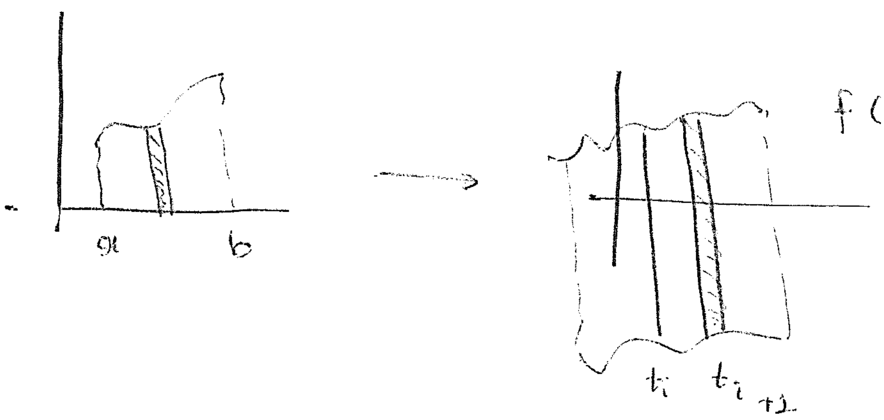
ΜΑΣ 026:

12/11/19:

Κεφάλαιο 5: Επικαμπύλια ολοκληρώματα και Θεώρημα Green:

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους:



$f(x,y)$ περιορισμένη στην καμπύλη r: $(f(r(t)))$

βάση = μήκος καμπύλης στο $[t_i, t_{i+1}]$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|r'(t)\| \, dt \overset{Θ.Μ.Τ}{=} \|r'(t_i^*)\| \, (t_{i+1} - t_i)$$

άρα εμβαδόν σε $f(r(t_i^*))$

όγκος ≈ σταθερό ίσο με $f(r(t_i^*)) \, \|r'(t_i^*)\| \, (t_{i+1} - t_i)$

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(r(t_i^*)) \cdot \|r'(t_i^*)\| \cdot (t_{i+1} - t_i)$$

$$\Big\downarrow \; n \to \infty$$

αν υπάρχει το όριο το λέμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα (α' είδους) της f.

Συμβολίζεται με $\int_r f \cdot ds$

Για $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $r: [a,b] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (x(t), y(t))$

$$\int_r f \cdot ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\| dt = \int_a^b (f(x(t), y(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} \cdot dt$$

Επίσης για $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $r: [a,b] \to \mathbb{R}^3$, $r(t) = (x(t), y(t), z(t))$

$$\int_r f \cdot ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot \|r'(t)\| dt = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \cdot \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} \cdot dt$$

<u>π.χ.:</u>

$r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

$\int_r f \cdot ds = ;$

$f(r(t)) = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$

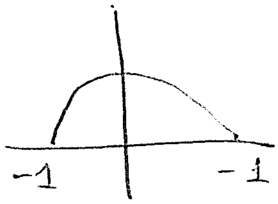
$\|r'(t)\| = \|(-\sin t, \cos t, 1)\| = \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1^2} = \sqrt{2}$.

Άρα $\int_r f \cdot ds = \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \cdot \sqrt{2} \cdot dt = \sqrt{2} \cdot \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi}$

$= \sqrt{2} \cdot \left(2\pi + \frac{8\pi^3}{3} \right)$

Π.χ.:

Να υπολογισεί το ολοκλήρωμα της $f(x,y)=2+x^2y$ κατά μήκος του άνω ημικυκλίου του κύκλου $x^2+y^2=1$.



$$\int_C f\cdot ds = ;$$

Πρέπει να ~~παρα~~ παραμετρικοποιήσουμε την καμπύλη C.

$$r(t)=(\cos t, \sin t), \quad t\in[0,\pi]$$

$$f(r(t)) = 2+\cos^2 t+\sin t$$

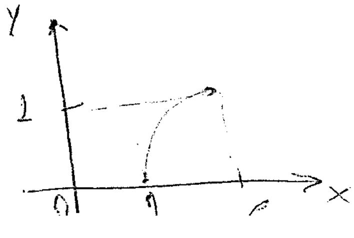
$$\|r'(t)\| = \sqrt{\cos^2 t+\sin^2 t} = 1.$$

$$\int_C f\cdot ds = \int_0^{\pi} (2+\cos^2 t\cdot \sin t)\,dt$$

$$= \left[2t - \frac{\cos^3 t}{3}\right]_0^{\pi} = 2\pi + \frac{2}{3}.$$

Π.χ.:

Να υπολογισεί το $\int_C x e^y \, ds$ όπου C είναι η καμπύλη $x=e^y$ από το $(1,0)$ στο $(e,1)$



Η καμπύλη παραμετρικοποιείται από την $r(t) = (e^t, t)$, $t \in [0, 1]$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{e^{2t} + 1^2}$$

Άρα $\int_c e^{xy} \cdot ds = \int_0^1 e^t \cdot e^t \sqrt{e^{2t} + 1} \cdot dt = \int_0^1 e^{2t} \sqrt{e^{2t} + 1} \cdot dt$

$$\xRightarrow[2e^t \cdot dt = du]{e^{2t} + 1 = u} \int_2^{1+e^2} \sqrt{u} \cdot \frac{1}{2} \cdot du = \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} \right]_2^{1+e^2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left((1+e^2)^{3/2} - 2^{3/2} \right) = \frac{1}{3} \left((1+e^2)^{3/2} - 2\sqrt{2} \right)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την παραμέτρηση $r(t) = (t, \ln t)$, $t \in [1, e]$

$$\|r'(t)\| = \sqrt{1^2 + \frac{1}{t^2}} = \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \quad (t > 0)$$

$$\int_r x e^y \cdot ds = \int_1^e t \cdot e^{\ln t} \cdot \frac{\sqrt{t^2+1}}{t} \cdot dt$$

$$= \int_1^e t \cdot \sqrt{t^2+1} \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \left[(t^2+1)^{3/2} \right]_1^e$$

$$= \frac{1}{3} \left((e^2+1)^{3/2} - 2^{3/2} \right)$$

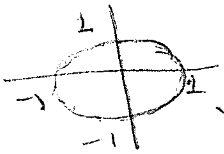
Δηλαδή τα δύο ολοκληρώματα είναι ίσα.

Όποια παραμέτρηση και να χρησιμοποιήσουμε το ολοκλήρωμα δεν αλλάζει, αρκεί η παραμέτρηση να "φανίζει" την καμπύλη μόνο μία φορά.

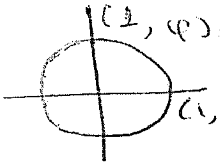
Π.χ.:

$r_1(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, 2\pi]$

$r_2(t) = (\cos(2t), \sin(2t))$, $t \in [0, 2\pi] \to$ διανύει τον κύκλο 2 φορές.



$\to 1 = r(0) = r(2\pi)$



$(0,1) = r\left(\frac{\pi}{4}\right) = r\left(\frac{3\pi}{4}\right)$

$(1,0) = r_2(\pi) = r(0) = r_2(2\pi)$

Παρατήρηση:

Σε κατά τμήματα κανονική καμπύλη το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα είναι το άθροισμα των ολοκληρωμάτων σε καθένα από τα κανονικά τμήματα.

Υπενθύμιση:

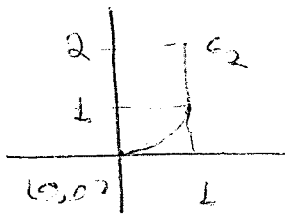
r κανονική αν $r'(t) \neq 0 \quad \forall t$

r κατά τμήματα κανονική

Π.χ.:

Η καμπύλη C αποτελείται από την παραβολή C_1 από το $(0,0)$ ... $(1,1)$

ευθεία C_2 από το $(1,1)$ μέχρι το $(1,2)$. Να βρεθεί το $\int_C 2x \cdot ds$.



Παραμετροποιούμε τα κανονικά τμήματα της C.

