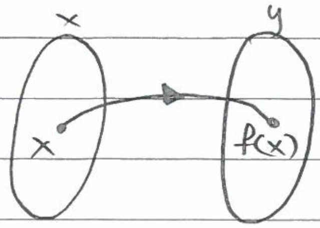
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2 - ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ



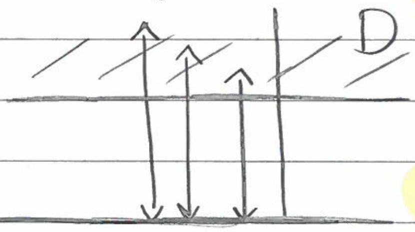
πεδίο ορισμού πεδίο τιμών

Σε αυτό το μάθημα το $x \in \mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

π.χ $f(x,y)=2y$ $(f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R})$

π.χ $r(t)=(t,t^2,t^3)$ $(r:\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3)$

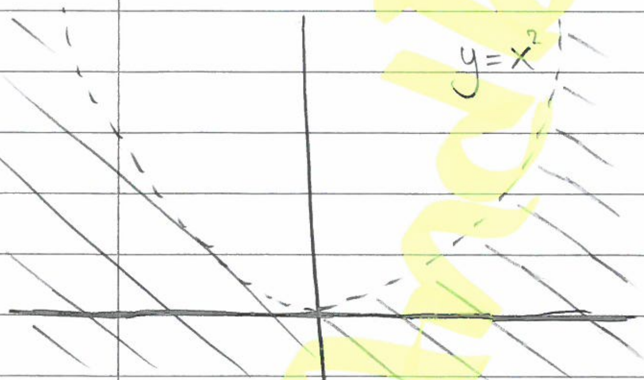
π.χ Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της $f(x,y)=3x\sqrt{y}-1$
$\Rightarrow$ πρέπει το $y>0$.



Άρα το πεδίο ορισμού είναι το $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y>0\}$

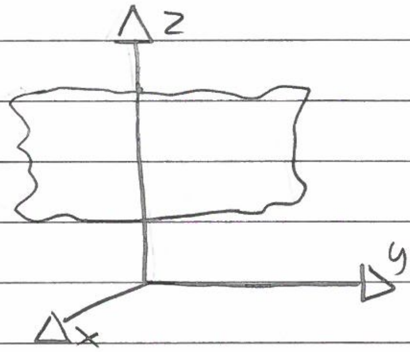
$f(1,1)=3\cdot 1^2\sqrt{4}-1=5$

π.χ $f(x,y)=\ln(x^2-y)$
$\Rightarrow$ πρέπει το $x^2-y>0$

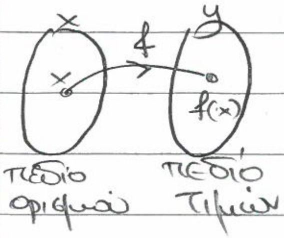


$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2-y>0\}$

Οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
έχουν γραφική παράσταση
στο χωρίο στον $\mathbb{R}^3$
Θέτουμε $z = f(x,y)$



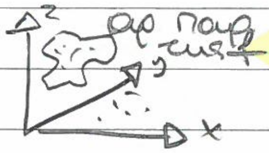
$f: X \to Y$



$X \subseteq \mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

$Y = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

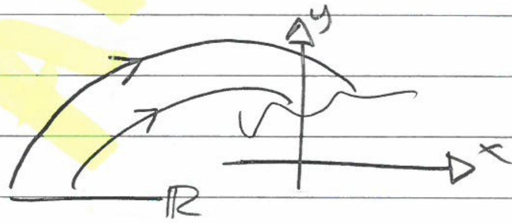
$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$



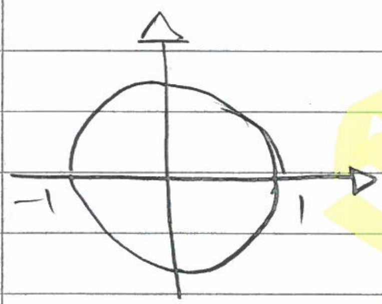
$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$

$f(t) = (f_1(t), f_2(t))$

καμπύλη στο επίπεδο

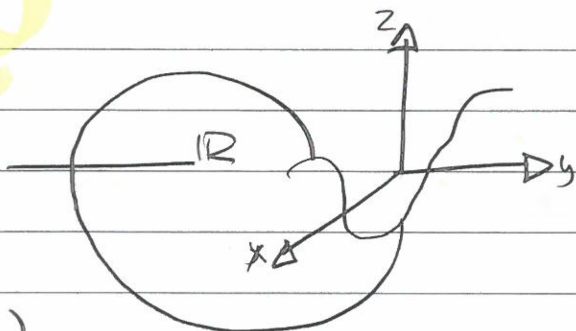


π.χ. $f(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$

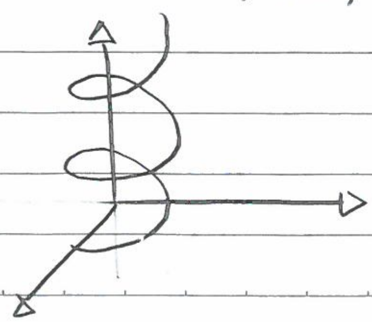


$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$

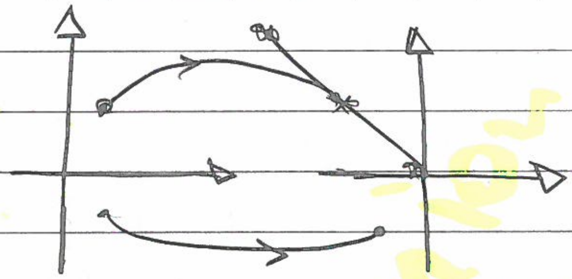
καμπύλη στο χώρο



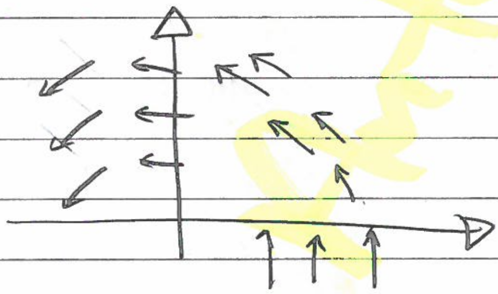
π.χ. $f(t) = \cos t, \sin t, t)$



$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

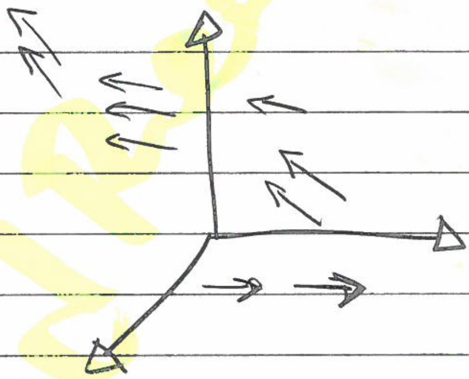


διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^2$



$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$

διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$



ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$f: X \to \mathbb{R}^n$, $g: Y \to \mathbb{R}^n$ $\quad X, Y \subseteq \mathbb{R}^m$ $\quad m = 1,2,3$, $n = 1,2,3$.

Για να προσθέσουμε/πολλαπλασιάσουμε/διαιρέσουμε τις f, g πρέπει οι διαστάσεις των πεδίων ορισμού και τιμών να είναι ίδιες.

π.χ $f: X \to \mathbb{R}$ $\quad g: Y \to \mathbb{R}$ $\quad X, Y \subseteq \mathbb{R}^3$

Για $\lambda \in \mathbb{R}$

$$(\lambda f)(\vec{x}) = \lambda f(\vec{x})$$
$$(f+g)(\vec{x}) = f(\vec{x}) + g(\vec{x})$$
$$(fg)(\vec{x}) = f(\vec{x})\, g(\vec{x})$$

Αν $f \neq 0$ $\quad \left(\frac{1}{f}\right)(\vec{x}) = \frac{1}{f(\vec{x})}$

Σύνθεση π.χ.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^3 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^3 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

$(g \circ f)(\vec{x}) = g(f(\vec{x}))$

• Αν $f: X \to \mathbb{R}$ η f λέγεται πραγματική ή βαθμωτή συνάρτηση

• Αν $f: X \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ η f λέγεται διανυσματική συνάρτηση

Γράφουμε $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$

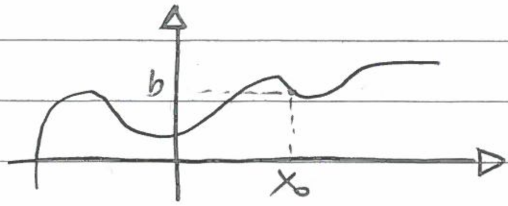
ή $f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}), f_3(\vec{x}))$

συνιστώσες

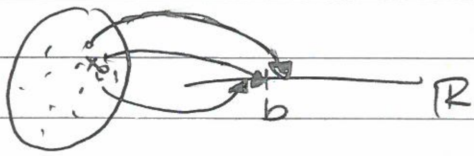
Για κάθε συνιστώσα $f: X \to \mathbb{R}$ είναι πραγματική συνάρτηση

$\hookrightarrow (f(t) = (\cos t, \sin t))$

ΟΡΙΑ ΚΑΙ ΣΥΝΕΧΕΙΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ



Γενικά για $f: X \to \mathbb{R}$



Αν καθώς πλησιάζουμε το $\vec{x}_0$ οι εικόνες πλησιάζουν το $b \in \mathbb{R}$, λέμε ότι $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = b$

Πρόταση: Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(\vec{x}) = c \in \mathbb{R} \ \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^2$ τότε $\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = c$ $\left(\lim\limits_{\vec{x} \to \vec{x}_0} c = c \right)$

Πρόταση: Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x$ τότε $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = x_0$ $\left(\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} x = x_0 \right)$

Πρόταση: Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y$ τότε $\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} f(x,y) = y_0$ $\left(\lim\limits_{(x,y) \to (x_0,y_0)} y = y_0 \right)$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το όριο αν υπάρχει είναι μοναδικό

No. Date

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

με $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = a \in \mathbb{R}$ και

$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} g(x,y) = b \in \mathbb{R}$

α) για $\lambda \in \mathbb{R}$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \lambda f(x,y) = \lambda a$

β) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) + g(x,y)\right) = a + b$

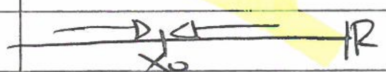
γ) $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \left(f(x,y) \cdot g(x,y)\right) = ab$

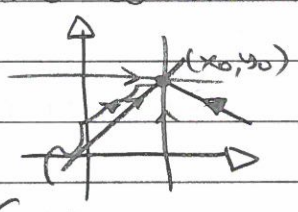
δ) Αν $a \neq 0$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{1}{f(x,y)} = \frac{1}{a}$

Παράδειγμα: $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 + y^2 + 2$ $\lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = ?$

$$\left.\begin{array}{l} \lim_{(x,y)\to(0,1)} x^2 = 0 \\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} y^2 = 1^2 = 1 \\ \lim_{(x,y)\to(0,1)} 2 = 2 \end{array}\right\} \text{Άρα } \lim_{(x,y)\to(0,1)} f(x,y) = 0 + 1 + 2 = 3$$

Ποια η διαφορά από τον Απ. Λογισμό?





