ΜΑΣ026

Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ

Σ. Δημόπουλος και Σ. Παπαπαναγίδης

Κεφάλαιο 2: ΧΩΡΟΣ 3 ΔΙΑΣΤΑΣΕΩΝ ΚΑΙ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

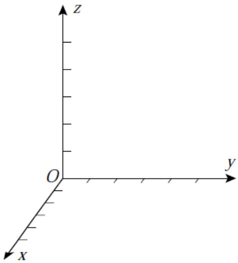
Καρτεσιανές Συντεταγμένες στον χώρο

$$\text{Μία διάστασή} \longrightarrow \text{Ευθεία} \longrightarrow \mathbb{R}$$

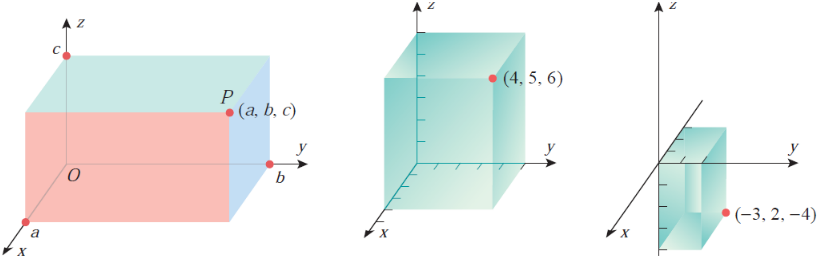
$$\text{Δύο διαστάσεις} \longrightarrow \text{Επίπεδο} \longrightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{Τρεις διαστάσεις} \longrightarrow \text{Χώρος} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

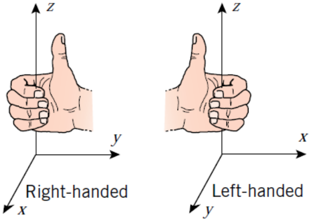
Θεωρούμε ότι ο χώρος έχει 3 άξονες κάθετους μεταξύ τους με ένα σημείο τομής, την αρχή των αξόνων.



Κάθε σημείο στο χώρο έχει 3 συντεταγμένες (Καρτεσιανές).



Θα θεωρούμε ότι οι άξονες ικανοποιούν τον κανόνα του δεξιού χεριού.

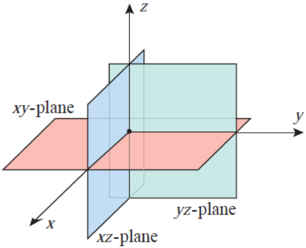


Ορίζουμε τα εξής τρία επίπεδα στο χώρο

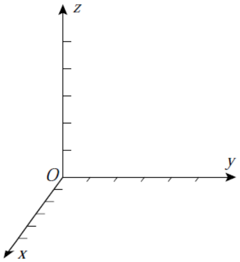
$$xy\text{-επίπεδο} \longrightarrow \text{Ορίζεται από τους άξονες } x \text{ και } y$$

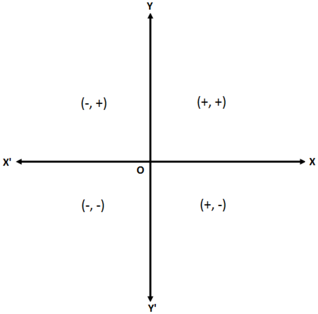
$$xz\text{-επίπεδο} \longrightarrow \text{Ορίζεται από τους άξονες } x \text{ και } z$$

$$yz\text{-επίπεδο} \longrightarrow \text{Ορίζεται από τους άξονες } y \text{ και } z$$



Όπως το καρτεσιανό σύστημα δύο συντεταγμένων (επίπεδο) χωρίζεται σε 4 τεταρτημόρια, έτσι και ο χώρος χωρίζεται σε 8 ογδοημόρια. Το πρώτο ογδοημόριο χαρακτηρίζεται από το γεγόνος ότι όλες οι συντεταγμένες είναι θετικές ($x > 0, y > 0, z > 0$). Τα υπόλοιπα ογδοημόρια δεν ακολουθούν κάποια συγκεκριμένη αρίθμηση





Επίπεδο/Ευθεία	Περιγραφή Σημείων
xy-επίπεδο	$(x, y, 0)$
xz-επίπεδο	$(x, 0, z)$
yz-επίπεδο	$(0, y, z)$
Άξονας x	$(x, 0, 0)$
Άξονας y	$(0, y, 0)$
Άξονας z	$(0, 0, z)$

Απόσταση μεταξύ δύο σημείων στο $\mathbb{R}^3$

Η απόσταση μεταξύ δύο σημείων $P_1(x_1, y_1, z_1)$ και $P_2(x_2, y_2, z_2)$ είναι ίση με

$$\boxed{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}$$

Εξίσωση Σφαίρας ακτίνας r

Ως σφαίρα ακτίνας r γεωμετρικά περιγράφουμε το σύνολο των σημείων στο χώρο που απέχουν απόσταση ίση με r από σημείο (x_0, y_0, z_0) του χώρου (κέντρο). Συνεπώς μία σφαίρα ακτίνας r περιγράφεται από την εξίσωση

$$\boxed{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2}$$

Παράδειγμα

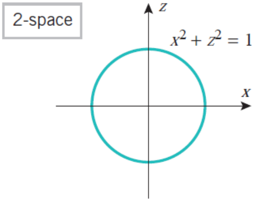
Να βρεθούν το κέντρο και η ακτίνα του κύκλου με εξίσωση

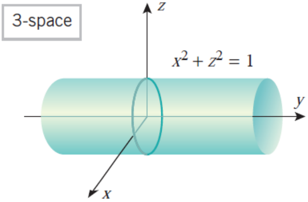
$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 8z + 17 = 0$$

Παράδειγμα

Κυλινδρικές Επιφάνειες

Βασική Ιδέα: Ο κύλινδρος προκύπτει από την μετατόπιση του κύκλου στο xz-επίπεδο

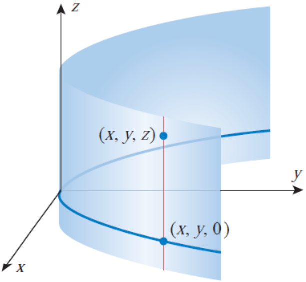




Γενικά: Κυλινδρική καλείται μία επιφάνεια που προκύπτει από την παράλληλη μετατόπιση μίας καμπύλης.

