

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Να υπολογιστούν τα διαδοχικά ολοκληρώματα.

i) $\int_0^1 \int_0^2 (x+3) dy dx$

ii) $\int_2^4 \int_0^1 x^2 y dx dy$

iii) $\int_0^{\ln 3} \int_0^{\ln 2} e^{x+y} dy dx$

iv) $\int_0^1 \int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2} dy dx$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στο δοσμένο ορθογώνιο.

i) $\iint_R 4xy^3 dA, R = [-1, 1] \times [-2, 2]$

ii) $\iint_R x\sqrt{1-x^2} dA, R = [0, 1] \times [2, 3]$

3. Περιγράψτε (χωρίς να υπολογίσετε) τον όγκο που εκφράζουν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\int_0^5 \int_1^2 4 dx dy$

ii) $\int_0^3 \int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2} dy dx$

4. Να δείξετε ότι αν $f(x, y) = g(x)h(y)$ και $R = [a, b] \times [c, d]$, τότε

$$\iint_R f(x, y) dA = \left[\int_a^b g(x) dx \right] \left[\int_c^d h(y) dy \right]$$

5. Να βρεθεί ο όγκος μεταξύ του επιπέδου $z = 2x + y$ και του ορθογωνίου $R = [3, 5] \times [1, 2]$.

6. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού κάτω από την επιφάνεια $z = x^2$ που περικλείεται από τα επίπεδα $x = 0$, $x = 2$, $y = 3$, $y = 0$ και $z = 0$.

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\int_0^1 \int_{x^2}^x xy^2 dy dx$

ii) $\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right) dy dx$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_R x^2 dA$, όπου R το χωρίο που ορίζεται από τις $y = 16/x$, $y = x$ και $x = 8$, με δύο τρόπους.

9. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\iint_R (x-1) dA$, όπου R το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ των $y = x$ και $y = x^3$.

ii) $\iint_R \sin(y^3) dA$, όπου R το χωρίο μεταξύ των $y = \sqrt{x}$, $y = 2$ και $x = 0$.

10. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από τις $y^2 = 9 - x$ και $y^2 = 9 - 9x$.

11. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z = 9x^2 + y^2$, από κάτω από το επίπεδο $z = 0$ και πλευρικά από τα επίπεδα $x = 0$, $y = 0$, $x = 3$ και $y = 2$.

12. Να αλλαχθεί η σειρά ολοκλήρωσης στα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\int_0^2 \int_0^{\sqrt{x}} f(x, y) dy dx$

ii) $\int_0^4 \int_{2y}^8 f(x, y) dx dy$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης.

i) $\int_0^1 \int_{4x}^4 e^{-y^2} dy dx$

ii) $\int_0^4 \int_{\sqrt{y}}^2 e^{x^3} dx dy$

14. Να βρεθεί το εμβαδόν των παρακάτω επιφανειών με διπλό ολοκλήρωμα.

i) Επιφάνεια του κυλίνδρου $y^2 + z^2 = 9$ πάνω από το ορθογώνιο $R = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, -3 \leq y \leq 3\}$.

[Υπενθύμιση: $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$]

ii) Επιφάνεια του κώνου $z^2 = 4x^2 + 4y^2$ πάνω από το χωρίο που δημιουργούν οι καμπύλες $y = x$ και $y = x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο του xy -επιπέδου.

15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\int_{-1}^1 \int_0^2 \int_0^1 (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$

ii) $\int_0^2 \int_{-1}^{y^2} \int_{-1}^z yz dx dz dy$

iii) $\int_0^3 \int_0^{\sqrt{9-z^2}} \int_0^x xy dy dx dz$

iv) $\int_1^3 \int_x^{x^2} \int_0^{\ln z} xe^y dy dz dx$

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\iiint_G xy \sin(yz) dV$, όπου G το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τις σχέσεις $0 \leq x \leq \pi$, $0 \leq y \leq 1$, $0 \leq z \leq \pi/6$.

ii) $\iiint_G y dV$, όπου G το στερεό που περικλείεται από το xy -επίπεδο, το επίπεδο $z = y$ και τον παραβολικό κύλινδρο $y = 1 - x^2$.

17. Να υπολογιστεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με τριπλό ολοκλήρωμα.

i) Το στερεό στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από τα επίπεδα xy , xz και yz και από το επίπεδο $3x + 6y + 4z = 12$.

ii) Το στερεό που περικλείεται από την επιφάνεια $z = \sqrt{y}$ και τα επίπεδα $x + y = 1$, $x = 0$ και $z = 0$.

18. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα του στερεού με τον αντίστοιχο όγκο.

$$\text{i)} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{y+1} dz dy dx$$

$$\text{ii)} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^2 dy dz dx$$

19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_R \frac{x-2y}{2x+y} dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $x-2y=1$, $x-2y=4$, $2x+y=1$, $2x+y=3$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u=x-2y$, $v=2x+y$.

20. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iint_R \sin \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y) dA$, όπου R το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u=\frac{1}{2}(x+y)$, $v=\frac{1}{2}(x-y)$.

21. Να βρεθεί με αλλαγή μεταβλητών το ολοκλήρωμα $\iint_R \frac{y-4x}{y+4x} dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $y=4x$, $y=4x+2$, $y=2-4x$ και $y=5-4x$.

22. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u=x$, $v=z-y$, $w=xy$ να βρεθεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_G (z-y)^2 xy dV,$$

όπου G το χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες $x=1$, $x=3$, $z=y$, $z=y+1$, $xy=2$ και $xy=4$.

23. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

$$\text{i)} \iint_R \sin(x^2+y^2) dA, \text{ όπου } R \text{ το χωρίο που περικλείεται από τον κύκλο } x^2+y^2=9.$$

$$\text{ii)} \iint_R \sqrt{9-x^2-y^2} dA, \text{ όπου } R \text{ το χωρίο που περικλείεται από το τμήμα του κύκλου } x^2+y^2=9 \text{ στο πρώτο τεταρτημόριο.}$$

$$\text{iii)} \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2) dy dx$$

$$\text{iv)} \int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

24. Έστω S η επιφάνεια της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=16$ μεταξύ των επιπέδων $z=1$ και $z=2$. Να εκφραστεί το εμβαδόν της επιφάνειας S με διπλό ολοκλήρωμα και να υπολογιστεί με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

25. Να βρεθεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με κυλινδρικές συντεταγμένες.

$$\text{i)} \text{ Το στερεό μεταξύ του παραβολοειδούς } z=x^2+y^2 \text{ και του επιπέδου } z=9.$$

ii) Το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

26. Να βρεθεί με σφαιρικές συντεταγμένες ο όγκος του στερεού που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 9$, έξω από των κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και πάνω από το xy -επίπεδο.

27. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.

i)
$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a-x^2-y^2} x^2 dz dy dx \quad (a > 0)$$

ii)
$$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dz dy dx$$