$C_1 : r_1(t) = (t, t^2), \ t \in [0,1]$

$C_2 : r_2(t) = (1, t), \ t \in [1,2]$

$$\int_C 2x \cdot ds = \int_{C_1} 2x \cdot ds + \int_{C_2} 2x \cdot ds$$

$$= \int_0^1 2t \cdot \sqrt{1^2 + (2t)^2} \cdot dt + \int_1^2 2 \cdot 1 \sqrt{0^2 + 1} \cdot dt$$

$$= \int_0^1 2t \sqrt{1 + 4t^2} \cdot dt + \int_1^2 2 \cdot dt$$

$$= \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} \left[(1+4t)^{3/2} \right]_0^1 + 2 \cdot 1$$

$$= \frac{1}{6} \cdot (5^{3/2} - 1) + 2$$

Βασικοί τύποι καμπυλών και οι παραμετρήσεις τους:

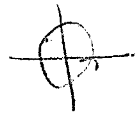
1) Γράφημα συνάρτησης $y=f(x)$ από το (x_0,y_0) ως (x_1,y_1)

$r(t)=(t, f(t))$, $t\in[x_0,x_1]$

2) Γράφημα συνάρτησης $x=f(y)$ από το (x_0,y_0) ως (x_1,y_1)

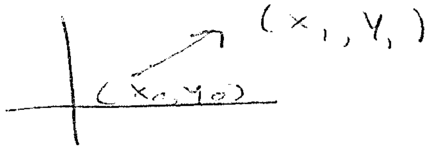
$r(t)=(f(t),t)$, $t\in[y_0,y_1]$

3) Κύκλος ακτίνας a

$r(t)=(a\cos t, a\sin t)$, $t\in[0,2\pi]$ 

4) Ευθ/μο τμήμα από το (x_0,y_0) ως (x_1,y_1)

$r(t)=(1-t)\cdot(x_0,y_0)+t(x_1,y_1)$, $t\in[0,1]$



διατί;

$x(t)=(1-t)x_0+x_1$

$y(t)=(1-t)y_0+ty_1$.

<u>π.χ.:</u>

Έστω c_1: το ευθ. τμήμα που συνδέει το $(-1,2)$ προς το $(0,3)$

c_2: το ευθ. τμήμα που συνδέει το $(0,3)$ προς το $(-1,2)$

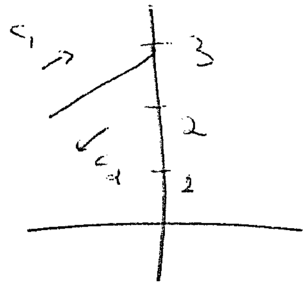
Να συγκρίνετε τα $\int_{c_1} f\,ds$, $\int_{c_2} f\,ds$ για

$f(x,y)=2x-y$.

$c_1: \; r_1(t) = (1-t)\cdot(-1,2) + t(0,3)$

$= (-1+t, \; 2-2t+3t)$

$= (t-1, \; t+2), \quad t\in[0,1]$



$c_2: \; r_2(t) = (1-t)\cdot(0,3) + t(-1,2)$

$= (-t, \; 3-3t+2t) = (-t, \; 3-t), \quad t\in[0,1]$

$$\int_{c_1} f\cdot ds' = \int_0^1 (2(t-1)-(t+2))\cdot\sqrt{1^2+1^2}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\cdot\int_0^1 (t-4)\,dt = \sqrt{2}\cdot\left[\frac{t^2}{2}-4t\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(\frac{1}{2}-4\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

$$\int_{c_2} f\cdot ds' = \int_0^1 (-2t-(3-t))\cdot\sqrt{1^2+1^2}\,dt$$

$$= \sqrt{2}\cdot\int_0^1 (-3t-3)\,dt = \sqrt{2}\cdot\left[-\frac{3t^2}{2}-3t\right]_0^1$$

$$= \sqrt{2}\cdot\left(-\frac{3}{2}-3\right) = -\frac{7\sqrt{2}}{2}$$

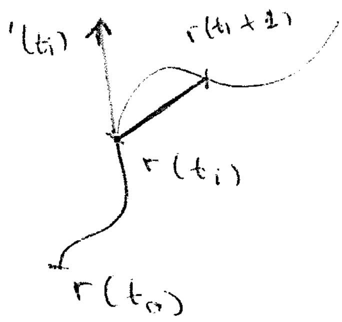
άρα. $\int_{c_1} f\cdot ds' = \int_{c_2} f\cdot ds'$

Παρατήρηση: Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α' είδους δεν επηρεάζεται από την κατεύθυνση της παραμέτρησης.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους:

Έχουμε διανυσματικό πεδίο F και καμπύλη Γ.
Το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους του F εκφράζει το έργο κατά μήκος της γ.

Αν η γ είναι ευθεία το έργο της F για να μετακινήσει ένα αντικείμενο κατά μήκος της είναι $F \cdot r$.
Αν η γ είναι καμπύλη τη διαμερίζουμε



Η απόσταση $r(t_{i+1}) - r(t_0)$ προσεγγίζεται από το $r'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$. Το έργο εκεί είναι
$F \cdot r'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i)$

εσωτερικό γινόμενο

$$\sum_{i=1}^{n-1} F \cdot r'(t_i) \cdot (t_{i+1} - t_i) \xrightarrow{n \to \infty}$$ αν υπάρχει το όριο το λέμε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β' είδους του διαν/κού πεδίου F

Συμβολίζεται με $\int_\Gamma F \cdot ds$
απλός συμβολισμός, η τελεία δεν είναι εσ. γινόμενο, ούτε επί όμως.

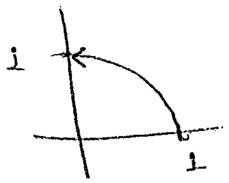
$$\boxed{\int_\Gamma F \cdot ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \, dt}$$ εσωτερικό γινόμενο

$, r : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^3$.

Π.χ.

Να βρεθεί το έργο της δύναμης $F = x^2 \hat{i} - xy \hat{j}$ για να μετακινηθεί ένα αντικείμενο κατά μήκος του τεταρτοκυκλίου από το $(1,0)$ στο $(0,1)$

Παραμετροποιούμε την καμπύλη: $r(t) = (\cos t, \sin t)$, $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$



$$\int_r F \cdot ds' = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 t, -\cos t \cdot \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) \cdot dt$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (-\cos^2 t + \sin t - \cos^2(t) \cdot \sin(t)) \cdot dt$$

$$= -2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2(t) \cdot \sin(t) \cdot dt = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [\cos^3 t]_0^{\pi/2}$$

$$= \frac{2}{3} \left(\cos^3 \frac{\pi}{2} - \cos^3 0\right) = -\frac{2}{3}$$

Συμβολισμός: $F = f_1 \cdot \hat{i} + f_2 \cdot \hat{j} + f_3 \cdot \hat{k}$

$$\int_r F \cdot ds' = \int_r f_1 \cdot dx + f_2 \cdot dy + f_3 \cdot dz$$

Π.χ.: $\int_r x^2 \cdot dx + xy \cdot dy + dz = ;$

με $r(t) = (t, t^2, 1)$, $t \in [0, 1]$

$F = x^2 \hat{i} + xy \hat{j} + \hat{k}$ (*)

(*)

$$\int_r F \cdot ds' = \int_0^1 (t^2, t^3, 1) \cdot (1, 2t, 0)\, dt$$

$$= \int_0^1 (t^2 + 2t^4) \cdot dt = \dots = \frac{11}{15}$$

Θεώρημα αλλαγής μεταβλητών 5/11/19

$T:(u,v)\to(x,y)$

$(u,v,w)\to(x,y,z)$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v}\end{vmatrix}$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w}\\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w}\end{vmatrix}$$

$$\iint_D f(x,y)\,dx\,dy=\iint_{D'} f(u,v)\cdot\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|du\,dv$$

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz=\iiint_{W} F(u,v,w)\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right|du\,dv\,dw$$

