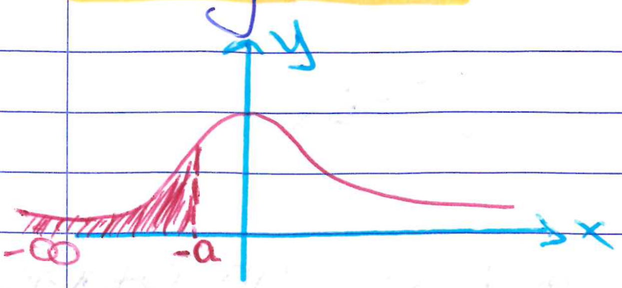
Κεφάλαιο 2 - Γενικευμένα ολοκληρώματα



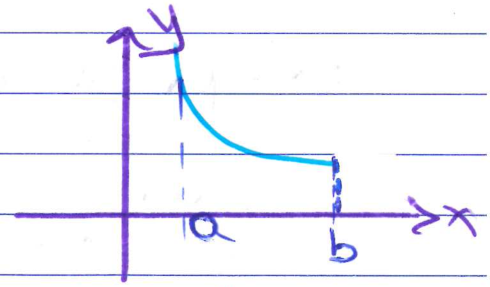
Θα δούμε ολοκληρώματα:

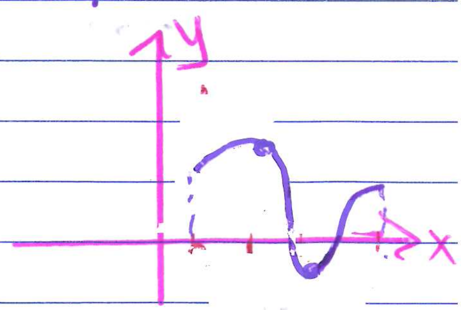
i) συνεχών συναρτήσεων στο διάστημα $[a,+\infty)$ ή $(-\infty,-a]$

ii) συναρτήσεων που δεν είναι φραγμένες* στο διάστημα $[a,b]$

*Μία συνάρτηση είναι φραγμένη αν υπάρχει $M \geq 0$ ώστε $|f(x)| \leq M$

Ολοκληρώματα αυτών των συναρτήσεων λέγονται γενικευμένα ολοκληρώματα



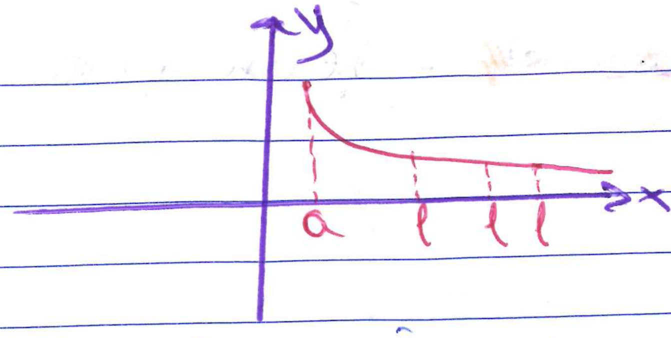


Ορισμός: Αν η f είναι συνεχής στο $[a,+\infty)$ τότε το γενικευμένο ολοκλήρωμα

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx$$

ορίζεται ως:

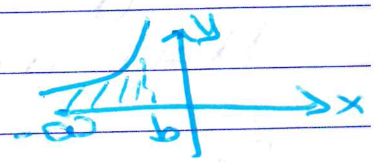
$$\int_{-a}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{l \to +\infty} \int_a^{l} f(x)\,dx$$



Αν το όριο υπάρχει λέμε ότι το ολοκλήρωμα συγκλίνει. Διαφορετικά θα λέμε ότι αποκλίνει ή δεν συγκλίνει.

Αν η f είναι συνεχής στο (-a,b] τότε ορίζουμε:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{l\to-\infty}\int_{l}^{b} f(x)\,dx$$



Ορίζουμε επίσης:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)dx + \int_{a}^{+\infty} f(x)dx.$$

$$= \lim_{l\to-\infty}\int_{l}^{a} f(x)dx + \lim_{l\to+\infty} f(x)d$$

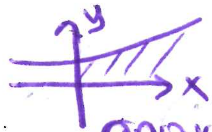
Λέμε ότι ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$.

συγκλίνει αν και τα 2 ολοκληρώματα

$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ και $\int_{a}^{+\infty} f(x)\,dx$.

συγκλίνουν.

