ΠΑΡΑΓΩΓΟΙ ΑΝΩΤΕΡΗΣ ΤΑΞΗΣ

$f(x)$ $\nearrow$ $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $f(y)$ $\nearrow$ $\frac{\partial f}{\partial y}$

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και υποθέσουμε ότι οι $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ υπάρχουν και είναι παραγωγίσιμες

Ορίζουμε παραγώγους 2ης τάξης:

- $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}$
- $\frac{\partial}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$
- $\frac{\partial}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \cdot \partial y} = f_{yx}$
- $\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}$

(Αντίστοιχα για $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$)

π.χ. $f(x,y) = xy + (x+2y)^2$

$f_x(x,y) = y + 2(x+2y)$ $\quad f_{xx}(x,y) = 2$ $\quad f_{yy}(x,y) = 8$

$f_y(x,y) = x + 4(x+2y)$ $\quad f_{xy}(x,y) = 5$ $\quad f_{yx}(x,y) = 5$

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $\frac{\partial f}{\partial x}$ και $\frac{\partial f}{\partial y}$ έχουν συνεχείς μερικές παραγώγους τότε $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ (Για αυτό το μάθημα πάντα ισχύει το θεώρημα)

Αντίστοιχα ορίζουμε παραγώγους ανώτερης τάξης

ΜΕΡΙΚΕΣ ΔΙΑΦΟΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Εξισώσεις που περιλαμβάνουν μερικές παραγώγους

π.χ. Εξίσωση Laplace $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ (αρμονικές συναρτήσεις

π.χ. Κυματική Εξίσωση $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ (1-διάσταση)

π.χ. Εξίσωση Θερμότητας $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (σε ράβδο)

Παράδειγμα: Να δειχθεί ότι η $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$ είναι λύση της εξίσωσης Laplace

$f_x = 3x^2 - 3y^2 \qquad f_{xx} = 6x \qquad f_{xx} + f_{yy} = 0$

$f_y = -6xy \qquad f_{yy} = -6x$

π.χ. Η $u(x,t) = \frac{1}{t^{1/2}} e^{-x^2/4t}$ είναι η λύση της εξίσωσης θερμότητας

Υπενθύμιση: $f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)}_{\tan(x_0)} + R \qquad \frac{R}{x-x_0} \to 0$

πολυώνυμο Taylor 1ου βαθμού

πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2 + R \qquad \frac{R}{(x-x_0)^2} \to 0$

No. Date

ΘΕΩΡΗΜΑ TAYLOR ΓΙΑ $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

· Πολυώνυμο Taylor 1ου βαθμού στο (x_0, y_0)

$$f(x,y) = \underbrace{f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cdot(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)}_{\text{εφαπτόμενο επίπεδο}} + R$$

$$\frac{R}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|} \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0$$

· Πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού στο (x_0, y_0)

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}(x-x_0) + \frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}(y-y_0)$$

$$+\frac{1}{2}\left(f_{xx}(x_0,y_0)(x-x_0)^2 - 2f_{xy}(x_0,y_0)(x-x_0)(y-y_0) + f_{yy}(x_0,y_0)(y-y_0)^2\right) + R$$

όπου $\frac{R}{\|(x,y)-(x_0,y_0)\|^2} \xrightarrow{(x,y)\to(x_0,y_0)} 0$

Παράδειγμα: Να βρεθεί το πολυώνυμο Taylor 2ου βαθμού στο $(1, \frac{\pi}{3})$ της $f(x,y) = \sin(xy)$

$f(1,\frac{\pi}{3}) = \sin(\frac{\pi}{3}) = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$f_x(x,y) = y\cos(xy) \Rightarrow f_x(1,\frac{\pi}{3}) = \frac{\pi}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$

$f_y(x,y) = x\cos(x,y) \Rightarrow f_y(1,\frac{\pi}{3}) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$.

