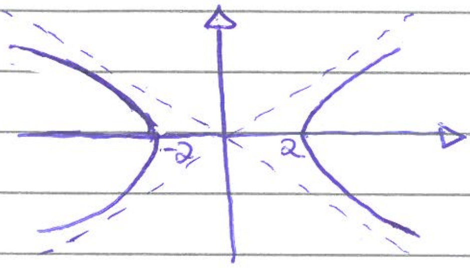
Τρικ για ασύμπτωτες: βάζουμε στο 2ρο μέλος 0 και λύνουμε ως προς y

Π.χ. Να σχεδιαστούν οι υπερβολές (a) $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{9}=1$ και (b) $y^2-x^2=1$.

(a) Υπερβολή: ανοίγει στην x-κατεύθυνση



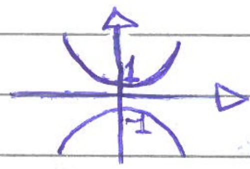
Κορυφές: $\frac{x^2}{4}+\frac{0^2}{9}=1 \Rightarrow x^2=4 \Rightarrow x=\pm 2$.

$(2,0)\ (-2,0)$

Ασύμπτωτες: $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=0 \Rightarrow y^2=\frac{9}{4}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{3}{2}x$

(b) Κορυφές: $(0,1)\ (0,-1)$

Ασύμπτωτες: $y=\pm x$.

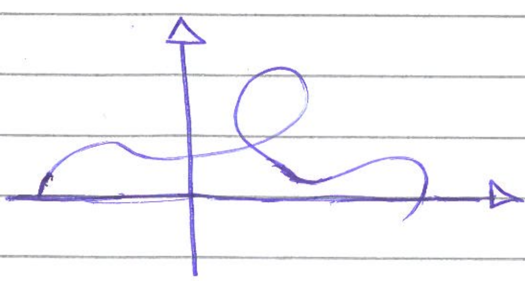


Π.χ. Να βρεθεί εξίσωση υπερβολής με κορυφές $(0, \pm 8)$ και ασύμπτωτες $y=\pm\frac{4}{3}x$.

Είναι της μορφής $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$.

Ασύμπτωτες $y=\pm\frac{a}{b}x \Rightarrow a=4$, $b=3$. κλίση ασυμπτώτων μπορεί να δώσει a ή b

Υπενθύμιση: Αναλυτική γεωμετρία στο επίπεδο 20/1



$x=x(t)$

$y=y(t)$

Πολικές συντεταγμένες (r,θ)

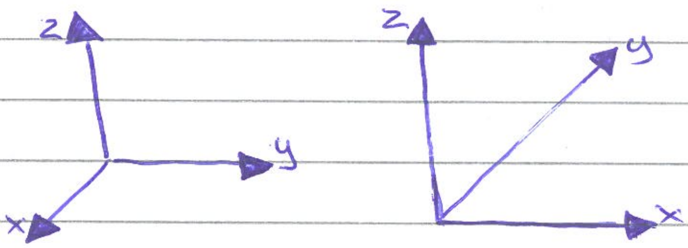
• κωνικές τομές:

ΕΦΑΛΑΙΟ 2: ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΧΩΡΟ

1 Ο ΧΩΡΟΣ $\mathbb{R}^3$

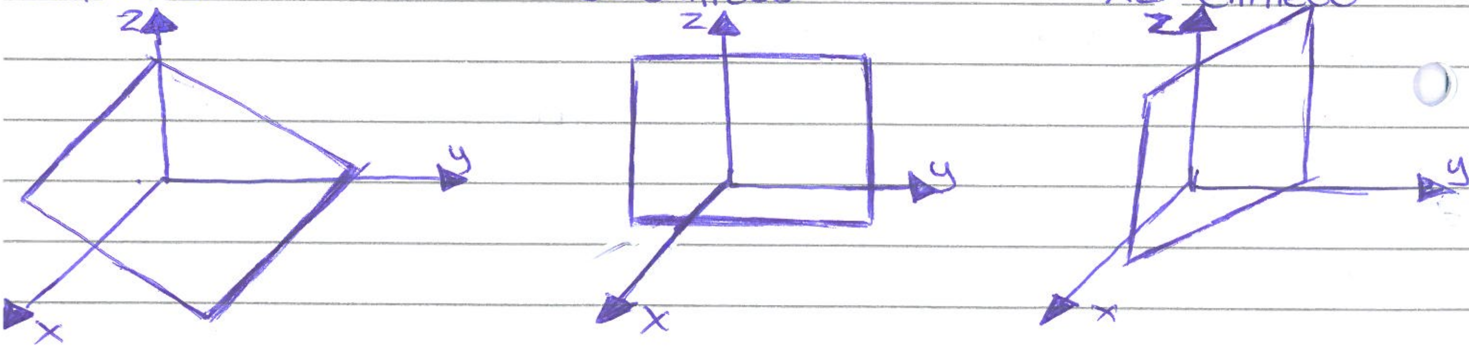
διάσταση → άξονας → $\mathbb{R}$
διαστάσεις → επίπεδο → $\mathbb{R}^2$
διαστάσεις → χώρος → $\mathbb{R}^3$

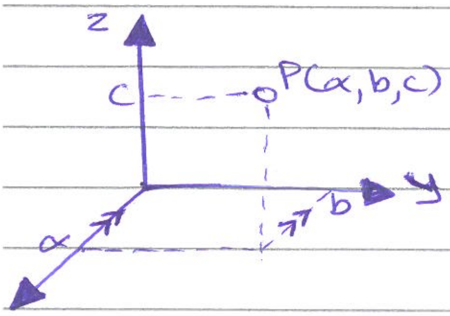
εωρούμε ότι ο χώρος έχει 3 άξονες, κάθετοι ανά 2, με ένα σημείο μής - αρχή των αξόνων. Οι άξονες ικανοποιούν τον κανόνα του εξιού χεριού.



3 Χαρακτηριστικά Επίπεδα

-επίπεδο | yz-επίπεδο | xz-επίπεδο



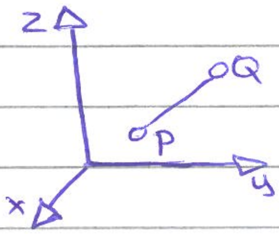


Κάθε σημείο P αντιστοιχεί σε μια τριάδα αριθμών (α, b, c)

1ο οκταμόριο $x>0, y>0, z>0$.

