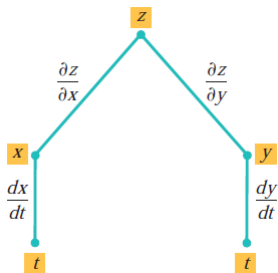


4.5 Κανόνας αλυσίδας

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 1η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο t και η $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x, y) = (x(t), y(t))$ τότε η $z = f(x(t), y(t))$ είναι παραγωγίσιμη στο t και

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$



Παράδειγμα

Αν $z = x^2y$, $x = y^2$ και $y = t^3$, να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dz}{dt}$.

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 1η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ είναι παραγωγίσιμες στο t και η $w = f(x, y, z)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x, y, z) = (x(t), y(t), z(t))$ τότε η $w = f(x(t), y(t), z(t))$ είναι παραγωγίσιμη στο t και

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

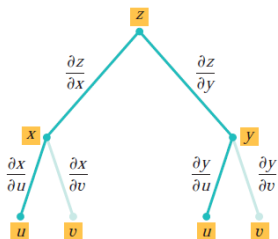
Παράδειγμα

Αν $w = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$ και $z = \tan \theta$, να βρεθεί η παράγωγος $\frac{dw}{d\theta}$ για $\theta = \pi/4$.

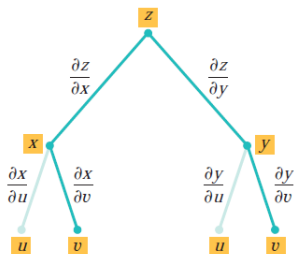
Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 2η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(u, v)$, $y(u, v)$ έχουν μερικές παραγώγους στο (u, v) και η $z = f(x, y)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x, y) = (x(u, v), y(u, v))$ τότε η $z = f(x(u, v), y(u, v))$ έχει μερικές παραγώγους στο (u, v) και

$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$



$$\frac{\partial z}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u}$$

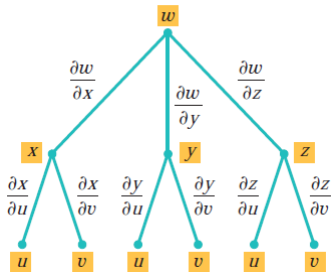


$$\frac{\partial z}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v}$$

Θεώρημα (Κανόνας αλυσίδας - 2η περίπτωση)

Αν οι συναρτήσεις $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ έχουν μερικές παραγώγους στο (u, v) και η $w = f(x, y, z)$ είναι παραγωγίσιμη στο $(x, y, z) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ τότε η $w = f(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ έχει μερικές παραγώγους στο (u, v) και

$$\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial u} \quad \text{και} \quad \frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial v}$$



Παράδειγμα

Αν $z = e^{xy}$, $x = 2u + v$, $y = \frac{u}{v}$, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$.

Παράδειγμα

Αν $w = e^{xyz}$, $x = 3u + v$, $y = 3u - v$, $z = u^2v$, να βρεθούν οι $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$.

Παράδειγμα

Αν $w = xy + yz$, $x = 3u + v$, $y = \sin x$, $z = e^x$, να βρεθεί η $\frac{dw}{dx}$.

Θεώρημα (Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης)

Αν η εξίσωση $f(x, y) = c$ (όπου $c \in \mathbb{R}$) ορίζει την y ως συνάρτηση του x σε πεπλεγμένη μορφή τότε

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial y}$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Αν $x^3 + y^2x - 3 = 0$, να βρεθεί η $\frac{dy}{dx}$.

Θεώρημα (Παράγωγος πεπλεγμένης συνάρτησης)

Αν η εξίσωση $f(x, y, z) = c$ (όπου $c \in \mathbb{R}$) ορίζει την z ως συνάρτηση των x, y σε πεπλεγμένη μορφή τότε

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\partial f / \partial x}{\partial f / \partial z} \quad \text{και} \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\partial f / \partial y}{\partial f / \partial z}$$

Απόδειξη:

Παράδειγμα

Αν $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, να βρεθούν οι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$.