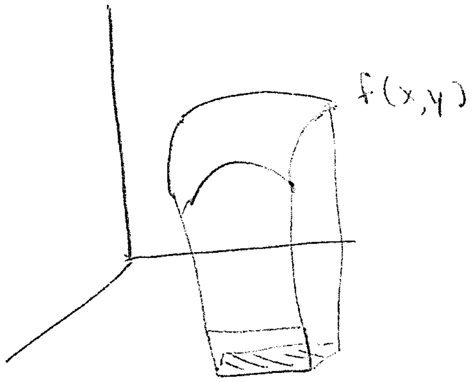
ΜΑΣ 026:

22/10/19.

Κεφάλαιο 4: Πολλαπλά Ολοκληρώματα

Διπλό ολοκλήρωμα:

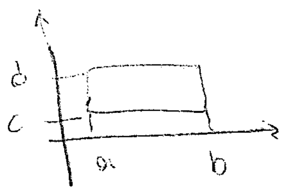


$\iint_D f\, dx\,dy$ = όγκος μεταξύ του γραφήματος της f και του ορθογωνίου D.

Σημείωση:

Αν $f \geq 0$, το $\iint$ είναι όγκος.
Αν αλλάζει πρόσημο, το $\iint$ περιγράφει όγκο με πρόσημο

Ορθογώνια στον $\mathbb{R}^2$: είναι σύνολα της μορφής $[a,b]\times[c,d]$



Θεώρημα:

Αν D ορθογώνιο στον $\mathbb{R}^2$ και $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής και φραγμένη τότε είναι ολοκληρώσιμη.

Ιδιότητες:

1) $\iint (f+g)\,dA = \iint f\,dA + \iint g\,dA$

2) $\iint \lambda f \cdot dA = \lambda \cdot \iint f \cdot dA \quad (\lambda \in \mathbb{R})$

3) Αν $f(x,y) \geq g(x,y)$ τότε $\iint_D f \cdot dA = \iint_D g\, dA$

4) Αν το $\int$ είναι ένωση ξένων ορθογωνίων $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_n$

τότε $\iint_S f \cdot dA = \iint_{D_1} f \cdot dA + \ldots + \iint_{D_n} f \cdot dA$

5) $\left| \iint_D f \cdot dA \right| \leq \iint_D |f| \cdot dA$

<u>Υπενθύμιση:</u> $\int_a^b f(x) \cdot dx = F(b) - F(a)$

F αντιπαράγωγος της f (Θεμ. Θεώρημα Απ. Λογισμού)

Το επόμενο θεώρημα ανοίγει τον υπολογισμό του διπλού ολοκλ. σε δύο διαδοχικά (απλά) ολοκληρώματα.

<u>Θεώρημα:</u> (Fubini για ορθογώνιο)

Έστω $D = [a,b] \times [c,d]$ και $f: D \to \mathbb{R}$ συνεχής.

$$\iint_D f(x,y) \cdot dA = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y) \cdot dx \right) \cdot dy = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y) \cdot dy \right) \cdot dx$$

<u>Π.χ.:</u> $\iint_D (x^2 + y) \cdot dA$, όπου $D = [0,1] \times [0,1]$

$$\iint_D (x^2+y)\,dA = \int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y)\,dx \right) dy = \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=0}^{1} dy$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{3} + y \right) dy = \left[\frac{y}{3} + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = 5/6.$$

Αν όμως πάρουμε άλλη σειρά ολοκλήρωσης:

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 (x^2+y)\,dy \right) dx = \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1} dx$$

$$= \int_0^1 \left(x^2 + \frac{1}{2} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = 5/6.$$

<u>Π.χ.:</u>

$\iint_D f\,dA$, όπου $D=[0,2]\times[-1,1]$ και $f(x,y) = \dfrac{yx^3}{y^2+2}$

$$\iint_D f\,dA = \int_{-1}^{1} \int_0^2 f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} \int_0^2 \frac{yx^3}{y^2+2}\,dx\,dy$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{y}{y^2+2} \cdot \left[\frac{x^4}{4} \right]_0^2 dy = \int_{-1}^{1} \frac{y}{y^2+2} \cdot \left(\frac{16}{4} - 0 \right) dy$$

$$= \frac{4}{2} \int_{-1}^{1} \frac{2y}{y^2+2}\,dy = 2 \left[\ln|y^2+2| \right]_{-1}^{1}$$

$$= 2\ln|3| - 2\ln|3| = 0.$$

Π.χ.:

$$\int_0^1\int_0^1 \ln[(x+1)\cdot(y+1)]\,dA$$

Θυμίσου: $\ln(ab)=\ln a+\ln b$

$$=\int_0^1\int_0^1 \ln(x+1)\,dx\,dy+\int_0^1\int_0^1 \ln(y+1)\,dy\,dx$$

$$\left(\int_0^1 \ln(u+1)\,du \overset{v=1+x}{\underset{dv=dx}{=}} \int_1^2 \ln v\,dv=\dots=2\ln 2-1\right)$$

$$\int_1^2 (v)'\ln v\,dv=[v\ln v]_1^2-\int_1^2 v\cdot\frac{1}{v}\,dv$$

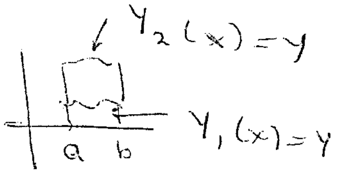
Άρα $I=\int_0^1 (2\ln 2-1)\,dy+\int_0^1 (2\ln 2-1)\,dx$

$=\dots=4\ln 2-2$.

- Διπλά ολοκληρώματα πάνω στο γενικότερα χωρία στον $\mathbb{R}^2$.

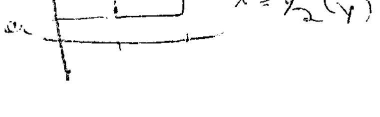
Ορισμός: Έστω D ένα χωρίο στον $\mathbb{R}^2$. Το D λέγεται x-απλό ή τύπου I αν υπάρχουν συναρτήσεις $y_1, y_2 : [a,b]\to\mathbb{R}$ (*) ώστε $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / a\le x\le b,\ y_1(x)\le y\le y_2(x)\}$.

(*) πρέπει $y_1(x)\le y_2(x)$ ($\forall x\in[a,b]$).



