Έχει μπουατ!

ΜΑΣ 026

No. 1 Date 3/9

ΣΤΑΜΑΤΗΣ ΔΗΜΟΠΟΥΛΟΣ.
st-dimopoulos.github.io/teaching/mas026-autumn2019.gr
stamatiosdimopoulos@gmail.com

ΑΠΕΙΡΟΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

(Newton, Leibniz): Μελέτη μεταβολών
(μελέτη συναρτήσεων $f: I \to \mathbb{R}$, $I \subseteq \mathbb{R}$)

- Θεώρημα Fermat
- Κριτήριο 2ης παραγώγου
- Θεμελειώδης Θεώρημα

→ Πολύ λίγα φυσικά φαινόμενα εξαρτούνται από μια μεταβλητή

π.χ.
- κίνηση πλανητών
- κέντρο μάζας σωμάτων
- ροή υγρών ή πεδίων
- βαρυτικά πεδία

} εκφράζονται με περισσότερες μεταβλητές

ΠΡΟΑΠΑΙΤΟΥΜΕΝΑ:
- Απειροστικός λογισμός μιας μεταβλητής
- Γραμμική Άλγεβρα: πίνακες, ορίζουσες, γινόμενο πινάκων

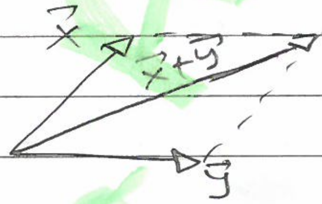
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1: ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ: κατευθυνόμενο ευθύγραμμο τμήμα
αποτελείται από μέτρο & κατεύθυνση

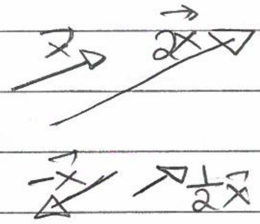
$\vec{0}$: μηδενικό διάνυσμα (δεν έχει κατεύθυνση)

ΠΡΑΞΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

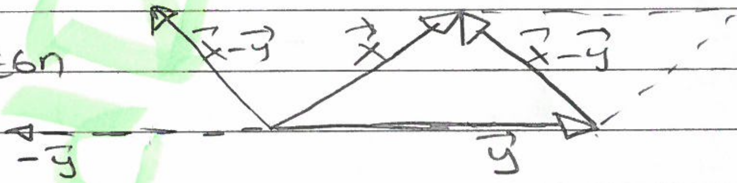
1) Πρόσθεση



2) Βαθμωτός Πολλαπλασιασμός

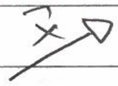


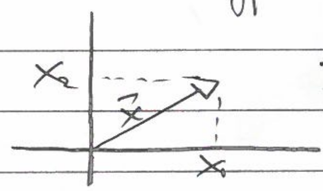
3) Αφαίρεση



→ Σε αυτό το μάθημα: μόνο διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ (επίπεδο)
και στον $\mathbb{R}^3$ (χώρος)

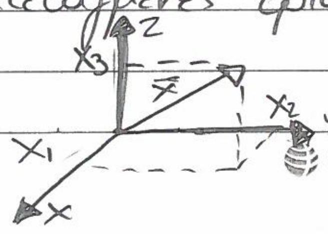
Διανύσματα στον $\mathbb{R}^2$ $\longleftrightarrow$ διατεταγμένα ζεύγη





$\vec{x} = (x_1, x_2)$

Διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$ $\longleftrightarrow$ διατεταγμένες τριάδες



$\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$

MAΣ026

Εχει μπουατ!

No. 2 Date 3/9

Στον $\mathbb{R}^2$: $\vec{x} = (x_1, x_2)$ $\quad \vec{x} = \vec{y} \iff x_1 = y_1$ και $x_2 = y_2$

$\vec{y} = (y_1, y_2)$

Στον $\mathbb{R}^3$: $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ $\quad \vec{x} = \vec{y} \iff x_1 = y_1$

$\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ $\quad x_2 = y_2$ και

$x_3 = y_3$

Πρόσθεση: $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)$

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: $\lambda\vec{x} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3)$ για $\lambda \in \mathbb{R}$

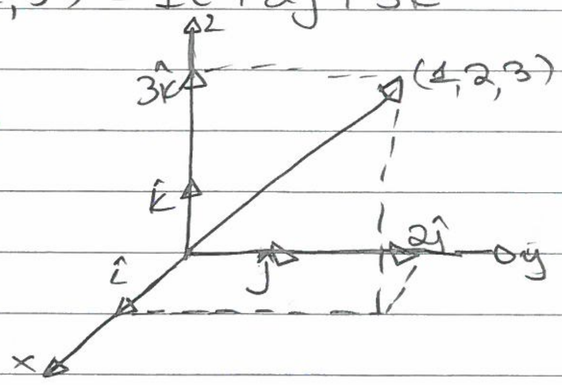
Διάνυσμα $\vec{x}$ με άκρα $P(x_1, x_2, x_3)$ και $Q(y_1, y_2, y_3)$

