ΜΑΣ026

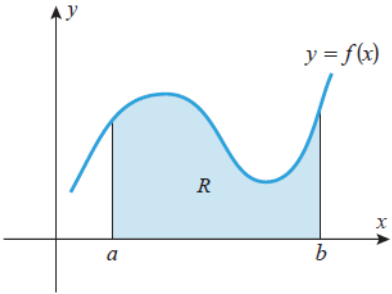
Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ

Σ. Δημόπουλος και Σ. Παπαπαναγίδης

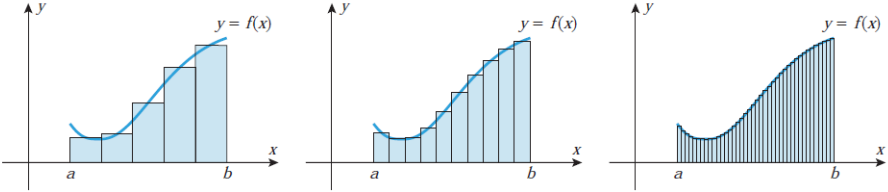
Κεφάλαιο 5: ΠΟΛΛΑΠΛΑ ΟΛΟΚΛΗΡΩΜΑΤΑ

Διπλά Ολοκληρώματα

Υπενθύμιση: Το ολοκλήρωμα δημιουργήθηκε αρχικά για τον υπολογισμό εμβαδού κάτω από καμπύλη $y = f(x)$.



Ουσιαστικά διαμερίζουμε το διάστημα $[a, b]$ σε υποδιαστήματα $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{n-1}, x_n]$ όπου $x_0 = a$ και $x_n = b$, και προσεγγίζουμε το εμβαδόν με το άθροισμα εμβαδων πολυγώνων με βάσεις $[x_i, x_{i+1}], i = 0, \cdots, n-1$ και ύψος $f(x_i^*), x_i^* \in [x_i, x_{i+1}]$.

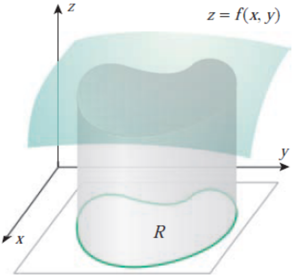


$$\text{Προσέγγιση} = \sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i, \Delta x_i = x_{i+1} - x_i$$

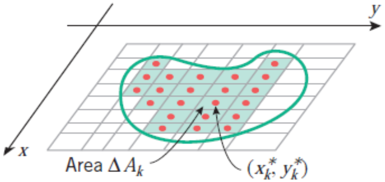
$$\sum_{i=0}^{n-1} f(x_i^*)\Delta x_i \xrightarrow{n\to\infty} \int_a^b f(x)dx \text{ (Εάν υπάρχει)}$$

Διπλό Ολοκλήρωμα

Πρόβλημα: Εάν $z = f(x, y)$ μη-αρνητική συνεχής συνάρτηση σε περιοχή R του $xy-$επιπέδου, να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περιέχεται μεταξύ του γραφήματος και του R.

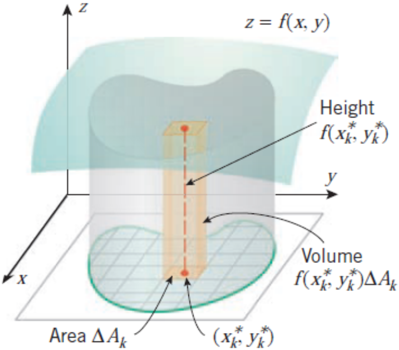


Θα προσεγγίσουμε τον όγκο με παραλληλεπίπεδα. Δεδομένου ότι το R περιέχεται σε κάποιο ορθογώνιο στο $\mathbb{R}^2$, διαμερίζουμε το R σε πιο μικρά ορθογώνια της μορφής $[x_i, x_{i+1}] \times [y_j, y_{j+1}]$.