Παράδειγμα

Η γραφική παράσταση της εξίσωσης $y = x^2$

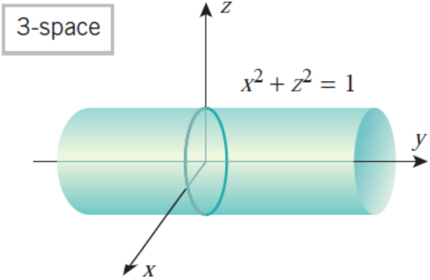


Θεώρημα

Μία εξίσωση που περίεχει μόνο δύο από τις μεταβλητές x, y και z αναπαριστά μία κυλινδρική επιφάνεια στο xyz καρτεσιανό σύστημα αξόνων. Το γράφημα της προκύπτει σχεδιάζοντας την καμπύλη στο επίπεδο των δύο μεταβλητών που περιέχει και μετατοπίζοντας την παράλληλα ως προς τον άξονα της τρίτης μεταβλητής.

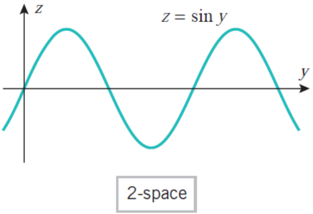
Παράδειγμα

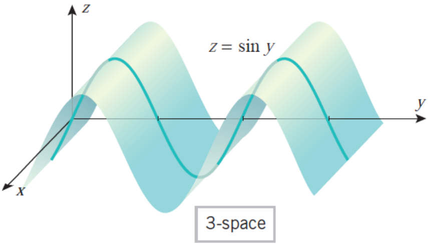
Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $x^2 + z^2 = 1$



Παράδειγμα

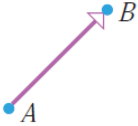
Να σχεδιαστεί η γραφική παράσταση της $z = \sin y$





Διανύσματα

Ένα **διάνυσμα** αναπαριστάται γεωμετρικά σε χώρο δύο ή τριών διαστάσεων ως ένα βέλος με μήκος/μέτρο και κατεύθυνση. Γενικότερα, κάθε διάνυσμα χαρακτηρίζεται από αυτές τις δύο ιδιότητες, του μέτρου και της κατεύθυνσης.

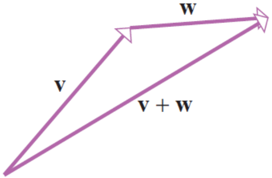


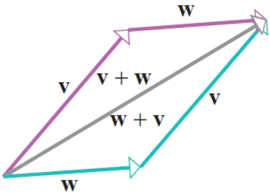
Το σημείο A καλείται **αρχικό σημείο** και το σημείο B το **τελικό σημείο** του διανύσματος $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{AB}$.
Αν δύο διανύσματα έχουν ίδιο μέτρο και ίδια κατεύθυνση θεωρούνται ίσα. Συνεπώς με την παράλληλη μετατόπιση ενός διανύσματος σε χώρο δύο ή τριών διαστάσεων δεν προκύπτει κάποιο διαφορετικό διάνυσμα.

Ορισμός

Μηδενικό διάνυσμα καλείται το διάνυσμα στο οποίο το αρχικό και το τελικό σημείο συμπίπτουν. Το μέτρο του είναι ίσο με 0 και δεν έχει κατεύθυνση.

Άθροισμα δύο διανυσμάτων





Ιδιότητες Διανυσμάτων

- $\vec{w} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$ (Μεταθετική Ιδιότητα)
- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$ (Ουδέτερο στοιχείο)

Βαθμωτό Γινόμενο

Εάν $\lambda \in \mathbb{R}$ και $\vec{v}$ διάνυσμα, τότε ως $\lambda\vec{v}$ ορίζουμε διάνυσμα με μέτρο $|\lambda|$ φορές το μέτρο του $\vec{v}$ και κατεύθυνση:

- Ίδια με την κατεύθυνση του $\vec{v}$ αν $\lambda > 0$
- Αντίθετη από αυτή του $\vec{v}$ αν $\lambda < 0$

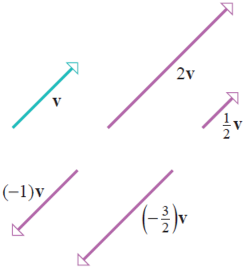
Σημείωση: Εάν $\lambda = 0$, τότε $\lambda\vec{v} = \vec{0}$

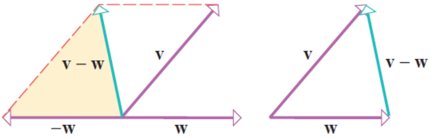
Ορισμός

Δύο διανύσματα $\overrightarrow{v}$ και $\overrightarrow{w}$ λέγονται παράλληλα (και είναι παράλληλα με την παραδοσιακή έννοια στους χώρους $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$), εάν και μόνον αν υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $\overrightarrow{w} = \lambda \overrightarrow{v}$.
Επιπλέον, το διάνυσμα $-\overrightarrow{v} = -1\overrightarrow{v}$ ονομάζεται το αντίθετο του $\overrightarrow{v}$.

Αφαίρεση δύο διαννσμάτων

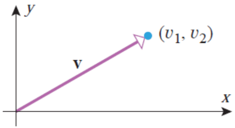
- $\overrightarrow{v} - \overrightarrow{w} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{w})$
- $(-\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$

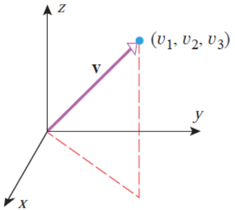




Διανύσματα σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων θεωρούμε ότι το αρχικό σημείο των διανυσμάτων είναι η αρχή των αξόνων. Έτσι τα διανύσματα ταυτίζονται με τις συντεταγμένες του τελικού τους σημείου και γράφουμε $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2)$ (Στο $\mathbb{R}^2$) ή $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ (Στο $\mathbb{R}^3$).



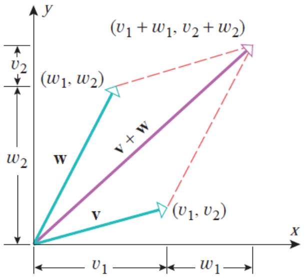


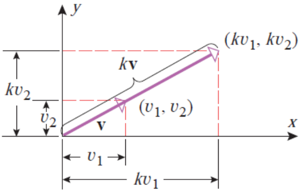
Σημείωση: Τα v_i καλούνται οι συνιστώσες/συντεταγμένες του διανύσματος. Δύο διανύσματα είναι ίσα αν και μόνον αν οι αντίστοιχες συνιστώσες τους είναι ίσες.

