

ΜΑΣ026

Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Σ. Δημόπουλος και Σ. Παπαπαναγίδης

# Κεφάλαιο 6: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

6.1 Διανυσματικά Πεδία

6.2 Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

6.3 Συντηρητικά Πεδία

6.4 Θεώρημα Green

Η μελέτη των ροών γίνεται μέσω διανυσματικών πεδίων και των Θεωρημάτων του Διανυσματικού Λογισμού.

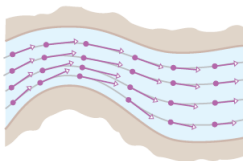
Εφαρμογές:

- Ρευστοδυναμική
- Φυσική Αερίων
- Ηλεκτρομαγνητισμός

## Διανυσματικά Πεδία

- Περιγραφή κίνησης ρευστού στο επίπεδο
- Περιγραφή Ηλεκτρομαγνητικού πεδίου στο χώρο

Σχηματικά εκφράζεται τοποθετώντας ένα διάνυσμα σε κάθε σημείο του επιπέδου/χώρου



## Ορισμός

Τα διανυσματικά πεδία είναι συναρτήσεις της μορφής  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  και  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , δηλ. απεικονίζουν κάθε σημείο του επιπέδου/χώρου σε ένα διάνυσμα του επιπέδου/χώρου.

Εάν  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  γράφουμε

$$F(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \text{ ή } F(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j$$

Εάν  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  γράφουμε

$$F(x, y, z) = (f(x, y, z), g(x, y, z), h(x, y, z))$$

ή

$$F(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$$

Γραφικές παραστάσεις κυρίως με τη βοήθεια λογισμικού.

## Παράδειγμα

Αν  $f(x, y)$  συνάρτηση από το  $\mathbb{R}^2$  στο  $\mathbb{R}$  τότε

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)i + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)j$$

είναι διανυσματικό πεδίο στο  $\mathbb{R}^2$ . Ομοίως για  $f(x, y, z)$ .

Θα δούμε από τα πιο κάτω Θεωρήματα ότι διανυσματικά πεδία της μορφής  $\nabla f$  όπου  $f$  μιια βαθμωτή συνάρτηση έχουν καλύτερη συμπεριφορά.

## Ορισμός

Ένα διανυσματικό πεδίο  $F$  ονομάζεται συντηρητικό αν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση  $\phi$  τέτοια ώστε  $F = \nabla \phi$ . Η συνάρτηση  $\phi$  καλείται συνάρτηση δυναμικού του  $F$ .

## Παράδειγμα

Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$F(\vec{r}) = \frac{c}{\|\vec{r}\|^3} \vec{r}, c \in \mathbb{R}, \vec{r} = (x, y, z)$$

είναι συντηρητικό.

(Εάν  $c = GmM$  τότε το πιο πάνω διανυσματικό πεδίο περιγράφει τον νόμο παγκόσμιας έλξης του **Newton** .)



## Ορισμός

Εάν  $F = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$  διανυσματικό πεδίο ορίζουμε ως απόκλιση του  $F$  το

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial h}{\partial z}$$

και στροβιλισμό του  $F$  το

$$\operatorname{curl} F = \left( \frac{\partial h}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial z} \right) i + \left( \frac{\partial f}{\partial z} - \frac{\partial h}{\partial x} \right) j + \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) k$$

## Μνημονικός Κανόνας

$$\operatorname{curl} F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f & g & h \end{vmatrix}$$

## Παράδειγμα

$$F(x, y, z) = x^2yi + 2y^3zj + 3z k$$

# Τελεστής **Del** και Λαπλασιανός Τελεστής

## Τελεστής Del

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k$$

Έτσι έχουμε

$$\operatorname{div} F = \nabla \cdot F \text{ και } \operatorname{curl} F = \nabla \times F$$

## Λαπλασιανός Τελεστής

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

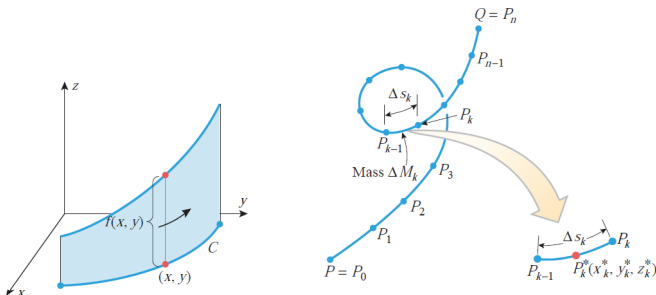
Προφανώς, για  $\phi(x, y, z)$

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \operatorname{div}(\nabla \phi)$$