~~Ψευδ~~ Ψευδίμονα:



αποκλίνει

1) $\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim\limits_{l\to+\infty} \int_a^{l} f(x)\,dx$

2) $\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim\limits_{l\to-\infty} \int_l^{a} f(x)\,dx$

3) $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{\infty} f(x)\,dx$

Ex i) $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^2}\,dx = \lim\limits_{L\to+\infty} \int_1^{L} \frac{1}{x^2}\,dx$

$= \lim\limits_{L\to+\infty} \left[-\frac{x^{-1}}{1}\right]_1^{L} = \lim\limits_{L\to+\infty} \left(-\frac{1}{L} + \frac{1}{1}\right)$

$= 0 + 1 = 1$ //

ii) $$\int_{-\infty}^{0} \frac{e^x}{3-2e^x} = \lim_{L \to -\infty} \int_{L}^{0} \frac{e^x}{3-2e^x}$$

$$= \lim_{L \to -\infty} -\left[\frac{\ln|3-2e^x|}{2}\right]_L^0$$

$\ln 1 = 0$

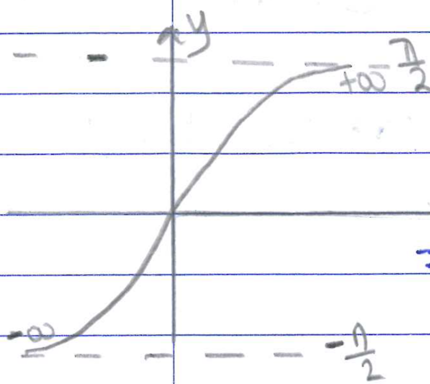
$$= -\frac{\cancel{\ln 1}}{\cancel{2}} + \ln\frac{3}{2}$$

$$= {}^{0}-\ln\frac{3}{2} \;//$$

iii) $$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

μπορώ να βάλω
ότι θέλω(για διευκόλυνση)

$$= \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \int_{0}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

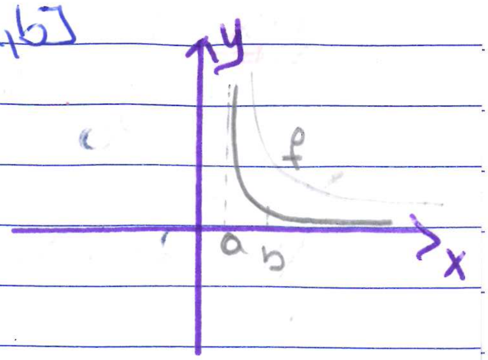


$$= \lim_{L \to -\infty} \int_{L}^{0} \frac{1}{1+x^2}\,dx + \lim_{L \to +\infty} \int_{0}^{L} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

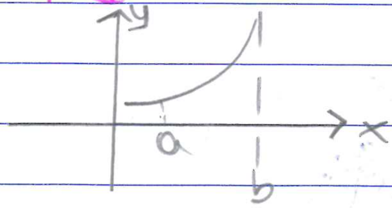
$$= \lim_{L \to -\infty} [\text{τοξεφ}x]_L^0 + \lim_{L \to +\infty} [\text{τοξεφ}x]_L^0$$

$$= \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \;//$$

Αν η f είναι συνεχής στο [a,b] ή (a,b] αλλά $f(x) \to +\infty$ ή $f(x) \to -\infty$ καθώς $x \to b^-$ ή $x \to a^+$ τότε ορίζουμε το γενικευμένο ολοκλήρωμα



$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{L \to b^-} \int_a^L f(x)\,dx$$



ή

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{L \to a^+} \int_L^b f(x)\,dx$$

Αν η f είναι συνεχής στο [a,b] με εξαίρεση ένα σημείο $c \in [a,b]$ στο οποίο η f τείνει στο $+\infty$ ή στο $-\infty$, τότε το

$\int_a^b f(x)\,dx$ συγκλίνει αν και μόνο αν τα

$$\int_a^c f(x)\,dx \quad \text{και} \quad \int_c^b f(x)\,dx$$

συγκλίνουν και

$$\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

Πχ $\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx$

Η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x=9$. Έχουμε

$$\int_0^9 \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx = \lim_{L\to 9^-} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx$$

$$\int (\sqrt{9-x})^{-1}\,dx$$

$$= -\frac{2(9-x)^{1/2}}{1}$$

$$= \lim_{L\to 9^-} \int_0^L \frac{1}{\sqrt{9-x}}\,dx$$

$$= \lim_{L\to 9^-} -2\left[(9-x)^{\frac{1}{2}}\right]_0^L$$

$$= \lim_{L\to 9^-} \left(-2\left((9-L)^{\frac{1}{2}} - (9-0)^{1/2}\right)\right)$$

$$= \lim_{L\to 9^-} \left(-2(9-L)^{\frac{1}{2}} - 2(-3)\right) = -2\cdot\overset{0}{0} - 2(-3)$$

$$= 6$$

ηx

$$\int_{-3}^{1} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$$

Η $f(x)$ δεν είναι συνεχής στο $x=-3$.

