

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Εαρινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.
 - i) κέντρο $(7, 1, 1)$, ακτίνα 4,
 - ii) κέντρο $(1, 0, -1)$, διάμετρος 8,
 - iii) κέντρο $(-1, 3, 2)$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
 - iv) κέντρο $(2, -1, -3)$, εφάπτεται στο xy -επίπεδο.
2. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
 - i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα x και το σημείο $(0, 1, 2)$.
 - ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα y και το σημείο $(1, 0, 2)$.
 - iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα z και διέρχεται από το $(1, 1, 0)$.
 - iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το $(1, 0, 1)$.
3. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;
4. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.
 - i) Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
 - ii) Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.
5. Να βρεθεί διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.
 - i) Αντίθετη κατεύθυνση από το $\vec{v} = (3, -4)$ και μέτρο το μισό του μέτρου του \vec{v} .
 - ii) Μήκος $\sqrt{17}$ και κατεύθυνση ίδια με το $\vec{v} = (7, 0, -6)$.
6. Έστω $\vec{r} = (x, y, z)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.
 - i) $\|\vec{r}\| = 1$
 - ii) $\|\vec{r}\| \leq 1$
 - iii) $\|\vec{r}\| > 1$
7. Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(2, -1, 1)$, $B(3, 2, -1)$ και $C(7, 0, -2)$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.
8. Να δείξετε ότι $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.
9.
 - i) Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το $i \times (j + k)$.
 - ii) Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

10. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $A(0, -2, 1)$, $B(1, -1, -2)$ και $C(-1, 1, 0)$.
11. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $P(1, 5, -2)$, $Q(0, 0, 0)$ και $R(3, 5, 1)$.
12. Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές $\vec{u} = 3\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k}$, $\vec{v} = \vec{i} + \vec{j} + 2\vec{k}$, $\vec{w} = \vec{i} + 3\vec{j} + 3\vec{k}$.
- Να βρεθεί ο όγκος του.
 - Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα \vec{u} και \vec{w} .
 - Να βρεθεί η γωνία του \vec{u} με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα \vec{v} και \vec{w} .
13. Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} για τα οποία ισχύει $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$;
14. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:
- που διέρχεται από τα σημεία $P_1(-1, 3, 5)$ και $P_2(-1, 3, 2)$,
 - που έχει διανυσματική εξίσωση $x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = \vec{k} + t(\vec{i} - \vec{j} + \vec{k})$,
 - που διέρχεται από το $(-2, 0, 5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $x = 1 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = 6 + 2t$,
 - που είναι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $(3, -4)$.
15. Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$ να βρεθεί ένα σημείο της P και ένα διάνυσμα \vec{v} παράλληλο σε αυτήν.
16. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα xy , xz και yz της ευθείας $x = -2$, $y = 4 + 2t$, $z = -3 + t$.
17. Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t$, $L_2: x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$ τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.
18. Να εξετάσετε αν οι ευθείες $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t$, $L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$ είναι παράλληλες.
19. Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t$, $L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$ ταυτίζονται.
20. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις.
- Διέρχεται από το σημείο $P(2, 6, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (1, 4, 2)$.
 - Διέρχεται από τα σημεία $(-2, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ και $(1, 0, -1)$.
 - Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο επίπεδο $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.
 - Διέρχεται από το $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία τομής των επιπέδων $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.
21. Εξετάστε αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, κάθετα ή τίποτα από τα παραπάνω.
- $2x - 8y - 6x - 2 = 0$, $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
 - $3x - 2y + z = 1$, $4x + 5y - 2z = 4$
 - $x - y + 3z - 2 = 0$, $2x + z = 1$
22. Εξετάστε αν η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται και αν ναι, προσδιορίστε την τομή τους.
- $x = t, y = t, z = t$, $3x - 2y + z - 5 = 0$
 - $x = 2 - t, y = 3 + t, z = t$, $2x + y + z = 1$

- 23.** Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας τομής των επιπέδων $x + 2y - 2z = 5$ και $6x - 3y + 2z = 8$.
- 24.** Δείξτε ότι οι ευθείες $x = -2 + t, y = 3 + 2t, z = 4 - t$ και $x = 3 - t, y = 4 - 2t, z = t$ είναι παράλληλες και βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.
- 25.** Να δείξετε ότι τα επίπεδα $-2x + y + z = 0$ και $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ είναι παράλληλα και να βρείτε την απόστασή τους.
- 26.** *Να δείξετε ότι οι ευθείες $x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$ είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόστασή τους.
- 27.** Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο $(2, 1, -3)$ που εφάπτεται στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.
- 28.** Προσδιορίστε την τετραγωνική επιφάνεια.
- $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
 - $z = \frac{y^2}{25} - x^2$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 16$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
 - $4z = x^2 + 4y^2$
 - $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
- 29.** Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές.
- $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ από καρτεσιανές σε κυλινδρικές,
 - $(1, \sqrt{3}, -2)$ από καρτεσιανές σε σφαιρικές,
 - $(5, \pi/6, \pi/4)$ από σφαιρικές σε καρτεσιανές,
 - $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$ από κυλινδρικές σε καρτεσιανές.
- 30.** Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις σε καρτεσιανές και περιγράψτε την επιφάνεια που εκφράζουν. Σε κάθε περίπτωση δίνεται το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.
- $r = 3$, κυλινδρικές,
 - $r = 4 \sin \theta$, κυλινδρικές,
 - $r^2 + z^2 = 1$, κυλινδρικές,
 - $\phi = \pi/4$, σφαιρικές,
 - $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$, σφαιρικές.
- 31.** Δίνονται παρακάτω οι καρτεσιανές εξισώσεις επιφανειών. Να μετατραπούν σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.
- $z = 3x^2 + 3y^2$,
 - $2x + 3y + 4z = 1$.

