

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Εαρινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) κέντρο $(7, 1, 1)$, ακτίνα 4,
- ii) κέντρο $(1, 0, -1)$, διάμετρος 8,
- iii) κέντρο $(-1, 3, 2)$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
- iv) κέντρο $(2, -1, -3)$, εφάπτεται στο xy -επίπεδο.

Απάντηση: i) $(x-7)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$, ii) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$, iii) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 14$.

2. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.

- i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα x και το σημείο $(0, 1, 2)$.
- ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα y και το σημείο $(1, 0, 2)$.
- iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα z και διέρχεται από το $(1, 1, 0)$.
- iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το $(1, 0, 1)$.

Απάντηση: i) $z = 2y$ ii) $z = 2x$, iii) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, iv) $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

3. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;

Απάντηση: $3 \pm \sqrt{6}$.

4. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
- ii) Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.

Απάντηση: Λάθος, Σωστό.

5. Να βρεθεί διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.

- i) Αντίθετη κατεύθυνση από το $\vec{v} = (3, -4)$ και μέτρο το μισό του μέτρου του \vec{v} .
- ii) Μήκος $\sqrt{17}$ και κατεύθυνση ίδια με το $\vec{v} = (7, 0, -6)$.

Απάντηση: i) $(-3/2, 2)$, ii) $(7/\sqrt{5}, 0, -6/\sqrt{5})$.

6. Έστω $\vec{r} = (x, y, z)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.

- i) $\|\vec{r}\| = 1$
- ii) $\|\vec{r}\| \leq 1$

iii) $\|\vec{r}\| > 1$

Απάντηση: i) Σφαίρα κέντρου O και ακτίνας 1, ii) Συμπαγής σφαίρα κέντρου O και ακτίνας 1, iii) Εξωτερικό σφαίρας κέντρου O και ακτίνας 1.

7. Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(2, -1, 1)$, $B(3, 2, -1)$ και $C(7, 0, -2)$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.

Απάντηση: $\hat{B} = \pi/2$.

8. Να δείξετε ότι $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

Απάντηση: Θεώρημα διαγωνίων παραλληλογράμμου.

9. i) Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το $i \times (j + k)$.
 ii) Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

Απάντηση: $-j + k$.

10. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $A(0, -2, 1)$, $B(1, -1, -2)$ και $C(-1, 1, 0)$.

Απάντηση: $\pm \frac{1}{4\sqrt{6}}(8, 4, 4)$.

11. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $P(1, 5, -2)$, $Q(0, 0, 0)$ και $R(3, 5, 1)$.

Απάντηση: $\sqrt{374}/2$.

12. Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές $\vec{u} = 3i + 2j + k$, $\vec{v} = i + j + 2k$, $\vec{w} = i + 3j + 3k$.

- i) Να βρεθεί ο όγκος του.
 ii) Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα \vec{u} και \vec{w} .
 iii) Να βρεθεί η γωνία του \vec{u} με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα \vec{v} και \vec{w} .

Απάντηση: i) 9, ii) $\sqrt{122}$, iii) $\frac{\pi}{2} - \cos^{-1}(9/14) = \sin^{-1}(9/14)$.

13. Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} για τα οποία ισχύει $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$;

Απάντηση: $\theta = \pi/4$.

14. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:

- i) που διέρχεται από τα σημεία $P_1(-1, 3, 5)$ και $P_2(-1, 3, 2)$,
 ii) που έχει διανυσματική εξίσωση $xi + yj + zk = k + t(i - j + k)$,
 iii) που διέρχεται από το $(-2, 0, 5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $x = 1 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = 6 + 2t$,
 iv) που είναι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $(3, -4)$.

Απάντηση: i) $x = -3$, $y = 3$, $z = 5 - 3t$, ii) $x = 6$, $y = -t$, $z = 1 + t$, iii) $x = -2 + 2t$, $y = -t$, $z = 5 + 2t$,
 iv) $x = 3 + 4t$, $y = -4 + 3t$.

15. Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$ να βρεθεί ένα σημείο της P και ένα διάνυσμα \vec{v} παράλληλο σε αυτήν.

Απάντηση: $(-1, 2, 4), 5i + 7j - 8k$.

16. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα xy, xz και yz της ευθείας $x = -2, y = 4 + 2t, z = -3 + t$.

Απάντηση: $(-2, 10, 0), (-2, 0, -5)$.

17. Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t, L_2: x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$ τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.

Απάντηση: Σημείο τομής $(1, -1, 2)$.

18. Να εξετάσετε αν οι ευθείες $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t, L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$ είναι παράλληλες.

Απάντηση: Είναι παράλληλες.

19. Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t, L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$ ταυτίζονται.

20. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) Διέρχεται από το σημείο $P(2, 6, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (1, 4, 2)$.
- ii) Διέρχεται από τα σημεία $(-2, 1, 1), (0, 2, 3)$ και $(1, 0, -1)$.
- iii) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο επίπεδο $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.
- iv) Διέρχεται από το $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία τομής των επιπέδων $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.

Απάντηση: i) $x + 4y + 2z - 28 = 0$, ii) $2y - z - 1 = 0$, iii) $4x - 2y + 7z = 0$, iv) $-x - y + 3z + 6 = 0$.

21. Εξετάστε αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, κάθετα ή τίποτα από τα παραπάνω.

- i) $2x - 8y - 6z - 2 = 0, -x + 4y + 3z - 5 = 0$
- ii) $3x - 2y + z = 1, 4x + 5y - 2z = 4$
- iii) $x - y + 3z - 2 = 0, 2x + z = 1$

Απάντηση: i) παράλληλα, ii) κάθετα, iii) όχι κάθετα, όχι παράλληλα.

22. Εξετάστε αν η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται και αν ναι, προσδιορίστε την τομή τους.

- i) $x = t, y = t, z = t, 3x - 2y + z - 5 = 0$
- ii) $x = 2 - t, y = 3 + t, z = t, 2x + y + z = 1$

Απάντηση: i) Τέμνονται στο $(5/2, 5/2, 5/2)$, ii) δεν τέμνονται.

23. Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας τομής των επιπέδων $x + 2y - 2z = 5$ και $6x - 3y + 2z = 8$.

Απάντηση: $4/21$.

24. Δείξτε ότι οι ευθείες $x = -2 + t, y = 3 + 2t, z = 4 - t$ και $x = 3 - t, y = 4 - 2t, z = t$ είναι παράλληλες και βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.

Απάντηση: $-7x - y - 9z + 25 = 0$

25. Να δείξετε ότι τα επίπεδα $-2x + y + z = 0$ και $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ είναι παράλληλα και να βρείτε την απόστασή τους.

Απάντηση: $D = 5/\sqrt{54}$.

26. *Να δείξετε ότι οι ευθείες $x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$ είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόστασή τους.

Απάντηση: $D = 25/\sqrt{126}$.

27. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο $(2, 1, -3)$ που εφάπτεται στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.

Απάντηση: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{121}{14}$.

28. Προσδιορίστε την τετραγωνική επιφάνεια.

i) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

ii) $z = \frac{y^2}{25} - x^2$

iii) $x^2 + y^2 - z^2 = 16$

iv) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

v) $4z = x^2 + 4y^2$

vi) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

Απάντηση: i) Ελλειπτικό παραβολοειδές με $a = 2, b = 3$, ii) υπερβολικό παραβολοειδές με $a = 1, b = 5$, iii) μονόκωνο υπερβολοειδές με $a = b = c = 4$, iv) κώνος, v) ελλειπτικό παραβολοειδές με $a = 2, b = 1$, vi) δίκωνο παραβολοειδές με $a = b = c = 1$.

29. Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές.

i) $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ από καρτεσιανές σε κυλινδρικές,

ii) $(1, \sqrt{3}, -2)$ από καρτεσιανές σε σφαιρικές,

iii) $(5, \pi/6, \pi/4)$ από σφαιρικές σε καρτεσιανές,

iv) $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$ από κυλινδρικές σε καρτεσιανές.

Απάντηση: i) $(8, 6, \pi/4)$, ii) $(2\sqrt{2}, \pi/3, 3\pi/4)$, iii) $(5\sqrt{6}/4, 5\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/2)$, iv) $(3/2, \sqrt{3}/2, 3)$.

30. Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις σε καρτεσιανές και περιγράψτε την επιφάνεια που εκφράζουν. Σε κάθε περίπτωση δίνεται το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

i) $r = 3$, κυλινδρικές,

ii) $r = 4 \sin \theta$, κυλινδρικές,

iii) $r^2 + z^2 = 1$, κυλινδρικές,

iv) $\phi = \pi/4$, σφαιρικές,

v) $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$, σφαιρικές.

Απάντηση: i) $x^2 + y^2 = 3$, κύλινδρος, ii) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, κύλινδρος, iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, σφαίρα, iv) $z = x^2 + y^2$, κώνος, v) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, κύλινδρος.

31. Δίνονται παρακάτω οι καρτεσιανές εξισώσεις επιφανειών. Να μετατραπούν σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

i) $z = 3x^2 + 3y^2$,

ii) $2x + 3y + 4z = 1$.

Απάντηση: i) Κυλινδρικές: $z = 3r$, Σφαιρικές: $\rho = \frac{1}{3} \cot \phi \csc \phi$, ii) Κυλινδρικές: $2r \cos \theta + 3r \sin \theta + 4z = 1$, Σφαιρικές: $2\rho \sin \phi \cos \theta + 3\rho \sin \phi \sin \theta + 4\rho \cos \phi = 1$.

