ΜΑΣ026 - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ ΙΙ
ΧΕΙΜΕΡΙΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ 2019-2020
Ασκήσεις

1ο Κεφάλαιο

1. Έστω $\vec{x} = (-3, -2)$ και $\vec{y} = (2, 1)$. Αν θ είναι η γωνία των $\vec{y} - \vec{x}$ και $\vec{y}$ να βρεθεί το $\cos\theta$.

2. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $A(1, 0, 0)$, $B(1, 2, -1)$ και $C(0, 2, -4)$.

3. Να βρεθεί διάνυσμα $\vec{u} \in \mathbb{R}^2$ ώστε $\vec{u} = \lambda(4, 2)$ με $\lambda > 0$ και $\|u\| = 2$.

4. Έστω τρίγωνο με κορυφές $A(1, 5, 3)$, $B(3, 5, 5)$ και $\Gamma(1, 9, 4)$.

i. Να βρεθούν τα συνημίτονα των γωνιών του τριγώνου. Τι είδους τρίγωνο είναι;

ii. Ποιο είναι το εμβαδόν του τριγώνου;

5. Έστω $\vec{a} = (2, 1, 0)$ και $\vec{b} = (3, 3, 3)$.

i. Είναι τα γινόμενα $(\vec{a} \times \vec{b}) \times \hat{\imath}$ και $\vec{a} \times (\vec{b} \times \hat{\imath})$ ίσα;

ii. Να δειχθεί ότι
$$\begin{aligned} &(\vec{a} \times \vec{b}) \times \hat{\imath} = (\vec{a} \cdot \hat{\imath})\vec{b} - (\vec{b} \cdot \hat{\imath})\vec{a} \quad \text{και} \\ &\vec{a} \times (\vec{b} \times \hat{\imath}) = (\vec{a} \cdot \hat{\imath})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\hat{\imath}. \end{aligned}$$

6. Έστω $\vec{r}$, $\vec{s}$, $\vec{t}$ τρία μη μηδενικά διανύσματα στον $\mathbb{R}^3$. Αποφασίστε αν τα παρακάτω είναι Σωστά ή Λάθος και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i. Αν το $\vec{r}$ είναι παράλληλο με το $\vec{s}$ και το $\vec{s}$ παράλληλο με το $\vec{t}$, τότε το $\vec{r}$ είναι παράλληλο με το $\vec{t}$.

ii. Αν το $\vec{r}$ είναι κάθετο με το $\vec{s}$ και το $\vec{s}$ κάθετο με το $\vec{t}$, τότε το $\vec{r}$ είναι κάθετο με το $\vec{t}$.

iii. Αν το $\vec{r}$ είναι παράλληλο με το $\vec{s}$ και το $\vec{s}$ είναι κάθετο με το $\vec{t}$, τότε το $\vec{r}$ είναι κάθετο με το $\vec{t}$.

iv. $\vec{r} \cdot (\vec{s} \times \vec{t}) = (\vec{t} \times \vec{s}) \cdot \vec{r}$.

v. Αν $\vec{r} \cdot (\vec{s} \times \vec{t}) = 0$ και $\vec{s} \times \vec{t} \neq \vec{0}$ τότε το $\vec{r}$ είναι κάθετο στο $\vec{s} + \vec{t}$.

vi. Αν $\vec{r} \times (\vec{s} \times \vec{t}) = \vec{0}$ και $\vec{s} \times \vec{t} \neq \vec{0}$ τότε το $\vec{r}$ είναι κάθετο στα $\vec{s}$ και $\vec{t}$.

