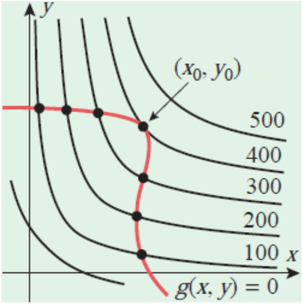
4.9 Πολλαπλασιαστές Lagrange

Θα ασχοληθούμε με το πρόβλημα εύρεσης μέγιστου/ελαχίστου συνάρτησης $z = f(x, y)$ υπό την συνθήκη $g(x, y) = 0$.

Παράδειγμα

Εύρεση ελάχιστου εμβαδού επιφάνειας κουτιού με δοσμένο όγκο.



Θεώρημα

Έστω $f(x,y)$, $g(x,y)$ συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτό σύνολο που περιέχει την καμπύλη $g(x,y)=0$ έτσι ώστε $\nabla g \neq \vec{0}$ στο σύνολο αυτό. Αν η f έχει τοπικό ακρότατο σε σημείο (x_0,y_0) της καμπύλης $g(x,y)=0$ τότε,

$$\nabla f(x_0,y_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0)$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Γεωμετρικά, το θεώρημα συνεπάγεται ότι τα $\nabla f(x_0,y_0)$, $\nabla g(x_0,y_0)$ είναι παράλληλα.
- Το λ λέγεται **πολλαπλασιαστής Lagrange**.

Απόδειξη

Παράδειγμα

Να βρεθεί σε ποιά σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ λαμβάνει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή η συνάρτηση $f(x, y) = xy$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί σε ποιά σημεία του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ λαμβάνει μέγιστη κι ελάχιστη τιμή η συνάρτησης $f(x, y) = xy$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ορθογώνιο με δοσμένη περίμετρο p και μέγιστο εμβαδό.

Οι πολλαπλασιαστές Lagrange εφαρμόζονται και σε συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

Θεώρημα

Έστω $f(x,y,z)$, $g(x,y,z)$ *συναρτήσεις με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτό σύνολο που περιέχει την επιφάνεια* $g(x,y,z)=0$ *έτσι ώστε* $\nabla g \neq \vec{0}$ *στο σύνολο αυτό. Αν η* f *έχει τοπικό ακρότατο σε σημείο* (x_0,y_0,z_0) *της επιφάνειας* $g(x,y,z)=0$ *τότε,*

$$\nabla f(x_0,y_0,z_0) = \lambda \nabla g(x_0,y_0,z_0)$$

για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα σημεία της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ με μέγιστη κι ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(1, 2, 2)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν τα σημεία της σφαίρας $x^2 + y^2 + z^2 = 36$ με μέγιστη κι ελάχιστη απόσταση από το σημείο $(1, 2, 2)$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου κουτιού χωρίς καπάκι με όγκο $32\,cm^3$ με ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι διαστάσεις ορθογωνίου κουτιού χωρίς καπάκι με όγκο $32\,cm^3$ με ελάχιστο εμβαδόν επιφάνειας.