Wojskowa Akademia Techniczna
im. Jarosława Dąbrowskiego

STEROWANIE RUCHEM W SIECIACH TELEKOMUNIKACYJNYCH

Przepustowość sieci telekomunikacyjnej

dr inż. Joanna Głowacka
joanna.glowacka@wat.edu.pl
Instytut Telekomunikacji Wydział Elektroniki WAT
tel. 261 837 149
bud. 47 pok. 125

Przepustowość - definicja

Przepustowość - maksymalna ilość czynnika mogącego przepłynąć przez krawędź.

Przepustowość jest nieujemną funkcją rzeczywistą oznaczaną zwykle przez c(u,v), gdzie u i v $\in$ V. Jeśli wierzchołki u i v są połączone kanałem, czyli (u,v) $\in$ E, to przepustowość tego kanału spełnia warunek $c(u,v) \geq 0$. Jeśli wierzchołki u i v nie są połączone kanałem, czyli(u,v) $\notin$ E, to $c(u,v) = 0$.

Przepływ

Przepływ to funkcja rzeczywista o argumentach będących parą wierzchołków grafu, oznaczana zwykle przez f(u,v). Funkcja przepływu musi spełniać trzy warunki:

- dla każdej pary wierzchołków u i v $\in$ V zachodzi $f(u,v) \leq c(u,v)$;
- dla każdej pary wierzchołków u i v $\in$ V zachodzi $f(u,v) = -f(v,u)$. Warunek ten oznacza, iż przepływ w odwrotnym kierunku jest ujemny;
- dla każdego wierzchołka u $\in$ V - {s,t} suma wszystkich przepływów f(u,v), v $\in$ V, jest równa zero. Warunek ten oznacza, iż suma wszystkich przepływów wpływających do wierzchołka jest równa sumie przepływów wypływających z wierzchołka.

Przepływ

Przepływ sieci jest definiowany jako suma przepływów netto ze źródła *s* do wszystkich pozostałych wierzchołków sieci:

$$|f| = \sum_{v \in V} f(s, v)$$

Przepływ maksymalny

Przepływ f* nazywa się przepływem maksymalnym w danej sieci S, gdy:

$$v(f^*) = max_{f \in F} v(f)$$

gdzie: F – zbiór wszystkich możliwych przepływów dla danej sieci.

Przy danym przepływie f łuki <x,y> sieci mogą być:

- nasycone, gdy: f(x,y) = c(x,y)
- nienasycone, gdy: 0 < f(x,y) < c(x,y)
- wyschnięte (nieobciążone), gdy: f(x,y) = 0

Przepustowość residualna

Przepustowość residualna $c_f(u,v)$ (ang. residual capacity) danego kanału (u,v) jest równa różnicy przepustowości oraz przepływu w tym kanale:

$$c_f(u,v) = c(u,v) - f(u,v)$$

Przepustowości residualne liczy się również w kierunku przeciwnym - pomimo, że w sieci może nie występować kanał zwrotny. W takim przypadku, zgodnie z definicją przepustowości i własnością skośnej symetrii przepływu, mamy:

$$c_f(v,u) = c(v,u) - f(v,u)$$

Ponieważ $c(v,u) = 0$, $f(v,u) = - f(u,v)$, to

$$c_f(v,u) = 0 - (-f(u,v)) = f(u,v)$$

Przepustowości residualne indukują tzw. **sieć residualną** (ang. residual network), która zawiera wszystkie wierzchołki oryginalnej sieci przepływowej oraz krawędzie łączące wierzchołki, dla których przepustowość residualna jest większa od zera - oznacza to, iż w sieci residualnej nie umieszczamy krawędzi pomiędzy wierzchołkami u i v, jeśli $c_f(u,v) = 0$.

Przekrój rozdzielający

Przekrój rozdzielający ***x*** od ***y*** jest to zbiór krawędzi, których usunięcie pozostawia sieć nie mającą nietrywialnych przepływów z ***x*** do ***y***. Przepustowość przekroju jest sumą przepustowości wszystkich krawędzi należących do przekroju.

Twierdzenie minimaksowe

Między dowolnymi dwoma wierzchołkami ***x*** oraz ***y*** należącymi do sieci zachodzi

Minimalna przepustowość przekroju, który rozdziela ***x*** od ***y***	←→	Maksymalna wartość przepływu z ***x*** do ***y***

Algorytm Forda-Fulkersona

W każdej iteracji metody Forda–Fulkersona odnajdujemy dowolną ścieżkę powiększającą i zwiększamy przepływ na każdej krawędzi o przepustowość rezydualną.

Niech S=(V,A;c) będzie siecią, a f przepływem w S - jeśli nie mamy lepszego, może to być przepływ zerowy, tj. przepływ równy zero na wszystkich łukach sieci.

Algorytm wykorzystuje ideę dowodu twierdzenia o maksymalnej wartości przepływu polega na cechowaniu wierzchołków sieci cechami postaci (x^-,ε) lub (x^+, ε) oraz modyfikacji przepływu jeśli f okazał się przepływem, który nie jest maksymalny lub znalezieniu przekroju o przepustowości równej wartości przepływu f.

Algorytm Forda-Fulkersona

Cechowanie:

- Wierzchołkowi s nadajemy cechę $(-,\infty)$.
- Niech x będzie wierzchołkiem ocechowanym. Z wierzchołka x cechujemy nieocechowane jeszcze wierzchołki w jednej z dwóch sytuacji:
  - jeśli istnieje wierzchołek nieocechowany y taki, że $(x,y) \in A$ i $f(x,y) < c(x,y)$ to wierzchołkowi y nadajemy cechę $(x^+,\varepsilon(y))$, gdzie $\varepsilon(y)=\min\{\varepsilon(x), c(x,y)-f(x,y)\}$,
  - jeśli istnieje nieocechowany wierzchołek y taki, że $(y,x) \in A$ i $f(y,x)> 0$ to wierzchołkowi y nadajemy cechę $(x^-,\varepsilon(y))$, gdzie $\varepsilon(y)= \min\{ \varepsilon(x), f(y,x)\}$
- Postępowanie cechowania kończy się jeżeli został ocechowany odpływ t lub nie ocechowano t lecz procesu cechowania nie da się kontynuować (żadnego jeszcze nieocechowanego wierzchołka nie da się już ocechować).

