

ΜΑΣ026

Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Σ. Δημόπουλος και Σ. Παπαπαναγίδης

Κεφάλαιο 5: ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

5.1 Διπλά Ολοκληρώματα

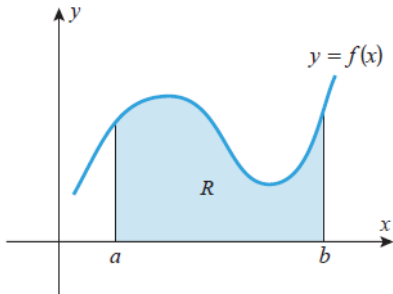
5.2 Διπλό Ολοκλήρωμα κάτω από γενικότερα χωρία

5.3 Τριπλά Ολοκληρώματα

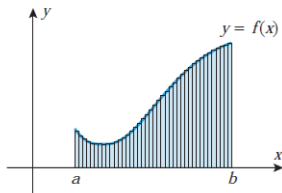
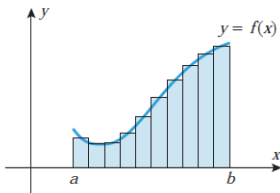
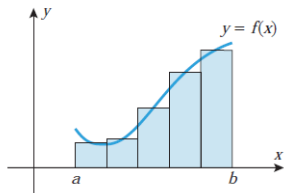
5.4 Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών

Διπλά Ολοκληρώματα

Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα δημιουργήθηκε αρχικά για τον υπολογισμό εμβαδού κάτω από καμπύλη $y = f(x)$.



Ουσιαστικά διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε υποδιαστήματα $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ όπου $x_0 = a$ και $x_n = b$, και προσεγγίζουμε το εμβαδόν με το άθροισμα εμβαδων πολυγώνων με βάσεις $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \dots, n-1$ και ύψος $f(x_i^*)$, $x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$.

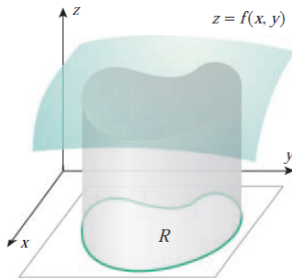


$$\text{Προσέγγιση} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*) \Delta x_i, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

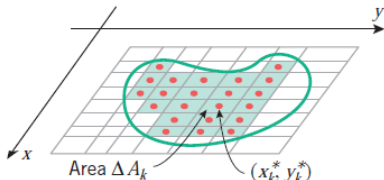
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*) \Delta x_i \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \text{ (Εάν υπάρχει)}$$

Διπλό Ολοκλήρωμα

Πρόβλημα: Εάν $z = f(x, y)$ μη-αρνητική συνεχής συνάρτηση σε περιοχή R του xy -επιπέδου, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περιέχεται μεταξύ του γραγήματος και του R .

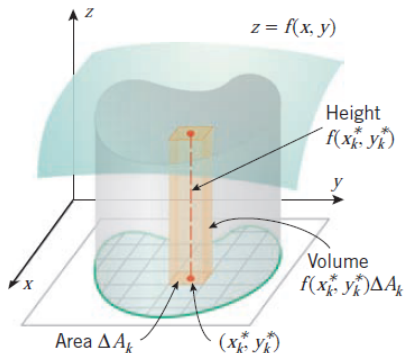


Θα προσεγγίσουμε τον όγκο με παραλληλεπίπεδα. Δεδομένου ότι το R σε περιέχεται κάποιο ορθογώνιο στο \mathbb{R}^2 , διαμερίζουμε το R σε πιο μικρά ορθογώνια της μορφής $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.



Θεωρούμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε τέτοιο ορθογώνιο και υπολογίζουμε τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που είναι ίσος με

$$f(x_i^*, y_j^*)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j = f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}.$$



Το άθροισμα

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_i^*, y_j^*) \Delta A_{ij}$$

προσεγγίζει τον ζητούμενο όγκο. Καθώς $n \rightarrow \infty$, εάν το όριο υπάρχει είναι ίσο με τον όγκο δεδομένου ότι η f είναι θετική. Γενικότερα, αν το όριο υπάρχει ορίζεται ως το **διπλό ολοκλήρωμα της f επί του R** και συμβολίζεται ως

$$\boxed{\iint_R f(x, y) \, dx \, dy \text{ ή } \iint_R f(x, y) \, dA}$$

Μερικά Ολοκληρώματα

Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών

- Μερικό Ολοκλήρωμα ως προς x : $\int_a^b f(x, y) dx$
Ολοκληρώνουμε ως προς x θεωρώντας την μεταβλητή y σταθερή
 $\int_0^1 x^2 y dx =$

