

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

1. Αποδείξτε ότι η $\phi(x, y) = \tan^{-1}(xy)$ είναι συνάρτηση δυναμικού του πεδίου $F(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2}i + \frac{x}{1+x^2y^2}j$.
2. Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $F(x, y, z) = x^2i - 2j + yzk$.
3. Έστω τα διανυσματικά πεδία $F(x, y, z) = 2xi + j + 4yk$, $G(x, y, z) = xi + yj - zk$. Να υπολογίσετε το $\nabla \cdot (F \times G)$.
4. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα δύο φορές παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα; Αυτές που έχουν, ορίζουν βαθμωτή συνάρτηση ή διανυσματικό πεδίο;
- | | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|-----------------------------------|
| i) $\text{curl}(\text{grad } F)$ | ii) $\text{grad}(\text{curl } F)$ | iii) $\text{div}(\text{grad } F)$ |
| iv) $\text{grad}(\text{div } F)$ | v) $\text{curl}(\text{div } F)$ | vi) $\text{div}(\text{curl } F)$ |
5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.
- i) $\int_C \frac{1}{1+x} ds, C : r(t) = ti + \frac{2}{3}t^{3/2}j \quad (0 \leq t \leq 3),$
- ii) $\int_C \frac{x}{1+y^2} ds, C : x = 1 + 2t, y = t \quad (0 \leq t \leq 1).$
6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C F \cdot dr$, όπου $F(x, y) = 2i + 5j$ και C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, -3)$ στο $(4, -3)$.

