

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022**

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Να υπολογιστούν τα διαδοχικά ολοκληρώματα.

i)  $\int_0^1 \int_0^2 (x+3) dy dx$

ii)  $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y dx dy$

iii)  $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y} dy dx$

iv)  $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2} dy dx$

**Απάντηση:** i) 7 ii) 2 iii) 2 iv)  $1 - \ln 2$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στο δοσμένο ορθογώνιο.

i)  $\iint_R 4xy^3 dA, R = [-1, 1] \times [-2, 2]$

ii)  $\iint_R x\sqrt{1-x^2} dA, R = [0, 1] \times [2, 3]$

**Απάντηση:** i) 0 ii)  $1/3$

3. Περιγράψτε (χωρίς να υπολογίσετε) τον όγκο που εκφράζουν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i)  $\int_0^5 \int_1^2 4 dx dy$

ii)  $\int_0^3 \int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2} dy dx$

4. Να δείξετε ότι αν  $f(x, y) = g(x)h(y)$  και  $R = [a, b] \times [c, d]$ , τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \left[ \int_a^b g(x) dx \right] \left[ \int_c^d h(y) dy \right]$$

5. Να βρεθεί ο όγκος μεταξύ του επιπέδου  $z = 2x + y$  και του ορθογωνίου  $R = [3, 5] \times [1, 2]$ .

**Απάντηση:** 19

6. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού κάτω από την επιφάνεια  $z = x^2$  που περικλείεται από τα επίπεδα  $x = 0$ ,  $x = 2$ ,  $y = 3$ ,  $y = 0$  και  $z = 0$ .

**Απάντηση:** 8

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i)  $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$

ii)  $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$

**Απάντηση:** i)  $1/40$  ii)  $-\pi/2$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\iint_R x^2 dA$ , όπου  $R$  το χωρίο που ορίζεται από τις  $y = 16/x$ ,  $y = x$  και  $x = 8$ , με δύο τρόπους.

**Απάντηση:** 576

9. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i)  $\iint_R (x-1) dA$ , όπου  $R$  το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ των  $y = x$  και  $y = x^3$ .

ii)  $\iint_R \sin(y^3) dA$ , όπου  $R$  το χωρίο μεταξύ των  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2$  και  $x = 0$ .

**Απάντηση:** i)  $-7/60$  ii)  $(1 - \cos 8)/3$

10. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από τις  $y^2 = 9 - x$  και  $y^2 = 9 - 9x$ .

**Απάντηση:** 32

11. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές  $z = 9x^2 + y^2$ , από κάτω από το επίπεδο  $z = 0$  και πλευρικά από τα επίπεδα  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $x = 3$  και  $y = 2$ .

**Απάντηση:** 11/70

12. Να αλλαχθεί η σειρά ολοκλήρωσης στα παρακάτω ολοκληρώματα.

i)  $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$

ii)  $\int_0^4 \int_{2y}^8 f(x, y) dx dy$

**Απάντηση:** i)  $\int_0^{\sqrt{2}} \int_{y^2}^8 2f(x, y) dx dy$  ii)  $\int_0^8 \int_0^{x/2} f(x, y) dx dy$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης.

i)  $\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx$

ii)  $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy$

**Απάντηση:** i)  $(1 - e^{-16})/8$  ii)  $(e^8 - 1)/3$

14. Να βρεθεί το εμβαδόν των παρακάτω επιφανειών με διπλό ολοκλήρωμα.

i) Επιφάνεια του κυλίνδρου  $y^2 + z^2 = 9$  πάνω από το ορθογώνιο  $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3\}$ .

[Υπενθύμιση:  $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$ ]

ii) Επιφάνεια του κώνου  $z^2 = 4x^2 + 4y^2$  πάνω από το χωρίο που δημιουργούν οι καμπύλες  $y = x$  και  $y = x^2$  στο πρώτο τεταρτημόριο του  $xy$ -επιπέδου.

**Απάντηση:** i)  $6\pi$  ii)  $\frac{\sqrt{5}}{6}$

**15.** Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i)  $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

ii)  $\int_0^2 \int_{-1}^1 \int_{-1}^z yz dx dz dy$

iii)  $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^x xy dy dx dz$

iv)  $\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y dy dz dx$

**Απάντηση:** i) 8 ii)  $\frac{47}{3}$  iii)  $\frac{81}{5}$  iv)  $\frac{118}{3}$

**16.** Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i)  $\iiint_G xy \sin(yz) dV$ , όπου  $G$  το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τις σχέσεις  $0 \leq x \leq \pi$ ,  $0 \leq y \leq 1$ ,  $0 \leq z \leq \pi/6$ .

ii)  $\iiint_G y dV$ , όπου  $G$  το στερεό που περικλείεται από το  $xy$ -επίπεδο, το επίπεδο  $z = y$  και τον παραβολικό κύλινδρο  $y = 1 - x^2$ .

