

# Χώρος στηλών και μηδενοχώρος

Έστω  $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$  ένας  $m \times n$  πίνακας και

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \mathbf{c}_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$$

οι στήλες του  $A$  ως διανύσματα του  $\mathbb{R}^m$ .

## Ορισμός

Ο **χώρος στηλών** του  $A$  συμβολίζεται με  $\text{Col}(A)$  και είναι το σύνολο  $\text{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\}$ .

Είδαμε ότι το γινόμενο  $A\mathbf{x}$  εκφράζει γραμμικό συνδυασμό των στηλών του  $A$ . Άρα:

Το γραμμικό σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  είναι συμβιβαστό.

- $\Leftrightarrow$  Η εξίσωση  $x_1\mathbf{c}_1 + x_2\mathbf{c}_2 + \dots + x_n\mathbf{c}_n = \mathbf{b}$  έχει λύση.
- $\Leftrightarrow$  Το  $\mathbf{b}$  είναι γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n$ .
- $\Leftrightarrow \mathbf{b} \in \text{Span}\{\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \dots, \mathbf{c}_n\} = \text{Col}(A)$ .

### Θεώρημα

*Το γραμμικό σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν  $\mathbf{b} \in \text{Col}(A)$ .*

## Θεώρημα

Έστω  $A$  ένας  $m \times n$  πίνακας. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.

- 1 Για κάθε  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  το γραμμικό σύστημα  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  είναι συμβιβαστό.
- 2 Κάθε  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$  είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του  $A$ .
- 3  $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$
- 4 Η κλιμακωτή μορφή του  $A$  έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή.

# Παρατήρηση

Υπάρχει περίπτωση δύο πίνακες  $A, B$  να είναι ισοδύναμοι αλλά  $\text{Col}(A) \neq \text{Col}(B)$ .

Υπενθύμιση: Ένα ομογενές σύστημα  $Ax = \mathbf{0}$  είτε έχει μοναδική λύση την τετριμμένη ή έχει άπειρες λύσεις. Στην 2η περίπτωση οι λύσεις εκφράζονται ως παραγόμενος χώρος (Span).

### Παράδειγμα

$$10x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 0$$

## Παράδειγμα

$$3x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 0$$

$$-3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 0$$

$$6x_1 + x_2 - 8x_3 = 0$$

## Ορισμός

Έστω  $A$  ένας  $m \times n$  πίνακας. Το σύνολο λύσεων του ομογενούς γραμμικού συστήματος  $Ax = \mathbf{0}$  λέγεται **μηδενικός χώρος** ή **μηδενοχώρος** ή **πυρήνας** του  $A$  και συμβολίζεται με  $\text{Nul}(A)$ .

## Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$$