Το D λέγεται y-απλό ή τύπου II αν υπάρχουν συναρτήσεις $y_1, y_2 : [a,b]\to\mathbb{R}$ (*) ώστε $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / a\le y\le b,\ y_1(y)\le x\le y_2(y)\}$

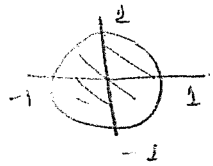
(*) (πρέπει $y_1(y)\le y_2(y)$ $\forall y\in[a,b]$)



Το D λέγεται xy-απλό ή τύπου $\underline{III}$ αν είναι x-απλό και y-απλό.

<u>Π.χ.:</u>

Ο μοναδιαίος δίσκος είναι xy-απλό χωρίο $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1\leq x\leq 1,\ -\sqrt{1-x^2}\leq y\leq\sqrt{1-x^2}\}$.



$D: x^2+y^2\leq 1$.

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / -1\leq y\leq 1,\ -\sqrt{1-y^2}\leq x\leq\sqrt{1-y^2}\}$$

Όλα τα παραπάνω χωρία λέγονται <u>στοιχειώδη χωρία</u>.

<u>Θεώρημα</u> (Fubini, για στοιχειώδη χωρία)

Έστω D x-απλό χωρίο και f συνεχής στο D, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

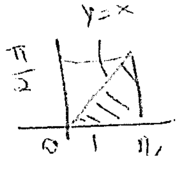
Έστω D y-απλό χωρίο και f συνεχής στο D, τότε

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\int_a^b\int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

<u>Π.χ.:</u>

1) $\iint_D (x^3y+\cos x)\,dA$, όπου $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / 0\leq x\leq \frac{\pi}{2},\ 0\leq y\leq x\}$

$$\iint_D (x^3y+\cos x)\,dA=\int_0^{\pi/2}\int_0^x (x^3y+\cos x)\,dy\,dx$$



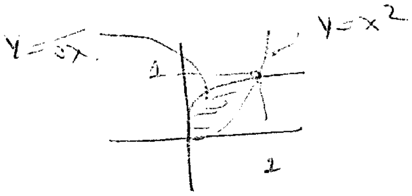
$$= \int_0^{\pi/2} \left[x^3 \cdot \frac{y^2}{2} + y\cos x \right]_{y=0}^{x} dx = \cancel{\left[\frac{x^6}{12}\right]_0^{\pi/2} +}$$

$$= \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x\cos x \right) dx = \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^{\pi/2} + \int x \cdot (\sin x)' \cdot dx$$

$$= \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 12} + [x\sin x]_0^{\pi/2} - \int \cancel{\cos} \; x \cdot \cos x - \int_0^{\pi/2} \cos x \cdot dx$$

$$= \frac{\pi^6}{2^6 \cdot 12} + [x\sin x]_0^{\pi/2} - \left[x\cos x - \sin x \right]_0^{\pi/2} = \dots = \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1$$

2) $\iint_D (x+y)\, dA$, όπου D το χωρίο μεταξύ των $y = \sqrt{x}$ και $y = x^2$.



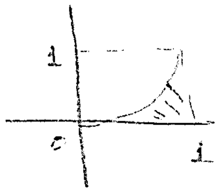
$$D = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 1 ,\; x^2 \le y \le \sqrt{x} \}$$

$$\iint_D (x+y)\, dA = \int_0^1 \int_{x^2}^{\sqrt{x}} (x+y)\, dy \cdot dx$$

$$= \int_0^1 \left[xy + \frac{y^2}{2} \right]_{y=x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(x\sqrt{x} + \frac{x}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx$$

$$= \dots = \frac{3}{10}$$

3) $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\cdot dx\cdot dy = ;$



$x = \sqrt{y}$

$\Rightarrow y = x^2$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq y \leq 1,\ \sqrt{y} \leq x \leq 1\}$

$= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq y \leq x^2\}$

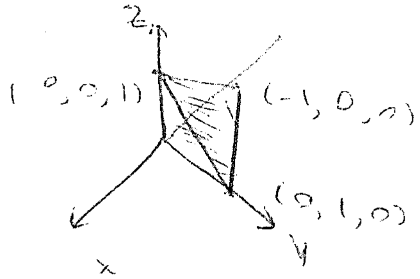
Επειδή το $\int_{\sqrt{y}}^1 (x^3+1)\cdot dx$ είναι δύσκολο στο υπολογισμό, έτσι αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης.

Άρα $\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 \sqrt{x^3+1}\cdot dx\cdot dy = \int_0^1 \int_0^{x^2} \sqrt{x^3+1}\cdot dy\cdot dx$.

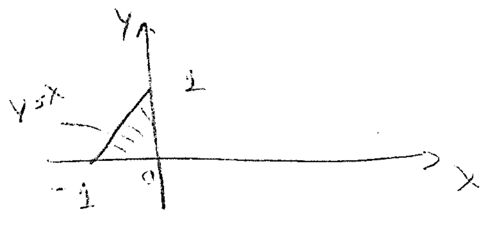
$= \int_0^1 \left[y\sqrt{x^3+1}\right]_{y=0}^{x^2} \cdot dx = \int_0^1 x^2\sqrt{x^3+1}\cdot dx \quad \underset{3x^2\cdot dx = du}{\underline{\underline{x^3+1 = u}}}$

$= \int_1^2 \sqrt{u}\cdot \frac{1}{3}\cdot du = \frac{1}{3}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_1^2 = \frac{2}{9}\left(2\sqrt{2}-1\right)$

4) Να βρεθεί ο όγκος του χωρίου που περιέχεται μεταξύ των επιπέδων $y=0,\ z=0,\ x=0,\ y-x+z=1$.



Προβολή $\longrightarrow$



στον $\mathbb{R}^3$ στον $\mathbb{R}^2$

Έστω $z = f(x,y) = 1 + x - y$.

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, -1 \le x \le 0, 0 \le y \le x+1\}$

Ο ζητούμενος όγκος είναι το $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{0}\int_{0}^{x+1}(1+x-y)\,dy$

$$= \int_{-1}^{0} \left[y + yx - \frac{y^2}{2} \right]_0^{x+1} dx = \dots$$

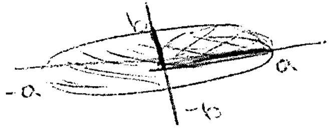
$$= \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^2}{2}\,dx = \left[\frac{(x+1)^3}{6} \right]_{-1}^{0} = \dots = 1/6$$

Υπενθύμιση: $\int_a^b 1\,dx = b - a$ = μήκος του διαστήματος $[a,b]$

Αν D χωρίο στο $\mathbb{R}^2$ $\boxed{\iint_D 1\,dx\,dy = \text{εμβαδόν του } D}$

Π.χ.:

Μια έλλειψη με ημιάξονες a και b έχει εξίσωση $\frac{x^2}{a^2} + \frac{\dots}{b^2} =$



Να βρεθεί το εμβαδόν της με χρήση διπλού ολοκληρώματος.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow y^2 = b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

θα υπολογίσουμε το εμβαδόν της έλλειψης στο 1ο τεταρτημόριο

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \,/\, 0 \le x \le a, \ 0 \le y \le \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2} \right\}$$

(x-απλό).

Εμβαδόν τα $D = \iint_D 1 \cdot dx\, dy$.

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2} \cdot x^2}} 1 \cdot dy \cdot dx$$

$$= \int_0^a b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} \cdot dx.$$

(αντικατασταση)

$x = a \sin(t)$

$dx = a\cos(t) \cdot dt$

$$b \cdot \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \cdot a\cos(t) \cdot dt.$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} \cos^2 t \cdot dt$$

$$= ab \int_0^{\pi/2} \frac{1 + \cos(2t)}{2} \cdot dt$$

$$= a \cdot b \cdot \left[\frac{t}{2} + \frac{\sin(2t)}{4} \right]_{t=0}^{t=\pi/2} = \ldots = ab\frac{\pi}{4}.$$

Άρα Εμβαδόν Έλλειψης $= 4 \cdot \frac{a \cdot b\pi}{4} = ab\pi$.

ΜΑΣ 026:

25/10/19.

Διπλά ολοκληρώματα:

$f: D \to \mathbb{R}$, $D \subseteq \mathbb{R}^2$.

D ορθογώνιο $[a,b] \times [c,d]$.

$$\iint_D f \cdot dx \cdot dy = \int_c^d \int_a^b f \cdot dx \cdot dy$$

D x-απλό

$$\iint_D f \cdot dx \cdot dy = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f \cdot dy \cdot dx$$

D - y - απλό.

$$\iint_D f \cdot dx \cdot dy = \int_a^b \int_{y_1(y)}^{y_2(y)} f \cdot dx \cdot dy$$

$$\iint_D 1 \cdot dx \cdot dy = \text{εμβαδόν του } D$$

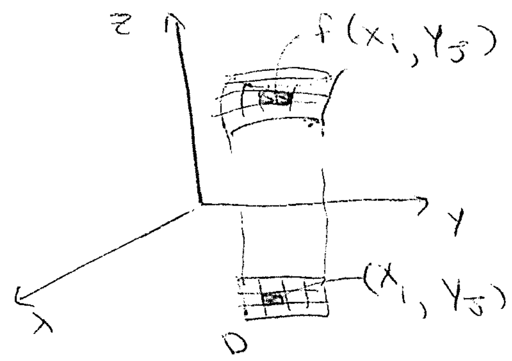
Εμβαδόν επιφάνειας $z = f(x,y)$ στον $\mathbb{R}^3$:

Θεώρημα:

Έστω S μια επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ που ορίζεται από την $z = f(x,y)$ για κάποια $f: D \to \mathbb{R}$, για κάποιο

D στον $\mathbb{R}^2$. Τότε εμβαδόν $S = A(S) = \iint_D \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dA$

Ιδέα της απόδειξης:



Προσεγγίζουμε την επιφάνεια σε κάθε μικρό ορθογώνιο με το εφ/νο επίπεδο.

Τα διανύσματα $\vec{a}$ και $\vec{b}$ είναι:

$$\vec{a} = \Delta x\,\hat{i} + \frac{\partial z}{\partial x}(x_i, y_j)\,\hat{k}$$

$$\vec{b} = \Delta y\,\hat{j} + \frac{\partial z}{\partial y}(x_i, y_j)\,\hat{k}$$

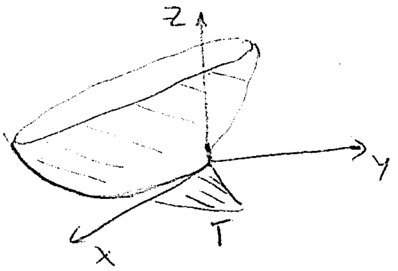
Εμβαδόν παρ/μου $= \|\vec{a} \times \vec{b}\| = \dots = \sqrt{1 + f_x^2(x_i, y_j) + f_y^2(x_i, y_j)}$

- Λεπταίνοντας τη διαμέριση παίρνουμε καλύτερη προσέγγιση.

Τελικά $\boxed{\iint_D \sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\, dA = \text{εμβαδόν } S}$

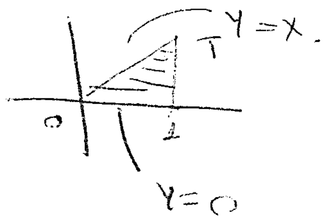
Π.χ.:

Να βρεθεί το εμβαδόν της επιφάνειας $z = x^2 + 2y$ που βρίσκεται πάνω από το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(1,1)$ στον $\mathbb{R}^3$.



Το ζητούμενο εμβ. είναι

$$\iint_T \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\, dx\,dy$$



$$T = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,/\, 0\le x\le 1,\ 0\le y\le x\}$$

$$\text{Εμβ.} = \int_0^1\int_0^x \sqrt{1+(2x)^2+2^2}\,dy\,dx$$

$$= \int_0^1\int_0^x \sqrt{5+4x^2}\,dy\,dx = \int_0^1 \sqrt{5+4x^2}\,y\Big]_{y=0}^{x}\,dx$$

$$= \int_0^1 x\sqrt{5+4x^2}\,dx \ \ \overset{4x^2+5=u}{\underset{8x\,dx=du}{=}}\ \ \int_5^9 \sqrt{u}\cdot\frac{1}{8}\,du$$

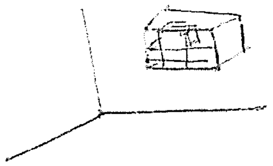
$$= \frac{1}{8}\left[\frac{u^{3/2}}{3/2}\right]_5^9 = \dots = \frac{1}{12}\cdot(27-5\sqrt{5})$$

Τριπλά ολοκληρώματα:

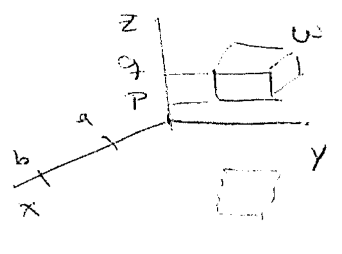
Απλό ολοκλήρωμα $\xrightarrow{\text{σε}}$ συναρτήσεις 1 μεταβλ. $\xrightarrow{\text{εκφράζει}}$ εμβαδόν.

Διπλό ολοκλ. $\xrightarrow{\text{σε}}$ συναρτ. 2 μεταβλ. $\xrightarrow{\text{εκφράζει}}$ όγκο.

Τριπλό ολοκλ. $\xrightarrow{\text{σε}}$ συναρτ. 3 μετ. $\xrightarrow{\text{εκφράζει}}$ γενικευμένο όγκο.



Κύβος στον $\mathbb{R}^3$: $[a,b]\times[c,d]\times[p,q]$



Αν είναι f συνεχής σε ένα κύβο ω τότε μπορούμε το 3πλό ολοκλήρωμα της $\iiint f\,dV = \iiint f\,dx\,dy\,dz$

και είναι ίσο με $\int_p^q \int_c^d \int_a^b f \cdot dx \cdot dy \cdot dz$

$$= \int_p^q \int_a^b \int_c^d f \cdot dy \cdot dx \cdot dz = \ldots \quad (\text{άλλοι } 4 \text{ τρόποι})$$

Π.χ.:

$\iiint_w (x+2y+3z)^2 \, dx \cdot dy \cdot dz$, όπου $w = [0,1] \cdot [-1/2, 0] \cdot [0, 1/3]$

$$\iiint_w (x+2y+3z)^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^{0} \int_0^1 (x+2y+3z)^2 \cdot dx \cdot dy \cdot dz$$

$$= \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^{0} \left[\frac{(x+2y+3z)^3}{3} \right]_{x=0}^{1} dy \cdot dz$$

$$= \int_0^{1/3} \int_{-1/2}^{0} \frac{(1+2y+3z)^3}{3} - \frac{(2y+3z)^3}{3} \Big] \, dy \cdot dz$$

$$= \int_0^{1/3} \left[\frac{(1+2y+3z)^4}{24} - \frac{(2y+3z)^4}{24} \right]_{y=-1/2}^{0} dz$$

$$= \int_0^{1/3} \frac{(1+3z)^4 - (3z)^4 - (3z)^4 + (-1+3z)^4}{24} \cdot dz$$

$$= \frac{1}{24} \int_0^{1/3} \left((1+3z)^4 - 2(3z)^4 + (-1+3z)^4 \right) \cdot dz$$

$$= \frac{1}{24}\left[\frac{(1+3z)^5}{15} - \frac{2(3z)^5}{15} + \frac{(-1+3z)^5}{15}\right]_{z=0}^{1/3} = \dots = 1/12$$

Ορισμός:

Έστω W χωρίο στον $\mathbb{R}^3$. Το W λέγεται xy-απλό αν υπάρχει x-απλό χωρίο $D = \{(x,y) / a \leq x \leq b, \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ στο xy-επίπεδο και συναρτήσεις $u_1(x,y) \leq u_2(x,y)$, ώστε:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D, \ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

$$= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / a \leq x \leq b, \ y_1(x) \leq y \leq y_2(x), \ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

Το W λέγεται yx-απλό αν υπάρχει y-απλό χωρίο D στο xy-επίπεδο και $u_1(x,y) \leq u_2(x,y)$ ώστε

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / (x,y) \in D, \ u(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

$$= \{\ \dots \ / a \leq y \leq b, \ Y_1(y) \leq x \leq Y_2(y), \ u_1(x,y) \leq z \leq u_2(x,y)\}$$

Αντίστοιχοι ορισμοί για xz, zx, zy, ..., απλά χωρία

Θεώρημα:

Αν W xy-απλό χωρίο στο $\mathbb{R}^3$,

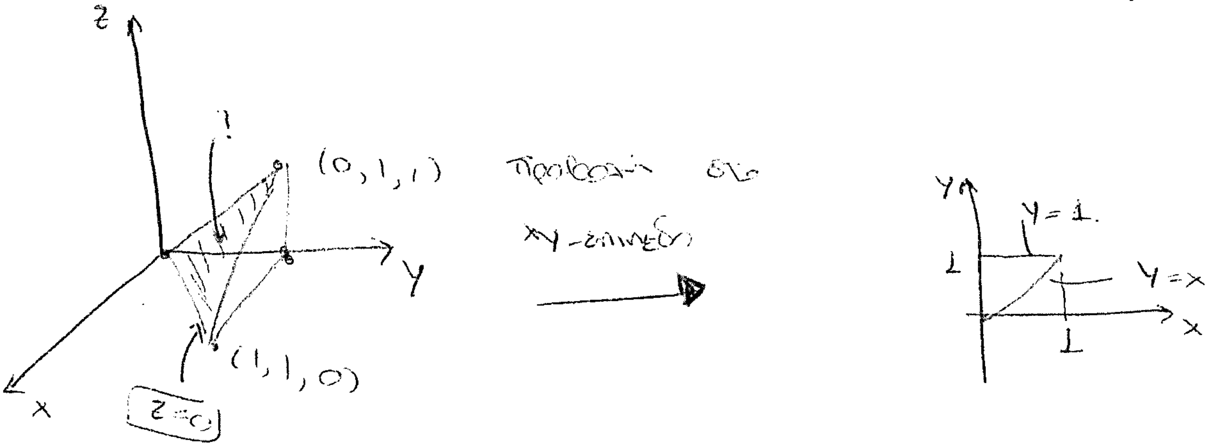
$$\iiint_W f \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{u_1(x,y)}^{u_2(x,y)} f \cdot dz \cdot dy \cdot dx$$

Αντίστοιχα για τα υπόλοιπα χωρία

Ιδιότητες του διπλού όλα ισχύουν και για το τριπλό

Π.χ.:

1) $\iiint_W x\cdot z \cdot dV$, όπου W = τετράεδρο με κορυφές $(0,0,0)$, $(0,1,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$