Algorytm Forda-Fulkersona

- Jeżeli ocechowaliśmy wierzchołek t to t otrzymał cechę postaci (x^+,ε) lub (x^-, ε) (dla pewnego $x \in V$). W pierwszym przypadku modyfikujemy przepływ na łuku (x,y) wzorem $\tilde{f}(x,t)=f(x,t)+ \varepsilon$, w drugim $\tilde{f}(t,x)=f(t,x)- \varepsilon$.
- Wierzchołek x jest ocechowany. Jeżeli pierwszy element jego cechy jest postaci y^+ to do przepływu na łuku (y,x) dodajemy ε, jeżeli jest to y^- od przepływu na łuku (x,y) odejmujemy ε.
- Powtarzając tę czynność odpowiednią liczbę razy dojdziemy w końcu do źródła s. Dojdziemy wzdłuż wskazanej przez pierwsze elementy cech wierzchołków ścieżkę zwaną ścieżką powiększającą. Oczywiście wartość nowego przepływu $\tilde{f}$ wynosi $w(f)+ \varepsilon > w(f)$. Proces cechowania rozpoczynamy od nowa przyjmując jako wyjściowy przepływ $\tilde{f}$.

Algorytm Forda-Fulkersona

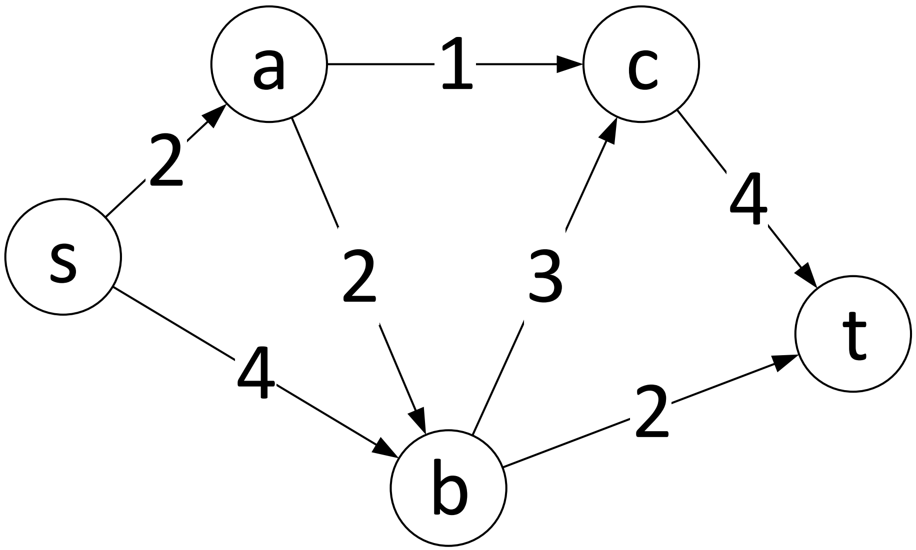
- Przypuśćmy, że w procesie cechowania nie udało się ocechować wierzchołka t, a żadnego nowego wierzchołka nie da się już ocechować. Jest oczywistym, że jeżeli przez W oznaczymy zbiór wierzchołków ocechowanych to (W,$\overline{W}$) jest przekrojem rozdzielającym s od t. Co więcej, dla wszystkich x ∈ W i y ∈ $\overline{W}$ spełniających (x,y)∈ A zachodzi f(x,y)=c(x,y), a jeśli (y,x) ∈ A to f(y,x)=0. Na podstawie uwagi otrzymamy

$$w(f) = \sum_{x \in W\ y \in \overline{W}} f(x,y) - \sum_{x \in W\ y \in \overline{W}} f(y,x) =$$
$$\sum_{x \in W\ y \in \overline{W}} c(x,y) = c(W,\overline{W})$$

Oznacza to, że przepływ f jest przepływem maksymalnym.

Przykład 1

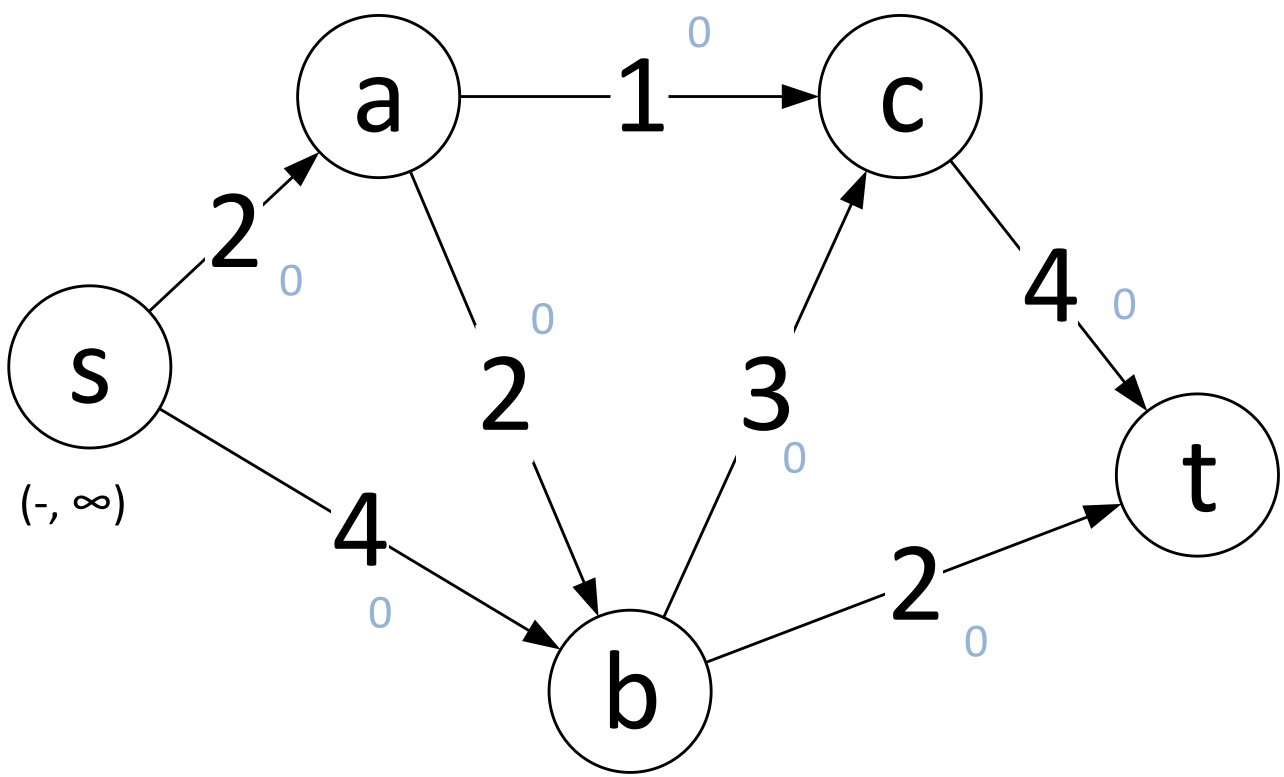
Dana jest sieć jak na rysunku:



Należy:

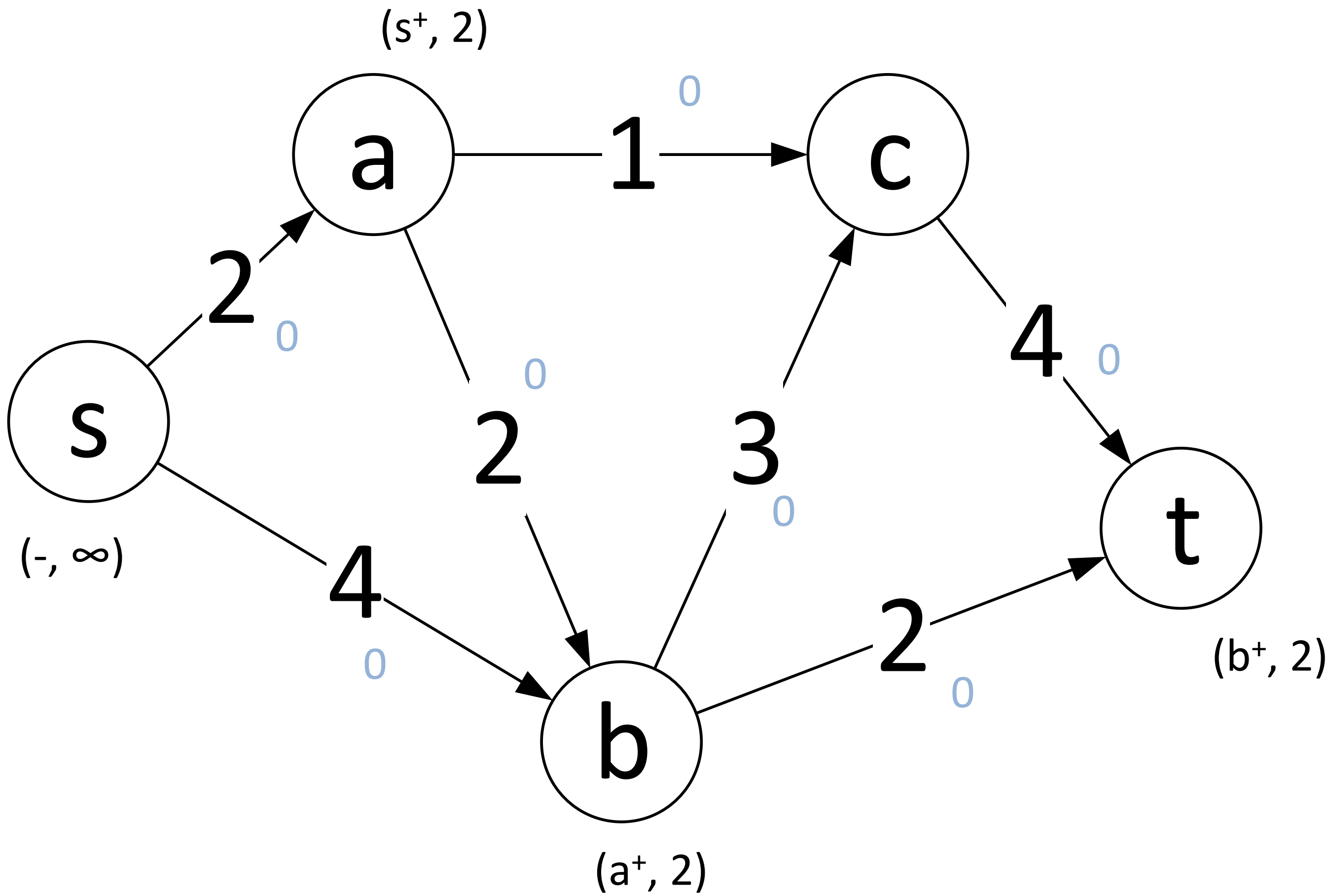
1. Wyznaczyć przepustowość sieci z punktu s do t