Θεωρούμε ότι η f είναι σταθερή σε κάθε τέτοιο ορθογώνιο και υπολογίζουμε τον όγκο του παραλληλεπίπεδου που είναι ίσος με

$$f(x_i^*, y_j^*)(x_{i+1} - x_i)(y_{j+1} - y_j) = f(x_i^*, y_j^*)\Delta x_i \Delta y_j = f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}.$$



Το άθροισμα

$$\sum_{i,j=0}^{n-1} f(x_i^*, y_j^*)\Delta A_{ij}$$

προσεγγίζει τον ζητούμενο όγκο. Καθώς $n \to \infty$, εάν το όριο υπάρχει είναι ίσο με τον όγκο δεδομένου ότι η f είναι θετική. Γενικότερα, αν το όριο υπάρχει ορίζεται ως το **διπλό ολοκλήρωμα της** f **επί του** R και συμβολίζεται ως

$$\boxed{\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy \text{ ή } \iint\limits_R f(x,y)\,dA}$$

Μερικά Ολοκληρώματα

Έστω f συνάρτηση δύο μεταβλητών

- Μερικό Ολοκλήρωμα ως προς x: $\int_a^b f(x,y)\,dx$
  Ολοκληρώνουμε ως προς x θεωρώντας την μεταβλητή y σταθερή
  $\int_0^1 x^2 y\,dx =$

- Μερικό Ολοκλήρωμα ως προς y: $\int_a^b f(x,y)\,dy$
  Ολοκληρώνουμε ως προς y θεωρώντας την μεταβλητή x σταθερή
  $\int_0^1 x^2 y\,dy =$

Διαδοχικά Ολοκληρώματα

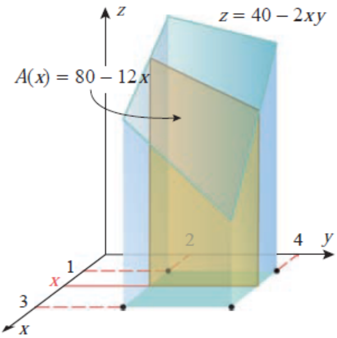
Ολοκληρώνουμε αρχικά ως προς την μία μεταβλητή και μετά ως προς την άλλη. Π.χ.

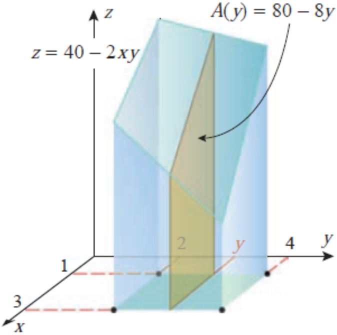
$\int_1^3 \int_2^4 (40 - 2xy)\, dy\, dx =$

Διαδοχικά Ολοκληρώματα

$\int_2^4 \int_1^3 (40 - 2xy)\, dx\, dy =$

Τα διαδοχικά ολοκληρώματα υπολογίζουν τον όγκο (εάν f θετική) με κοπές ως προς τον άξονα των x ή των y και αποδυκνύεται πως είναι ίσα με το διπλό ολοκλήρωμα στο αντίστοιχο ορθογώνιο.





Θεώρημα Fubini

Εάν $R = [a, b] \times [c, d]$ ορθογώνιο στο $\mathbb{R}^2$ και $f(x, y)$ συνεχής στο R τότε η f είναι ολοκληρώσιμη και

$$\boxed{\iint\limits_R f(x, y)\, dA = \int_a^b \int_c^d f(x, y)\, dy\, dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y)\, dx\, dy}$$

Το Θεώρημα Fubini μας επιτρέπει να υπολογίζουμε διπλά ολοκληρώματα πάνω σε ορθογώνια με την βοήθεια διαδοχικών ολοκληρωμάτων.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που φράσσεται από το επίπεδο $z = 4 - x - y$ και το ορθογώνιο $[0, 1] \times [0, 2]$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint\limits_R y^2 x \, dA$$

εάν $R = \{(x, y) | -3 \leqslant x \leqslant 2, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$.

Ιδιότητες Διπλών Ολοκληρωμάτων

- $$\iint\limits_{R} cf(x,y)\,dA = c\iint\limits_{R} f(x,y)\,dA,\ c\in\mathbb{R}$$
- $$\iint\limits_{R} f(x,y)\pm g(x,y)\,dA = \iint\limits_{R} f(x,y)\,dA \pm \iint\limits_{R} g(x,y)\,dA$$
- Εάν $R = R_1 \cup R_2$ και $R_1 \cap R_2 = \emptyset$, τότε

$$\iint\limits_{R} f(x,y)\,dA = \iint\limits_{R_1} f(x,y)\,dA + \iint\limits_{R_2} f(x,y)\,dA$$

Διπλό Ολοκλήρωμα κάτω από γενικότερα χωρία

Υπάρχει περίπτωση ένα διαδοχικό ολοκλήρωμα να περιέχει όρια με μεταβλητές. Π.χ.

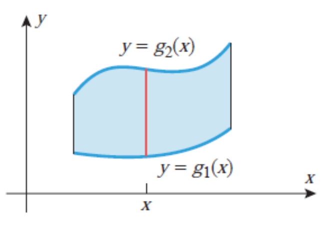
$$\int_0^1 \int_{-x}^{x^2} y^2 x \, dy \, dx =$$

Τέτοια ολοκληρώματα προκύπτουν από χώρια της πιο κάτω μορφής

Ορισμός

Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ λέγεται **Τύπου I ή** $x-$**απλό** αν υπάρχουν σταθερές $a, b \in \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $g_1(x), g_2(x)$ όπου $g_1(x) \leqslant g_2(x), \forall x \in [a, b]$ τέτοιες ώστε το χώριο να όρίζεται από τίς σχέσεις

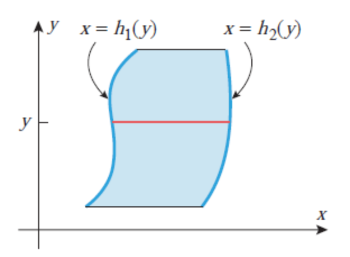
$$a \leqslant x \leqslant b, g_1(x) \leqslant y \leqslant g_2(x).$$



Ορισμός

Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ λέγεται **Τύπου II ή** $y-$**απλό** αν υπάρχουν σταθερές $c, d \in \mathbb{R}$ και συναρτήσεις $h_1(y), h_2(y)$ όπου $h_1(y) \leqslant h_2(y), \forall y \in [c, d]$ τέτοιες ώστε το χώριο να όρίζεται από τίς σχέσεις

$$c \leqslant y \leqslant d, h_1(y) \leqslant x \leqslant h_2(y).$$



Θεώρημα Fubini για χωρία Τύπου I και II

- Αν R είναι χωρίο τύπου I και f συνεχής στο R, τότε

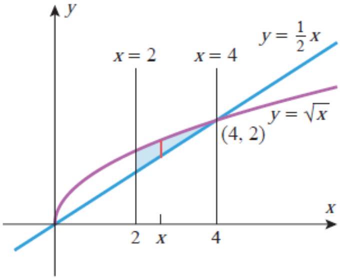
$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_a^b \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx$$

- Αν R είναι χωρίο τύπου II και f συνεχής στο R, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \int_c^d \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy$$

Παράδειγμα

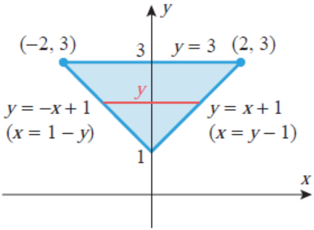
Να υπολογιστεί το $\iint_R xy\, dA$ όπου R το χωρίο μεταξύ των $y = \frac{1}{2}x, y = \sqrt{x}, x = 2, x = 4$



Συνέχεια

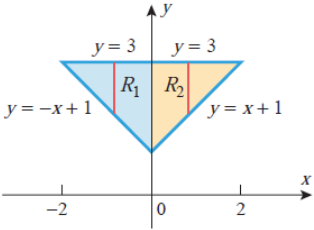
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\iint\limits_R (2x - y^2)\, dA$ όπου R το χωρίο μεταξύ των $y = -x + 1, y = x + 1, y = 3$



Συνέχεια

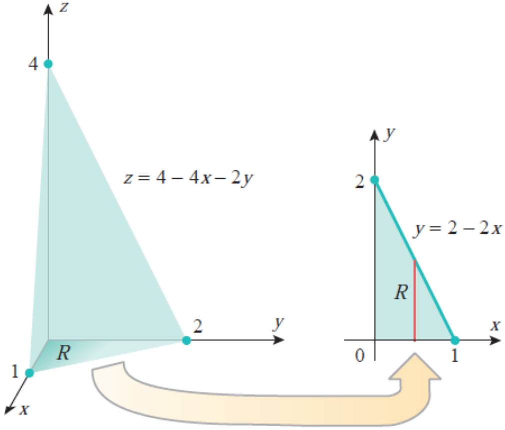
Εναλλακτικά



Συνέχεια

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί με διπλά ολοκληρώματα ο όγκος του τετραέδρου που ορίζεται από τα επίπεδα xy, yz, xz και $z = 4 - 4x - 2y$.

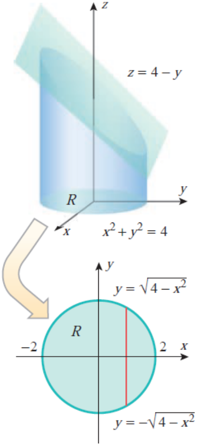


Συνέχεια

Συνέχεια

Παράδειγμα

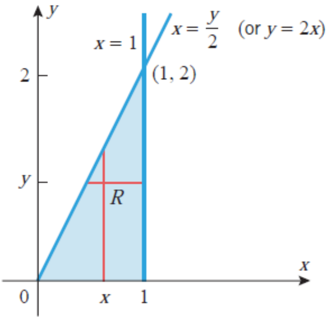
Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που ορίζεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 4$ και τα επίπεδα $x + y = 4$ και $z = 0$.



Συνέχεια

Συνέχεια

Εάν το χώριο ολοκλήρωσης είναι x ή y απλό, τότε το ολοκλήρωμα είναι πιθανόν να μπορεί να υπολογιστεί μόνο με έναν από τους δύο τρόπους έκφρασης. Π.χ.



$$\int_0^2 \int_{\frac{y}{2}}^1 e^{x^2}\, dx\, dy =$$

Συνέχεια

Εμβαδόν χωρίου στο $xy-$ επίπεδο

Υπενθύμιση: Μήκος Διαστήματος $[a, b] = b - a = \int_a^b 1\, dx$

Αντίστοιχα, το εμβαδόν φραγμένου χωρίου $R \subset \mathbb{R}^2$ είναι ίσο με

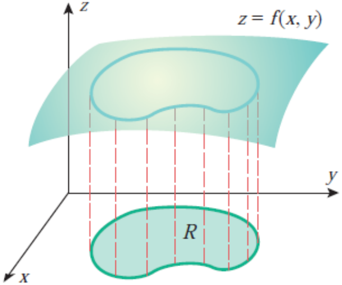
$$\boxed{\iint\limits_R 1\, dA = \iint\limits_R dA}$$

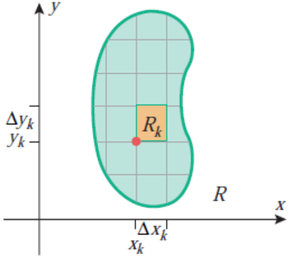
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου R που περικλείεται από τις καμπύλες $y = \frac{1}{2}x^2$ και $y = 2x$.

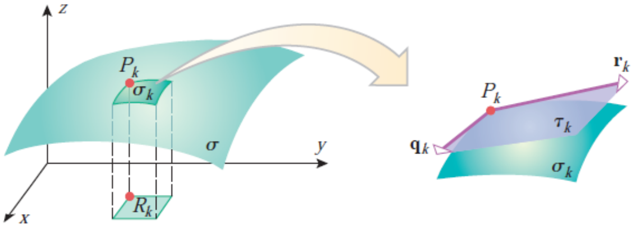
Συνέχεια

Διαμερίζουμε το R σε ορθογώνια R_k, $k = 1, \cdots n$ με διαστάσεις Δx_k και Δy_k.





Προσεγγίζουμε το εμβαδόν της επιφάνειας που αντιστοιχεί στο ορθογώνιο R_k με το εμβαδόν του εφαπτόμενου επιπέδου στο σημείο $P_k(x_k, y_k)$ στο αντίστοιχο χωρίο.



Υπενθύμιση: $z = f(x_k, y_k) + f_x(x_k, y_k)(x - x_k) + f_y(x_k, y_k)(y - y_k)$ (Εξίσωση Εφαπτόμενου Επιπέδου)

Η επιφάνεια του εφαπτομένου επίπέδου πάνω από το R_k είναι ένα παραλληλόγραμμο που ορίζεται από τα διανύσματα

$$\overrightarrow{q_k} = (\Delta x_k, 0, f_x(x_k, y_k)\Delta x_k), \overrightarrow{r_k} = (0, \Delta y_k, f_y(x_k, y_k)\Delta y_k)$$

Το εμβαδον του παραλληλογράμμου είναι ίσο με

$$\|\overrightarrow{q_k} \times \overrightarrow{r_k}\| = \cdots = \sqrt{f_x^2(x_k, y_k) + f_y^2(x_k, y_k) + 1}\Delta x_k \Delta y_k$$

Το άθροισμα

$$\sum_{k=1}^{n} \sqrt{f_x^2(x_k, y_k) + f_y^2(x_k, y_k) + 1}\Delta x_k \Delta y_k$$

προσεγγίζει το ζητούμενο εμβαδό. Προφανώς, εάν το όριο υπάρχει, είναι ίσο με το ζητούμενο εμβαδό και τείνει στο

$$\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dx\, dy$$

καθώς $n \to \infty$.

