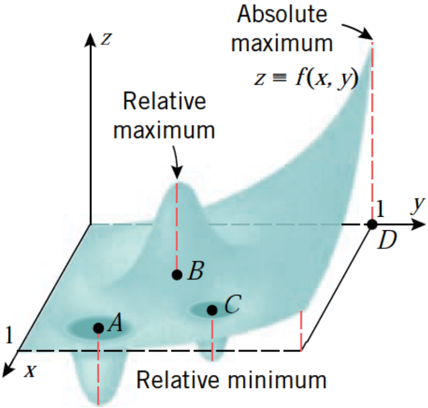
4.8 Ελάχιστα και Μέγιστα



Ορισμός

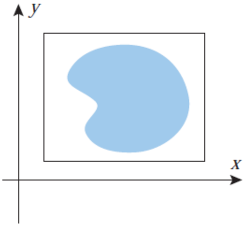
Έστω συνάρτηση $f(x,y)$ και (x_0,y_0) σημείο στο πεδίο ορισμού της.

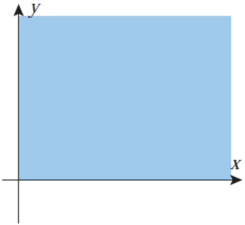
- Η f έχει **τοπικό μέγιστο** στο (x_0,y_0) αν υπάρχει δίσκος με κέντρο το (x_0,y_0) ώστε $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ για κάθε σημείο (x,y) του δίσκου.
- Η f έχει **ολικό μέγιστο** στο (x_0,y_0) αν $f(x,y) \leqslant f(x_0,y_0)$ για κάθε σημείο (x,y) του πεδίο ορισμού της.
- Η f έχει **τοπικό ελάχιστο** στο (x_0,y_0) αν υπάρχει δίσκος με κέντρο το (x_0,y_0) ώστε $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$ για κάθε σημείο (x,y) του δίσκου.
- Η f έχει **ολικό ελάχιστο** στο (x_0,y_0) αν $f(x,y) \geqslant f(x_0,y_0)$ για κάθε σημείο (x,y) του πεδίου ορισμού της.

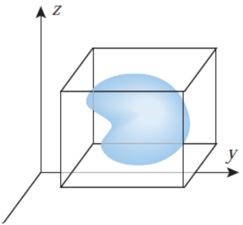
- Τοπικό ακρότατο = Τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο
- Ολικό ακρότατο = Ολικό μέγιστο ή ελάχιστο

Ορισμός

- Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ λέγεται **φραγμένο** αν υπάρχει ορθογώνιο της μορφής $[a, b] \times [c, d]$ που το περιέχει.
- Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ λέγεται **φραγμένο** αν υπάρχει παραλληλεπίπεδο της μορφής $[a, b] \times [c, d] \times [k, l]$ που το περιέχει.

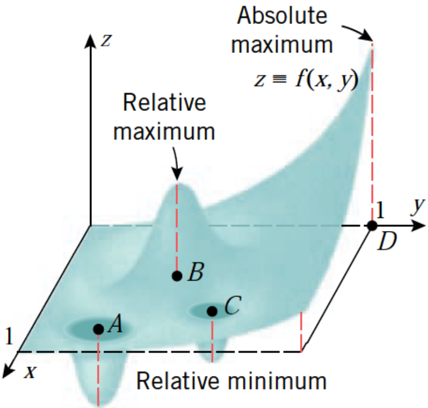






Θεώρημα (Μέγιστης κι Ελάχιστης Τιμής)

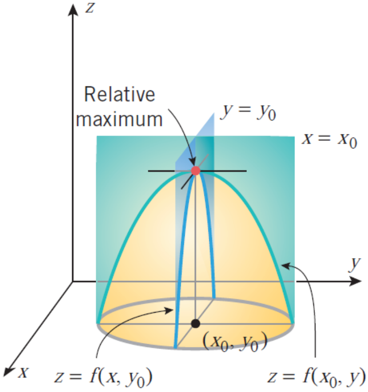
Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ είναι συνεχής σε κλειστό και φραγμένο υποσύνολο R του $\mathbb{R}^2$ τότε λαμβάνει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή στο R.



