ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ
Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Έστω $f(x,y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Να υπολογιστούν τα:
i) $f(2,1)$ ii) $f(t,t^2)$ iii) $f(2y^2,4y)$

2. Έστω $f(x,y,z) = xy^2z^3 + 3$. Να υπολογιστούν τα:
i) $f(2,1,2)$ ii) $f(a,a,a)$ iii) $f(t,t^2,-t)$ iv) $f(a+b,a-b,b)$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

i) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$
ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$
iii) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y^2}$
iv) $f(x,y) = \ln(xy)$
v) $f(x,y,z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$
vi) $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$.

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

i) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,3)} 4(xy^2-x)$
ii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(-1,2)} \frac{xy^3}{x+y}$
iii) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3}{x^2+2y^2}$
iv) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x-y}{x^2+y^2}$
v) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$
vi) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{3x^2+2y^2}$
vii) $\displaystyle\lim_{(x,y,z)\to(2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

5. Έστω $f(x,y) = e^{2x}\sin y$. Να υπολογιστούν τα:
i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ iii) $f_x(0,y)$ iv) $f_y(\ln 2, 0)$

6. Έστω $f(x,y) = \sqrt{3x+2y}$.

i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας $z = f(x,y)$ στην x-κατεύθυνση στο $(4,2)$.
ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς y της f στο $(4,2)$.

7. Για τη συνάρτηση $f(x,y,z) = z\ln(x^2y\cos z)$ να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

8. Ο όγκος V ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi r^2 h$, όπου r είναι η ακτίνα και h το ύψος.

i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν το h είναι σταθερό;

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς h όταν το r είναι σταθερό;

iii) Αν $h = 4$ και το r μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν $r = 6$;

9. Για την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$ να αποδειχθεί ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

10. Για την συνάρτηση $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ να υπολογιστούν οι παράγωγοι f_{xxy}, f_{yxy} και f_{yyy}.

11. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτηση $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0), τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0).

ii) Αν οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο $(0, 0)$, τότε και η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

12. Να υπολογιστεί η παράγωγος dz/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z = 3x^2y^3$, $x = t^4$, $y = t^2$

ii) $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$

13. Να υπολογιστεί η παράγωγος dw/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $w = 5x^2y^3z^4$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^5$

ii) $w = 5\cos(xy) - \sin(xz)$, $x = 1/t$, $y = t$, $z = t^3$

14. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z = 8x^2y - 2x + 3y$, $x = uv$, $y = u - v$

ii) $z = x/y$, $x = 2\cos u$, $y = 3\sin v$

15. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

i) $dR/d\phi$, $R = e^{2s - t^2}$, $s = 3\phi$, $t = \phi^{1/2}$

ii) $\dfrac{dw}{dx}$, $w = 3xy^2z^3$, $y = 3x^2 + 2$, $z = \sqrt{x - 1}$.

16. Να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i) $x^2y^3 + \cos y = 0$

ii) $e^{xy} + ye^y = 1$

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i) $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$

ii) $ye^x - 5\sin(3z) = 3z$

18. Να βρεθεί η $D_{\vec{u}}f$ στο σημείο P.

i) $f(x, y) = (1 + xy)^{3/2}$, $P(3, 1)$, $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\imath + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\jmath$

ii) $f(x, y, z) = 4x^5y^2z^3$, $P(2, -1, 1)$, $\vec{u} = \frac{1}{3}\imath + \frac{2}{3}\jmath - \frac{2}{3}k$

iii) $f(x,y) = 4x^3y^2$, $P(2,1)$, $\vec{u} = 4\imath - 3\jmath$

iv) $f(x,y,z) = \dfrac{z-x}{z+y}$, $P(1,0,-3)$, $\vec{u} = -6\imath + 3\jmath - 2k$.

19. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του διανύσματος που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα x.

i) $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $P(1,4)$, $\theta = \pi/3$

ii) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $P(-1,-2)$, $\theta = \pi/2$

20. Έστω ότι $D_{\vec{u}}f(1,2) = -5$ και $D_{\vec{v}}f(1,2) = 10$, όπου $\vec{u} = \dfrac{3}{5}\imath - \dfrac{4}{5}\jmath$ και $\vec{v} = \dfrac{4}{5}\imath + \dfrac{3}{5}\jmath$.

i) Να βρεθούν τα $f_x(1,2)$ και $f_y(1,2)$.

ii) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1,2)$ στην κατεύθυνση που δείχνει στην αρχή των αξόνων.

21. Έστω $f_x(-5,1) = -3$ και $f_y(-5,1) = 2$. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $P(-5,1)$ στην κατεύθυνση από το P στο $Q(-4,3)$.

22. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης αύξησης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x,y) = 4x^3y^2$, $P(-1,1)$

ii) $f(x,y,z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1$, $P(1,1,-1)$

iii) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y^2}$, $P(1,2,-2)$

23. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης μείωσης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x,y) = 20 - x^2 - y^2$, $P(-1,-3)$

ii) $f(x,y,z) = 4e^{xy}\cos z$, $P(0,1,\pi/4)$

24. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν $\vec{v} = 2\vec{u}$ τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{v}$ είναι διπλάσια από την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ σε ένα σημείο (x_0, y_0).

ii) Αν $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και $D_{\vec{u}}f(x,y) = 0$ για κάθε (x,y), τότε η f είναι σταθερή.

25. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x,y,z)$ στο $(3,-2,1)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2\imath - \jmath - 2k$ είναι -5 και $\|\nabla f(3,-2,1)\| = 5$, να βρεθεί το $\nabla f(3,-2,1)$.

26. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο P.

i) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $P(-3,0,4)$

ii) $x^2 - xyz = 56$, $P(-4,5,2)$

iii) $z = e^{3y}\sin 3x$, $P(\pi/6,0,1)$

27. Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$.

i) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$.

ii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο $(2, 2, 1)$.

iii) Να βρεθεί η γωνία του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$ με το xy-επίπεδο.

28. Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.

i) $z = x^3y^2$

ii) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

29. Να βρεθεί σημείο της επιφάνειας $z = 3x^2 - y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $6x + 4y - z = 5$.

30. Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία κάθετη στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

31. Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία.

i) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

ii) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

iii) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$

32. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης στο χωρίο R.

i) $f(x, y) = xy - x - 3y$, R το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(0, 4)$ και $(5, 0)$

ii) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$, R το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(0, 2)$, $(2, 2)$ και $(2, 0)$.

iii) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$, R ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq 4$

33. Ένα κλειστό ορθογώνιο κουτί με όγκο $16cm^3$ φτιάχνεται από δύο υλικά. Οι άνω και κάτω έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει 0,10€ ανά cm^2 ενώ οι παράπλευρες έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει 0,05€ ανά cm^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις του κουτιού που ελαχιστοποιούν το κόστος των υλικών.

34. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης υπό τη δοσμένη συνθήκη με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

i) $f(x, y) = 4x^3 + y^2$, $2x^2 + y^2 = 1$

ii) $f(x, y, z) = 2x + y - 2z$, $x^2 + y^2 + z^2 = 4$

iii) $f(x, y, z) = xyz$, $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

35. *Να βρεθούν διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μέγιστο όγκο που να εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας a.