7. Ανήκουν τα σημεία $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 4, 6)$, $R(3, -1, 2)$ και $S(6, 2, 8)$ στο ίδιο επίπεδο;

8. Αποδείξτε ότι η εξίσωση $\rho = \dfrac{3}{\sin\phi}$ σε σφαιρικές συντεταγμένες και η εξίσωση $r = 3$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες περιγράφουν την ίδια επιφάνεια. Ποια επιφάνεια είναι αυτή;

*** 9.** Μια μάζα ενός κιλού βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και κρέμεται από δύο νήματα καρφωμένα στα σημεία $(1, 1, 1)$ και $(-1, -1, 1)$. Αν η βαρύτητα ασκείται προς την κατεύθυνση του $-\hat{k}$, να βρεθούν τα διανύσματα που περιγράφουν τις δυνάμεις που ασκούνται από τα νήματα. [Μια μάζα ενός κιλού έχει βάρος 9.8 Nt.]

**** 10. (Διανυσματική μορφή του νόμου του Snell)** Δύο υλικά με δείκτες διάθλασης n_1 και n_2 χωρίζονται από επίπεδο κάθετο στο μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{N}$. Έστω $\vec{a}$ και $\vec{b}$ μοναδιαία διανύσματα στην κατεύθυνση της προσπίπτουσας και διαθλώμενης ακτίνας αντίστοιχα. Να δειχθεί ότι $n_1(\vec{N} \times \vec{a}) = n_2(\vec{N} \times \vec{b})$.

2ο Κεφάλαιο

11. Να υπολογίσετε τα παρακάτω όρια ή να δείξετε ότι δεν υπάρχουν.

i. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^3}{x^2+y^2}$

ii. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+xy+y^2}{x^2-y^2}$

iii. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(\pi,\pi)} x\sin\left(\frac{x+y}{4}\right)$

iv. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \sqrt{\left|\frac{x+y}{x-y}\right|}$

12. Να ελέγξετε αν οι παρακάτω συναρτήσεις είναι συνεχείς.

i. $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{|x|+|y|} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

ii. $f(x,y,z) = \begin{cases} \dfrac{xy-z^2}{x^2+y^2+z^2} & ,(x,y)\neq(0,0) \\ 0 & ,(x,y)=(0,0) \end{cases}$

13. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = e^{2x+3y}$.

i. Να βρεθεί η παράγωγος της f.

ii. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου της f στο σημείο $(0,0)$.

14. Να βρεθεί η παράγωγος της συνάρτησης $f(x,y) = (xye^{xy}, x\sin y, 5xy^2)$.

15. Έστω η συνάρτηση $T(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$, όπου $x = \cos t, y = \sin t, z = t$. Να βρεθεί με δύο τρόπους η παράγωγος της T ως προς τη μεταβλήτη t.

16. i. Έστω $f(x,y) = xe^{x^2+y^2}$. Αν θέσουμε $x = r\cos\theta$ και $y = r\sin\theta$, να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ με χρήση του κανόνα αλυσίδας.

ii. Έστω $f(x,y,z) = 2x^2+2y^2+z^2$. Αν θέσουμε $x = \rho\cos\theta\sin\phi$, $y = \rho\sin\theta\sin\phi$ και $z = \rho\cos\phi$, να βρεθούν οι παράγωγοι $\dfrac{\partial f}{\partial \rho}$, $\dfrac{\partial f}{\partial \theta}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial \phi}$ με χρήση του κανόνα αλυσίδας.

17. Αν η y είναι συνάρτηση του x και συνδέονται με τη σχέση $x^2+y^3+e^y = 0$ να βρεθεί η παράγωγος $\dfrac{dy}{dx}$.

18. Έστω η συνάρτηση $f(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$. Σε ποια κατεύθυνση είναι η παράγωγος της f ίση με 0 στο σημείο $(1,1)$;

19. Αν S είναι η επιφάνεια στον $\mathbb{R}^3$ με εξίσωση $\cos(xy) = e^z - 2$, να βρεθεί το εφαπτόμενο επίπεδο και ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα της S στο σημείο $(1,\pi,0)$.