$D = \{ (x,y) \,/\, 0 \leq x \leq 1 \,,\, x \leq y \leq 1 \}$

x-απλό

W xy-απλό

$W = \{ (x,y,z) \,/\, 0 \leq x \leq 1 \,,\, x \leq y \leq 1 \,,\, ? \}$

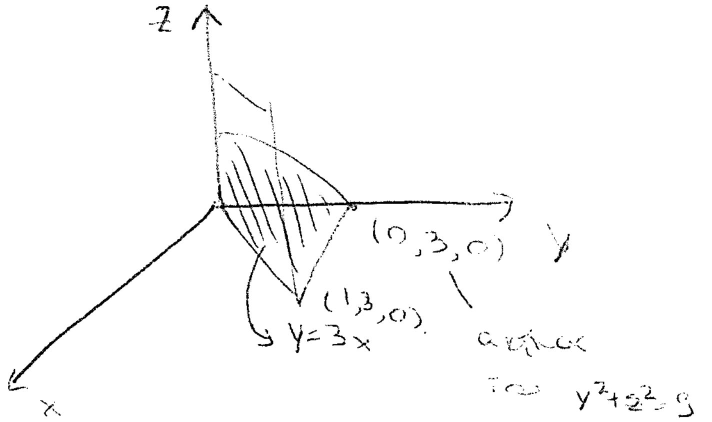
Το z είναι μεταξύ του $z=0$ και του επιπέδου που ορίζουν τα σημεία $(0,0,0)$, $(1,1,0)$, $(0,1,1)$

Αποδεικνύεται ότι είναι το $x-y+z=0 \Rightarrow \boxed{z=y-x}$?

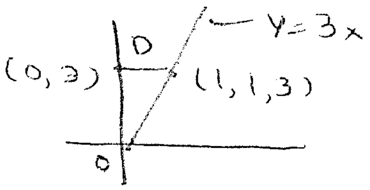
Άρα $W = \{ (x,y,z) \,/\, 0 \leq x \leq 1 \,,\, x \leq y \leq 1 \,,\, 0 \leq z \leq y-x \}$

$$\iiint_W x\cdot z\cdot dV = \int_0^1 \int_x^1 \int_0^{y-x} x\cdot z \cdot dz\, dy\, dx = \ldots = \frac{1}{120}$$

2) $\iiint_W z\,dV$, W το στερεό μεταξύ του κυλίνδρου $y^2+z^2=9$ και των επιπέδων $y=3x$ και $z=0$ στο 1^o ογδοημόριο



Προβολή στο xy-επίπεδο:



$D = \{(x,y) / 0 \le x \le 1,\ 3x \le y \le 3\}$
x-απλό.

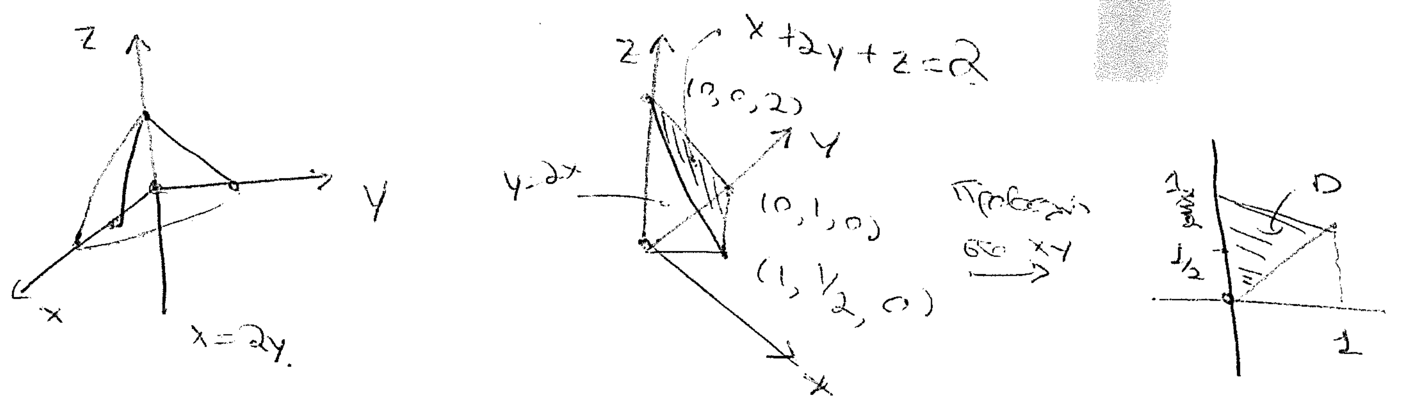
$W = \{(x,y,z) / 0 \le x \le 1,\ 3x \le y \le 3,\ 0 \le z \le \sqrt{9-y^2}\}$ xy-απλό

$$\iiint_W z\,dV = \int_0^1 \int_{3x}^{3} \int_0^{\sqrt{9-y^2}} z\,dz\,dy\,dx = \dots = \frac{27}{8}$$

<u>Παρατήρηση:</u>

$\iiint_W 1\,dV =$ όγκος του W.

<u>Π.χ.:</u> Να βρεθεί ο όγκος τετραέδρου που σχηματίζεται από



$D = \{ (x,y) \,/\, 0 \le x \le 1, \ \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2} \}$ (x - απλό)

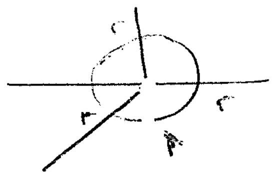
$W = \{ (x,y,z) \,/\, 0 \le x \le 1, \ \frac{x}{2} \le y \le 1 - \frac{x}{2}, \ 0 \le z \le 2 - x - 2y \}$

$$\iiint_W 1 \cdot dV = \int_0^1 \int_{\frac{x}{2}}^{1-\frac{x}{2}} \int_0^{2-2x-2y} 1 \cdot dz \cdot dy \cdot dx = \dots = 1/3$$

Κάποιες γνωστές επιφάνειες:

1) Σφαίρα ακτίνας r.

$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$

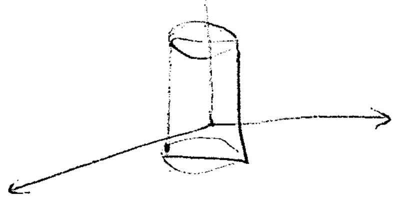


2) Κύλινδρος ακτίνας r.

Εδώ έχει σημασία ο προσανατολισμός.

