

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Έστω $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Να υπολογιστούν τα:

i) $f(2, 1)$ ii) $f(t, t^2)$ iii) $f(2y^2, 4y)$

2. Έστω $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3$. Να υπολογιστούν τα:

i) $f(2, 1, 2)$ ii) $f(a, a, a)$ iii) $f(t, t^2, -t)$ iv) $f(a + b, a - b, b)$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

i) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

ii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

iii) $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$

iv) $f(x, y) = \ln(xy)$

v) $f(x, y, z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$

vi) $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$.

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 4(xy^2 - x)$

ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x + y}$

iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$

iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$

v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

vi) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

vii) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

5. Έστω $f(x, y) = e^{2x} \sin y$. Να υπολογιστούν τα:

i) $\frac{\partial f}{\partial x}$

ii) $\frac{\partial f}{\partial y}$

iii) $f_x(0, y)$

iv) $f_y(\ln 2, 0)$

6. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μερικές παράγωγοι.

i) $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$, για $z = 9x^2y - 3x^5y$

ii) $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$, για $z = xe^{\sqrt{15xy}}$

7. Έστω $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$.

- i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στην x -κατεύθυνση στο $(4, 2)$.
- ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς y της f στο $(4, 2)$.

8. Για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = z \ln(x^2 y \cos z)$ να υπολογίστουν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$.

9. Ένα σωματίδιο κινείται στην τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = x^2 + 3y^2$ και του επιπέδου $y = 1$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του z ως προς x όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο $(2, 1, 7)$;

10. Ο όγκος V ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi r^2 h$, όπου r είναι η ακτίνα και h το ύψος.

- i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν το h είναι σταθερό;
- ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς h όταν το r είναι σταθερό;
- iii) Αν $h = 4$ και το r μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν $r = 6$;

11. Για την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$ να αποδειχθεί ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

12. Για την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 y^5 - 2x^2 y + x$ να υπολογιστούν οι παράγωγοι f_{xxy} , f_{yxy} και f_{yyy} .

13. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .
- ii) Αν οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο $(0, 0)$, τότε και η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

14. Να υπολογιστεί η παράγωγος dz/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i) $z = 3x^2 y^3$, $x = t^4$, $y = t^2$
- ii) $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$
- iii) $z = 3 \cos x - \sin(xy)$, $x = 1/t$, $y = 3t$

15. Να υπολογιστεί η παράγωγος dw/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i) $w = 5x^2 y^3 z^4$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^5$
- ii) $w = 5 \cos(xy) - \sin(xz)$, $x = 1/t$, $y = t$, $z = t^3$

16. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i) $z = 8x^2 y - 2x + 3y$, $x = uv$, $y = u - v$
- ii) $z = x/y$, $x = 2 \cos u$, $y = 3 \sin v$

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

- i) $dR/d\phi$, $R = e^{2s-t^2}$, $s = 3\phi$, $t = \phi^{1/2}$
- ii) $\frac{dw}{dx}$, $w = 3xy^2 z^3$, $y = 3x^2 + 2$, $z = \sqrt{x-1}$.

18. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$

ii) $ye^x - 5 \sin(3z) = 3z$