Πράξεις μεταξύ διανυσμάτων σε Καρτεσιανές Συντεταγμένες

Έστω $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$ και $\lambda \in \mathbb{R}$. Τότε:

- $\vec{v} + \vec{w} = (v_1 + w_1, v_2 + w_2, v_3 + w_3)$
- $\vec{v} - \vec{w} = (v_1 - w_1, v_2 - w_2, v_3 - w_3)$
- $\lambda\vec{v} = (\lambda v_1, \lambda v_2, \lambda v_3)$

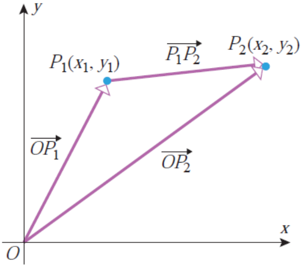




Διανύσματα με άκρα P_1, P_2

Εάν $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ και $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ τότε:

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$



Ιδιότητες Διανυσμάτων

Εάν $\vec{v}, \vec{w}, \vec{u}$ διανύσματα και $\kappa, \lambda \in \mathbb{R}$, τότε:

- $\vec{w} + \vec{v} = \vec{v} + \vec{w}$
- $\vec{v} + \vec{0} = \vec{0} + \vec{v} = \vec{v}$
- $(\vec{v} + \vec{w}) + \vec{u} = \vec{v} + (\vec{w} + \vec{u})$
- $\vec{v} + (-\vec{v}) = \vec{0}$
- $\kappa(\lambda\vec{v}) = (\kappa\lambda)\vec{v}$
- $\kappa(\vec{v} + \vec{w}) = \kappa\vec{v} + \kappa\vec{w}$
- $(\kappa + \lambda)\vec{v} = \kappa\vec{v} + \lambda\vec{v}$
- $1\vec{v} = \vec{v}$

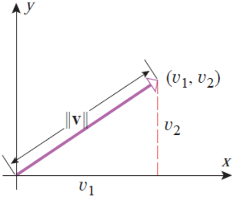
Νόρμα/Μέτρο διανύσματος στο $\mathbb{R}^3$

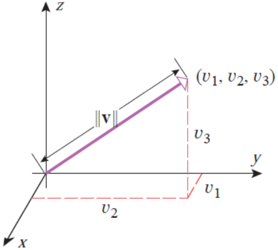
Εάν $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, τότε η νόρμα του είναι ίση με:

$$\boxed{\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}}$$

Επιπλέον, εάν $\lambda \in \mathbb{R}$, τότε

$$\boxed{\|\lambda\overrightarrow{v}\| = |\lambda|\|\overrightarrow{v}\|}$$

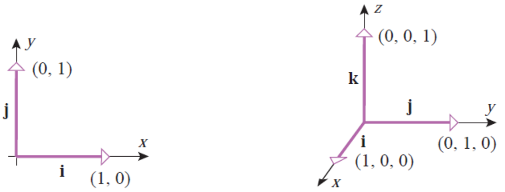




Ορισμός

Ένα διάνυσμα λέγεται **μοναδιαίο** εάν η νόρμα του είναι ίση με 1. Διακρίνουμε τα εξής μοναδιαία διανύσματα.

$$i = (1,0,0) \; j = (0,1,0) \; k = (0,0,1)$$



Ένα διάνυσμα $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ μπορεί να γραφτεί και ως

$$\overrightarrow{v} = v_1 i + v_2 j + v_3 k.$$

Ορισμός

Κανονικοποίηση ενός διανύσματος $\vec{v}$ ονομάζεται η διαδικασία εύρεσης μοναδιαίου διανύσματος στην κατεύθυνση του $\vec{v}$. Αυτό επιτυγχάνεται με την διαίρεση του διανύσματος με το μέτρο του.

$$\text{Κανονικοποίηση του } \vec{v} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

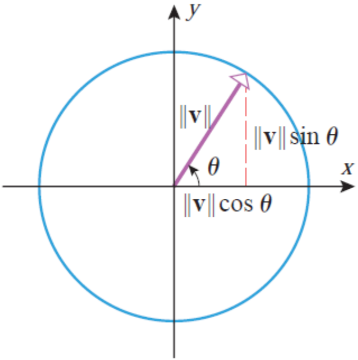
Παράδειγμα

Να κανονικοποιηθεί το διάνυσμα $\overrightarrow{v} = 2i + 2j - k$.

Προσδιορισμός με μέτρο και γωνία στον $\mathbb{R}^2$

Έστω διάνυσμα $\vec{v}$ στο $\mathbb{R}^2$ και $\theta \in [0, 2\pi)$ η αριστερόστροφη γωνία που ξεκινάει από τον θετικό ημιάξονα του x και σταματάει στο διάνυσμα $\vec{v}$. Τότε

$$\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta)$$



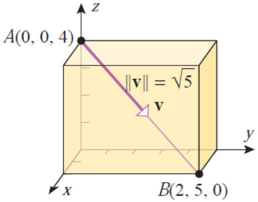
Παράδειγμα

Να βρεθεί η γωνία θ του διανύσματος $\vec{v} = -\sqrt{3}i + j$.

Εάν γνωρίζουμε ότι ένα διάνυσμα $\overrightarrow{v}$ έχει μέτρο λ και την ίδια κατεύθυνση με ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\overrightarrow{w}$, τότε $\overrightarrow{v} = \lambda \overrightarrow{w}$.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί διάνυσμα $\vec{v}$ με νόρμα ίση με $\sqrt{5}$ και στην κατεύθυνση του πιο κάτω σχήματος.



Εσωτερικό Γινόμενο και Προβολές

Ορισμός

Εάν $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$ και $\overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ διανύσματα, τότε το εσωτερικό τους γινόμενο ορίζεται ως εξής:

$$\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{w} = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3$$

$(1, -3, 4) \cdot (1, 5, 2) =$

Ιδιότητες Εσωτερικού Γινομένου

- $\vec{v} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{v}$
- $\vec{v} \cdot (\vec{u} + \vec{w}) = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{v} \cdot \vec{w}$
- $\lambda(\vec{v} \cdot \vec{u}) = (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot (\lambda \vec{u}), \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
- $\vec{v} \cdot \vec{0} = 0$

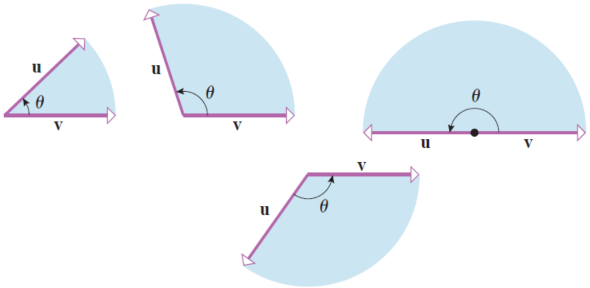
Η απόδειξη των πιο πάνω ιδιοτήτων είναι προφανής.

<u>Παρατήρηση:</u> $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$

Γωνία μεταξύ διανυσμάτων

Ορισμός

Έστω ότι τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{u}$ έχουν τοποθετηθεί ούτως ώστε να έχουν κοινό αρχικό σημείο. Ως γωνία μεταξύ των δύο διανυσμάτων ορίζουμε την μικρότερη από τις δύο πιθανές γωνίες, ούτως ώστε $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. Εάν τα διανύσματα μας βρίσκονται στο $\mathbb{R}^2$, τότε αναφερόμαστε στην μικρότερη αριστερόστροφη γωνία.