- Μερικό Ολοκλήρωμα ως προς y : $\int_a^b f(x, y) dy$
Ολοκληρώνουμε ως προς y θεωρώντας την μεταβλητή x σταθερή
 $\int_0^1 x^2 y dy =$

Διαδοχικά Ολοκληρώματα

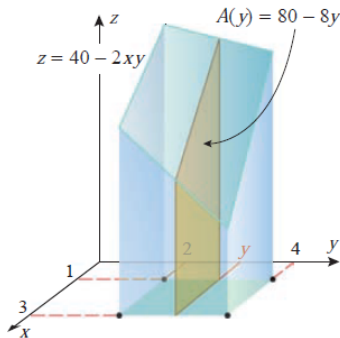
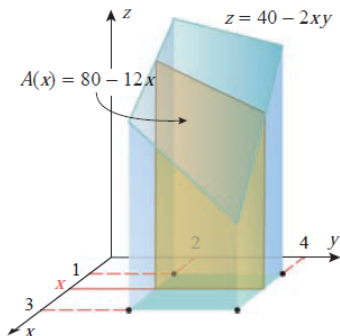
Ολοκληρώνουμε αρχικά ως προς την μία μεταβλητή και μετά ως προς την άλλη. Π.χ.

$$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy) dy dx =$$

Διαδοχικά Ολοκληρώματα

$$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy) \, dx \, dy =$$

Τα διαδοχικά ολοκληρώματα υπολογίζουν τον όγκο (εάν f θετική) με κοπές ως προς τον άξονα των x ή των y και αποδυνκνύεται πως είναι ίσα με το διπλό ολοκλήρωμα στο αντίστοιχο ορθογώνιο.



Εάν $R = [a, b] \times [c, d]$ ορθογώνιο στο \mathbb{R}^2 και $f(x, y)$ συνεχής στο R τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy$$

Το Θεώρημα Fubini μας επιτρέπει να υπολογίζουμε διπλά ολοκληρώματα πάνω σε ορθογώνια με την βοήθεια διαδοχικών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από το επίπεδο $z = 4 - x - y$ και το ορθογώνιο $[0, 1] \times [0, 2]$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R y^2 x \, dA$$

εάν $R = \{(x, y) \mid -3 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$.

Ιδιότητες Διπλών Ολοκληρωμάτων



$$\iint_R cf(x, y) dA = c \iint_R f(x, y) dA, c \in \mathbb{R}$$



$$\iint_R f(x, y) \pm g(x, y) dA = \iint_R f(x, y) dA \pm \iint_R g(x, y) dA$$

- Εάν $R = R_1 \cup R_2$ και $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \iint_{R_1} f(x, y) dA + \iint_{R_2} f(x, y) dA$$

Διπλό Ολοκλήρωμα κάτω από γενικότερα χωρία

Υπάρχει περίπτωση ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα να περιέχει όρια με μεταβλητές. Π.χ.

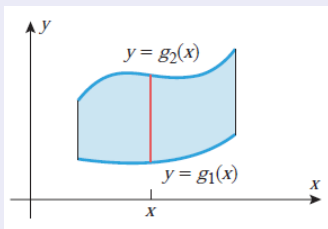
$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \, dx =$$

Τέτοια ολοκληρώματα προκύπτουν από χώρια της πιο κάτω μορφής

Ορισμός

Ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^2 λέγεται **Τύπου I ή x -απλό** αν υπάρχουν σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$ και συνάρτησεις $g_1(x), g_2(x)$ όπου $g_1(x) \leq g_2(x), \forall x \in [a, b]$ τέτοιες ώστε το χώρο να ορίζεται από τις σχέσεις

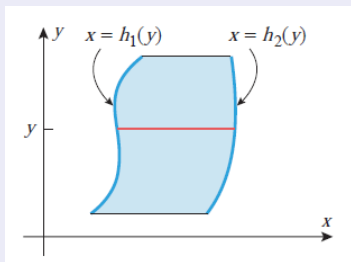
$$a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x).$$