20. Έστω $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση δύο μεταβλητών x, y. Αποφασίστε αν τα παρακάτω είναι Σωστά ή Λάθος και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i. Αν $\lim_{(x,y)\to(1,1)} f(x,y) = 2$ και L είναι μια ευθεία που διέρχεται από το $(1,1)$, τότε

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(1,1)\\(x,y)\in L}} f(x,y) = 2.$$

ii. Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ τότε η f είναι παραγωγίσιμη.

iii. Αν η f είναι παραγωγίσιμη, η παράγωγος της είναι ο πίνακας $Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{bmatrix}$.

iv. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και $\vec{u}$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα, τότε $D_{-\vec{u}}f(x,y) = -D_{\vec{u}}f(x,y)$.

v. Αν η f είναι παραγωγίσιμη και $\vec{u} = (1,2)$, τότε η παράγωγος της f σε ένα σημείο (x_0, y_0) στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ δίνεται από τον τύπο $\nabla f(x_0, y_0) \cdot \vec{u}$.

21. Η εξίσωση ιδανικών αερίων είναι η $PV = nRT$, όπου το R είναι σταθερό. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial P} \cdot \frac{\partial P}{\partial V} = -1.$$

22. Το ύψος ενός θαλάσσιου ηφαιστείου στη Χαβάη δίνεται από τη συνάρτηση

$$h(x,y) = 2,59 - 0,00024y^2 - 0,00065x^2,$$

όπου h είναι το ύψος από το επίπεδο στάθμης της θάλασσας και τα x και y μετράνε απόσταση δυτικά-ανατολικά και βόρεια-νότια από την κορυφή του ηφαιστείου. Στο σημείο $(x,y) = (-2,-4)$ του ηφαιστείου:

i. Πόσο γρήγορα αυξάνεται το ύψος στην κατεύθυνση $(1,1)$ (δηλ. ΒΑ);

ii. Ποια κατεύθυνση δείχνει την πιο απότομη ανηφόρα;

23. Έστω η συνάρτηση $f(x,y,z) = ze^{xy} + yz^3x^2$. Να δειχθεί ότι

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}.$$

24. Μια συνάρτηση λέγεται αρμονική αν $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$. Να δειχθεί ότι η $f(x,y) = e^x \sin y$ είναι αρμονική.

25. Βρείτε τα τοπικά μέγιστα και ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία των παρακάτω συναρτήσεων:

i. $f(x,y) = 8y^3 + 12x^2 - 24xy$

ii. $f(x,y) = e^{1+x^2+y^2}$

26. Να βρεθούν τα κρίσιμα σημεία και τα (απόλυτα) ακρότατα της συνάρτησης $f(x,y) = \sin x + \cos y$, ορισμένη στο σύνολο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le x \le 2\pi, 0 \le y \le 2\pi\}$.

27. Να βρεθούν τα ακρότατα της $f(x,y) = \dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ υπό την συνθήκη $g(x,y) = x + y = 1$.

28. Ποιο σημείο της σφαίρας $x^2+y^2+z^2 = 4$ απέχει τη μικρότερη απόσταση από το σημείο $(3, 1, -1)$;

3ο Κεφάλαιο

29. Έστω C ο κύκλος ακτίνας 2 με κέντρο $(0,0)$.

i. Να βρεθεί μια παραμέτρηση με αριστερόστροφη φορά ξεκινώντας από το $(2,0)$.

ii. Να βρεθεί παραμέτρηση δεξιόστροφη φορά ξεκινώντας από το $(0,2)$.

iii. Να βρεθεί παραμέτρηση αν το κέντρο μετακινηθεί στο $(4,7)$.

30. Έστω η καμπύλη $r(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$. Ένα σωματίδιο διατρέχει αυτήν την καμπύλη και σε χρόνο $t_0 = 2$ διαφεύγει και κινείται στην κατεύθυνση της εφαπτομένης της r. Βρείτε την θέση που θα έχει το σωματίδιο σε χρόνο $t_1 = 3$.

31. Έστω η καμπύλη $r(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t)$. Να δειχθεί ότι η γωνία μεταξύ της r και της r' είναι σταθερή.