Γωνία μεταξύ διανυσμάτων

Θεώρημα

Εάν $\overrightarrow{v}$ και $\overrightarrow{u}$ μη μηδενικά διανύσματα τότε η γωνία μεταξύ τους δίνεται από τον τύπο

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{v}\|\|\overrightarrow{u}\|}$$

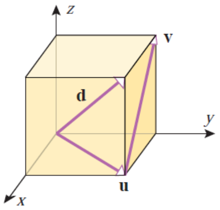
Η απόδειξη δίνεται από τον νόμο των συνημιτόνων.

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων

- $\vec{d}$ και $\vec{u}$
- $\vec{v}$ και $\vec{u}$

στον πιο κάτω κύβο με πλευρά a.



Παράδειγμα

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\overrightarrow{u} = i - 2j + 2k$ και $\overrightarrow{v} = -3i + 6j - 6k$.

Γωνία μεταξύ διανυσμάτων

- Εάν θ οξεία $\Rightarrow \cos\theta > 0$
- Εάν θ αμβλεία $\Rightarrow \cos\theta < 0$
- Εάν $\theta = 90 \Rightarrow \cos\theta = 0$

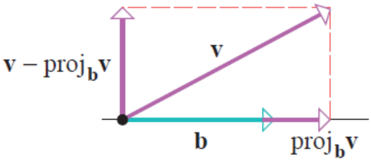
Επίσης, ισχύει ότι

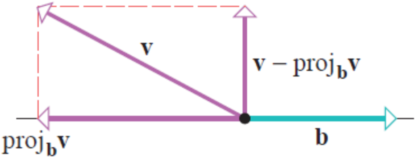
$$\boxed{\overrightarrow{v} \cdot \overrightarrow{u} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{v} \perp \overrightarrow{u}}$$

Προβολές

Η προβολή ή ορθογώνια προβολή ενός διανύσματος $\overrightarrow{v}$ επί ενός διανύσματος $\overrightarrow{b}$ είναι ένα διάνυσμα που φαίνεται γεωμετρικά στο πιο κάτω σχήμα και δίνεται από τον τύπο

$$\boxed{proj_{\overrightarrow{b}}\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{b}}{\|\overrightarrow{b}\|^2}\overrightarrow{b}}$$





Απόδειξη

Παράδειγμα

Να βρεθεί η προβολή του $\overrightarrow{v} = i + j + k$ στο $\overrightarrow{b} = 2i + 2j$.

Σύνδεση μεταξύ προβολής και εσωτερικού γινομένου (Απόδειξη)

$$\boxed{\overrightarrow{b} \cdot proj_{\overrightarrow{b}} \overrightarrow{v} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{v}}$$

Εξωτερικό Γινόμενο

Ορίζουσες 2x2 και 3x3 πινάκων

Εάν $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}$ τότε

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

Εάν $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}$ τότε

$$\det A = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} =$$

Πρόταση

- *Εάν μία γραμμή ή μία στήλη ενός πίνακα αποτελείται από μηδενικά, τότε η ορίζουσα του πίνακα είναι ίση με* 0.
- *Έστω πίνακας* A *που προκύπτει από την ανταλλαγή μεταξύ δύο γραμμών/στηλών πίνακα* B*. Τότε* $\det A = (-1)\det B$.

Εξωτερικό Γινόμενο (Μόνο στον $\mathbb{R}^3$)

Εάν $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3)$, τότε το **Εξωτερικό Γινόμενο** των $\overrightarrow{u}$ και $\overrightarrow{v}$ είναι ίσο με

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} k$$

ή

$$\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα

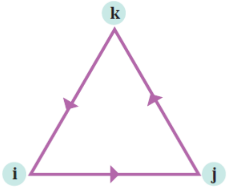
Να υπολογιστεί το εξωτερικό γινόμενο των $\overrightarrow{u} = (1, 2, -2)$ και $\overrightarrow{v} = (3, 0, 1)$.

Ιδιότητες Εξωτερικού Γινομένου

- $\vec{v} \times \vec{u} = -(\vec{u} \times \vec{v})$
- $\vec{u} \times (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \times \vec{v} + \vec{u} \times \vec{w}$
- $(\vec{u} + \vec{v}) \times \vec{w} = \vec{u} \times \vec{w} + \vec{v} \times \vec{w}$
- $\lambda(\vec{u} \times \vec{v}) = (\lambda\vec{u}) \times \vec{v} = \vec{u} \times (\lambda\vec{v}), \lambda \in \mathbb{R}$
- $\vec{0} \times \vec{u} = \vec{u} \times \vec{0} = \vec{0}$
- $\vec{u} \times \vec{u} = \vec{0}$

Επιπλέον, ισχύει ότι

$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$
$j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j$



Η προσεταιριστική ιδιότητα δεν ισχύει. Δηλαδή,

$$\boxed{(\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \times \overrightarrow{w} \neq \overrightarrow{u} \times (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})}$$

Παράδειγμα

$$(i \times j) \times j = k \times j = -i \neq \overrightarrow{0} = i \times \overrightarrow{0} = i \times (j \times j)$$

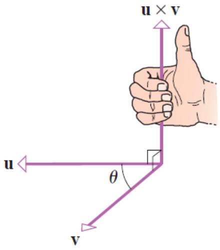
Πρώτη Γεωμετρική Ιδιότητα

Θεώρημα

- $\vec{u} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$
- $\vec{v} \cdot (\vec{u} \times \vec{v}) = 0$

Δηλαδή, το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι κάθετο προς αυτά.

Η κατεύθυνση του εξωτερικού γινομένου δίνεται από τον κανόνα του δεξιού χεριού.



Παράδειγμα

Να βρεθεί διάνυσμα κάθετο στα $\overrightarrow{v} = (2, -1, 3)$ και $\overrightarrow{u} = (-1, 2, -1)$.