Επίπεδο/Άξονας	Σύνολο Σημείων
xy-επίπεδο	$(x,y,0)$
xz-επίπεδο	$(x,0,z)$
yz-επίπεδο	$(0,y,z)$
άξονας x	$(x,0,0)$
άξονας y	$(0,y,0)$
άξονας z	$(0,0,z)$

Απόσταση Σημείων



Έστω $P(x_1,y_1,z_1)$ $Q(x_2,y_2,z_2)$.
Η απόσταση των P,Q είναι

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

ΣΦΑΙΡΑ κέντρο (x_0,y_0,z_0), ακτίνας r. Σύνολο σημείων που απέχουν απόσταση r από (x_0,y_0,z_0)
Άρα έχει εξίσωση: $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=r^2$

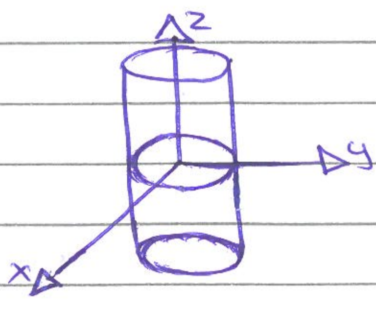
π.χ. Να βρεθεί το κέντρο και η ακτίνα της σφαίρας με εξίσωση
$x^2+y^2+z^2-2x-4y+8z+17=0$.

$(x^2-2x+1)+(y^2-4y+4)+(z^2+8z+16)+17=21$
$\Rightarrow (x-1)^2+(y-2)^2+(z+4)^2=4$

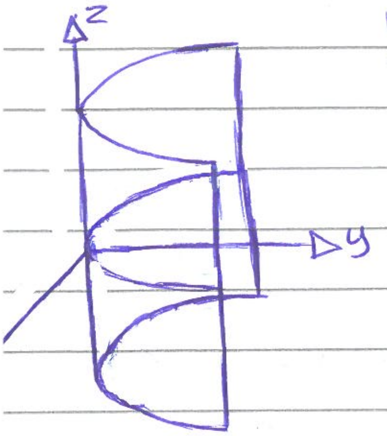
κέντρο $(1,2,-4)$ και ακτίνα 2.

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ.

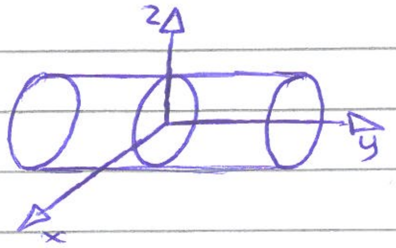
Ο κύλινδρος είναι παράλληλη μετατόπιση 1 κύκλου.
→ Γενικά, κυλινδρικές επιφάνειες = παράλληλη μετατόπιση καμπύλης ως προς κάποια κατεύθυνση.



$y=x^2$



$x^2+z^2=1$

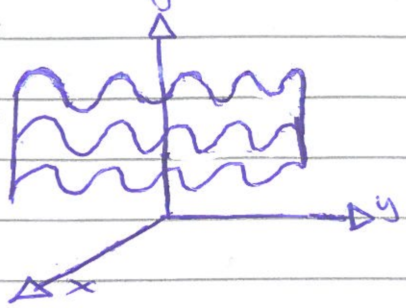


Παράλληλη μετατόπιση κύκλου

↓

κύλινδρος

$z=\sin y$



Παράλληλη μετατόπιση της ημιτονοειδούς καμπύλης

ια εξίσωση 2 μεταβλητών = παράλληλη μετατόπιση μιας καμπύλης στο επίπεδο που ορίζουν οι 2 μεταβλητές στην κατεύθυνση της τρίτης
ίναι κυλινδρική επιφάνεια

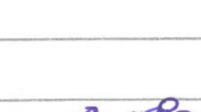
ΑΞΕΙΣ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

τω (x_1,y_1,z_1) και (x_2,y_2,z_2)

- $(x_1,y_1,z_1)+(x_2,y_2,z_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2,\ z_1+z_2)$
- $(x_1,y_1,z_1)-(x_2,y_2,z_2)=(x_1-x_2,\ y_1-y_2,\ z_1-z_2)$
- $\lambda(x_1,y_1,z_1)=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)$

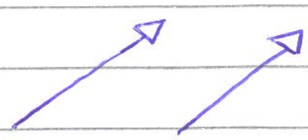
. ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$

Διάνυσμα: βέλος με αρχικό και τελικό σημείο



$\vec{v}$ ή $\rightarrow$

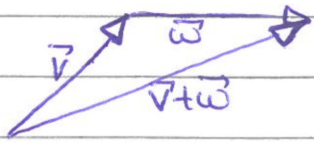
Αν 2 διανύσματα έχουν ίδιο μήκος και ίδια
κεύθυνση είναι ίσα (άρα τα ταυτίζουμε)



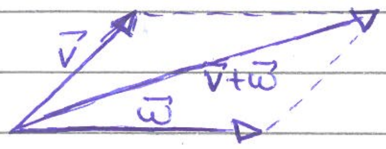
Μηδενικό διάνυσμα ($\vec{0}$): • ίδιο αρχικό και τελικό σημείο
• δεν έχει κατεύθυνση

ΠΡΑΞΕΙΣ

Άθροισμα:

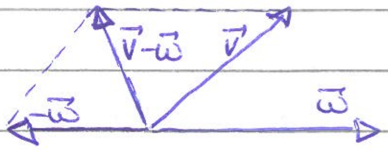


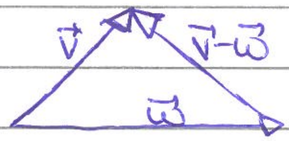
ή



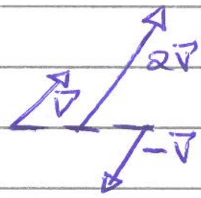
Το $-\vec{v}$ είναι το αντίθετο του $\vec{v}$

Αφαίρεση

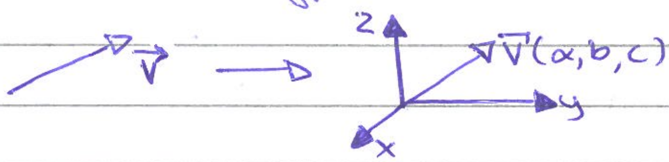




Βαθμωτός πολλαπλασιασμός: όποτε το $\lambda\vec{v}$ είναι διάνυσμα με λ-πλάσιο μήκος και
- ίδια κατεύθυνση αν $\lambda > 0$
- αντίθετη κατεύθυνση αν $\lambda < 0$



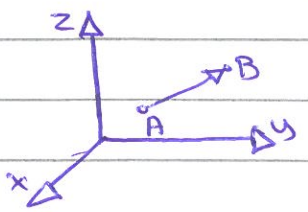
→ Θεωρούμε ότι έχουν αρχικό σημείο την αρχή των αξόνων. Χαράζονται από τις συντεταγμένες τα τελικά σημεία.