1) πολικές $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$

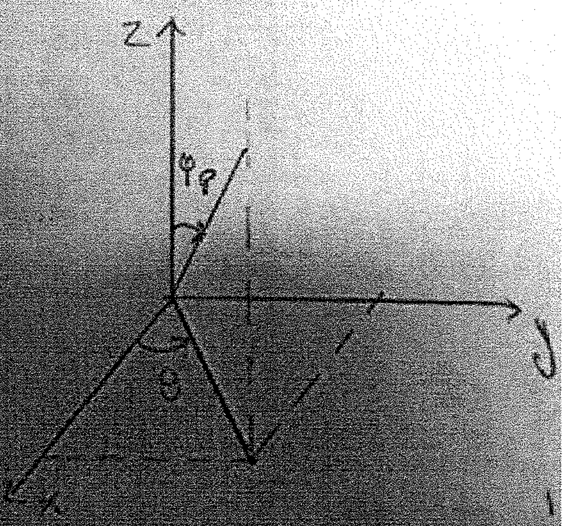
$J=r$

2) κυλινδρικές $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta,\ z=t$

$J=r$

3η ειδική περίπτωση

$x=\rho\cos\theta\sin\varphi,\ y=\rho\sin\theta\sin\varphi,\ z=\rho\cos\varphi$



$$J=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\rho,\theta,\varphi)}$$

$$=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial \rho} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial y}{\partial \rho} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \varphi}\\ \frac{\partial z}{\partial \rho} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \varphi}\end{vmatrix}$$

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\varphi & 0 & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix}$$

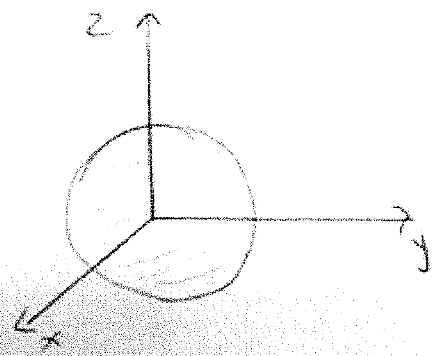
$$= \cos\varphi \begin{vmatrix} -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\cos\varphi \\ \rho\cos\theta\sin\varphi & \rho\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} + (-\rho\sin\varphi) \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & -\rho\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi \end{vmatrix}$$

$= \dots$

$J = -\rho^2 \sin\varphi$ //

● <u>Παράδειγμα</u>

$\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dV$ όπου W η μοναδιαία μπάλα $x^2+y^2+z^2 \leq 1$



• Κάνουμε αλλαγή σε σφαιρικές συντεταγμένες

$W = \{(\rho, \theta, \varphi) \mid 0 \leq \rho \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$

$e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = e^{(\rho^2)^{3/2}} = e^{\rho^3}$

$$\iiint_W e^{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} dx\,dy\,dz = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{1} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\varphi \, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$\Rightarrow = \int_0^{1}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\varphi \, d\theta\, d\varphi\, d\rho = \int_0^{1}\int_0^{\pi} e^{\rho^3}\rho^2 \sin\varphi \, 2\pi \, d\varphi\, d\rho$$

$$= \int_0^1 e^{\rho^3}\rho^2 \, 2\pi \left[-\cos\varphi\right]_0^{\pi} d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 +\rho^2 \cdot e^{\rho^3} \left[-\cos\pi + \cos(0)\right] d\rho$$

$$= 2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3}\, 2\, d\rho = 4\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} d\rho$$

Συνέχεια

$$4\pi\int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3}\,d\rho = 4\pi\,\frac{1}{3}\left[e^{\rho^3}\right]_0^1 = \frac{4\pi}{3}(e-1)$$

Εφαρμογές

Υπενθύμιση: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη

Θεώρημα μέσης τιμής: Υπάρχει τιμή x_0 ώστε $\int_a^b f(x)\,dx = f(x_0)(b-a)$

Θεώρημα μέσης τιμής για πολλαπλά ολοκληρώματα $f(x_0)=[f]_\mu$

- $f: D\to\mathbb{R}$, $D\subseteq\mathbb{R}^2$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \exists\,(x_0,y_0)$ ώστε $\iint_D f(x,y)\,dA = f(x_0,y_0)\cdot(D)$
- $f: W\to\mathbb{R}^3$ ολοκληρώσιμη $\Rightarrow \exists\,(x_0,y_0,z_0)$ ώστε

$$\iiint_W f(x,y,z)\,dV = f(x_0,y_0,z_0)\cdot V(W)$$

Ορισμός (μέση τιμή)

$$f: I\to\mathbb{R},\quad [f]_\mu = \frac{\int_a^b f(x)\,dx}{b-a}$$

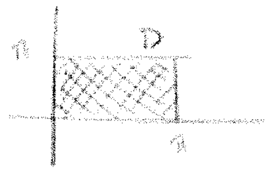
$$f: D\to\mathbb{R},\quad [f]_\mu = \frac{\iint_D f\,dA}{\iint_D dA}$$

$$f: W\to\mathbb{R},\quad [f]_\mu = \frac{\iiint_W f\,dV}{\iiint_W dV}$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η μέση τιμή της $f(x,y) = y\sin(xy)$ στο $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$

$$[f]_\mu = \frac{\iint_D f\,dA}{\iint_D dA}, \quad \iint_A dA = \pi^2$$



$$\iint_D f\,dA = \int_0^\pi \int_0^\pi y\sin(xy)\,dx\,dy$$

$(\cos(xy))' = -y\sin(xy)$

$$= \int_0^\pi [-\cos(xy)]_{x=0}^{\pi}\,dy$$

$$= \int_0^\pi (-\cos(\pi y)+\cos(0))\,dy$$

$$= -\int_0^\pi (\cos(\pi y)+1)\,dy$$

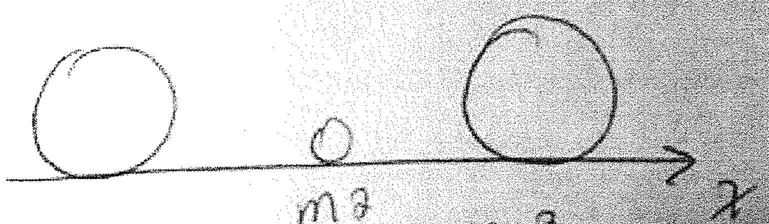
$$= -\left[\frac{1}{\pi}\sin(\pi y)+y\right]_0^\pi$$

$$= -\left(\frac{1}{\pi}\sin(\pi^2)+\pi-\frac{1}{\pi}\cancel{\sin 0}^{\,0}-0\right)$$

$$= -\frac{1}{\pi}\sin(\pi^2)+\pi$$

Άρα $[f]_\mu = \dfrac{-\frac{1}{\pi}\sin\pi^2+\pi}{\pi^2}$ //

Κέντρο μάζας



$$\text{Κέντρο μάζας} = \frac{\Sigma m_i x_i}{\Sigma m_i}$$

Ορισμός

Σε ράβδο I με πυκνότητα $\delta(x)$ το κέντρο μάζας είναι το σημείο

$$\bar{x} = \frac{\int_I x\,\delta(x)\,dx}{\int_I \delta(x)\,dx}$$

Σε μια πλάκα D με πυκνότητα $\delta(x,y)$ το κέντρο μάζας έχει συντεταγμένες

$$\bar{x} = \frac{\iint_D x\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy}, \quad \bar{y} = \frac{\iint_D y\,\delta(x,y)\,dx\,dy}{\iint_D \delta(x,y)\,dx\,dy}$$

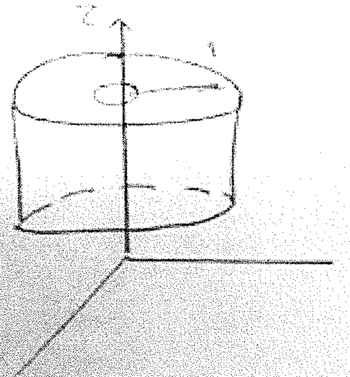
- Σε στερεό W με πυκνότητα $\delta(x,y,z)$ το κέντρο μάζας έχει συντεταγμένες

$$\bar{x} = \frac{\iiint_W x\,\delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}{\underbrace{\iiint_W \delta(x,y,z)\,dx\,dy\,dz}_{\text{μάζα}}}, \quad \bar{y} = \dots, \quad \bar{z} = \dots$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το κέντρο μάζας του κυλίνδρου $W: x^2+y^2 \le 1,\ 1 \le z \le 2$