Θεώρημα

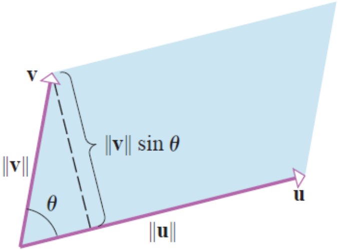
Έστω $\overrightarrow{v}$ *και* $\overrightarrow{u}$ *διανύσματα στο* $\mathbb{R}^3$ *και* θ *η μεταξύ τους γωνία. Τότε*

- $\|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\| = \|\overrightarrow{u}\|\|\overrightarrow{v}\| \sin\theta$
- *(Δεύτερη Γεωμετρική Ιδιότητα) Εάν* $\overrightarrow{u}$ *και* $\overrightarrow{v}$ *έχουν κοινό αρχικό σημείο, τότε το εμβαδον του παραλληλογράμμου που έχει ως πλευρές τα δύο διανύσματα είναι ίσο με*

$$A = \|\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}\|.$$

- $\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ *αν και μόνον αν ένα εκ των δύο είναι το μηδενικό διάνυσμα ή είναι παράλληλα.*

Απόδειξη β′

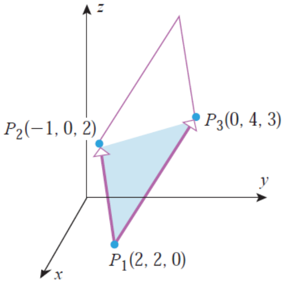


Απόδειξη γ′

Παράδειγμα

Να βρεθεί το εμβαδόν τριγώνου με κορυφές

$$P_1(2,2,0),\, P_2(-1,0,2),\, P_3(0,4,3).$$



Τριπλό Βαθμωτό Γινόμενο

Εάν $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2, u_3), \overrightarrow{v} = (v_1, v_2, v_3), \overrightarrow{w} = (w_1, w_2, w_3)$ διανύσματα στο $\mathbb{R}^3$, τότε το $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w})$ καλείται **Τριπλό Βαθμωτό Γινόμενο**.

Αποδυκνείεται ότι,

$$\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$$

Παράδειγμα

Να υπολογιστεί το $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ εάν

$$\vec{u} = 3i - 2j - 5k, \vec{v} = i + 4j - 4k, \vec{w} = 3j + 2k$$

Τρίτη Γεωμετρική Ιδιότητα

Τρία μη-μηδενικά διανύσματα στον χώρο (με την κατάλληλη μετατόπιση) είτε είναι συνεπίπεδα (ανήκουν στο ίδιο επίπεδο) είτε ορίζουν ένα παραλληλεπίπεδο.

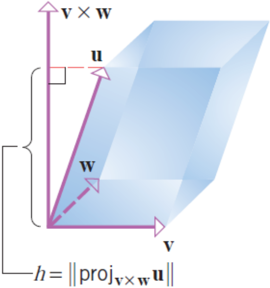
Θεώρημα

- *Ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τρία μη-μηδενικά και μη-συνεπίπεδα διανύσματα* $\vec{u}, \vec{v}$ *και* $\vec{w}$ *στο χώρο είναι ίσος με*

$$V = \left| \vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) \right|$$

- $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w}) = 0$ *αν και μόνον αν ένα από τα τρία διανύσματα είναι μηδενικά ή είναι συνεπίπεδα.*

Απόδειξη



$\mathbf{v} \times \mathbf{w}$
$\mathbf{u}$
$\mathbf{w}$
$\mathbf{v}$
$h = \|\text{proj}_{\mathbf{v}\times\mathbf{w}}\mathbf{u}\|$

Αλγεβρικές Ιδιότητες Τριπλού Βαθμωτού Γινομένου

Εάν $\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}$ και $\overrightarrow{w}$ τρία διανύσματα στο χώρο, τότε

- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = \overrightarrow{w} \cdot (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} \cdot (\overrightarrow{w} \times \overrightarrow{u})$ (Διπλή Ανταλλαγή Γραμμών Ορίζουσας)
- $\overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{v} \times \overrightarrow{w}) = (\overrightarrow{u} \times \overrightarrow{v}) \cdot \overrightarrow{w}$

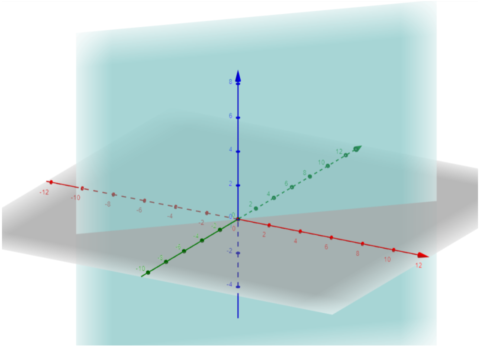
Σημείωση: Η δεύτερη ισότητα προκύπτει από την πρώτη και τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου.

Παράδειγμα

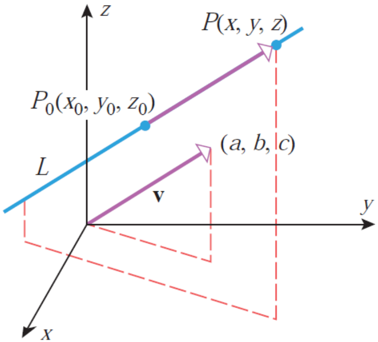
Να αποδειχθεί ότι τα διανύσματα
$\overrightarrow{u} = (1, -2, 1), \overrightarrow{v} = (3, 0, -2), \overrightarrow{w} = (5, -4, 0)$ είναι συνεπίπεδα.

Παραμετρικές Εξισώσεις Ευθειών

Οι εξισώσεις ευθειών στο καρτεσιάνο σύστημα δύο συντεταγμένων προφανώς δεν περιγράφουν ευθείες στον χώρο, αφού περιέχουν μόνο δύο μεταβλητες και άρα περιγράφουν κυλινδρικές επιφάνειες. Για παράδειγμα η $y - x = 0$ περιγράφει ένα επίπεδο του οποίου η τομή με το $xy-$ επίπεδο είναι η ευθεία $y = x$.



Μία ευθεία μπορεί να προσδιοριστεί μοναδικά στο $\mathbb{R}^3$ αλλά και στο $\mathbb{R}^2$ με την βοήθεια ενός σημείου της ευθείας και ενός διανύσματος παράλληλου προς αυτήν.
Έστω λοιπόν ότι η εύθεία μας περνά από σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$, είναι παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{v} = (a, b, c)$ και $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο της ευθείας. Τότε το διάνυσμα $\overrightarrow{PP_0} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ είναι παράλληλο προς το $\vec{v}$. Συνεπώς, $\boldsymbol{\overrightarrow{PP_0} = t\vec{v}, t} \in \mathbb{R}$



Παραμετρικές Εξισώσεις Ευθείας

Θεώρημα

Κάθε ευθεία L στο $\mathbb{R}^3$ που περνά από σημείο $P(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{v} = (a, b, c)$ περιγράφεται από τις πιο κάτω παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x_0 + ta, y = y_0 + tb, z = z_0 + tc, t \in \mathbb{R}.$$

Αντίστοιχα, κάθε ευθεία L στο $\mathbb{R}^2$ που περνά από σημείο $P(x_0, y_0)$ και είναι παράλληλη προς διάνυσμα $\vec{v} = (a, b)$ περιγράφεται από τις παραμετρικές εξισώσεις

$$x = x_0 + ta, y = y_0 + tb, t \in \mathbb{R}.$$

$\overrightarrow{PP_0} = t\vec{v} \Leftrightarrow \cdots$

Παράδειγμα

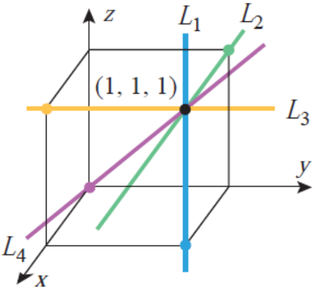
Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που:

- Διέρχεται από το σημείο $(4, 2)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(-1, 5)$.
- Διέρχεται από το σημείο $(1, 2, -3)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $4i + 5j - 7k$.
- Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(1, 1, 1)$.