• Αν υπάρχει το όριο όλοι αυτοί οι τρόποι προσέγγισης δίνουν την ίδια τιμή.

→ Δ Έχουμε μόνο 2 τρόπους να πλησιάσουμε

→ Δ Έχουμε άπειρους τρόπους να πλησιάσουμε

• Αν δύο τρόποι δίνουν διαφορετική τιμή, το όριο δεν υπάρχει.

π.χ. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$ Υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$?

Στην ευθεία $y=x$
$f(x,y) = \dfrac{2x^2}{x^2+x^2} = 1$ άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 1$

Στην ευθεία $y=-x$
$f(x,y) = \dfrac{-2x^2}{2x^2} = -1$ άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} = -1$

Άρα δεν υπάρχει $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$

ΟΡΙΣΜΟΣ
Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Η f λέγεται <u>συνεχής στο $\vec{x}_0$</u> αν $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} f(\vec{x}) = f(\vec{x}_0)$
(αντίστοιχα για $\mathbb{R}^3$)

ΟΡΙΣΜΟΣ
Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $\vec{x} \in \mathbb{R}^2$. Η f λέγεται <u>συνεχής</u> για κάθε $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$
(αντίστοιχα για $\mathbb{R}^3$).

π.χ. $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 1$
Αν $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$ $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = x_0^3 + 2x_0^2 y_0 + 1 = f(x_0,y_0)$
$\Rightarrow$ Άρα η f είναι συνεχής

Γενικά αν η f είναι
- πολυωνυμική
- ρητή
- εκθετική/λογαριθμική
- τριγωνομετρική

τότε είναι συνεχής

No. Date

ΘΕΩΡΗΜΑ

Έστω $f, g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $\vec{x}_0 \in \mathbb{R}^2$

1) Αν f συνεχής στο $\vec{x}_0$ και $\lambda \in \mathbb{R}$, η λf είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$

2) Αν f, g συνεχής στο $\vec{x}_0$, $f+g$ και fg είναι συνεχείς στο $\vec{x}_0$

3) Αν $f(\vec{x}_0) \neq 0$ και f συνεχής στο $\vec{x}_0$ τότε η $\frac{1}{f}$ είναι συνεχής στο $\vec{x}_0$

π.χ. $f(x,y) = e^{x+y} \cdot \sin(x+y)$ είναι συνεχής.

Παραδείγματα στα όρια

1) Υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2 - (x-y)^2}{xy}$?

[Σημείωση: Όταν θέτουμε $\lim_{\vec{x}\to\vec{x}_0} \ldots$ υποτίθεται ότι $\vec{x} \neq \vec{x}_0$]

$$\frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = \frac{\cancel{x^2}+2xy+\cancel{y^2}-\cancel{x^2}+2xy-\cancel{y^2}}{xy} = \frac{4\cancel{xy}}{\cancel{xy}} = 4$$

άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2-(x-y)^2}{xy} = 4$.

2) Υπάρχει το $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + y\sin\frac{1}{x}\right)$?

[Μηδενική φραγμένη $\to 0$]

$$0 \leq \left|x + y\sin\tfrac{1}{x}\right| \leq |x| + |y|\left|\sin\tfrac{1}{x}\right| \leq |x| + |y| \xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{} 0$$

Από κριτήριο παρεμβολής (Θ. Sandwich)

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(x + y\sin\frac{1}{x}\right) = 0$

3) Υπάρχει το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{\sin 2x - 2x + y}{x^3+y}$?

Κατά μήκος της ευθείας $x=0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 0 + 0 + y}{0+y} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} 1 = 1$$

Κατά μήκος της ευθείας $y=0$

$$\Rightarrow \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \qquad \left(\lim x \neq \lim y\right)$$

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x - 2x}{x^3} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\cos 2x - 2}{3x^2} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-4\sin 2x}{6x} \overset{DLH}{=} \lim_{x\to 0} \frac{-8\cos 2x}{6} = -\frac{4}{3}$$

Άρα το όριο δεν υπάρχει.

4) Μπορεί η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{2xy}{x^2+y^2}$ να γίνει συνεχής στον $\mathbb{R}^2$ ορίζοντάς την κατάλληλα στο $(0,0)$?

Δεν μπορεί να είναι συνεχής στο $(0,0)$ γιατί το όριο $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}$ δεν υπάρχει.

5) Να βρεθεί το $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} (3x^2+3y^2)\log(x^2+y^2)$

Κάνουμε αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες $r^2 = x^2+y^2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

$$\lim_{r\to 0} (3r^2)\log r^2 \overset{DLH}{=} \dots = 0$$

5:59 Ιακωβιανοί πρόβλημα
6:

No. Date

Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = (a_0, b_0) \Leftrightarrow \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_1(x,y) = a_0$$

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f_2(x,y) = b_0$$

Η f είναι συνεχής στο (x_0, y_0)
$\Rightarrow$ οι f_1 και f_2 είναι συνεχείς στο (x_0, y_0)

π.χ. $f(x,y) = (xy, x + y\sin\frac{1}{x})$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} xy = 0$

$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x + y\sin\frac{1}{x}) = 0$ (προηγούμενο ερώτημα)

άρα $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = (0,0)$

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΕΧΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g \circ f"'] & \mathbb{R}^2 \arrow[d, "g"] \\ & \mathbb{R} \end{tikzcd}$$