$f_{xx}(x,y) = -y^2\sin(xy) \Rightarrow f_{xx}(1,\frac{\pi}{3}) = \ldots = \frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$

$f_{xy}(x,y) = \cos(xy) - xy\sin(xy) \Rightarrow f_{xy}(1,\frac{\pi}{3}) = \ldots = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\pi$

$f_{yy}(x,y) = -x^2\sin(x,y) \Rightarrow f_{yy}(1,\frac{\pi}{3}) = \ldots = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Άρα

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{6}(x-1) + \frac{1}{2}(y-\frac{\pi}{3}) + R$$

$$+\frac{1}{2}\left[\frac{\sqrt{3}}{6}\pi^2(x-1)^2 + 2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)(x-1)(y-\frac{\pi}{3}) + \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)(y-\frac{\pi}{3})^2\right]$$

$f(x,y) = \ldots$

Αν θέσουμε $x = x_0 + h$ οπότε
$y = y_0 + h$

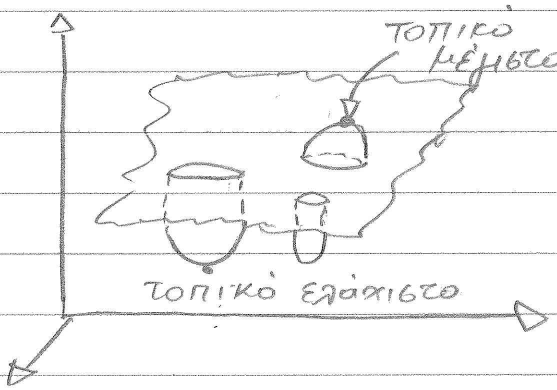
$f(x_0+h, y_0+h) = f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0+h, y_0+h)\cdot h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0+h, y_0+h)\cdot h + \dots$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ και $(x_0,y_0) \in \mathbb{R}^2$:

- Η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0,y_0) αν κοντά στο (x_0,y_0) $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$
- Η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0,y_0) αν κοντά στο (x_0,y_0) $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$



τοπικό ακρότατο = τοπικό μέγιστο ή ελάχιστο

ΘΕΩΡΗΜΑ (Fermat ή κριτήριο της παραγώγου)

Αν $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0,y_0) τότε
$f_x(x_0,y_0) = 0 = f_y(x_0,y_0)$
(Ισοδύναμα $Df = 0$ ή $\nabla f = (0,0)$)

Απόδειξη:

Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι (x_0, y_0) είναι τοπικό μέγιστο.

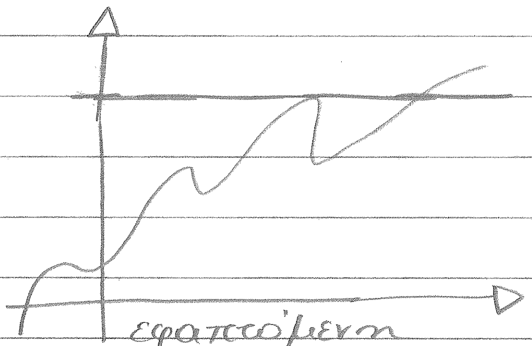
Έστω $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = f(x, y_0) \Rightarrow$ Το x είναι τοπικό μέγιστο της g

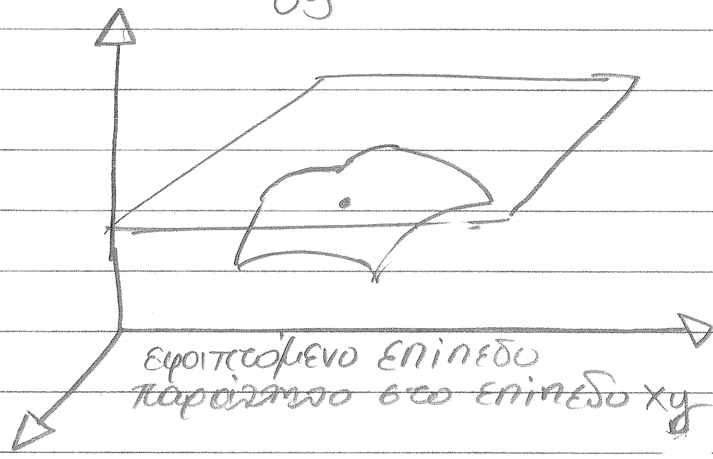
$\Rightarrow$ fermat $g'(x_0) = 0$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0 + h) - g_0(x_0)}{h} = 0$$

$$\Rightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h} = 0$$

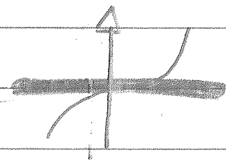
$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = 0$. Αντίστοιχα προκύπτει $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0$