Θέωρημα

Έστω $z = f(x, y)$ *συνάρτηση ορισμένη σε φραγμένο χωρίο* $R \subset \mathbb{R}^2$ *με συνεχείς μερικές παραγώγους. Τότε, το εμβαδόν επιφάνειας της συνάρτησης που αντιστοιχεί στο* R *είναι ίσο με*

$$\iint_R \sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1}\, dA$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν επιφάνειας της συνάρτησης $z = \sqrt{4 - x^2}$ πάνω από το ορθογώνιο $R = [0, 1] \times [0, 4]$ του $xy-$ επιπέδου.

Τριπλά Ολοκληρώματα

- $f(x)$ ορισμένη στο $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

- $f(x, y)$ ορισμένη στο $R \subset \mathbb{R}^2$

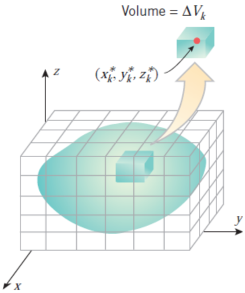
$$\iint\limits_R f(x, y)\, dA$$

- $f(x, y, z)$ ορισμένη στο $G \subset \mathbb{R}^3$

$$\iiint\limits_G f(x, y, z)\, dV$$

Τριπλό Ολοκλήρωμα

- G φραγμένο στερεό στο χώρο (Περικλείεται σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο)
- Διαμερίζουμε το παραλληλεπίπεδο σε μικρά παραλληλεπίπεδα $G_k, k = 1, \cdots, n$ με όγκο $\Delta V_k = \Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k$ αφού αφαιρέσουμε όσα βρίσκονται εκτός του G
- Η f είναι προσεγγιστικά σταθερή σε κάθε κάθε τέτοιο παραλληλεπίπεδο και ίση με $f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)$, όπου $(x_k^*, y_k^*, z_k^*) \in G_k$.



Θεωρούμε το **άθροισμα Riemann**

$$\sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta x_k \Delta y_k \Delta z_k = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^*, y_k^*, z_k^*)\Delta V_k.$$

Αν το όριο καθώς $n \to \infty$ υπάρχει, τότε ορίζεται ως το τριπλό ολοκλήρωμα της f στο G και συμβολίζεται ως εξής

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz \text{ ή } \iiint_G f(x, y, z)\, dV$$

Ιδιότητες Τριπλών Ολοκληρωμάτων

- $$\iiint\limits_G cf(x,y,z)\,dV = c\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV,\, c\in\mathbb{R}$$

- $$\iiint\limits_G f(x,y,z)\pm g(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV \pm \iiint\limits_G g(x,y,z)\,dV$$

- Εάν $G = G_1 \cup G_2$ και $G_1 \cap G_2 = \emptyset$, τότε

$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \iiint\limits_{G_1} f(x,y,z)\,dV + \iiint\limits_{G_2} f(x,y,z)\,dV$$

Όπως και με τα διπλά ολοκληρώματα, για να υπολογίσουμε ένα τριπλό ολοκλήρωμα, το ανάγουμε σε διαδοχικό ολοκλήρωμα.

Θέωρημα

Εάν $G \subset \mathbb{R}^3$ το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $[a, b] \times [c, d] \times [k, l]$ και f συνεχής στο G, τότε

$$\iiint_G f(x, y, z)\, dV = \int_a^b \int_c^d \int_k^l f(x, y, z)\, dz\, dy\, dx$$

$$= \int_k^l \int_c^d \int_a^b f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \cdots$$

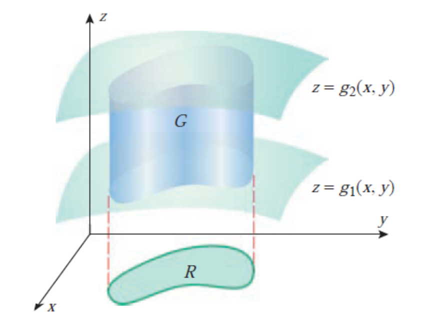
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\iiint\limits_G 12xy^2z^3\, dV$, εάν $G = [-1, 2] \times [0, 3] \times [0, 2]$.