Αν οι f, g είναι συνεχείς τότε και η $f \circ g$ είναι συνεχής

No. Date

ΠΑΡΑΓΩΓΗΣΗ

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ συνάρτηση

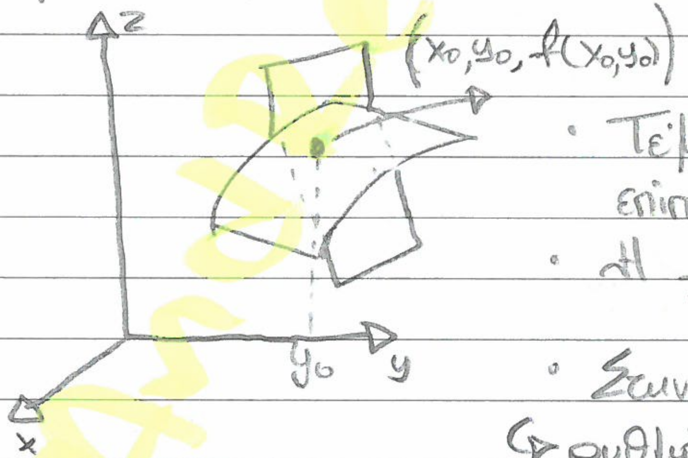
ΟΡΙΣΜΟΣ

Η μερική παράγωγος της f ως προς x σε ένα σημείο (x_0, y_0) συμβολίζεται με $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ και είναι ίση με $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0)}{h}$ (αν υπάρχει)

Αντίστοιχα η μερική παράγωγος ως προς y στο (x_0, y_0) είναι $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$

→ Συμβολίζεται με f_x, f_y.

Γεωμετρική Ερμηνεία



- Τέμνουμε την f με το επίπεδο $y = y_0$
- Η $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ είναι η κλίση της εφαπτομένης
- Στην καμπύλη τομής

→ ρυθμός μεταβολής στην κατεύθυνση του x.

Αλγεβρικά θεωρούμε το y σαν σταθερά και παραγωγίζουμε ως προς x.

Αντίστοιχα για $\frac{\partial f}{\partial y}$

π.χ $f(x,y)=2x^3y^2+2y+4x$

$\frac{\partial f}{\partial x}=6x^2y^2+4$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}=4x^3y+2$

π.χ $f(x,y)=y\ln x$

$\frac{\partial f}{\partial x}=y\cdot\frac{1}{x}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}=\ln x$

Παρατήρηση: Οι γνωστοί κανόνες παραγώγισης ισχύουν

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(af(x,y)+b\,g(x,y)\right)=a\frac{\partial f}{\partial x}+b\frac{\partial f}{\partial x} \qquad a,b\in\mathbb{R}$$

π.χ. $f(x,y)=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y\sqrt{x^2+y^2}-xy\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}}{x^2+y^2}$$

$$=\frac{\cancel{2}y(x^2+y^2)-\cancel{2}x^2y}{\cancel{2}(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$=\frac{y(x^2+y^2)-x^2y}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}$$

Για $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ ομοίως ορίζεται και η $\frac{\partial f}{\partial z}$

π.χ $f(x,y,z)=e^2\ln(x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x}=e^2\frac{y}{xy}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y}=e^2\frac{x}{xy}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial z}=e^2\ln(x,y)$

Παράδειγμα

z συνάρτηση των x, y

$x^2+y^2+z^2=1$

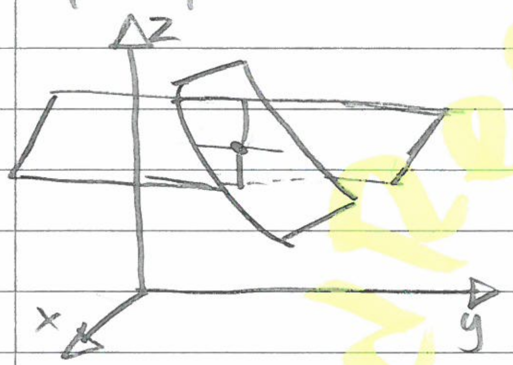
Να βρεθεί η $\frac{\partial z}{\partial x}$

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)=0$$

$$2x+0+2z\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{-x}{z}$$

Εφαπτόμενο επίπεδο



Εξίσωση επιπέδου:

$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=d$

ή $z=a(x-x_0)+b(y-y_0)+c$

$a=\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$, $b\,\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$, $c=f(x_0,y_0)$

ΟΡΙΣΜΟΣ Έστω $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$

Η f λέγεται παραγωγίσιμη ή διαφορίσιμη στο (x_0,y_0)

αν $$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{f(x,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0)+\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)+f(x_0,y_0)}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|}=0$$

η f λέγεται παραγωγίσιμη αν είναι παραγωγίσιμη σε κάθε (x_0,y_0)

Παρένθεση

Πίνακας m×n
$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline 1 & a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 2 & a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ m & a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{array}$$

Γινόμενο πινάκων $(m\times \cancel{n})(\cancel{n}\times k) \to (m\times k)$

Διάνυσμα $\qquad\qquad$ Πίνακας

$$\vec{r} = (x,y) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}_{(2\times 1)}$$

$$\vec{r} = (x,y,z) \longleftrightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}_{(3\times 1)}$$

$$\underset{(1\times \cancel{2})(\cancel{2}\times 1)}{\begin{bmatrix} a & b \end{bmatrix}\begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} ac+bd \end{bmatrix}$$
(1×1)

$$\underset{(1\times \cancel{3})(\cancel{3}\times 1)}{\begin{bmatrix} a & b & c \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{bmatrix}} = \begin{bmatrix} aa'+bb'+cc' \end{bmatrix}$$
(1×1)

$$* \ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0)$$
$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x-x_0 \\ y-y_0 \end{bmatrix}$$