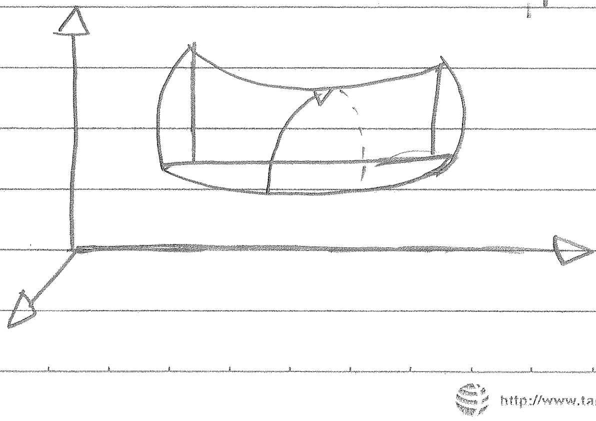


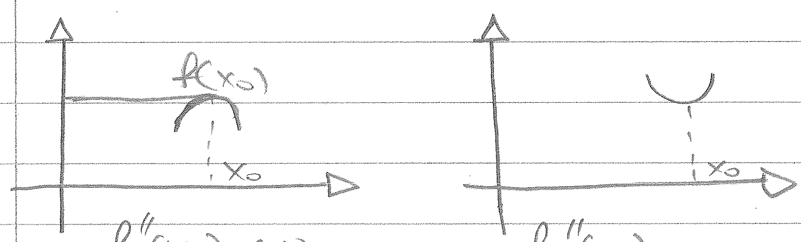
ΟΡΙΣΜΟΣ

Το (x_0, y_0) λέγεται κρίσιμο σημείο της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ αν $f_x(x_0, y_0) = 0 = f_y(x_0, y_0)$



Αν το $(x_0, y_0$ είναι κρίσιμο σημείο αλλά όχι τοπικό ακρότατο λέγεται σαγματικό σημείο (σάγμα = σέλα)





$f''(x_0) < 0$ $\qquad$ $f''(x_0) > 0$

ΘΕΩΡΗΜΑ (Κριτήριο 2ης Παραγώγου)

Έστω (x_0, y_0) κρίσιμο σημείο της $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H := \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix}$$

και $\Delta = \det(H) = f_{xx} f_{yy} - f_{xy}^2$

1) Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ τότε η f έχει τοπικό μέγιστο στο (x_0,y_0)
2) Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx} > 0$ τότε η f έχει τοπικό ελάχιστο στο (x_0,y_0)
3) Αν $\Delta < 0$ τότε το (x_0,y_0) είναι σαγματικό (σεξποτό) σημείο
4) Αν $\Delta = 0$ τότε δεν γνωρίζουμε

π.χ. $f(x,y) = x^4 + 4x^2y^2 - 2x^2 + 2y^2 - 1$

$f_x(x,y) = 4x^3 + 8xy^2 - 4x = 4x(x^2 + 2y^2 - 1)$
$f_y(x,y) = 8x^2y + 4y = 4y(1 + 2x^2)$

$$\left\{\begin{matrix} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} 4x(x^2+2y^2-1) \\ 4y(1+2x^2) = 0 \Rightarrow 4y = 0 \\ y = 0 \end{matrix}$$

Άρα $4x(x^2-1) = 0$
$x = 0 \quad x = 1 \quad x = -1$

Κρίσιμα Σημεία $(0,0)$
$(1,0)$
$(-1,0)$

No. Date

$f_{xx}(x,y) = 12x^2 + 8y^2 - 4$

$f_{yy}(x,y) = 8x^2 + 4$

$f_{(x,y)}(x,y) = 16xy$

Για το $(0,0)$ $H = \begin{bmatrix} -4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ $\Delta = \det(H) = -16 - 0 < 0$

$\Rightarrow$ σαγματικό σημείο (σέλλας)

Για το $(1,0)$ $H = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $\Delta = 12 \cdot 8 > 0$

$\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ f_{xx}(1,0) > 0 \end{array}\right\}$ τοπικό ελάχιστο.