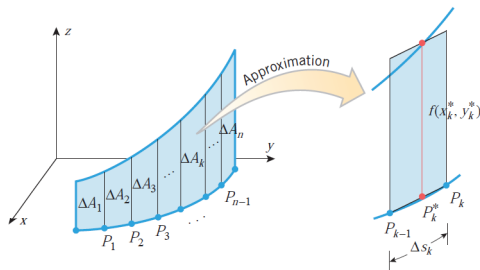
Η εξίσωση  $\nabla^2 \phi = 0$  καλείται εξίσωση Laplace.

## Επικαμπύλια Ολοκληρώματα

Τα επικαμπύλια ολοκληρώματα είναι γενίκευση ολοκληρωμάτων της μορφής  $\int_a^b f(x) dx$ . Γενικεύουμε ολοκληρώνοντας πάνω σε τυχαία καμπύλη στο επίπεδο ή στο χώρο (Αντί σε διάστημα της μορφής  $[a, b]$ ).



# Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα ως προς μήκος καμπύλης - Διαισθητικά





## Ορισμός

Μία καμπύλη  $C$  με παραμέτρηση  $\vec{r}(t)$  είναι λεία εάν είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο.

## Ορισμός

Έστω λεία καμπύλη  $C$  με παραμέτρηση  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  στο επίπεδο και  $f(x, y)$  συνάρτηση. Τότε ορίζουμε ως επικαμπύλιο ολοκλήρωμα της  $f$  κατά μήκος της καμπύλης  $C$

$$\int_C f(x, y) ds = \int_a^b f(x, y) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$

Αντίστοιχα, εάν  $C$  καμπύλη στο χώρο και  $f(x, y, z)$  συνάρτηση στο χώρο έχουμε

$$\int_C f(x, y, z) ds = \int_a^b f(x, y, z) ds = \int_a^b f(\vec{r}(t)) \|\vec{r}'(t)\| dt.$$



## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το

$$\int_C (1 + xy^2) ds$$

στις πιο κάτω περιπτώσεις

- $C : \vec{r}(t) = ti + 2tj, 0 \leq t \leq 1$
- $C : \vec{r}(t) = (1 - t)i + (2 - 2t)j, 0 \leq t \leq 1$



## Θέωρημα

Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης  $f : \mathbb{R}^2$  ή  $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  κατά μήκος καμπύλης  $C$  είναι ανεξάρτητο του προσανατολισμού της  $C$ .

Αυτό επαληθεύεται στο πιο πάνω παράδειγμα.

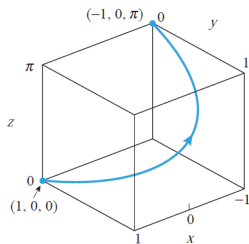
## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το

$$\int_C (xy + z^3) ds$$

κατά μήκος της καμπύλης  $C$  με παραμέτρηση

$$x = \cos t, y = \sin t, z = t (0 \leq t \leq \pi)$$





- 

$$\int_C \lambda f \, ds = \lambda \int_C f \, ds$$

- 

$$\int_C (f \pm g) \, ds = \int_C f \, ds \pm \int_C g \, ds$$

- Εάν η καμπύλη  $C$  μπορεί να διαμεριστεί σε καμπύλες  $C_1$  και  $C_2$ , τότε

$$\int_C f \, ds = \int_{C_1} f \, ds + \int_{C_2} f \, ds$$

Παρατήρηση

$$\int_C 1 \, ds = \text{Μήκος Καμπύλης } C$$

## Επικαμπύλια ολοκληρώματα ως προς $x, y, z$

Έστω λεία καμπύλη  $C$  με παραμέτρηση  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$  στο επίπεδο και  $f(x, y, z)$  συνάρτηση. Τότε