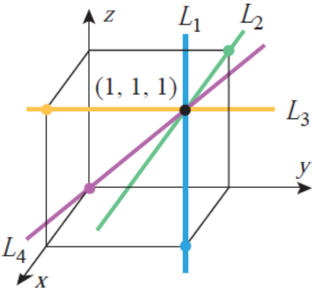
Συνέχεια

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις των ευθειών L_1, L_2, L_3 και L_4.



Συνέχεια



Παράδειγμα

Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $P_1(2,4,-1)$ και $P_2(5,0,7)$. Επιπλέον να βρεθεί το σημείο τομής της με το $xy-$ επίπεδο.

Συνέχεια

Παράδειγμα

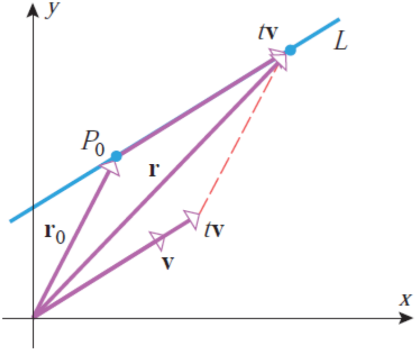
Να εξεταστεί εάν οι ευθείες

$$L_1 : x = 1 + 4t, y = 5 - 4t, z = -1 + 5t$$
$$L_2 : x = 2 + 8t, y = 4 - 3t, z = 5 + t$$

- Είναι παράλληλες
- Τέμνονται

Συνέχεια

Διανυσματική Εξίσωση Ευθείας



$$\boxed{\vec{r} = \vec{r_0} + t\,\vec{v}}$$

<u>Απόδειξη:</u>

Διανυσματική Εξίσωση Ευθείας

Παράδειγμα

Να βρεθεί διανυσματική εξίσωση ευθείας που διέρχεται από το σημείο $(-1, 0, 2)$ και είναι παράλληλη προς το διάνυσμα $(1, 5, -4)$.

Συμμετρικές Εξισώσεις Ευθείας

Εάν λύσουμε τις παραμετρικές εξισώσεις

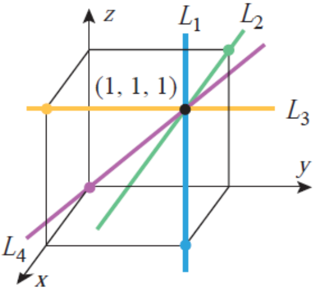
$$x = x_0 + at, y = y_0 + bt, z = z_0 + ct, t \in \mathbb{R}$$

ως προς t τότε παίρνουμε

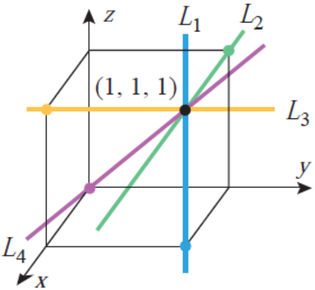
$$\boxed{\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}}$$

Παράδειγμα

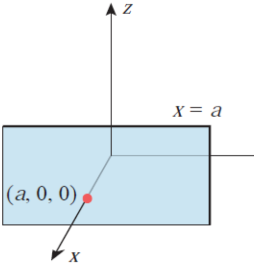
Να βρεθούν οι διανυσματικές εξισώσεις των ευθειών L_1, L_2, L_3 και L_4.



Συνέχεια

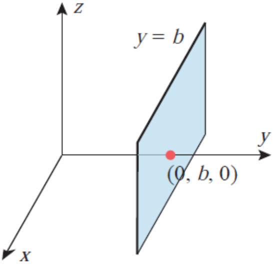


Εξισώσεις Επιπέδων



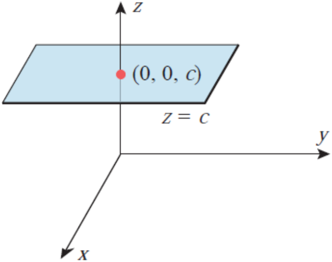
Επίπεδο παράλληλο στο yz επίπεδο που τέμνει τον άξονα των x στο $(a, 0, 0)$

$$\boxed{x = a}$$



Επίπεδο παράλληλο στο xz επίπεδο που τέμνει τον άξονα των y στο $(0, b, 0)$

$$\boxed{y = b}$$



Επίπεδο παράλληλο στο xy επίπεδο που τέμνει τον άξονα των z στο $(0, 0, c)$

$$\boxed{z = c}$$

Γενική Εξίσωση Επιπέδου

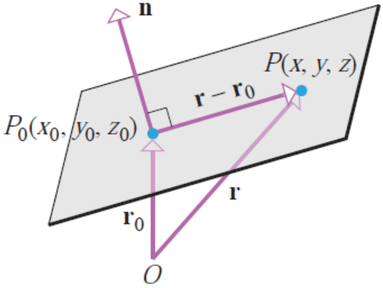
Για να προσδιορίσουμε μια ευθεία χρειαζόμαστε ένα σημείο της ευθείας και ένα παράλληλο διάνυσμα.

Για να προσδιορίσουμε ένα επίπεδο χρειαζόμαστε ένα σημείο το επιπέδου και ένα κάθετο προς το επίπεδο διάνυσμα.

Γενική Εξίσωση Επιπέδου - Διανυσματική Εξίσωση

Έστω επίπεδο που διέρχεται από σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και διάνυσμα $\vec{n}$ κάθετο προς το επίπεδο. Εάν $P(x, y, z)$ τυχαίο σημείο του επιπέδου, τότε $\vec{n} \cdot \overrightarrow{PP_0} = 0$. Άρα,

$$\boxed{\vec{n} \cdot (\vec{r} - \vec{r_0}) = 0}$$



Ισοδύναμα, αν $\vec{n} = (a, b, c)$

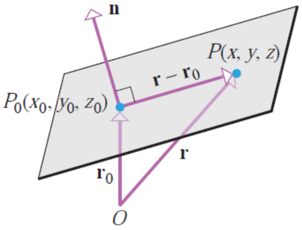
$$(a, b, c) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

ή

$$\boxed{a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0}$$

ή

$$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$$



Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(3, -1, 7)$ και είναι κάθετη προς το διάνυσμα $(4, 2, -5)$.