32. Ένα σωματίδιο που κινείται στον χώρο έχει επιτάχυνση $a(t) = (2, -6, 4)$, αρχική ταχύτητα $v(0) = (-5, 1, 3)$ και αρχική θέση $r(0) = (6, -2, 1)$. Να βρεθούν τα σημεία τομής της τροχιάς του σωματιδίου με το yz-επίπεδο.

33. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $r(t) = (\log\left(\sqrt{t}\right), \sqrt{3}t, \dfrac{3}{2}t^2)$, για $1 \leq t \leq 2$.

34. Να βρεθεί το μήκος της καμπύλης $r(t) = (2t, t^2, \log t)$ μεταξύ των σημείων $(2,1,0)$ και $(4, 4, \log 2)$.

35. Έστω $F(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3\hat{\imath} + 4\hat{\jmath} + 5\hat{k})$. Να βρεθούν η απόκλιση και ο στροβιλισμός του F.

36. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ένα δύο φορές παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα; Αυτές που έχουν, ορίζουν βαθμωτό ή διανυσματικό πεδίο;

i. $\mathrm{curl}(\mathrm{grad}\, F)$

ii. $\mathrm{grad}(\mathrm{curl}\, F)$

iii. $\mathrm{div}(\mathrm{grad}\, F)$

iv. $\mathrm{grad}(\mathrm{div}\, F)$

v. $\mathrm{curl}(\mathrm{div}\, F)$

vi. $\mathrm{div}(\mathrm{curl}\, F)$

37. Έστω $F(x,y,z) = (x^2, x^2 y, z + zx)$.

i. Να δειχθεί ότι $\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{\nabla} \times F) = 0$.

ii. Υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ώστε $F = \boldsymbol{\nabla} f$;

38. Έστω $f, g, h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις και $F(x,y,z) = (f(x), g(y), h(z))$. Να δειχθεί ότι το F είναι αστρόβιλο.

39. Έστω D το ορθογώνιο $[0,1]\times[0,1]$. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα:

i. $\displaystyle\iint_D \sin(x+y)\,dxdy$,

ii. $\displaystyle\iint_D (xy)^2\cos\left(x^3\right)dxdy$.

40. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint_W ye^{-xy}\,dxdydz$, όπου W είναι ο κύβος $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$.

41. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\int_0^{\cos x} y\sin x\,dydx$, αφού πρώτα σχεδιάσετε το χωρίο ολοκλήρωσης.

42. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\int_0^1\int_{\sqrt{y}}^1 e^{x^3}\,dxdy$.

43. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint_W (1-z^2)\,dxdydz$, όπου W η πυραμίδα με άνω κορυφή $(0,0,1)$ και κάτω κορυφές $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ και $(1,1,0)$.

44. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D e^{x^2+y^2}\,dxdy$, όπου D ο κυκλικός δίσκος $x^2+y^2\leq 1$.

45. Έστω το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x+y}\,dxdy$, όπου D το χωρίο μεταξύ των ευθειών $x=0$, $y=0$, $x+y=1$ και $x+y=4$. Να υπολογιστεί η τιμή του χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $x=u-uv$ και $y=uv$.

46. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iiint_W \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}dxdydz$, όπου W το χωρίο μεταξύ των σφαιρών $x^2+y^2+z^2\leq a^2$ και $x^2+y^2+z^2\leq b^2$, με $0<b<a$.

47. i. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν της έλλειψης $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

ii. Να βρεθεί με τριπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του ελλειψοειδούς $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

48. Αποφασίστε αν τα παρακάτω είναι Σωστά ή Λάθος και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i. $\displaystyle\int_{-1}^2\int_0^6 x^2\sin(x-y)dxdy=\int_0^6\int_{-1}^2 x^2\sin(x-y)dydx$.

ii. $\displaystyle\int_0^1\int_0^x \sqrt{x^2+y^2}dydx=\int_0^x\int_0^1 \sqrt{x^2+y^2}dxdy$.

iii. $\displaystyle\int_0^8\int_{\frac{y}{2}}^4 dxdy=\int_0^4\int_0^{2x} dydx$.