- $$\int_C f(x, y, z) dx = \int_a^b f(\vec{r}(t)) x'(t) dt.$$

- $$\int_C f(x, y, z) dy = \int_a^b f(\vec{r}(t)) y'(t) dt.$$

- $$\int_C f(x, y, z) dz = \int_a^b f(\vec{r}(t)) z'(t) dt.$$

# Ολοκλήρωση Διανυσματικού πεδίου κατά μήκος καμπύλης

## Ορισμός

Εάν  $F(x, y, z) = f(x, y, z)i + g(x, y, z)j + h(x, y, z)k$  συνεχές διανυσματικό πεδίο και  $C$  λεία καμπύλη στο χώρο με παραμέτρηση  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ , ορίζουμε ως επυκαμπύλιο ολοκλήρωμα του  $F$  κατά μήκος της  $C$

$$\begin{aligned}\int_C F \cdot dr &= \int_C f(x, y, z) dx + g(x, y, z) dy + h(x, y, z) dz \\ &= \int_a^b F(\vec{r}(t)) \cdot \vec{r}'(t) dt.\end{aligned}$$

Αντίστοιχα, στις 2 διαστάσεις και για διανυσματικά πεδία  $F(x, y, z) = f(x, y)i + g(x, y)j$ .



## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  εάν  $\mathbf{F}(x, y) = \cos x \mathbf{i} + \sin y \mathbf{j}$  στις πιο κάτω περιπτώσεις

- $C : \vec{r}(t) = -\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + t\mathbf{j}, 1 \leq t \leq 2$
- $C : \vec{r}(t) = t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}, -1 \leq t \leq 2$



Ερμηνεία: Το  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  εκφράζει το έργο του διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  πάνω σε σωματίδιο που κινείται κατά μήκος της καμπύλης  $\mathbf{C}$ .

Αν  $\mathbf{C}$  παραμετρική καμπύλη στο επίπεδο/χώρο, συμβολίζουμε με  $-\mathbf{C}$  την παραμετρική καμπύλη που αποτελείται από τα ίδια σημεία και με αντίθετο προσανατολισμό.

Έχουμε δει ότι εάν  $f$  βαθμωτή συνάρτηση τότε

$$\int_C f \, ds = \int_{-\mathbf{C}} f \, ds$$

Όμως, εάν  $\mathbf{F}$  διανυσματικό πεδίο τότε

$$\boxed{\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{-\mathbf{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}$$

## Παράδειγμα

Έστω  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα που ενώνει τα σημεία  $(0,0)$  και  $(1,2)$  και  $F(x,y) = xi + 3xyj$ .



Εάν  $C$  δεν είναι λεία καμπύλη αλλά μπορεί να γραφτεί σαν ένωση ξένων μεταξύ τους λείων καμπυλών  $C_1, C_2, \dots, C_n$  τότε

$$\int_C F \cdot dr = \int_{C_1} F \cdot dr + \int_{C_2} F \cdot dr + \dots + \int_{C_n} F \cdot dr$$

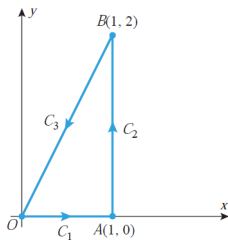
Τέτοιες καμπύλες ονομάζονται κατά τμήματα κανονικές.

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το

$$\int_C x^2 y \, dx + x \, dy$$

όπου  $C$  το τρίγωνο του σχήματος.







## Συντηρητικά Πεδία

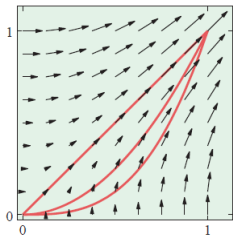
Η παραμετρική καμπύλη  $C$  του ολοκληρώματος  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  λέγεται διαδρομή (ολοκλήρωση).

Ερώτηση: Πως επηρεάζει η διαδρομή την τιμή του ολοκληρώματος;

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το  $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$  εάν  $\mathbf{F}(x, y) = yi + xj$ ,  $C$  διαδρομή που ξεκινάει από το σημείο  $(0,0)$  και καταλήγει στο σημείο  $(1,1)$ , και

- $C : y = x$  δηλ.  $\vec{r}(t) = (t, t), 0 \leq t \leq 1$
- $C : y = x^2$  δηλ.  $\vec{r}(t) = (t, t^2), 0 \leq t \leq 1$
- $C : y = x^3$  δηλ.  $\vec{r}(t) = (t, t^3), 0 \leq t \leq 1$





Τα πιο πάνω ολοκληρώματα είναι ίσα. Αυτό προκύπτει από το πιο κάτω θεώρημα.