Όλες οι προηγούμενες έννοιες γίνονται για $\vec{V}=(V_1, V_2, V_3)$ και $\vec{W}=(W_1, W_2, W_3)$

- $\vec{v}=\vec{\omega} \iff V_1 = W_1,\ V_2 = W_2,\ V_3 = W_3$
- $\vec{v}+\vec{\omega} = (V_1+W_1, V_2+W_2, V_3+W_3)$
- $\vec{v}-\vec{\omega} = (V_1-W_1, V_2-W_2, V_3-W_3)$
- $\lambda\vec{v} = (\lambda V_1, \lambda V_2, \lambda V_3)$

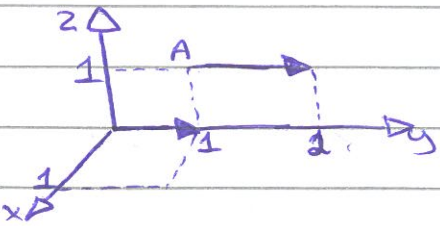
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΜΕΤΑΞΥ ΣΗΜΕΙΩΝ ΑΒ



Αν $A=(x_1, y_1, z_1)$ και $B=(x_2, y_2, z_2)$

$\vec{AB} = (x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$

.χ. $A(1,1,1)$
$B(1,2,1)$



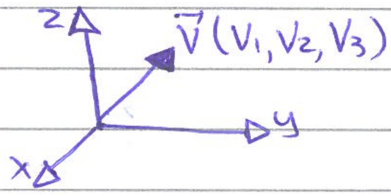
$AB=(0,1,0)$.

ΙΟΤΗΤΕΣ ΠΡΑΞΕΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ.

1) $\vec{v}+\vec{\omega}=\vec{\omega}+\vec{v}$
2) $\vec{u}+(\vec{v}+\vec{\omega})=(\vec{u}+\vec{v})+\vec{\omega}$
3) $\vec{u}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{u}=\vec{u}$
4) $\vec{u}+(-\vec{u})=(-\vec{u})+\vec{u}=\vec{0}$
5) $k(\lambda\vec{u})=(k\lambda)\vec{u}$ $\quad(k,\lambda\in\mathbb{R})$
6) $k(\vec{u}+\vec{v})=k\vec{u}+k\vec{v}$
7) $(k+\lambda)\vec{u}=k\vec{u}+\lambda\vec{u}$
8) $1\vec{u}=\vec{u}$

χ. $\vec{v}+\vec{\omega}=(v_1+\omega_1, v_2+\omega_2, v_3+\omega_3)=(\omega_1+v_1, \omega_2+v_2, \omega_3+v_3)=\vec{\omega}+\vec{v}$

ΟΡΜΑ-ΜΕΤΡΟ

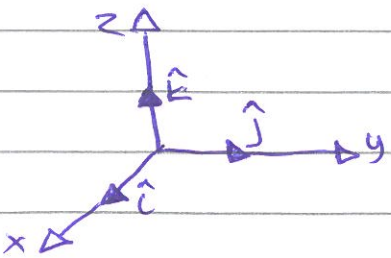


ν $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, το μέτρο/νόρμα του $\vec{v}$ είναι
$\|\vec{v}\|=\sqrt{v_1^2+v_2^2+v_3^2}$

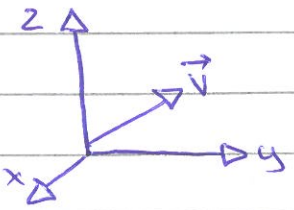
ότητα: $\|\lambda\vec{v}\|=\|\lambda\|\cdot\|\vec{v}\|$

Ένα διάνυσμα μέτρου 1 λέγεται μοναδιαίο

χ. $\hat{i}=(1,0,0)$ $\quad$ Αν $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$
$\hat{j}=(0,1,0)$ $\quad=v_1(1,0,0)+v_2(0,1,0)+v_3(0,0,1)$
$\hat{k}=(0,0,1)$ $\quad=v_1\hat{i}+v_2\hat{j}+v_3\hat{k}$



ΚΑΝΟΝΙΚΟΠΟΙΗΣΗ ΤΟΥ $\vec{v}$



Εύρεση μοναδιαίου διανύσματος στην κατεύθυνση του $\vec{v}$.

Αυτό είναι $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$ από $\|a\vec{v}\| = \|a\|\cdot\|\vec{v}\|$

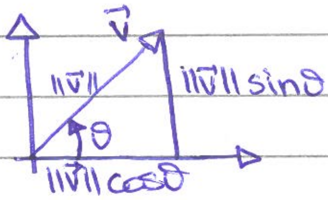
$$\left\|\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}\right\| = \frac{1}{\|\vec{v}\|}\cdot\|\vec{v}\| = 1.$$

π.χ. Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση $\vec{v} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$.

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} = \sqrt{9} = 3.$$

Το ζητούμενο διάνυσμα του $\vec{u} = \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|} = \frac{2}{3}\hat{i} + \frac{2}{3}\hat{j} - \frac{1}{3}\hat{k}$

ΕΥΡΕΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΟΣ ΜΕ ΜΕΤΡΟ ΚΑΙ ΓΩΝΙΑ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^2$



Έστω θ η γωνία του OX με το διάνυσμα $\vec{v}$ $(0 \le \theta \le \pi)$

Από τριγωνομετρία οι πλευρές είναι $\|\vec{v}\|\cos\theta$

$\|\vec{v}\|\sin\theta$

Άρα $\vec{v} = (\|\vec{v}\|\cos\theta, \|\vec{v}\|\sin\theta) = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta)$.

π.χ. Να βρεθεί η γωνία του OX με το διάνυσμα $\vec{v} = -\sqrt{3}\,\hat{i} + \hat{j}$

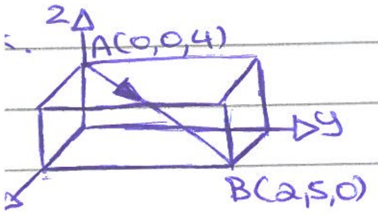
$\|\vec{v}\| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \overline{4} = 2$. είναι $\vec{v} = \|\vec{v}\|(\cos\theta, \sin\theta)$

$\Rightarrow -\sqrt{3} = 2\cos\theta$ και $1 = 2\sin\theta$

$\Rightarrow \frac{-\sqrt{3}}{2} = \cos\theta$ και $\frac{1}{2} = \sin\theta$

Εφόσον $0 \le \theta \le \pi \rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$.

ν έχουμε διάνυσμα $\vec{v}$ με γνωστό μέτρο λ που είναι στην κατεύθυνση ο $\vec{\omega}$. Τότε $\vec{v} = \lambda \dfrac{\vec{\omega}}{\|\vec{\omega}\|}$



Το $\vec{v}$ έχει μέτρο $\sqrt{5}$. Να βρεθεί το $\vec{v}$

$$\vec{v} = \sqrt{5}\,\frac{\vec{AB}}{\|\vec{AB}\|} \qquad \vec{AB} = (2,5,-4)$$

$$\|\vec{AB}\| = \sqrt{2^2+5^2+(-4)^2} = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$$

ρα $\vec{v} = \sqrt{5}\,\dfrac{(2,5,-4)}{3\sqrt{5}} = \left(\dfrac{2}{3}, \dfrac{5}{3}, \dfrac{-4}{3}\right) = \dfrac{2}{3}\hat{i} + \dfrac{5}{3}\hat{j} - \dfrac{4}{3}\hat{k}$

ΕΣΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

$\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ και $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, το εσσωτερικό τους γινόμενο είναι:
$\vec{u}\cdot\vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$

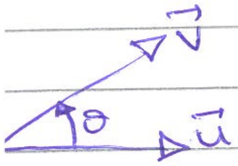
$(1,-3,4)(1,5,2) = 1\cdot 1 + (-3)\cdot 5 + 4\cdot 2 = 1 - 15 + 8 = -6.$

ΟΤΗΤΕΣ

$\vec{u}\cdot\vec{v} = \vec{v}\cdot\vec{u}$
) $\vec{u}(\vec{v}+\vec{\omega}) = \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{u}\cdot\vec{\omega}$
) $\lambda(\vec{u}\cdot\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\cdot\vec{v}$

4) $\vec{v}\cdot\vec{v} = \|\vec{v}\|^2$
όπου δίνει $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v}\cdot\vec{v}}$
5) $\vec{0}\cdot\vec{v} = \vec{0}$

ΝΙΑ 2ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ ΣΤΟΝ $\mathbb{R}^3$



Έστω θ η γωνία που πρέπει να στρέψουμε 1διάνυσμα $\vec{u}$ για να έχει ίδια κατεύθυνση με το $\vec{v}$.

ΕΩΡΗΜΑ: $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

Π.χ. Να βρεθεί η γωνία των $\vec{u}=\hat{i}-2\hat{j}+2\hat{k}$ και $\vec{v}=-3\hat{i}+6\hat{j}-6\hat{k}$

Έστω θ η γωνία $\cos\theta = \dfrac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \dfrac{-3-12-12}{\sqrt{1+4+4}\,\sqrt{9+36+36}} = \dfrac{-27}{3\cdot 9} = -1 \Rightarrow \theta=\pi$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ 1. 23/1

1) $x=t-1 \quad y=t+1 \quad (0\leq t\leq 5)$

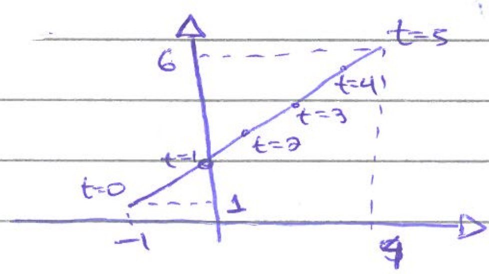
$x=t-1 \Rightarrow t=x+1$

$y=t+1 \Rightarrow y=x+1+1$

$\Rightarrow y=x+2$.

για $t=0 \to x=-1,\ y=1$

για $t=5 \to x=4,\ y=6$



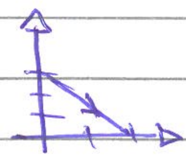
t	0	1	2	3	4	5
x	-1	0	1	2	3	4
y	1	2	3	4	5	6.

2) $x=2\sin^2 t,\ y=3\cos^2 t.\ (0\leq t\leq \frac{\pi}{2})$

Παρατηρούμε ότι $\frac{x}{2}+\frac{y}{3}=1 \Rightarrow y=-\frac{3}{2}x+3$

για $t=\frac{\pi}{2} \to x=2,\ y=0$

για $t=0 \to x=0,\ y=3$



3) (i) κύκλος με κέντρο Ο, ακτίνας 5, δεξιόστροφη

$x=5\cos t \quad y=5\sin t \quad (0\leq t\leq 2\pi)$ → κύκλος με αριστερόστροφο προσανατολισμό αντικαθιστούμε t με −t.

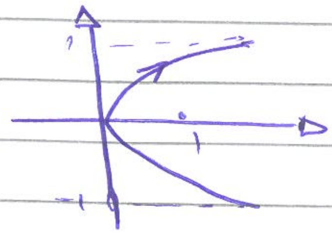
$x=5\cos t,\ y=-5\sin t \quad (0\leq t\leq 2\pi)$.

) (ii) $x=y^2$ από $(1,-1)$ στο $(1,1)$, από κάτω προς τα πάνω

$x=t^2 \qquad y=t \qquad (-1\le t\le 1)$

ή

$x=\sin^2\theta \qquad y=\sin\theta \qquad (\frac{\pi}{2}\le\theta\le-\frac{\pi}{2})$



) $x=\frac{1}{2}t^2+1$. $\quad y=\frac{1}{3}t^2-t$. $\qquad \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}$ για $t=2$.

$$\frac{dy}{d}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t}\Big|_{t=2}=\frac{3}{2}.$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}=\frac{1+\frac{1}{t^2}}{t}=\frac{t^2+1}{t^3}\Big|_{t=2}=\frac{5}{8}$$

(i) $x=e^t \quad y=e^{-t}$ για $t=1$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{-e^{-t}}{e^t}=-\frac{1}{e^{2t}}\Big|_{t=1}=-\frac{1}{e^2}$$

κλίση της εφαπτομένης είναι $-\frac{1}{e^2}$

για $t=1$, $x=e$, $y=\frac{1}{e}$ $\qquad y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e^2}(x-e)$

$(x,y)=(e,\frac{1}{e})$

(ii) Παρατηρούμε ότι $y=\frac{1}{x}$

Εφαπτομένη στο σημείο $(e,\frac{1}{e})$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{x^2}\Big|_{x=e}=-\frac{1}{e^2}$$

Άρα η εφαπτομένη είναι $y-\frac{1}{e}=-\frac{1}{e^2}(x-e)$.