Έχουμε:

$$\int_{-3}^{1} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx = \lim_{L \to -3^+} \int_{L}^{1} \frac{x}{\sqrt{9-x^2}}\, dx$$

$$= \lim_{L \to -3^+} \int_{L}^{1} x(9-x^2)^{-1/2}\, dx$$

$$= \lim_{L \to -3^+} \left[-x(9-x)^{1/2}\right]_L^1$$

$$= \lim_{L \to -3^+} \left(-1(9-1)^{1/2} + L(9-L^2)^{1/2}\right)$$

$$= -8^{1/2} + 0 = -\sqrt{8} \;//$$

Πχ $\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx$

Η $f(x)$ είναι ασυνεχής στο $x=2 \in [0,3]$ γι' αυτό θα χωρίσω τα όρια:

Άρα

$$\int_0^3 \frac{1}{x-2}\,dx = \int_0^2 \frac{1}{x-2}\,dx + \int_2^3 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \lim_{L \to 2^-} \int_0^L \frac{1}{x-2}\,dx + \lim_{L \to 2^+} \int_L^3 \frac{1}{x-2}\,dx$$

$$= \lim_{L \to 2^-} \left[\ln|x-2|\right]_0^L + \lim_{L \to 2^+} \left[\ln|x-2|\right]_L^3$$

$$= \lim_{L \to 2^-} \left(\ln(L-2) - \ln(-2)\right) + \lim_{L \to 2^+} \left(\ln(3-2) - \ln(L-2)\right)$$

Αποτέλεσμα: Επειδή $\lim_{L \to 2^-} \ln(L-2) = -\infty$, το ολοκλήρωμα $\nexists$ (αποκλίνει).

Πχ Να εξετάσετε αν το ολοκλήρωμα συγκλίνει

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{L \to 1^-} \int_0^L \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$$

$$= \int \left(\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}} \right) dx$$

$$= \int \frac{1+x}{\sqrt{(1-x)(1+x)}}\,dx = \int \frac{1+x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$$= \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$$

$\Downarrow$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $\Downarrow$

τοξημ$x + c$ $\qquad\qquad\qquad$ $-(1-x^2)^{1/2} + c$

Άρα $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx = \lim_{L \to 1^-} \int_0^L \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx$

$$= \lim_{L \to 1^-} \left[-(1-x^2)^{1/2} + \text{τοξημ}\,x \right]_0^L$$

$$= \lim_{L \to 1^-} \left(-(1-L^2)^{1/2} + \text{τοξημ}\,1 \right) + (1-0^2)^{1/2} + \text{τοξημ}\,0$$

$$= \pi/2 + 1 \;//$$

Πχ Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική

$y = \frac{8}{x^2-4}$ και τον άξονα x για $x \geq 3$

$$\int_3^{+\infty} \frac{8}{x^2-4}\,dx = \lim_{L\to+\infty} \int_3^{L} \frac{8}{x^2-4}\,dx$$

$$\int \frac{8}{x^2-4}\,dx = 8\int \frac{1}{(x-2)(x+2)}\,dx$$

$$\frac{1}{(x+2)(x-2)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x+2}$$

$$1 = A(x+2) + B(x-2)$$

για $x=-2$: $\frac{1}{-4} = -\frac{4B}{-4} \Rightarrow \boxed{-\frac{1}{4} = B}$

για $x=2$: $1 = 4A \Rightarrow \boxed{A = 1/4}$

οπότε $8\int \frac{1}{x^2+4}\,dx = 8\int \frac{1}{4(x-2)}\,dx - \int \frac{1}{4(x+2)}\,dx$

$$= 2\ln|x-2| - 2\ln|x+2| = 2\ln\frac{|x-2|}{|x+2|}$$

Άρα $\int_3^{+\infty} \frac{8}{x^2-4}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\left[2\ln\frac{(x-2)}{(x+2)}\right]_3^L$

$$= \lim_{L\to+\infty}{}^{*}\left\{\ln\frac{(L-2)}{(L+2)}\right\} + \lim_{L\to+\infty} 2\ln\frac{1}{5}$$

$$= \ln 1 - 2\ln\frac{1}{5} = -2\ln\frac{1}{5} \,//$$

$$* \lim_{L\to+\infty} \frac{(L-2)}{(L+2)} = 1$$

Υπενθύμιση:

$$\int_a^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{L\to+\infty} \int_0^L f(x)\,dx$$

$$\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx = \lim_{L\to-\infty} \int_L^0 f(x)\,dx$$

