Καθηγητής: Δημόπουλος Σταμάτης
email: dimopoulos.stamatis@ucy.ac.cy
Ώρες γραφείου (προσωρινά): Δ-Π ώρες: 2-3
https://st-dimopoulos.gifthub.io/mas002

Κεφάλαιο 1: Εφαρμογές ολοκληρωμάτων

Εμβαδό κάτω από γραφική παράσταση συνάρτησης: $y=f(x)$

1) Αν $f(x)\geq 0$, για κάθε $x\in[a,b]$, $E=\int_a^b f(x)\,dx$

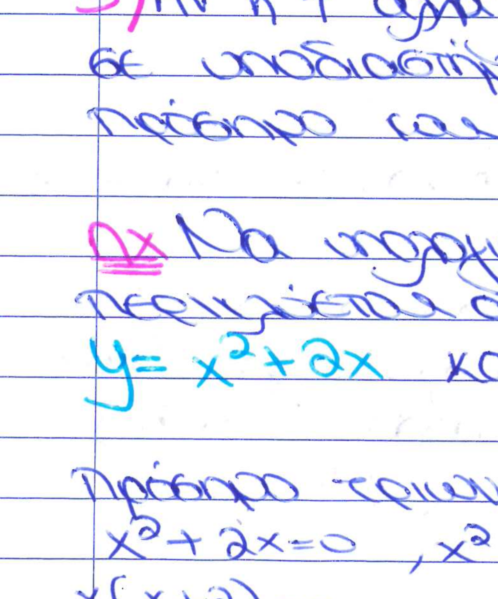
2) Αν $f(x)\leq 0$, για κάθε $x\in[a,b]$, $E=-\int_a^b f(x)\,dx$

3) Αν η f αλλάζει πρόσημο χωρίζουμε το $[a,b]$ σε υποδιαστήματα που η f διατηρεί σταθερό πρόσημο και υπολογίζουμε το αντίστοιχο εμβαδό.

Πχ Να υπολογιστεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από την γρ παράσταση της $y=x^2+2x$ και τον άξονα x στο διάστημα $[-2,2]$

Πρόσημο τριωνύμου:
$x^2+2x=0$, $x^2>0 \Rightarrow \cup$
$x(x+2)=0$
$\boxed{x=0}$ $\boxed{x=-2}$

x		-2		0	
x^2+2x	$+$	0	$-$	0	$+$



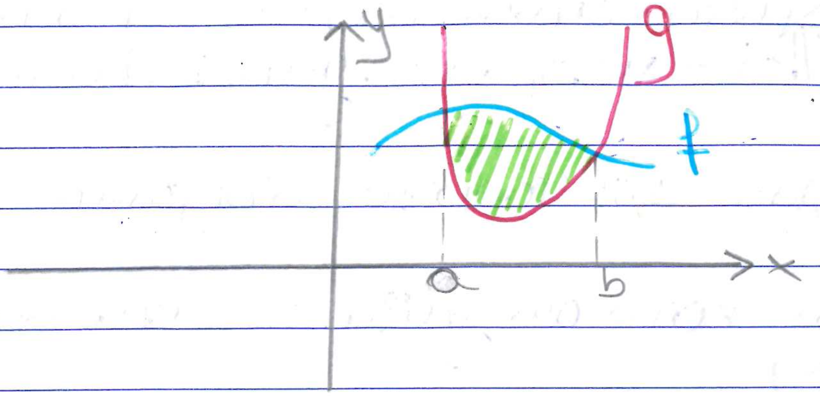
$[-2,0] \Rightarrow$ θα είναι κάτω από τον άξονα x.

$$E=-\int_{-2}^{0}(x^2+2x)\,dx+\int_{0}^{2}(x^2+2x)\,dx$$

$$=\ldots=8$$

Εμβαδό χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Πχ



Αν f και g συνεχείς στο [a,b] και
$f(a) \geq g(x) \ \forall x \in [a,b]$
Τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις παραστάσεις των f, g είναι:

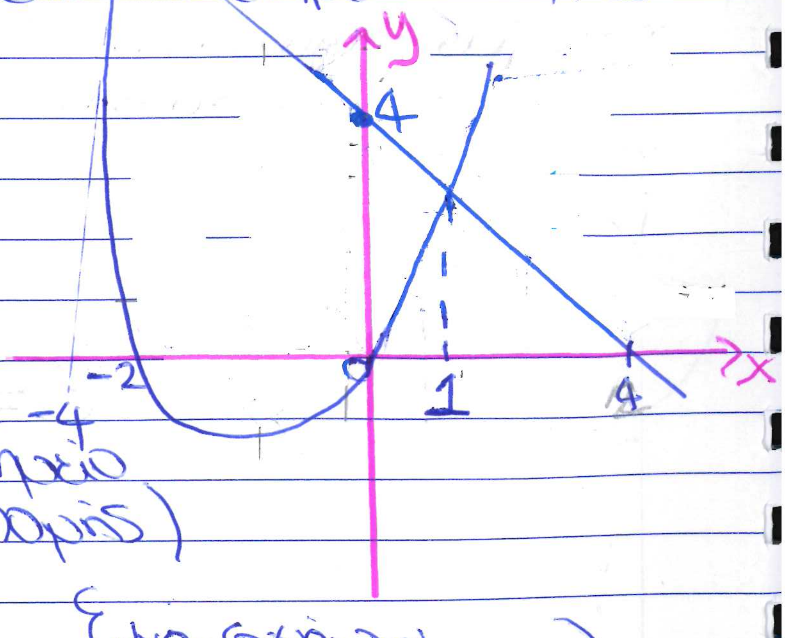
$$E=\int_a^b f(x)-g(x)\,dx$$

note: Ίδιος τύπος αν η f ή g ή και οι αρνητικές

Πχ Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y_1 = x^2+2x$ και $y_2=-x+4$ στο διάστημα [-4,2]

$x^2+2x=-x+4$
$x^2+2x+x-4=0$
$x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$

σημεία τομής $\boxed{x=-4}$ $\boxed{x=1}$



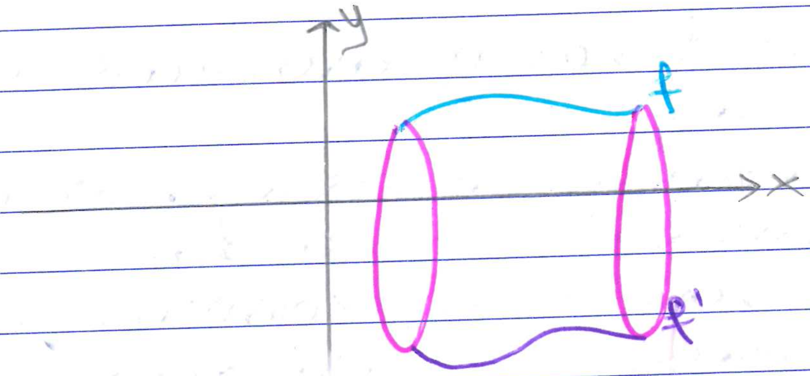
(Δες ξανά σχήμα geogebra)
(με δυσκολία)

$$E = \int_{-4}^{1} (-x+4) - (x^2+2x)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2+2x-(-x+4)\ \ldots$$

$$= \int_{-4}^{1} (-x^2-3x+4)\, dx + \int_{1}^{2} (x^2+3x+4)\, dx$$

$$= \frac{71}{3}\ \tau\mu$$

Όγκος στερεών εκ περιστροφής:



Θεωρούμε διάγραμμα συνάρτησης $y=f(x)$ το οποίο περιστρέφεται γύρω από τον άξονα x. Ο όγκος του στερεού που παράγεται είναι ίσος με:

$$V = \pi \int_{a}^{b} (f(x))^2\, dx$$

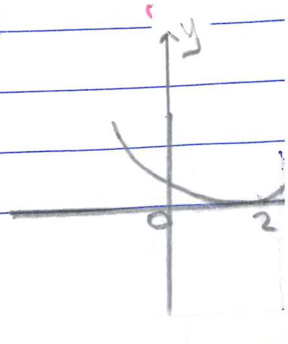
Πχ Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από τη περιστροφή γύρω από τον άξονα x, του χωρίου που περικλείεται

[illegible]^2 μετατόπιση 2 δεξιά

1) από την $y=(x-2)^2$, $y=0$, $x=0$

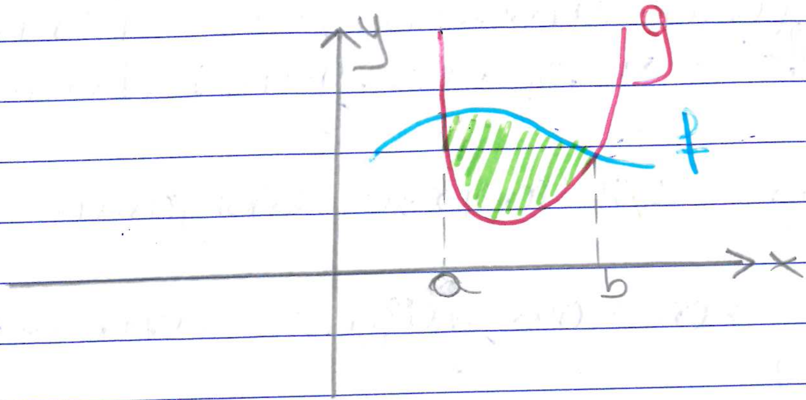
2) από την $y=1+x^3$, $x=1$, $x=2$

1) $V=\pi \int_{0}^{2} \left((x-2)^2\right)^2 dx = \ldots = \frac{32}{5}\pi\ \kappa\mu$



Εμβαδό χωρίου μεταξύ γραφικών παραστάσεων δύο συναρτήσεων

Πχ



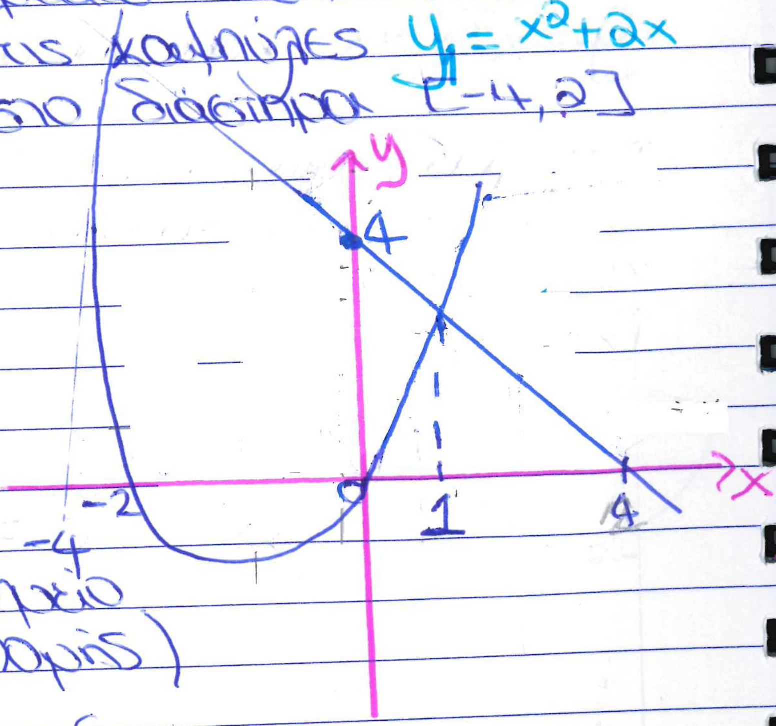
• Αν f και g συνεχείς στο $[a,b]$ και $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$
Τότε το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις παραστάσεις των f, g είναι:

$$E = \int_a^b f(x) - g(x)\, dx$$

note: Ίδιος τύπος αν η f ή g ή και οι αρνητικές

Πχ Να βρεθεί το εμβαδό του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες $y_1 = x^2+2x$ και $y_2 = -x+4$ στο διάστημα $[-4,2]$