Υπενθύμιση: $x = x(t) \quad y = y(t) \quad (a \le t \le b)$

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

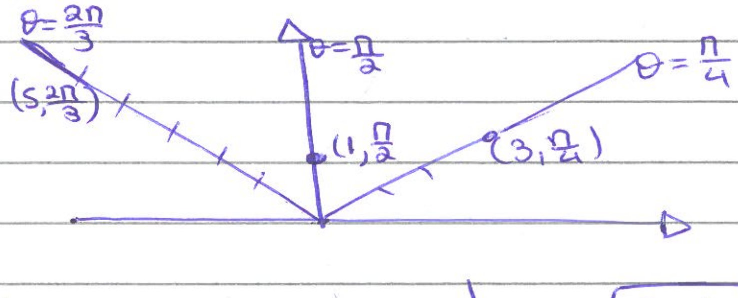
6) (i) $x = t^2 \quad y = \frac{1}{3}t^3 \quad (0 \le t \le 1)$

$$L = \int_0^1 \sqrt{(2t)^2 + (t^2)^2}\, dt$$
$$= \int_0^1 \sqrt{4t^2 + t^4}\, dt$$
$$= \int_0^1 t\sqrt{4+t^2}\, dt$$
$$\underset{\substack{4+t^2=u \\ 2t\,dt = du}}{=} \int_4^5 \frac{1}{2}\sqrt{u}\, du$$
$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\left(u^{3/2}\right)_4^5$$
$$= \frac{1}{3}\left(5^{3/2} - 4^{3/2}\right)$$

6) (ii) $x = \cos 3t \quad y = \sin 3t \quad (0 \le t \le \pi)$

$$L = \int_0^\pi \sqrt{(-3\sin 3t)^2 + (3\cos^2 t)}\, dt$$
$$= \int_0^\pi \sqrt{9}\, dt$$
$$= 3\pi. \quad (= 1{,}5 \text{ μήκος κύκλου ακτίνας } 1)$$

7) $\left(3, \frac{\pi}{4}\right) \quad \left(5, \frac{2\pi}{3}\right) \quad \left(1, \frac{\pi}{2}\right)$



Υπενθύμιση: $x = r\cos\theta \quad y = r\sin\theta \quad \Big| \quad r = \sqrt{x^2+y^2} \quad \tan\theta = \frac{y}{x}$

8) (i) $r = 2 \Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} = 2$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 4$ κύκλος με κέντρο $(0,0)$ ακτίνας 2

) (ii) $r\sin\theta = 4 \Rightarrow y = 4$ ευθεία.

) (iii) $r = 3\cos\theta \Rightarrow r^2 = 3r\cos\theta$

$\Rightarrow x^2 + y^2 = 3x$

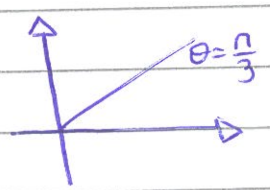
$\Rightarrow \left(x^2 - 3x + \frac{9}{4}\right) + y^2 = \frac{9}{4}$

$\Rightarrow \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{9}{4}$ κύκλος κέντρου $\left(\frac{3}{2}, 0\right)$ ακτίνας $\frac{3}{2}$.

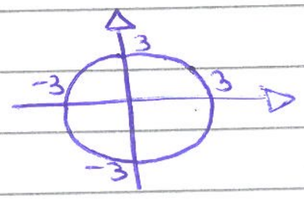
) (iv) $r = \dfrac{6}{3\cos\theta + 2\sin\theta} \Rightarrow 3r\cos\theta + 2r\sin\theta = 6$

$\Rightarrow 3x + 2y = 6$ ευθεία.

) (i) $\theta = \frac{\pi}{3}$

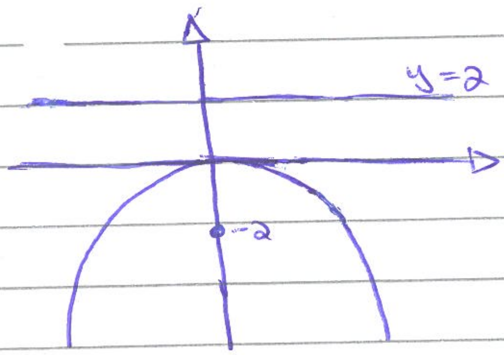


9) (ii) $r = 3$



Υπενθύμιση: Παραβολή $p > 0$	$x^2 = \pm 4py$	ανοίγει στην $\pm y$ - κατεύθυνση
	$y^2 = \pm 4px$.	ανοίγει στην $\pm x$ - κατεύθυνση

) $x^2 = -8y$



νοίγει στην $-y$ κατεύθυνση

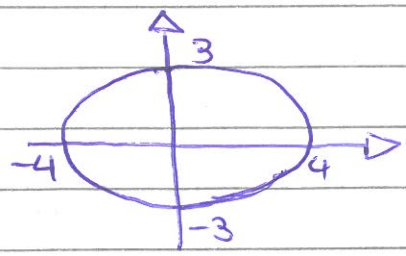
$= 2$

ιευθύνουσα $y = 2$

στία $(0, -2)$

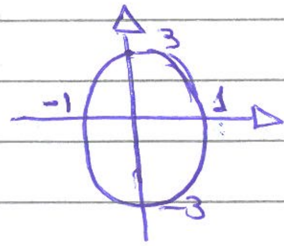
Υπενθύμιση: έλλειψη $\alpha > b > 0$	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$	μεγάλος άξονας → x κατεύθυνση
	$\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$	μεγάλος άξονας → y κατεύθυνση