Τριπλά ολοκληρώματα σε γενικότερα χωρία

Ορισμός

Ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$ λέγεται $xy-$**απλό** αν φράσσεται από δύο επιφάνειες $z = g_1(x, y)$ και $z = g_2(x, y)$, η προβολή του στο $xy-$επίπεδο είναι ένα $x-$απλό ή $y-$απλό χωρίο R και $g_1(x, y) \leqslant g_2(x, y), \forall x \in R$.
Παρόμοια, ορίζουμε xz και $yz-$απλές περιοχές.



Θεώρημα Fubini

Αν G είναι $xy-$απλό χωρίο και f συνεχής στο G, τότε

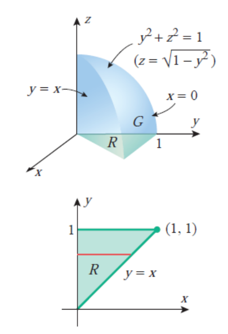
$$\iiint\limits_G f(x,y,z)\,dV = \iint\limits_R \int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\,dA$$

Παρόμοια, για $yz-$απλά χωρία και $xz-$απλά χωρία.

Παράδειγμα

Εάν G το κομμάτι που προκύπτει από την αποκοπή του κυλινδρικού στερεού $y^2 + z^2 \leqslant 1$ από τα επίπεδα $y = x$ και $x = 0$ στο πρώτο ογδοοημόριο, να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iiint_G z \, dV.$$



Συνέχεια

Εναλλακτικά

Εναλλακτικά

- Μήκος ευθύγραμμου τμήματος $[a, b]$

$$\int_a^b 1\, dx$$

- Εμβαδον επιφάνειας R

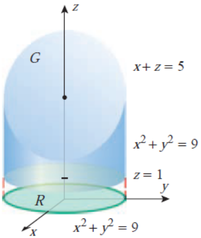
$$\iint\limits_R 1\, dA$$

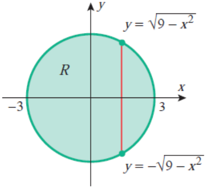
- Όγκος στερεού G

$$\boxed{\iiint\limits_G 1\, dV}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί με τριπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$ και τις επιφάνειες $z = 1$ και $z + x = 5$.

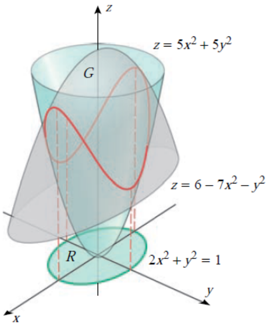


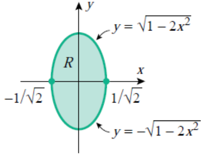


Συνέχεια

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί ο όγκος του στερεού που περικλείεται από τα παραβολοειδή $z = 5x^2 + 5y^2$ και $z = 6 - 7x^2 - y^2$.





Συνέχεια

Θεώρημα Αλλαγής Μεταβλητών

Αντικατάσταση στο ολοκλήρωμα $\int_a^b f(x)dx$

Εάν $x = g(u), a < b$ και g 1-1 στο $[a, b]$ (αύξουσα ή φθίνουσα), τότε

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(u))g'(u)du.$$

Έστω $\alpha, \beta = g^{-1}(a)$ ή $g^{-1}(b)$ ούτως ώστε $\alpha < \beta$. Εάν g φθίνουσα στο $[a, b]$ $(g' < 0)$, τότε $\alpha = g^{-1}(b) < g^{-1}(a) = \beta$ και

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\beta^\alpha f(g(u))g'(u)du =$$

$$-\int_\alpha^\beta f(g(u))g'(u)du = \int_\alpha^\beta f(g(u))|g'(u)|du.$$

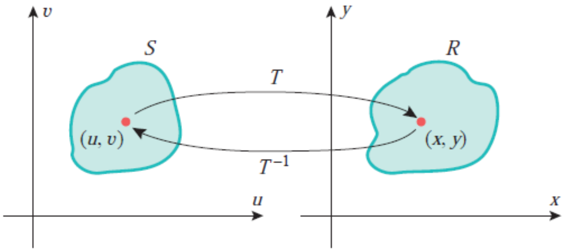
Παρόμοια, αν g αύξουσα.

