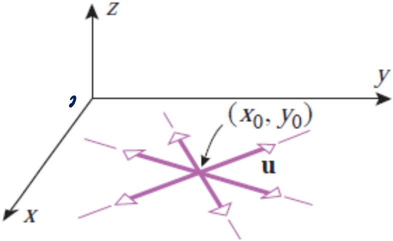
4.6 Παράγωγος κατά κατεύθυνση και κλίση

Είδαμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial x}, \dfrac{\partial f}{\partial y}$ εκφράζουν ρυθμό μεταβολής/κλίση εφαπτομένης στην κατεύθυνση του x ή y. Θέλουμε να γενικεύσουμε σε τυχαία κατεύθυνση.



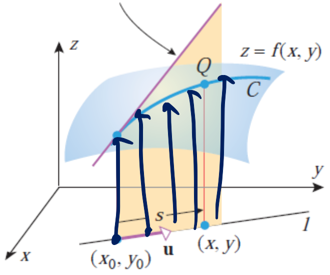
Η κατεύθυνση στο xy-επίπεδο ορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ με αρχή το σημείο (x_0, y_0). Η ευθεία που είναι παράλληλη στο $\vec{u}$ και διέρχεται από το (x_0, y_0) έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$L : x = x_0 + tu_1, \ y = y_0 + tu_2.$$

Αν περιορίσουμε την f στην ευθεία L παίρνουμε την συνάρτηση $f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$.

$f(t)$

$\frac{df}{dt}$



$\frac{d}{dt} f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)\Big|_{t=0}$

Ορισμός

Έστω $f(x,y)$ συνάρτηση και $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η **παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ στο** (x_0, y_0) συμβολίζεται με $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ και ορίζεται ως η παρακάτω παράγωγος, αν υπάρχει:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)]_{t=0}$$

Αντίστοιχος ορισμός δίνεται και για συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

Ορισμός

Έστω $f(x,y,z)$ συνάρτηση και $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η **παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ στο** (x_0, y_0, z_0) συμβολίζεται με $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ και ορίζεται ως η παρακάτω παράγωγος, αν υπάρχει:

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, z_0 + tu_3)]_{t=0}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας μπορούμε να βρούμε απλούστερο τρόπο υπολογισμού.

$x = x_0 + t u_1$

$$\frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)]_{t=0} = [\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt}]_{t=0}$$

$y = y_0 + t u_2$

$$= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2$$

$$\begin{tikzcd} & f \arrow[dl, no head] \arrow[dr, no head] & \\ x \arrow[d, no head] & & y \arrow[d, no head] \\ t & & t \end{tikzcd}$$

Θεώρημα

- *Αν* $z = f(x, y)$ *παραγωγίσιμη στο* (x_0, y_0) *και* $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ *μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η* $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$ *υπάρχει και*

$$\boxed{D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2}$$

- *Αν* $w = f(x, y, z)$ *παραγωγίσιμη στο* (x_0, y_0, z_0) *και* $\vec{u} = u_1 i + u_2 j + u_3 k$ *μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η* $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0)$ *υπάρχει και*

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x, y) = e^{xy}$ στο $(-2, 0)$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος που σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με τον θετικό άξονα των x.

$$\vec{u} = \cos\frac{\pi}{3}\, i + \sin\frac{\pi}{3}\, j$$
$$= \frac{1}{2}\, i + \frac{\sqrt{3}}{2}\, j$$

$$f_x(x,y) = \underbrace{ye^{xy}}, \quad f_y(x,y) = x e^{xy}$$

$$D_{\vec{u}} f(-2,0) = \cancel{f_x(-2,0)}^{\,0}\, \frac{1}{2} + f_y(-2,0)\, \frac{\sqrt{3}}{2}$$
$$= -2\, \frac{\sqrt{3}}{2} = -\sqrt{3}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z) = x^2y - yz^3 + z$ στο $(1, -2, 0)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2i + j - 2k$.

