

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Εαρινό εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 1ου Κεφαλαίου

1. i) Μέσω απαλοιφής της παραμέτρου, να χαράξετε το γράφημα της καμπύλης που διαγράφει ένα σωματίδιο για $0 \leq t \leq 5$ με παραμετρικές εξισώσεις κίνησης

$$x = t - 1, \quad y = t + 1.$$

- ii) Σημειώστε στο σχήμα τον προσανατολισμό της κίνησης του σωματιδίου.
iii) Κατασκευάστε πίνακα με τις (x, y) -συντεταγμένες του σωματιδίου για $t = 0, 1, 2, 3, 4, 5$.
iv) Σημειώστε στο γράφημα τις παραπάνω θέσεις του σωματιδίου.

Απάντηση: $y = x + 2$,

t	0	1	2	3	4	5
x	-1	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5	6

2. Χαράξετε το γράφημα με απαλοιφή της παραμέτρου για τις εξισώσεις:

$$x = 2 \sin^2 t, \quad y = 3 \cos^2 t \quad (0 \leq t \leq \pi/2).$$

Απάντηση: $y = -\frac{3}{2}x + 3$

3. Βρείτε παραμετρικές εξισώσεις για τις παρακάτω καμπύλες.

- i) Κύκλος με κέντρο την αρχή των αξόνων και ακτίνα 5, δεξιόστροφος προσανατολισμός.
ii) Τμήμα της παραβολής $x = y^2$ από το $(1, -1)$ στο $(1, 1)$, με προσανατολισμό προς τα πάνω.

Απάντηση: i) $x = 5 \cos t, y = -5 \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) ii) $x = t^2, y = t, -1 \leq t \leq 1$

4. Έστω οι παραμετρικές εξισώσεις $x = \frac{1}{2}t^2 + 1, y = \frac{1}{3}t^3 - t$. Να βρεθούν οι ποσότητες dy/dx και d^2y/dx^2 χωρίς απαλοιφή της παραμέτρου στο σημείο όπου $t = 2$.

Απάντηση: $dy/dx = t - 1/t, d^2y/dx^2 = (t^2 + 1)/t^3$

5. i) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης της καμπύλης $x = e^t, y = e^{-t}$, για $t = 1$ χωρίς απαλοιφή της παραμέτρου.
ii) Να βρεθεί η εξίσωση της εφαπτομένης του προηγούμενου ερωτήματος μέσω απαλοιφής της παραμέτρου.

Απάντηση: $y = -x/e^2 + 2/e$.

6. Να βρεθεί το μήκος των παρακάτω καμπυλών.

- i) $x = t^2, y = \frac{1}{3}t^3$ ($0 \leq t \leq 1$).
ii) $x = \cos 3t, y = \sin 3t$ ($0 \leq t \leq \pi$).

Απάντηση: i) $1/3(5^{3/2} - 4^{3/2})$, ii) 3π

7. Χαράξτε τα παρακάτω σημεία σε πολικές συντεταγμένες.

α) $(3, \pi/4)$

β) $(5, 2\pi/3)$

γ) $(1, \pi/2)$

8. Βρείτε την καμπύλη που παριστάνουν οι παρακάτω εξισώσεις μετασχηματίζοντας σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

i) $r = 2$

ii) $r \sin \theta = 4$

iii) $r = 3 \cos \theta$

iv) $r = \frac{6}{3 \cos \theta + 2 \sin \theta}$

Απάντηση: i) Κύκλος $x^2 + y^2 = 4$, ii) ευθεία $y = 4$, iii) κύκλος $(x - 3/2)^2 + y^2 = 9/4$, iv) ευθεία $3x + 2y = 6$

9. Να χαραχθούν οι καμπύλες που περιγράφουν οι παρακάτω εξισώσεις σε πολικές συντεταγμένες:

i) $\theta = \frac{\pi}{3}$,

ii) $r = 3$.

10. Να χαράξετε την παραβολή $x^2 = -8y$ προσδιορίζοντας την εστία και την διευθύνουσά της.

Απάντηση: Διευθύνουσα $y = 2$, εστία $(-2, 0)$

11. Να χαράξετε τις ελλείψεις προσδιορίζοντας τους άξονές τους.

i) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

ii) $9x^2 + y^2 = 9$

Απάντηση: Άκρα αξόνων i) $(\pm 4, 0)$, $(0, \pm 3)$ ii) $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 3)$

12. Να χαράξετε τις υπερβολές προσδιορίζοντας τις κορυφές και τις ασύμπτωτές τους.

i) $9y^2 - x^2 = 36$

ii) $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

Απάντηση: i) Κορυφές $(0, \pm 2)$, ασύμπτωτες $y = \pm x/3$, ii) Κορυφές $(\pm 4, 0)$, ασύμπτωτες $y = \pm \frac{3}{4}x$

13. Να προσδιοριστεί η εξίσωση της κωνικής τομής.

i) Παραβολή με κορυφή $(0, 0)$ και διευθύνουσα $y = \frac{1}{4}$.

ii) Έλλειψη με άκρα μεγάλου άξονα $(\pm 3, 0)$ και άκρα μικρού άξονα $(0, \pm 2)$.

iii) Υπερβολή με κορυφές $(0, \pm 2)$ και ασύμπτωτες $y = \pm \frac{2}{3}x$.

Απάντηση: i) $x^2 = -y$, ii) $x^2/9 + y^2/4 = 1$ iii) $y^2/4 - x^2/9 = 1$