

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Εαρινό εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Να υπολογιστούν τα διαδοχικά ολοκληρώματα.

i) $\int_0^1 \int_0^2 (x+3) dy dx$

ii) $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y dx dy$

iii) $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y} dy dx$

iv) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2} dy dx$

Απάντηση: i) 7 ii) 2 iii) 2 iv) $1 - \ln 2$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στο δοσμένο ορθογώνιο.

i) $\iint_R 4xy^3 dA, R = [-1, 1] \times [-2, 2]$

ii) $\iint_R x\sqrt{1-x^2} dA, R = [0, 1] \times [2, 3]$

Απάντηση: i) 0 ii) $1/3$

3. Περιγράψτε (χωρίς να υπολογίσετε) τον όγκο που εκφράζουν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\int_0^5 \int_1^2 4 dx dy$

ii) $\int_0^3 \int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2} dy dx$

4. Να δείξετε ότι αν $f(x, y) = g(x)h(y)$ και $R = [a, b] \times [c, d]$, τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right]$$

5. Να βρεθεί ο όγκος μεταξύ του επιπέδου $z = 2x + y$ και του ορθογωνίου $R = [3, 5] \times [1, 2]$.

Απάντηση: 19

6. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού κάτω από την επιφάνεια $z = x^2$ που περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 0$ και $z = 0$.

Απάντηση: 8

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$

ii) $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$

Απάντηση: i) $1/40$ ii) $-\pi/2$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_R x^2 dA$, όπου R το χωρίο που ορίζεται από τις $y = 16/x$, $y = x$ και $x = 8$, με δύο τρόπους.

Απάντηση: 576

9. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\iint_R (x-1) dA$, όπου R το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ των $y = x$ και $y = x^3$.

ii) $\iint_R \sin(y^3) dA$, όπου R το χωρίο μεταξύ των $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ και $x = 0$.

Απάντηση: i) $-7/60$ ii) $(1 - \cos 8)/3$

10. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από τις $y^2 = 9 - x$ και $y^2 = 9 - 9x$.

Απάντηση: 32

11. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = 9x^2 + y^2$, από κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και πλευρικά από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ και $y = 2$.

Απάντηση: 11/70

12. Να αλλαχθεί η σειρά ολοκλήρωσης στα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$

ii) $\int_0^4 \int_{2y}^8 f(x, y) dx dy$

Απάντηση: i) $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^8 2f(x, y) dx dy$ ii) $\int_0^8 \int_0^{x/2} f(x, y) dx dy$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης.

i) $\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx$

ii) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy$

Απάντηση: i) $(1 - e^{-16})/8$ ii) $(e^8 - 1)/3$

14. Να βρεθεί το εμβαδόν των παρακάτω επιφανειών με διπλό ολοκλήρωμα.

i) Επιφάνεια του κυλίνδρου $y^2 + z^2 = 9$ πάνω από το ορθογώνιο $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3\}$.

[Υπενθύμιση: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$]

ii) Επιφάνεια του κώνου $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ πάνω από το χωρίο που δημιουργούν οι καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο του xy -επιπέδου.

Απάντηση: i) 6π ii) $\frac{\sqrt{5}}{6}$

15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

ii) $\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^z yz dx dz dy$

iii) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^x xy dy dx dz$

iv) $\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y dy dz dx$

Απάντηση: i) 8 ii) $\frac{47}{3}$ iii) $\frac{81}{5}$ iv) $\frac{118}{3}$

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\iiint_G xy \sin(yz) dV$, όπου G το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq \pi/6$.

ii) $\iiint_G y dV$, όπου G το στερεό που περικλείεται από το xy -επίπεδο, το επίπεδο $z = y$ και τον παραβολικό κύλινδρο $y = 1 - x^2$.

Απάντηση: i) $\frac{\pi(\pi - 3)}{2}$ ii) $\frac{32}{105}$

17. Να υπολογιστεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με τριπλό ολοκλήρωμα.

i) Το στερεό στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από τα επίπεδα xy , xz και yz και από το επίπεδο $3x + 6y + 4z = 12$.

ii) Το στερεό που περικλείεται από την επιφάνεια $z = \sqrt{y}$ και τα επίπεδα $x + y = 1$, $x = 0$ και $z = 0$.

Απάντηση: i) 4 ii) $\frac{4}{15}$

18. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα του στερεού με τον αντίστοιχο όγκο.

i) $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{y+1} dz dy dx$

ii) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 dy dz dx$

19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_R \frac{x-2y}{2x+y} dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $x - 2y = 1$, $x - 2y = 4$, $2x + y = 1$, $2x + y = 3$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x - 2y$, $v = 2x + y$.

Απάντηση: $\frac{3}{2} \ln 3$

20. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, όπου R το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$,

$(2, 0), (1, 1)$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = \frac{1}{2}(x + y), v = \frac{1}{2}(x - y)$.

Απάντηση: $1 - \frac{1}{2} \sin 2$

21. Να βρεθεί με αλλαγή μεταβλητών το ολοκλήρωμα $\iint_R \frac{y - 4x}{y + 4x} dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $y = 4x, y = 4x + 2, y = 2 - 4x$ και $y = 5 - 4x$.

Απάντηση: $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{2}$

22. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u = x, v = z - y, w = xy$ να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_G (z - y)^2 xy dV,$$

όπου G το χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες $x = 1, x = 3, z = y, z = y + 1, xy = 2$ και $xy = 4$.

Απάντηση: $2 \ln 3$.

23. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

- i) $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τον κύκλο $x^2 + y^2 = 9$.
- ii) $\iint_R \sqrt{9 - x^2 - y^2} dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από το τμήμα του κύκλου $x^2 + y^2 = 9$ στο πρώτο τεταρτημόριο.
- iii) $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$
- iv) $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

Απάντηση: i) $\pi(1 - \cos 9)$ ii) $9\pi/2$ iii) $\pi/8$ iv) $(1 - e^{-4})\pi$

24. Έστω S η επιφάνεια της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ μεταξύ των επιπέδων $z = 1$ και $z = 2$. Να εκφραστεί το εμβαδόν της επιφάνειας S με διπλό ολοκλήρωμα και να υπολογιστεί με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Απάντηση: 8π

25. Να βρεθεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με κυλινδρικές συντεταγμένες.

- i) Το στερεό μεταξύ του παραβολοειδούς $z = x^2 + y^2$ και του επιπέδου $z = 9$.
- ii) Το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Απάντηση: i) $81\pi/2$ ii) $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

26. Να βρεθεί με σφαιρικές συντεταγμένες ο όγκος του στερεού που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, έξω από των κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και πάνω από το xy -επίπεδο.

Απάντηση: $9\sqrt{2}\pi$

27. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\text{i)} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a-x^2-y^2} x^2 dz dy dx \quad (a > 0)$$

$$\text{ii)} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$$

Απάντηση: i) $\frac{\pi a^6}{48}$ ii) $\frac{\pi}{3}(1 - e^{-1})$