$(\delta(x,y) = (x^2+y^2)z^2)$



Αρχικά βρίσκουμε τη μάζα:

$$\iiint_W (x^2+y^2)z^2\,dx\,dy\,dz \overset{\text{κυλινδρικές}}{=} \iiint_{W'} r^2 z^2\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$W' = \{(r,\theta,z) \mid 0 \le r \le 1,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 1 \le z \le 2\}$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} \int_0^1 r^3 z^2\,dr\,d\theta\,dz = \int_1^2 \int_0^{2\pi} z^2 \left[\frac{r^4}{4}\right]_0^1 d\theta\,dz$$

$$= \int_1^2 \int_0^{2\pi} z^2 \frac{1}{4}\,d\theta\,dz = \frac{1}{4}\int_1^2 2\pi z^2\,dz$$

$$= \frac{\pi}{2}\left[\frac{z^3}{3}\right]_1^2 = \frac{\pi}{2}\left(\frac{8}{3}-\frac{1}{3}\right)$$

$$= \frac{7\pi}{6}$$

$$\iiint_W x(x^2+y^2)z^2\,dx\,dy\,dz = \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r\cos\theta\, r^2 z^2\, r\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \int_1^2\int_0^{2\pi}\int_0^1 r^4\cos\theta\, z^2\,dr\,d\theta\,dz$$

$$= \dots$$

$$= \emptyset$$

$$\iiint_W y\,\delta\,dV = \emptyset \quad \text{και} \quad \iiint_W z\,\delta\,dV = \frac{15\pi}{8}$$

Ροπή αδράνειας

Έστω ένα στερεό W με ομοιόμορφη πυκνότητα δ

Οι ροπές αδράνειας είναι

$$I_x = \iiint_W (y^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz$$

$$I_y = \iiint_W (x^2+z^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz$$

$$I_z = \iiint_W (x^2+y^2)\,\delta\,dx\,dy\,dz$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Oy της σφαίρας $W: x^2+y^2+z^2 \le R^2$ με πυκνότητα δ

$$I_y = \iiint_W (x^2+z^2)\,\delta \, dx\,dy\,dz$$

σφαιρικές

$$= \iiint_{W'} \left(\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\right)\delta\, \rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$W' = \{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left(\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi\right)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} \left(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\rho^4\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\varphi \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^5}{5}\left(\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi}\left(a\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right)\sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi}\left(a(1-\cos^2\varphi)+\cos^2\varphi\right)\sin\varphi\, d\varphi$$

$\cos\varphi = u$

$-\sin\varphi\, d\varphi = du$

$$= \int_{-1}^{1}\left(a(1-u^2)+u^2\right)du$$

$$= \int_{-1}^{1}\left(a - au^2 + u^2\right)du$$

$$= \left[au - \frac{au^3}{3} + \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \dots = \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$$

5 Παράδειγμα

Να βρεθεί η ροπή αδράνειας ως προς τον άξονα Oy του
$W: x^2+y^2+z^2 \le R^2$ με πυκνότητα δ ... άξονα Oy ως ...

$$I_y = \iiint_W (x^2+z^2)\,\delta\, dx\,dy\,dz$$

σφαιρικές

$$= \iiint_{W'} (\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi)\,\delta\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$W' = \{(\rho,\theta,\varphi) \mid 0 \le \rho \le R,\ 0 \le \theta \le 2\pi,\ 0 \le \varphi \le \pi\}$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} (\rho^2\cos^2\theta\sin^2\varphi + \rho^2\cos^2\varphi)\,\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_0^{R} (\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\,\rho^4\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin\varphi \cdot \left[\frac{\rho^5}{5}\right]_0^R d\theta\, d\varphi$$

$$= \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{R^5}{5} (\cos^2\theta\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin\varphi\, d\theta\, d\varphi$$

$$\int_0^{\pi} (a\sin^2\varphi + \cos^2\varphi)\sin\varphi\, d\varphi = \int_0^{\pi} \big(a(1-\cos^2\varphi) + \cos^2\varphi\big)\sin\varphi\, d\varphi$$

$\cos\varphi = u$

$-\sin\varphi\, d\varphi = du$

$$= -\int_{1}^{-1} \big(a(1-u^2) + u^2\big)\, du$$

$$= \int_{-1}^{1} (a - au^2 + u^2)\, du$$

$$= \left[au - \frac{au^3}{3} + \frac{u^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \dots = \frac{4}{3}a + \frac{2}{3}$$

(*) $= \int_0^{2\pi} \frac{R^5}{5}\left(\frac{4}{3}\cos^2\theta + \frac{2}{3}\right)d\theta$

$= \int_0^{2\pi} \frac{R^5}{5}\left(\frac{4}{3}\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2} + \frac{2}{3}\right)d\theta$

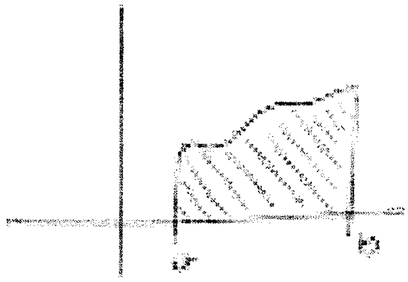
$= \int_0^{2\pi} \frac{R^5}{5}\cdot\frac{4}{12} + \int_0^{2\pi} \frac{R^5}{5}\cdot\frac{4\cos 2\theta}{6} + \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}\,d\theta$

$= \dots$

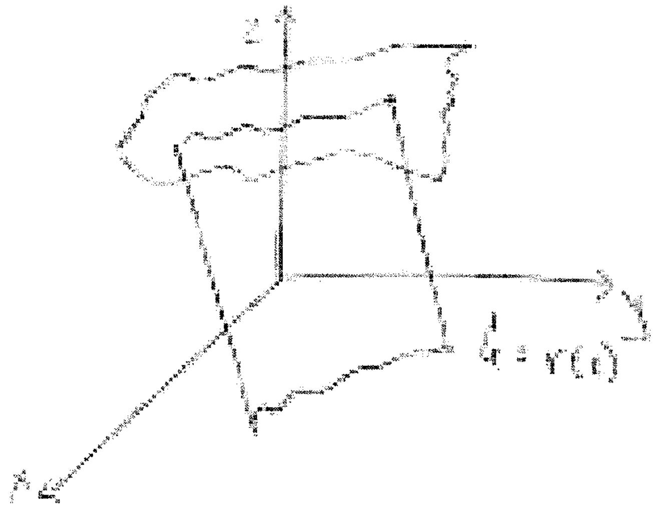
$= \frac{8\delta R^5}{15}\pi$

Κεφάλαιο 5 - Επικαμπύλια Ολοκληρώματα και Θεώρημα Green

Ιδέα



$\int_a^b f\,dx$



$f(x,y)$

$\mathbb{R} = r(t)$

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα βαθμωτού συνάρτησης

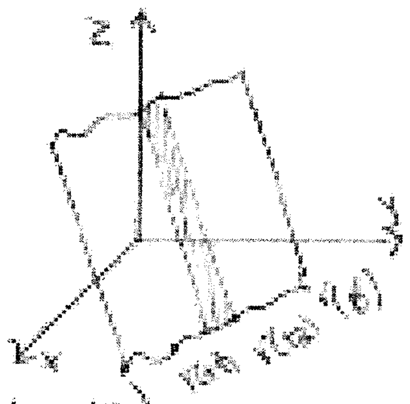
$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ μια συνεχής κανονική καμπύλη

$f(r(t))$

Σπάμε το $[a,b]$ σε υποδιαστήματα

$[t_0, t_1], [t_1, t_2] \dots [t_{n-1}, t_n]$, $t_0 = a$, $t_n = b$



Το εμβαδόν της λωρίδας που προκύπτει είναι

$\approx$ μήκος βάσης $\times$ ύψος

μήκος βάσης = μήκος καμπύλης στο $[t_i, t_{i+1}]$

$$= \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|r'(t)\| dt$$

Θεώρημα [illegible]

$$= \|r'(t^*)\| (t_{i+1} - t_i) \text{ για κάποιο } t^* \in [t_i, t_{i+1}]$$

Ας υποθέσουμε ότι η $f(r(t))$ είναι συνεχής και [illegible] $f(r(t^*))$ σε $[t_i, t_{i+1}]$