Ορισμός

Ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^2 λέγεται **Τύπου II** ή **y -απλό** αν υπάρχουν σταθερές $c, d \in \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $h_1(y), h_2(y)$ όπου $h_1(y) \leq h_2(y), \forall y \in [c, d]$ τέτοιες ώστε το χώρο να ορίζεται από τις σχέσεις

$$c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y).$$



Θεώρημα Fubini για χωρία Τύπου I και II

- Αν R είναι χωρίο τύπου I και f συνεχής στο R , τότε

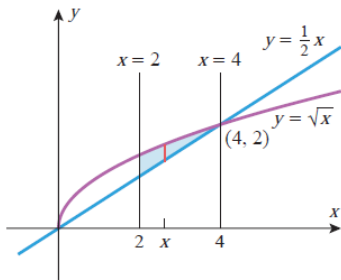
$$\iint_R f(x, y) dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x, y) dy dx$$

- Αν R είναι χωρίο τύπου II και f συνεχής στο R , τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x, y) dx dy$$

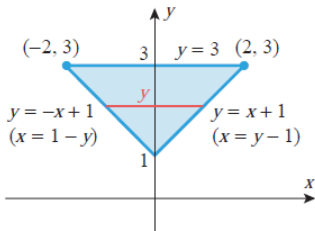
Παράδειγμα

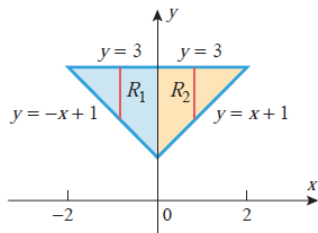
Να υπολογιστεί το $\iint_R xy \, dA$ όπου R το χωρίο μεταξύ των
 $y = \frac{1}{2}x, y = \sqrt{x}, x = 2, x = 4$



Παράδειγμα

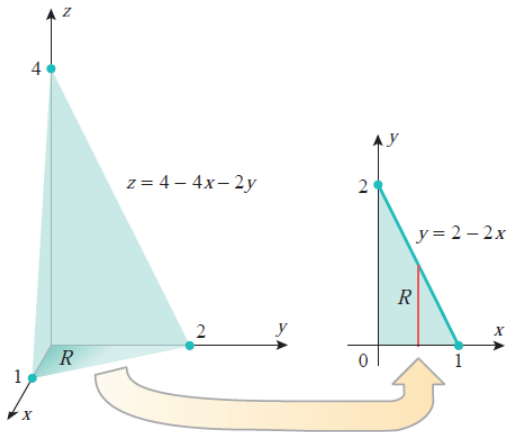
Να υπολογιστεί το $\iint_R (2x - y^2) dA$ όπου R το χωρίο μεταξύ των
 $y = -x + 1, y = x + 1, y = 3$





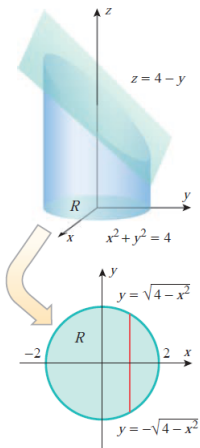
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί με διπλά ολοκληρώματα ο όγκος του τετραέδρου που ορίζεται από τα επίπεδα xy , yz , xz και $z = 4 - 4x - 2y$.

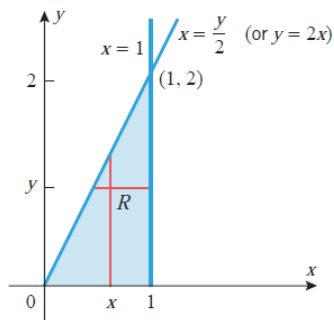


Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που ορίζεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ και τα επίπεδα $x + y = 4$ και $z = 0$.



Εάν το χώρο ολοκλήρωσης είναι x ή y απλό, τότε το ολοκλήρωμα είναι πιθανόν να μπορεί να υπολογιστεί μόνο με έναν από τους δύο τρόπους έκφρασης. Π.χ.