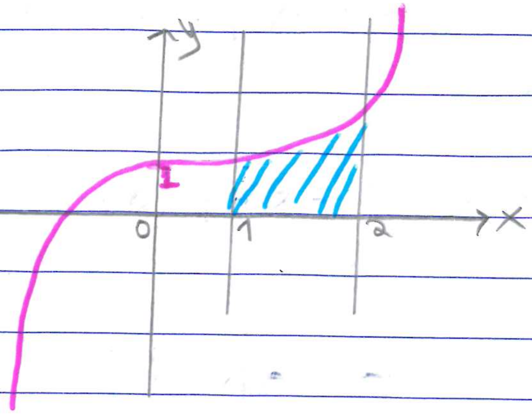
$x^2+2x = -x+4$
$x^2+2x+x-4=0$
$x^2+3x-4=0$
$(x+4)(x-1)=0$
σημεία τομής $\boxed{x=-4}$ / $\boxed{x=1}$



(σημείο τομής)

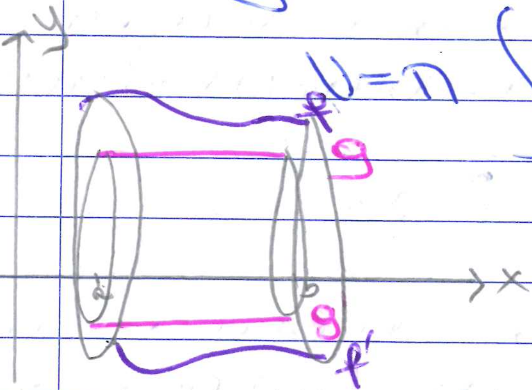
(Δες ξανά σχήμα (με διαστήματα) geogebra)

2) $y = 1+x^3$, $x=1$, $x=2$.



$$V = \pi \int_1^2 (1+x^3)\, dx = \dots = \frac{373\pi}{14} \text{ κμ}.$$

- Έστω f και g συναρτήσεις με $f(x) \geq g(x)$ $\forall x \in [a,b]$
Αν το χωρίο που περικλείεται από το διάγραμμα των f, g και τις ευθείες $x=a$ και $x=b$, περιστραφεί γύρω από τον άξονα του x θα δημιουργηθεί στερεό με όγκο:



$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 - (g(x))^2 \, dx$$

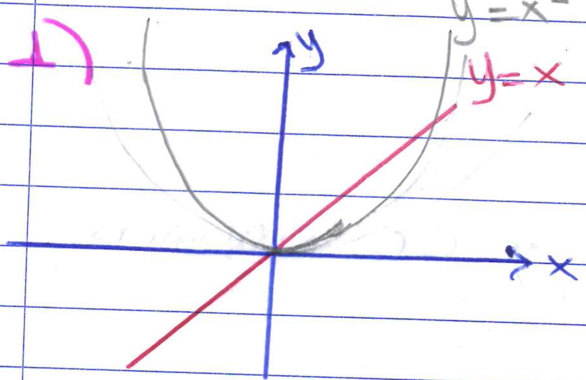
Άσκ Να βρεθεί ο όγκος του στερεού που παράγεται από την περιστροφή γύρω από τον άξονα x του χωρίου που περικλείεται από τις καμπύλες

1) $y=x^2$ και $y=x$

2) $y=x^2+1$ και $y=x+3$

3) $y=-x^2+3$ και $y=2|x|$

1)