Παράδειγμα

Να εξεταστεί εάν τα επίπεδα με εξισώσεις $3x - 4y + 5z = 0$ και $-6x + 8y - 10z - 4 = 0$ είναι παράλληλα.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(1, 2, -1)$, $P_2(2, 3, 1)$ και $P_3(3, -1, 2)$.

Συνέχεια

Παράδειγμα

Να εξεταστεί εάν η ευθεία

$$L : x = 3 + 8t, y = 4 + 5t, z = -3 - t, t \in \mathbb{R}$$

είναι παράλληλη προς το επίπεδο $x - 3y + 5z = 12$. Στη συνεχεία να βρείτε το σημείο τομής τους, εάν αυτό υπάρχει.

Συνέχεια

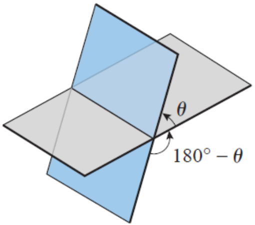
Παράδειγμα

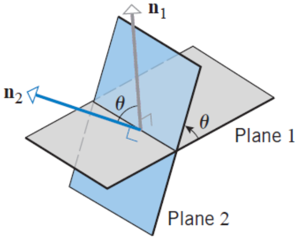
Να βρεθεί η εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(0, 1, 0)$ και είναι κάθετη προς το διάνυσμα $j + k$.

Γωνία Τομής Δύο Τεμνόμενων Επιπέδων

Η (μικρότερη) γωνία τομής ($0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$) δύο τεμνόμενων επιπέδων με κάθετα διανύσματα $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ αντίστοιχα δίνεται από τη γωνία μεταξυ των διανυσμάτων $\vec{n}_1$ και $\vec{n}_2$ ή $\vec{n}_1$ και $-\vec{n}_2$. Άρα,

$$\boxed{\cos\theta = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{\|\vec{n}_1\|\|\vec{n}_2\|}}$$





Παράδειγμα

Να βρεθεί η γωνία τομής των επιπέδων $2x - 4y + 4z = 6$ και $6x + 2y - 3z = 4$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η διανυσματική εξίσωση της ευθείας που δημιουργείται από την τομή των επιπέδων $2x - 4y + 4z = 6$ και $6x + 2y - 3z = 4$.

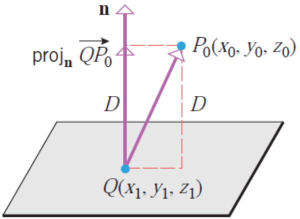
Συνέχεια

Απόσταση Σημείου από Επίπεδο

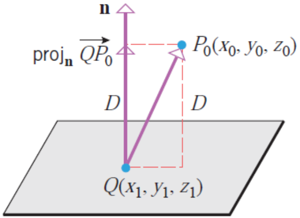
Θεώρημα

Η απόσταση σημείου $P(x_0, y_0, z_0)$ *από επίπεδο με εξίσωση* $ax + by + cz + d = 0$ *είναι ίση με*

$$d = \frac{|ax_0 + by_0 + cz_0 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$



Απόδειξη

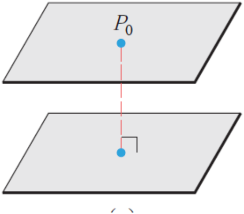


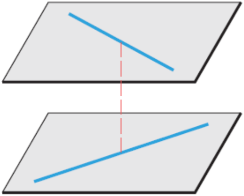
n
$P_0(x_0, y_0, z_0)$
$\text{proj}_{\mathbf{n}}\, \overrightarrow{QP_0}$
D
D
$Q(x_1, y_1, z_1)$

Συνέχεια

Απόσταση Σημείου από Επίπεδο

Σημείωση: Με βάση αυτο το θεώρημα μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση μεταξυ παράλληλων επιπέδων και ασύμβατων ευθειών.



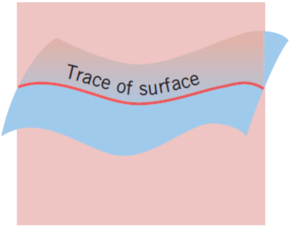


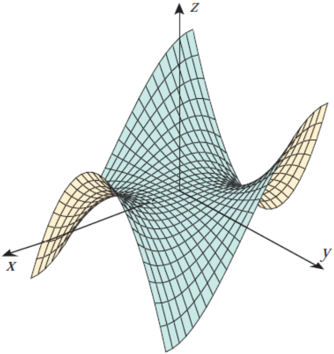
Παράδειγμα

Να υπολογιστεί η απόσταση του σημείου $(1, -4, -3)$ από το επίπεδο $2x - 3y + 6z = -1$.

Τετραγωνικές Επιφάνειες

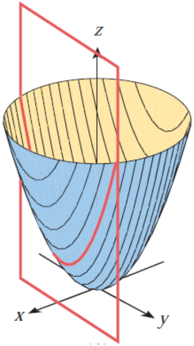
Μπορούμε να χτίσουμε/κατανοήσουμε το τη γραφική παράσταση μίας συνάρτησης/σχέσης στο $\mathbb{R}^2$ βρίσκοντας διάφορα σημεία της γραφικής παράστασης στο επίπεδο. Αντίστοιχα, στο $\mathbb{R}^3$ για να κατανοήσουμε την γραφική παράσταση μίας επιφάνειας χρησιμοποιούμε καμπύλες που προκύπτουν από την τομή της επιφάνειας με διάφορα επίπεδα. Τέτοιες καμπύλες καλούνται **ίχνη** του γραφήματος. Συνήθως επιλέγουμε (βασικά) επίπεδα, παράλληλα προς τα xy, yz και xz επίπεδα (Δηλ. της μορφής $x = a, y = b, z = c$)



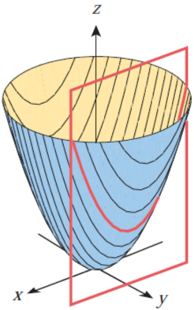


Παράδειγμα

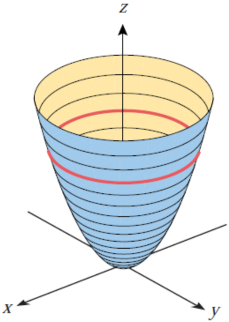
Να περιγραφεί το ίχνος της $z = x^2 + y^2$ ως προς επίπεδα της μορφης $x = k, y = k$ και $z = k$.



