Κεφάλαιο 5: Δυναμοσειρές

Η σειρά

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \dots$$

όπου x είναι πραγματική μεταβλητή και $c_0, c_1, c_2, \dots$ είναι σταθερές λέγεται **δυναμοσειρές**.

Η δυναμοσειρά ορίζει μία συνάρτηση $f(x)$ με πεδίο ορισμού όλες τις τιμές του x, που η σειρά συγκλίνει.

Π.χ. Η δυναμοσειρά: $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots$

ορίζει μία γεωμετρική σειρά με $a=1$ και λόγο x. Γνωρίζουμε ότι συγκλίνει για $|x|<1$ στον αριθμό $\frac{1}{1-x}$.

Άρα ορίζουμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \quad , -1 < x < 1$$

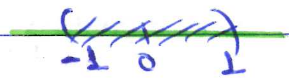
και $f(x) = \frac{1}{1-x}$.

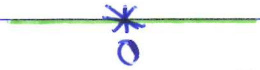
Δυναμοσειρές

$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$, ορίζεται μόνο για τα x τα οποία συγκλίνει

Πχ $f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$ (γεωμετρική σειρά)

$\Rightarrow$ συγκλίνει μόνο για $x \in (-1,1)$





Θεώρημα: Για μία δυναμοσειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$ ισχύει ένα από τα παρακάτω:

1) Η δυναμοσειρά συγκλίνει μόνο για $x=0$. Η ακτίνα σύγκλισης είναι 0.

2) Η δυναμοσειρά συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και η ακτίνα σύγκλισης είναι το ∞.

3) Υπάρχει θετικός αριθμός R ώστε η σειρά συγκλίνει για $-R<x<R$.
Στα σημεία $x=-R$ και $x=R$ μπορεί να συγκλίνει σχετικά ή απόλυτα ή να αποκλίνει.
Το R είναι η ακτίνα σύγκλισης και το διάστημα $(-R,R)$ είναι το διάστημα σύγκλισης.

Χρησιμοποιούμε κριτήριο λόγου για απόλυτη σύγκλιση για να βρούμε την ακτίνα σύγκλισης

$\sum a_k$

$\rho = \lim \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right|$

- $\rho > 1$ συγκλίνει
- $\rho < 1$ αποκλίνει
- $\rho = 1$ δεν έχουμε αποτέλεσμα.

Ασκ Να βρεθεί η ακτίνα και το διάστημα σύγκλισης των δυναμοσειρών:

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k \cdot 3^k}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{\frac{x^{k+1}}{(k+1)\, 3^{k+1}}}{\frac{x^k}{k\, 3^k}} \right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{x^{k+1} \cdot k \cdot 3^k}{(k+1)\cdot 3^{k+1} \cdot x^k} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{x \cdot k}{(k+1)3} \right|$$

$$= \frac{|x|}{3} \cdot \underbrace{\lim_{k\to\infty} \frac{k}{k+1}}_{1} = \frac{|x|}{3}$$

όπου x: σταθερά

Η σειρά συγκλίνει αν $\rho > 1 \Rightarrow \frac{|x|}{3} > 1$

$\Rightarrow |x| > 3$

$\Rightarrow -3 < x < 3.$

$x \in (-3, 3)$

Για $x=-3$: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-3)^k}{k \cdot 3^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k \cdot 3^k}{k \cdot 3^k}$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$$

- Συγκλίνει από κριτήριο εναλλάσσουσας σειράς.

Για $x=3$: , $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cancel{3^k}}{k \cdot \cancel{3^k}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$

Δηλ. προκύπτει η αρμονική σειρά, η οποία αποκλίνει.

Άρα Η ακτίνα σύγκλισης είναι 3 και το διάστημα σύγκλισης $[-3,3)$

ii) $\sum_{k=2}^{\infty} k^k \cdot x^k$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^{k+1} \cdot x^{k+1}}{k^k \cdot x^k}\right|$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(k+1)^{k+1}}{k^k}\right| \cdot |x|$$

$$= |x| \lim_{k\to\infty} \frac{k^{k+1}}{k^k} = |x| \cdot \lim_{k\to\infty} k = +\infty$$

για κάθε $x \neq 0$.

Άρα η σειρά αποκλίνει $\forall x \neq 0$.
Άρα ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς $= 0$.

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!} \cdot x^{2k}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{\frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{2(k+1)}}{(2(k+1))!}}{\frac{(-1)^k \cdot x^{2k}}{(2k)!}}\right| = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{(-1)^{k+1} \cdot x^{2k+2} \cdot (2k)!}{(-1)^k \cdot x^{2k} \cdot (2k+2)!}\right|$$

$$\overset{*}{=} \lim_{k\to\infty} \left|\frac{x^2}{(2k+1)(2k+2)}\right| = |x|^2 \lim_{k\to\infty} \frac{1}{(2k+1)(2k+2)} = 0 < 1$$

$$* \ \frac{(2k)!}{(2k+2)!} = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 2k}{1 \cdot 2 \cdots 2k \cdot (2k+1)(2k+2)}$$

- Η σειρά συγκλίνει $\forall x \in \mathbb{R}$
- Ακτίνα σύγκλισης ∞.