Θεώρημα (Fermat)

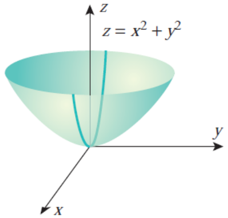
Αν η συνάρτηση $f(x, y)$ έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) και οι μερικές παράγωγοι υπάρχουν σε αυτό το σημείο τότε

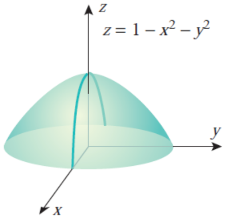
$$f_x(x_0, y_0) = 0 \textit{ και } f_y(x_0, y_0) = 0.$$

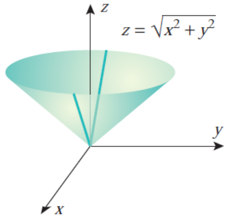


Ορισμός

Ενα σημείο (x_0, y_0) στο πεδίο ορισμού της $f(x, y)$ ονομάζεται **κρίσιμο σημείο**, αν $f_x(x_0, y_0) = 0$ και $f_y(x_0, y_0) = 0$ ή αν κάποια ή και οι δύο μερικές παράγωγοι δεν ορίζονται.





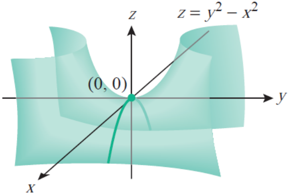


Παρατήρηση

Το αντίστροφο του Θεωρήματος Fermat δεν ισχύει.

Παράδειγμα

Δείξτε ότι το $(0,0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $f(x,y) = y^2 - x^2$ αλλά όχι τοπικό ακρότατο.



Ορισμός

Ένα κρίσιμο σημείο το οποίο είναι τοπικό μέγιστο σε μία κατεύθυνση και τοπικό ελάχιστο σε άλλη κατεύθυνση λέγεται **σαγματικό σημείο**.

Θεώρημα (Κριτήριο 2ης παραγώγου)

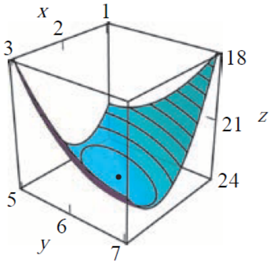
Έστω $f(x,y)$ συνάρτηση με συνεχείς μερικές παραγώγους σε δίσκο με κέντρο ένα κρίσιμο σημείο (x_0,y_0) και έστω

$$D = f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - f_{xy}^2(x_0,y_0).$$

- *Αν $D>0$ και $f_{xx}(x_0,y_0)>0$, η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0,y_0).*
- *Αν $D>0$ και $f_{xx}(x_0,y_0)<0$, η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0,y_0).*
- *Αν $D<0$, η f έχει σαγματικό σημείο στο (x_0,y_0).*
- *Αν $D=0$ δεν υπάρχει συμπέρασμα.*

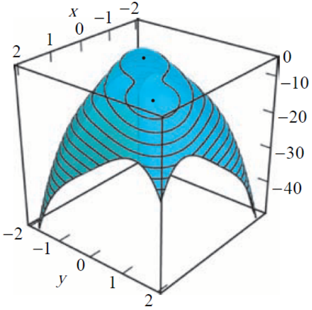
Παράδειγμα

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα και σαγματικά σημεία της $f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 8y$.



Παράδειγμα

Να βρεθούν τα τοπικά ακρότατα και σαγματικά σημεία της $f(x, y) = 4xy = x^4 - y^4$.



Θεώρημα

Αν μια συνάρτηση δύο μεταβλητών έχει ολικό ακρότατο στο εσωτερικό του πεδίου ορισμού της, τότε αυτό λαμβάνεται σε κρίσιμο σημείο.

Βήματα εύρεσης ολικών ακροτάτων σε κλειστό και φραγμένο σύνολο R

1. Εύρεση κρίσιμων σημείων στο εσωτερικό του R.
2. Εύρεση πιθανών ακροτάτων στο σύνορο του R.
3. Σύγκριση των τιμών όλων των προηγούμενων σημείων.

Παράδειγμα

Να βρεθούν η μέγιστη κι ελάχιστη τιμή της $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ στο τριγωνικό χωρίο R με κορυφές $(0, 0)$, $(3, 0)$ και $(0, 5)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν η μέγιστη κι ελάχιστη τιμή της $f(x, y) = 3xy - 6x - 3y + 7$ στο τριγωνικό χωρίο R με κορυφές $(0, 0)$, $(3, 0)$ και $(0, 5)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου κουτιού χωρίς καπάκι με όγκο $32\,cm^3$ με ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου κουτιού χωρίς καπάκι με όγκο $32\,cm^3$ με ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας.