\mathbb{R}^3$, der bei N beginnt und durch p verläuft. Diese Abbildung ϕ heißt die *stereographische Projektion* von $S^2 \setminus N$ auf $\mathbb{C}$. Explizit ist diese Abbildung ϕ gegeben durch

$$\phi(p) = \pi(x_1, x_2, x_3) = \left(\frac{x_1}{1 - x_3}, \frac{x_2}{1 - x_3}, 0\right) = \frac{x_1}{1 - x_3} + i \cdot \frac{x_2}{1 - x_3}.$$

Beachte, dass die Gleichung des Strahls, der bei N beginnt und durch p verläuft, durch

$$N + t(p - N), \quad t \geq 0$$

gegeben ist und $\phi(p) := N + t_0(p - N)$ für eine eindeutig bestimmte positive reelle Zahl t_0, sodass die dritte Koordinate dieser Gleichung gleich null ist. Durch Auflösen nach t_0 erhält man die obige Formel. Mit der Definition $\phi(N) := \infty$ erhalten wir so eine Bijektion zwischen der 2-Sphäre (hier die Riemann'sche Zahlenkugel) und $\overline{\mathbb{C}}$. Siehe hierzu die Abbildung 2.

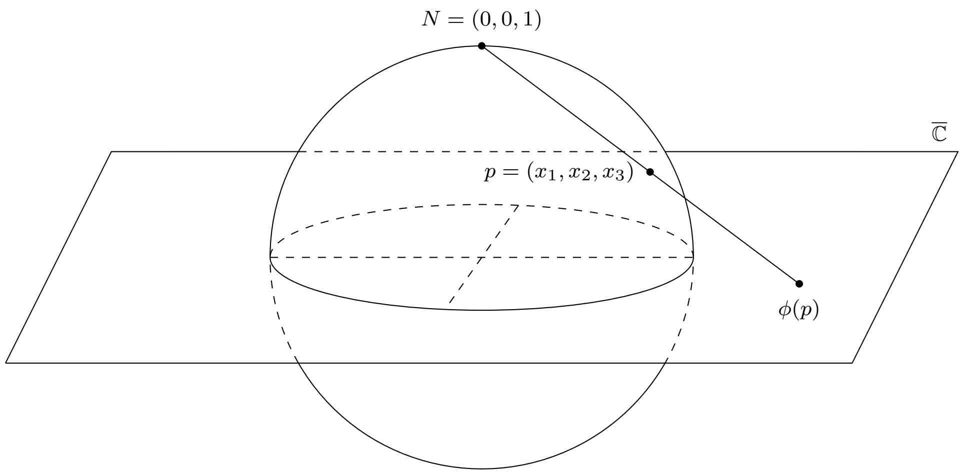

Abbildung 2: Stereographische Projektion von S^2 auf $\overline{\mathbb{C}}$.

1.2.2 Möbiustransformationen

Wir betrachten eine 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$$

Da $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ wissen wir, dass $\det(A) = ad - bc \neq 0$ ist. Diese Matrix induziert nun eine Abbildung $\phi_A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ durch

$$\phi_A : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}, \quad z \longmapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

Eine solche Abbildung nennen wir eine **Möbiustransformation**. Damit Möbiustransformationen auf ganz $\overline{\mathbb{C}}$ sinnvoll definiert sind, brauchen wir einige Konventionen:

Bemerkung 1.12: Konventionen in $\overline{\mathbb{C}}$

- Da $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ können nicht Zähler und Nenner gleichzeitig gleich Null sein.
- $\frac{\lambda}{0} = \infty$ für $\lambda \neq 0$
- $\phi_A(\infty) = \frac{a}{c}$ falls $c \neq 0$ und $\phi_A(\infty) = \infty$, falls $c = 0$. Dies ist wohldefiniert, da a und c nicht beide gleichzeitig gleich Null sein können.

