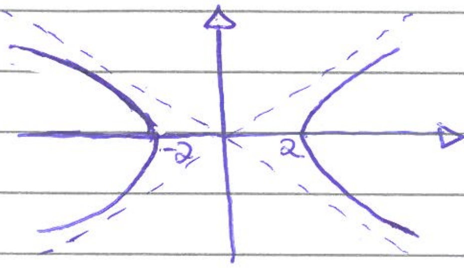

Τρικ για ασύμπτωτες: βάζουμε στο 2ρο μέλος 0 και λύνουμε ως προς y

Π.χ. Να σχεδιαστούν οι υπερβολές (a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ και (b) $y^2-x^2=1$.

(a) Υπερβολή: ανοίγει στην x-κατεύθυνση

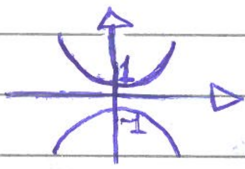



Κορυφές: $\frac{x^2}{4}+\frac{0^2}{9}=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$.

(2,0) (−2,0)

Ασύμπτωτες: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=0 \Rightarrow y^2=\frac{9}{4}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{3}{2}x$

(b) Κορυφές: (0,1) (0,−1)



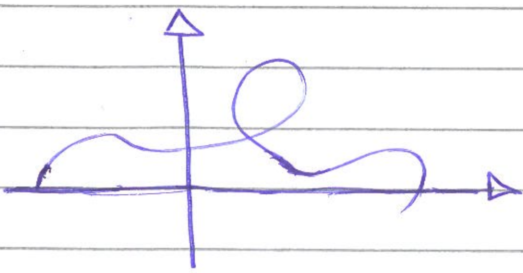

Ασύμπτωτες: $y=\pm x$.

Π.χ. Να βρεθεί εξίσωση υπερβολής με κορυφές $(0,\pm 8)$ και ασύμπτωτες $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Είναι της μορφής $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.

Ασύμπτωτες $y=\pm\frac{a}{b}x \Rightarrow a=4$, $b=3$. κλίση ασυμπτώτων μπορεί να δώσει a ή b

Υπενθύμιση: Αναλυτική γεωμετρία στο επίπεδο 20/1



$x=x(t)$

$y=y(t)$

Πολικές συντεταγμένες $(r,\theta)$

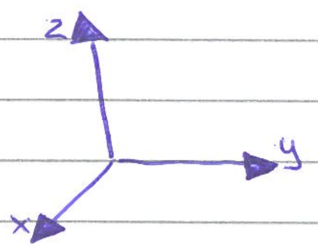
• κωνικές τομές:

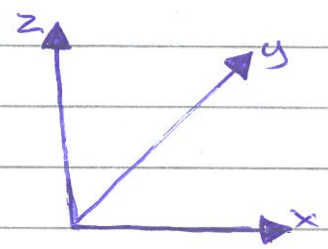
ΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

1 Ο ΧΩΡΟΣ $\mathbb{R}^3$

διάσταση → άξονας → $\mathbb{R}$
διαστάσεις → επίπεδο → $\mathbb{R}^2$
διαστάσεις → χώρος → $\mathbb{R}^3$

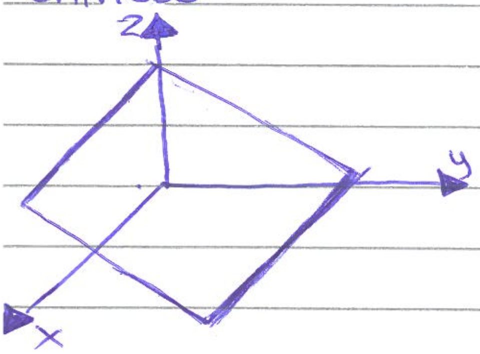
εωρούμε ότι ο χώρος έχει 3 άξονες, κάθετοι ανά 2, με ένα σημείο μής - αρχή των αξόνων - Οι άξονες ικανοποιούν τον κανόνα του ξιού χεριού.



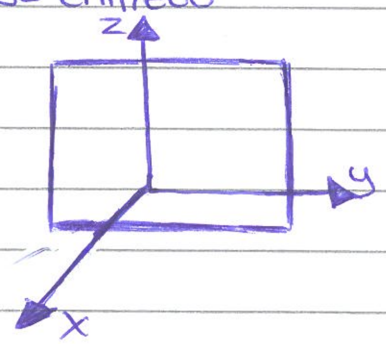




. 3 Χαρακτηριστικά Επίπεδα

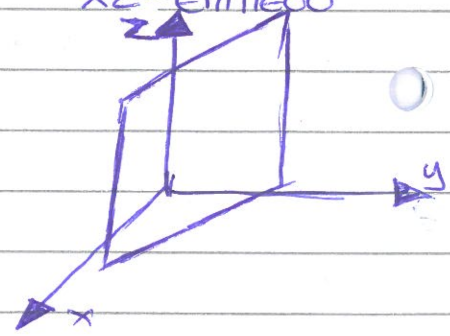
-επίπεδο

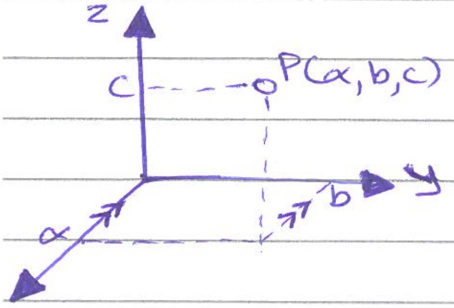



yz-επίπεδο




xz-επίπεδο



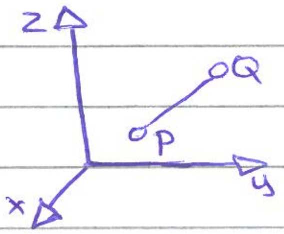




Κάθε σημείο P αντιστοιχεί σε μια τριάδα αριθμών (a, b, c)

1ο οκταμόριο $x>0, y>0, z>0$.

| Επίπεδο/Άξονας | Σύνολο Σημείων |
|---|---|
| xy-επίπεδο | $(x,y,0)$ |
| xz-επίπεδο | $(x,0,z)$ |
| yz-επίπεδο | $(0,y,z)$ |
| άξονας x | $(x,0,0)$ |
| άξονας y | $(0,y,0)$ |
| άξονας z. | $(0,0,z)$ |

Απόσταση Σημείων.




Έστω $P(x_1,y_1,z_1)$ $Q(x_2,y_2,z_2)$.
Η απόσταση των P, Q είναι
$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ΣΦΑΙΡΑ κέντρο $(x_0,y_0,z_0)$, ακτίνας r. Σύνολο σημείων που απέχουν απόσταση r από $(x_0,y_0,z_0)$
Άρα έχει εξίσωση: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

π.χ. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας με εξίσωση
$x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z+17=0$.

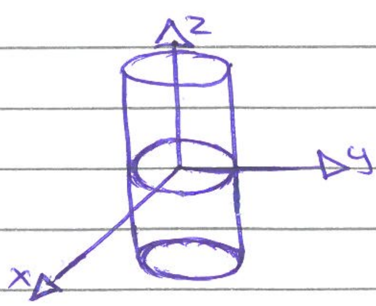
$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+8z+16)+17=21$
$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=4$

κέντρο $(1,2,-4)$ και ακτίνα 2.

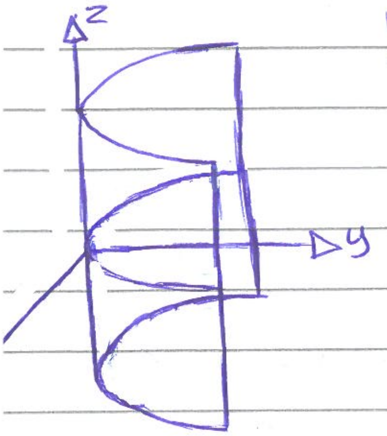
ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.

Ο κύλινδρος είναι παράλληλη μετατόπιση 1 κύκλου.

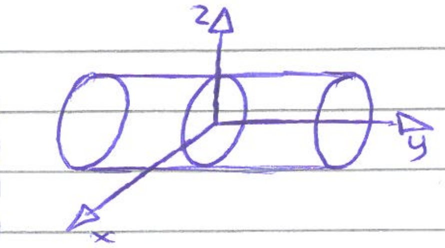
→ Γενικά, κυλινδρικές επιφάνειες = παράλληλη μετατόπιση καμπύλης ως προς κάποια κατεύθυνση.



$y=x^2$

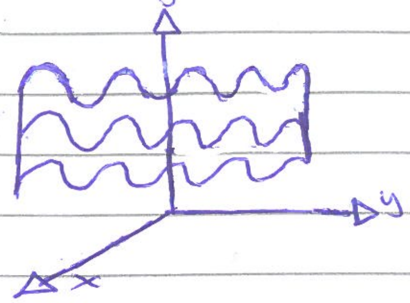



$x^2+z^2=1$




Παράλληλη μετατόπιση κύκλου
↓
κύλινδρος

$z=\sin y$




Παράλληλη μετατόπιση της ημιτονοειδούς καμπύλης

ια εξίσωση 2μεταβλητών = παράλλ μετατόπιση μιας καμπύλης στο επίπεδο που ορίζουν οι 2μεταβλητές στην κατεύθυνση της τρίτης
ίναι κυλινδρική επιφάνεια

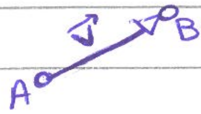
ΑΞΕΙΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

τω $(x_1,y_1,z_1)$ και $(x_2,y_2,z_2)$

- $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x+x_2,\ y+y_2,\ z_1+z_2)$
- $(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$
- $\lambda(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$

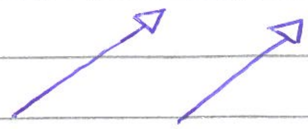
. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

διάνυσμα: βέλος με αρχικό και τελικό σημείο




$\vec{v}$ $\vec{n}$ →

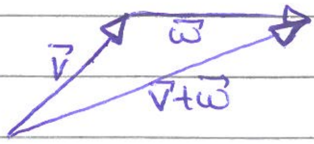
ν 2διανύσματα έχουν ίδιο μήκος και ίδια
εύθυνση είναι ίσα (άρα τα ταυτίζουμε)



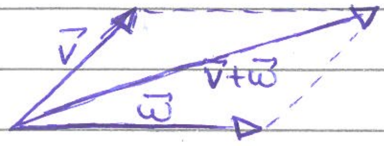
Μηδενικό διάνυσμα $(\vec{0})$: • ίδιο αρχικό και τελικό σημείο
• δεν έχει κατεύθυνση

## ΠΡΑΞΕΙΣ

Άθροισμα:

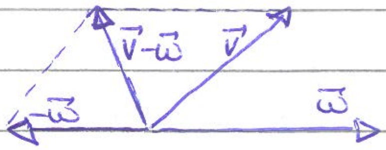


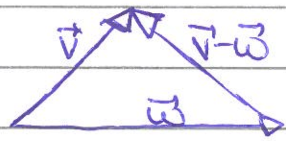

ή



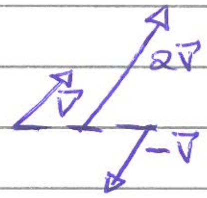

Το $-\vec{v}$ είναι το αντίθετο του $\vec{v}$

Αφαίρεση

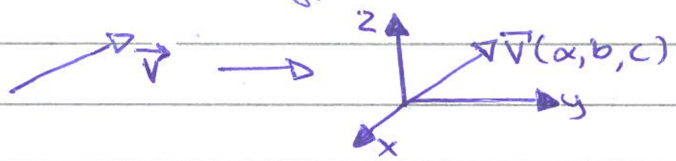



Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: όπου το $\lambda\vec{v}$ είναι διάνυσμα με λ-πλάσιο μήκος και
- ίδια κατεύθυνση αν $\lambda>0$
- αντίθετη κατεύθυνση αν $\lambda<0$



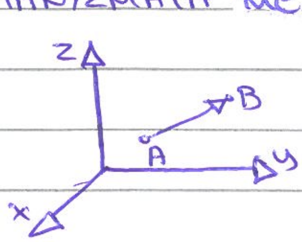

→ Θεωρούμε ότι έχουν αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων. Χαράζονται από τις συντεταγμένες τα τελικά σημεία.




Όλες οι προηγούμενες έννοιες γίνονται για $\vec{V}=(V_1,V_2,V_3)$ και $\vec{W}=(W_1,W_2,W_3)$

- $\vec{V}=\vec{W} \iff V_1=W_1,\ V_2=W_2,\ V_3=W_3$
- $\vec{V}+\vec{W}=(V_1+W_1, V_2+W_2, V_3+W_3)$
- $\vec{V}-\vec{W}=(V_1-W_1, V_2-W_2, V_3-W_3)$
- $\lambda\vec{V}=(\lambda V_1, \lambda V_2, \lambda V_3)$

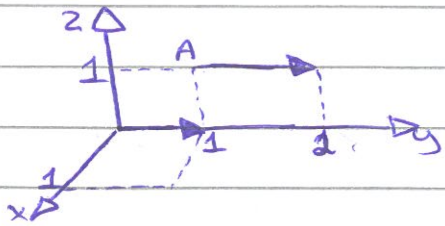
## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΒ




Αν $A=(x_1,y_1,z_1)$ και $B=(x_2,y_2,z_2)$

$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

ι.χ. $A(1,1,1)$
$B(1,2,1)$



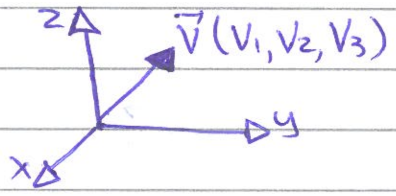

$AB=(0,1,0)$.

ΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

1) $\vec{v}+\vec{w}=\vec{w}+\vec{v}$
2) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}$
3) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
4) $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$
5) $k(\lambda\vec{u})=(k\lambda)\vec{u}$ $\quad (k,\lambda\in\mathbb{R})$
6) $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
7) $(k+\lambda)\vec{u}=k\vec{u}+\lambda\vec{u}$
8) $1\vec{u}=\vec{u}$

χ. $\vec{v}+\vec{w}=(v_1+w_1, v_2+w_2, v_3+w_3)=(w_1+v_1, w_2+v_2, w_3+v_3)=\vec{w}+\vec{v}$

ΟΡΜΑ – ΜΕΤΡΟ

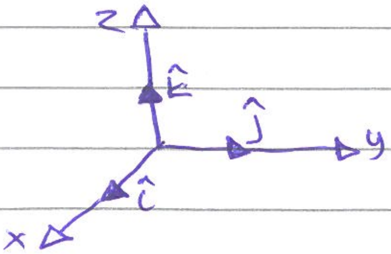



ν $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, το μέτρο/νόρμα του $\vec{v}$ είναι
$\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

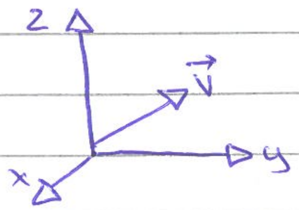
ότητα: $\|\lambda\vec{v}\|=\|\lambda\|\cdot\|\vec{v}\|$

Ένα διάνυσμα μέτρου 1 λέγεται μοναδιαίο

χ. $\hat{i}=(1,0,0)$ $\quad$ Αν $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$
$\hat{j}=(0,1,0)$ $\quad = v_1(1,0,0)+v_2(0,1,0)+v_3(0,0,1)$
$\hat{k}=(0,0,1)$ $\quad = v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$



## ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ $\vec{v}$




Εύρεση μοναδιαίου διανύσματος στην κατεύθυνση του $\vec{v}$.

Αυτό είναι $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ από $\|a\vec{v}\| = \|a\| \cdot \|\vec{v}\|$

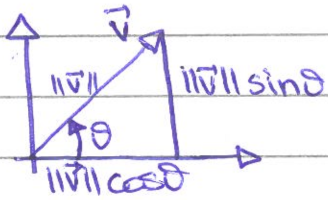
$$\left\| \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} \right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|} \cdot \|\vec{v}\| = 1.$$

π.χ. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\vec{v} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Το ζητούμενο διάνυσμα του $\vec{u} = \dfrac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \dfrac{2}{3}\hat{i} + \dfrac{2}{3}\hat{j} - \dfrac{1}{3}\hat{k}$

## ΕΥΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$




Έστω $\theta$ η γωνία του OX με το διάνυσμα $\vec{v}$ $(0 \le \theta \le \pi)$

Από τριγωνομετρία οι πλευρές είναι $\|\vec{v}\| \cos\theta$

$\|\vec{v}\| \sin\theta$

Άρα $\vec{v} = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta) = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta)$.

π.χ. Να βρεθεί η γωνία του OX με το διάνυσμα $\vec{v} = -\sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j}$

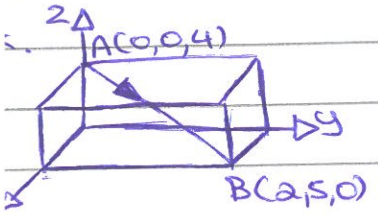
$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \overline{4} = 2$. είναι $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta)$

$\Rightarrow -\sqrt{3} = 2\cos\theta$ και $1 = 2\sin\theta$

$\Rightarrow \dfrac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\theta$ και $\dfrac{1}{2} = \sin\theta$

Εφόσον $0 \le \theta \le \pi \rightarrow \theta = \dfrac{5\pi}{6}$.

ν έχουμε διάνυσμα $\vec{v}$ με γνωστό μέτρο $\lambda$ που είναι στην κατεύθυνση
ο $\vec{\omega}$. Τότε $\vec{v} = \lambda \dfrac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}$




Το $\vec{v}$ έχει μέτρο $\sqrt{5}$. Να βρεθεί το $\vec{v}$

$\vec{v} = \sqrt{5}\, \dfrac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|}$ $\quad \vec{AB} = (2,5,-4)$

$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2+5^2+(-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$

ρα $\vec{v} = \sqrt{5}\, \dfrac{(2,5,-4)}{3\sqrt{5}} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{-4}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\hat{i} + \dfrac{5}{3}\hat{j} - \dfrac{4}{3}\hat{k}$

## ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, το εσωτερικό τους γινόμενο είναι:
$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$

. $(1,-3,4)(1,5,2) = 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 5 + 4 \cdot 2 = 1 - 15 + 8 = -6$.

## ΟΤΗΤΕΣ

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$

) $\vec{u}(\vec{v} + \vec{\omega}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{\omega}$

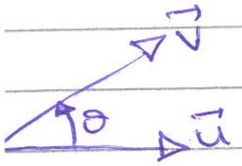
) $\lambda(\vec{u} \cdot \vec{v}) = (\lambda \vec{u}) \cdot \vec{v}$

4) $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$

όπου είναι $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

5) $\vec{0} \cdot \vec{v} = \vec{0}$

## ΝΙΑ 2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$




Έστω θ η γωνία που πρέπει να στρέψουμε 1 διάνυσμα $\vec{u}$ για να έχει ίδια κατεύθυνση με το $\vec{v}$.

ΕΩΡΗΜΑ: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u} \cdot \vec{v}}{\|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\|}$

π.χ. Να βρεθεί η γωνία των $\vec{u} = \hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$ και $\vec{v} = -3\hat{i} + 6\hat{j} - 6\hat{k}$

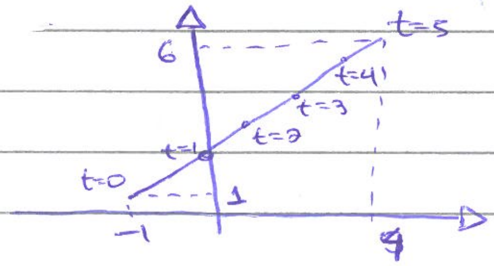
Έστω θ η γωνία $\cos\theta = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{-3-12-12}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{9+36+36}} = \frac{-27}{3\cdot 9} = -1 \Rightarrow \theta = \pi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1. 23/1

1) $x = t-1 \quad y = t+1 \quad (0 \leq t \leq 5)$

$x = t-1 \Rightarrow t = x+1$
$y = t+1 \Rightarrow y = x+1+1$
$\Rightarrow y = x+2$.

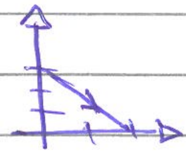
για $t=0 \to x=-1, y=1$
για $t=5 \to x=4, y=6$.




| t | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | -1 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
| y | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6. |

2) $x = 2\sin^2 t, \; y = 3\cos^2 t. \; (0 \leq t \leq \frac{\pi}{2})$

Παρατηρούμε ότι $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}x + 3$
για $t = \frac{\pi}{2} \to x=2, y=0$
για $t=0 \to x=0, y=3$



3) (i) κύκλος με κέντρο O, ακτίνας 5, δεξιόστροφος

$x = 5\cos t \quad y = 5\sin t \; (0 \leq t \leq 2\pi)$ → κύκλος με αριστερόστροφο προσανατολισμό
αντικαθιστούμε $t$ με $-t$.

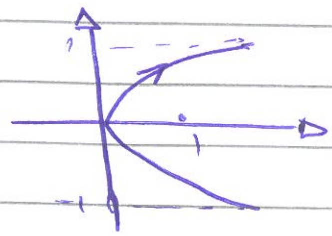
$x = 5\cos t, \; y = -5\sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$.

) (ii) $x=y^2$ από $(1,-1)$ στο $(1,1)$, από κάτω προς τα πάνω

$x=t^2 \quad y=t \quad (-1\le t\le 1)$

ή

$x=\sin^2\theta \quad y=\sin\theta \quad (\frac{\pi}{2}\le\theta\le-\frac{\pi}{2})$



) $x=\frac{1}{2}t^2+1$. $y=\frac{1}{3}t^2-t$. $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ για $t=2$.

$$\frac{dy}{d}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t}\Big|_{t=2}=\frac{3}{2}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{t^2+1}{t^3}\Big|_{t=2}=\frac{5}{8}$$

(i) $x=e^t \quad y=e^{-t}$ για $t=1$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^{-t}}{e^t}=-\frac{1}{e^{2t}}\Big|_{t=1}=-\frac{1}{e^2}$$

κλίση της εφαπτομένης είναι $-\frac{1}{e^2}$

για $t=1$, $x=e$, $y=\frac{1}{e}$ $\quad y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e^2}(x-e)$

$(x,y)=(e,\frac{1}{e})$

(ii) Παρατηρούμε ότι $y=\frac{1}{x}$

Εφαπτομένη στο σημείο $(e,\frac{1}{e})$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=e}=-\frac{1}{e^2}$$

Άρα η εφαπτομένη είναι $y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e^2}(x-e)$.

Υπενθύμιση: $x = x(t) \quad y = y(t) \quad (a \le t \le b)$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\,dt$$

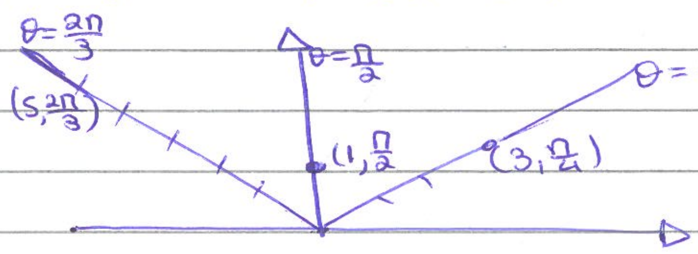
6) (i) $x = t^2 \quad y = \frac{1}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 1)$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (t^2)^2}\,dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^4}\,dt$$
$$= \int_0^1 t\sqrt{4+t^2}\,dt$$
$$\underset{2t\,dt = du}{\overset{4+t^2=u}{=}} \int_4^5 \frac{1}{2}\sqrt{u}\,du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(u^{3/2}\right)_4^5$$
$$= \frac{1}{3}\left(5^{3/2} - 4^{3/2}\right)$$

6) (ii) $x = \cos 3t \quad y = \sin 3t \quad (0 \le t \le \pi)$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(-3\sin 3t)^2 + (3\cos^2 t)}\,dt$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{9}\,dt$$
$$= 3\pi. \quad (= 1{,}5 \text{ μήκος κύκλου ακτίνας } 1)$$

7) $(3, \frac{\pi}{4}) \quad (5, \frac{2\pi}{3}) \quad (1, \frac{\pi}{2})$




Υπενθύμιση: $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \Big| \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$

8) (i) $r = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ κύκλος με κέντρο $(0,0)$ ακτίνας 2

) (ii) $r\sin\theta=4 \Rightarrow y=4$ ευθεία.

) (iii) $r=3\cos\theta \Rightarrow r^2=3r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2+y^2=3x$

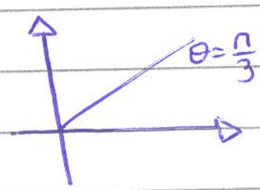
$\Rightarrow \left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)+y^2=\frac{9}{4}$

$\Rightarrow \left(x-\frac{3}{2}\right)^2+y^2=\frac{9}{4}$ κύκλος κέντρου $\left(\frac{3}{2},0\right)$ ακτίνας $\frac{3}{2}$.

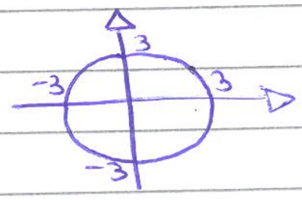
) (iv) $r=\dfrac{6}{3\cos\theta+2\sin\theta} \Rightarrow 3r\cos\theta+2r\sin\theta=6$

$\Rightarrow 3x+2y=6$ ευθεία.

) (i) $\theta=\frac{\pi}{3}$



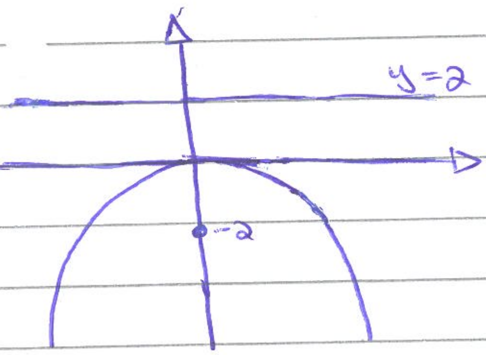

9) (ii) $r=3$




Υπενθύμιση: Παραβολή $p>0$

| | | |
|---|---|---|
| Υπενθύμιση: Παραβολή $p>0$ | $x^2=\pm 4py$ | ανοίγει στην $\pm y$-κατεύθυνση |
| | $y^2=\pm 4px$ | ανοίγει στην $\pm x$-κατεύθυνση |

) $x^2=-8y$




ανοίγει στην $-y$ κατεύθυνση

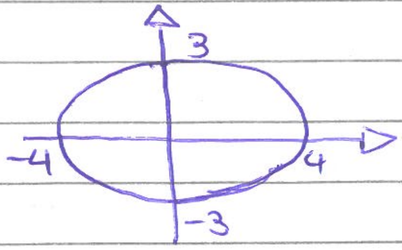
$p=2$

διευθύνουσα $y=2$

εστία $(0,-2)$

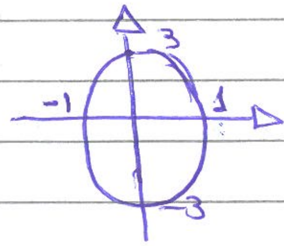
| | | |
|---|---|---|
| Υπενθύμιση: έλλειψη $a>b>0$ | $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ | μεγάλος άξονας → $x$ κατεύθυνση |
| | $\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ | μεγάλος άξονας → $y$ κατεύθυνση |

11) (i) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$




Μεγάλος άξονας: $(-4,0) \rightarrow (4,0)$
Μικρός άξονας: $(0,-3) \rightarrow (0,3)$

11) (ii) $9x^2+y^2=9$
$\Rightarrow x^2+\frac{y^2}{9}=1$

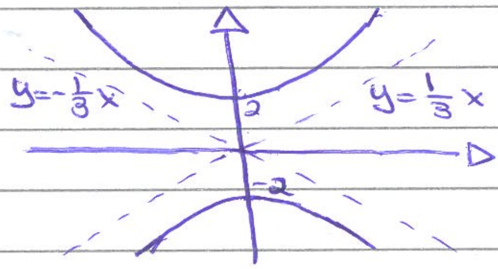



Υπενθύμιση: υπερβολή

| | |
|---|---|
| $\frac{x^2}{\alpha^2} \quad \frac{y^2}{b^2}=1$ | ανοίγει στην x κατεύθυνση |
| $\frac{y^2}{a^2}-\frac{\quad}{b^2}=1$ | ανοίγει στην y κατεύθυνση |

12) (i) $9y^2-x^2=36$
$\Rightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$

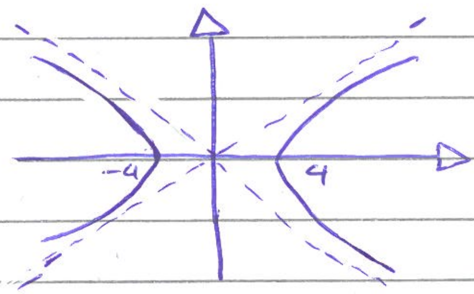
για $x=0$
$\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y=\pm 2$
→ κορυφές $(0,2)(0,-2)$




ασύμπτωτες $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=0 \Rightarrow y^2=\frac{4}{36}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{2}{6}x$

12) (ii) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

για $y=0$ $\frac{x^2}{16}=1 \Rightarrow x=\pm 4$
→ κορυφές $(4,0)(-4,0)$



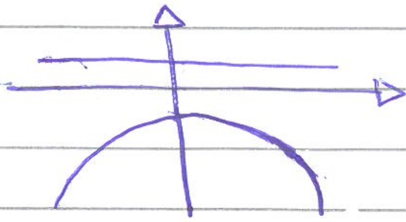

ασύμπτωτες: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0 \Rightarrow y^2=\frac{9}{16}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}x$.

13) (i) Παραβολή με κορυφή (0,0) και διευθύνουσα $y=\frac{1}{4}$

$x^2=-4py$

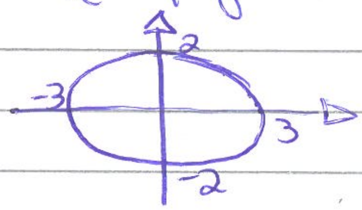
$p=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x^2=-y$



3) (ii) Έλλειψη με άκρα μεγάλου άξονα $(\pm3,0)$, μικρού άξονα $(0,\pm2)$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$




3) (iii) Υπερβολή με κορυφές $(0,\pm2)$, ασύμπτωτες $y=\pm\frac{2}{3}x$.

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ | $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=0$

$\Rightarrow y=\pm\frac{a}{b}x$

$\Rightarrow b=3 \quad a=\pm2.$

Άρα $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1.$

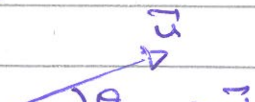
$\vec{v}=(a,b,c)$

Πράξεις Διανυσμάτων $\rightleftarrows$ Πράξεις στον $\mathbb{R}^3$

Μέτρο/Μήκος/Νόρμα $\|\vec{v}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2.3. ΕΣΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$




$(0\le\theta\le\pi)$

$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

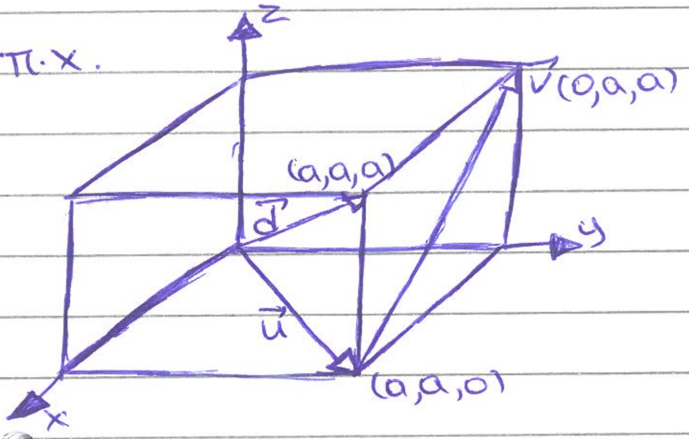
$\vec{u}\cdot\vec{v}>0 \Rightarrow \theta$ οξεία

$\vec{u}\cdot\vec{v}<0 \Rightarrow \theta$ αμβλεία

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u}$ και $\vec{v}$ παράλληλα

Συμπλήρωμα: $\vec{u} // \vec{v} \iff$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

π.χ.




Το σχήμα είναι κύβος.

i) Να βρεθεί η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{u}$ με υπολογιστική

ii) Να βρεθεί η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{v}$ χωρίς υπολογιστική

i) Έστω $\theta$ η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{u}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{d}\cdot\vec{u}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{u}\|}$$

Έστω $a$ η ακμή του κύβου

$\vec{d}=(a,a,a)$ $\vec{u}=(a,a,0)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{d}\cdot\vec{u}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{u}\|} = \frac{a^2+a^2+0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{a^2+a^2+0^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{3a^2}+\sqrt{2a^2}} = \frac{2\cancel{a^2}}{\sqrt{6}\cancel{a^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{6}} \approx 35^\circ$$

ii) $\vec{v} = (0-a, a-a, a-0) = (-a,0,a)$

Έστω $\varphi$ η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{v}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{-a^2+0+a^2}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{a^2+a^2+0}} = 0$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$