

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Εαρινό εξάμηνο 2021**

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης  $r(t) = (\cos \pi t)\mathbf{i} - \ln t\mathbf{j} + (\sqrt{t-2})\mathbf{k}$ .
2. Να περιγράψετε το γράφημα της διανυσματικής εξίσωσης.
  - i)  $\vec{r} = (3 - 2t)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$ ,
  - ii)  $\vec{r} = 2 \cos t\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .
3. Να δειχθεί ότι το γράφημα της διανυσματικής συνάρτησης  $r(t) = \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \sqrt{3} \sin t\mathbf{k}$  είναι κύκλος.  
(Υπόδειξη: Δείξτε ότι το γράφημα βρίσκεται στην τομή σφαίρας και επιπέδου.)
4. Να δειχθεί ότι η καμπύλη  $r(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  ( $t \geq 0$ ) βρίσκεται στην επιφάνεια του κώνου  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ . Περιγράψτε το σχήμα της καμπύλης.
5. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.
  - i)  $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$ , όπου  $r(t) = \left( \frac{t^2 + 1}{3t^2 + 2}, \frac{1}{t} \right)$ .
  - ii)  $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$ , όπου  $r(t) = \left( \frac{3}{t^2}, \frac{\ln t}{t^2 - 1}, \sin 2t \right)$ .
6. Είναι η συνάρτηση  $r(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$  συνεχής στο 0;
7. Να βρεθεί η εφαπτομένη της  $r(t) = 2 \cos \pi t\mathbf{i} + 2 \sin \pi t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$  στο σημείο όπου  $t_0 = \frac{1}{3}$ .
8. Έστω  $r(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$ . Να βρεθούν:
  - i)  $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) - r'(t))$ ,
  - ii)  $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \times r''(t))$ ,
  - iii)  $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \cdot r'(t))$ .
9. Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματα.
  - i)  $\int_0^1 (e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}) dt$ ,
  - ii)  $\int \left( t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right) dt$ .
10. Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση  $y(t)$  που ικανοποιεί τις συνθήκες  $y'(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$  και  $y(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ .
11. Έστω σωματίδιο που κινείται στον χώρο με διάνυσμα θέσης  $r(t) = 12\sqrt{t}\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}$  ( $t > 0$ ). Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μέτρου ταχύτητάς του και η θέση στην οποία την λαμβάνει.

**12.** Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα σωματιδίου με επιτάχυνση  $a(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$ , αρχική ταχύτητα  $v(0) = k$  και αρχική θέση  $r(0) = -\mathbf{i} + k$ .