Γραμμική Ανεξαρτησία

Ορισμός

Ένα σύνολο διανυσμάτων $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ του $\mathbb{R}^n$ λέγεται

- **γραμμικά ανεξάρτητο** αν η εξίσωση

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbb{O}$$

  έχει μοναδική λύση την τετριμμένη, δηλαδή $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.
- **γραμμικά εξαρτημένο** αν δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητο, δηλαδή υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n$ όχι όλα ίσα με μηδέν ώστε να ικανοποιούν την εξίσωση

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_n\mathbf{v}_n = \mathbb{O}.$$

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{w} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$. Να ελέγξετε αν τα σύνολα $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$ και $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{w}\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Θεώρημα

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$.

1. *Το* $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *είναι γραμμικά ανεξάρτητο.*
2. *Η εξίσωση* $x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 + \ldots + x_m\mathbf{v}_m = \mathbb{O}$ *έχει μόνο την τετριμμένη λύση.*
3. *Το γραμμικό σύστημα* $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ *έχει μόνο την τετριμμένη λύση (*A *ο πίνακας με στήλες* $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$*).*
4. $\mathrm{Nul}(A) = \{\mathbb{O}\}$

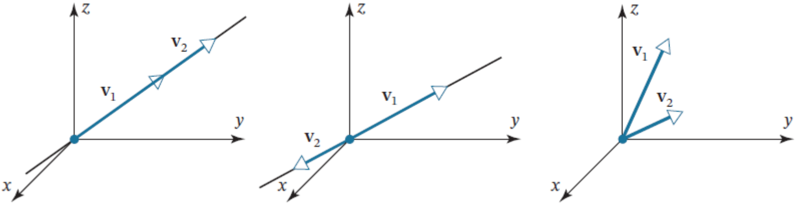
Θεώρημα

Οι στήλες ενός πίνακας A *είναι γραμμικά ανεξάρτητες αν και μόνο αν το γραμμικό σύστημα* $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ *έχει μόνο την τετριμμένη λύση.*

Παράδειγμα

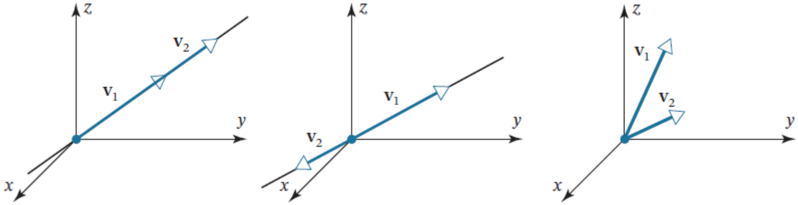
Προσδιορίστε αν το $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο, όπου
$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 6 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.



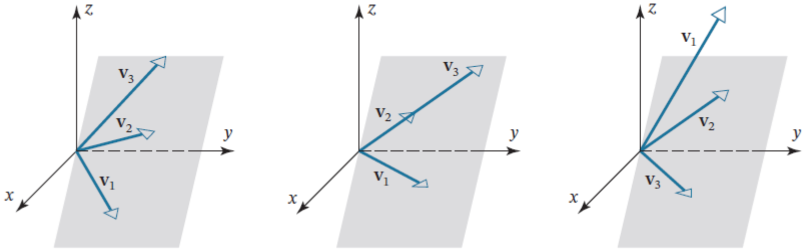
Γεωμετρική ερμηνεία

Δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν το ένα είναι πολλαπλάσιο του άλλου.



Γεωμετρική ερμηνεία

Δύο διανύσματα $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν το ένα βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.



Θεώρημα

Έστω $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ *σύνολο διανυσμάτων του* $\mathbb{R}^n$. *Αν* $r > n$ *τότε το σύνολο είναι γραμμικά εξαρτημένο.*

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Επαληθεύστε το θεώρημα για τα διανύσματα

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Παρατήρηση

Αν το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ περιέχει το μηδενικό διάνυσμα, τότε είναι γραμμικά εξαρτημένο.

Παρατήρηση

Αν το σύνολο $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r\}$ είναι γραμμικά εξαρτημένο, τότε υπάρχει i ώστε $\mathbf{v}_i \in \text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_{i-1}, \mathbf{v}_{i+1}, \ldots \mathbf{v}_r\}$.