

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Έστω $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Να υπολογιστούν τα:

- i) $f(2, 1)$ ii) $f(t, t^2)$ iii) $f(2y^2, 4y)$

Απάντηση: i) $2 + \sqrt[3]{2}$ ii) $2t$ iii) $2y^2 + 2y$

2. Έστω $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3$. Να υπολογιστούν τα:

- i) $f(2, 1, 2)$ ii) $f(a, a, a)$ iii) $f(t, t^2, -t)$ iv) $f(a + b, a - b, b)$

Απάντηση: i) 19 ii) $a^6 + 3$ iii) $-t^8 + 3$ iv) $(a + b)(a - b)^2b^3 + 3$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

- i) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$
ii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$
iii) $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$
iv) $f(x, y) = \ln(xy)$
v) $f(x, y, z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$
vi) $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$.

Απάντηση: i) $x^2 + y^2 < 1$ ii) $x^2 + y^2 \geq 4$ iii) $x \neq y^2$ iv) 1ο και 3ο τεταρτημόριο v) $y \geq -2$ vi) $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

- i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 4(xy^2 - x)$
ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x + y}$
iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$
iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$
v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$
vi) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$
vii) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

Απάντηση: i) 8 ii) -8 iii) δεν υπάρχει iv) δεν υπάρχει v) 0 vi) δεν υπάρχει vii) 8/3

5. Έστω $f(x, y) = e^{2x} \sin y$. Να υπολογιστούν τα:

- i) $\frac{\partial f}{\partial x}$ ii) $\frac{\partial f}{\partial y}$ iii) $f_x(0, y)$ iv) $f_y(\ln 2, 0)$

Απάντηση: i) $2e^{2x} \sin y$ ii) $e^{2x} \cos y$ iii) $2 \sin y$ iv) 4

Απάντηση: i) $\frac{\partial z}{\partial x} = 18xy - 15x^4y$, $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 3x^5$ ii) $\frac{\partial z}{\partial x} = (1 + \sqrt{15xy})e^{\sqrt{15xy}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{15x^2 e^{\sqrt{15xy}}}{2\sqrt{15xy}}$

6. Έστω $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$.

i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στην x -κατεύθυνση στο $(4, 2)$.

ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς y της f στο $(4, 2)$.

Απάντηση: i) $3/8$ ii) $1/4$

7. Για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = z \ln(x^2y \cos z)$ να υπολογιστούν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$.

Απάντηση: i) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2z/x$, $\frac{\partial f}{\partial y} = z/y$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \ln(x^2y \cos z) - \frac{z \sin z}{\cos z}$

8. Ο όγκος V ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi r^2 h$, όπου r είναι η ακτίνα και h το ύψος.

i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν το h είναι σταθερό;

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς h όταν το r είναι σταθερό;

iii) Αν $h = 4$ και το r μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν $r = 6$;

Απάντηση: i) $2\pi r h$ ii) πr^2 iii) 48π

9. Για την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$ να αποδειχθεί ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

Απάντηση: $f_{xy} = f_{yx} = -32y^3$

10. Για την συνάρτηση $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ να υπολογιστούν οι παράγωγοι f_{xxy} , f_{yxy} και f_{yyy} .

Απάντηση: $f_{xxx} = 6y^5$, $f_{yxy} = 60x^2y^3$, $f_{yyy} = 60x^3y^2$

11. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .

ii) Αν οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο $(0, 0)$, τότε και η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

Απάντηση: Λάθος, Σωστό

12. Να υπολογιστεί η παράγωγος dz/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z = 3x^2y^3$, $x = t^4$, $y = t^2$

ii) $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$

Απάντηση: i) $42t^{13}$ ii) $\frac{1}{2t + t^{2/3}} \left(2 + \frac{2}{3}t^{-1/3} \right)$