Αν η f απειρίζεται σε κάποιο $c \in [a,b]$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{L\to c^-} \int_a^L f(x)\,dx + \lim_{L\to c^+} \int_L^b f(x)\,dx.$$

Κανόνες De L' Hospital

Θεώρημα 1

Έστω $\lim f(x)=0$ και $\lim g(x)=0$.

Αν $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ όπου $L \in \mathbb{R}$ ή $+\infty$ ή $-\infty$

τότε $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$

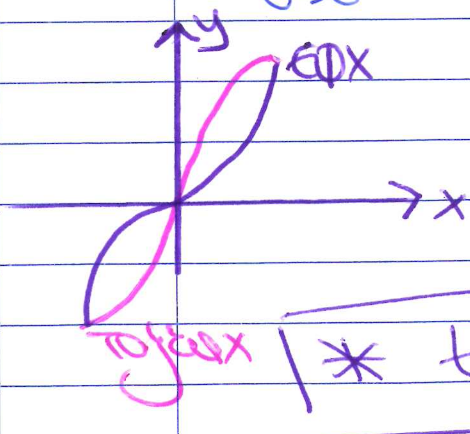
lim είναι ένα από τα $\lim\limits_{x\to a}$, $\lim\limits_{x\to a^-}$, $\lim\limits_{x\to a^+}$

$\lim\limits_{x\to +\infty}$, $\lim\limits_{x\to -\infty}$

1) Πχ $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\tan 5x} = \frac{0}{0}$.

Από DLH $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(\sin 3x)'}{(\tan 5x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3\cos 3x}{5\sec^2 5x} = 3/5$

2) $\lim\limits_{u\to 0} \frac{u\tan^{-1}u}{1-\cos u} = \frac{0}{0}$.



$\lim\limits_{u\to 0} \frac{(u\tan^{-1}u)'}{(1-\cos u)'} = \frac{\tan^{-1}u + u\cdot\frac{1}{1+u^2}}{ημu}$

$\boxed{* \ \tan^{-1}{}'(x) = \frac{1}{1+x^2}}$

Από DLH:

$$\lim_{u\to 0} \frac{\left(\tan^{-1}u + u \cdot \frac{1}{1+u^2}\right)'}{(\sin u)'} = \lim_{u\to 0} \frac{\frac{1}{1+u^2} + \frac{1+u^2-u2u}{(1+u^2)^2}}{\cos u}$$

$$= 2 //$$

3) $$\lim_{x\to 0+} \frac{2-e^x-e^{-x}}{2x^2} = \frac{0}{0}$$

DLH $\Rightarrow$ $$\lim_{x\to 0^-} \frac{(2-e^x-e^{-x})'}{(2x^2)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-e^x+e^x}{4x}$$

DLH $\Rightarrow$ $$\lim_{x\to 0^-} \frac{(-e^x+e^x)'}{(4x)'} = \lim_{x\to 0^-} \frac{-e^x-e^x}{4} = -\frac{2}{4}$$

$$= -\frac{1}{2} //$$

4) $$\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{\ln x}{x^4-1}} = \frac{0}{0}$$

DLH $\Rightarrow$ $$\lim_{x\to 1} \frac{(\ln x)'}{(x^4-1)'} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{4x^3}{1}} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{4x^4}$$

$$= 1/4 //$$

Άρα $\lim_{x\to 1} \sqrt{\frac{1}{4}} = 1/2 //$

Ισχύει και για $\left(\frac{\ln x}{x^4-1}\right)^5$ πχ.
θα πάρω το
από μέσα και
θα το υψώσω μετά στην $5^{η}$//.