Przykład 1



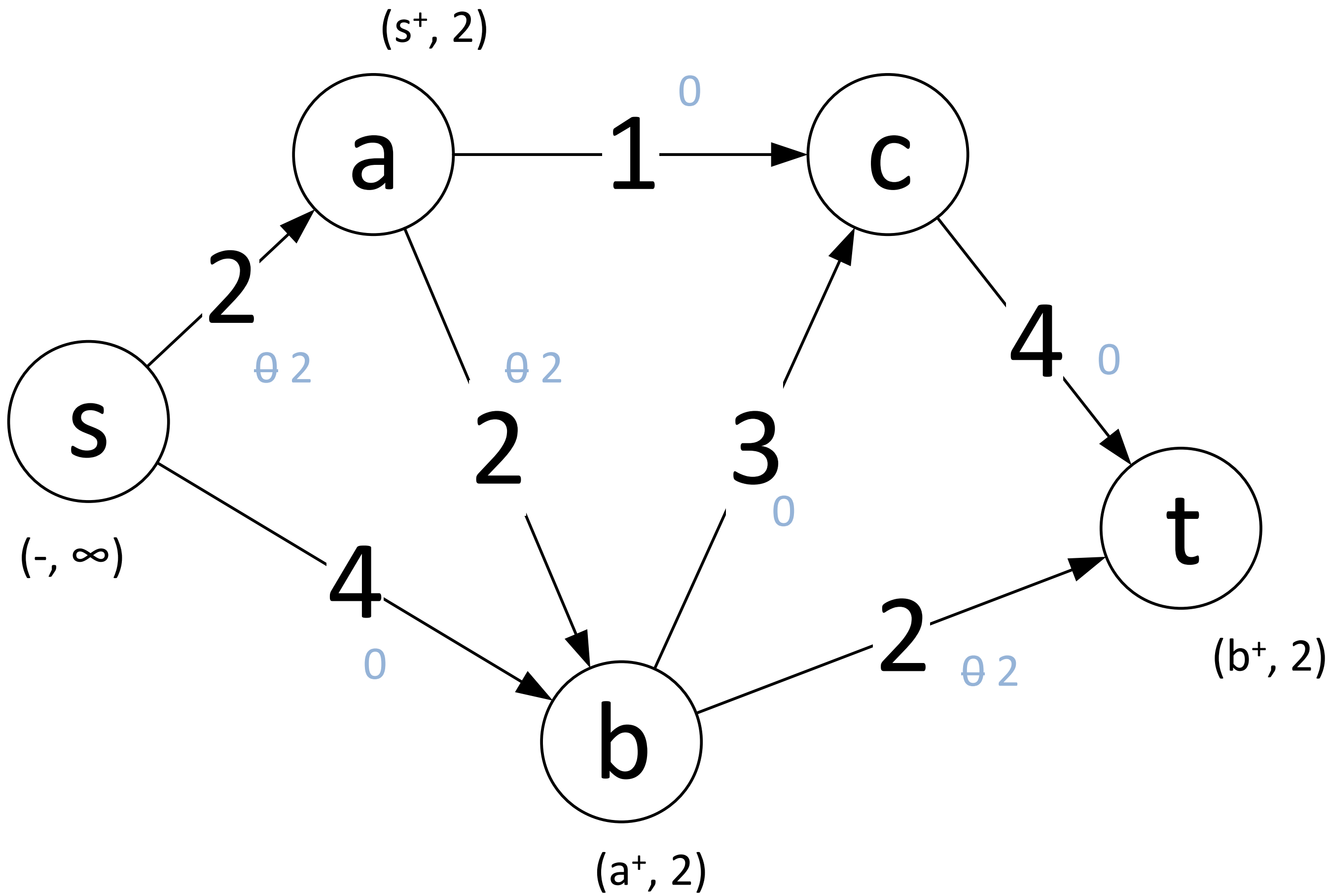
p1 = {s -> a -> b -> t}

Przykład 1



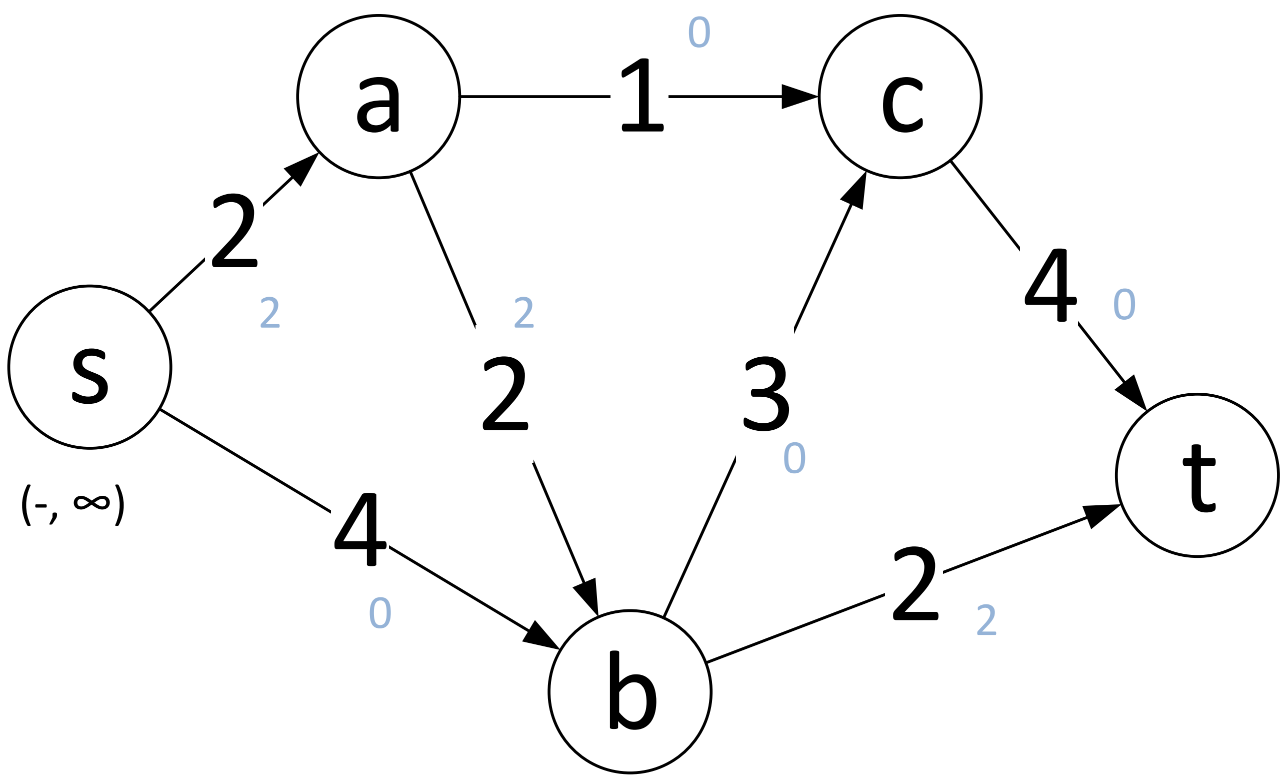
p1 = {s -> a -> b -> t}

Przykład 1



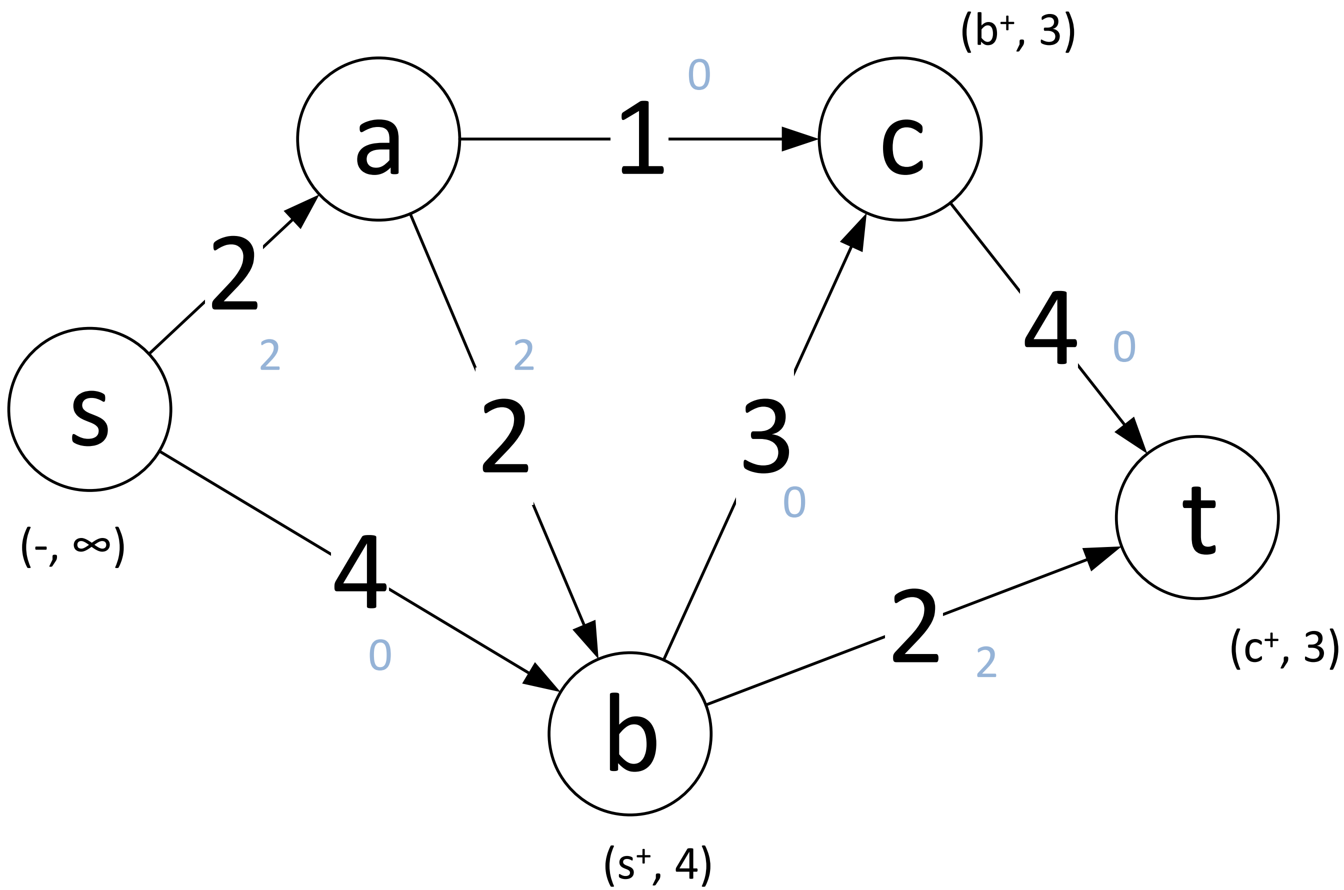