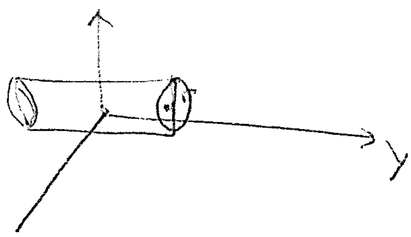
Με άξονα τον $z'z$)

$x^2 + y^2 = r^2$



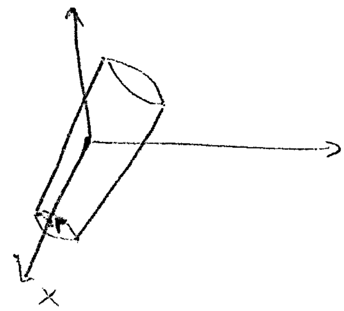
Με άξονα $y'y$

$$x^2+z^2=r^2$$



Με άξονα $x'x$

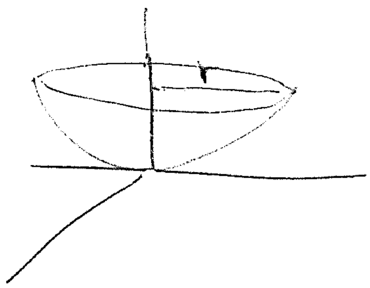
$$y^2+z^2=r^2$$



3) Παραβολοειδές με επιφάνεια τομής κύκλο ακτίνας r.

Προς τον $z'z$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=z$$



Προς τον $y'y$

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=y$$

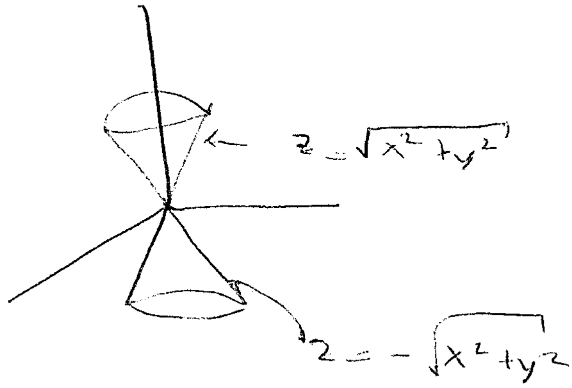
Προς τον $x'x$

$$\frac{y^2}{r^2}+\frac{z^2}{r^2}=x$$

4) Κώνος

Με άξονα $z'z$

$$z^2 = x^2 + y^2$$



Με άξονα $y'y$.

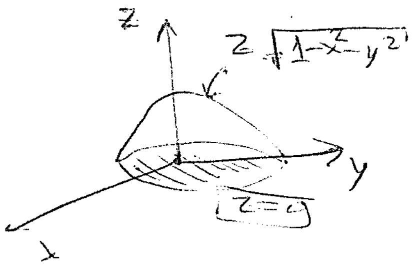
$$y^2 = x^2 + z^2$$

Με άξονα $x'x$

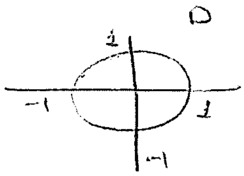
$$x^2 = y^2 + z^2.$$

<u>Π.χ:</u>

Περιγράψτε το άνω ημισφαίριο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=1$.



Προβολή στο xy επίπεδο



$$D = \{(x,y) \,/\, -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}$$

$$W = \{(x,y,z) \,/\, -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, 0 \le z \le \sqrt{1-x^2-y^2}\}$$

xy - απλό.

ΜΑΣ 026:

29/10/19:

$$W = [a,b] \times [c,d] \times [p,q]$$

$$\iiint_{W_1} f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_p^q \int_c^d \int_a^b f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz$$

Π.χ.:

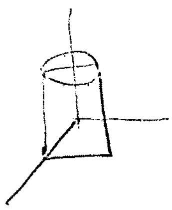
$$W = \{(x,y,z) \mid a \le x \le b,\ y_1(x) \le y \le y_2(y),\ u_1(x,y) \le z \le u_2(x,y)\}$$

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \int_{u_1}^{u_2} f(x,y,z)\,dz\,dy\,dx$$

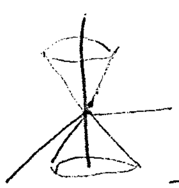
Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$:

σφαίρα ακτίνας r $x^2+y^2+z^2=r^2$

κύλινδρα ακτίνας r βάσης $x^2+y^2=r^2$



Κώνος: $z^2=x^2+y^2$



$z=\sqrt{x^2+y^2}$

$z=-\sqrt{x^2+y^2}$

Παραβολοειδές

$$\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}=z$$

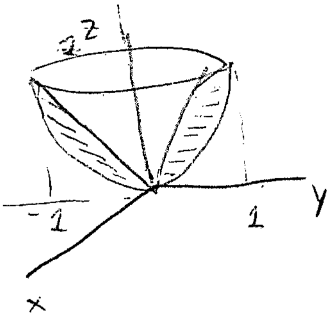
Παραδείγματα:

1) Να εκφραστεί με τριπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του χωρίου μεταξύ του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$.

Απάντηση:

Η τομή τους θα είναι τα σημεία όπου:

$$x^2+y^2=\sqrt{x^2+y^2}$$



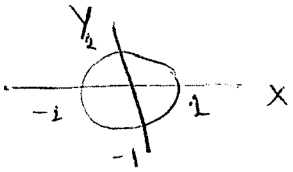
$\Rightarrow$ $x^2+y^2=0$ ή $x^2+y^2=1$

↑ κύκλος ακτίνας 1

$\Rightarrow$ $x=y=0$

$(0,0)$

Προβολή στο xy-επίπεδο:



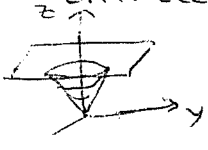
$$\{(x,y)/ -1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2}\}$$

Άρα $\omega=\{(x,y,z)/ -1\le x\le 1,\ -\sqrt{1-x^2}\le y\le \sqrt{1-x^2},$

$x^2+y^2\le z\le \sqrt{x^2+y^2}\}$

όγκος $\omega=\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{x^2+y^2} 1\,dz\,dy\,dx\ldots$

2) Το ίδιο για το χωρίο μεταξύ του κώνου $z=\sqrt{x^2+y^2}$ και του επιπέδου $z=1$



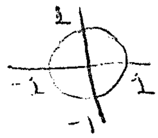
Σημεία Τομής:

$1 = \sqrt{x^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2+y^2 = 1.$

$\Rightarrow$ κύκλος ακτίνας 1.

