ΤΥΠΟΛΟΓΙΟ ΜΑΣ026

Α. Συστήματα συντεταγμένων

Μετατροπή		Τύποι		Περιορισμοί
Πολικές σε καρτεσιανές	$(r,\theta) \to (x,y)$	$x = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta$	$r \geq 0$,
Καρτεσιανές σε πολικές	$(x,y) \to (r,\theta)$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$

Μετατροπή		Τύποι			Περιορισμοί
Κυλινδρικές σε Καρτεσιανές	$(r,\theta,z) \to (x,y,z)$	$x = r\cos\theta$	$y = r\sin\theta$	$z = z$	$r \geq 0$
Καρτεσιανές σε Κυλινδρικές	$(x,y,z) \to (r,\theta,z)$	$r = \sqrt{x^2+y^2}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$z = z$	$\rho \geq 0$
Σφαιρικές σε Καρτεσιανές	$(\rho,\theta,\phi) \to (x,y,z)$	$x = \rho\cos\theta\sin\phi$	$y = \rho\sin\theta\sin\phi$	$z = \rho\cos\phi$	$0 \leq \theta \leq 2\pi$
Καρτεσιανές σε Σφαιρικές	$(x,y,z) \to (\rho,\theta,\phi)$	$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$	$\tan\theta = \dfrac{y}{x}$	$\cos\phi = \dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$	$0 \leq \phi \leq \pi$

Β. Κωνικές Τομές

Κύκλος	$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$	κέντρο (x_0,y_0), ακτίνα r
Παραβολή	$y^2 = \pm 4px$	ανοίγει στην $\pm x$ κατεύθυνση
$(p>0)$	$x^2 = \pm 4py$	ανοίγει στην $\pm y$ κατεύθυνση
Έλλειψη	$x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$	μεγάλος άξονας στην x κατεύθυνση
$(a>b>0)$	$x^2/b^2 + y^2/a^2 = 1$	μεγάλος άξονας στην y κατεύθυνση
Υπερβολή	$x^2/a^2 - y^2/b^2 = 1$	ανοίγει στην x κατεύθυνση
$(a>0, b>0)$	$y^2/a^2 - x^2/b^2 = 1$	ανοίγει στην y κατεύθυνση

Γ. Τετραγωνικές επιφάνειες

Σφαίρα με κέντρο (x_0,y_0,z_0) και ακτίνα r: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

Εξίσωση	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$	$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$	$\dfrac{z^2}{c^2}-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$	$z^2-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	$z-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=0$	$z-\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{x^2}{a^2}=0$
Ταξινόμηση	Ελλειψοειδές	Μονόχωνο υπερβολοειδές	Δίχωνο υπερβολοειδές	Ελλειπτικός κώνος	Ελλειπτικό παραβολοειδές	Υπερβολικό παραβολοειδές

Δ. Ευθείες και επίπεδα στον $\mathbb{R}^3$

Δ.1. Ευθεία που διέρχεται από το σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{u}=(a,b,c)$.

Διανυσματική εξίσωση	$\vec{r} = \vec{OP} + t\vec{u},\ t\in\mathbb{R}$
Παραμετρικές εξισώσεις	$x = x_0+at, y = y_0+bt, z = z_0+ct,\ t\in\mathbb{R}$
Συμμετρικές εξισώσεις	$\dfrac{x-x_0}{a} = \dfrac{y-y_0}{b} = \dfrac{z-z_0}{c}$

Δ.2. Επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (a, b, c)$

Διανυσματική εξίσωση	$\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{OP}) = 0$
Καρτεσιανή εξίσωση	$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$ ή $\quad ax + by + cz + d = 0$

Δ.3. Απόσταση σημείου $P(x_0, y_0, z_0)$ από επίπεδο $ax + by + cz + d = 0$.

