ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Εαρινό Εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1. i) Να μετατρέψετε τον παρακάτω πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 3 & 5 & 7 & 9 \\ 5 & 7 & 9 & 1 \end{bmatrix}$$

ii) Αν ο πίνακας A είναι ο επαυξημένος πίνακας ενός γραμμικού συστήματος είναι το σύστημα συμβιβαστό; Αν ναι, βρείτε την γενική λύση.

2. Να βρεθεί (αν υπάρχει) η λύση για τα ακόλουθα γραμμικά συστήματα με μέθοδο απαλοιφής Gauss ή Gauss-Jordan.

i) $$\begin{aligned} x_2 + 4x_3 &= -5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 &= -2 \\ 3x_1 + 7x_2 + 7x_3 &= 6 \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} x_1 - \quad\quad 3x_3 &= 8 \\ 2x_1 + 2x_2 + 9x_3 &= 7 \\ x_2 + 5x_3 &= -2 \end{aligned}$$

iii) $$\begin{aligned} x - y + 2z - w &= -1 \\ 2x + y - 2z - 2w &= -2 \\ -x + 2y - 4z + w &= 1 \\ 3x \quad\quad\quad - 3w &= -3 \end{aligned}$$

3. Είναι το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 2 \\ x_2 - 3x_4 &= 3 \\ -2x_2 + 3x_3 + 2x_4 &= 1 \\ 3x_1 + 7x_4 &= -5 \end{aligned}$$

συμβιβαστό;

4. Βρείτε μια αλγεβρική σχέση μεταξύ των g, h και k έτσι ώστε το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 + 7x_3 &= g \\ 3x_2 - 5x_3 &= h \\ -2x_1 + 5x_2 - 9x_3 &= k \end{aligned}$$

να είναι μη συμβιβαστό.

5. Να βρείτε τις τιμές του a για τις οποίες το σύστημα δεν έχει λύση, έχει ακριβώς μία λύση ή έχει άπειρες λύσεις.

$$\begin{aligned} x + 2y - 3z &= 4 \\ 3x - y + 5z &= 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z &= a + 2 \end{aligned}$$

6. Να βρεθεί η λύση (αν υπάρχει) για το σύστημα που έχει επαυξημένο πίνακα τον ακόλουθο.

$$A = \left[\begin{array}{rrrrr|r} 1 & -3 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 9 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

7. Προσδιορίστε αν τα παρακάτω συστήματα έχουν μη τετριμμένες λύσεις.

i) $\begin{aligned} 2x_1 - 5x_2 + 8x_3 &= 0 \\ -2x_1 - 7x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 7x_3 &= 0 \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} -3x_1 + 5x_2 - 7x_3 &= 0 \\ -6x_1 + 7x_2 + x_3 &= 0 \end{aligned}$

8. Βρείτε το σύνολο λύσεων των παρακάτω συστημάτων.

i) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 0 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -3x_2 - 6x_3 &= 0 \end{aligned}$

ii) $\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ -4x_1 - 9x_2 + 2x_3 &= -1 \\ -3x_2 - 6x_3 &= -3 \end{aligned}$

9. Δίνονται οι διαστάσεις των παρακάτω πέντε πινάκων:

$$\begin{array}{ccccc} A & B & C & D & E \\ (4\times 5) & (4\times 5) & (5\times 2) & (4\times 2) & (5\times 4) \end{array}$$

Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πράξεις ορίζονται. Αν ναι, γράψτε τις διαστάσεις του πίνακα που προκύπτει.

i) BA ii) $AC + D$ iii) $AE + B$ iv) $AB + B$

v) $E(A + B)$ vi) $E(AC)$ vii) EA viii) $(A + E)D$

10. Δίνονται οι παρακάτω πίνακες:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix},\ C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix},\ D = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix},\ E = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Να υπολογίσετε τους παρακάτω πίνακες (στις περιπτώσεις που ορίζονται).