Γενίκευση στο $\mathbb{R}^2$

Θεωρούμε τον 1-1 μετασχηματισμό (αντικατάσταση)

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$$

από το uv στο xy επίπεδο. Γραφικά, σχετίζουμε χωρία στο uv επίπεδο με χωρία στο xy επίπεδο.



Αφού T είναι 1-1, ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός.

Για να προβούμε στην αλλαγή μεταβλητών στο $\mathbb{R}^2$, πρέπει να βρούμε το διαφορικό dA. Αυτό δίνεται από την **Ιακωβιανή**.

Ορισμός

Έστω ο μετασχηματισμός $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$. Η **Ιακωβιανή του** T συμβολίζεται με $J(u,v)$ ή $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ και είναι ίση με

$$J(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u}$$

Αποδυκνείεται πως αν εφαρμόσουμε τον μετασχηματισμό T σε διπλό ολοκλήτωμα, τότε $dx\,dy = \left|J(u,v)\right| du\,dv$.

Θέωρημα

Εάν ο μετασχηματισμός $T(u,v) = (x(u,v), y(u,v))$ *απεικονίζει το χωρίο* S *του* $uv-$*επιπέδου στο χωρίο* R *του* $xy-$*επιπέδου και η ιακωβιανή* $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ *είναι μη-μηδενική και δεν αλλάζει πρόσημο στο* S *τότε*

$$\iint_R f(x,y)\,dA_{xy} = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,dA_{uv}$$

ή

$$\iint_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint_S f(x(u,v),y(u,v))\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|\,du\,dv$$

Πότε κάνουμε αλλαγή μεταβλητής:

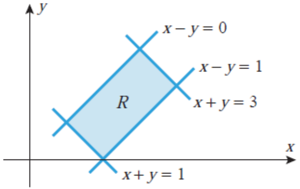
- Όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι διαφορετικό από τα όσα είδαμε μέχρι στιγμης.
- Όταν η συνάρτηση ολοκλήρωσης είναι περίπλοκη.

Παράδειγμα

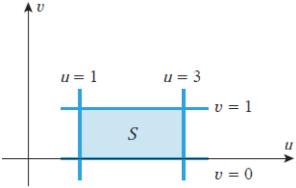
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R \frac{x-y}{x+y}\, dA$$

εάν το R περικλείεται από τις $x-y=0$, $x-y=1$, $x+y=1$, $x+y=3$.



Συνέχεια



Συνέχεια

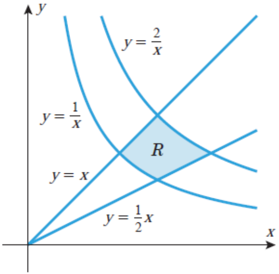
Συνέχεια

Παράδειγμα

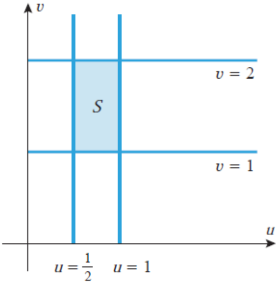
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\iint_R e^{xy}\, dA$$

εάν το R χωρίο που περικλείεται από τις $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = \frac{1}{x}$ και $y = \frac{2}{x}$.



Συνέχεια



Συνέχεια

Συνέχεια

Μία ειδική περίπτωση είναι ο μετασχηματισμός σε πολικές συντεταγμένες.

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$$

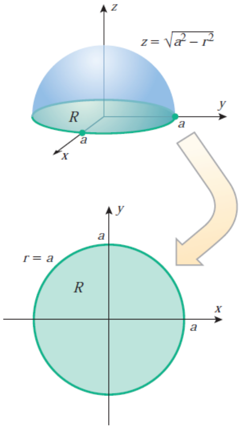
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\cos^2\theta + r\sin^2\theta = r$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\iint\limits_R f(x,y)\,dx\,dy = \iint\limits_S f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,dr\,d\theta}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος της σφαίρας με $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ με διπλό ολοκλήρωμα.