Πολυώνυμο Maclaurin.

Έστω f n-φορές παραγωγίσιμη στο $x=0$. Τότε το πολυώνυμο

$$P_n(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\cdot\frac{x^2}{2!} + f'''(0)\cdot\frac{x^3}{3!} + \dots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!}$$

ονομάζεται πολυώνυμο Maclaurin βαθμού n της f και θεωρείται πολυωνυμική προσέγγιση της f κοντά στο 0.

πχ $f(x) = \tan^{-1}(x)$, $f(0)=0$

Να βρεθεί πολυώνυμο Maclaurin $4^{ου}$ βαθμού.

$f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $f'(0) = 1$

$f''(x) = -\frac{2x}{(1+x^2)^2}$, $f''(0) = 0$

$f'''(x) = \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$, $f'''(0) = 2$

$f''''(x) = \frac{24x-24x^3}{(1+x^2)^4}$, $f''''(0) = 0$

$$P_4(x) = 0 + 1\cdot x + 0\cdot\frac{x^2}{2!} + (-2)\frac{x^3}{3!} + 0\cdot\frac{x^4}{4!}$$

$$= x - \frac{1}{3}x^2$$

Πολυώνυμο taylor:

- Έστω f n-φορές παραγωγίσιμη στο $x=a$. Το πολυώνυμο

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\cdot\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots$$

$$+ \dots + f^{(n)}(a)\cdot\frac{(x-a)^n}{n!}$$

λέγεται πολυώνυμο taylor βαθμού n της f στο a και είναι πολυωνυμική προσέγγιση της f στο a.

Π.χ. $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

Να βρεθεί το πολυώνυμο taylor 3ου βαθμού της f στο $x=\ln 2$.

$f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $f(\ln 2) = \dots = 5/4$.

$f'(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$. $\qquad$ $f'(\ln 2) = \dots = 3/4$.

$f''(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $f''(\ln 2) = 5/4$.

$f'''(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ $\qquad$ $f'''(\ln 2) = 3/4$

$$P_3(x) = 5/4 + 3/4(x-\ln 2) + 5/4\,\frac{(x-\ln 2)^2}{2!} + \frac{3}{4}\frac{(x-\ln 2)^3}{3!}$$

- **Πολυώνυμο taylor**

$$P_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

- **Πολυώνυμο Maclaurin** = πολυώνυμο taylor στο $a=0$.

- **Σειρές taylor:**

Αν για την συνάρτηση f υπάρχουν οι παράγωγοι κάθε τάξης στο σημείο $x=a$, τότε ορίζουμε τη σειρά taylor της f στο a.

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} f^{(k)}(a)\frac{(x-a)^k}{k!}$$

- **Σειρά Maclaurin**: Σειρά taylor στο 0.

Πχ $f(x) = \sin x$.

Να υπολογιστεί η σειρά Maclaurin.

$f(x) = \sin x \Rightarrow f(0) = 0$

$f'(x) = \cos x \Rightarrow f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \Rightarrow f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \Rightarrow f^{(3)}(0) = -1$

$f^{(4)}(x) = \sin x \Rightarrow f^{(4)}(0) = 0$

- Άρα η σειρά Maclaurin έχει μόνο με περιττούς βαθμούς με συντελεστές (1) και (-1) εναλλάξ.

$$f(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

$$= \sum^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

Πχ $f(x) = e^x$.

Να υπολογιστεί η σειρά Maclaurin.

$f(x) = e^x \Rightarrow f(0) = 1$
$f'(x) = e^x \Rightarrow f'(0) = 1$
$f''(x) = e^x \Rightarrow f''(0) = 1$

$$e^x = 1 + 1\cdot x \cdot \frac{x^2}{2!} + 1 \cdot \frac{x^3}{3} + \dots$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

Βασικές σειρές Maclaurin:

- $e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots$

- $\sin x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots$

- $\cos x = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots$

$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{x^k}{k!} = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} - \dots$

Κεφάλαιο 6 - Διαφορικές εξισώσεις

Να βρεθούν συναρτήσεις $y=f(x)$ που να ικανοποιούν την εξίσωση:

- Η $y=e^x$, είναι λύση, διότι $y' = ((e^x)')' = e^x$ και $y'' - y = e^x - e^x = 0$.

- Η $y=e^{-x}$ είναι λύση, διότι $y' = -e^{-x}$ $\Rightarrow y'' = e^{-x}$

άρα, $y'' - y = e^{-x} - e^{-x} = 0$.

Αν $y = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$, $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$

τότε, $y' = c_1 e^x - c_2 e^{-x}$.

$\Rightarrow y'' = c_1 e^x + c_2 e^{-x}$.

άρα $y'' - y = 0$