Προβολή στο xy-επίπεδο:



$$W = \{(x,y,z) \mid -1 \le x \le 1,\ -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2},\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}.$$

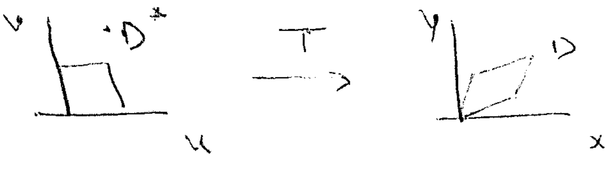
Όγκος $W = \displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} 1 \cdot dz \cdot dy \cdot dx.$

Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών:

→ Το χρησιμοποιούμε σε 2 περιπτώσεις:

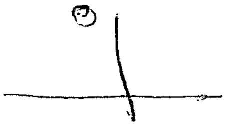
- αν η συνάρτηση είναι περίπλοκη
- αν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι περίπλοκο

Ιδέα:

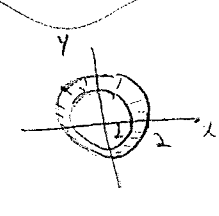


κυκλ.

Π.χ.:



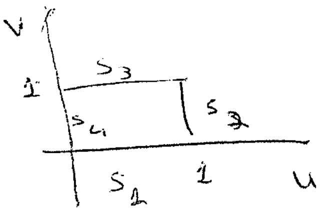
$x = \cos\theta$
$y = \sin\theta$
r



$\{(x,y) / 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2\}.$

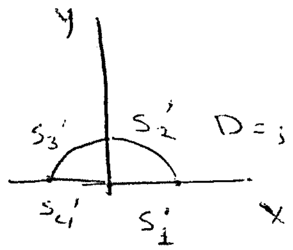
$\{(r,\theta) / 1 \le r \le 2,\ \ 0 \le \theta \le 2\pi\}$

Π.χ μετασχηματισμός:



$x = u^2 - v^2$

$y = 2uv$



Απεικονίζουμε μία-μία τις πλευρές.

Η $S_1 = \{(u,v) / 0 \le u \le 1 , v = 0\}$

$v = 0 \Rightarrow y = 2u \cdot 0 = 0$

$x = u^2 - v^2 = u^2$ με $0 \le u \le 1 \Rightarrow 0 \le x \le 1$.

$S_2 = \{(u,v) / u = 1 , 0 \le x \le 1\}$

$x = 1 - v^2$

$y = 2v \Rightarrow v = \frac{y}{2}$.

$x = 1 - \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 - \frac{y^2}{4} \Rightarrow \boxed{x = 1 - \frac{y^2}{4}}$

$S_3 = \{(u,v) / v = 1 , 0 \le u \le 1\}$

Προκύπτει ότι $x = \frac{y^2}{4} - 1$.

$S_4 = \{(u,v) / u = 0 , 0 \le v \le 1\}$

Προκύπτει ότι $-1 \le x \le 0 , y = 0$

$$\iint_D f \cdot dA = ; \qquad \iint_{D^*} f \cdot dA.$$

Ορισμός: Έστω T ένας αντιστρέψιμος μετασχηματισμός

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι η ορίζουσα.

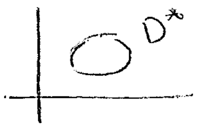
$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \overset{\text{συμβ.}}{=\!=} \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

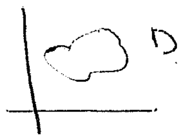
Αποδεικνύεται ότι το στοιχειώδες εμβαδόν $dx \cdot dy$ αυτό είναι ίσο με $\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \cdot du \cdot dv$

απόλυτη τιμή

Άρα:

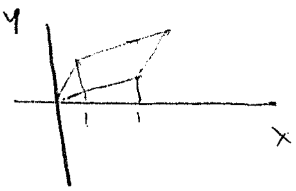
$$\boxed{\iiint_D F(x,y) \cdot dx \cdot dy = \iint_{D^*} f(u,v) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \cdot du \cdot dv}$$





Πχ:

$\iint_D xy \cdot dx \cdot dy = ?$, όπου D το παρ/μο με κορυφές $(0,0)$, $(2,2)$, $(1,2)$, $(3,4)$.

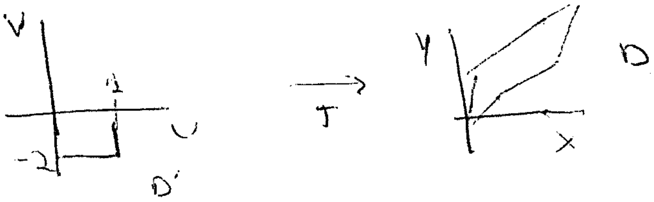


Επειδή το χωρίο είναι περίπλοκο κάνουμε αλλαγή μεταβλητών.

Θα το κάνουμε μέσω του μετασχηματισμού:

$T: \quad x = u - v$

$\quad\;\; y = 2u - v$



Με πράξεις προκύπτει ότι: $u = y - x$,

$v = y - 2x$.

για $x = y = 0$, τότε $u = 0$, $v = 0$.

για $x = 2 = y$, τότε $u = 0$, $v = -2$.

για $x = 1$, $y = 2$, τότε $u = 1$, $v = 0$.

για $x = 3$, $y = 4$, τότε $u = 1$, $v = 2$.

Χρησιμοποιούμε την Ιακωβιανή:

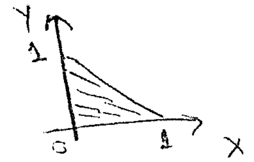
$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial u} & \dfrac{\partial x}{\partial v} \\[2ex] \dfrac{\partial y}{\partial u} & \dfrac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1.$$

Άρα
$$\iint_D xy \cdot dx \cdot dy = \iint_{D'} (u-v)(2u-v) \cdot \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right| \cdot du \cdot dv$$

$$= \int_{-2}^{0} \int_{0}^{1} (2u^2 - uv - 2uv + v^2) \cdot du \cdot dv.$$

$$= 7.$$

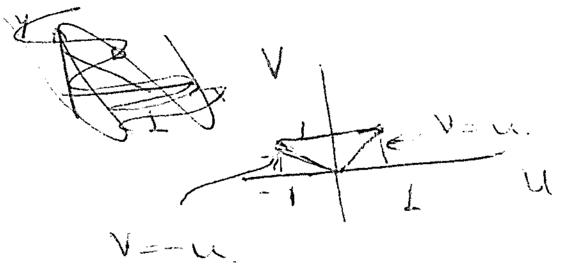
π.χ.: $\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\cdot dx\cdot dy$ όπου D το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$.



Κάνουμε αλλαγή μεταβλητών για να απλοποιήσουμε τη συνάρτηση.

$$\begin{aligned} u &= x-y \\ v &= x+y \end{aligned} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(u+v) \\ y = \frac{1}{2}(v-u) \end{cases}$$

- για $x=y=0$, $u=0$, $v=0$.