p1 = {s -> a -> b -> t} $c_f(p1)=2$

Przykład 1



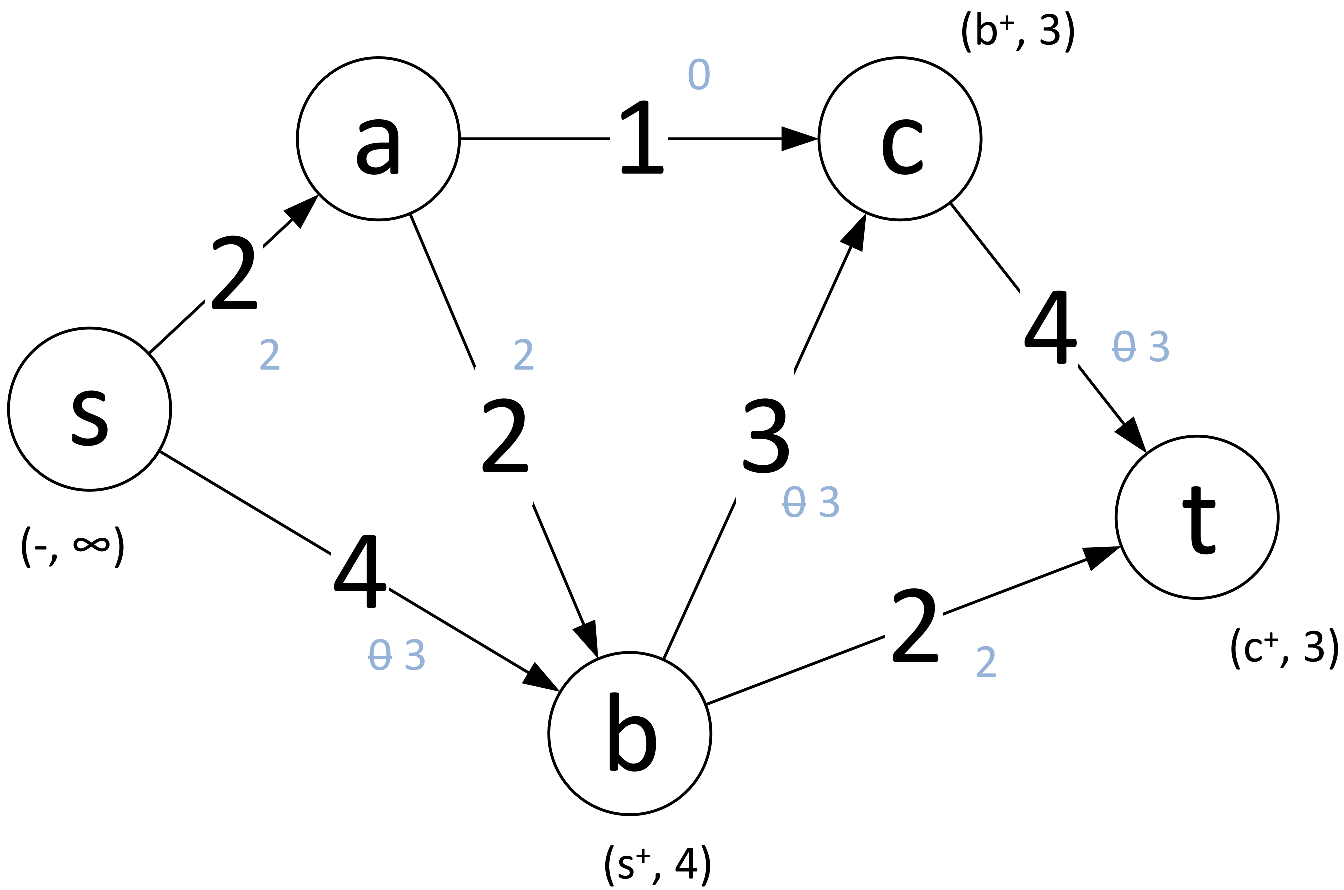
p2 = {s -> b -> c -> t}

Przykład 1



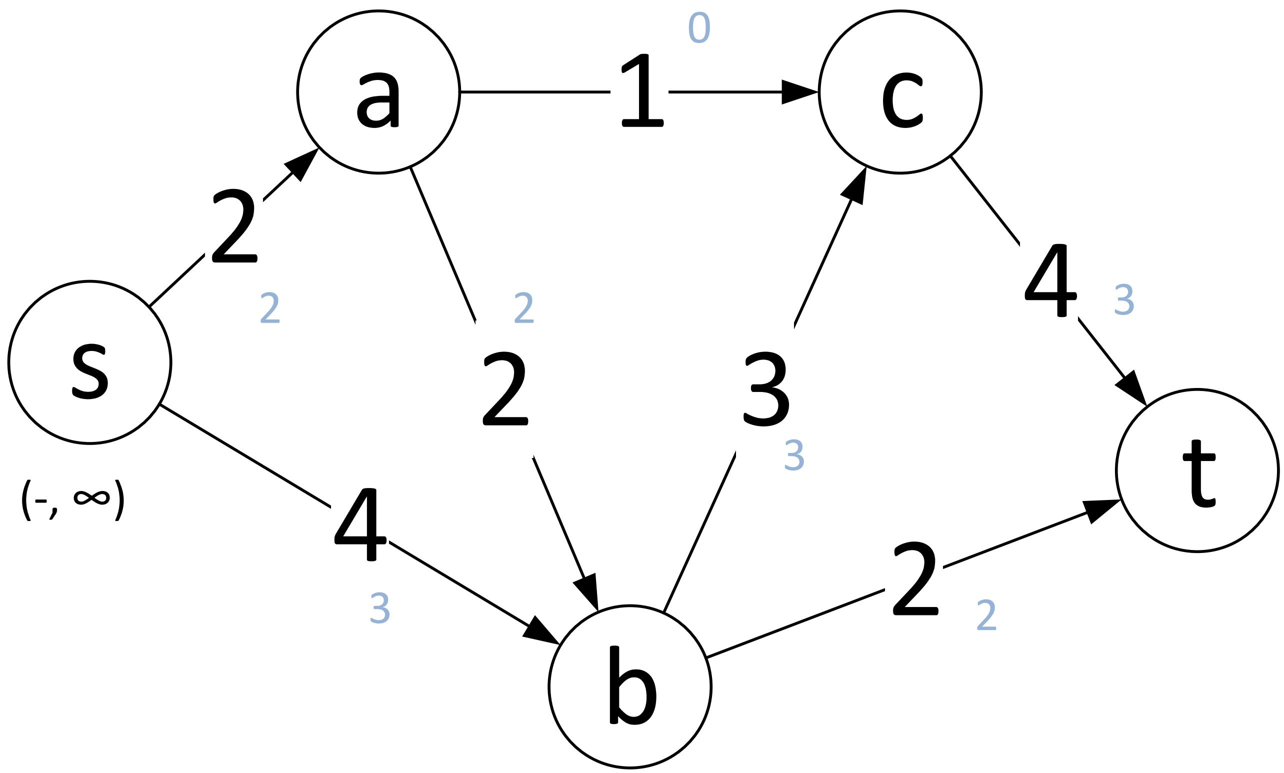
p2 = {s -> b -> c -> t}

Przykład 1