Υπενθύμιση: Εάν  $F(x)$  αντιπαράγωγος συνάρτησης  $f(x)$  τότε

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a).$$

Δηλαδή, το ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα του διαστήματος.

## Θέωρημα

(Θεμελιώδες Ολοκλήρωμα για επικαμπύλια ολοκληρώματα)

Έστω  $F(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j$  συντηρητικό διανυσματικό πεδίο σε ανοικτό σύνολο  $D$  που περιέχει τα σημεία  $(x_0, y_0)$ , και  $(x_1, y_1)$  και  $f(x, y)$  και  $g(x, y)$  συνεχείς στο  $D$ . Εάν  $F = \nabla\phi(x, y)$  και  $C$  κατά τμήματα κανονική καμπύλη που περιέχεται εντός του  $D$  που ξεκινάει από το σημείο  $(x_0, y_0)$  και καταλήγει στο  $(x_1, y_1)$  τότε

$$\int_C F(x, y) \cdot dr = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$

ή

$$\int_C \nabla\phi(x, y) \cdot dr = \phi(x_1, y_1) - \phi(x_0, y_0)$$



## Παράδειγμα

Επιβεβαιώστε ότι το διανυσματικό πεδίο  $F(x, y) = yi + xj$  είναι συντηρητικό ως κλίση της  $\phi(x, y) = xy$  και υπολογίστε το ολοκλήρωμα στο πιο πάνω παράδειγμα με τη βοήθεια του θεωρήματος.



Το θεμελιώδες θεώρημα ουσιαστικά λέει ότι στα συντηρητικά διανυσματικά πεδία υφίσταται ανεξαρτησία διαδρομής. Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα της διαδρομής. Για αυτό το λόγο μπορούμε να γράφουμε

$$\int_{(x_0, y_0)}^{(x_1, y_1)} F(x, y) \cdot dr$$

Εάν το αρχικό σημείο είναι το ίδιο με το τελικό τότε

$$\int_C F(x, y) \cdot dr = 0.$$

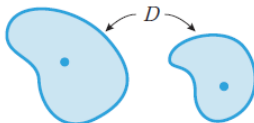
Το επόμενο θεώρημα λέει ότι υπό συνθήκες ισχύει και το αντίστροφο.

## Ορισμός

Ένα υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  ή του  $\mathbb{R}^3$  είναι συνεκτικό εάν δεν μπορεί να γραφεί ως ένωση δύο μη κενών ανοικτών συνόλων. Ισοδύναμα, κάθε ζεύγος σημείων  $(x_0, y_0)$  και  $(x_1, y_1)$  του  $D$  μπορεί να ενωθεί από κατά τμήματα κανονική καμπύλη  $C$  που περιέχεται στο  $D$  (συνεκτικό κατά δρόμους).



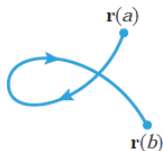
Connected



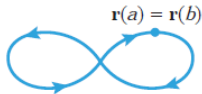
Not connected

## Ορισμός

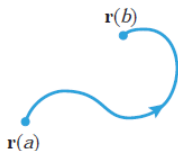
Έστω παραμετρική καμπύλη  $\vec{r}(t)$ ,  $a \leq t \leq b$ . Η καμπύλη λέγεται απλή αν δεν τέμνει τον εαυτό της εντός των δύο άκρων της. Δηλ, δεν υπάρχουν  $a \leq t_1 < t_2 \leq b$  τέτοια ώστε  $\vec{r}(t_1) = \vec{r}(t_2)$  εκτός αν  $t_1 = a$  και  $t_2 = b$ . Εάν  $\vec{r}(a) = \vec{r}(b)$  τότε η καμπύλη λέγεται κλειστή.