$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2} dx dy =$$

Εμβαδόν χωρίου στο xy -επίπεδο

Υπενθύμιση: Μήκος Διαστήματος $[a, b] = b - a = \int_a^b 1 \, dx$

Αντίστοιχα, το εμβαδόν φραγμένου χωρίου $R \subset \mathbb{R}^2$ είναι ίσο με

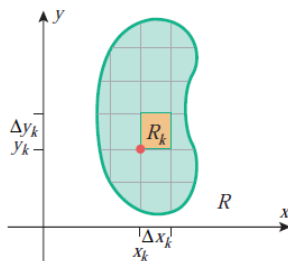
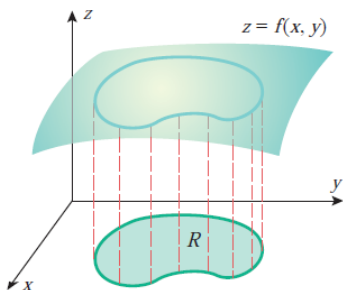
$$\boxed{\iint_R 1 \, dA = \iint_R dA}$$

Παράδειγμα

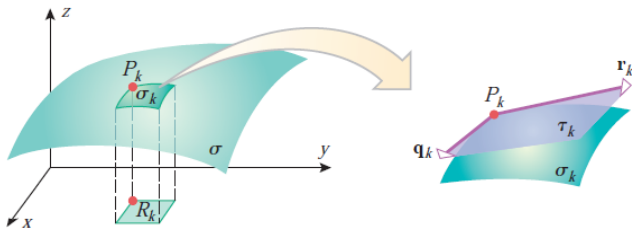
Να υπολογιστεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \frac{1}{2}x^2$ και $y = 2x$.

Εμβαδόν Επιφάνειας της μορφής $z = f(x, y)$

Διαμερίζουμε το R σε ορθογώνια $R_k, k = 1, \dots, n$ με διαστάσεις Δx_k και Δy_k .



Προσεγγίζουμε το εμβαδόν της επιφάνειας που αντιστοιχεί στο ορθογώνιο R_k με το εμβαδόν του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $P_k(x_k, y_k)$ στο αντίστοιχο χωρίο.



Υπενθύμιση: $z = f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f_y(x_k, y_k)(y - y_k)$
(Εξίσωση Εφαπτόμενου Επιπέδου)

Η επιφάνεια του εφαπτομένου επίπεδου πάνω από το R_k είναι ένα παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα

$$\vec{q}_k = (\Delta x_k, 0, f_x(x_k, y_k)\Delta x_k), \vec{r}_k = (0, \Delta y_k, f_y(x_k, y_k)\Delta y_k)$$

Το εμβαδον του παραλληλογράμμου είναι ίσο με

$$\|\vec{q}_k \times \vec{r}_k\| = \dots = \sqrt{f_x^2(x_k, y_k) + f_y^2(x_k, y_k) + 1} \Delta x_k \Delta y_k$$

Το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{f_x^2(x_k, y_k) + f_y^2(x_k, y_k) + 1} \Delta x_k \Delta y_k$$

προσεγγίζει το ζητούμενο εμβαδό. Προφανώς, εάν το όριο υπάρχει, είναι ίσο με το ζητούμενο εμβαδό και τείνει στο

$$\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dx dy$$

καθώς $n \rightarrow \infty$.

Θεώρημα

Έστω $z = f(x, y)$ συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο χωρίο $R \subset \mathbb{R}^2$ με συνεχείς μερικές παραγώγους. Τότε, το εμβαδόν επιφάνειας της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο R είναι ίσο με

$$\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} dA$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν επιφάνειας της συνάρτησης $z = \sqrt{4 - x^2}$ πάνω από το ορθογώνιο $R = [0, 1] \times [0, 4]$ του xy - επιπέδου.

Τριπλά Ολοκληρώματα

- $f(x)$ ορισμένη στο $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x) dx$$

- $f(x, y)$ ορισμένη στο $R \subset \mathbb{R}^2$

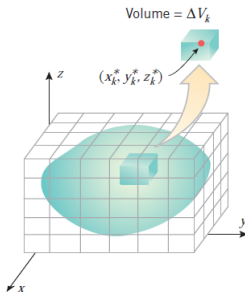
$$\iint_R f(x, y) dA$$

- $f(x, y, z)$ ορισμένη στο $G \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint_G f(x, y, z) dV$$

Τριπλό Ολοκλήρωμα

- G φραγμένο στερεό στο χώρο (Περικλείεται σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο)
- Διαμερίζουμε το παραλληλεπίπεδο σε μικρά παραλληλεπίπεδα $G_k, k = 1, \dots, n$ με όγκο $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ αφού αφαιρέσουμε όσα βρίσκονται εκτός του G
- Η f είναι προσεγγιστικά σταθερή σε κάθε τέτοιο παραλληλεπίπεδο και ίση με $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$, όπου $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in G_k$.