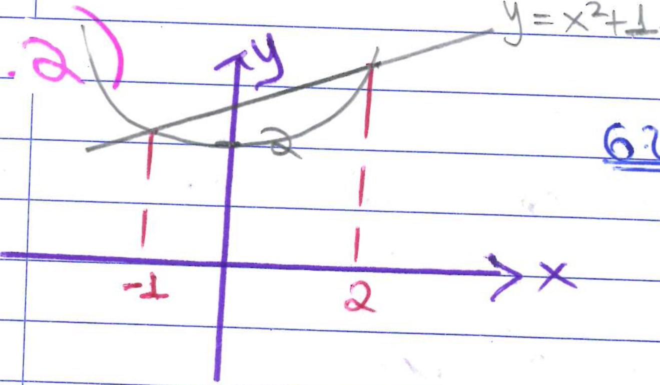


$$V=\pi\int_0^1 (x)^2-(x^2)^2\,dx$$

$$=\pi\int_0^1 (x^2-x^4)\,dx$$

$$=\frac{2}{15}\pi \text{ κ.μ.}$$

2)



Σ.τ.: $x^2+1=x+3$

$x^2-x-2=0$

$(x-2)(x+1)=0$

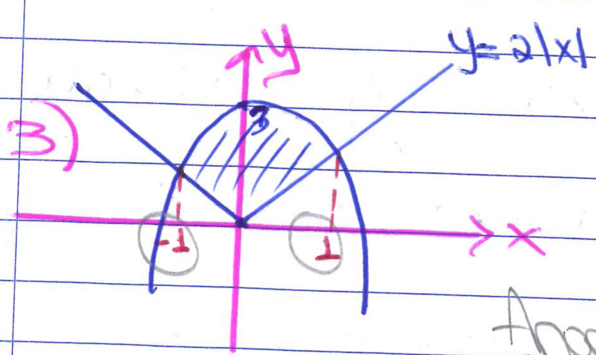
$\boxed{x=2}$ $\boxed{x=-1}$

(πάνω - κάτω)

$$V=\pi\int_{-1}^{2} (x+3)^2-(x^2+1)^2$$

$$=\frac{117}{5}\pi \text{ κ.μ.}$$

3)



$$V=\pi\int_{-1}^{1} (x^4-6x^2+9-4x^2)\,dx$$

Απορία: γιατί διάστημα $= \frac{176}{15}\pi$ κ.μ.

-1 και 1, και όχι $-\sqrt{3}$ και $\sqrt{3}$; $-x^2+3=0$

$\boxed{x=\sqrt{3}}$ $\boxed{x=-\sqrt{3}}$

$\Rightarrow$ **Σ.τ.**: $-x^2+3=2|x|$

για $x>0$: $-x^2-2x+3=0$

$x^2+2x-3=0$

$(x+3)(x-1)=0$

$\boxed{x=-3}$ $\boxed{x=1}$

για $x<0$: $\boxed{x=3}$ Απορ.

$\boxed{x=-1}$

Απ...

Όγκος στερεού εκ περιστροφής

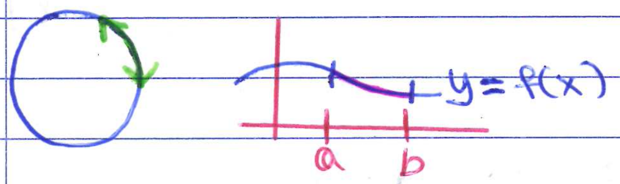
$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 \, dx$$

ή

$$V = \pi \int_a^b (f(x)^2 - g(x)^2) \, dx.$$

Μήκος τόξου:

Αν η f' είναι συνεχής σε ένα διάστημα $[a,b]$ τότε το μήκος τόξου L



της καμπύλης $y=f(x)$ από το $x=a$ ως το $x=b$ δίνεται από τον τύπο:

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx$$

Πχ Να βρείτε το μήκος τόξου της καμπύλης

i) $y = \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} - x^{\frac{1}{2}}$, από $x=1$ ως $x=4$

ii) $y = \left(4 - x^{\frac{2}{3}}\right)^{3/2}$, από $x=1$ ως $x=8$

Απάντηση:

i) $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{2} x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x^{-1/2}$

(παραγωγίζω)

$= \frac{1}{2} x^{1/2} - \frac{1}{2} x^{-1/2}$

$= \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} - x^{-1/2}\right) = \frac{1}{2}\left(x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$

$= \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)$

$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left[\frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{x^{\frac{1}{2}}}\right)\right]^2$

$= 1 + \frac{1}{4}\frac{(x-1)^2}{x}$

$= 1 + \frac{x^2-2x+1}{4x} = \frac{4x+x^2-2x+1}{4x}$

$= \frac{x^2+2x+1}{4x} = \frac{(x+1)^2}{4x}$

Άρα

$L = \int_1^4 \sqrt{\frac{(x+1)^2}{4x}}\, dx = \int_1^4 \frac{x+1}{2\sqrt{x}}\, dx$

$= \int_1^4 \frac{x}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\, dx = \int_1^4 \left(\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}x^{-1/2}\right) dx$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^{3/2}}{\frac{3}{2}}\right]_1^4 + \left[\frac{x^{1/2}}{\frac{1}{2}}\right]_1^4$

$= \frac{10}{3}$ //

ii) $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{1/2} \cdot \left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)'$

$$= \frac{3}{2}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{1/2} \cdot \left(-\frac{2}{3}x^{-1/3}\right)$$

$$= -\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}} x^{-1/3}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\left[-\left(4-x^{2/3}\right)^{1/2} \cdot x^{-1/3}\right]^2$$

* $x^{-\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{-\frac{1}{3}}$

$$= 1+\left(4-x^{2/3}\right)x^{-2/3}$$

$$= 1+4x^{-2/3} - x^0 = 4x^{-2/3}$$

Area

$$L = \int_1^8 \sqrt{4x^{-2/3}}\,dx = \int_1^8 2x^{-1/3}\,dx$$ *

$$= 2\left[\frac{x^{2/3}}{\frac{2}{3}}\right]_1^8$$

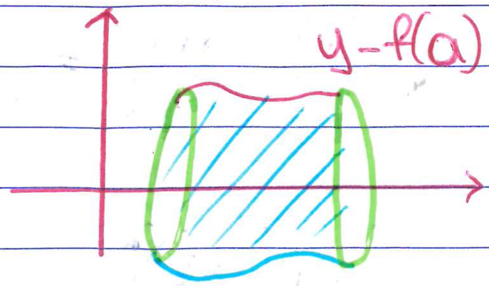
$$= 3\left(8^{2/3} - 1^{2/3}\right)$$

$$= 3\left(\sqrt[3]{64} - \sqrt[3]{1}\right)$$

$$= 3(4-1) = 9$$

Εμβαδό επιφάνειας εκ περιστροφής

Έστω ότι $f \geq 0$ και η f είναι συνεχής στο $[a,b]$. Τότε το εμβαδό της επιφάνειας που παράγει το τόξο L της καμπύλης $y = f(x)$ όταν περιστραφεί γύρω από τον άξονα των x.



Δίνεται από τον τύπο:

$$S = 2\pi \int_a^b y\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\, dx.$$

Άσκ Να βρεθεί το εμβαδό της επιφάνειας που παράγεται από τη πλήρη περιστροφή γύρω από τον άξονα των παρακάτω καμπυλών

i) $y = \sqrt{4-x^2}$, από το $x=-1$ ως $x=1$

ii) $y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$, από το $x=1$ ως $x=2$.