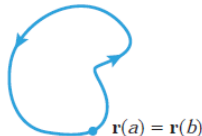
Not simple and  
not closed



Closed but  
not simple



Simple but  
not closed



Simple and  
closed

## Ορισμός

Ένα συνεκτικό υποσύνολο  $D$  του  $\mathbb{R}^2$  λέγεται απλά συνεκτικό εάν δεν υπάρχει απλή κλειστή καμπύλη εντός του  $D$  που να περιέχει στο εσωτερικό της σημεία που δεν ανήκουν στο  $D$ . Διαισθητικά το  $D$  δεν περιέχει καθόλου τρύπες.



Simply  
connected



Multiply  
connected

## Θέωρημα

Έστω  $f(x, y), g(x, y)$  συνεχείς σε ανοικτή συνεκτική περιοχή  $D \subset \mathbb{R}^2$ .  
Τότε τα πιο κάτω είναι ισοδύναμα:

- $F(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j$  είναι συνεχές συντηρητικό διανυσματικό πεδίο στο  $D$ .
- $\int_C F \cdot dr = 0$  για κάθε κατά τμήματα κανονική και κλειστή καμπύλη  $C$  εντός του  $D$ .
- $\int_C F \cdot dr$  δεν εξαρτάται από την πορεία της οποιασδήποτε κατά τμήματα κανονικής και κλειστής καμπύλης  $C$  εντός του  $D$ . Εξαρτάται μόνο από το αρχικό και τελικό σημείο.

## Θέωρημα (Κριτήριο Συντηρητικών Πεδίων)

Έστω  $f(x, y)$ ,  $g(x, y)$  συνεχείς και με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτή περιοχή  $D$ . Εάν  $F(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j$  είναι συντηρητικό διανυσματικό πεδίο στη  $D$  τότε

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}$$

για κάθε σημείο της  $D$ . Επιπλέον, εάν το  $D$  είναι απλά συνεκτικό και ισχύει η πιο πάνω ισότητα για κάθε σημείο του  $D$ , τότε το πεδίο  $F(x, y) = f(x, y)i + g(x, y)j$  είναι συντηρητικό.

## Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν το διανυσματικό πεδίο  $F(x, y) = (y + x)i + (y - x)j$  είναι συντηρητικό.

## Παράδειγμα

Ναδειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο  $F(x, y) = 2xy^3i + (1 + 3x^2y^2)j$  είναι συντηρητικό και να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού. Στη συνέχεια να υπολογιστεί το

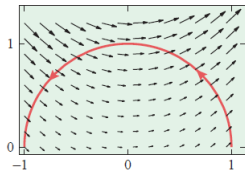
$$\int_{(1,4)}^{(3,1)} 2xy^3 dx + (1 + 3x^2y^2) dy$$





## Παράδειγμα

Ναδειχθεί ότι το διανυσματικό πεδίο  $F(x, y) = e^y i + x e^y j$  είναι συντηρητικό και να υπολογιστεί το έργο του διανυσματικού πεδίου πάνω σε σωματίδιο που κινείται σε ημικυκλική καμπύλη ξεκινώντας από το σημείο  $(1, 0)$  και καταλήγοντας στο σημείο  $(-1, 0)$ .





Τα πιο πάνω θεωρήματα ισχύουν και για διανυσματικά πεδία  $F(x, y, z)$  στο  $\mathbb{R}^3$ . Το κριτήριο για συντηρητικά πεδία γίνεται

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial z} = \frac{\partial h}{\partial y}$$

Δηλαδή,

$$\operatorname{curl} F = \vec{0}$$

## Θεώρημα *Green*

Για το Θεώρημα **Green** θα θεωρήσουμε ένα απλά συνεκτικό χωρίο  $R$  με σύνορο  $C$  το οποίο είναι μία απλή, κλειστή, τμηματικά κανονική καμπύλη με αριστερόστροφη φορά. Για δική μας ευκολία, θα αποκαλούμε χωρία με τα πιο πάνω χαρακτηριστικά **χωρία Green**.