Για το $(-1,0)$ $H = \begin{bmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ $\Delta = 12 \cdot 8 > 0$

$\left.\begin{array}{l} \Delta > 0 \\ f_{yy}(-1,0) > 0 \end{array}\right\}$ τοπικό ελάχιστο

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ

ΤΟΠΙΚΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ
- τοπικό μέγιστο
- τοπικό ελάχιστο

ΘΕΩΡΗΜΑ FERMAT

Αν το (x_0, y_0) είναι τοπικό ακρότατο της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$
τότε $\nabla f(x_0, y_0) = \vec{0} = (0,0)$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right)\Big|_{(x_0, y_0)} = (0,0)$$

Κρίσιμα Σημεία: αυτά που ικανοποιούν το Θεώρημα Fermat

Σαγματικά Σημεία: κρίσιμα σημεία που δεν είναι τοπικά ακρότατα

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΚΡΙΤΗΡΙΟ 2ΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΟΥ)

(x_0, y_0) κρίσιμο σημείο της $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

$$H = \begin{bmatrix} f_{xx}(x_0,y_0) & f_{xy}(x_0,y_0) \\ f_{yx}(x_0,y_0) & f_{yy}(x_0,y_0) \end{bmatrix} \qquad \Delta = \det(H)$$

1) Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0) > 0$ τότε έχουμε τοπικό ελάχιστο.
2) Αν $\Delta > 0$ και $f_{xx}(x_0,y_0) < 0$ τότε έχουμε τοπικό μέγιστο
3) Αν $\Delta < 0$ έχουμε σαγματικό σημείο

ΑΠΟΛΥΤΑ ΑΚΡΟΤΑΤΑ

Ορ. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Το (x_0, y_0) λέγεται (ολικό) μέγιστο της f αν $\forall (x,y)$ $f(x,y) \leq f(x_0,y_0)$

Ορ. Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Το (x_0, y_0) λέγεται (ολικό) ελάχιστο της f αν $\forall (x,y)$ $f(x,y) \geq f(x_0,y_0)$

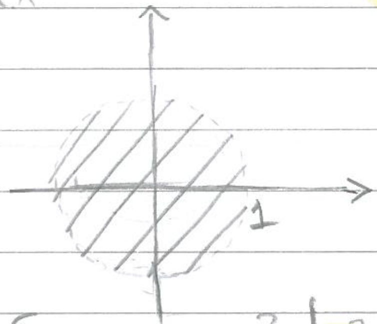
Υπενθύμιση: ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΓΙΣΤΗΣ-ΕΛΑΧΙΣΤΗΣ ΤΙΜΗΣ

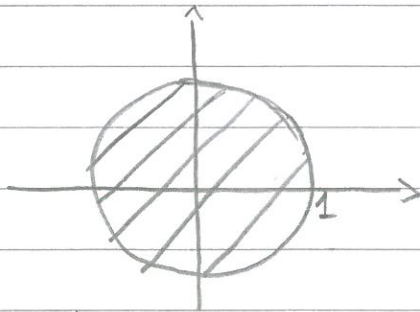
Αν $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ παραγωγίσιμη τότε λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή

ΑΝΟΙΚΤΑ ΚΑΙ ΚΛΕΙΣΤΑ ΣΥΝΟΛΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$

• Ένα $D \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται κλειστό αν περιέχει σύνορο

Π.χ



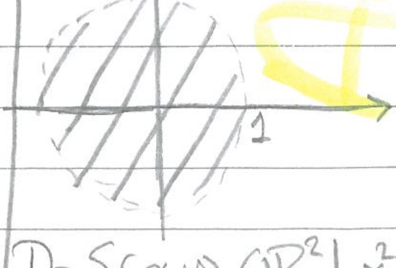


$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ Όχι κλειστό

$D' = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$ κλειστό

• Ένα $D \subseteq \mathbb{R}^2$ λέγεται ανοικτό αν περιέχει μόνο το εσωτερικό του, χωρίς σύνορα.