Θεωρούμε το **άθροισμα Riemann**

$$\sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k = \sum_{k=1}^n f(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \Delta V_k.$$

Αν το όριο καθώς $n \rightarrow \infty$ υπάρχει, τότε ορίζεται ως το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο G και συμβολίζεται ως εξής

$$\iiint_G f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz \quad \text{ή} \quad \iiint_G f(x, y, z) \, dV$$

Ιδιότητες Τριπλών Ολοκληρωμάτων

•

$$\iiint_G cf(x, y, z) dV = c \iiint_G f(x, y, z) dV, c \in \mathbb{R}$$

•

$$\iiint_G f(x, y, z) \pm g(x, y, z) dV = \iiint_G f(x, y, z) dV \pm \iiint_G g(x, y, z) dV$$

• Εάν $G = G_1 \cup G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, τότε

$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iiint_{G_1} f(x, y, z) dV + \iiint_{G_2} f(x, y, z) dV$$

Όπως και με τα διπλά ολοκληρώματα, για να υπολογίσουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα, το ανάγουμε σε διαδοχικό ολοκλήρωμα.

Θεώρημα

Εάν $G \subset \mathbb{R}^3$ το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $[a, b] \times [c, d] \times [k, l]$ και f συνεχής στο G , τότε

$$\begin{aligned} \iiint_G f(x, y, z) \, dV &= \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \\ &= \int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \dots \end{aligned}$$

Παράδειγμα

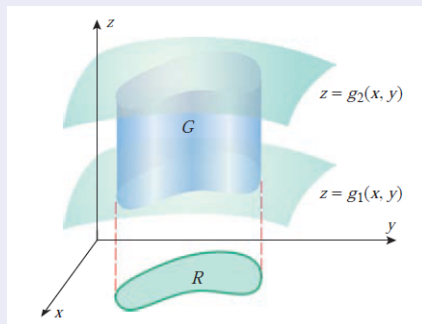
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iiint_G 12xy^2z^3 dV$, εάν

$$G = [-1, 2] \times [0, 3] \times [0, 2].$$

Τριπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία

Ορισμός

Ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^3 λέγεται xy -**απλό** αν φράσσεται από δύο επιφάνειες $z = g_1(x, y)$ και $z = g_2(x, y)$, η προβολή του στο xy -επίπεδο είναι ένα x -απλό ή y -απλό χωρίο R και $g_1(x, y) \leq g_2(x, y), \forall x \in R$. Παρόμοια, ορίζουμε xz και yz -απλές περιοχές.



Αν G είναι xy -απλό χωρίο και f συνεχής στο G , τότε

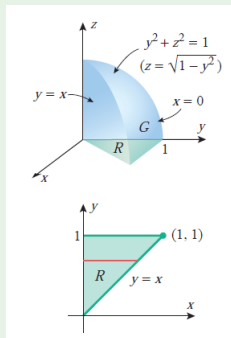
$$\iiint_G f(x, y, z) dV = \iint_R \int_{g_1(x, y)}^{g_2(x, y)} f(x, y, z) dz dA$$

Παρόμοια, για yz -απλά χωρία και xz -απλά χωρία.

Παράδειγμα

Εάν G το κομμάτι που προκύπτει από την αποκοπή του κυλινδρικού στερεού $y^2 + z^2 \leq 1$ από τα επίπεδα $y = x$ και $x = 0$ στο πρώτο ογδοοημόριο, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_G z \, dV.$$



- Μήκος ευθύγραμμου τμήματος $[a, b]$

$$\int_a^b 1 \, dx$$

- Εμβαδον επιφάνειας R

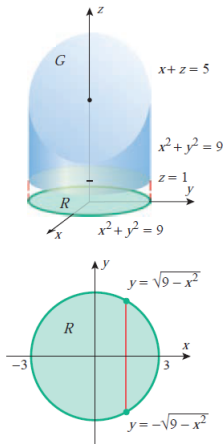
$$\iint_R 1 \, dA$$

- Όγκος στερεού G

$$\boxed{\iiint_G 1 \, dV}$$

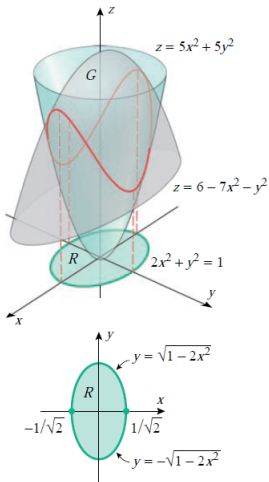
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί με τριπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και τις επιφάνειες $z = 1$ και $z + x = 5$.



Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τα παραβολοειδή $z = 5x^2 + 5y^2$ και $z = 6 - 7x^2 - y^2$.



Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών

Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x) dx$

Εάν $x = g(u)$, $a < b$ και g 1-1 στο $[a, b]$ (αύξουσα ή φθίνουσα), τότε

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u)) g'(u) du.$$

Έστω $\alpha, \beta = g^{-1}(a)$ ή $g^{-1}(b)$ ούτως ώστε $\alpha < \beta$. Εάν g φθίνουσα στο $[a, b]$ ($g' < 0$), τότε $\alpha = g^{-1}(b) < g^{-1}(a) = \beta$ και

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \int_{\beta}^{\alpha} f(g(u)) g'(u) du = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(g(u)) g'(u) du = \int_{\alpha}^{\beta} f(g(u)) |g'(u)| du. \end{aligned}$$

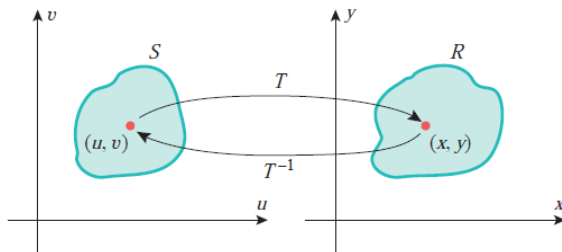
Παρόμοια, αν g αύξουσα.

Γενίκευση στο \mathbb{R}^2

Θεωρούμε τον 1-1 μετασχηματισμό (αντικατάσταση)

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

από το uv στο xy επίπεδο. Γραφικά, σχετίζουμε χωρία στο uv επίπεδο με χωρία στο xy επίπεδο.



Αφού T είναι 1-1, ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

Για να προβούμε στην αλλαγή μεταβλητών στο \mathbb{R}^2 , πρέπει να βρούμε το διαφορικό dA . Αυτό δίνεται από την **Ιακωβιανή**.

Ορισμός

Έστω ο μετασχηματισμός $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$. Η **Ιακωβιανή του T** συμβολίζεται με $J(u, v)$ ή $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ και είναι ίση με

$$J(u, v) = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u} \frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v} \frac{\partial y}{\partial u}$$

Αποδुकνεύεται πως αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό T σε διπλό ολοκλήρωμα, τότε $dx dy = |J(u, v)| du dv$.

Θεώρημα

Εάν ο μετασχηματισμός $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ απεικονίζει το χωρίο S του uv -επιπέδου στο χωρίο R του xy -επιπέδου και η ιακωβιανή $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ είναι μη-μηδενική και δεν αλλάζει πρόσημο στο S τότε

$$\iint_R f(x, y) dA_{xy} = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| dA_{uv}$$

ή

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \iint_S f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

Πότε κάνουμε αλλαγή μεταβλητής:

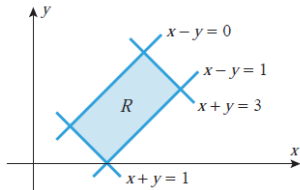
- Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι διαφορετικό από τα όσα είδαμε μέχρι στιγμής.
- Όταν η συνάρτηση ολοκλήρωσης είναι περίπλοκη.

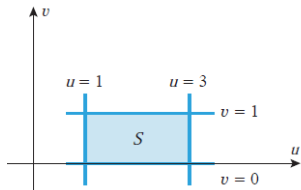
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y} dA$$

εάν το R περικλείεται από τις $x-y=0$, $x-y=1$, $x+y=1$, $x+y=3$.



