

4.4 Παραγωγισιμότητα

- Θέλουμε να μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτησης $z = f(x, y)$.
- Αρχικά θα θεωρούμε ότι μια μεταβλητή είναι σταθερή, π.χ. θέτουμε $x = x_0$ και μελετάμε τον ρυθμό μεταβολής ως προς y , δηλαδή την παράγωγο $\frac{d}{dy}f(x_0, y)$.
- Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε κρατώντας το y σταθερό.

Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό των μερικών παραγώγων.

4.4 Παραγωγή

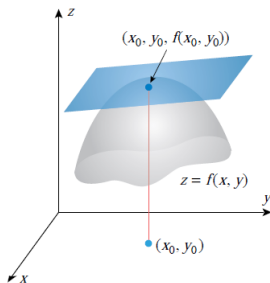
Όταν μια συνάρτηση $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη στο $x = x_0$ τότε:

- 1 είναι συνεχής στο x_0 ,
- 2 έχει εφαπτομένη στο $(x_0, f(x_0))$,
- 3 έχει γραμμική προσέγγιση την εφαπτομένη κοντά στο x_0 .

Θέλουμε να γενικεύσουμε σε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών.

Θυμίζουμε ότι η ύπαρξη των μερικών παραγώγων δεν αρκεί αφού είδαμε ότι δεν συνεπάγεται συνέχεια.

- Έστω συνάρτηση $f(x, y)$ για την οποία θέλουμε ένα εφαπτόμενο επίπεδο $z = az + by + c$ στο σημείο $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$.
- Θα πάρουμε το επίπεδο που ορίζεται από τις εφαπτομένες της $f(x, y)$ στην κατεύθυνση x και y , δηλαδή θα πρέπει $a = f_x(x_0, y_0)$ και $b = f_y(x_0, y_0)$.
- Εφόσον το $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ θα είναι σημείο του επιπέδου βρίσκουμε ότι θα πρέπει $c = f(x_0, y_0)$.



Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται **παραγωγίσιμη** στο (x_0, y_0) αν

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - f(x_0, y_0) - f_x(x_0, y_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0)(y - y_0)}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0$$

- Ισοδύναμα, ο ορισμός λέει ότι

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} \frac{f(x, y) - P}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} = 0, \text{ όπου } P \text{ το επίπεδο που} \\ \text{ορίστηκε προηγουμένως.}$$

- Δηλαδή η f προσεγγίζεται κοντά στο (x_0, y_0) από το επίπεδο P .

Παράδειγμα

Ναδειχθεί ότι η $f(x, y) = x^2 + y^2$ είναι παραγωγίσιμη στο $(0, 0)$.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x, y, z)$ λέγεται παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0, z_0) αν

$$\lim_{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0)} \frac{f(x, y, z) - f(x_0, y_0, z_0) - f_x(x_0, y_0, z_0)(x - x_0) - f_y(x_0, y_0, z_0)(y - y_0) - f_z(x_0, y_0, z_0)(z - z_0)}{\|(x, y, z) - (x_0, y_0, z_0)\|} = 0$$

Το παρακάτω θεώρημα ισχύει για όλες τις διαστάσεις.

Θεώρημα

Αν η f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο τότε είναι και συνεχής σε αυτό.

Κριτήριο παραγωγισιμότητας

Θεώρημα

Αν οι μερικές παράγωγοι μιας συνάρτησης υπάρχουν και είναι συνεχείς σε ένα σημείο, τότε η συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη στο σημείο αυτό.

Παράδειγμα

Ναδειχθεί ότι η $f(x, y, z) = x + yz$ είναι παραγωγίσιμη.