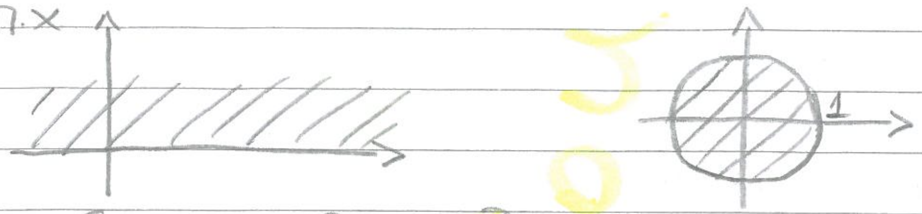
Π.χ



$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2<1\}$

• Το D λέγεται φραγμένο αν περιέχει $M>0$ ώστε $\forall (x,y)\in D \quad \|(x,y)\|<M$

π.χ



$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid y\geq 0\}$ — κλειστό, όχι φραγμένο

$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2\leq 1\}$ — κλειστό, φραγμένο

Το Θεώρημα fermat ισχύει και για συναρτήσεις ορισμένες σε ανοιχτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΜΕΓΙΣΤΩΝ ΚΑΙ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΙΜΩΝ)

Έστω D φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$, $f: D\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη, τότε η f λαμβάνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή στο D.

Για να βρούμε ακρότατα σε μια τέτοια συνάρτηση:

1) Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του D (με fermat)

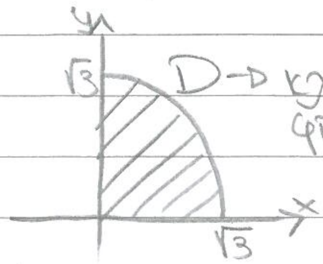
2) Υπολογίζουμε την f στο σύνορο του D και βρίσκουμε κρίσιμα σημεία

3) Υπολογίζουμε την f στα κρίσιμα σημεία.
   - Η μικρότερη τιμή είναι το ελάχιστο της f
   - Η μεγαλύτερη τιμή είναι το μέγιστο της f.

πχ $f(x,y)=xy^2$ ορισμένη στο

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 3\}$$

Να βρεθούν τα ακρότατα της f



D → κλειστό φραγμένη

Στο εσωτερικό του D

Βρίσκουμε τα κρίσιμα σημεία

$f_x(x,y)=y^2$

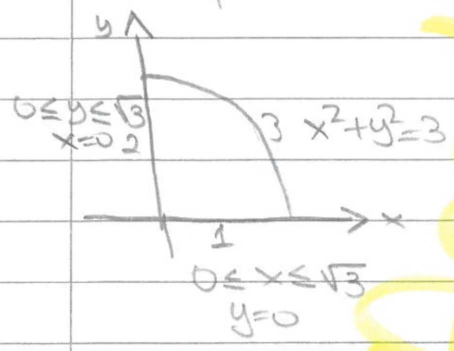
$f_y(x,y)=2xy$

$$\left.\begin{array}{l} f_x(x,y)=0 \\ f_y(x,y)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} y^2=0 \Rightarrow y=0 \\ 2xy=0 \Rightarrow x=0 \end{array}$$

Το (0,0) ικανοποιεί αυτές τις εξισώσεις αλλά είναι στο σύνορο του D

↳ Άρα δεν υπάρχουν κρίσιμα σημεία στο εσωτερικό του D.

Κρίσιμα σημεία στο σύνορο



Στην πλευρά 1: $f(x,0)=0$

(τοπικό ακρότατο (0,0))