Woche 2

Bemerkung 1.13: Gruppe der Möbiustransformationen

Die Menge der Möbiustransformationen auf $\overline{\mathbb{C}}$ bilden eine Gruppe unter der Verknüpfung. Schreibe für diese Gruppe $\mathfrak{M}(\overline{\mathbb{C}})$. Dann haben wir einen Gruppenhomomorphismus

$$\psi : \mathrm{GL}_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathfrak{M}(\overline{\mathbb{C}}), \quad A \longmapsto \phi_A$$

und es gilt $\ker(\psi) = \mathbb{C}^* \mathbf{1}_2 = \{\lambda \mathbf{1}_2 \mid \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}\}$. Mit dem Isomorphiesatz für Gruppen erhalten wir schlussendlich, dass die Gruppe der Möbiustransformationen folgende Darstellung hat

$$\mathfrak{M}(\overline{\mathbb{C}}) \cong \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})/\mathbb{C}^* \mathbf{1}_2 \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{C})/\{\pm \mathbf{1}_2\} =: \mathrm{PSL}_2(\mathbb{C})$$

Übung 1.14

Zeige, dass $\ker(\psi) = \mathbb{C}^* \mathbf{1}_2$ gilt. Das heisst, zeige: falls für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ $\phi_A = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$ gilt, so muss A die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

haben.

Lösung: Siehe A.5.

1.3 Holomorphe Funktionen

In den folgenden Teilen des Kurses ist $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ immer eine offene Teilmenge von $\mathbb{C}$. Die folgende Definition ist zentral für den Rest dieser Vorlesung:

Definition 1.15: Holomorphe Funktionen

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ eine komplex-wertige Funktion. Dann heisst f komplex differenzierbar (holomorph) an der Stelle $z_0 \in \Omega$, falls der Grenzwert

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

existiert. Sofern dieser Grenzwert existiert, nennen wir ihn die (komplexe) Ableitung von f bei z_0 und schreiben dafür $f'(z_0)$. Falls f holomorph in jedem Punkt $z \in \Omega$ ist, so sagen wir, dass f holomorph auf Ω ist. Falls f holomorph auf ganz $\mathbb{C}$ ist, so heisst f ganz (*english: entire*).

(Hier haben wir $h \in \mathbb{C}$ so gewählt, dass $z_0 + h \in \Omega$. Dies können wir tun, da Ω offen ist).

Bemerkung 1.16: Holomorphe Funktionen sind stetig

Falls eine Funktion $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in $z_0 \in \Omega$ ist, so ist f auch stetig in z_0.

Sei nämlich $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ komplex differenzierbar in $z_0 \in \Omega$. Dann gilt:

$$0 = 0 \cdot f'(z_0) = \left(\lim_{h\to 0} h\right) \cdot \left(\lim_{h\to 0} \frac{f(z_0+h) - f(z_0)}{h}\right) = \lim_{h\to 0} \left(f(z_0+h) - f(z_0)\right)$$

Also ist $f(z_0) = \lim_{h\to 0} f(z_0+h)$ und damit ist f stetig bei z_0.

Beispiel 1.17: Aus der Vorlesung:

- Definiere $f_1(z) := c$ für ein $c \in \mathbb{C}$ (also f konstant). Dann ist f holomorph in jedem Punkt $z \in \mathbb{C}$ (überall komplex differenzierbar). Es gilt $f_1'(z) = 0$.
- Sei $f_2(z) := z$. Dann ist f ebenfalls überall komplex differenzierbar und es gilt $f_2'(z) = 1$ für alle $z \in \mathbb{C}$.
- $f_3(z) = z^n$ für ein $n \in \mathbb{N}$. Dann ist f_3 ebenfalls überall komplex differenzierbar. Es gilt:

$$f_3'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{(z+h)^n - z^n}{h} = \lim_{h\to 0} \sum_{i=1}^{n} \binom{n}{i} h^{i-1} z^{n-i} = n \cdot z^{n-1}$$

- $f_4(z) := \exp(z) = e^z$, $f_4 : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$. Dann ist f_4 ebenfalls überall komplex differenzierbar:

$$f_4'(z) = \lim_{h\to 0} \frac{\exp(z+h) - \exp(z)}{h} = \exp(z) \cdot \underbrace{\lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h}}_{=1} = e^z$$

Beispiel 1.18: Wichtiges Gegenbeispiel

Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$, $z \mapsto \bar{z}$. Also ist f die Abbildung, die jeder komplexen Zahl z ihre komplex Konjugierte $\bar{z}$ zuordnet. Diese Funktion ist **nirgendwo** komplex differenzierbar.

