

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Εαρινό εξάμηνο 2021**

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Έστω  $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$ . Να υπολογιστούν τα:

i)  $f(2, 1)$                       ii)  $f(t, t^2)$                       iii)  $f(2y^2, 4y)$

**Απάντηση:** i)  $2 + \sqrt[3]{2}$  ii)  $2t$  iii)  $2y^2 + 2y$

2. Έστω  $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3$ . Να υπολογιστούν τα:

i)  $f(2, 1, 2)$                       ii)  $f(a, a, a)$                       iii)  $f(t, t^2, -t)$                       iv)  $f(a + b, a - b, b)$

**Απάντηση:** i) 19 ii)  $a^6 + 3$  iii)  $-t^8 + 3$  iv)  $(a + b)(a - b)^2b^3 + 3$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

i)  $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

ii)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

iii)  $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$

iv)  $f(x, y) = \ln(xy)$

v)  $f(x, y, z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$

vi)  $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ .

**Απάντηση:** i)  $x^2 + y^2 < 1$  ii)  $x^2 + y^2 \geq 4$  iii)  $x \neq y^2$  iv) 1ο και 3ο τεταρτημόριο v)  $y \geq -2$  vi)  $x^2 + y^2 + z^2 \leq 25$

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 4(xy^2 - x)$

ii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x + y}$

iii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$

iv)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$

v)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

vi)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

vii)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

**Απάντηση:** i) 8 ii) -8 iii) δεν υπάρχει iv) δεν υπάρχει v) 0 vi) δεν υπάρχει vii) 8/3

5. Έστω  $f(x, y) = e^{2x} \sin y$ . Να υπολογιστούν τα:

i)  $\frac{\partial f}{\partial x}$

ii)  $\frac{\partial f}{\partial y}$

iii)  $f_x(0, y)$

iv)  $f_y(\ln 2, 0)$

**Απάντηση:** i)  $2e^{2x} \sin y$  ii)  $e^{2x} \cos y$  iii)  $2 \sin y$  iv)  $4$

**6.** Να υπολογιστούν οι παρακάτω μερικές παράγωγοι.

i)  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , για  $z = 9x^2y - 3x^5y$

ii)  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , για  $z = xe^{\sqrt{15xy}}$

**Απάντηση:** i)  $\frac{\partial z}{\partial x} = 18xy - 15x^4y$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 3x^5$  ii)  $\frac{\partial z}{\partial x} = (1 + \sqrt{15xy})e^{\sqrt{15xy}}$ ,  $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{15x^2e^{\sqrt{15xy}}}{2\sqrt{15xy}}$

**7.** Έστω  $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$ .

i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας  $z = f(x, y)$  στην  $x$ -κατεύθυνση στο  $(4, 2)$ .

ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς  $y$  της  $f$  στο  $(4, 2)$ .

**Απάντηση:** i)  $3/8$  ii)  $1/4$

**8.** Για τη συνάρτηση  $f(x, y, z) = z \ln(x^2y \cos z)$  να υπολογιστούν οι  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  και  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

**Απάντηση:** i)  $\frac{\partial f}{\partial x} = 2z/x$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y} = z/y$ ,  $\frac{\partial f}{\partial z} = \ln(x^2y \cos z) - \frac{z \sin z}{\cos z}$

**9.** Ένα σωματίδιο κινείται στην τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς  $z = x^2 + 3y^2$  και του επιπέδου  $y = 1$ . Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $z$  ως προς  $x$  όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο  $(2, 1, 7)$ ;

**Απάντηση:**  $4$

**10.** Ο όγκος  $V$  ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο  $V = \pi r^2 h$ , όπου  $r$  είναι η ακτίνα και  $h$  το ύψος.

i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $V$  ως προς  $r$  όταν το  $h$  είναι σταθερό;

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $V$  ως προς  $h$  όταν το  $r$  είναι σταθερό;

iii) Αν  $h = 4$  και το  $r$  μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $V$  ως προς  $r$  όταν  $r = 6$ ;

**Απάντηση:** i)  $2\pi r h$  ii)  $\pi r^2$  iii)  $48\pi$

**11.** Για την συνάρτηση  $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$  να αποδειχθεί ότι  $f_{xy} = f_{yx}$ .