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(\ln x)}{x\ln x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

DLH $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{(\ln(\ln x))'}{(x\ln x)'} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln x}\cdot\frac{1}{x}}{\ln x + x\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\frac{1}{\ln x}\cdot}{\frac{\ln x+1}{1}}$

$=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{1}{x\ln x(\ln x+1)} = 0$

Παρατήρηση: Ο κανόνας DLH δεν πετυχαίνει πάντα

Πχ $\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sec x}{\tan x} = \dfrac{\infty}{\infty}$

$\boxed{\dfrac{1}{\sigma υν x} = \sec}$

$(\varepsilon\varphi x)' = \sigma\varepsilon c\, x$

$(\sigma\varepsilon c\, x)' = \tau\varepsilon\varphi x$

$=\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{(\sec x)'}{(\tan x)'} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\sec x}$ $\dfrac{\infty}{\infty}$

DLH $\Rightarrow \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\tan x}{\sec x} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sec x}{\tan x}$.

$\Rightarrow$ Δεν βγαίνει αποτέλεσ

$\lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\sec x}{\tan x} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\frac{1}{\cos x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \lim\limits_{x\to\pi/2}\dfrac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}\sin x} = 1$

Άλλες απροσδιόριστες μορφές:

$0 \cdot \infty$, Προσπαθούμε να δημιουργήσουμε κλάσματα

Δηλαδή,

$$\lim_{x\to+\infty} x\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{\frac{1}{x}}$$

note:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+1}{x-1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x}}{\cancel{x}} = 1$$

$$\text{DLH} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(\ln\left(\frac{(x+1)}{(x-1)}\right)\right)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{(x-1)-(x+1)}{(x-1)^2}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\cancel{x-1}}{x+1} \cdot \frac{-2}{(x-1)^{\cancel{2}}}}{-\frac{1}{x^2}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{2x^2}{x^2-1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{2\cancel{x^2}}{\cancel{x^2}} = 2$$

• $+\infty - \infty$

Λύση,

$$\lim_{x\to 0^+}\left(\overset{+\infty-\infty}{\frac{1}{x}-\frac{1}{\sin x}}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\sin x - x}{x\sin x} = \frac{0}{0}.$$

$$DLH \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{\cos x - 1}{\sin x + x\cos x}.$$

$$DLH \Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{-\sin x}{\cos x + \cos x - x\sin x} = 0 \,//$$

• $0^0,\ 0^\infty,\ \infty^0,\ 1^\infty$

$\ln(x^a) = a\ln x$

Ex $\lim_{x\to 1^+} x^{\frac{1}{x-1}} = 1^\infty$

Θέτουμε $y = \ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{x-1}\ln x = \frac{\ln x}{x-1}.$$

$$\lim_{x\to 1^+} y = \lim_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1} = \frac{0}{0}.$$

$$DLH \Rightarrow \lim_{x\to 1^+}\frac{\frac{1}{x}}{1} = 1 \,//$$

$$y=\ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right) \Rightarrow e^y = e^{\ln\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)}$$

Άρα, $\lim_{x\to 1^+}\left(x^{\frac{1}{x-1}}\right)=\lim_{x\to 1^+} e^y = e^1 = e$

Π.Χ. $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = 1^\infty$

Θέτουμε $y=\ln(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = \frac{1}{x}\ln(1+\sin 2x)$

$\lim_{x\to 0^+} y = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x}\ln(1+\sin 2x) = \frac{0}{0}$

$DLH \Rightarrow \lim_{x\to 0^+} \frac{(\ln(1+\sin 2x))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0^+} \frac{2\text{συν}2x}{1}$

$\cos x = \text{συν}x$
$\sin x = \text{ημ}x$
$(\cos x)' = -\text{ημ}x$
$(\sin x)' = \text{συν}x$

$\boxed{y=2}$ //

Αντικαθιστούμε στο πιο πάνω όριο το που βρήκαμε το y:

$y=\ln\left((1+\sin 2x)^{1/x}\right) \Rightarrow e^y = (1+\sin 2x)^{1/x}$

Άρα $\lim_{x\to 0^+}(1+\sin 2x)^{1/x} = \lim_{x\to 0^+} e^y = e^2$ //

$(a^x)' = a^x \ln a$

IX $\lim\limits_{x\to+\infty} (3^x+5^x)^{1/x} = \infty^0$

Θέτουμε:

$$\boxed{y = \ln\left((3^x+5^x)^{1/x}\right) = \frac{\ln(3^x+5^x)}{x}}$$

$$\lim_{x\to+\infty} y = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(3^x+5^x)}{x} = \frac{+\infty}{+\infty}$$

$$\Rightarrow \text{DLH} \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3^x\ln 3 + 5^x \ln 5}{3^x+5^x}}{1}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{5^x}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x \ln 3 + \ln 5\right)}{\cancel{5^x}\left(\left(\frac{3}{5}\right)^x + 1\right)}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \left(\frac{3}{5}\right)^x = 0$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{0\cdot\ln 3 + \ln 5}{0+1} = \ln 5$$