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Δ.4. Εφαπτόμενο επίπεδο επιφάνειας σε σημείο (x_0, y_0, z_0)

Είδος επιφάνειας	Εξίσωση εφαπτόμενου επιπέδου
Γράφημα συνάρτησης $z = f(x, y)$	$z = f_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y(x_0, y_0)(y - y_0) + f(x_0, y_0)$
Επιφάνεια $F(x, y, z) = c$	$F_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) + F_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) + F_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0) = 0$

Ε. Τύποι μήκους, εμβαδού και όγκου

Ε.1. Μήκος καμπύλης

$r(t) = (x(t), y(t)) \quad (a \le t \le b)$	$\int_a^b \lVert r'(t) \rVert \, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \, dt$
$r(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (a \le t \le b)$	$\int_a^b \lVert r'(t) \rVert \, dt = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \, dt$

Ε.2. Εμβαδόν και όγκος

Εμβαδόν χωρίου D στο xy-επίπεδο	$\iint_D 1 \, dA$
Εμβαδόν επιφάνειας $z = f(x, y)$, $(x, y) \in D$	$\iint_D \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} \, dA$
Όγκος στερεού G	$\iiint_G 1 \, dV$

ΣΤ. Γνωστά ολοκληρώματα

$$\int \frac{a}{a^2 + x^2} \, dx = \tan^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{a}{a^2 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{x + a}{x - a} \right|$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \sin^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{a}{x\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \sec^{-1} \frac{x}{a}$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} \, dx = \cosh^{-1} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - a^2}\right)$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \, dx = \sinh^{-1} \frac{x}{a} = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + a^2}\right)$$

Z. Τριγωνομετρικές ταυτότητες

$$\begin{aligned}
\sin\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cos x \\
\cos\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sin x \\
\tan\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \cot x \\
\cot\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \tan x \\
\sec\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \csc x \\
\csc\left(\tfrac{\pi}{2}-x\right) &= \sec x \\
\sin(2x) &= 2\sin x\cos x \\
\cos(2x) &= \cos^2 x-\sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x-1 \\
&= 1-2\sin^2 x \\
\tan(2x) &= \tfrac{2\tan x}{1-\tan^2 x} \\
\sin(-x) &= -\sin x \\
\cos(-x) &= \cos x \\
\tan(-x) &= -\tan x
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x\cos y+\cos x\sin y \\
\sin(x-y) &= \sin x\cos y-\cos x\sin y \\
\cos(x+y) &= \cos x\cos y-\sin x\sin y \\
\cos(x-y) &= \cos x\cos y+\sin x\sin y \\
\tan(x+y) &= \tfrac{\tan x+\tan y}{1-\tan x\tan y} \\
\tan(x-y) &= \tfrac{\tan x-\tan y}{1+\tan x\tan y} \\
\sin x+\sin y &= 2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \\
\sin x-\sin y &= 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \\
\cos x+\cos y &= 2\cos\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\cos\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \\
\cos x-\cos y &= -2\sin\left(\tfrac{x+y}{2}\right)\sin\left(\tfrac{x-y}{2}\right) \\
\tan x+\tan y &= \tfrac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y} \\
\tan x-\tan y &= \tfrac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin x\sin y &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y)-\cos(x+y)\right] \\
\cos x\cos y &= \tfrac{1}{2}\left[\cos(x-y)+\cos(x+y)\right] \\
\sin x\cos y &= \tfrac{1}{2}\left[\sin(x+y)+\sin(x-y)\right] \\
\tan x\tan y &= \tfrac{\tan x+\tan y}{\cot x+\cot y} \\
\tan x\cot y &= \tfrac{\tan x+\cot y}{\cot x+\tan y} \\
\sin\tfrac{x}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1-\cos x}{2}} \\
\cos\tfrac{x}{2} &= \pm\sqrt{\tfrac{1+\cos x}{2}} \\
\tan\tfrac{x}{2} &= \tfrac{1-\cos x}{\sin x} \\
&= \tfrac{\sin x}{1+\cos x}
\end{aligned}$$