49. Να γράψετε το ολοκήρωμα $\int\limits_0^1 \int\limits_y^1 \int\limits_0^y dz dx dy$ με άλλους 5 διαφορετικούς τρόπους.

5ο Κεφάλαιο

50. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i. $\int\limits_C xy^4\, ds$, όπου C το δεξί ημικύκλιο του κύκλου $x^2 + y^2 = 16$.

ii. $\int\limits_C x \sin y\, ds$, όπου C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 3)$ στο $(4, 6)$.

iii. $\int\limits_C xe^{yz}\, ds$, όπου C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0, 0)$ στο $(1, 2, 3)$.

51. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int\limits_C \sin x\, dx + \cos y\, dy$, όπου C η καμούλη που αποτελείται από το τόξο του κύκλου $x^2 + y^2 = 1$ από το $(1, 0)$ στο $(-1, 0)$ και από το ευθύγραμμο τμήμα από το $(-1, 0)$ στο $(-2, 3)$.

52. Να βρεθεί το έργο του πεδίου $F = x \sin y\, \hat{\imath} + y\hat{\jmath}$ καθώς μετακινεί ένα αντικείμενο κατά μήκος της παραβολής $y = x^2$ από το $(-1, 1)$ στο $(2, 4)$.

53. Να εξετάσετε αν τα παρακάτω πεδία είναι συντητηρικά και αν είναι, να βρεθεί βαθμωτή συνάρτηση f ώστε $F = \boldsymbol{\nabla} f$.

i. $F(x, y) = (2x - 3y)\hat{\imath} + (-3x + 4y - 8)\hat{\jmath}$

ii. $F(x, y) = e^x \cos y\, \hat{\imath} + e^x \cos y\, \hat{\jmath}$

iii. $F(x, y) = e^x \sin y\, \hat{\imath} + e^x \cos y\, \hat{\jmath}$

54. Επαληθεύστε το Θεώρημα Green για το πεδίο $F = \sin x\, \hat{\imath} + \cos y\, \hat{\jmath}$ στο χωρίο $D = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

55. Να υπολογιστεί το $\int\limits_C y\, dx - x\, dy$, όπου C το σύνορο του τετραγώνου $[-1, 1] \times [-1, 1]$ χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green.

56. Έστω $F = (x^3 - 2xy^3)\hat{\imath} + -3x^2y^2\hat{\jmath}$.

i. Να δειθχεί ότι το F είναι συντηρητικό πεδίο.

ii. Να βρεθεί βαθμωτή συνάρτηση f ώστε $F = \boldsymbol{\nabla} f$.

iii. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα του πεδίου F κατά μήκος της καμπύλης $x = \cos^3\theta$, $y = \sin^3\theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

57. Αποφασίστε αν τα παρακάτω είναι Σωστά ή Λάθος και αιτιολογήστε την απάντησή σας.

i. Αν $F = F_1\, \hat{\imath} + F_2\, \hat{\jmath}$ και $\dfrac{\partial F_1}{\partial x} = \dfrac{\partial F_2}{\partial y}$ τότε το F είναι συντηρητικό πεδίο.

ii. Αν η f έχει συνεχείς μερικές παραγώγους τότε $\int\limits_C \boldsymbol{\nabla} f\, ds = 0$, όπου C μια κλειστή καμπύλη.

iii. Το ολοκλήρωμα $\int\limits_C F \cdot ds$ είναι αριθμός.

iv. Αν F είναι ένα συντηρητικό πεδίο, τότε $\boldsymbol{\nabla} \cdot F = 0$.

v. Αν $\displaystyle\int_C F \cdot ds = 0$ τότε η C είναι κλειστή καμπύλη.

58. Έστω D ο δακτύλιος $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ $(0 < a < b)$ και $F = (2x^3 - y^3)\hat{\imath} + (x^3 + y^3)\hat{\jmath}$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Green να υπολογιστεί το $\displaystyle\int_C F \cdot ds$.