1.4 Die Cauchy-Riemann Gleichungen

Wir leiten nun die Cauchy-Riemann-Gleichungen her. Sei $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in z_0. Schreiben wir $f(x+iy) = u + iv$, so können wir f auch als eine Abbildung $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ auffassen:

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y) \longmapsto (u(x,y), v(x,y)).$$

Woche 2

Da f in z_0 holomorph ist, wissen wir, dass das Limes

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

existiert, und zwar unabhängig davon, wie z gegen z_0 strebt. Insbesondere können wir $z \to z_0 = x_0 + iy_0$ entlang der Geraden $z = x + iy_0$ mit $x \to x_0$ betrachten:

$$f'(z_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x + iy_0) - f(x_0 + iy_0)}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

$$= \lim_{x \to x_0} \frac{u(x, y_0) - u(x_0, y_0)}{x - x_0} + i \lim_{x \to x_0} \frac{v(x, y_0) - v(x_0, y_0)}{x - x_0} = \partial_x u(x_0, y_0) + i\, \partial_x v(x_0, y_0).$$

Daraus schließen wir, dass die gewöhnlichen partiellen Ableitungen $\partial_x u(x_0, y_0)$ und $\partial_x v(x_0, y_0)$ existieren, und insbesondere

$$f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\, \partial_x v(x_0, y_0).$$

Andererseits können wir $z_0 = x_0 + iy_0$ auch entlang der Geraden $z = x_0 + iy$ mit $y \to y_0$ annähern. Dies ergibt:

$$f'(z_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0 + iy) - f(x_0 + iy_0)}{i(y - y_0)} = \lim_{y \to y_0} \frac{v(x_0, y) - v(x_0, y_0)}{y - y_0} - i \lim_{y \to y_0} \frac{u(x_0, y) - u(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

$$= \partial_y v(z_0) - i\, \partial_y u(z_0).$$

Somit existiert auch die partielle Ableitung $\partial_y f(z_0) = \partial_y u(z_0) + i\, \partial_y v(z_0)$, und wir haben

$$f'(z_0) = \partial_y v(z_0) - i\, \partial_y u(z_0) = -i\, \partial_y f(z_0).$$

Wir erhalten also zwei verschiedene Ausdrücke für die Ableitung von f in z_0:

$$f'(z_0) = \partial_x f(z_0) = \partial_x u(x_0, y_0) + i\, \partial_x v(x_0, y_0) = \partial_y v(z_0) - i\, \partial_y u(z_0) = -i\, \partial_y f(z_0).$$

Aus dieser Gleichheit folgen die Cauchy-Riemann-Gleichungen:

Theorem 1.19: Cauchy-Riemann-Gleichungen

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph. Schreiben wir $f(z) = u(z) + iv(z)$, so gelten die Gleichungen:

$$\partial_x u(z) = \partial_y v(z), \qquad \partial_y u(z) = -\partial_x v(z).$$

Diese Gleichungen heißen die *Cauchy-Riemann-Gleichungen.*

Wir definieren zwei Differentialoperatoren:

$$\frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big), \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Woche 2

Bemerkung 1.20: Komplexe Zahlen als Matrizen

Wir können komplexe Zahlen $z = a + ib$ auch als Matrizen darstellen:

$$Z = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \leftrightarrow a + ib$$

dann haben wir für $z = a + ib$ und $w = x + iy$ die Addition gegeben durch die normale Addition von Matrizen

$$Z + W = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + x & -(b + y) \\ b + y & a + x \end{pmatrix} \leftrightarrow (a + x) + i(b + y) = z + w$$

und die Multiplikation von komplexen Zahlen ist gegeben durch die normale Matrix-Multiplikation:

$$ZW = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax - by & -(ay + bx) \\ ay + bx & ax - by \end{pmatrix} \leftrightarrow (ax-by)+i(ay+bx) = zw$$

Das bisherige lässt sich in folgendem Satz zusammenfassen:

Proposition 1.21

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph in z_0 und schreiben wir $f = u + iv$. Dann gilt:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}}(z_0) = 0, \qquad \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) = f'(z_0).$$

Schreiben wir $f(z) = \tilde{f}(x, y)$ mit $\tilde{f} : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, so ist $\tilde{f}$ in (x_0, y_0) differenzierbar mit der Jacobi-Matrix

$$\mathcal{J}_{\tilde{f}}(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ \partial_x v & \partial_y v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \partial_x u & \partial_y u \\ -\partial_y u & \partial_x u \end{pmatrix}.$$

Außerdem gilt $\det(\mathcal{J}_{\tilde{f}}(z_0)) = |f'(z_0)|^2$.

Übung 1.22

Zeige, dass für $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ komplex differenzierbar gilt:

$$f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = 2i\frac{\partial v}{\partial z}$$

Übung 1.23

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nimm an, dass für alle $z \in \Omega$ gilt $f'(z) = 0$. Zeige, dass f konstant ist.