Επιλέγουμε [illegible] $\|r'(t^*)\| \Delta t_i \, f(r(t^*))$

$$\sum_{i=1}^{n} \|r'(t^*)\| \Delta t_i \, f(r(t^*))$$

$$\Big\downarrow n \to \infty$$

$$\int_{\Gamma} f \, ds = \int_{a}^{b} f(r(t)) \|r'(t)\| dt$$

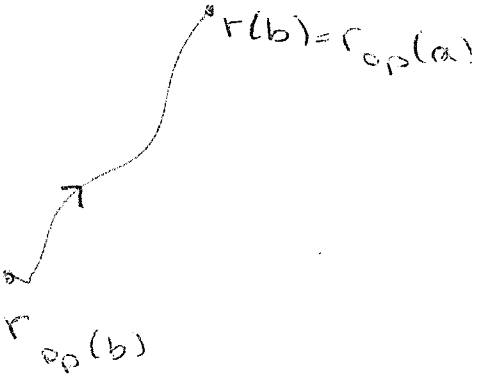
ΜΑΣ 026:

15/11/19:

C μια καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ με παραμέτρηση $r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

$$\int_C f\cdot ds = \int_a^b f(r(t))\cdot\|r'(t)\|\cdot dt$$

$$\int_C F\cdot ds = \int_a^b F(r(t))\cdot r'(t)\cdot dt$$



Αν $F = F_1\hat{i} + F_2\hat{j} = (F_1, F_2)$

$$\int_C F\cdot ds = \int_C F_1\, dx + F_2\cdot dy + F_3\cdot dz$$

Πώς επηρεάζει η παραμετρικοποίηση την τιμή του επικαμπυλίου ολοκληρώματος β' είδους;

Γενικά αν έχουμε μια παραμέτρηση $r:[a,b]\to\mathbb{R}^2$,

η καμπύλη $r_{op}:[a,b]\to\mathbb{R}$ έχει εικόνα την

$$r_{op}(t) = r(a+b-t)$$

ίδια καμπύλη με την r αλλά με αντίθετη κατεύθυνση

Όντως για $t=a$, $r_{op}(a) = r(a+b-a) = r(b)$,

$$r_{op}(b) = r(a+b-b) = r(a)$$

Πρόταση:

Έστω F διαν. πεδίο και r_1, r_2 παραμετρήσεις της ίδιας καμπύλης.
Αν οι r_1, r_2 έχουν ίδια κατεύθυνση, τότε: $\int_{r_1} F \cdot d\vec{s} = \int_{r_2} F \cdot d\vec{s}$.

Αν οι r_1, r_2 έχουν αντίθετη κατεύθυνση $\int_{r_1} F \cdot d\vec{s} = -\int_{r_2} F \cdot d\vec{s}$

Π.χ:

(yz, xz, xy)

Έστω $F = yz\hat{i} + xz\hat{j} + xy\hat{k}$ κατά μήκος της καμπύλης

$r(t) = (t, t^2, t^3)$, $t \in [-5, 10]$.

$r'(t) = (1, 2t, 3t^2)$.

$F(r(t)) = (t^5, t^4, t^3)$

$\int_r F \cdot d\vec{s} = \int_{-5}^{10} (t^5, t^4, t^3) \cdot (1, 2t, 3t^2) \cdot dt$

$= (t^5 + 2t^5 + 3t^5) \cdot dt = \int_{-5}^{10} 6t^5 \cdot dt$

$= [t^6]_{-5}^{10} = 10^6 - (-5)^6 = 10^6 - 5^6$

Έστω τώρα $r_{op}(t) = r(10 - 5 - t) = r(5 - t) = (5-t, (5-t)^2, (5-t)^3)$.

$r'_{op}(t) = (-1, -2(5-t), -3(5-t)^2)$ $\quad t \in [-5, 10]$.

$F(r_{op}(t)) = ((5-t)^5, (5-t)^4, (5-t)^3)$.

$$\int_{r_{op}} F \cdot ds = \int_{-5}^{10} ((5-t)^5, (5-t)^4, (5-t)^3)(-1, -2(5-t), -3(5-t)^2)$$

$$= \int_{-5}^{10} \left[-(5-t)^5 - 2(5-t)^5 - 3(5-t)^5\right] \cdot dt$$

$$= \int_{-5}^{10} -6 \cdot (5-t)^5 \cdot dt = \left[(5-t)^6\right]_{-5}^{10} = \left[(5-10)^6 - (5-(-5))^6\right]$$

$$= 5^6 - 10^6 = -\int_r F \cdot ds.$$

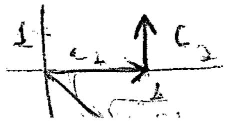
Γ. η καμπύλη είναι κατά τμήματα κανονική τότε το ολοκλήρωμα γίνεται το άθροισμα σε καθένα από τα κανονικά τμήματα.

Π.χ.: $\int_c x^2 \cdot dx + xy \cdot dy$, όπου c αποτελείται δύο

ευθ. τμήμα c_1 από το $(0,0)$ στο $(1,0)$

ευθ. τμήμα c_2 από το $(1,0)$ στο $(1,1)$

Έστω οι παραμετρικές:



$r_1(t) = (t, 0)$ $\quad t \in [0, 1]$

$r_2(t) = (1, t-1)$, $t \in [1, 2]$

$$\boxed{F(r(t)) \cdot r'(t)}$$

$$\int_c x^2 \cdot dx + xy \cdot dy = \int_{r_1} x^2 \cdot dx + xy \cdot dy + \int_{r_2} x^2 \cdot dx + xy \cdot dy =$$

$$= \int_0^1 (t^2 \cdot 1 + t \cdot 0 \cdot 0) \cdot dt + \int_1^2 [1^2 \cdot 0 + (t-1) \cdot 1] \cdot dt$$

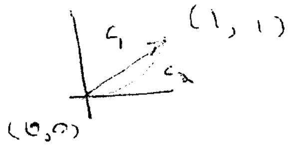
$$= \int_0^1 t^2 \cdot dt + \int_1^2 (t-1) \cdot dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{t^2}{2} - t\right]_1^2$$

$$= \frac{1}{3} + \left(2 - 2 - \frac{1}{2} + 1\right) = \frac{1}{3} + 1/2 = 5/6$$

Θεμελιώδες θεώρημα για επικαμπύλια ολοκληρώματα:

Παράδειγμα:

$F = y\hat{i} + x\hat{j}$.



c_1: ευθεία $y = x$ από $(0,0)$ έως $(1,1)$

c_2: παραβολή $y = x^2$ από $(0,0)$ στο $(1,1)$

$r_1(t) = (t, t)$, $t \in [0, 1]$

$r_2(t) = (t, t^2)$, $t \in [0, 1]$

$$\int_{r_1} F\cdot ds = \int_0^1 (t,t)\cdot(1,1)\cdot dt = \int_0^1 2t\cdot dt = [t^2]_0^1 = 1.$$

$$\int_{r_2} F\cdot ds = \int_0^1 (t^2,t)(1,2t)\,dt = \int_0^1 (t^2+2t^2)\cdot dt$$

$$= \int_0^1 3t^2\cdot dt = [t^3]_0^1 = 1.$$

Όποια διαδρομή και να πάρουμε το ολοκλήρωμα θα είχε ίδια τιμή, διότι $F = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)$

όπου $f(x,y) = xy$ και $f(r_1(1)) - f(r_1(0)) = 1 - 0 = 1$.