**Απάντηση:**  $f_{xy} = f_{yx} = -32y^3$

**12.** Για την συνάρτηση  $f(x, y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$  να υπολογιστούν οι παράγωγοι  $f_{xxy}$ ,  $f_{yxy}$  και  $f_{yyy}$ .

**Απάντηση:**  $f_{xxx} = 6y^5$ ,  $f_{yxy} = 60x^2y^3$ ,  $f_{yyy} = 60x^3y^2$

**13.** Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή ( $\Sigma$ ) ή λάθος ( $\Lambda$ ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης  $f(x, y)$  στο σημείο  $(x_0, y_0)$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_0, y_0)$ .

ii) Αν οι  $f_x$  και  $f_y$  είναι συνεχείς στο  $(0, 0)$ , τότε και η  $f(x, y)$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

**Απάντηση:** Λάθος, Σωστό

**14.** Να υπολογιστεί η παράγωγος  $dz/dt$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i)  $z = 3x^2y^3, x = t^4, y = t^2$
- ii)  $z = \ln(2x^2 + y), x = \sqrt{t}, y = t^{2/3}$
- iii)  $z = 3 \cos x - \sin(xy), x = 1/t, y = 3t$

**Απάντηση:** i)  $42t^{13}$  ii)  $\frac{1}{2t + t^{2/3}} \left( 2 + \frac{2}{3}t^{-1/3} \right)$  iii)  $-\frac{3}{t^2} \sin \frac{1}{t}$

**15.** Να υπολογιστεί η παράγωγος  $dw/dt$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i)  $w = 5x^2y^3z^4, x = t^2, y = t^3, z = t^5$
- ii)  $w = 5 \cos(xy) - \sin(xz), x = 1/t, y = t, z = t^3$

**Απάντηση:** i)  $165t^{32}$  ii)  $-3t \cos t^2$

**16.** Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial z}{\partial u}$  και  $\frac{\partial z}{\partial v}$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i)  $z = 8x^2y - 2x + 3y, x = uv, y = u - v$
- ii)  $z = x/y, x = 2 \cos u, y = 3 \sin v$

**Απάντηση:** i)  $\frac{\partial z}{\partial u} = 24u^2v^2 - 16uv^3 - 2v + 3, \frac{\partial z}{\partial v} = 16u^3v - 24u^2v^2 - 2u - 3$  ii)  $\frac{\partial z}{\partial u} = -\frac{2 \sin u}{3 \sin v}, \frac{\partial z}{\partial v} = -\frac{2 \cos u \cos v}{3 \sin^2 v}$

**17.** Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

- i)  $dR/d\phi, R = e^{2s-t^2}, s = 3\phi, t = \phi^{1/2}$
- ii)  $\frac{dw}{dx}, w = 3xy^2z^3, y = 3x^2 + 2, z = \sqrt{x-1}$ .

**Απάντηση:** i)  $5e^{5\phi}$  ii)  $\frac{3}{2}(3x^2 + 2)(39x^3 - 30x^2 + 10x - 4)\sqrt{x-1}$

**18.** Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i)  $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$
- ii)  $ye^x - 5 \sin(3z) = 3z$

**Απάντηση:** i)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x + yz}{6yz - xy}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{3z^2 - xz}{xy - 6yz}$  ii)  $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{ye^x}{15 \cos(3z) + 3}, \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{e^x}{15 \cos(3z) + 3}$

**19.** Να βρεθεί η  $D_{\vec{u}}f$  στο σημείο  $P$ .

- i)  $f(x, y) = (1 + xy)^{3/2}, P(3, 1), \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$
- ii)  $f(x, y) = \sin(5x - 3y), P(3, 5), \vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$
- iii)  $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y), P(0, 0), \vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$

iv)  $f(x, y, z) = 4x^5y^2z^3, P(2, -1, 1), \vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$

**Απάντηση:** i)  $6\sqrt{2}$  ii)  $\frac{27}{5}$  iii)  $-3/\sqrt{10}$  iv)  $-320$

**20.** Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $f$  στο  $P$  στην κατεύθυνση του  $\vec{a}$ .

i)  $f(x, y) = 4x^3y^2, P(2, 1), \vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

ii)  $f(x, y, z) = \frac{z-x}{z+y}, P(1, 0, -3), \vec{a} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$ .