13. Να υπολογιστεί η παράγωγος dw/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $w = 5x^2y^3z^4$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^5$

ii) $w = 5 \cos(xy) - \sin(xz), x = 1/t, y = t, z = t^3$

Απάντηση: i) $165t^{32}$ ii) $-3t \cos t^2$

14. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z = 8x^2y - 2x + 3y, x = uv, y = u - v$

ii) $z = x/y, x = 2 \cos u, y = 3 \sin v$

Απάντηση: i) $\frac{\partial z}{\partial u} = 24u^2v^2 - 16uv^3 - 2v + 3, \frac{\partial z}{\partial v} = 16u^3v - 24u^2v^2 - 2u - 3$ ii) $\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{2 \sin u}{3 \sin v}, \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2 \cos u \cos v}{3 \sin^2 v}$

15. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

i) $dR/d\phi, R = e^{2s-t^2}, s = 3\phi, t = \phi^{1/2}$

ii) $\frac{dw}{dx}, w = 3xy^2z^3, y = 3x^2 + 2, z = \sqrt{x-1}$.

Απάντηση: i) $5e^{5\phi}$ ii) $\frac{3}{2}(3x^2 + 2)(39x^3 - 30x^2 + 10x - 4)\sqrt{x-1}$

16. Να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dy}{dx}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i) $x^2y^3 + \cos y = 0$

ii) $e^{xy} + ye^y = 1$

Απάντηση: i) $\frac{dy}{dx} = -\frac{-2xy^3}{3x^2y^2 - \sin y}$ ii) $\frac{dy}{dx} = -\frac{ye^{xy}}{xe^x y + y^3 + 3^y}$

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i) $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$

ii) $ye^x - 5 \sin(3z) = 3z$

Απάντηση: i) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + yz}{6yz - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z^2 - xz}{xy - 6yz}$ ii) $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^x}{15 \cos(3z) + 3}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{15 \cos(3z) + 3}$

18. Να βρεθεί η $D_{\vec{u}}f$ στο σημείο P .

i) $f(x, y) = (1 + xy)^{3/2}, P(3, 1), \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

ii) $f(x, y, z) = 4x^5y^2z^3, P(2, -1, 1), \vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$

iii) $f(x, y) = 4x^3y^2, P(2, 1), \vec{u} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

iv) $f(x, y, z) = \frac{z-x}{z+y}, P(1, 0, -3), \vec{u} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

Απάντηση: i) $6\sqrt{2}$ ii) $\frac{27}{5}$ iii) 0 iv) $-8/63$

19. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του διανύσματος που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα x .

- i) $f(x, y) = \sqrt{xy}$, $P(1, 4)$, $\theta = \pi/3$
- ii) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$, $P(-1, -2)$, $\theta = \pi/2$

Απάντηση: i) $1/2 + \sqrt{3}/8$ ii) $2/9$

20. Έστω ότι $D_{\vec{u}}f(1, 2) = -5$ και $D_{\vec{v}}f(1, 2) = 10$, όπου $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$ και $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$.

- i) Να βρεθούν τα $f_x(1, 2)$ και $f_y(1, 2)$.
- ii) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1, 2)$ στην κατεύθυνση που δείχνει στην αρχή των αξόνων.

Απάντηση: i) $f_x(1, 2) = 5$, $f_y(1, 2) = 10$ ii) $-5\sqrt{5}$

21. Έστω $f_x(-5, 1) = -3$ και $f_y(-5, 1) = 2$. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $P(-5, 1)$ στην κατεύθυνση από το P στο $Q(-4, 3)$.

Απάντηση: $1/\sqrt{5}$

22. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης αύξησης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

- i) $f(x, y) = 4x^3y^2$, $P(-1, 1)$
- ii) $f(x, y, z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1$, $P(1, 1, -1)$
- iii) $f(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y^2}$, $P(1, 2, -2)$

Απάντηση: i) $(3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13})$, $4\sqrt{13}$ ii) $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$, $3\sqrt{2}$ iii) $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0)$, $\sqrt{2}/2$

23. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης μείωσης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

- i) $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2$, $P(-1, -3)$
- ii) $f(x, y, z) = 4e^{xy} \cos z$, $P(0, 1, \pi/4)$

Απάντηση: i) $(-1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10})$, $-2\sqrt{10}$ ii) $(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{2}})$, -4

24. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Αν $\vec{v} = 2\vec{u}$ τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην κατεύθυνση του \vec{v} είναι διπλάσια από την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του \vec{u} σε ένα σημείο (x_0, y_0) .
- ii) Αν \vec{u} είναι μοναδιαίο διάνυσμα και $D_{\vec{u}}f(x, y) = 0$ για κάθε (x, y) , τότε η f είναι σταθερή.

