

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Να δειχθεί ότι τα $(4, 5, 2)$, $(1, 7, 3)$ και $(2, 4, 5)$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.
2. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.
 - i) κέντρο $(7, 1, 1)$, ακτίνα 4,
 - ii) κέντρο $(1, 0, -1)$, διάμετρος 8,
 - iii) κέντρο $(-1, 3, 2)$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
 - iv) κέντρο $(2, -1, -3)$, εφάπτεται στο xy -επίπεδο.
3. Περιγράψτε την επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$.
4. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα για τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
 - i) $x^2 + y^2 = 25$
 - ii) $y^2 + z^2 = 25$
 - iii) $x^2 + z^2 = 25$
5. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
 - i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα x και το σημείο $(0, 1, 2)$.
 - ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα y και το σημείο $(1, 0, 2)$.
 - iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα z και διέρχεται από το $(1, 1, 0)$.
 - iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το $(1, 0, 1)$.
6. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;
7. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα.
 - i) $(1, -2, 2)$
 - ii) $(2, 2, -1)$
 - iii) $-i + 2j + 3k$
 - iv) $2i + 3j - k$
8. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{P_1P_2}$.
 - i) $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$,
 - ii) $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$.
9. Έστω $\vec{u} = 3i - k$, $\vec{v} = i - j + 2k$, $\vec{w} = 3j$. Να γίνουν οι πράξεις.
 - i) $\vec{w} - \vec{v}$
 - ii) $6\vec{u} + 4\vec{w}$
 - iii) $-\vec{v} - 2\vec{w}$
 - iv) $4(3\vec{u} + \vec{v})$
 - v) $-8(\vec{v} + \vec{w}) + 2\vec{u}$
 - vi) $3\vec{w} - (-\vec{v} - \vec{w})$
10. Να βρεθεί η νόρμα του \vec{v} .

- i) $\vec{v} = (1, -1)$
- ii) $\vec{v} = (-1, 2, 4)$
- iii) $\vec{v} = -3i + 2j + k$

11. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
- ii) Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.

12. Να βρεθεί διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.

- i) Αντίθετη κατεύθυνση από το $\vec{v} = (3, -4)$ και μέτρο το μισό του μέτρου του \vec{v} .
- ii) Μήκος $\sqrt{17}$ και κατεύθυνση ίδια με το $\vec{v} = (7, 0, -6)$.

13. Να βρεθεί διάνυσμα \vec{v} στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες. Με θ συμβολίζουμε τη γωνία του διανύσματος με τον άξονα Ox .

- i) $\|\vec{v}\| = 3, \theta = \pi/4$
- ii) $\|\vec{v}\| = 2, \theta = 90^\circ$

14. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιούν τη δοσμένη συνθήκη.

- i) Παράλληλα στην ευθεία $y = 3x + 2$.
- ii) Παράλληλα στην ευθεία $x + y = 4$.
- iii) Κάθετα στην ευθεία $y = -5x + 1$.

15. Έστω $\vec{r} = (x, y, z)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.

- i) $\|\vec{r}\| = 1$
- ii) $\|\vec{r}\| \leq 1$
- iii) $\|\vec{r}\| > 1$

16. Βρείτε αν τα διανύσματα σχηματίζουν οξεία, ορθή ή αμβλεία γωνία.

- i) $\vec{u} = 7i + 3j + 5k, \vec{v} = -8i + 4j + 2k$
- ii) $\vec{u} = 6i + j + 3k, \vec{v} = 4i - 6k$
- iii) $\vec{u} = (4, 1, 6), \vec{v} = (-3, 0, 2)$

17. Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(2, -1, 1), B(3, 2, -1)$ και $C(7, 0, -2)$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.

18. Να δείξετε ότι $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

19. i) Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το $i \times (i + j + k)$.

- ii) Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

20. Να βρεθεί το $\vec{u} \times \vec{v}$.