ΜΑΕ026 No. 3 Date 20/9

ΟΡΙΣΜΟΣ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Η παράγωγος του f στο (x_0, y_0) συμβολίζεται με $Df(x_0,y_0)$ ή $df(x_0,y_0)$ και είναι ο γραμμικός πίνακας

$$Df_{(x_0,y_0)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) & \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

παράγωγος – διαφορικό

Γενικά η παράγωγος της f είναι $Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$

π.χ. $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^{x^2+y^2} + 2x e^{x^2+y^2}$ $\qquad$ $\frac{\partial f}{\partial y} = 2xy e^{x^2+y^2}$

$$Df = \begin{bmatrix} e^{x^2+y^2} + 2xe^{x^2+y^2} & 2xye^{x^2+y^2} \end{bmatrix}$$

No. Date

ΠΑΡΑΓΩΓΙΣΗ

· Παράγωγος $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ $\quad Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{\partial f}{\partial y}\right]$ $\quad \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right]$

$f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ $\quad Df = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{}{\partial y} \ \frac{}{\partial z}\right]$ $\quad \nabla f = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \ \frac{}{\partial y} \ \frac{}{\partial z}\right]$

· Εφαπτόμενο επίπεδο στο (x_0, y_0)

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\cdot(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\cdot(y - y_0)$$

· Παραγωγίσιμη → συνεχής

· Συνεχής μερική παράγωγος ⇒ παραγωγίσιμη

το αντίστροφο δεν ισχύει

$$f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

[Πράξεις μεταξύ παραγώγων έχουν τις γνωστές ιδιότητες π.χ. $D(fg) = Df\cdot g + f\,Dg$]

· f παραγ/μη στο $(0,0)$

· $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν

· $\frac{\partial f}{\partial x}$ δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$

Το όριο $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}$ δεν υπάρχει

π.χ. Για $y=0, x>0$ $\quad f(x,y)\ x^2 \sin\frac{1}{\sqrt{x^2}} = x^2 \sin\frac{1}{x}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\sin\frac{1}{x} + x^2\cos\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

$$= \underbrace{2x\sin\frac{1}{x}}_{x\to 0 \ \Rightarrow\ 0} \ \underbrace{-\cos\frac{1}{x}}_{x\to 0\ \Rightarrow\ \nexists \text{ το όριο}}$$

ΚΑΝΟΝΑΣ ΑΛΥΣΙΔΑΣ

f, g παραγωγίσιμες

$$D(g\circ f)(\vec{x}_0) = Dg(f(\vec{x}_0))\cdot Df(\vec{x}_0)$$

γινόμενο πινάκων

1η επίπεδη περίπτωση

$$z = f(x,y),\quad y = y(t),\quad x = x(t)$$

Θέλουμε την παράγωγο της $f(x(t), y(t)) = f(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

Π.χ $z = x^2 y,\ x = t^2,\ y = t^3$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt}$$

$$= 2xy\Big|_{\substack{x=t^2\\ y=t^3}}\cdot 2t + x^2\Big|_{\substack{x=t^2\\ y=t^3}}\cdot 3t^2$$

$$= 2t^2t^3\cdot 2t + (t^2)^2\cdot 3t^2$$

$$= 4t^6 + 3t^6$$

$$= 5t^6$$

Εναλλακτικά μπορούμε να παραγωγίσουμε αφού κάνουμε αντικατάσταση

$$z = x^2 y = (t^2)^2 t^3 = t^7$$

$$\frac{dz}{dt} = 7t^6$$

π.χ. $f(x,y) = \sqrt{xy+y}$ $\quad x=\cos\theta$
$y=\sin\theta$

Να βρεθεί η $\frac{df}{d\theta}$ για $\theta=\frac{\pi}{2}$.

$$\frac{df}{d\theta} = \frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{dx}{d\theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{dy}{d\theta}$$

$$= \frac{y}{2\sqrt{xy+y}}\Bigg|_{\substack{x=\cos\theta\\ y=\sin\theta}} \cdot(-\sin\theta) + \frac{x+1}{2\sqrt{xy+y}}\Bigg|_{\substack{x=\cos\theta\\ y=\sin\theta}} \cdot\cos\theta$$

$$= \frac{-\sin^2\theta}{2\sqrt{\cos\theta\sin\theta+\sin\theta}} + \frac{(\cos\theta+1)\cos\theta}{2\sqrt{\cos\theta\sin\theta+\sin\theta}}$$

για $\theta=\frac{\pi}{2}$, $\cos\theta=0$ και $\sin\theta=1$

άρα $\frac{dz}{d\theta}\Big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{-1}{2\sqrt{1}} = -\frac{1}{2}$

<u>Παρατήρηση</u>: Αν η y ορίζεται σαν συνάρτηση του x μέσω μιας σχέσης $z=f(x,y)=0$ χρησιμοποιούμε κανόνα αλυσίδας για να βρούμε την $\frac{dy}{dx}$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

$$\xRightarrow{\text{κανόνας αλυσίδας}} \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\cancel{\frac{dx}{dx}} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}$$

No. Date

Π.χ Να βρεθεί η $\frac{dy}{dx}$ αν $x^3+y^2x-3=0$

Έστω $z=x^3+y^2x-3$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{\frac{\partial z}{\partial x}}{\frac{\partial z}{\partial y}}=-\frac{3x^2+y^2}{2xy}$$

2η ειδική περίπτωση

$z=f(x,y)$, $x=x(s,t)$ $y=y(s,t)$ Ζητάμε τις $\frac{\partial f}{\partial s}$, $\frac{\partial f}{\partial t}$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

Π.χ $z=\frac{x}{y}$, $x=e^t s$, $y=1+e^{-t}\cdot s$

$$\frac{\partial f}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$=\frac{1}{y}\Big|_{y=1+e^{-t}\cdot s}\cdot e^t+\left(-\frac{x}{y^2}\right)\Big|_{\substack{x=e^t\cdot s\\ y=1+se^{-t}}}\cdot e^{-t}$$

$$=\frac{1}{1+se^{-t}}\cdot e^t-\frac{se^t\cdot e^{-t}}{(1+se^{-t})^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$$

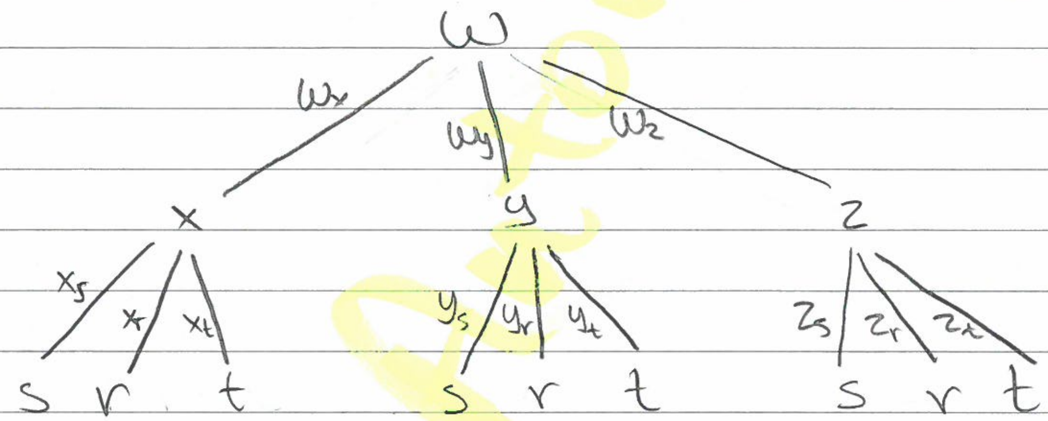
$$=\frac{1}{y}\Big|_{\dots}\cdot se^t+\left(-\frac{x}{y^2}\right)\Big|_{\dots}(-se^{-t})$$

Για γενικότερες περιπτώσεις χρησιμοποιούμε δενδροδιάγραμμα

π.χ. $w = f(x,y,z)$, $x = x(r,s,t)$ $\qquad \left[\frac{\partial f}{\partial x} = f_x \quad \frac{\partial f}{\partial y} = f_y\right]$

$y = y(r,s,t)$

$z = z(r,s,t)$



$w_r = w_x \cdot x_r = w_y \cdot y_r + w_z \cdot z_r$

π.χ. $w = xy^4 - y^2z^3$ όπου $x = r^2 + s^2 + t^2$

$y = r \cdot e^{st}$

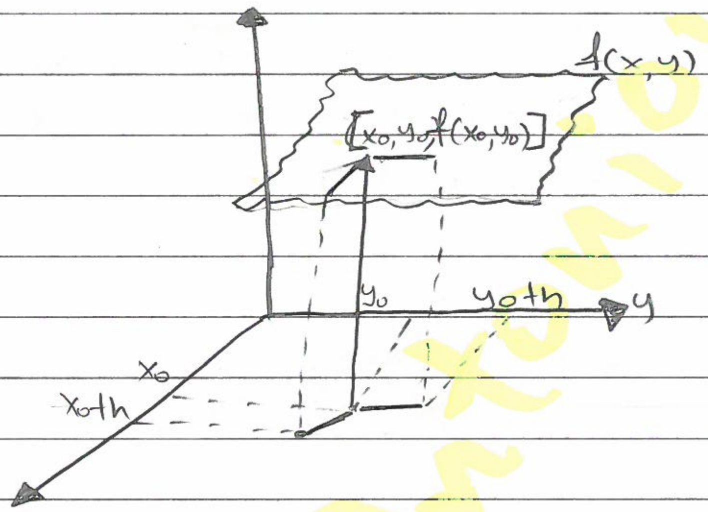
$z = r^2 \sin(s)\cos(t)$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = w_x \cdot x_s + w_y \cdot y_s + w_z \cdot z_s$$

$$= y^4 \cdot 2s + (4xy^3 - 2yz^3)\, rte^{st} + (-3y^2z^2)\, r^2 \cdot \cos(s)\cos(t)$$

$$= (re^{st})^4\, 2st \left[4(r^2+s^2+t^2)(re^{st})^3 - 2re^{st}(r^2\sin(s)\cos(t))^3\right] \cdot r t \ldots$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΣ ΚΑΤΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ



Αν $\vec{u}$ ένα μοναδιαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^2$ θέλουμε να βρούμε ρυθμό μεταβολής/παράγωγο στην κατεύθυνση του $\vec{u}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η παράγωγος της f στο (x_0,y_0) στην κατεύθυνση του μοναδιαίου $\vec{u}=(a,b)$ είναι το όριο

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+ah, y_0+bh)-f(x_0,y_0)}{h} = D_{\vec{u}} f(x_0,y_0)$$

(αν υπάρχει)

Παρατηρήσεις: 1) Αν $\vec{u}=(1,0)=\hat{i}$ τότε $D_{\hat{i}} f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}$

Αν $\vec{u}=(0,1)=\hat{j}$ τότε $D_{\hat{j}} f(x_0,y_0) = \dfrac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}$

2) Αντίστοιχα ορίζεται $D_{\vec{u}} f(x_0,y_0,z_0)$ για $f(x,y,z)$ και μοναδιαίο $\vec{u}\in\mathbb{R}^3$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

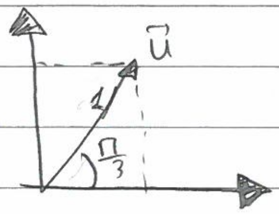
Αν η $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη και $\vec{u}\in\mathbb{R}^2$ είναι μοναδιαίο τότε η παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ είναι

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\,a + f_y(x_0,y_0)\,b$$

(ειδικότερα, υπάρχει η κατευθυνόμενη παράγωγος ως προς κάθε κατεύθυνση)

Π.χ $f(x,y)=4x^2+2xy+2y^3$

Να βρεθεί η $D_{\vec{u}} f$ όπου $\vec{u}$ το μοναδιαίο που σχηματίζει γωνία $\frac{\pi}{3}$ με τον άξονα x.