11) (i) $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{9}=1$



Μεγάλος άξονας : $(-4,0) \to (4,0)$
Μικρός άξονας : $(0,-3) \to (0,3)$

11) (ii) $9x^2+y^2=9$
$\Rightarrow x^2+\frac{y^2}{9}=1$

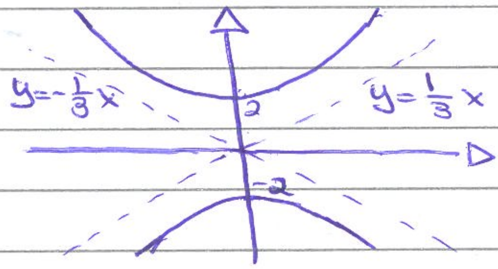


Υπενθύμιση: υπερβολή

$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	ανοίγει στην x κατεύθυνση
$\frac{y^2}{a^2}-\frac{\ }{b^2}=1$	ανοίγει στην y κατεύθυνση

12) (i) $9y^2-x^2=36$
$\Rightarrow \frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=1$

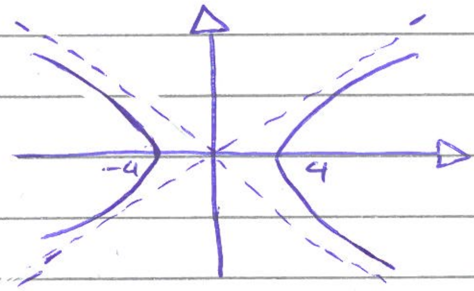
για $x=0$
$\frac{y^2}{4}=1 \Rightarrow y=\pm 2$
$\to$ κορυφές $(0,2)(0,-2)$



ασύμπτωτες $\frac{y^2}{4}-\frac{x^2}{36}=0 \Rightarrow y^2=\frac{4}{36}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{2}{6}x$

12) (ii) $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=1$

για $y=0$ $\frac{x^2}{16}=1 \Rightarrow x=\pm 4$
$\to$ κορυφές $(4,0)(-4,0)$



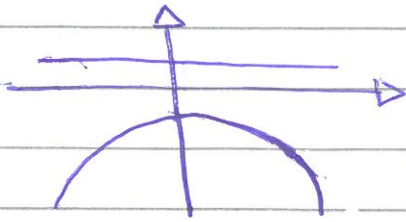
ασύμπτωτες: $\frac{x^2}{16}-\frac{y^2}{9}=0 \Rightarrow y^2=\frac{9}{16}x^2 \Rightarrow y=\pm\frac{3}{4}x$.

13) (i) Παραβολή με κορυφή (0,0) και διευθύνουσα $y=\frac{1}{4}$

$x^2=-4py$

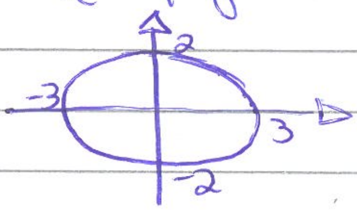
$p=\frac{1}{4}$

$\Rightarrow x^2=-y$



3) (ii) Έλλειψη με άκρα μεγάλου άξονα $(\pm 3,0)$, μικρού άξονα $(0,\pm 2)$

$\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1.$



3) (iii) Υπερβολή με κορυφές $(0,\pm 2)$, ασύμπτωτες $y=\pm\frac{2}{3}x$.

$\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=1$ | $\frac{y^2}{a^2}+\frac{x^2}{b^2}=0$

$\Rightarrow y=\pm\frac{a}{b}x$

$\Rightarrow b=3 \quad a=\pm 2.$

Άρα $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{4}=1.$

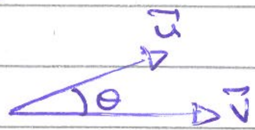
$\vec{v}=(a,b,c)$

Πράξεις Διανυσμάτων $\rightleftarrows$ Πράξεις στον $\mathbb{R}^3$

Μέτρο/Μήκος/Νόρμα $\|\vec{v}\|=\sqrt{a^2+b^2+c^2}$

2.3. ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$



$(0\leq\theta\leq\pi)$

$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{\|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|}$

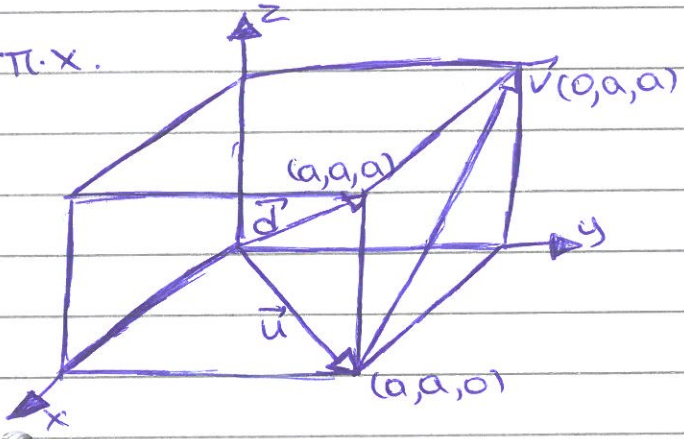
$\vec{u}\cdot\vec{v}>0 \Rightarrow \theta$ οξεία

$\vec{u}\cdot\vec{v}<0 \Rightarrow \theta$ αμβλεία

$\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \Rightarrow \theta=\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \vec{u}$ και $\vec{v}$ παράλληλα

Συμπλήρωμα: $\vec{u} \parallel \vec{v} \iff$ υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\vec{u} = \lambda \vec{v}$

π.χ.



Το σχήμα είναι κύβος.

i) Να βρεθεί η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{u}$ με υπολογιστική

ii) Να βρεθεί η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{v}$ χωρίς υπολογιστική

i) Έστω θ η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{u}$

$$\cos\theta = \frac{\vec{d}\cdot\vec{u}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{u}\|}$$

Έστω a η ακμή του κύβου

$\vec{d} = (a,a,a)$ $\vec{u} = (a,a,0)$

$$\cos\theta = \frac{\vec{d}\cdot\vec{u}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{u}\|} = \frac{a^2+a^2+0}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{a^2+a^2+0^2}} = \frac{2a^2}{\sqrt{3a^2}\sqrt{2a^2}} = \frac{2\cancel{a^2}}{\sqrt{6}\cancel{a^2}} = \frac{2}{\sqrt{6}}$$

$$\Rightarrow \theta = \cos^{-1}\frac{2}{\sqrt{6}} \approx 35^\circ$$

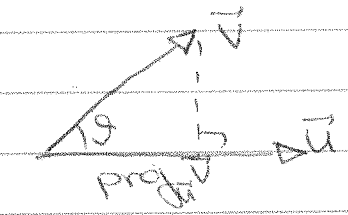
ii) $\vec{v} = (0-a, a-a, a-0) = (-a, 0, a)$

