

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

1. Αποδείξτε ότι η $\phi(x, y) = \tan^{-1}(xy)$ είναι συνάρτηση δυναμικού του πεδίου $F(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2}i + \frac{x}{1+x^2y^2}j$.

2. Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $F(x, y, z) = x^2i - 2j + yzk$.

Απάντηση: $\operatorname{div} F = 2x + y$, $\operatorname{curl} F = zk$.

3. Έστω τα διανυσματικά πεδία $F(x, y, z) = 2xi + j + 4yk$, $G(x, y, z) = xi + yj - zk$. Να υπολογίσετε το $\nabla \cdot (F \times G)$.

Απάντηση: $4x$

4. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα δύο φορές παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα; Αυτές που έχουν, ορίζουν βαθμωτή συνάρτηση ή διανυσματικό πεδίο;

- | | | |
|---|--|--|
| i) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} F)$ | ii) $\operatorname{grad}(\operatorname{curl} F)$ | iii) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F)$ |
| iv) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} F)$ | v) $\operatorname{curl}(\operatorname{div} F)$ | vi) $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F)$ |

Απάντηση: (i), (ii), (iii), (v) δεν έχουν νόημα, (iv) έχει νόημα και είναι διανυσματικό πεδίο (vi) έχει νόημα και είναι βαθμωτό πεδίο.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

- i) $\int_C \frac{1}{1+x} ds$, $C : r(t) = ti + \frac{2}{3}t^{3/2}j$ ($0 \leq t \leq 3$),
- ii) $\int_C \frac{x}{1+y^2} ds$, $C : x = 1 + 2t$, $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$).

Απάντηση: i) 2, ii) $\sqrt{5}(\pi/4 + \ln 2)$

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C F \cdot dr$, όπου $F(x, y) = 2i + 5j$ και C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, -3)$ στο $(4, -3)$.

Απάντηση: 6

