ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ
Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Να υπολογιστούν τα διαδοχικά ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (x+3)\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_2^4\int_0^1 x^2y\,dx\,dy$

iii) $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\,dx$ iv) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,dy\,dx$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στο δοσμένο ορθογώνιο.

i) $\displaystyle\iint_R 4xy^3\,dA$, $R=[-1,1]\times[-2,2]$

ii) $\displaystyle\iint_R x\sqrt{1-x^2}\,dA$, $R=[0,1]\times[2,3]$

3. Περιγράψτε (χωρίς να υπολογίσετε) τον όγκο που εκφράζουν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^5\int_1^2 4\,dx\,dy$ ii) $\displaystyle\int_0^3\int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2}\,dy\,dx$

4. Να δείξετε ότι αν $f(x,y)=g(x)h(y)$ και $R=[a,b]\times[c,d]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \left[\int_a^b g(x)\,dx\right]\left[\int_c^d h(y)\,dy\right]$$

5. Να βρεθεί ο όγκος μεταξύ του επιπέδου $z=2x+y$ και του ορθογωνίου $R=[3,5]\times[1,2]$.

6. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού κάτω από την επιφάνεια $z=x^2$ που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0$, $x=2$, $y=3$, $y=0$ και $z=0$.

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\,dy\,dx$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R x^2\,dA$, όπου R το χωρίο που ορίζεται από τις $y=16/x$, $y=x$ και $x=8$, με δύο τρόπους.

9. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\iint_R (x-1)\,dA$, όπου R το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ των $y=x$ και $y=x^3$.

ii) $\displaystyle\iint_R \sin(y^3)\,dA$, όπου R το χωρίο μεταξύ των $y=\sqrt{x}$, $y=2$ και $x=0$.

10. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από τις $y^2 = 9 - x$ και $y^2 = 9 - 9x$.

11. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = 9x^2 + y^2$, από κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και πλευρικά από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ και $y = 2$.

12. Να αλλαχθεί η σειρά ολοκλήρωσης στα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^4 \int_{2y}^{8} f(x,y)\,dx\,dy$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης.

i) $\displaystyle\int_0^1 \int_{4x}^{4} e^{-y^2}\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}\,dx\,dy$

14. Να βρεθεί το εμβαδόν των παρακάτω επιφανειών με διπλό ολοκλήρωμα.

i) Επιφάνεια του κυλίνδρου $y^2 + z^2 = 9$ πάνω από το ορθογώνιο $R = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 2, -3 \le y \le 3\}$.

[Υπενθύμιση: $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1}\frac{x}{a} + C$*]*

ii) Επιφάνεια του κώνου $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ πάνω από το χωρίο που δημιουργούν οι καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου.

15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2)\,dx\,dy\,dz$ ii) $\displaystyle\int_0^2 \int_{-1}^{y^2} \int_{-1}^{z} yz\,dx\,dz\,dy$

iii) $\displaystyle\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^{x} xy\,dy\,dx\,dz$ iv) $\displaystyle\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y\,dy\,dz\,dx$

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\iiint_G xy\sin(yz)\,dV$, όπου G το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \le x \le \pi$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le \pi/6$.

ii) $\displaystyle\iiint_G y\,dV$, όπου G το στερεό που περικλείεται από το xy-επίπεδο, το επίπεδο $z = y$ και τον παραβολικό κύλινδρο $y = 1 - x^2$.

17. Να υπολογιστεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με τριπλό ολοκλήρωμα.

i) Το στερεό στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από τα επίπεδα xy, xz και yz και από το επίπεδο $3x + 6y + 4z = 12$.

ii) Το στερεό που περικλείεται από την επιφάνεια $z = \sqrt{y}$ και τα επίπεδα $x + y = 1$, $x = 0$ και $z = 0$.

18. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα του στερεού με τον αντίστοιχο όγκο.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{y+1} dz\, dy\, dx$

ii) $\displaystyle\int_{0}^{1} \int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} \int_{0}^{2} dy\, dz\, dx$