Έστω φ η γωνία των $\vec{d}$ και $\vec{v}$

$$\cos\varphi = \frac{\vec{d}\cdot\vec{v}}{\|\vec{d}\|\cdot\|\vec{v}\|} = \frac{-a^2+0+a^2}{\sqrt{a^2+a^2+a^2}\sqrt{a^2+a^2+0}} = 0$$

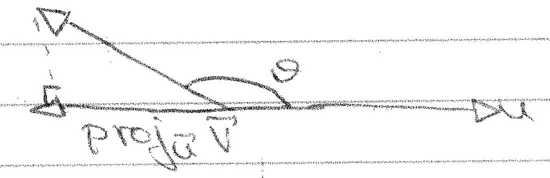
$$\Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2}$$

Προβολές $\quad \text{proj}_{\vec u}\vec v = \dfrac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|^2}\cdot\vec u$



Απόδειξη από τριγωνομετρία

$\cos\theta = \dfrac{\|\text{proj}_{\vec u}\vec v\|}{\|\vec v\|}$, $\quad \cos\theta = \dfrac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|}$



Άρα $\dfrac{\|\text{proj}_{\vec u}\vec v\|}{\|\vec v\|} = \dfrac{\vec u\,\vec v}{\|\vec u\|\cdot\|\vec v\|} \Rightarrow \|\text{proj}_{\vec u}\vec v\| = \dfrac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|}$

$$\text{proj}_{\vec u}\vec v = \frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|}\cdot\frac{\vec u}{\|\vec u\|} = \frac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|}\cdot\vec u$$

↑ μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του $\vec u$.

π.χ. Να βρεθεί η προβολή του $\vec u = \hat i+\hat j+\hat k$ πάνω στο $\vec b = 2\hat i+2\hat j$

$$\text{proj}_{\vec b}\vec u = \frac{\vec u\cdot\vec b}{\|\vec b\|}\cdot\vec b = \frac{2+2+0}{\sqrt{2^2+2^2+0^2}}(2\hat i+2\hat j) = \frac{4}{8}(2\hat i+2\hat j) = \hat i+\hat j$$

Παρατήρηση $\quad \text{proj}_{\vec u}\vec v = \dfrac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|}\cdot\vec u$

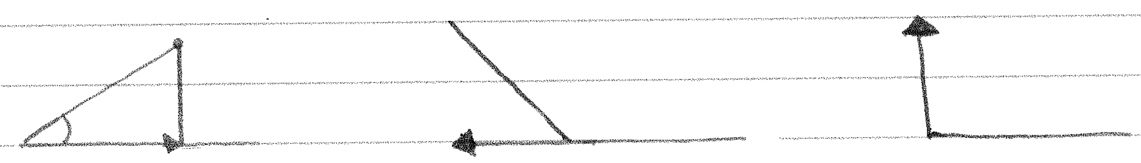
$\Rightarrow \text{proj}_{\vec u}\vec v = \dfrac{\vec u\cdot\vec v}{\|\vec u\|^2}\cdot\cancel{\vec u\cdot\vec u}$

$\Rightarrow \vec u\cdot\text{proj}_{\vec u}\vec v = \vec u\cdot\vec v.$

$\text{proj}_{\vec u}\vec v = \lambda\vec u$

$\Rightarrow \vec u\,\text{proj}_{\vec u}\vec v = \lambda\,\vec u\cdot\vec u$

$\Rightarrow \vec u\,\text{proj}_{\vec u}\vec v = \lambda\|\vec u\|^2$



2.4. ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ

Παρένθεση: Ορίζουσες πινάκων

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - b_1 a_2$$

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

π.χ. $$\begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 3(8+12) - (-4+15) = 49$$

→ Αν μια γραμμή ή στήλη του πίνακα αποτελείται από 0, η ορίζουσα είναι 0.

→ Αν ανταλλάξουμε σειρές ενός πίνακα, η ορίζουσα πολλαπλασιάζεται με -1

Το εξωτερικό γινόμενο ορίζεται μόνο στον $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ: Έστω $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$. Το εξωτερικό γινόμενο είναι:

$$\vec{u} \times \vec{v} = \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \hat{k} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}$$

π.χ. $\vec{u} = (1, 2, -2)$ $\vec{v} = (3, 0, 1)$

$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} \hat{k} = 2\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}$$

$\vec{v} \times \vec{u}$ = ορίζουσα ίδιου πίνακα με εναλλαγή γραμμών $= -(2\hat{i} - 7\hat{j} - 6\hat{k}) = -2\hat{i} + 7\hat{j} + 6\hat{k}$

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

1) $\vec{u}\times\vec{v} = -(\vec{u}\times\vec{v})$
2) $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v}) + (\vec{u}\times\vec{w})$
3) $(\vec{u}+\vec{v})\times\vec{w} = (\vec{u}\times\vec{w}) + (\vec{v}\times\vec{w})$
4) $\lambda(\vec{u}\times\vec{v}) = (\lambda\vec{u})\times\vec{v} = \vec{u}\times(\lambda\vec{v})$, $\lambda\in\mathbb{R}$
5) $\vec{u}\times\vec{0} = \vec{0}\times\vec{u} = \vec{0}$
6) $\vec{u}\times\vec{u} = \vec{0}$

π.χ. $\hat{i}\times\hat{j} = \hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k} = \hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i} = \hat{j}$, $\hat{j}\times\hat{i} = -\hat{k}$, $\hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i} = -\hat{j}$

Παρατήρηση: $\vec{u}\times(\vec{v}\times\vec{w}) \neq (\vec{u}\times\vec{v})\times\vec{w}$

Το εξωτερικό γινόμενο δεν είναι προσεταιριστικό

π.χ. $\hat{i}\times(\hat{j}\times\hat{j}) = \hat{i}\times\vec{0} = \vec{0}$

$(\hat{i}\times\hat{j})\times\hat{j} = \hat{k}\times\hat{j} = -\hat{i}$

$\vec{u}\times\vec{v} = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\cos\theta$

ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ

ΘΕΩΡΗΜΑ: (1Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

$\|\vec{u}\times\vec{v}\| = \|\vec{u}\|\cdot\|\vec{v}\|\sin\theta$, όπου θ η γωνία των $\vec{u}$ και $\vec{v}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ: (2Η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ)

$\vec{u}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{0}$ δηλαδή το $\vec{u}\times\vec{v}$ είναι κάθετο στα $\vec{u}$ και $\vec{v}$

$\vec{v}\cdot(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{0}$

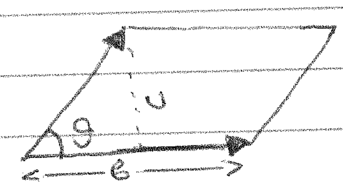
π.χ. Να βρεθεί διάνυσμα κάθετο στα $\vec{u}=(2,-1,3)$ και $\vec{v}=(-7,2,-1)$

Το $\vec{u}\times\vec{v}$ είναι ένα τέτοιο διάνυσμα

$$\vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -1 & 3 \\ -7 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}\hat{i} - \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -7 & -1 \end{vmatrix}\hat{j} + \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 2 \end{vmatrix}\hat{k} = 5\hat{i} - 19\hat{j} - 3\hat{k}$$

→ 2 διανύσματα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ σχηματίζουν παραλληλόγραμμο.