Εφόσον $\|\vec{u}\|=1$ παίρνουμε $\vec{u}=(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})$

$\vec{u}=(\cos\frac{\pi}{3},\sin\frac{\pi}{3})$

$\vec{u}=(\frac{1}{2},\frac{\sqrt{3}}{2})$

$$D_{\vec{u}} f(x,y)=f_x\frac{1}{2}+f_y\frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$=(8x+2y)\cdot\frac{1}{2}+(2y+6y^2)\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΚΑΙ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ

Ένας άλλος τρόπος να διατυπώσουμε τη σχέση του θεωρήματος είναι

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0),\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\cdot(a,b)$$

εσωτερικό γινόμενο

διανύσματα

$$D_{\vec{u}} f(x_0,y_0)=\nabla f(x_0,y_0)\vec{u}$$

Ερώτηση: Ποια κατεύθυνση $\vec{u}$ μας δίνει τον ταχύτερο ρυθμό μεταβολής?

ΘΕΩΡΗΜΑ

Η $D_{\vec{u}} f$ παίρνει μέγιστη τιμή $\|\nabla f\|$ και αυτό συμβαίνει στην κατεύθυνση του διανύσματος ∇f.

Απόδειξη: $D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}$

$= \|\nabla f\| \, \cancel{\|\vec{u}\|} \cos\theta$ όπου θ η γωνία των $\vec{u}, \nabla f$

Άρα η μέγιστη τιμή λαμβάνεται όταν $\cos\theta = 1 \Rightarrow \theta = 0$

$\Rightarrow \vec{u}$ στην κατεύθυνση του ∇f

$\Rightarrow$ Τότε $D_{\vec{u}} f = \|\nabla f\| \cos\theta = \|\nabla f\|$

Π.χ. Να βρεθεί ο μέγιστος ρυθμός μεταβολής της $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ στο $(1,2)$ και η κατεύθυνση στην οποία επιτυγχάνεται αυτό.

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(\frac{2x}{x^2+y^2}, \frac{2y}{x^2+y^2}\right)$$

άρα $\nabla f(1,2) = \left(\frac{2}{1+4}, \frac{4}{1+4}\right) = \left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

Μέγιστος ρυθμός μεταβολής $= \|\nabla f(1,2)\| = \sqrt{\frac{4}{25} + \frac{16}{25}} = \frac{\sqrt{20}}{5}$

στην κατεύθυνση του $\left(\frac{2}{5}, \frac{4}{5}\right)$

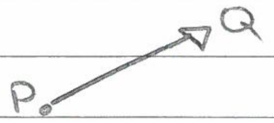
* Στον ορισμό της κατευθυνόμενης παραγώγου το $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο. Γενικά, χρησιμοποιούμε όποιο δήποτε κατεύθυνση

Παράδειγμα: Η θερμοκρασία σε ένα σημείο (x,y,z) δίνεται από $T(x,y,z) = 200e^{-x^2-3y^2-9z^2}$ $\left(\begin{array}{l} T \text{ σε } {}^\circ C \\ x,y,z \text{ σε } m \end{array}\right)$

(α) Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της θερμοκρασίας στο σημείο $P(2,-1,2)$ στην κατεύθυνση του σημείου $Q(3,-3,3)$

Έστω $\vec{u}$ $\vec{PQ} = (1,-2,1)$

Κανονικοποιούμε το $\vec{u}$.



$$\vec{v} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \frac{\vec{u}}{\sqrt{1^2+(-2)^2+1^2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\nabla T(x,y,z) = \left(-400x\, e^{-x^2-3y^2-9z^2}, -1200y\, e^{-x^2-3y^2-9z^2}, -3600z\, e^{-x^2-3y^2-9z^2}\right)$$
$$= -200e^{-x^2-3y^2-9z^2}(2x, 6y, 18z)$$
$$= -400e^{-x^2-3y^2-9z^2}(x, 3y, 9z)$$

$$\nabla T(2,-1,2) = -400e^{-43}(2,-3,18)$$

Άρα $D_{\vec{v}}T(2,1,-2) = \nabla T(2,1,-2)\cdot\vec{v}$

$$= -400e^{-43}(2,-3,18)\left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{-2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$$

$$= -400e^{-43}\left(\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{6}{\sqrt{6}}, \frac{18}{\sqrt{6}}\right)$$

β) Σε ποια κατεύθυνση έχουμε τη μεγαλύτερη αύξηση θερμοκρασίας στο P?

