ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ
Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 5ου Κεφαλαίου

1. Να υπολογιστούν τα διαδοχικά ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_0^2 (x+3)\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_2^4\int_0^1 x^2y\,dx\,dy$

iii) $\displaystyle\int_0^{\ln 3}\int_0^{\ln 2} e^{x+y}\,dy\,dx$ iv) $\displaystyle\int_0^1\int_0^1 \frac{x}{(xy+1)^2}\,dy\,dx$

2. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα στο δοσμένο ορθογώνιο.

i) $\displaystyle\iint_R 4xy^3\,dA$, $R=[-1,1]\times[-2,2]$

ii) $\displaystyle\iint_R x\sqrt{1-x^2}\,dA$, $R=[0,1]\times[2,3]$

3. Περιγράψτε (χωρίς να υπολογίσετε) τον όγκο που εκφράζουν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^5\int_1^2 4\,dx\,dy$ ii) $\displaystyle\int_0^3\int_0^4 \sqrt{25-x^2-y^2}\,dy\,dx$

4. Να δείξετε ότι αν $f(x,y)=g(x)h(y)$ και $R=[a,b]\times[c,d]$, τότε

$$\iint_R f(x,y)\,dA = \left[\int_a^b g(x)\,dx\right]\left[\int_c^d h(y)\,dy\right]$$

5. Να βρεθεί ο όγκος μεταξύ του επιπέδου $z=2x+y$ και του ορθογωνίου $R=[3,5]\times[1,2]$.

6. Να βρεθεί ο όγκος του στερεού κάτω από την επιφάνεια $z=x^2$ που περικλείεται από τα επίπεδα $x=0$, $x=2$, $y=3$, $y=0$ και $z=0$.

7. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_{x^2}^{x} xy^2\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{\sqrt{\pi}}^{\sqrt{2\pi}}\int_0^{x^3} \sin\left(\frac{y}{x}\right)\,dy\,dx$

8. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R x^2\,dA$, όπου R το χωρίο που ορίζεται από τις $y=16/x$, $y=x$ και $x=8$, με δύο τρόπους.

9. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\iint_R (x-1)\,dA$, όπου R το χωρίο στο πρώτο τεταρτημόριο μεταξύ των $y=x$ και $y=x^3$.

ii) $\displaystyle\iint\limits_R \sin(y^3)\,dA$, όπου R το χωρίο μεταξύ των $y=\sqrt{x}$, $y=2$ και $x=0$.

10. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα το εμβαδόν του χωρίου του επιπέδου που περικλείεται από τις $y^2=9-x$ και $y^2=9-9x$.

11. Να βρεθεί με διπλό ολοκλήρωμα ο όγκος του στερεού που φράσσεται από πάνω από το παραβολοειδές $z=9x^2+y^2$, από κάτω από το επίπεδο $z=0$ και πλευρικά από τα επίπεδα $x=0$, $y=0$, $x=3$ και $y=2$.

12. Να αλλαχθεί η σειρά ολοκλήρωσης στα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_0^2\int_0^{\sqrt{x}} f(x,y)\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^4\int_{2y}^{8} f(x,y)\,dx\,dy$

13. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης.

i) $\displaystyle\int_0^1\int_{4x}^{4} e^{-y^2}\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_0^4\int_{\sqrt{y}}^{2} e^{x^3}\,dx\,dy$

14. Να βρεθεί το εμβαδόν των παρακάτω επιφανειών με διπλό ολοκλήρωμα.

i) Επιφάνεια του κυλίνδρου $y^2+z^2=9$ πάνω από το ορθογώνιο $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2, -3\le y\le 3\}$. *[Υπενθύμιση:* $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\sin^{-1}\frac{x}{a}+C$*]*

ii) Επιφάνεια του κώνου $z^2=4x^2+4y^2$ πάνω από το χωρίο που δημιουργούν οι καμπύλες $y=x$ και $y=x^2$ στο πρώτο τεταρτημόριο του xy-επιπέδου.

15. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\int_{-1}^1\int_0^2\int_0^1 (x^2+y^2+z^2)\,dx\,dy\,dz$ ii) $\displaystyle\int_0^2\int_{-1}^{y^2}\int_{-1}^{z} yz\,dx\,dz\,dy$

iii) $\displaystyle\int_0^3\int_0^{\sqrt{9-z^2}}\int_0^{x} xy\,dy\,dx\,dz$ iv) $\displaystyle\int_1^3\int_x^{x^2}\int_0^{\ln z} xe^y\,dy\,dz\,dx$

16. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα.

i) $\displaystyle\iiint\limits_G xy\sin(yz)\,dV$, όπου G το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που ορίζεται από τις σχέσεις $0\le x\le\pi$, $0\le y\le 1$, $0\le z\le \pi/6$.

ii) $\displaystyle\iiint\limits_G y\,dV$, όπου G το στερεό που περικλείεται από το xy-επίπεδο, το επίπεδο $z=y$ και τον παραβολικό κύλινδρο $y=1-x^2$.

17. Να υπολογιστεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με τριπλό ολοκλήρωμα.

i) Το στερεό στο πρώτο οκτημόριο που περικλείεται από τα επίπεδα xy, xz και yz και από το επίπεδο $3x+6y+4z=12$.

ii) Το στερεό που περικλείεται από την επιφάνεια $z=\sqrt{y}$ και τα επίπεδα $x+y=1$, $x=0$ και $z=0$.

18. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα του στερεού με τον αντίστοιχο όγκο.

i) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{y+1} dz\,dy\,dx$ ii) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}}\int_{0}^{2} dy\,dz\,dx$

19. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R \frac{x-2y}{2x+y}\,dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $x-2y=1$, $x-2y=4$, $2x+y=1$, $2x+y=3$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u=x-2y$, $v=2x+y$.

20. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R \sin\frac{1}{2}(x+y)\cos\frac{1}{2}(x-y)\,dA$, όπου R το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(2,0)$, $(1,1)$, χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u=\frac{1}{2}(x+y)$, $v=\frac{1}{2}(x-y)$.

21. Να βρεθεί με αλλαγή μεταβλητών το ολοκλήρωμα $\displaystyle\iint_R \frac{y-4x}{y+4x}\,dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τις $y=4x$, $y=4x+2$, $y=2-4x$ και $y=5-4x$.

22. Χρησιμοποιώντας τον μετασχηματισμό $u=x$, $v=z-y$, $w=xy$ να βρεθεί το ολοκήρωμα

$$\iiint_G (z-y)^2 xy\,dV,$$

όπου G το χωρίο που περικλείεται από τις επιφάνειες $x=1$, $x=3$, $z=y$, $z=y+1$, $xy=2$ και $xy=4$.

23. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

i) $\displaystyle\iint_R \sin\bigl(x^2+y^2\bigr)\,dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από τον κύκλο $x^2+y^2=9$.

ii) $\displaystyle\iint_R \sqrt{9-x^2-y^2}\,dA$, όπου R το χωρίο που περικλείεται από το τμήμα του κύκλου $x^2+y^2=9$ στο πρώτο τεταρτημόριο.

iii) $\displaystyle\int_{0}^{1}\int_{0}^{\sqrt{1-x^2}} (x^2+y^2)\,dy\,dx$

iv) $\displaystyle\int_{-2}^{-2}\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$

24. Έστω S η επιφάνεια της σφαίρας $x^2+y^2+z^2=16$ μεταξύ των επιπέδων $z=1$ και $z=2$. Να εκφραστεί το εμβαδόν της επιφάνειας S με διπλό ολοκλήρωμα και να υπολογιστεί με αλλαγή σε πολικές συντεταγμένες.

25. Να βρεθεί ο όγκος των παρακάτω στερεών με κυλινδρικές συντεταγμένες.

i) Το στερεό μεταξύ του παραβολοειδούς $z=x^2+y^2$ και του επιπέδου $z=9$.

ii) Το στερεό που φράσσεται από πάνω από τη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ και από κάτω από τον κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

26. Να βρεθεί με σφαιρικές συντεταγμένες ο όγκος του στερεού που βρίσκεται μέσα στη σφαίρα $x^2+y^2+z^2 = 9$, έξω από των κώνο $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ και πάνω από το xy-επίπεδο.

27. Να υπολογιστούν τα ολοκληρώματα με αλλαγή σε κυλινδρικές ή σφαιρικές συντεταγμένες.

i) $$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} \int_0^{a-x^2-y^2} x^2 \, dz \, dy \, dx \qquad (a > 0)$$

ii) $$\int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} e^{-(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} \, dz \, dy \, dx$$