### Θέωρημα (Θεώρημα Green )

Έστω χωρίο **Green**  $R$  με σύνορο  $C$  και  $f(x, y), g(x, y)$  συνεχείς και με συνεχείς μερικές παραγώγους στο  $R$ . Τότε

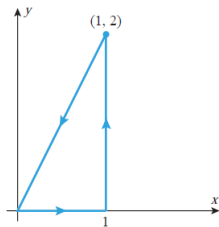
$$\int_C f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA$$

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C x^2 y \, dx + x \, dy$$

όπου  $C$  η πιο κάτω καμπύλη







Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη

$$\oint_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

Επικαμπύλιο Ολοκλήρωμα σε κλειστή καμπύλη με κατεύθυνση

$$\oint_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

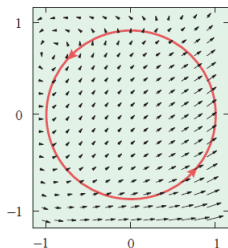
$$\oint_C f(x, y) dx + g(x, y) dy$$

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το έργο που γίνεται από δ. πεδίο

$$F(x, y) = (e^x - y^3)i + (\cos y + x^3)j$$

πάνω σε σωματίδιο που κινείται σε κύκλο  $x^2 + y^2 = 1$  με αριστερόστροφη κατεύθυνση.





## Υπολογισμός Εμβαδού με το Θεώρημα **Green**

Έστω χωρίο **Green**  $R$  με σύνορο  $C$  και εμβαδόν  $E$ . Τότε εάν

- $f(x, y) = 0, g(x, y) = x$

$$\oint_C x \, dy = \iint_R dA = E$$

- $f(x, y) = -y, g(x, y) = 0$

$$-\oint_C y \, dx = \iint_R dA = E$$

Από τα πιο πάνω προκύπτει επίσης

$$E = \frac{1}{2} \oint_C -y \, dx + x \, dy$$

## Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το εμβαδόν ελλειπτικού χωρίου με εξίσωση

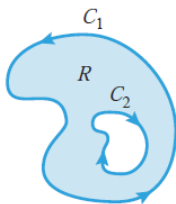
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

με την βοήθεια επικαμπυλίου ολοκληρώματος.



## Θεώρημα **Green** σε μη απλά συνεκτικά χωρία

Θα θεωρήσουμε χωρίο  $R$  τα οποίο είναι συνεκτικό αλλά όχι απλά συνεκτικό. Δηλαδή το χωρίο μας θα έχει τρύπες. Επιπλέον, θεωρούμε ότι ο προσανατολισμός του συνόρου του χωρίου θα είναι τέτοιος ώστε όταν κινούμαστε πάνω στο σύνορο, το χωρίο να βρίσκεται πάντα στα αριστερά μας. Αυτό συνεπάγεται ότι το εξωτερικό σύνορο θα έχει αριστερόστροφη κατεύθυνση ενώ το εσωτερικό, το οποίο θα περικλείει τρύπες, θα έχει δεξιόστροφη κατεύθυνση. Εάν ικανοποιείται η πιο πάνω συνθήκη για το σύνορο του  $R$  τότε λεμε ότι το σύνορο έχει θετικό προσανατολισμό.



## Θέωρημα

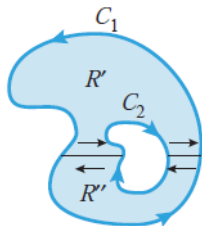
Έστω συνεκτικό χωρίο  $R$  με  $(n - 1)$  τρύπες και εξωτερικό και εσωτερικά σύνορα  $C_1, \dots, C_n$  με θετικό προσανατολισμο. Εάν  $f(x, y), g(x, y)$  συνεχείς και με συνεχείς μερικές παραγώγους στο  $R$  τότε

$$\begin{aligned} \int_{C_1} f(x, y) dx + g(x, y) dy + \dots + \int_{C_n} f(x, y) dx + g(x, y) dy \\ = \iint_R \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA \end{aligned}$$



## Απόδειξη όταν το χωρίο έχει μία τρύπα

$$\int_{C_1} f(x, y) dx + g(x, y) dy + \int_{C_2} f(x, y) dx + g(x, y) dy = \iint_R \left( \frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) dA$$



## Παράδειγμα

Εάν  $C$  τμηματικά κανονική, απλή και κλειστή καμπύλη με αριστερόστροφη φορά να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\oint_C \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2}$$

εάν

- Το εσωτερικό της  $C$  περιέχει την αρχή των αξόνων.
- Το εσωτερικό της  $C$  δεν περιέχει την αρχή των αξόνων.