- i) $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-4, 1, 2)$
 ii) $\vec{u} = 3i + 2j - k, \vec{v} = -i - 3j + k$
- 21.** Να βρεθούν οι παρακάτω ποσότητες για τα διανύσματα $\vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = (0, 1, 7)$ και $\vec{w} = (1, 4, 5)$.
 i) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
 ii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
 iii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$
 iv) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$
- 22.** Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $A(0, -2, 1), B(1, -1, -2)$ και $C(-1, 1, 0)$.
- 23.** Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{u} = i - j + 2k$ και $\vec{v} = 3j + k$.
- 24.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $P(1, 5, -2), Q(0, 0, 0)$ και $R(3, 5, 1)$.
- 25.** Να βρεθεί το $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ για τα $\vec{u} = 2i - 3j + k, \vec{v} = 4i + j - 3k$ και $\vec{w} = j + 5k$.
- 26.** Να ελέγξετε αν τα διανύσματα είναι στο ίδιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τριπλό βαθμωτό γινόμενο.
 i) $\vec{u} = (1, -2, 1), \vec{v} = (3, 0, -2), \vec{w} = (5, -4, 0)$
 ii) $\vec{u} = 5i - 2j + k, \vec{v} = 4i - j + k, \vec{w} = i - j$
 iii) $\vec{u} = (4, -8, 1), \vec{v} = (2, 1, -2), \vec{w} = (3, -4, 12)$
- 27.** Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές $\vec{u} = 3i + 2j + k, \vec{v} = i + j + 2k, \vec{w} = i + 3j + 3k$.
 i) Να βρεθεί ο όγκος του.
 ii) Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα \vec{u} και \vec{w} .
 iii) Να βρεθεί η γωνία του \vec{u} με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα \vec{v} και \vec{w} .
- 28.** Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} για τα οποία ισχύει $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$;
- 29.** Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:
 i) που διέρχεται από τα σημεία $P_1(-1, 3, 5)$ και $P_2(-1, 3, 2)$,
 ii) που έχει διανυσματική εξίσωση $xi + yj + zk = k + t(i - j + k)$,
 iii) που διέρχεται από το $(-2, 0, 5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $x = 1 + 2t, y = 4 - t, z = 6 + 2t$,
 iv) που είναι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $(3, -4)$.
- 30.** Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$ να βρεθεί ένα σημείο της P και ένα διάνυσμα \vec{v} παράλληλο σε αυτήν.
- 31.** Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα xy, xz και yz της ευθείας $x = -2, y = 4 + 2t, z = -3 + t$.
- 32.** Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t, L_2: x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$ τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.
- 33.** Να εξετάσετε αν οι ευθείες $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t, L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$ είναι παράλληλες.

- 34.** Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t$, $L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$ ταυτίζονται.
- 35.** Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις.
- Διέρχεται από το σημείο $P(2, 6, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (1, 4, 2)$.
 - Διέρχεται από τα σημεία $(-2, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ και $(1, 0, -1)$.
 - Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο επίπεδο $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.
 - Διέρχεται από το $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία τομής των επιπέδων $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.
- 36.** Εξετάστε αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, κάθετα ή τίποτα από τα παραπάνω.
- $2x - 8y - 6x - 2 = 0$, $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
 - $3x - 2y + z = 1$, $4x + 5y - 2z = 4$
 - $x - y + 3z - 2 = 0$, $2x + z = 1$
- 37.** Εξετάστε αν η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται και αν ναι, προσδιορίστε την τομή τους.
- $x = t, y = t, z = t$, $3x - 2y + z - 5 = 0$
 - $x = 2 - t, y = 3 + t, z = t$, $2x + y + z = 1$
- 38.** Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας τομής των επιπέδων $x + 2y - 2z = 5$ και $6x - 3y + 2z = 8$.
- 39.** Δείξτε ότι οι ευθείες $x = -2 + t, y = 3 + 2t, z = 4 - t$ και $x = 3 - t, y = 4 - 2t, z = t$ είναι παράλληλες και βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.
- 40.** Να δείξετε ότι τα επίπεδα $-2x + y + z = 0$ και $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ είναι παράλληλα και να βρείτε την απόστασή τους.
- 41.** Να δείξετε ότι οι ευθείες $x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$ είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόστασή τους.
- 42.** Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο $(2, 1, -3)$ που εφάπτεται στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.
- 43.** Προσδιορίστε την τετραγωνική επιφάνεια.
- $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
 - $z = \frac{y^2}{25} - x^2$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 16$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
 - $4z = x^2 + 4y^2$
 - $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
- 44.** Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές.
- $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ από καρτεσιανές σε κυλινδρικές,
 - $(1, \sqrt{3}, -2)$ από καρτεσιανές σε σφαιρικές,
 - $(5, \pi/6, \pi/4)$ από σφαιρικές σε καρτεσιανές,
 - $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$ από κυλινδρικές σε καρτεσιανές.

45. Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις σε καρτεσιανές και περιγράψτε την επιφάνεια που εκφράζουν. Σε κάθε περίπτωση δίνεται το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

- i) $r = 3$, κυλινδρικές,
- ii) $r = 4 \sin \theta$, κυλινδρικές,
- iii) $r^2 + z^2 = 1$, κυλινδρικές,
- iv) $\phi = \pi/4$, σφαιρικές,
- v) $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$, σφαιρικές.

46. Δίνονται παρακάτω οι καρτεσιανές εξισώσεις επιφανειών. Να μετατραπούν σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

- i) $z = 3x^2 + 3y^2$,
- ii) $2x + 3y + 4z = 1$.