Απάντηση: i) Λάθος ii) Λάθος

25. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο $(3, -2, 1)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$ είναι -5 και $\|\nabla f(3, -2, 1)\| = 5$, να βρεθεί το $\nabla f(3, -2, 1)$.

Απάντηση: $(-10/3, 5/3, 10/3)$

26. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο P .

i) $x^2 + y^2 + z^2 = 25, P(-3, 0, 4)$

ii) $x^2 - xyz = 56, P(-4, 5, 2)$

iii) $z = e^{3y} \sin 3x, P(\pi/6, 0, 1)$

Απάντηση: i) $-3x + 4z - 25 = 0, x = -3 - 6t, y = 0, z = 4 + 8t$ ii) $-18x + 8y + 20z - 152 = 0, x = -4 - 18t, y = 5 + 8t, z = 2 + 20t$ iii) $-3y + z = 1, x = \pi/6, y = -3t, z = 1 + t$

27. Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$.

i) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$.

ii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο $(2, 2, 1)$.

iii) Να βρεθεί η γωνία του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$ με το xy -επίπεδο.

Απάντηση: i) $x + y + 2z - 6 = 0$ ii) $x = 2 + 4t, y = 2 + 4t, z = 1 + 8t$ iii) $\cos \theta = 2/\sqrt{6}, \theta \approx 35, 26^\circ$

28. Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.

i) $z = x^3 y^2$

ii) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

Απάντηση: i) $(x, 0, 0), (0, y, 0)$ ii) $(0, -2, -4)$

29. Να βρεθεί σημείο της επιφάνειας $z = 3x^2 - y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $6x + 4y - z = 5$.

Απάντηση: $(1, 2, -1)$

30. Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία κάθετη στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

31. Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία.

i) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

ii) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

iii) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

Απάντηση: i) Σαγματικό σημείο στο $(1, 2)$ ii) Σαγματικό σημείο στο $(0, 0)$, τοπικό ελάχιστο στο $(1/6, 1/12)$ iii) Τοπικά ελάχιστα στα $(1, 1)$ και $(-1, -1)$

32. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης στο χωρίο R .

i) $f(x, y) = xy - x - 3y, R$ το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0), (0, 4)$ και $(5, 0)$

ii) $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y, R$ το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0), (0, 2), (2, 2)$ και $(2, 0)$.

iii) $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x, R$ ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq 4$

Απάντηση: i) Μέγιστη τιμή 0, ελάχιστη τιμή -12 ii) μέγιστη τιμή 3, ελάχιστη τιμή -1 iii) μέγιστη τιμή $33/4$, ελάχιστη τιμή $-1/4$

33. Ένα κλειστό ορθογώνιο κουτί με όγκο 16cm^3 φτιάχνεται από δύο υλικά. Οι άνω και κάτω έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει $0,10\text{€}$ ανά cm^2 ενώ οι παράπλευρες έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει $0,05\text{€}$ ανά cm^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις του κουτιού που ελαχιστοποιούν το κόστος των υλικών.

Απάντηση: $x = 2, y = 2, z = 4$

34. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης υπό τη δοσμένη συνθήκη με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

i) $f(x, y) = 4x^3 + y^2, 2x^2 + y^2 = 1$

ii) $f(x, y, z) = 2x + y - 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 4$

iii) $f(x, y, z) = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

Απάντηση: i) Μέγιστη τιμή $\sqrt{2}$, ελάχιστη τιμή $-\sqrt{2}$ ii) μέγιστη τιμή 6, ελάχιστη τιμή -6 iii) μέγιστη τιμή $\frac{1}{3\sqrt{3}}$, ελάχιστη τιμή $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$

35. *Να βρεθούν διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μέγιστο όγκο που να εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας a .

Απάντηση: $x = y = z = 2a/\sqrt{3}.$