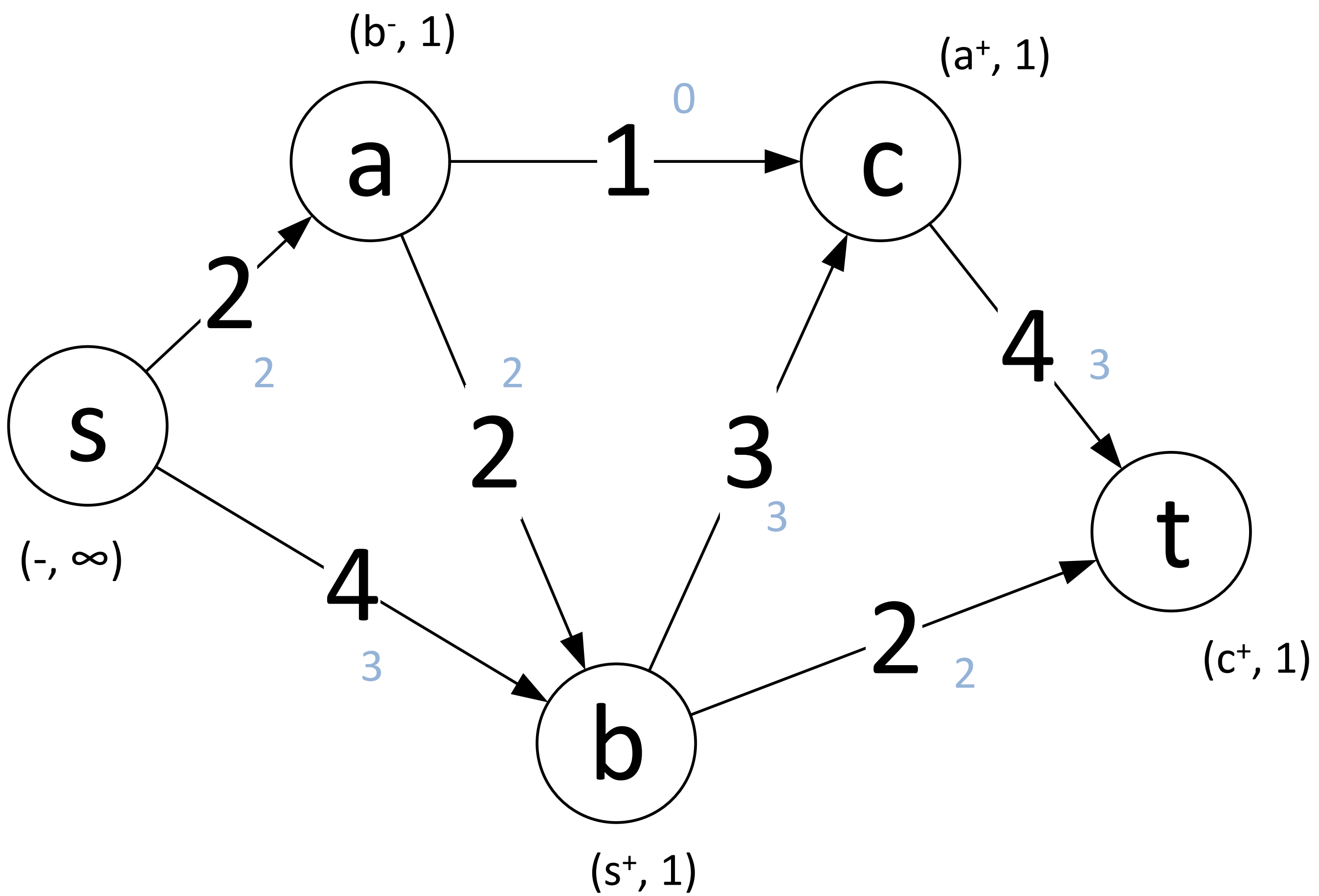
p2 = {s -> b -> c -> t} $c_f(p2)=3$

Przykład 1



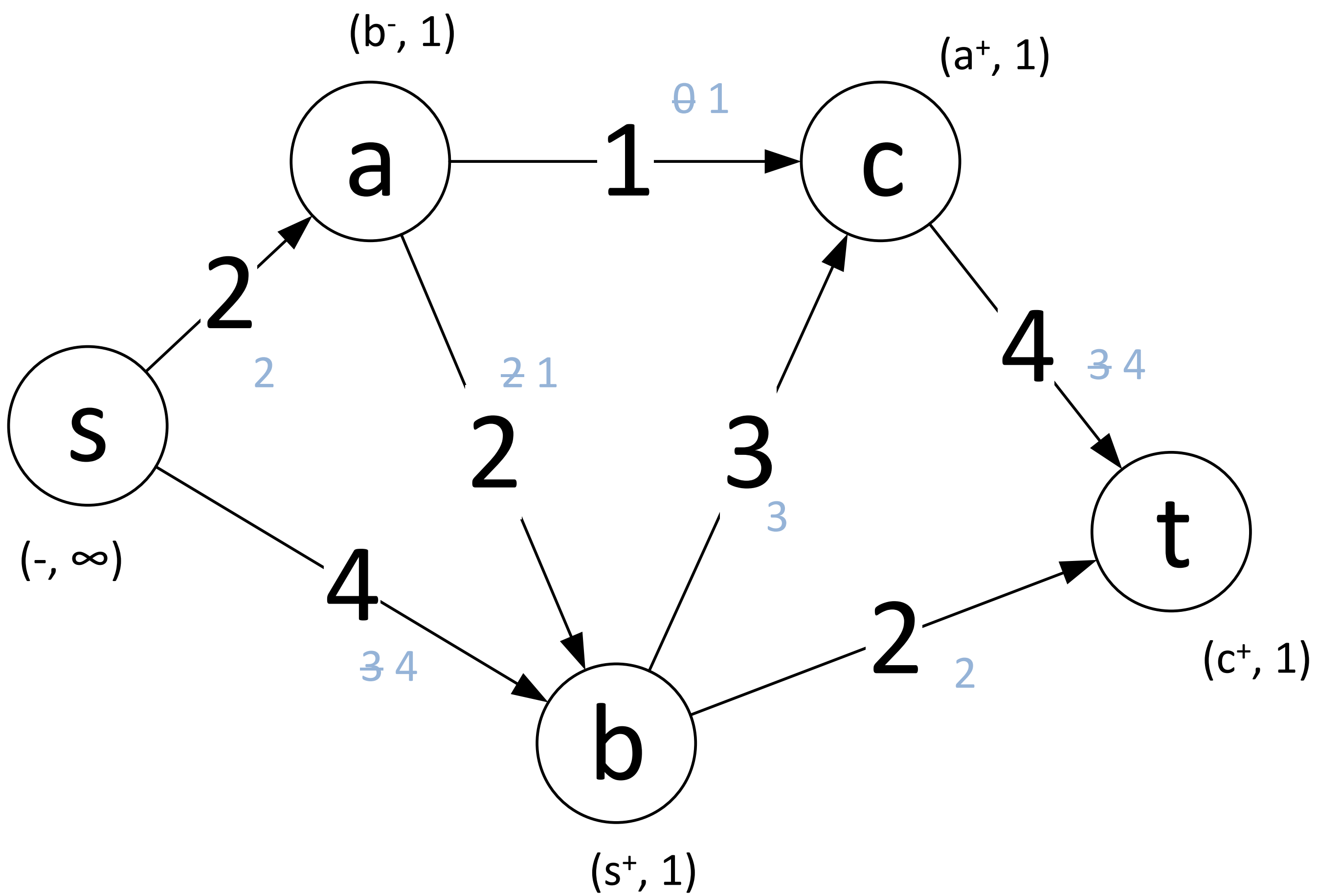
p3 = {s -> b -> a -> c -> t}

Przykład 1



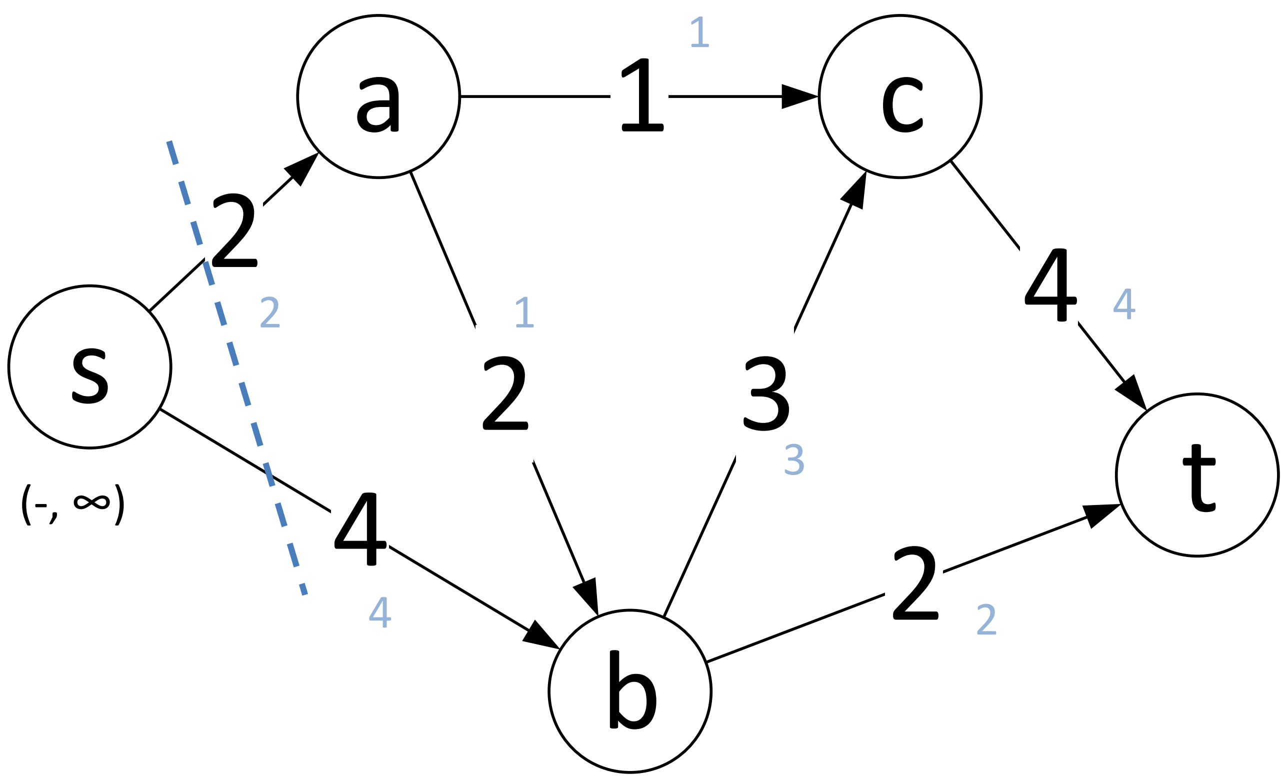