**Απάντηση:** i) 0 ii)  $-8/63$

**21.** Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $f$  στο  $P$  στην κατεύθυνση του διανύσματος που σχηματίζει γωνία  $\theta$  με τον θετικό άξονα  $x$ .

i)  $f(x, y) = \sqrt{xy}, P(1, 4), \theta = \pi/3$

ii)  $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}, P(-1, -2), \theta = \pi/2$

**Απάντηση:** i)  $1/2 + \sqrt{3}/8$  ii)  $2/9$

**22.** Έστω ότι  $D_{\vec{u}}f(1, 2) = -5$  και  $D_{\vec{v}}f(1, 2) = 10$ , όπου  $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$  και  $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$ .

i) Να βρεθούν τα  $f_x(1, 2)$  και  $f_y(1, 2)$ .

ii) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $f$  στο  $(1, 2)$  στην κατεύθυνση που δείχνει στην αρχή των αξόνων.

**Απάντηση:** i)  $f_x(1, 2) = 5, f_y(1, 2) = 10$  ii)  $-5\sqrt{5}$

**23.** Έστω  $f_x(-5, 1) = -3$  και  $f_y(-5, 1) = 2$ . Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $f$  στο  $P(-5, 1)$  στην κατεύθυνση από το  $P$  στο  $Q(-4, 3)$ .

**Απάντηση:**  $1/\sqrt{5}$

**24.** Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης αύξησης της  $f$  στο  $P$  και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i)  $f(x, y) = 4x^3y^2, P(-1, 1)$

ii)  $f(x, y, z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1, P(1, 1, -1)$

iii)  $f(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y^2}, P(1, 2, -2)$

**Απάντηση:** i)  $(3/\sqrt{13}, -2/\sqrt{13}), 4\sqrt{13}$  ii)  $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2}), 3\sqrt{2}$  iii)  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}, 0), \sqrt{2}/2$

**25.** Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης μείωσης της  $f$  στο  $P$  και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i)  $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2, P(-1, -3)$

ii)  $f(x, y, z) = 4e^{xy} \cos z, P(0, 1, \pi/4)$

**Απάντηση:** i)  $(-1/\sqrt{10}, -3/\sqrt{10}), -2\sqrt{10}$  ii)  $(-\frac{1}{2\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{2\sqrt{2}}), -4$

**26.** Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Αν  $\vec{v} = 2\vec{u}$  τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $f$  στην κατεύθυνση του  $\vec{v}$  είναι διπλάσια από την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του  $\vec{u}$  σε ένα σημείο  $(x_0, y_0)$ .
- ii) Αν  $\vec{u}$  είναι μοναδιαίο διάνυσμα και  $D_{\vec{u}}f(x, y) = 0$  για κάθε  $(x, y)$ , τότε η  $f$  είναι σταθερή.

**Απάντηση:** i) Λάθος ii) Λάθος

**27.** Η κατευθυνόμενη παράγωγος της  $f(x, y, z)$  στο  $(3, -2, 1)$  στην κατεύθυνση του  $\vec{a} = 2i - j - 2k$  είναι  $-5$  και  $\|\nabla f(3, -2, 1)\| = 5$ , να βρεθεί το  $\nabla f(3, -2, 1)$ .

**Απάντηση:**  $(-10/3, 5/3, 10/3)$

**28.** Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο  $P$ .

- i)  $x^2 + y^2 + z^2 = 25, P(-3, 0, 4)$
- ii)  $x^2 - xyz = 56, P(-4, 5, 2)$
- iii)  $z = e^{3y} \sin 3x, P(\pi/6, 0, 1)$

**Απάντηση:** i)  $-3x + 4z - 25 = 0, x = -3 - 6t, y = 0, z = 4 + 8t$  ii)  $-18x + 8y + 20z - 152 = 0, x = -4 - 18t, y = 5 + 8t, z = 2 + 20t$  iii)  $-3y + z = 1, x = \pi/6, y = -3t, z = 1 + t$

**29.** Έστω το ελλειψοειδές  $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$ .

- i) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο  $(2, 2, 1)$ .
- ii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο  $(2, 2, 1)$ .
- iii) Να βρεθεί η γωνία του εφαπτόμενου επιπέδου στο  $(2, 2, 1)$  με το  $xy$ -επίπεδο.