Είναι στην κατεύθυνση του $\nabla T(2,-1,2) = -400e^{-43}(2,-3,18)$

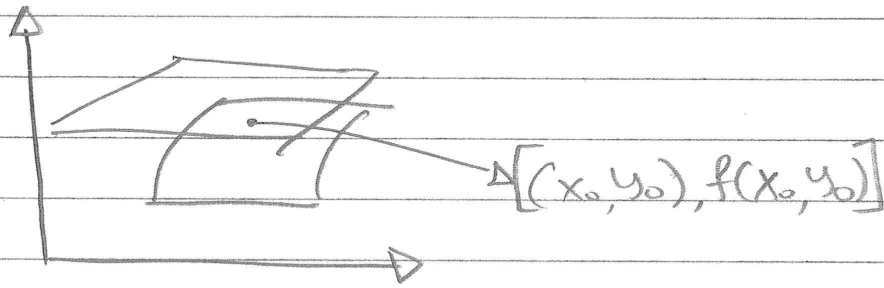
(c) Να βρεθεί ο μέγιστος αριθμός μεταβολής θερμοκρασίας στο P?

Έστω $\|\nabla T(2,-1,2)\| = |-400e^{-43}\|(2,-3,18)\|$

$= \ldots$

No. Date

Υπενθύμιση: $z = f(x,y)$



Εφαπτόμενο επίπεδο της f στο $(x_0, y_0, f(x_0,y_0))$

$$z = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0).$$

Κάθε επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ μπορεί να γραφτεί στην μορφή $F(x,y,z) = k \in \mathbb{R}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $P(x_0,y_0,z_0)$ είναι σημείο της επιφάνειας $f(x,y,z) = k$ τότε το $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$ είναι κάθετο στην επιφάνεια (δηλαδή είναι κάθετο σε όποια δήποτε εφαπτομένη διέρχεται από το P)

Εφαπτόμενες $\rightarrow$ ορίζουν το εφαπτόμενο επίπεδο

Άρα για το εφαπτόμενο επίπεδο της επιφάνειας έχουμε σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$ κάθετο διάνυσμα $\nabla f(x_0,y_0,z_0)$

Άρα η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου είναι

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) \cdot (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = 0.$$

Ενδιάμεση Σάββατο 2 Νοεμβρίου
ΧΟΔ1 108 11-1:00

Κανόνας Αλυσίδας

π.χ. $f(x,y)$ $x = x(t), y(t)$

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

• Παράγωγος στην κατεύθυνση του $\vec{u}$
Αν $\vec{u}$, μοναδιαίο $D_{\vec{u}} f = \nabla f \cdot \vec{u}$

εσωτερικό γινόμενο

κλίση $D_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$

$$\nabla f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\nabla f(x_0, y_0) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ:
Η ∇f δείχνει την κατεύθυνση γρηγορότερης αύξησης (η οποία είναι ίση με $\|\nabla f\|$)

Χρησιμοποιώντας την κλίση μπορούμε να υπολογίσουμε εφαπτόμενα επίπεδα των τυχαίων επιφανειών στον $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα: Να βρεθούν οι εξισώσεις εφαπτόμενου επιπέδου και κάθετης ευθείας στο σημείο $(-2,1,-3)$ της επιφάνειας $\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}=3$

Θέτουμε $f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+y^2+\frac{z^2}{9}$

$f_x=\frac{x}{2}$ $\quad f_y=2y$ $\quad f_z=\frac{2z}{9}$

$f_x(-2,1,-3)=-1$

$f_y=(-2,1,-3)=2$

$f_z=(-2,1,-3)=-\frac{6}{9}=-\frac{2}{3}$

Εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου:

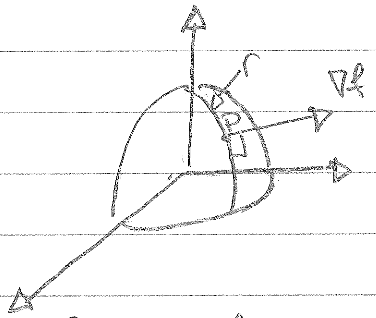
$$-1(x+2)+2(y-1)-\frac{2}{3}(z+3)=0$$

Κάθετη ευθεία στο P:

$$\frac{x+2}{-1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{-\frac{2}{3}}$$

$f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0) + f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0) + f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)$

Απόδειξη Θεωρήματος



Έστω $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη στην επιφάνεια που διέρχεται από το P

$r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

Έχουμε $f(x(t), y(t), z(t)) = k$.

$$\frac{df}{dt} = f\frac{dx}{dt} + f\frac{dy}{dt} + f\frac{dz}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow (f_x, f_y, f_z)\cdot\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}\right) = 0$$

$\Rightarrow \nabla f \, r'(t) = 0$

$\Rightarrow \nabla f \perp r'(t)$

Ειδικότερα στο P: $\nabla f(x_0,y_0,z_0) \perp r'(t_0)$
$\hookrightarrow$ εφαπτόμενη της καμπύλης r στο $P(x_0,y_0,z_0)$

$f(x,y,z)=k \rightsquigarrow$ εφαπτόμενο επίπεδο στο $P(x_0,y_0,z_0)$

Εξίσωση κάθετης ευθείας στην επιφάνεια που διέρχεται από το P:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0,z_0)} = \frac{y-y_0}{f_y(x_0,y_0,z_0)} = \frac{z-z_0}{f_z(x_0,y_0,z_0)}$$

No. Date

Π.x $f(x,y,z) = e^{xyz}$

$f_x = yz\,e^{xyz}$ $f_{xx} = (yz)^2 e^{xyz}$ $f_{xy} = ze^{xyz} + xz^2 e^{xyz}$

$f_y = xz\,e^{xyz}$ $f_{yy} = (xz)^2 e^{xyz}$

$f_z = xy\,e^{xyz}$

$$f_{yxz} = \frac{\partial f}{\partial z\,\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial z}\left(ze^{xyz} + xz^2 e^{xyz}\right)$$

$$= e^{xyz} + zxye^{xyz} + x^2y^2z^2e^{xyz}$$