Übung 1.24

Sei $f(x+iy) := u(x,y)+iv(x,y)$ komplex differenzierbar. Zeige, dass falls entweder $u(x,y)$ oder $v(x,y)$ konstant sind, dann muss auch f konstant sein.

Lösung: Siehe A.8.

Woche 2

Woche 2

Serien

Tipps Serie 1

A Appendix

Lösung A.1: zu Übung 1.3

Beweisen sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{z + \bar{z}}{2}, \qquad \mathrm{Im}(z) = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Beweis. Sei $z = x + iy \in \mathbb{C}$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\mathrm{Re}(z) = x$, $\mathrm{Im}(z) = y$. Somit haben wir

$$z + \bar{z} = (x + iy) + (x - iy) = 2x$$

also haben wir

$$\mathrm{Re}(z) = x = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$$

Weiter gilt:

$$z - \bar{z} = (x + iy) - (x - iy) = 2iy$$

uns somit folgt schlussendlich auch

$$\mathrm{Im}(z) = y = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$$

□

Lösung A.2: zu Übung 1.5

Sei $z \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Was ist das additive und was ist das multiplikative Inverse von z?

Beweis. Das additive Inverse von $z \in \mathbb{C}$ ist $-z \in \mathbb{C}$. Denn es gilt:

$$z + (-z) = 0 \ \ \text{(additive Identität)}$$

Das multiplikative Inverse von z ist gegeben durch $z^{-1} = |z|^{-2} \cdot \bar{z}$. Denn es gilt:

$$z \cdot z^{-1} = z \cdot (|z|^{-2} \cdot \bar{z}) = |z|^{-2}(z \cdot \bar{z}) \tag{4}$$

und es gilt für $z = x + iy$:

$$z \cdot \bar{z} = (x + iy) \cdot (x - iy) = x^2 - ixy + ixy - (i)^2 y^2 = x^2 + y^2 = |z|^2$$

Damit folgt aus Gleichung 4:

$$z \cdot z^{-1} = |z|^{-2} \cdot |z| = 1 \ \ \text{(multiplikative Identität)}$$

□

Lösung A.3: zu Übung 1.8

Zeigen sie, dass für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2 \quad \text{(Parallelogramm-Identität)} \tag{5}$$

und

$$|z+w| \leq |z| + |w| \quad \text{(Dreiecksungleichung)} \tag{6}$$

Beweis. Wir haben direkt aus der Definition, dass folgendes gilt:

$$-|z| \leq \operatorname{Re}(z) \leq |z|, \quad -|z| \leq \operatorname{Im}(z) \leq |z|$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned}|z+w|^2 &= (z+w) \cdot \overline{(z+w)} = (z+w) \cdot (\bar{z} + \bar{w}) \\ &= z \cdot \bar{z} + w \cdot \bar{w} + z\bar{w} + \bar{z}w \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w})\end{aligned}$$

Ersetzen wir nun w durch $-w$, so erhalten wir auf dieselbe Weise:

$$|z-w|^2 = |z|^2 + |w|^2 - 2\operatorname{Re}(z\bar{w})$$

und also erhalten wir durch Addition dieser beiden Gleichungen die Parallelogramm-Identität:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2$$

Die Dreiecksungleichung folgt nun:

$$|z+w|^2 = |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(z\bar{w}) \leq |z|^2 + |w|^2 + 2|z\bar{w}| = (|z| + |w|)^2$$

und somit

$$|z+w| \leq |z| + |w|$$

□

Lösung A.4: zu Übung 1.9

Zeigen sie, dass für alle $z \in \mathbb{C}$ gilt

$$|z| \leq |\operatorname{Re}(z)| + |\operatorname{Im}(z)| \tag{7}$$

Beweis. Schreibe $z = x + iy$ für $x, y \in \mathbb{R}$. Dann haben wir:

$$|z| = |x+iy| \overset{\text{Dreiecks Ungl.}}{\leq} |x| + |iy| = |x| + |y|$$

und mit $x = \operatorname{Re}(z),\ y = \operatorname{Im}(z)$ folgt die Aussage. □

Lösung A.5: zu Übung 1.14

Zeige, dass $\ker(\psi) = \mathbb{C}^* \mathbf{1}_2$ gilt. Das heisst, zeige: falls für eine Matrix $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ $\phi_A = \mathrm{id}_{\overline{\mathbb{C}}}$ gilt, so muss A die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

haben.