**Απάντηση:** i)  $x + y + 2z - 6 = 0$  ii)  $x = 2 + 4t, y = 2 + 4t, z = 1 + 8t$  iii)  $\cos \theta = 2/\sqrt{6}, \theta \approx 35, 26^\circ$

**30.** Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.

- i)  $z = x^3 y^2$
- ii)  $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

**Απάντηση:** i)  $(x, 0, 0), (0, y, 0)$  ii)  $(0, -2, -4)$

**31.** Να βρεθεί σημείο της επιφάνειας  $z = 3x^2 - y^2$  στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο  $6x + 4y - z = 5$ .

**Απάντηση:**  $(1, 2, -1)$

**32.** Ναδειχθεί ότι κάθε ευθεία κάθετη στη σφαίρα  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

**33.** Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία.

- i)  $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$
- ii)  $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

iii)  $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$

**Απάντηση:** i) Σαγματικό σημείο στο  $(1, 2)$  ii) Σαγματικό σημείο στο  $(0, 0)$ , τοπικό ελάχιστο στο  $(1/6, 1/12)$   
iii) Τοπικά ελάχιστα στα  $(1, 1)$  και  $(-1, -1)$

**34.** Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης στο χωρίο  $R$ .

- i)  $f(x, y) = xy - x - 3y$ ,  $R$  το τρίγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(0, 4)$  και  $(5, 0)$
- ii)  $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y$ ,  $R$  το τετράγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(0, 2)$ ,  $(2, 2)$  και  $(2, 0)$ .
- iii)  $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x$ ,  $R$  ο δίσκος  $x^2 + y^2 \leq 4$

**Απάντηση:** i) Μέγιστη τιμή  $0$ , ελάχιστη τιμή  $-12$  ii) μέγιστη τιμή  $3$ , ελάχιστη τιμή  $-1$  iii) μέγιστη τιμή  $33/4$ , ελάχιστη τιμή  $-1/4$

**35.** Να βρεθούν τρεις θετικοί αριθμοί με άθροισμα  $48$  και μέγιστο δυνατό γινόμενο.

**Απάντηση:**  $x = y = z = 16$

**36.** Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου  $x + y + z = 5$  στο πρώτο οκτημόριο ( $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ) στα οποία η  $f(x, y, z) = xy^2z^2$  έχει μέγιστη τιμή.

**Απάντηση:**  $(1, 2, 2)$

**37.** Ένα κλειστό ορθογώνιο κουτί με όγκο  $16\text{cm}^3$  φτιάχνεται από δύο υλικά. Οι άνω και κάτω έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει  $0,10\text{€}$  ανά  $\text{cm}^2$  ενώ οι παράπλευρες έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει  $0,05\text{€}$  ανά  $\text{cm}^2$ . Να βρεθούν οι διαστάσεις του κουτιού που ελαχιστοποιούν το κόστος των υλικών.

**Απάντηση:**  $x = 2, y = 2, z = 4$

**38.** Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης υπό τη δοσμένη συνθήκη με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

- i)  $f(x, y) = 4x^3 + y^2, 2x^2 + y^2 = 1$
- ii)  $f(x, y, z) = 2x + y - 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 4$
- iii)  $f(x, y, z) = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

**Απάντηση:** i) Μέγιστη τιμή  $\sqrt{2}$ , ελάχιστη τιμή  $-\sqrt{2}$  ii) μέγιστη τιμή  $6$ , ελάχιστη τιμή  $-6$  iii) μέγιστη τιμή  $\frac{1}{3\sqrt{3}}$ , ελάχιστη τιμή  $-\frac{1}{3\sqrt{3}}$

**39.** Να βρεθεί διάνυσμα στον χώρο με μήκος  $5$  και μέγιστο δυνατό άθροισμα συντεταγμένων.

**Απάντηση:**  $\vec{v} = (5/\sqrt{3}, 5/\sqrt{3}, 5/\sqrt{3})$

**40.** Να βρεθούν διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μέγιστο όγκο που να εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας  $a$ .

**Απάντηση:**  $x = y = z = 2a/\sqrt{3}$ .