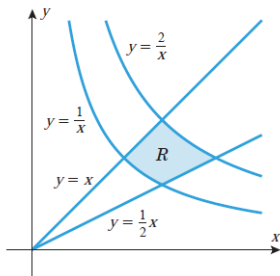


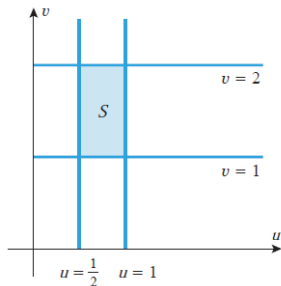
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R e^{xy} dA$$

εάν το R χωρίο που περικλείεται από τις $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ και $y = \frac{2}{x}$.





Μία ειδική περίπτωση είναι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες.

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$$

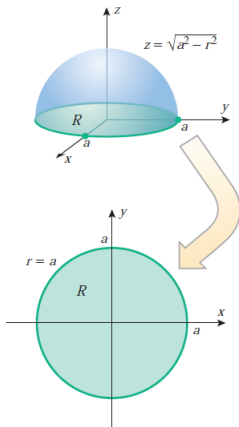
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r \cos^2 \theta + r \sin^2 \theta = r$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\iint_R f(x, y) \, dx \, dy = \iint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta) r \, dr \, d\theta}$$

Παράδειγμα

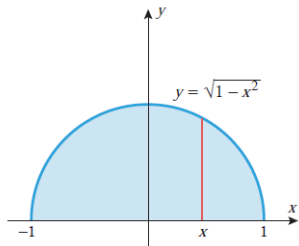
Να βρεθεί ο όγκος της σφαίρας με $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ με διπλό ολοκλήρωμα.



Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}} dx dy$$

με πολικές συντεταγμένες.



Γενικά, όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι κυκλική συμμετρία ή η συνάρτηση $f(x, y)$ περιέχει την έκφραση $x^2 + y^2$, τότε συνήθως ευνοείται η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Αλλαγή μεταβλητών σε Τριπλά Ολοκληρώματα

Γίνεται με την βοήθεια μετασχηματισμών της μορφής

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

Η **Ιακωβιανή** του μετασχηματισμού είναι ίση με

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Θεώρημα

Εάν ο μετασχηματισμός $T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ απεικονίζει το χωρίο S του uvw -χώρου στο χωρίο του xyz -χώρου, η Ιακωβιανή $\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)}$ είναι μη-μηδενική και έχει σταθερό πρόσημο στο S τότε

$$\iiint_R f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_S f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw$$

Ειδική περίπτωση - Κυλινδρικές Συντεταγμένες

$$x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_S f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r \, dr \, d\theta \, dz}$$

Ειδική περίπτωση - Σφαιρικές Συντεταγμένες

$$x = \rho \cos \theta \sin \phi, y = \rho \sin \theta \sin \phi, z = \rho \cos \phi$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \phi & -\rho \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi & \rho \cos \theta \sin \phi & \rho \sin \theta \cos \phi \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix} = \dots = -\rho^2 \sin \phi$$

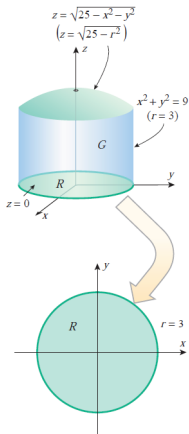
Συνεπώς,

$$\boxed{\iiint_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz = \iiint_S f(\rho, \theta, \phi) \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi}$$

Σημείωση: $f(\rho, \theta, \phi) = f(\rho \cos \theta \sin \phi, \rho \sin \theta \sin \phi, \rho \cos \phi)$.

Παράδειγμα

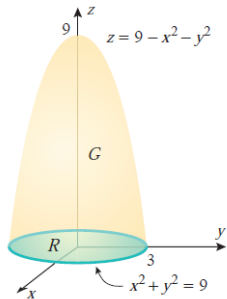
Να βρεθεί με Τριπλό Ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού G που περικλείεται από το ημισφαίριο $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ από πάνω, από το xy -επίπεδο από κάτω και περιμετρικά από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$.



Παράδειγμα

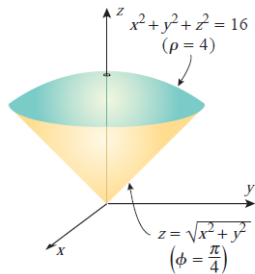
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}} \int_0^{9-x^2-y^2} x^2 \, dz \, dy \, dx.$$



Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού G που περικλείεται από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.



Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_0^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2 \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} dz dy dx.$$

