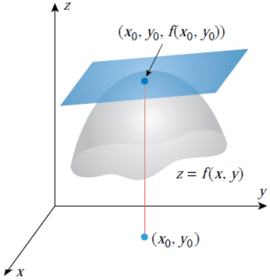
4.4 Παραγώγιση

Όταν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$ τότε:

1. είναι συνεχής στο x_0,
2. έχει εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$,
3. έχει γραμμική προσέγγιση την εφαπτομένη κοντά στο x_0.

Θέλουμε να γενικεύσουμε σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.
Θυμίζουμε ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν αρκεί αφού είδαμε ότι δεν συνεπάγεται συνέχεια.

- Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ για την οποία θέλουμε ένα εφαπτόμενο επίπεδο $z - z_0 = a(x - x_0) + b(y - y_0)$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- Θα πάρουμε το επίπεδο που ορίζεται από τις εφαπτομένες της $f(x, y)$ στην κατεύθυνση x και y, δηλαδή θα πρέπει $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.
- Εφόσον το $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ θα είναι σημείο του επιπέδου βρίσκουμε ότι θα πρέπει $z_0 = f(x_0, y_0)$.



Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x,y)$ λέγεται **παραγωγίσιμη** στο (x_0,y_0) αν

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y)-f(x_0,y_0)-f_x(x_0,y_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0)(y-y_0)}{||(x,y)-(x_0,y_0)||}=0$$

- Ισοδύναμα, ο ορισμός λέει ότι $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \dfrac{f(x,y)-P}{||(x,y)-(x_0,y_0)||}=0$, όπου P το επίπεδο που ορίστηκε προηγουμένως.
- Δηλαδή η f προσεγγίζεται κοντά στο (x_0,y_0) από το επίπεδο P.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x,y,z)$ λέγεται παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0,z_0) αν

$$\lim_{(x,y,z)\to(x_0,y_0,z_0)} \frac{f(x,y,z)-f(x_0,y_0,z_0)-f_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)-f_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)-f_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)}{||(x,y,z)-(x_0,y_0,z_0)||}=0$$

Το παρακάτω θεώρημα ισχύει για όλες τις διαστάσεις.

Θεώρημα

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Κριτήριο παραγωγισιμότητας

Θεώρημα

Αν οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης υπάρχουν και είναι συνεχείς σε ένα σημείο, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι η $f(x, y, z) = x + yz$ είναι παραγωγίσιμη.