Beweis. Sei also $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$ ein Element des Kerns $\ker(\psi)$. Das heisst, wenn wir schreiben

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \xrightarrow[\psi]{\text{verstanden als Möbiustransformation}} \phi_A : z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

so gilt $\phi_A = \mathrm{id}$, also $\phi_A(z) = z$ für alle $z \in \overline{\mathbb{C}}$. Damit haben wir für alle $z \in \overline{\mathbb{C}}$, dass

$$z = \frac{az+b}{cz+d} \overset{d \neq 0}{\Longrightarrow} c = 0, b = 0, a = d =: \lambda$$

also in diesem Fall hat A die Form

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Weil $\phi_A(\infty) = \infty$ gelten muss, muss $c = 0$ gelten. Da nicht beide c und d gleich Null sein können, gilt in jedem Fall $d \neq 0$. Also hat A immer die Form $\lambda \mathbf{1}_2$ für $\lambda \in \mathbb{C}^*$. □

Lösung A.6: zu Übung 1.22

Zeige, dass für $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ mit $f = u + iv$ komplex differenzierbar gilt:

$$f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = 2i\frac{\partial v}{\partial z}$$

Beweis. Sei $f : \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph und schreibe $f = u + iv$ mit reellen Funktionen $u, v : \Omega \to \mathbb{R}$. Wir erinnern an die Definition

$$\frac{\partial}{\partial z} = \tfrac{1}{2}\Big(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\Big).$$

Außerdem gilt wegen Holomorphie die Cauchy–Riemann–Form

$$\partial_x u = \partial_y v, \qquad \partial_y u = -\partial_x v.$$

Wir berechnen zunächst die gewöhnliche komplexe Ableitung $f'(z)$ in den üblichen Formen:

$$f'(z) = \partial_x u + i\,\partial_x v$$

(ebenfalls gleich $\partial_y v - i\,\partial_y u$, was man durch Annäherung in x- bzw. y-Richtung erhält).

Nun zeigen wir die erste Identität. Mit der Definition von $\partial/\partial z$ gilt

$$2\frac{\partial u}{\partial z} = \big(\partial_x u - i\,\partial_y u\big).$$

Setzt man die Cauchy–Riemann–Gleichungen ein ($\partial_y u = -\partial_x v$), so erhält man

$$2\frac{\partial u}{\partial z} = \partial_x u - i(-\partial_x v) = \partial_x u + i\,\partial_x v = f'(z).$$

Für die zweite Identität rechnen wir

$$2i\frac{\partial v}{\partial z} = 2i \cdot \tfrac{1}{2}\big(\partial_x v - i\,\partial_y v\big) = i\partial_x v + \partial_y v.$$

Mit $\partial_y v = \partial_x u$ (Cauchy–Riemann) folgt

$$2i\frac{\partial v}{\partial z} = \partial_x u + i\partial_x v = f'(z).$$

Damit ist gezeigt:

$$f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = 2i\frac{\partial v}{\partial z}.$$

$\square$

Lösung A.7: zu Übung 1.23

Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ holomorph und nimm an, dass für alle $z \in \Omega$ gilt $f'(z) = 0$. Zeige, dass f konstant ist.

Beweis. Da f holomorph in Ω ist, sind ihre Real- und Imaginärteile insbesondere im Sinne der reellen Analysis differenzierbar, wenn man Ω als Teilmenge von $\mathbb{R}^2$ auffasst.

Da

$$0 = f'(z) = 2\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{i}\frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

folgt, dass

$$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}\right) \equiv 0 \quad \text{in } \Omega.$$

Somit ist u konstant in Ω.

Analog gilt für den Imaginärteil v, da man auch schreiben kann

$$0 = f'(z) = 2i\,\frac{\partial v}{\partial z}.$$

Also ist auch v konstant in Ω.

Daraus folgt, dass

$$f = u + iv$$

konstant in Ω ist. $\square$

Lösung A.8: zu Übung 1.24

Sei $f(x+iy) := u(x,y)+iv(x,y)$ komplex differenzierbar. Zeige, dass falls entweder $u(x,y)$ oder $v(x,y)$ konstant sind, dann muss auch f konstant sein.

Beweis. Da f komplex differenzierbar ist, gelten die Cauchy-Riemann Gleichungen:

$$\partial_x u = \partial_y v,\ \partial_y u = -\partial_x v \tag{8}$$

Nimm nun an, dass $u(x,y)$ konstant ist. Dann gilt sicher $\partial_x u = \partial_y u = 0$ und mit Gleichung 8 folgt, dass auch $\partial_y v = \partial_x v = 0$ sein muss. Somit ist auch v konstant, also auch $f = u + iv$.

□