$f(r_2(1)) - f(r_2(0)) = 1 - 0 = 1.$

Υπενθύμιση: F λέγεται συντηρητικό αν υπάρχει βαθμωτή συνάρτηση f ώστε $F = \nabla f$.

$$\left(\int_a^b (f(x))'\cdot dx = f(b) - f(a)\right)$$

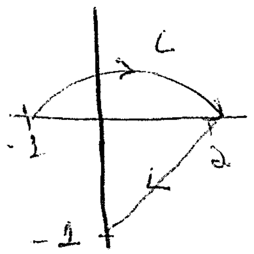
Θεώρημα: (θεμ. θεώρημα για επικαμπύλιο ολοκλ.)

Έστω F συνεχές διαν. πεδίο και $F = \nabla f$ για κάποια βαθμωτή f. Τότε για κάθε κατά τμήματα κανονική καμπύλη $r : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

$$\boxed{\int_r F\,ds = \int_r \nabla f\cdot ds = f(r(b)) - f(r(a))}$$

Παράδειγμα:

$\int_C (2xy\hat{i} + x^2\hat{j})\cdot d\vec{s}$ όπου C η καμπύλη του σχήματος.



Παρατηρούμε ότι $F=\nabla f$ όπου

$f(x,y) = x^2 y$ διότι $\frac{df}{dx} = 2xy$ και $\frac{df}{dy} = x^2$

Άρα από το θεμ. θεώρημα $\int_C (2xy\hat{i} + x^2\hat{j})\cdot d\vec{s} = f(-1,0) - f(0,-$

$= (-1)^2\cdot 0 - 0^2\cdot(-1) = 0$

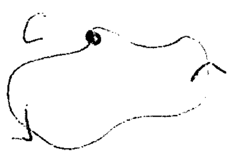
Βασική συνέπεια 1:

Σε συντηρητικά πεδία έχουμε ανεξαρτησία της διαδρομής (δηλ. το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα εξαρτάται μόνο από τα άκρα της καμπύλης).

Βασική συνέπεια 2:

Σε συντηρητικά πεδία το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα σε κλειστές καμπύλες είναι 0.

Πράγματι, έστω f συντηρητικό και C κλειστή καμπύλη.



Εφόσον αν r παραμετρίζει της καμπύλης, $r(a)=r(b)$, εφαρμόζουμε το θεωρ. ...

Θεώρημα: $\boxed{S.O.S}$ 4

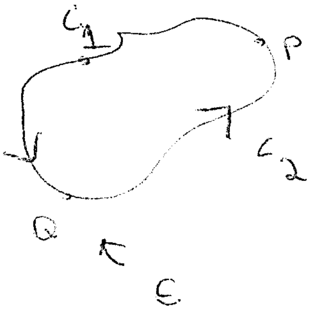
Τα επόμενα είναι ισοδύναμα για ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο

Α) Ανεξαρτησία της διαδρομής στα επικαμπύλια ολοκληρώματα

Β) Το επικαμπ. ολοκλήρωμα σε κάθε κλειστή καμπύλη είναι 0.

Γ) Το F είναι συντηρητικό ($F = \nabla f$ για κάποια f)

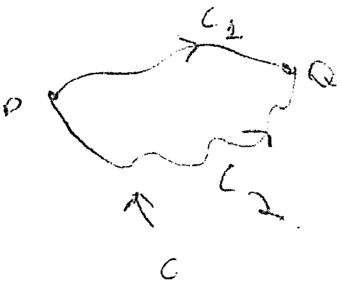
Απόδειξη ότι από (Α) $\xrightarrow{\text{στο}}$ (Β):



$$\int_C F \cdot ds = \int_{c_1} F \cdot ds + \int_{c_2} F \cdot ds$$

$$= \int_{c_1} F \cdot ds - \int_{c_2, op} F \cdot ds = 0.$$

(Β) $\xrightarrow{\text{στο}}$ (Α):



Έστω $C = c_1 + c_2$

$$0 = \int_{c_1} F \cdot ds + \int_{c_2, op} F \cdot ds = \int_{c_1} F \cdot ds - \int_{c_2} F \cdot ds$$

κλειστή διαδρομή

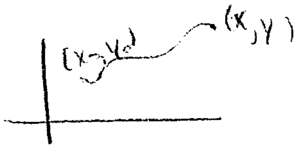
(Γ) $\xrightarrow{\text{στο}}$ (Α): θεμ. θεώρημα.

Α) $\xrightarrow{\text{στο}}$ (Γ)

Θέλουμε να βρούμε f ώστε $F = \nabla f$ αν γνωρίζουμε ανεξαρτησία διαδρομής

Έστω (x_0, y_0) σταθερό σημείο του $\mathbb{R}^2$

Ορίζουμε $f(x,y) = \int_C F \cdot ds$ όπου C οποιαδήποτε καμπύλη που συνδέει το (x_0, y_0) με το (x,y)



Η f είναι καλά ορισμένη λόγω ανεξαρτησίας διαδρομής.

Θέλουμε να δείξουμε ότι $\dfrac{\partial f}{\partial x} = F_1$.

$(F = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j})$

Έστω (x,y) σημείο ώστε $x > x_0$, $y > y_0$

$C_1 : r_1(t) = (x_0, t)$, $t \in [y_0, y]$.

$C_2 : r_2(t) = (t, y)$, $t \in [x_0, x]$

$$f(x,y) = \int_{C_1 + C_2} F \cdot ds = \int_{C_1} F \cdot ds + \int_{C_2} F \cdot ds$$

$$= \int_{y_0}^{y} F(r_1(t)) \cdot r_1'(t)\, dt + \int_{x_0}^{x} F(r_2(t)) \cdot r_2'(t)\, dt$$

$$= \int_{y_0}^{y} F(x_0, t) \cdot (0, 1)\, dt + \int_{x_0}^{x} F(t, y) \cdot (1, 0)\, dt$$

$$= \int_{y_0}^{y} F_2(x_0, t)\, dt + \int_{x_0}^{x} F_1(t, y)\, dt$$

$\dfrac{df}{dx} = 0 + \left(\int^{x} F_1(t, y)\, dt \right) = F_1(x, \ldots)$

Παραδείγματα:

1) $F = xy^2 \hat{i} + x^2 y \hat{j}$. Να υπολογίσετε το $\int_\Gamma F \cdot ds$ όπου

$$r(t) = \left(t + \sin\left(\frac{\pi t}{2}\right),\ t + \cos\left(\frac{\pi t}{2}\right)\right),\quad t \in [0,1]$$

Παρατηρούμε ότι $F = \nabla f$ όπου $f(x,y) = \dfrac{x^2 \cdot y^2}{2}$

Άρα από το θεμ. θεώρημα $\int_\Gamma F \cdot ds = f(r(1)) - f(r(0))$

$$= f\left(1 + \sin\left(\frac{\pi}{2}\right),\ 1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right) - f\left(0 + \sin 0,\ 0 + \cos 0\right)$$

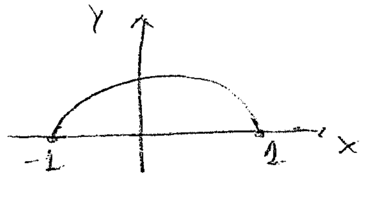
$$= f(2,1) - f(0,1) = \frac{2^2 \cdot 1^2}{2} - \frac{0^2 \cdot 1^2}{2} = 2.$$

2) Έστω $F(x,y) = \left(-\dfrac{y}{x^2+y^2},\ \dfrac{x}{x^2+y^2}\right)$

α) Υπολογίστε το $\int_C F \cdot ds$ όπου C το άνω ημικύκλιο του κύκλου $x^2+y^2=1$, από το $(1,0)$ στο $(-1,0)$.

β) Το ίδιο για το κάτω ημικύκλιο.