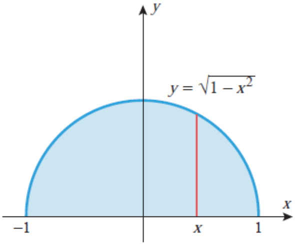


Συνέχεια

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-1}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}\, dx\, dy$$

με πολικές συντεταγμένες.



Συνέχεια

Γενικά, όταν το χωρίο ολοκλήρωσης είναι κυκλική συμμετρία ή η συνάρτηση $f(x, y)$ περιέχει την έκφραση $x^2 + y^2$, τότε συνήθως ευνοείται η αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

Αλλαγή μεταβλητών σε Τριπλά Ολοκληρώματα

Γίνεται με την βοήθεια μετασχηματισμών της μορφής

$$T(u, v, w) = (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$$

Η **Ιακωβιανή** του μετασχηματισμού είναι ίση με

$$J(u, v, w) = \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

Θέωρημα

Εάν ο μετασχηματισμος $T(u,v,w) = (x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))$ *απεικονίζει το χωρίο* S *του* $uvw-$*χώρου στο χωρίο του* $xyz-$*χώρου, η Ιακωβιανή* $\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}$ *είναι μη-μηδενική και έχει σταθερό πρόσημο στο* S *τότε*

$$\iiint\limits_R f(x,y,z)dxdydz =$$

$$\iiint\limits_S f(x(u,v,w), y(u,v,w), z(u,v,w))\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|dudvdw$$

Ειδική περίπτωση - Κυλινδρικές Συντεταγμένες

$$x = r\cos\theta, y = r\sin\theta, z = z$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,z)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

Συνεπώς,

$$\boxed{\iiint_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_S f(r\cos\theta, r\sin\theta, z) r\,dr\,d\theta\,dz}$$

Ειδική περίπτωση - Σφαιρικές Συντεταγμένες

$$x = \rho\cos\theta\sin\phi, y = \rho\sin\theta\sin\phi, z = \rho\cos\phi$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\phi)} = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\phi & -\rho\sin\theta\sin\phi & \rho\cos\theta\cos\phi \\ \sin\theta\sin phi & \rho\cos\theta\sin\phi & \rho\sin\theta\cos\phi \\ \cos\phi & 0 & -\rho\sin\phi \end{vmatrix} = \cdots = -\rho^2\sin\phi$$

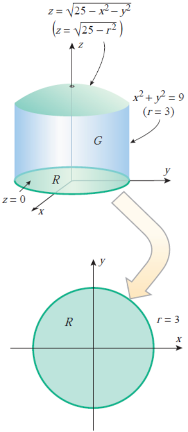
Συνεπώς,

$$\boxed{\iiint\limits_R f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint\limits_S f(\rho,\theta,\phi)\rho^2\sin\phi\,d\rho\,d\theta\,d\phi}$$

<u>Σημείωση:</u> $f(\rho,\theta,\phi) = f(\rho\cos\theta\sin\phi, \rho\sin\theta\sin\phi, \rho\cos\phi)$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί με Τριπλό Ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού G που περικλείεται από το ημισφαίριο $z = \sqrt{25 - x^2 - y^2}$ από πάνω, από το $xy-$επίπεδο από κάτω και περιμετρικά από τον κύλινδρο $x^2 + y^2 = 9$.

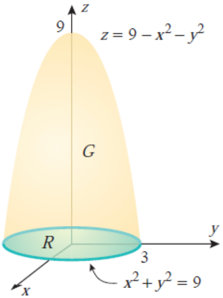


Συνέχεια

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

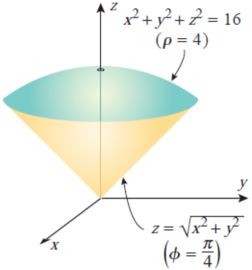
$$\int_{-3}^{3}\int_{-\sqrt{9-x^2}}^{\sqrt{9-x^2}}\int_{0}^{9-x^2-y^2} x^2\, dz\, dy\, dx.$$



Συνέχεια

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο όγκος του στερεού G που περικλείεται από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 16$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

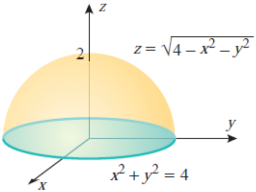


Συνέχεια

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}}\int_{0}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z^2\sqrt{x^2+y^2+z^2}\,dz\,dy\,dx.$$



Συνέχεια