p3 = {s -> b -> a -> c -> t}

Przykład 1



p3 = {s -> b -> a -> c -> t} $c_f(p3)=1$

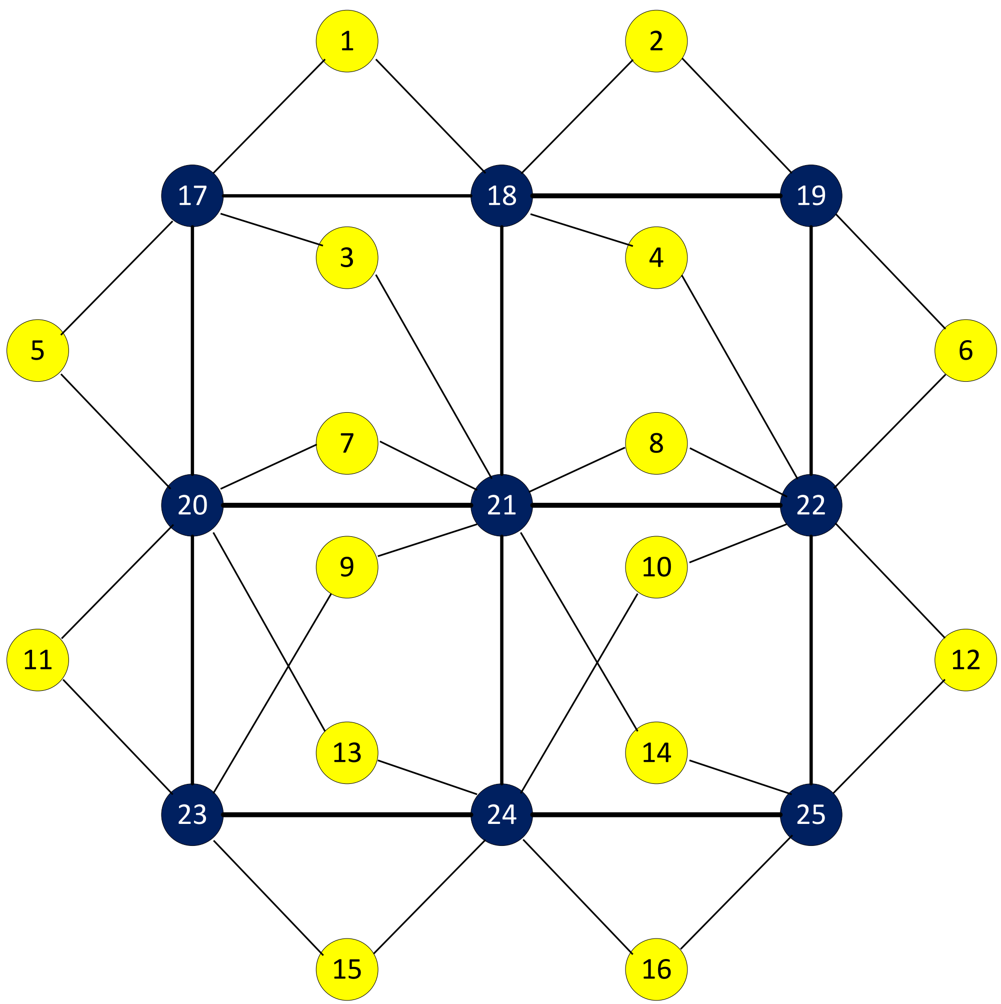
Przykład 1



|f| = 2+3+1 = 6

Przykład 2

Dana jest sieć jak na rysunku:



Należy:

1. Zadać macierz przepustowości linii
2. Wyznaczyć przepustowość sieci dla wybranej pary węzłów

1 – 16
2 – 15
3 – 14
4 – 13
5 – 12
6 – 11
7 – 10
10 – 7
11 – 6
12 – 5
13 – 4
14 – 3
15 – 2
16 - 1

3. Omówić uzyskany wynik