γ) Είναι το F συντηρητικό;

α) 

$r(t) = (\cos t, \sin t)$

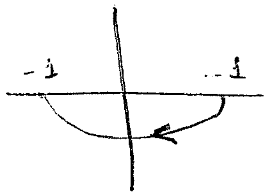
$t \in [0, \pi]$

$r'(t) = (-\sin t, \cos t)$

$$F(r(t)) = \left(\frac{-\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t},\ \frac{\cos t}{\sin^2 t + \cos^2 t}\right) = (-\sin t, \cos t).$$

$$\int_r F \cdot ds = \int_0^{\pi} (-\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, \cos t) \, dt = \int_0^{\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t) \, dt = \pi$$

β)



$$r(t) = (\cos(-t), \sin(-t)) = (-\cos t, -\sin t)$$

$$t \in [0, \pi]$$

$$r'(t) = (-\sin t, -\cos t)$$

$$F(r(t)) = (\sin t, \cos t)$$

$$\int_r F \cdot ds = \int_0^{\pi} (\sin t, \cos t) \cdot (-\sin t, -\cos t) \, dt$$

$$= \int_0^{\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) \, dt = \pi.$$

γ) Επειδή από τα (α) και (β) δεν έχουμε ανεξαρτησία διαδρομής το F δεν είναι συντηρητικό.

ΜΑΣ 026:

19/11/19:

Θεμελιώδες θεώρημα για επικαμπύλια ολοκληρώματα:

Έστω F συνεχές διαν. πεδίο, f, έτσι ώστε $F = \nabla f$, $r:[a,b]\to \mathbb{R}$
ή $\mathbb{R}^3$. Τότε $\int_c F\cdot ds = f(r(b)) - f(r(a))$

Θεώρημα: F συνεχές διαν. πεδίο:

(A) Ανεξαρτησία της διαδρομής θα.

$\Updownarrow$ επ. ολοκλ. $\int_c F\cdot ds$.

(B) $\int_c F\cdot ds = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη C.

$\Updownarrow$

Γ) F συντηρητικό (δηλ. $\exists f$ $F = \nabla f$)

ε.μ. Διαν πεδία έχουν πεδίο ορισμού όλο το $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$.

Π.χ.:

1) Έστω το συντηρητικό πεδίο $F = (3+2xy)\hat{i} + (x^2 - 3y^2)\hat{j}$

Να βρεθεί $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ώστε $F = \nabla f$

1ος τρόπος: $\nabla f = (f_x, f_y)$

Άρα θα πρέπει $f_x(x,y) = 3 + 2xy$

$f_y(x,y) = x^2 - 3y^2$.

Ολοκληρώνουμε την πρώτη σχέση ως προς x:

$f(x,y) = 3x + x^2 y + g(y)$

Παραγωγίζοντας ως προς y έχουμε:

$f_y(x,y) = x^2 + g'(y)$

θα πρέπει $g'(y) = -3y^2$

$\Rightarrow g(y) = -y^3 + c_1, \quad c \in \mathbb{R}$.

Άρα $f(x,y) = 3x + x^2 y - y^3 + c$

<u>2ος τρόπος:</u> (από την απόδειξη του θεωρ.)

Έστω $r: [0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (xt, yt)$ ⇝ ευθεία που συνδέει το $(0,0)$ με το (x,y)

$f(x,y) = \int_r F \cdot d\vec{s}$

$$f(x,y) = \int_r F\, d\vec{s} = \int_0^1 F(r(t)) \cdot r'(t)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(3 + 2xt\, yt,\ (xt)^2 - 3(yt)^2\right) \cdot (x,y)\, dt$$

$$= \int_0^1 \left(3x + 2x^2 y t^2 + x^2 y t^2 - 3y^3 t^2\right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(3x + 3x^2 y t^2 - 3y^3 t^2\right) dt$$

$$= \left[3xt + x^2 y t^3 - y^3 t^3\right]_0^1 = 3x + x^2 y - y^3.$$

<u>Σημείωση:</u> Διαν. πεδία έχουν Π.Ο. (πεδίο ορισμού) όλο το $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$.

Π.χ.

2) Το ίδιο για το συνημετρικό πεδίο

$$F(x,y) = (\cos(xy) - xy\sin(xy),\ -x^2\sin(xy))$$

$$\left(\int -x^2 \cdot \sin(xy)\,dy = \int c \cdot [\cos(cy)]' \cdot dy = c\cos(cy) \right)$$

σταθερά για αυτό βάζω c για να την μπερδεύω.

$$f(x,y) = x\cos(xy) + g(x)$$

Παραγωγίζοντας ως προς x παίρνουμε $f_x(x,y) = \cos(xy) - x^2\sin(xy) + g'$

Θα πρέπει $g'(x) = 0 \Rightarrow g(x) = c$, για κάποιο σταθ. $c \in \mathbb{R}$. Άρα

$$f(x,y) = x\cos(xy) + c.$$

2ος τρόπος: (Από την απόδειξη του θεωρήματος). Έστω $r:[0,1] \to \mathbb{R}^2$, $r(t) = (xt, yt)$ → ευθεία που συνδέει (0,0) με το (x,y)

$$f(x,y) = \int_r f \cdot ds = \int_0^1 f(r(t)) \cdot r'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 (\cos(xyt^2) - xyt^2 \cdot \sin(xyt^2),\ -x^2t^2 \cdot \sin(xyt^2)) \cdot (x,y)\,dt$$

$$= \int_0^1 \left[x\cos(xyt^2) - x^2 \cdot y \cdot t^2 \cdot \sin(xyt^2) - x^2 \cdot y \cdot t^2 \cdot \sin(xyt^2) \right] dt$$

$$= \int_0^1 \left[x\cos(xyt^2) - 2x^2 \cdot y \cdot t^2 \sin(xyt^2) \right] dt$$

$$= \left[x\cos(xyt^2) \right]_0^1 = x\cos(xy)$$

Εφαρμογή των επικαμπύλιων ολοκληρωμάτων: Αρχή διατήρησης της ενέργειας

Έστω F διαν. πεδίο που είναι σε ένα ανοικτό κατά μήκος καμπύλης $r(t)$, $t \in [a,b]$

Από 2° νόμο Νεύτωνα: $F(r(t)) = m \cdot a(t) = m \cdot r''(t)$

Το έργο που παράγεται από τη δύναμη F:

$$\int_\Gamma F \cdot ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \cdot dt = \int_a^b m \underset{\text{εσ. γινόμενο}}{\cdot} r'(t) \cdot dt$$

$$= m \cdot \frac{1}{2} \left[r'(t) \cdot r'(t) \right]_a^b = \frac{m}{2} \cdot \left[\| r''(t) \|^2 \right]_a^b$$

$$= \underbrace{\frac{m}{2} \cdot \| r'(b) \|^2}_{\text{κιν. ενέργεια στο τελικό σημείο}} - \underbrace{\frac{m}{2} \| r'(a) \|^2}_{\text{κιν. ενέργεια στο αρχ. σημείο}}$$

$$\int f'' \cdot f' \cdot dx = \frac{1}{2} (f')^2$$

$$(f' f')' = f'' f' + f' f'' = 2 f'' f'$$

$$[a(t) \underset{\text{εσ. γινόμενο}}{\cdot} b(t)]' = a'(t) \cdot b(t) + a(t) \cdot b'(t)$$

Αν το F είναι συντηρητικό, δηλ. $\exists f$ με $F = \nabla f$

$$\int_\Gamma F \cdot ds = f(r(b)) - f(r(a)) = \underbrace{-f(r(a))}_{\text{δυν. ενέργεια στο αρχ. σημείο}} - \underbrace{(-f(r(b)))}_{\text{δυν. ενέργεια στο τελικό σημείο}}$$

Άρα: κιν. ενέργεια στο τελ. σημείο + δυναμική ενέργεια στο τελ. σημείο = κινητ. ενέργεια αρχ. σημείο + δυν. ενέ. αρχ. σημ.

$\boxed{\text{S.O.S.}}$

Θεώρημα Green: (θεωρητικά)

Γενικεύουμε το θεμελιώδες θεώρημα:

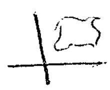
καμπύλες $\longrightarrow$ άκρα καμπύλης

$\downarrow$

χωρία στον $\mathbb{R}^2$ $\longrightarrow$ σύνορο χωρίου

Τα χωρία που θα κοιτάζαμε:

1) Είναι απλά (x-απλά και y-απλά) 

2) Το σύνορο του χωρίου είναι μια καμπύλη 

$r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ που είναι:

i) απλή (δεν αυτοτέμνεται)

ii) κλειστή

iii) κατά τμήματα κανονική 

iv) θετικά προσανατολισμένη δηλ. ανάποδα από το ρολόι ή αν περπατάμε πάνω στην καμπύλη το χωρίο πρέπει να είναι πάντα αριστερά μας. 