Απάντηση:

ii) $$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1+\left(\frac{-x}{\sqrt{4-x^2}}\right)^2$$

$$= 1+\frac{x^2}{4-x^2} = \frac{4-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}}{4-x^2}$$

$$= \frac{4}{4-x^2}$$

Άρα $$S = 2\pi\int_{-1}^{1}\sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{\frac{4}{4-x^2}}\,dx.$$

$$\frac{\sqrt{4}}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{2}{\sqrt{4-x^2}}$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1}\cancel{\sqrt{4-x^2}}\cdot\frac{2}{\cancel{\sqrt{4-x^2}}}\,dx$$

$$= 2\pi\int_{-1}^{1} 2\,dx.$$

$$2\pi\left[2x\right]_{-1}^{1} = 8\pi$$ τ.μ.

$$\left(\frac{1}{4x}\right)' = \frac{0.4x - 4}{16x^2} = -\frac{4}{16x^2} = -\frac{1}{4x^2}$$

11)

$$y = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cancel{3}}{\cancel{3}}x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$= x^2 - \frac{1}{4x^2}$$

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 + \left(x^2 - \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

$$= x^4 + \frac{1}{16x^4} + \frac{1}{2}$$ (ταυτότητα) ή (Διακρίνουσα

$$= \left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2$$

Άρα $S = 2\pi \int_1^2 \left(\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4x}\right)\sqrt{\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)^2}$

$$= 2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}\right)\left(x^2 + \frac{1}{4x^2}\right)$$

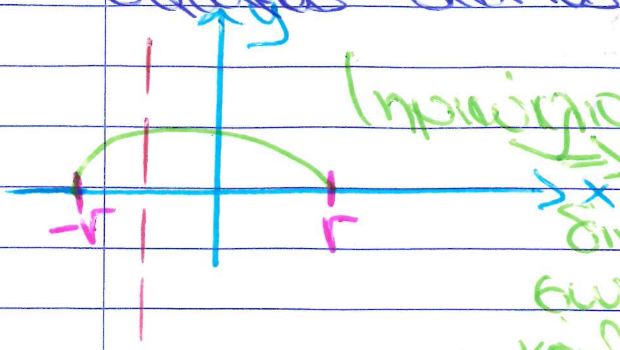
(ΟΜΟΝΥΜΑ)

$$2\pi \int_1^2 \left(\frac{x^5}{3} + \frac{x}{12} + \frac{x}{4} + \frac{1}{16x^3}\right)dx$$

$\frac{x^3}{3} + \frac{1}{4x}$ $\Rightarrow \frac{4x^4+3}{12x}$

$$= \dots = 515/64\,\pi //$$

Άσκηση: Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωμα να δειχθεί ότι το εμβαδό επιφάνειας σφαίρας ακτίνας r είναι $4\pi r^2$.



(ημικύκλιο)

⇒ όταν το περιστρέψω μας δίνει σφαίρα. Και είναι συνάρτηση αφού αν φέρω μία κάθετη γραμμή τέμνει μόνο σε ένα σημείο.

Η σφαίρα ακτίνας r προκύπτει από περιστροφή γύρω από τον άξονα των x της συνάρτησης.

Άρα:

$x^2+y^2=r^2$ (εξίσωση κύκλου)

$y^2=r^2-x^2$

$y=\pm\sqrt{r^2-x^2}$

κρατάμε το θετικό.

Άρα $\Rightarrow$ $y=\sqrt{r^2-x^2}$ (άνω ημικύκλιο)

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(r^2-x^2)'}{2\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{-2x}{2\sqrt{r^2-x^2}}=\frac{-x}{\sqrt{r^2-x^2}}$$

$$1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=\frac{r^2}{r^2-x^2}$$

Άρα το εμβαδό επιφάνειας σφαίρας ακτίνας r είναι:

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\sqrt{\frac{r^2}{r^2-x^2}}\,dx$$

$$=\underline{4\pi r^2}.$$