Στην πλευρά 2: $f(0,y)=0$

Στην καμπύλη 3: $y^2=3-x^2$

$y=\sqrt{3-x^2}$

$f(x,\sqrt{3-x^2}) = x(3-x^2) = 3x-x^3$

Έστω $g(x)=3x-x^3$

$g'(x)=0 \Rightarrow 3-3x^2=0$

$x^2=1$

$x=\pm 1$

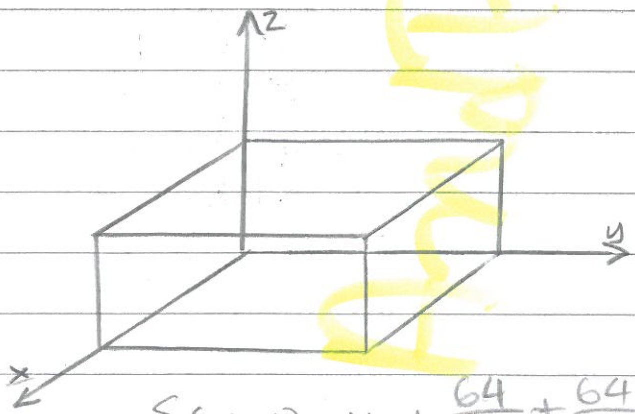
$-1 \notin D \Rightarrow \boxed{x=1}$

Άρα κρίσιμο σημείο στο $(1,\sqrt{2})$ $f(0,0)=0$

$f(1,\sqrt{2})=0.$

Άρα η ελάχιστη τιμή της f είναι 0 και η μέγιστη 2

Παράδειγμα: Ένα κουτί ορθογώνιο παραλληλόγραμμο χωρίς την άνω έδρα έχει όγκο $32m^2$. Πόσες πρέπει να είναι οι διαστάσεις για να έχει ελάχιστη επιφάνεια?



$V=xyz=32m^2$

Ολική επιφάνεια: $xy+2yz+2xz$

Αντικαθιστούμε $z=\frac{32}{xy}$

$S(x,y)=xy+\frac{64}{x}+\frac{64}{y}$

Κρίσιμα Σημεία $\begin{cases} S_x(x,y)=0 \\ S_y(x,y)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y-\frac{64}{x^2}=0 \Rightarrow x^2y=64 \\ x-\frac{64}{y^2}=0 \Rightarrow xy^2=64 \end{cases}$

$\xRightarrow[\text{διαιρούμε}]{x>0\ y>0} \frac{x}{y}=1 \Rightarrow x=y$

$x^2y=64$

$x^3=64 \Rightarrow x>0 \quad x=y=4$

Κρίσιμο Σημείο $(4,4)$

Εφαρμόζουμε το κριτήριο της 2ης παραγώγου:

$$H=\begin{bmatrix} S_{xx}(4,4) & S_{xy}(4,4) \\ S_{yx}(4,4) & S_{yy}(4,4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$S_{xx}(4,4)>0$ και $\Delta = \det H = 3>0$

Άρα το $(4,4)$ είναι τοπικό ελάχιστο

Άρα ελάχιστη επιφάνεια: $x=4$

$y=4 \quad z=\frac{32}{16}=2$

ΑΚΡΟΤΑΤΑ ΥΠΟ ΣΥΝΘΗΚΗ

Ακρότατα μιας συνάρτησης $f: \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ υπό τον περιορισμό $g(x,y) = k \in \mathbb{R}$ ή $g(x,y,z) = k \in \mathbb{R}$

π.χ. Ελάχιστη ολική επιφάνεια με δοσμένο όγκο ακρότατο μιας συνάρτησης περιορισμένης σε μια καμπύλη/επιφάνεια.

ΘΕΩΡΗΜΑ (ΠΟΛΛΑΠΛΑΣΙΑΣΤΕΣ LAGRANGE)

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ και $g(x,y) = k \in \mathbb{R}$

Αν η f έχει τοπικό ακρότατο στο (x_0, y_0) υπό τη συνθήκη $g(x,y) = k$ τότε

$\nabla f(x_0, y_0) = \lambda \nabla g(x_0, y_0)$ για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$

(λ ο πολλαπλασιαστής Lagrange)

Αντίστοιχα για $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Για να βρούμε ακρότατο της f σε τέτοια περίπτωση:

1) Βρίσκουμε τις τιμές των (x,y) που ικανοποιούν την $\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$

2) Υπολογίζουμε την f σε κάθε τέτοιο σημείο

Η μεγαλύτερη είναι το μέγιστο

Η μικρότερη είναι το ελάχιστο

π.χ $f(x,y)=x^2+y^2$ υπό τον περιορισμό $[g(x,y)=x^4+y^4=1]$

Να βρεθούν τα ακρότατα της f

Λύνουμε το σύστημα $\nabla f(x,y)=\lambda \nabla g(x,y)$

$$(2x,2y)=\lambda(4x^3,4y^3)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x=4x^3\lambda \\ 2y=4y^3\lambda \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x(1-2x^2\lambda)=0 \\ 2y(1-2y^2\lambda)=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } \lambda=\frac{1}{2x^2} \\ y=0 \text{ ή } \lambda=\frac{1}{2y^2} \end{cases}$$