**Απάντηση:** i)  $\frac{\pi(\pi - 3)}{2}$  ii)  $\frac{32}{105}$

**17.** Να υπολογιστεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με τριπλό ολοκλήρωμα.

i) Το στερεό στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από τα επίπεδα  $xy$ ,  $xz$  και  $yz$  και από το επίπεδο  $3x + 6y + 4z = 12$ .

ii) Το στερεό που περικλείεται από την επιφάνεια  $z = \sqrt{y}$  και τα επίπεδα  $x + y = 1$ ,  $x = 0$  και  $z = 0$ .

**Απάντηση:** i) 4 ii)  $\frac{4}{15}$

**18.** Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα του στερεού με τον αντίστοιχο όγκο.

i)  $\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{y+1} dz dy dx$

ii)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 dy dz dx$

**19.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\iint_R \frac{x-2y}{2x+y} dA$ , όπου  $R$  το χωρίο που περικλείεται από τις  $x - 2y = 1$ ,  $x - 2y = 4$ ,  $2x + y = 1$ ,  $2x + y = 3$ , χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $u = x - 2y$ ,  $v = 2x + y$ .

**Απάντηση:**  $\frac{3}{2} \ln 3$

**20.** Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$ , όπου  $R$  το τρίγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,

$(2, 0), (1, 1)$ , χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $u = \frac{1}{2}(x + y), v = \frac{1}{2}(x - y)$ .

**Απάντηση:**  $1 - \frac{1}{2} \sin 2$

**21.** Να βρεθεί με αλλαγή μεταβλητών το ολοκλήρωμα  $\iint_R \frac{y - 4x}{y + 4x} dA$ , όπου  $R$  το χωρίο που περικλείεται από τις  $y = 4x, y = 4x + 2, y = 2 - 4x$  και  $y = 5 - 4x$ .

**Απάντηση:**  $\frac{1}{4} \ln \frac{5}{2}$

**22.** Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό  $u = x, v = z - y, w = xy$  να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_G (z - y)^2 xy dV,$$

όπου  $G$  το χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες  $x = 1, x = 3, z = y, z = y + 1, xy = 2$  και  $xy = 4$ .

**Απάντηση:**  $2 \ln 3$ .

**23.** Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

- i)  $\iint_R \sin(x^2 + y^2) dA$ , όπου  $R$  το χωρίο που περικλείεται από τον κύκλο  $x^2 + y^2 = 9$ .
- ii)  $\iint_R \sqrt{9 - x^2 - y^2} dA$ , όπου  $R$  το χωρίο που περικλείεται από το τμήμα του κύκλου  $x^2 + y^2 = 9$  στο πρώτο τεταρτημόριο.
- iii)  $\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dy dx$
- iv)  $\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$

**Απάντηση:** i)  $\pi(1 - \cos 9)$  ii)  $9\pi/2$  iii)  $\pi/8$  iv)  $(1 - e^{-4})\pi$

**24.** Έστω  $S$  η επιφάνεια της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = 16$  μεταξύ των επιπέδων  $z = 1$  και  $z = 2$ . Να εκφραστεί το εμβαδόν της επιφάνειας  $S$  με διπλό ολοκλήρωμα και να υπολογιστεί με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

**Απάντηση:**  $8\pi$

**25.** Να βρεθεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με κυλινδρικές συντεταγμένες.

- i) Το στερεό μεταξύ του παραβολοειδούς  $z = x^2 + y^2$  και του επιπέδου  $z = 9$ .
- ii) Το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  και από κάτω από τον κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ .

**Απάντηση:** i)  $81\pi/2$  ii)  $\frac{\pi}{3}(2 - \sqrt{2})$

26. Να βρεθεί με σφαιρικές συντεταγμένες ο όγκος του στερεού που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ , έξω από των κώνο  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  και πάνω από το  $xy$ -επίπεδο.

**Απάντηση:**  $9\sqrt{2}\pi$

27. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.

$$\text{i)} \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a-x^2-y^2} x^2 dz dy dx \quad (a > 0)$$

$$\text{ii)} \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$$

**Απάντηση:** i)  $\frac{\pi a^6}{48}$  ii)  $\frac{\pi}{3}(1 - e^{-1})$