Θεώρημα Green (αυστηρά)

Έστω $F = F_1 \hat{i} + F_2 \hat{j}$ συνεχώς διαφ. πεδίο, D απλό χωρίο του $\mathbb{R}^3$ με σύνορο μια καμπύλη C η οποία είναι απλή, κλειστή, κατά τμήματα κανονική και θετικά προσανατολισμένη

<u>Τότε</u>: $\boxed{\int_C F \cdot ds = \iint_D \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right) dx \cdot dy}$

Για κλειστές καμπύλες C, $\int_C F \cdot ds = \oint_C F \cdot ds$ άρα το

Θ. Green τελικά είναι: $\oint_C F \cdot ds = \iint_D \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy} \right) dx \cdot dy$

<u>Π.χ.</u>:

1) $F = 0\hat{i} + x\hat{j}$

$\int_D = \int_a^b 1 \cdot dx = b - a$

$\oint_C F \cdot ds \overset{\text{Θ. Green}}{=\!=} \iint_D (1-0) \cdot dx \cdot dy = \iint_D 1 \cdot dx \cdot dy$ = εμβαδό (D)

2) $F = y\hat{i} + 0\hat{j}$

$\oint_C F \cdot ds \overset{\text{Θ.G}}{=\!=} \iint_D (0-1) \cdot dx \cdot dy = -\iint_D 1 \cdot dx \cdot dy = -$ εμβ. (D)

$\boxed{\text{– σύνορο χωρίου } D \text{ συμβολίζεται με } \partial D}$

3) $F = -y\hat{i} + x\hat{j}$

$\oint_C F \cdot ds \overset{\text{Θ.G}}{=\!=} \iint_D (1-(-1)) \cdot dx\,dy = \iint_D 2 \cdot dx \cdot dy = 2$ εμβ. (D)

$\int_C F \cdot ds = \int_C F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy$

-Τα καλύτερα πεδία είναι συντηρητικά πεδία)

Για συντηρητικό πεδίο F ξέρουμε ότι $\oint_C F \cdot ds = 0$

Από Θ Green θα πρέπει $\boxed{\frac{dF_2}{dx} = \frac{dF_2}{dy}}$

$\left.\oint_C F \right\}$ κλειστή διαδρομή

Άρα στο θεωρ. (Α) $\Longleftrightarrow$ (Β) $\Longleftrightarrow$ (Γ) $\Longleftrightarrow$ (Δ): $\frac{dF_2}{dx} = \frac{dF_1}{dy}$

<u>Παράδειγμα:</u>

Ποιοι από τα παρακάτω πεδία είναι συντηρητικά;

1) $F = x\hat{i} + y\hat{j}$

2) $F = xy\hat{i} + xy\hat{j}$

3) $F = (x^2 + y^2)\hat{i} + 2xy\hat{j}$

1) $\frac{dF_2}{dx} = 0$, $\frac{dF_1}{dx} = 0$ άρα F συντηρητικό.

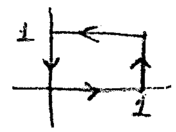
2) $\frac{dF_2}{dx} = y$ $\frac{dF_1}{dy} = x$, άρα δεν είναι συντηρητικό.

3) $\frac{dF_2}{dx} = 2y$ $\frac{dF_1}{dy} = 2y$, άρα συντηρητικό.

Το θ. Green επιτρέπει εναλλαγή από επικαμπύλιο σε διπλό ολοκλήρωμα και αντίστροφα.

<u>Π.χ.:</u> Να βρεθεί το: $\oint_{\partial D} (e^{-x^2}+y^2)\cdot dx + (\ln y - x^2)\cdot dy$

όπου D το τετραγωνίδιο $[0,1]\times[0,1]$



Έστω $F=(\underbrace{e^{-x^2}+y^2}_{F_1})\cdot\hat{i} + (\underbrace{\ln y - x^2}_{F_2})\cdot\hat{j}$

Το D ικανοποιεί τις συνθήκες του θ. Green άρα

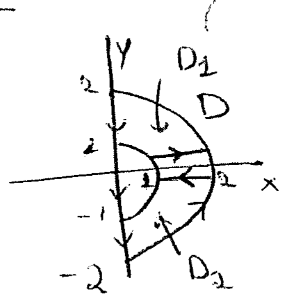
$$\oint_{\partial D} F\cdot d\vec{s} = \iint_D \left(\frac{dF_2}{dx} - \frac{dF_1}{dy}\right) dx\cdot dy = \int_0^1\int_0^1 (-2x-2y)\cdot dx\cdot dy$$

$$= \int_0^1 \left[-x^2-2yx\right]_{x=0}^{1} \cdot dy = \int_0^1 (-1-2y)\cdot dy = \left[-y-y^2\right]_0^1$$

$$= -1-1 = -2$$

Το θ. Green μπορεί να εφαρμοστεί και σε πιο γενικά χωρία αρκεί να είναι ένωση απλών χωρίων.

<u>Π.χ.:</u> Τα χωρίσαμε γιατί δεν ήταν ούτε x, y απλά για αυτό το έσπασα



$\oint_{\partial D} x^2\cdot y\cdot dx + (x^3+2xy^2)\,dy = ;$

Το κόψαμε σε δύο για να το κάνουμε πιο απλό (το κύκλο), η ροή <u>πάντα</u> πρέπει να πηγαίνει αντιωρολογιακά.

(χωρίο D_1)

"$D_1 = \{(x,y) / 1 \le x \le 2, \sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{4+$

$$\oint_{\partial D} (\dots) = \oint_{\partial D_1} \dots + \oint_{\partial D_2} \dots$$

$$\oint_{\partial D_1} \underbrace{x^2 \cdot y}_{f_1} \cdot dx + \underbrace{(x^3 + 2xy^2)}_{f_2} . dy \overset{\Theta.\text{Green}}{=\!=} \iint_{D_1} (\underbrace{3x^2 + 2y^2}_{\frac{df_2}{dx}} - \underbrace{x^2}_{\frac{df_1}{dy}}) . dx . d$$

$$= \iint_{D_1} 2(x^2 + y^2) . dx . dy$$

Δεκτικό: κύκλο [illegible]
κοιτάω μόνο ακτίνα και
γωνίες

πολικές

$$\int_0^{\pi/4} \int_1^2 2 \cdot r^2 \cdot r \cdot dr \cdot d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/2} 2 \cdot \left[\frac{r^3}{3} \right]_1^2 d\theta = \int_0^{\pi/2} 2 \cdot 7/3 = \frac{14}{3} \cdot \pi/2$$

αντίστοιχα το $\oint_0^{\pi/2} \dots$

ΜΑΣ 026:

22/11/19:

Θυμήσου / Φάση Τυπολόγιο.

$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

C καμπύλη στον $\mathbb{R}^2$ με παραμέτρηση $r : [a, b] \to \mathbb{R}^2$

$$\int_C f \cdot ds = \int_a^b f(r(t)) \cdot \|r'(t)\| dt$$

$$\int_C F \cdot ds = \int_a^b F(r(t)) \cdot r'(t) \cdot dt = \int_C F_1 \cdot dx + F_2 \cdot dy$$

Θεώρημα:

(Α) $\int_C F \cdot ds$ ανεξάρτητο της διαδρομής

$\Updownarrow$

(Β) $\oint_C F \cdot ds = 0$ για κάθε κλειστή καμπύλη C.

εσ. γινόμενο

$\Updownarrow$

(Γ) F συντηρητικό

$\Updownarrow$

(Δ) $\dfrac{dF_2}{dx} = \dfrac{dF_1}{dy}$

Θ. Green:

Για D χωρίο στον $\mathbb{R}^2$ ώστε: - D απλό

- ∂D απλή, κλειστή, κατά τμήματα κανονική, θετικά προσανατολισμένη καμπύλη.

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \cdot dx \cdot dy.$$