Άρα, $\lim\limits_{x\to+\infty} (3^x+5^x)^{1/x} = \lim\limits_{x\to+\infty} e^y = e^{\ln 5} = 5$

Υπενθύμιση: $\int \upsilon \cdot v - \int v \cdot d\upsilon$

$$\int \ln x \, dx = x\ln x - \int x \frac{1}{x} \, dx$$

Όπου

$\upsilon = \ln x$ $\qquad = x\ln x - x + c \,//$

$d\upsilon = \frac{1}{x} \, dx$.

$v = \int dx = x$.

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{L \to 0^+} \int_L^1 \ln x \, dx$$

Η $\ln x$ είναι ασυνεχής στο 0.

$$\int_L^1 \ln x \, dx = [x\ln x - x]_L^1$$

$$= -L\ln L + L + 1\ln 1 - 1$$

$$\boxed{= -L\ln L + L - 1}$$

$$\int_0^1 \ln x \, dx = \lim_{L \to 0^+} \int_L^1 \ln x \, dx$$

$$= \lim_{L \to 0^+} (-L\ln L + L - 1)$$

$$= \lim_{L \to 0^+} \left(\left(\frac{-\ln L}{\frac{1}{e}} \right) + e - 1 \right) \qquad \frac{\infty}{\infty}$$

$$\lim_{L \to 0^+} \frac{-\frac{1}{e}}{-\frac{1}{e^2}} + L - 1 = \lim_{L \to 0^+} L + L - 1$$

$$= -1 \,//$$

Υπενθύμιση:

Κανόνες DLH

Αν $\frac{f(x)}{g(x)} \to \frac{0}{0}$ ή $\frac{\infty}{\infty}$

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

Παράδειγμα:

Να υπολογίσετε τα ολοκληρώματα

i) $\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx.$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \lim_{L \to +\infty} \int_1^{L} \frac{\ln x}{x^2}\, dx$$

$$\int_1^{L} \frac{\ln x}{x^2}\, dx = \Big[\ln x\, x^{-1}\Big]_1^L - \int_1^L -x^{-1}\, \frac{1}{x}\, dx$$

$u = \ln x$

$\boxed{du = \frac{1}{x} dx}$

$v = \int \frac{1}{x^2}\, dx$

$v = \int x^{-2}\, dx$

$v = -x^{-1}$

$$\Big[\ln x\, x^{-1}\Big]_1^L + \int_1^L \frac{1}{x^2}\, dx$$

$$\frac{\ln L}{L} - \Big[\frac{1}{x}\Big]_1^L = -\frac{\ln L}{L} - \frac{1}{L} + 1$$

$$\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\left(\frac{-\ln L}{L} - \frac{1}{L} + 1\right)$$

$$= \lim_{L\to+\infty}\left(-\frac{\ln L}{L}\right) - 0 + 1$$

$$\frac{\infty}{\infty} \Rightarrow DLH \lim_{L\to+\infty} \frac{\frac{1}{L}}{1} + 1 = 1$$

ii) (κατά παράγ)

$$\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_0^L xe^{-3x}\,dx$$

$$\int_0^L xe^{-3x}\,dx = -1/3\int_0^L x(e^{-3x})'\,dx$$

$$= \left[-1/3\, xe^{-3x}\right]_0^L + \frac{1}{3}\int_0^L e^{-3x}\,dx$$

$$= -1/3\, Le^{-3L} + 0 + 1/3\left[-1/3\, e^{-3x}\right]_0^L$$

$$= -1/3\, Le^{-3L} - \frac{1}{9}e^{-3L} + \frac{1}{9}\underbrace{e^0}_{1}$$

Άρα $\displaystyle\int_0^{\infty} xe^{-3x}\,dx = \lim_{L\to+\infty}\left(-\frac{1}{3}Le^{-3L} - \frac{1}{9}e^{-3L} + 1/9\right)$

$$= -1/3 \lim_{L\to\infty}\left(\frac{L}{e^{3L}}\right) - 1/9\cdot 0 + 1/9$$

$\frac{\infty}{\infty}$

$$\text{DLH} \Rightarrow \frac{1}{3} \lim_{L \to +\infty} \cancel{\frac{1}{3e^{3L}}} + \frac{1}{9}$$

0

$$= \frac{1}{9}$$