(Το $\vec{a}$ δεν είναι μοναδιαίο)

$$\vec{u} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{2i + j - 2k}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}i + \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$$

$$f_x = 2xy, \quad f_y = x^2 - z^3, \quad f_z = -3yz^2 + 1$$

$$D_{\vec{u}} f(1,-2,0) = f_x(1,-2,0)\frac{2}{3} + f_y(1,-2,0)\frac{1}{3} + f_z(1,-2,0)\left(-\frac{2}{3}\right)$$

$$= \cdots = -3$$

$$
\begin{aligned}
D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \leftarrow \\
&= \underbrace{(f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0))}\cdot \underbrace{(u_1, u_2)}_{\vec{u}}
\end{aligned}
$$

Ορισμός

- Αν $f(x, y)$ συνάρτηση, η **κλίση** της f συμβολίζεται με ∇f ή $\operatorname{grad} f$ ορίζεται ως
$$\nabla f = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j$$
- Αν $f(x, y, z)$ συνάρτηση, η **κλίση** της f συμβολίζεται με ∇f ή $\operatorname{grad} f$ ορίζεται ως
$$\nabla f = f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k$$

$$D_{\vec{u}} f = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$$

Ιδιότητες της κλίσης - I

Θεώρημα

Στο σημείο (x_0, y_0), *εάν* $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$, *η* $z = f(x, y)$ *έχει*

- *μέγιστη κλίση εφαπτομένης/ρυθμό μεταβολής στην κατεύθυνση* $\nabla f(x_0, y_0)$ *η οποία είναι ίση με* $||\nabla f(x_0, y_0)||$ *και*
- *ελάχιστη κλίση εφαπτομένης/ρυθμό μεταβολής στην κατεύθυνση* $-\nabla f(x_0, y_0)$ *η οποία είναι ίση με* $-||\nabla f(x_0, y_0)||$.

(Το ίδιο και για τρεις μεταβλητές)

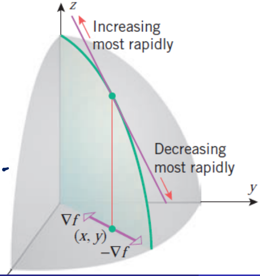
Θέλουμε μέγιστη κι ελάχιστη τιμή της $D_{\vec{u}} f(x_0, y_0)$.

$$D_{\vec{u}} f(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u} =$$

$$= ||\nabla f(x_0, y_0)|| \, \underbrace{||u||}_{=1} \cos\theta$$

Μέγιστη τιμή όταν $\cos\theta = 1 \iff \theta = 0 \ldots$

Ελ. τιμή όταν $\cos\theta = -1 \iff \theta = \pi \ldots$



Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = x^2 e^y$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου στο $(-2,0)$ και το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει αυτήν την κατεύθυνση.

Μοναδιαίο διάνυσμα: $\dfrac{\nabla f(-2,0)}{\|\nabla f(-2,0)\|} = -\dfrac{4}{\sqrt{32}} i + \dfrac{4}{\sqrt{32}} j$

Μέγιστη τιμή: $\|\nabla f(-2,0)\| = \sqrt{32}$

$\nabla f = 2x e^y i + x^2 e^y j \Rightarrow \nabla f(-2,0) = -4i + 4j$

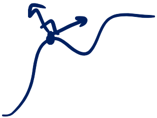
$\|\nabla f(-2,0)\| = \sqrt{16+16} = \sqrt{32}$

Θεώρημα

Έστω $f(x,y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτό δίσκο με κέντρο (x_0,y_0) και $\nabla f(x_0,y_0) \neq \vec{0}$. Τότε το διάνυσμα $\nabla f(x_0,y_0)$ είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης της f που διέρχεται από το (x_0,y_0).

(Το ίδιο και για τρεις μεταβλητές)

Απόδειξη: Η καμπύλη στάθμης της f που διέρχεται από το (x_0, y_0) έχει παραμέτρηση $x = x(t)$, $y = y(t)$ με $x(t_0) = x_0$, $y(t_0) = y_0$.



Το εφ/νο διάνυσμα είναι το

$$\vec{T} = x'(t_0)\, i + y'(t_0)\, j$$