Συνέχεια



Συνέχεια



Τετραγωνικές Επιφάνειες

Οι **Τετραγωνικές Επιφάνειες** είναι ουσιαστικά το ανάλογο των κωνικών τομών στο χώρο. Πρόκειται δηλαδή για δευτεροβάθμιες εξισώσεις με μεταβλητές x, y και z.

Πιο κάτω θα δούμε μερικούς συνήθεις τύπους τετραγωνικών επιφανειών.

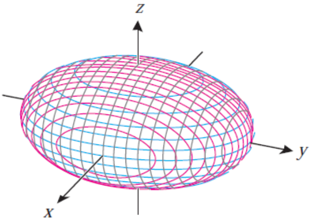
Η γενική τους εξίσωση είναι

$$\boxed{Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Eyz + Fxz + Gx + Hy + Iz + J = 0}$$

Ελλειψοειδές

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

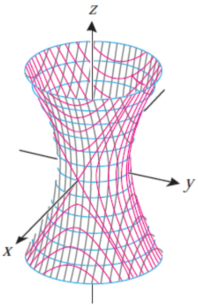
$$a, b, c > 0$$



Μονόχωνο Υπερβολοειδές

$$\boxed{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1}$$

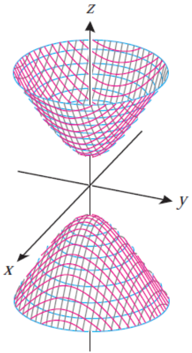
$$a, b, c > 0$$



Δίχωνο Υπερβολοειδές

$$\boxed{\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1}$$

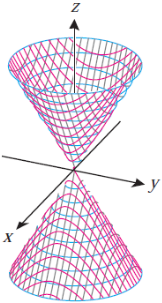
$$a, b, c > 0$$



Ελλειπτικός Κώνος

$$\boxed{z^2 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

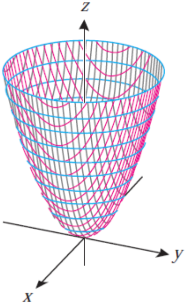
$$a, b > 0$$



Ελλειπτικό Παραβολοειδές

$$\boxed{z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}$$

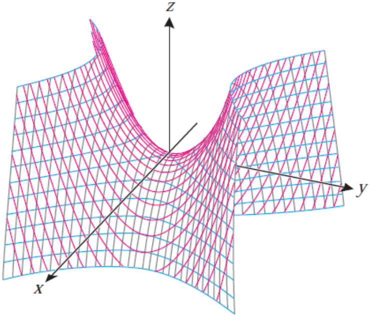
$$a, b > 0$$



Υπερβολικό Παραβολοειδές

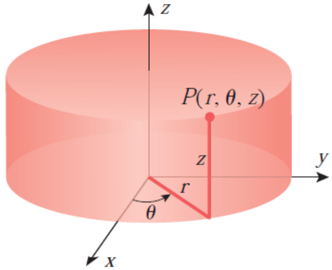
$$\boxed{z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$a, b > 0$$



Κυλινδρικές και Σφαιρικές Συντεταγμένες

Κυλινδρικές Συντεταγμένες

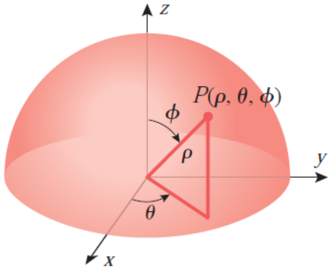


$$\boxed{r \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \qquad z \in \mathbb{R}}$$

$$\boxed{x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z}$$

$$\boxed{r = \sqrt{x^2 + y^2}, \qquad \tan\theta = y/x, \qquad z = z}$$

Σφαιρικές Συντεταγμένες



$$\boxed{\rho \geqslant 0, \qquad 0 \leqslant \theta < 2\pi, \qquad 0 \leqslant \phi \leqslant \pi}$$

$$\boxed{x = \rho \sin\phi \cos\theta, \qquad y = \rho \sin\phi \sin\theta, \qquad z = \rho \cos\phi}$$

$$\boxed{\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \qquad \tan\theta = y/x, \qquad \cos\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}}$$

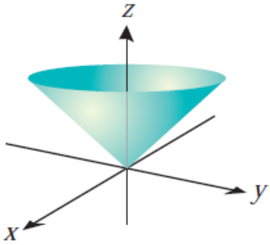
Σημείωση: Επιφάνειες εκ περιστροφής γύρω από τον άξονα των z συνήθως εκφράζονται καλύτερα με κυλινδρικές συντεταγμένες, ενώ επιφάνειες συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων εκφράζονται συνήθως καλύτερα μέσα από τις σφαιρικές συντεταγμένες.

Παράδειγμα

Έστω ο άνω κυκλικός κώνος με εξίσωση $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Να βρεθούν οι αντίστοιχες εξισώσεις σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

Συνέχεια

Κώνος

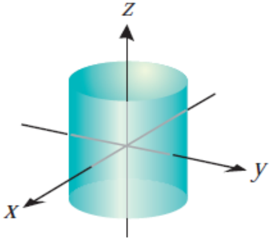


Καρτεσιανή: $z = \sqrt{x^2 + y^2}$

Κυλινδρική: $z = r$

Σφαιρική: $\phi = \pi/4$

Κύλινδρος

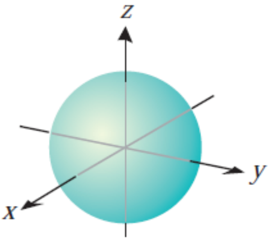


Καρτεσιανή: $x^2 + y^2 = 1$

Κυλινδρική: $r = 1$

Σφαιρική: $\rho = \csc\phi$

Σφαίρα

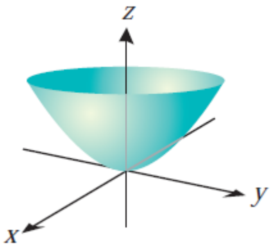


Καρτεσιανή: $x^2 + y^2 + z^2 = 1$

Κυλινδρική: $z^2 = 1 - r^2$

Σφαιρική: $\rho = 1$

Παραβολοειδές

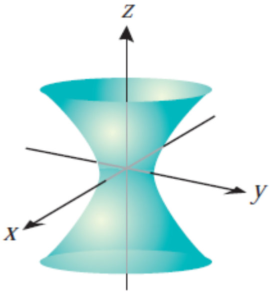


Καρτεσιανή: $z = x^2 + y^2$

Κυλινδρική: $z = r^2$

Σφαιρική: $\rho = \cos\phi \csc^2\phi$

Υπερβολοειδές



Καρτεσιανή: $x^2 + y^2 - z^2 = 1$

Κυλινδρική: $z^2 = r^2 - 1$

Σφαιρική: $\rho^2 = -\sec 2\phi$