Αν $x=0$ $\quad 0+y^4=1 \Rightarrow y=\pm 1$

Αν $y=0$ $\quad x^4+0=1 \Rightarrow x=\pm 1$

Αν $\lambda=\frac{1}{2x^2}=\frac{1}{2y^2} \Rightarrow x^2=y^2$

άρα $x^4+x^4=1$

$2x^4=1$

$x^4=\frac{1}{2} \Rightarrow x=\frac{1}{\sqrt{2}}=y$

Κρίσιμα σημεία: $(0,\pm 1),(\pm 1,0),\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

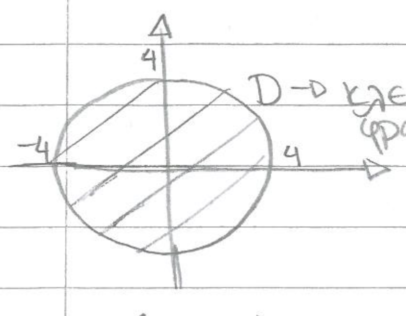
$f(0,1)=f(0,-1)=f(-1,0)=f(1,0)=1$

$f\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{2}{\sqrt{2}}$

Άρα ελάχιστη τιμή: 1

μέγιστη τιμή: $\frac{2}{\sqrt{2}}$

Παράδειγμα: Ακρότατα της $f(x,y) = 2x^2+3y^2-4x-5$ ορισμένη στο $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 \le 16\}$



D → κλειστό φραγμένο

Στο εσωτερικό του D:

$$\begin{cases} f_x = 0 \\ f_y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x-4=0 \\ 6y=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$$

Κρίσιμο σημείο το $(1,0)$

Στο σύνορο του D:
Ακρότατα της f υπό τον περιορισμό $x^2+y^2=16$

Έστω $g(x,y) = x^2+y^2=16$

$\nabla f(x,y) = \lambda \nabla g(x,y)$
$\Rightarrow (4x-4, 6y) = \lambda(2x, 2y)$

$$\Rightarrow \begin{cases} 4x-4 = 2\lambda x \\ 6y = 2\lambda y \Rightarrow 2y(3-\lambda)=0 \end{cases}$$

$y=0$ ή $\lambda = 3$

Αν $y=0$, $0^2+x^2=16 \Rightarrow x = \pm 4$
κρίσιμα σημεία $(\pm 4, 0)$

Αν $\lambda=3$ τότε $4x-4=6x$
$x=-2$ άρα $x^2+y^2=16$
$y^2=12$
$y = \pm\sqrt{12}$

κρίσιμα σημεία $(\pm 4, 0)$ $(-2, \pm\sqrt{12})$

$f(1,0) = -7$
$f(4,0) = 11$
$f(-4,0) = 43$
$f(-2,\sqrt{12}) = f(-2,-\sqrt{12}) = 47$

ελάχιστη τιμή -7
μέγιστη τιμή 47

Παρατήρηση

Αν έχουμε 2 συνθήκες όπως $g_1(x,y,z)=k_1$

$g_2(x,y,z)=k_2$

τότε βάζουμε 2 πολλαπλασιαστές Lagrange

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z)$$

και λύνουμε ως προς x,y,z.

π.χ. $f(x,y,z)=x+y+z$ υπό τις συνθήκες $x^2+y^2=3$

$x+z=1$

$g_1(x,y,z)=$

$g_2(x,y,z)=$

$$\nabla f(x,y,z)=\lambda_1\nabla g_1(x,y,z)+\lambda_2\nabla g_2(x,y,z)$$

$$(1,1,1)=\lambda_1(2x,2y,0)+\lambda_2(1,2,1)$$

$$\begin{cases} 1=\lambda_1 2x+\lambda_2 \\ 1=\lambda_1 2y \\ 1=\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1\cdot 2x \\ \lambda_1 2y=1 \end{cases}$$

$$\lambda_2=1 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \text{ ή } \lambda_1=0 \\ = \ldots \end{cases}$$

Για $x=0$, $0+y^2=3$

$y=\pm\sqrt{3}$

$\longrightarrow 0+z=1 \Rightarrow z=1$

Κρίσιμο σημείο $(0,\pm\sqrt{3},1)$

$f(0,\sqrt{3},1)=\sqrt{3}+1 \leftarrow$ τοπικό μέγιστο

$f(0,-\sqrt{3},1)=-\sqrt{3}+1 \leftarrow$ τοπικό ελάχιστο