$\vec{x} = \vec{PQ} = (y_1 - x_1, y_2 - x_2, y_3 - x_3)$

ΟΡΙΣΜΟΣ $\hat{i} = (1,0,0)$ $\hat{j} = (0,1,0)$ $\hat{k} = (0,0,1)$

Τα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ αποτελούν βάση για τον $\mathbb{R}^3$, δηλαδή παράγουν όλα τα υπόλοιπα διανύσματα

Π.χ. $(1,2,3) = 1\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$



No. Date

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ τότε το εσωτερικό γινόμενο είναι $\vec{x}\cdot\vec{y} = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$

(Μπορεί να εμφανιστεί και ως $<x, y>$)

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $\vec{x}\cdot\vec{y} = \vec{y}\cdot\vec{x}$

2) $\vec{x}(\vec{y}+\vec{z}) = \vec{x}\vec{y} + \vec{x}\vec{z}$

3) $(\lambda\vec{x})\vec{y} = \lambda(\vec{x}\vec{y})$

4) $\vec{x}\cdot\vec{x} \geq 0$ και $\vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \iff \vec{x} = 0$

ΝΟΡΜΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Αν $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$ τότε η νόρμα του $\vec{x}$, $\|\vec{x}\|$, ορίζεται ως $\|\vec{x}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

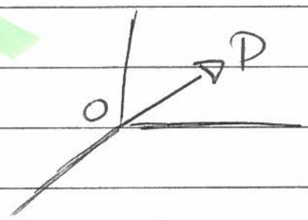
• Η νόρμα του $\vec{x}$ δίνει το μέτρο του $\vec{x}$.

Η απόσταση του σημείου $P(x_1, x_2, x_3)$ από την αρχή των αξόνων είναι ίση με $\|\vec{OP}\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Το $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ λέγεται μοναδιαίο αν $\|\vec{x}\| = 1$

π.χ. Τα $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ είναι μοναδιαία



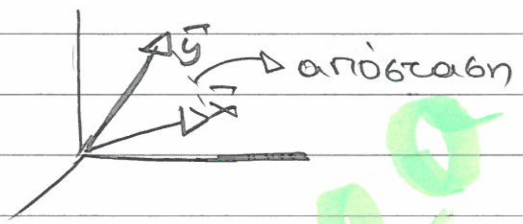
ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ·

Αν $x \in \mathbb{R}^3$ $(\vec{x} \neq \vec{0})$ τότε το $\frac{1}{\|\vec{x}\|} \cdot \vec{x} = \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} = \vec{y}$ είναι διάνυσμα με ίδια κατεύθυνση με το $\vec{x}$ και είναι μοναδιαίο. Το $\vec{y}$ λέγεται <u>κανονικοποίηση</u> του $\vec{x}$

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ τότε η απόσταση των $\vec{x}$ και $\vec{y}$

$\Rightarrow d(\vec{x}, \vec{y}) = \|\vec{x} - \vec{y}\|$



ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Έστω $\vec{u} = (15, -2, 4)$ και $\vec{v} = (\pi, 3, -1)$

Να βρεθούν τα $\|\vec{u}\|$, $\|\vec{v}\|$, $\vec{u} \cdot \vec{v}$, η απόσταση τους και να κανονικοποιηθεί το $\vec{u}$

ΑΠΑΝΤΗΣΗ:
- $\|\vec{u}\| = \sqrt{15^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{245}$
- $\|\vec{v}\| = \sqrt{\pi^2 + 3^2 + (-1)^2} = \sqrt{\pi^2 + 10}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 15\pi - 6 - 4$
  $= 15\pi - 10$
- $d(\vec{u}, \vec{v}) = \|\vec{u} - \vec{v}\|$
  $= \sqrt{(15-\pi)^2 + (-2-3)^2 + (4+1)^2}$
  $= \sqrt{(15-\pi)^2 + 25 + 25}$
  $= \sqrt{(15-\pi)^2 + 50}$
- Η κανονικοποίηση του $\vec{u}$ είναι το διάνυσμα

$$\vec{\omega} = \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} = \left(\frac{15}{\sqrt{245}}, \frac{-2}{\sqrt{245}}, \frac{4}{\sqrt{245}}\right)$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί η απόσταση των σημείων (0,3,0) και (2,2,0)

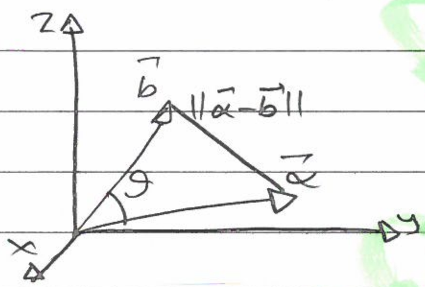
ΑΠΑΝΤΗΣΗ: $d=\sqrt{2^2+1^2+0^2}=\sqrt{5}$

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

$$\vec{x}\cdot\vec{x}=\|\vec{x}\|^2$$

$$(\vec{x}\cdot\vec{x}=x_1^2+x_2^2+x_3^2=\|x\|^2)$$

ΓΩΝΙΑ ΜΕΤΑΞΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



ΝΟΜΟΣ ΣΥΝΗΜΙΤΟΝΩΝ

$$\|\vec{a}-\vec{b}\|=\|\vec{a}\|^2+\|\vec{b}\|^2-2\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\cos\theta$$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}+\vec{b}\vec{b}-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta$$

Επίσης: $\|\vec{a}-\vec{b}\|^2=(\vec{a}-\vec{b})(\vec{a}\cdot\vec{b})$
$$=\vec{a}\cdot\vec{a}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{b}\vec{b}$$

Άρα *

$$* \cancel{\vec{a}\cdot\vec{a}}-2\vec{a}\vec{b}+\cancel{\vec{b}\vec{b}}=\cancel{\vec{a}\vec{a}}-2\|\vec{a}\|\|\vec{b}\|\cos\theta+\cancel{\vec{b}\vec{b}}$$
$$\Rightarrow \cos\theta=\frac{\vec{a}\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Η γωνία θ δύο διανυσμάτων $\vec{a},\vec{b}\in\mathbb{R}^3$ δίνεται από τον τύπο $\theta=\cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|}\right)$, $\theta\in[0,\pi]$

Εχει μπουατ!

MAΣ026 No. 4 Date 3/9

$\vec{u} \cdot \vec{v}$ κάθετα $\iff$
- $\vec{u} \perp \vec{v}$
- $\theta = 90°$
- $\cos\theta = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

οπότε $\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = 0}$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ: Να βρεθεί το $x \in \mathbb{R}$ ώστε τα διανύσματα $\vec{a} = (x, 1, x)$ και $\vec{b}(x, -6, 1)$ να είναι κάθετα

ΑΠΑΝΤΗΣΗ: Θα πρέπει $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \iff x^2 - 6 + x = 0$

$x = -3$ ή $x = 2$

ΘΕΩΡΗΜΑ 1

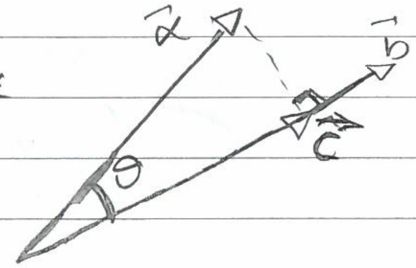
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \cos\theta \quad (\vec{\alpha}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3)$$

ΘΕΩΡΗΜΑ 2 - ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ CAUCHY-SCHWARZ

$$\|\vec{\alpha} \cdot \vec{b}\| \leq \|\vec{\alpha}\| \cdot \|\vec{b}\| \quad (\text{άμεσο γιατί } |\cos\theta| \leq 1)$$

ΠΡΟΒΟΛΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ $\vec{a}$ ΣΕ ΔΙΑΝΥΣΜΑ $\vec{b}$:

Η προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$, έστω $\vec{c}$, είναι διάνυσμα με ίδια κατεύθυνση με το $\vec{b}$. Το μέτρο:



$$\cos\theta = \frac{\|\vec{c}\|}{\|\vec{\alpha}\|} \Rightarrow \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{b}}{\cancel{\|\vec{\alpha}\|}\|\vec{b}\|} = \frac{\|\vec{c}\|}{\cancel{\|\vec{\alpha}\|}} \Rightarrow \|\vec{c}\| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|}$$

Εφόσον το $\vec{c}$ έχει την ίδια κατεύθυνση με το $\vec{b}$ κανονικοποιούμε το $\vec{b}$ και πολλαπλασιάζουμε με το μέτρο του $\vec{c}$.

$$\vec{c} = \frac{\vec{\alpha} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \cdot \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \frac{\vec{\alpha}\vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b}$$

ΟΡΙΣΜΟΣ

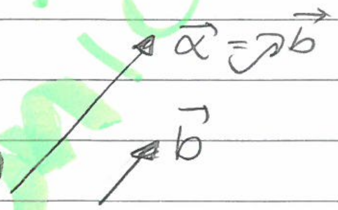
Η προβολή του $\vec{a}$ στο $\vec{b}$, $\vec{c} = proj_{\vec{b}}\vec{a}$ ορίζεται

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|^2} \cdot \vec{b}$$

stamatios@ucy.ac.cy

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ το $\vec{\alpha}$ θα λέγεται παράλληλο στο $\vec{b}$ αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{\alpha} = \lambda \vec{b}$ $(\vec{\alpha} \parallel \vec{b})$



ΠΑΡΕΝΘΕΣΗ: ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ ΠΙΝΑΚΩΝ

· Για έναν πίνακα 2x2 $A = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ c & d \end{pmatrix}$ η ορίζουσα είναι $\det(A) = |A| = \alpha d - cb$

· Για έναν πίνακα 3x3 $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{pmatrix}$ η ορίζουσα είναι

$$\det A = |A| = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$\det A = |A| = a_1(b_2c_3 - b_3c_2) - a_2(b_1c_3 - b_3c_1) + a_3(b_1c_2 - b_2c_1)$$

1.2 ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Για $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbb{R}^3$ και $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3) \in \mathbb{R}^3$

Το εξωτερικό τους γινόμενο, $\vec{a} \times \vec{b}$ ορίζεται ως εξής:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$= i \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}$$

$$= (a_2b_3 - b_2a_3,\ a_3b_1 - b_3a_1,\ a_1b_2 - a_2b_1)$$

Παρατήρηση: Δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) Αν $\vec{a}=0$ ή $\vec{b}=0$ τότε $\vec{a}\times\vec{b}=0$

2) Αν $\vec{a}\times\vec{a}=0$

3) $\vec{a}\perp\vec{a}\times\vec{b}$ και $\vec{b}\perp\vec{a}\times\vec{b}$

4) $\vec{a}\times\vec{b}=-(\vec{b}\times\vec{a})$

5) $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

6) $\vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=(\vec{a}\times\vec{b})+(\vec{a}\times\vec{c})$

7) Ταυτότητα Lagrange: $\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|\vec{a}\|^2\cdot\|\vec{b}\|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2$

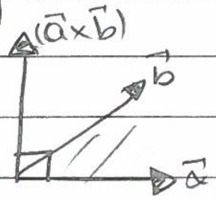
Απόδειξη 3: $\vec{a}(\vec{a}\times\vec{b})=a_1(a_2b_3-a_3b_2)+a_2(a_3b_1-a_1b_3)$

$+a_3(b_2a_1-a_2b_1)$

$=\cancel{a_1a_2b_3}-\cancel{a_1a_3b_2}+\cancel{a_2a_3b_1}-\cancel{a_1a_2b_3}$

$+\cancel{a_1a_3b_2}-\cancel{a_2a_3b_1}=0$

Ομοίως $\vec{b}(\vec{a}\times\vec{b})=0$



Η κατεύθυνση του $\vec{a}\times\vec{b}$ δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.

Πρόταση: $\|\vec{a}\times\vec{b}\|=\|\vec{a}\|\cdot\|\vec{b}\|\sin\theta,\ \theta\in[0,\pi]$

θ η γωνία των $\vec{a},\vec{b}$.

Απόδειξη: Από ταυτότητα Lagrange.

$\|\vec{a}\times\vec{b}\|^2=\|a\|^2\cdot\|b\|^2-(\vec{a}\vec{b})^2$

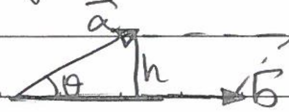
$=\|a\|^2\|b\|^2-\|a\|^2\|b\|^2\cos^2\theta$

$=\|a\|^2\|b\|^2(1-\cos^2\theta)$

$\overset{\theta\in[0,\pi]}{\Longrightarrow} \|a\times b\|=\|a\|\cdot\|b\|\sin\theta$

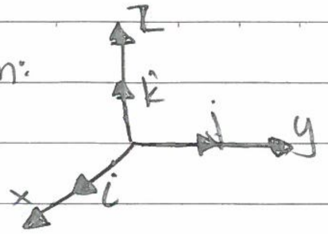
Άμεσα πέρνουμε ότι · $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}\Rightarrow\vec{a}\parallel\vec{b}$

· το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζεται από τα $\vec{a},\vec{b}$ είναι ίσο με $\|\vec{a}\times\vec{b}\|$



$E=\|\vec{b}\|h=\|\vec{b}\|\cdot\|\vec{a}\|\sin\theta$

Παρατήρηση:



$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{k} = \hat{i}$

$\hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$

Παράδειγμα: • $(\hat{i} \times \hat{i}) \times \hat{j} = 0 \times \hat{j} = 0$

• $\hat{i} \times (\hat{i} \times \hat{j}) = \hat{i} \times \hat{k} = -\hat{j}$

Παράδειγμα: $\vec{u} = (2,2,0)$, $\vec{v}(1,0,1)$. Να βρεθεί το $\vec{u} \times \vec{v}$

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,-2,-2)$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το εμβαδόν του ▱ που ορίζεται από τα $\vec{u} = (1,1,1)$, $\vec{v} = (-2,0,1)$

$$E = \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \left\| \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right\|$$

$$= \|(1,-3,2)\|$$

$$= \sqrt{1^2 + (-3)^2 + 2^2}$$

$$= \sqrt{14} \text{ τμ}$$

ΜΙΚΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Αν $\vec{a}, \vec{b} \in \mathbb{R}^3$ το γινόμενο $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c})$ ονομάζεται μικτό ή τριπλό γινόμενο των $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

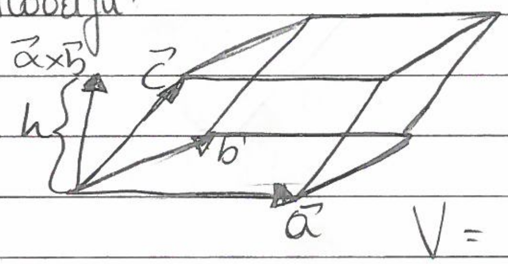
1) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c}(\vec{a} \times \vec{b})$

2) $\vec{a}(\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Το $\|\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})\|$ είναι ίσο με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$

Απόδειξη:



$$E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma} = \|\vec{\alpha}\times\vec{b}\|$$

$$h = proj_{\vec{\alpha}\times\vec{b}}\vec{c} = \frac{\vec{c}(\vec{\alpha}\times\vec{b})}{\|\vec{\alpha}\times\vec{b}\|}$$

$$V = E_{\beta\acute{\alpha}\sigma\eta\varsigma}\cdot h = \vec{c}(\vec{\alpha}\times\vec{b}) = (\vec{\alpha}\times\vec{b})\vec{c}$$

Προκύπτει ότι: $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c})=0$ αν και μόνο αν τα διανύσματα $\vec{a},\vec{b},\vec{c}$ είναι στο ίδιο επίπεδο (συνεπίπεδα)

Πρόταση: $\vec{a}(\vec{b}\times\vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

Παράδειγμα: Να βρεθεί ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $\vec{u}=(1,1,1)$, $\vec{v}(1,1,0)$ και $\vec{\omega}(1,0,0)$

$$V = \|\vec{u}(\vec{v}\times\vec{\omega})\| = \left\| \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

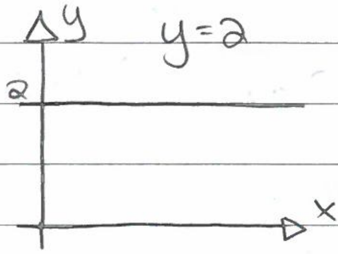
$$= \left\| \underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}}_{0} - 1\underbrace{\cancel{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}}}_{0} + 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \right\|$$

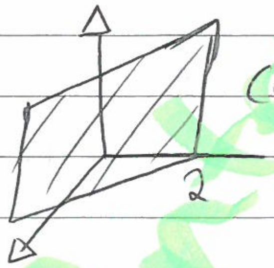
$$= \|-1\| = 1$$

1.3 ΕΞΙΣΟΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

Υπενθύμιση: Στον $\mathbb{R}^2$ οι ευθείες περιγράφονται πλήρως από εξισώσεις της μορφής $y=ax+b$
Στον $\mathbb{R}^3$ δεν ισχύει.

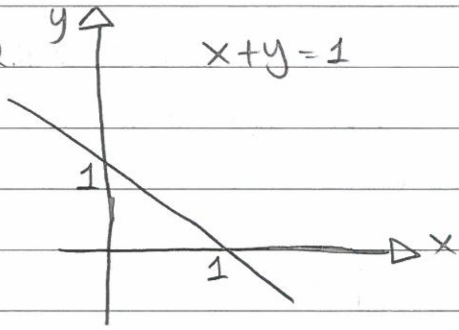
1.

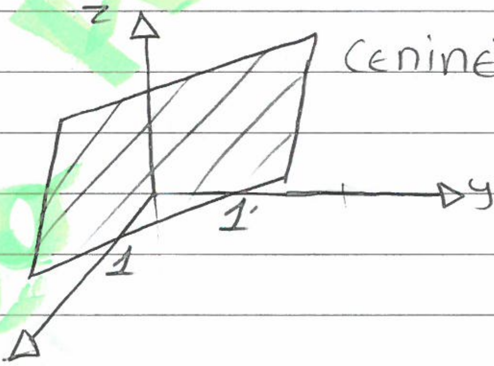




(επίπεδο)

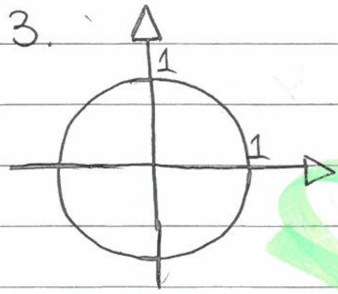
2.

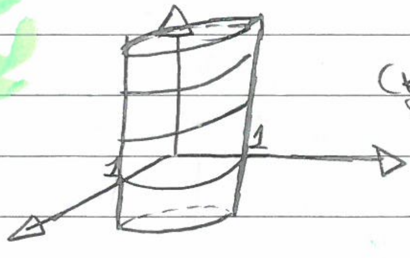




(επίπεδο)

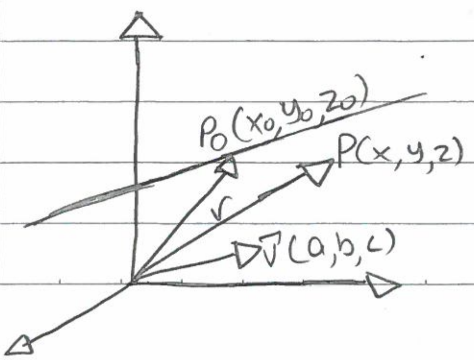
3.





(κύλινδρος)

ΕΥΘΕΙΕΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$



Έστω ευθεία (ε) στον $\mathbb{R}^3$. Αν γνωρίζουμε ένα σημείο $P_0(x_0,y_0,z_0)$ και ένα παράλληλο διάνυσμα $\vec{v}(a,b,c)$ τότε για τυχαίο σημείο P στην ευθεία θα έχουμε:

$\overline{OP}=\overline{OP_0}+t\vec{v}\ ,\ t\in\mathbb{R}$

1.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΩΝ ΚΑΙ ΕΠΙΠΕΔΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

$\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$ Διανυσματική ή παραμετρική μορφή ευθείας

Αν βάλουμε συντεταγμένες $(x,y,z) = (x_0,y_0,z_0) + t(a,b,c)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tc \end{cases}$$ παραμετρικές εξισώσεις ευθείας

Αν λύσουμε ως προς t

$$\frac{x-x_0}{a} = \frac{y-y_0}{b} = \frac{z-z_0}{c}$$ συμμετρικές εξισώσεις ευθείας

Παράδειγμα: Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από το $(1,2,-3)$ και είναι παράλληλη προς το $4i+5j-7k$

Η παραμετρική μορφή $\vec{r} = \vec{r_0} + t\vec{v}$

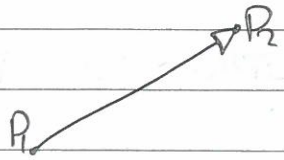
όπου $\vec{r_0} = (1,2,-3)$

$\vec{v} = (4,5,-7)$

$\Rightarrow (x,y,z) = (1,2,-3) + t(4,5,-7)$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 2+5t \\ z = -3-7t \end{cases}$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί η παραμετρική εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα $P_1(2,4,-1)$ $P_2(5,0,7)$



Θεωρούμε το διάνυσμα
$\vec{P_1P_2}=(3,-4,8)$ $(\vec{P_1P_2} // \varepsilon)$

Η παραμετρική μορφή είναι $\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}$ όπου $\vec{r_0}=(2,4,-1)$
$\vec{v}=(3,-4,8)$

Οι παραμετρικές εξισώσεις
$$\begin{cases} x=2+3t \\ y=4-4t \\ z=-1+8t \end{cases}$$

Bonus: Ποιο είναι το σημείο τομής της ευθείας με το επίπεδο xy (αν υπάρχει)

Στο επίπεδο xy $\to z=0$
$0=-1+8t$
$t=1/8$

Άρα $x=2+3/8=19/8$
$y=4-4/8=7/2$

Το σημείο τομής υπάρχει και είναι το $\left(\frac{19}{8},\frac{7}{8}\right)$

Παρατήρηση: Για να δούμε αν 2 ευθείες είναι // ή $\perp$ ελέγχουμε την ίδια συνθήκη για τα 2 διανύσματα παράλληλα στις ευθείες αυτές.

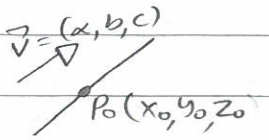
No. Date

Παράδειγμα: Είναι τα επίπεδο $2x - y + 3z + 6 = 0$ και
$-4x - 2y + 6z + 7 = 0$ παράλληλα?

Τα επίπεδα έχουν κάθετα διανύσματα $(2, -1, 3)$
και $(-4, -2, -6)$ αντίστοιχα

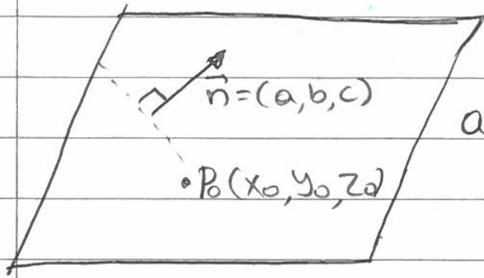
Παρατηρούμε ότι $\vec{n}_2 = -2\vec{n}_1$ άρα $\vec{n}_2 // \vec{n}_1$
οπότε τα επίπεδα είναι //

ΕΥΘΕΙΕΣ & ΕΠΙΠΕΔΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$



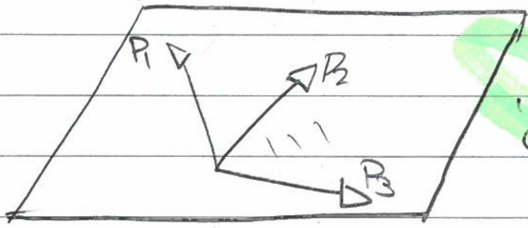
$\vec{r} = \vec{r}_0 + t\vec{v}$

$$\begin{cases} x = x_0 + ta \\ y = y_0 + tb \\ z = z_0 + tz \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$



$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το επίπεδο που διέρχεται από τα σημεία $P_1(1,2,-1)$ $P_2(2,3,1)$ $P_3(2,-1,3)$



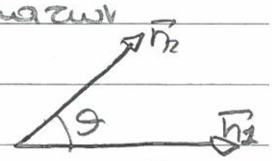
Έστω $\vec{u} = \overrightarrow{P_1P_2} = (1,1,2)$

$\vec{v} = \overrightarrow{P_1P_3} = (2,-3,4)$

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 2 \\ 1 & -3 & 4 \end{vmatrix} = (4+6)\hat{i} - (4-2)\hat{j} + (-3-1)\hat{k} = (10,-2,-4)$$

Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $0=10(x-1)-2(y-2)-4(z+1)$

Γωνία δυο διανυσμάτων = γωνία κάθετων διανυσμάτων



Παράδειγμα: Έστω τα επίπεδα $E_1 = 2x+2y-z=4$

$E_2 = 6x-3y+2z=5$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2}{\|\vec{n}_1\|\cdot\|\vec{n}_2\|}\right)$$

Να βρεθεί η γωνία τομής τους και η παραμετρική εξίσωση της τομής τους.

Τα κάθετα διανύσματα είναι $\vec{n}_1=(2,2,-1)$

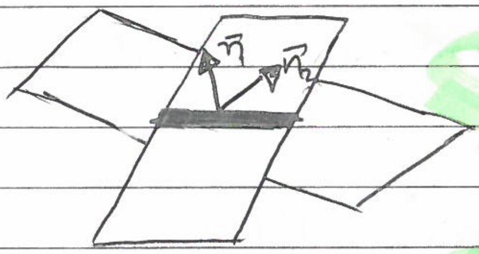
$\vec{n}_2=(6,-3,2)$

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{n_1 n_2}{\|n_1\|\cdot\|n_2\|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{4}{37}\right) = \cos^{-1}(0{,}19) \cong 79^\circ$$

Για $z=0$

$$\begin{cases} 2x+2y=4 \\ 6x-3y=5 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow x=\frac{11}{9},\ y=\frac{7}{9}$$

Άρα το σημείο $\left(\frac{11}{9}, \frac{7}{9}, 0\right)$ ανήκει και στα 2 επίπεδα (άρα και στην ευθεία τομής τους)

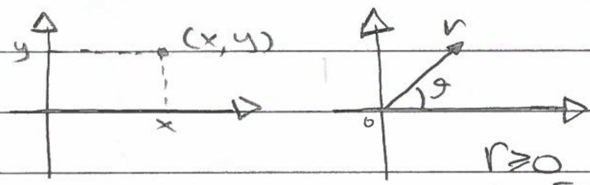


$$\vec{n}_1 \times \vec{n}_2 = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & -1 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = \dots = (1, -10, -18)$$

Άρα έχει παραμετρικές εξισώσεις:
$$\begin{cases} x = \frac{11}{9} + 7t \\ y = \frac{7}{9} - 10t \\ z = -12t \end{cases}$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

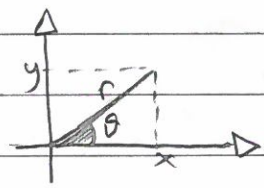
I – πολικές συντεταγμένες



$r \geq 0$
$\theta \in [0, 2\pi)$

Καρτεσιανές → Πολικές

Έχουμε (x,y), θέλουμε (r,θ°)



Από Π.Θ. $r^2 = x^2+y^2$

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

Αν $x=0, y>0$ $\theta = \frac{\pi}{2}$

Αν $x=0, y<0$ $\theta = \frac{3\pi}{2}$

Από τριγωνομετρία $\tan\theta = \frac{y}{x} \Rightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$

Αν $x=0, y=0$ θ αόριστο

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\theta = \begin{cases} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right), & x \neq 0 \\ \frac{\pi}{2}, & x = 0 \text{ και } y > 0 \\ \frac{3\pi}{2}, & x = 0 \text{ και } y < 0 \\ \text{αόριστο}, & x = 0, y = 0 \end{cases}$$

<u>Πολικές → Καρτεσιανές</u>

Από τριγωνομετρία $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

π.χ $\left(-4, \frac{2\pi}{3}\right)$ σε πολικές, σε καρτεσιανές $x = -4\cos\frac{2\pi}{3} = \dots = 2$

$y = -4\sin\frac{2\pi}{3} = \dots = -2\sqrt{3}$.

$(-1,-1)$ σε καρτεσιανές, σε πολικές

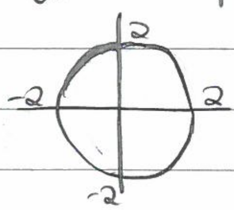
$r = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{-1}{-1}\right) = \tan^{-1}(1)$ $\theta = \frac{\pi}{4}$ ή $\theta = \frac{3\pi}{4}$

Εφόσον $x < 0 < y$, $\theta = \frac{3\pi}{4}$ Άρα $\left(\sqrt{2}, \frac{3\pi}{4}\right)$

Πλεονέκτημα: Σε καρτεσιανές $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 - y^2 = 4\}$

$\boxed{x^2+y^2=4}$



Σε πολικές $\{(r,\theta) \; r=2, \theta = [0, 2\pi)\}$

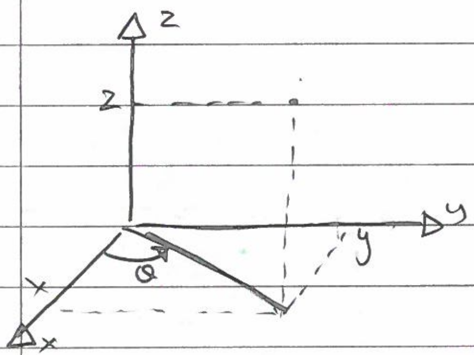
$\boxed{r=2}$

Παράδειγμα: Η καρτεσιανή εξίσωση $2x - 5x^3 = 1 + xy$ σε πολικές είναι $2r\cos\theta - 5(r\cos\theta)^3 = 1 + r\cos\theta \cdot r\sin\theta$

$(\cos^2\theta - \sin^2\theta = \cos 2\theta)$

Η πολική εξίσωση $r = -8\cos\theta$ σε καρτεσιανές είναι $\begin{cases} r^2 = -8r\cos\theta \\ x^2+y^2 = -8x \\ x^2+8x+y^2 = 0 \end{cases}$

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

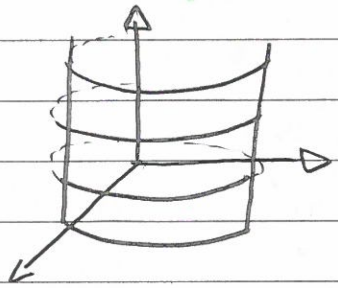


Καρτεσιανές → Κυλινδρικές

$r=\sqrt{x^2+y^2}$

$\theta=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right),\ x\neq 0 \ldots$

$z=z$



Κυλινδρικές → Καρτεσιανές

$$\begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$

Π.χ. Η καρτεσιανή εξίσωση $x^3+6x^2-6z=4-2y^2$ σε κυλινδρικές είναι $(r\cos\theta)^3+6(r\cos\theta)^2-6z=4-2(r\sin\theta)^2$

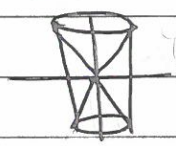
Η κυλινδρική εξίσωση $r^2-4r\cos\theta=14$ σε καρτεσιανές είναι $x^2+y^2-4x=14$

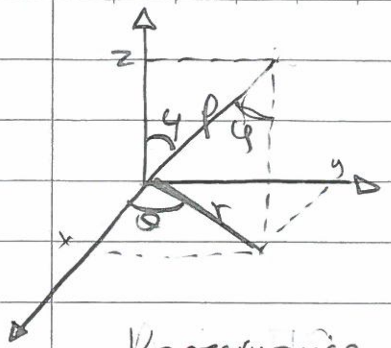
$(x-2)^2+y^2=8$

Τι επιφάνειες εκφράζουν οι παρακάτω εξισώσεις κυλινδρικών συντεταγμένων?

(a) $r=5$ κύλινδρος

(b) $r^2+z^2=100$ σφαίρα
$(x^2+y^2+z^2=100)$

(c) $z=r$  κώνος
$(z^2=x^2+y^2)$



(x,y,z)

$\downarrow$

(ρ,θ,φ)

$\rho \geq 0$

$\theta \in [0, 2\pi)$

$\varphi \in [0, \pi]$

Καρτεσιανές → Σφαιρικές

Από Π.Θ $\rho^2 = r^2 + z^2 = x^2 + y^2 + z^2$

$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$ αν $x \neq 0$...

$\cos\varphi = \frac{z}{\rho} \Rightarrow \boxed{\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)}$

ή $\tan\varphi = \frac{r}{z} \Rightarrow \boxed{\varphi = \tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)}$

Σφαιρικές → Καρτεσιανές

$x = r\cos\theta$ Εφόσον $\sin\varphi = \frac{r}{\rho}$

$y = r\sin\theta$ $\Rightarrow r = \rho\sin\varphi$

$z = r\cos\varphi$

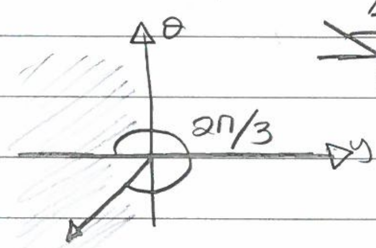
Άρα $\begin{cases} x = \rho\sin\varphi\cos\theta \\ y = \rho\sin\varphi\sin\theta \\ z = \rho\cos\varphi. \end{cases}$

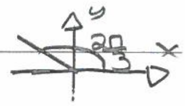
Τι είδους επιφάνειες περιγράφονται από τις παρακάτω εξισώσεις σφαιρικών συντεταγμένων?

(a) $\rho = 5$ σφαίρα

(b) $\varphi = \frac{\pi}{3}$ κώνος (πάνω μέρος)

(c) $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ημιεπίπεδο





Η καρτεσιανή εξίσωση $z = x^2 - y^2$ σε σφαιρικές είναι:

$$\rho\cos\varphi = (\rho\cos\theta\sin\varphi)^2 - (\rho\sin\theta\sin\varphi)^2$$
$$= \rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi - \rho^2\sin^2\theta\sin^2\varphi$$
$$= \rho^2\sin^2\varphi\,(\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$
$$= \rho^2\sin^2\varphi\cos(2\theta)$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = \rho\sin^2\varphi\cos(2\theta)$$