- για $x=1$, $y=0$, $u=1$, $v=1$.
- για $x=0$, $y=1$, $u=-1$, $v=1$.
- για $x=0$, $y=1$, $u=-1$, $v=1$.

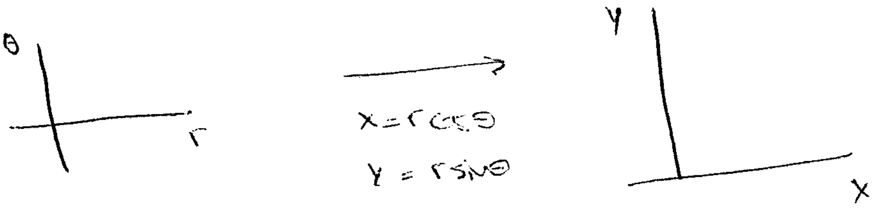
$$D' = \{(u,v) \,/\, 0 \le v \le 1,\ -v \le u \le v\}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\iint_D \cos\left(\frac{x-y}{x+y}\right)\cdot du\cdot dv = \frac{1}{2}\cdot\int_0^1\int_0^v \cos\left(\frac{u}{v}\right)\cdot du\cdot dv$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 v\left[-\sin\left(\frac{u}{v}\right)\right]\cdot du\cdot dv = \dots = \frac{\sin 1}{2}$$

Ειδική περίπτωση: Πολικές συντεταγμένες.



Η Ιακωβιανή είναι:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta - (-r\sin^2\theta)$$

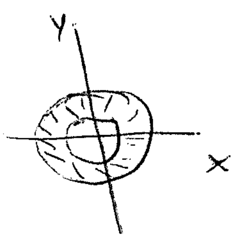
$$= r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r.$$

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\cdot dx\cdot dy \overset{\text{πολικές}}{=\!=} \iint_{D'} f(r,\theta)\cdot r\cdot dr\cdot d\theta}$$

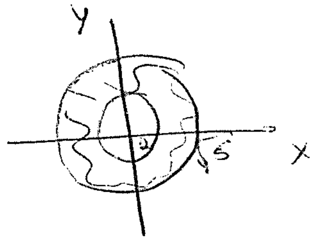
Π.χ.:

Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του δακτυλίου

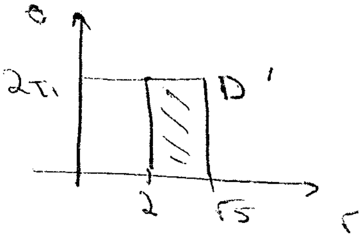
$4 \le x^2 + y^2 \le 5$.



$$\text{Εμβ.} = \iint_D 1\cdot dx\cdot dy =$$



$\xleftarrow{\Theta}$

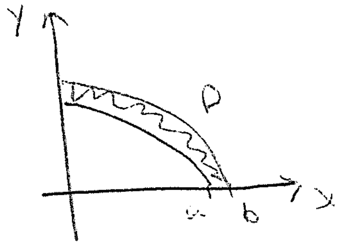


$D' = \{ (r, \theta) \,/\, 2 \le r \le \sqrt{5} \;, 0 \le \theta \le 2\pi \}$

$= \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{2} - \frac{4}{2} \right) \cdot d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cdot d\theta = \frac{1}{2} \cdot 2\pi = \pi .$

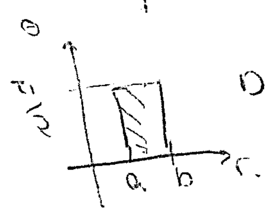
<u>Π. χ:</u>

$\iint_D \log(x^2+y^2) \cdot dx \cdot dy$ όπου το D το χωρίο μεταξύ των τεταρτοκυκλίων $x^2+y^2=a^2$, $x^2+y^2=b^2$ για $0<a<b$ (στο 1° τεταρτημόριο).



Χρησιμοποιούμε πολικές συντεταγμένες

$D' = \{ (r, \theta) \,/\, a \le r \le b \;, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2} \}$



$\iint_D \log(x^2+y^2) \cdot dx \cdot dy = \iint_{D'} \log(r^2) \cdot dr \cdot d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \int_a^b 2 \log r \cdot r \cdot dr \cdot d\theta = 2 \int_a^b r \cdot \log r \cdot d\theta \cdot dr$

$$= 4\pi \int_a^b r \log r \cdot dr$$

$$\int x \cdot \log x \cdot dx = \int \left(\frac{x^2}{2}\right)' \cdot \log x \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot (\log x)' \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \log x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \int \frac{x}{2} \cdot dx$$

$$= \frac{x^2}{2} \cdot \log x - \frac{1}{4} x^2$$

$$= 4\pi \left[\frac{r^2}{2} \log r - \frac{r^2}{4} \right]_a^b$$

$= \ldots$

Αλλαγή μεταβλητών σε τριπλά ολοκληρώματα

$$(u, v, w) \xrightarrow{T} (x, y, z)$$

$$\iiint_W f(x, y, z) \cdot dx \cdot dy \cdot dz = \iiint_W f(u, v, w) \cdot \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du\,dv\,dw$$

όπου

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Ειδική περίπτωση : Κυλινδρικές συντεταγμένες

$(r, \theta, z) \to (x, y, z)$

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

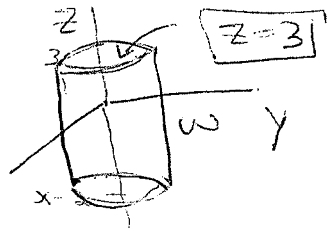
$z = z$

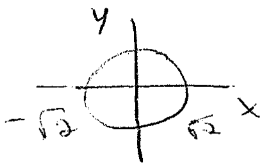
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial z} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

π.χ.

$$\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz = ;$$

όπου W ο κύλινδρος $x^2+y^2 \le 2$, $-2 \le z \le 3$.





$$W' = \{ (r, \theta, z) / -2 \le z \le 3, \ 0 \le r \le \sqrt{2}, \ 0 \le \theta \le 2\pi \}$$

$$\iiint_W (x^2+y^2+z^2)\cdot dx\cdot dy\cdot dz = \iiint_{W'} (r^2+z^2)\cdot r \cdot dr\cdot d\theta$$

$$= \int_{-2}^{3}\int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{\sqrt{2}} (r^2+z^2)\cdot dr\cdot d\theta\cdot dz \ \cdots = \frac{100\pi}{3}$$