i) $D + E$ ii) $D - E$ iii) $5A$ iv) $-7C$

v) $2B - C$ vi) $4E - 2D$ vii) $-3(D + 2E)$ viii) $A - A$

ix) AB x) BA xi) $(3E)D$ xii) $(AB)C$

11. Να βρεθούν οι αριθμοί a, b, c, d ώστε να ισχύει η παρακάτω ισότητα.

$$\begin{bmatrix} a & 3 \\ -1 & a + b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & d - 2c \\ d + 2c & -2 \end{bmatrix}$$

12. Σε καθεμία από τις παρακάτω περιπτώσεις, να προσδιορίσετε τον 4×4 πίνακα (a_{ij}) που ικανοποιεί την ζητούμενη συνθήκη.

i) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i \neq j$

ii) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i > j$

iii) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $i < j$

iv) $a_{ij} = 0$ μόνο όταν $|i - j| < 1$

13. Ελέγξτε κατά πόσον οι παρακάτω πίνακες είναι συμμετρικοί.

i) $\begin{bmatrix} -8 & -8 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ iii) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 5 & 1 \\ 3 & 1 & 7 \end{bmatrix}$

14. Να βρεθεί το $a \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ a+5 & -1 \end{bmatrix}$ να είναι συμμετρικός.

15. Αν ο A είναι τετραγωνικός πίνακας, να δείξετε τα παρακάτω.

i) Οι πίνακες AA^T και $A + A^T$ είναι συμμετρικοί.

ii) Ο πίνακας $A - A^T$ είναι αντισυμμετρικός.

16. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων.

i) $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ ii) $B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ iii) $C = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$

17. Να δείξετε ότι αν για τον αντιστρέψιμο τετραγωνικό πίνακα A ισχύει $A^2 - 3A + I = 0$, τότε $A^{-1} = 3I - A$.

18. Αν A, B και C είναι τρεις $n \times n$ αντιστρέψιμοι πίνακες, έχει η εξίσωση

$$C^{-1}(A + X)B^{-1} = I$$

λύση X; Αν ναι, βρείτε το X.

19. Έστω P αντιστρέψιμος $n \times n$ πίνακας και $A = PBP^{-1}$. Να λύσετε ως προς B.

20. Απλοποιήστε τις παρακάτω εκφράσεις.

i) $(AB)^{-1}(AC^{-1})(D^{-1}C^{-1})^{-1}D^{-1}$

ii) $(AC^{-1})^{-1}(AC^{-1})(AC^{-1})^{-1}AD^{-1}$.

21. Να μετατραπούν οι πιο κάτω πίνακες σε ανηγμένη κλιμακωτή μορφή.

i) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 5 & 4 & -13 & 2 \\ 2 & 2 & 3 & -4 & 7 \\ 3 & 7 & 7 & -17 & 4 \end{bmatrix}$

22. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω πίνακες είναι αντιστρέψιμοι κι αν ναι, βρείτε τον αντίστροφο τους.

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}$ ii) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

iii) $\begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ -3 & -7 & 0 \\ 8 & 5 & -1 \end{bmatrix}$ iv) $\begin{bmatrix} 0 & 3 & -5 \\ 1 & 0 & 2 \\ -4 & -9 & 7 \end{bmatrix}$

v) $\begin{bmatrix} -1 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -4 & 2 & -9 \end{bmatrix}$ vi) $\begin{bmatrix} 2 & -4 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -4 & -5 \end{bmatrix}$

23. Να βρεθεί το $c \in \mathbb{R}$ ώστε ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} c & c & c \\ 1 & c & c \\ 1 & 1 & c \end{bmatrix}$ να είναι αντιστρέψιμος.

24. Να λυθούν τα παρακάτω συστήματα με τη μέθοδο του αντιστρόφου πίνακα.

i) $$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -1 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 3 \end{aligned}$$

ii) $$\begin{aligned} 5x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 2 \\ x_2 + x_3 &= 5 \end{aligned}$$