ΘΕΩΡΗΜΑ: (3η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ) Το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα $\vec{u}, \vec{v}$ είναι ίσο με $\|\vec{u} \times \vec{v}\|$



Απόδειξη: Εμβαδόν παραλληλογράμμου $= b \cdot υ$

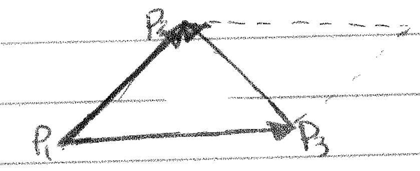
$b = \|\vec{u}\|$

Από τριγωνομετρία: $\sin\theta = \frac{υ}{\|\vec{v}\|} \Rightarrow υ = \|\vec{v}\| \sin\theta$

Άρα $Εμβ = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin\theta = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$

π.χ. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές

$P_1(2,2,0)$ $P_2(-1,0,2)$ $P_3(0,4,3)$



$\overrightarrow{P_1P_2} = (-3,-2,2)$

$\overrightarrow{P_1P_3} = (-2,2,3)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & -2 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -10\hat{i} + 5\hat{j} - 10\hat{k}$$

$$\|\overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3}\| = \sqrt{10^2 + 5^2 + 10^2} = 15$$

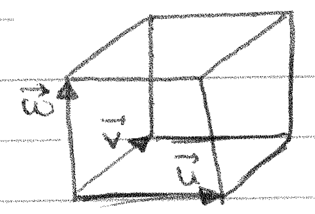
Άρα το εμβαδόν του τριγώνου $= \frac{1}{2}$ και του παραλληλογράμμου $= \frac{15}{2}$.

ΒΑΣΙΚΗ ΣΥΝΕΠΕΙΑ:

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \theta = 0$ ή $\theta = \pi \Leftrightarrow \sin\theta = 0 \Leftrightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = 0$

$\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \|\vec{u} \times \vec{v}\| = \vec{0}$

→ Τρία διανύσματα στο χώρο ορίζουν παραλληλεπίπεδο:



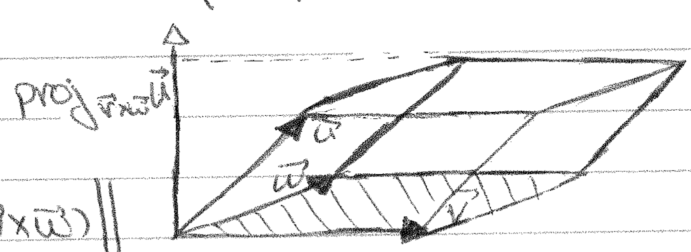
ΟΡΙΣΜΟΣ: Αν $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$, $\vec{v}=(v_1,v_2,v_3)$, $\vec{w}=(w_1,w_2,w_3)$ το γινόμενο $\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})$ ονομάζεται τριπλό βαθμωτό ή μεικτό γινόμενο.

Αποδεικνύεται ότι: $\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}$

π.χ. $\vec{u}=3\hat{i}-2\hat{j}-5\hat{k}$, $\vec{v}=\hat{i}+4\hat{j}-4\hat{k}$, $\vec{w}=3\hat{j}+2\hat{k}$. Να βρεθεί το $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$

$$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 3 & -2 & -5 \\ 1 & 4 & -4 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} - 5\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \ldots = 49.$$

ΘΕΩΡΗΜΑ: (4η ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΗ ΙΔΙΟΤΗΤΑ) Έστω $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ ο όγκος του παραλληλεπιπέδου που ορίζουν είναι ίσος με $|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$



Απόδειξη: Όγκος = Εμβαδόν βάσης · ύψος

Εμβαδόν βάσης $= \|\vec{v}\times\vec{w}\|$

Ύψος $= \|proj_{\vec{v}\times\vec{w}}\vec{u}\| = \left\| \dfrac{\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})\,(\vec{v}\times\vec{w})}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|^2} \right\|$

$$= \frac{\|\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})\|\;\|\vec{v}\times\vec{w}\|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|^2} = \frac{\|\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})\|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|}$$

Άρα όγκος $= \|\vec{v}\times\vec{w}\| = \dfrac{\|\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})\|}{\|\vec{v}\times\vec{w}\|} = \|\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})\|$

ΒΑΣΙΚΗ ΣΥΝΕΠΕΙΑ:

$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w})=0 \Leftrightarrow$ τα $\vec{u},\vec{v},\vec{w}$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο (συνεπίπεδα)

π.χ. Να δείξετε ότι τα διανύσματα $\vec{u}=(1,-2,1)$, $\vec{v}=(3,0,-2)$ και $\vec{w}=(5,-4,0)$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο.

$$\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 5 & -4 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{vmatrix} = \dots = 0$$

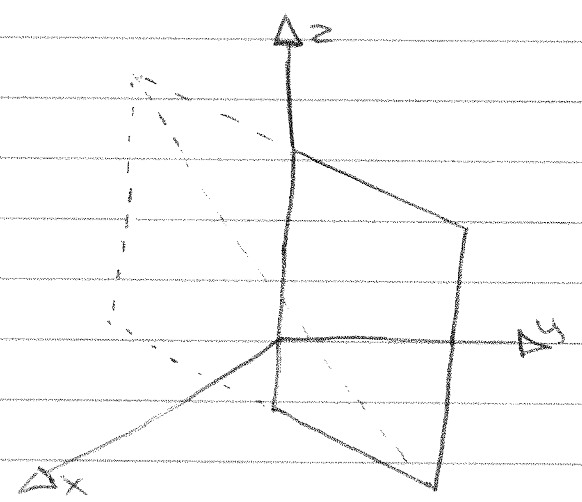
ΑΛΓΕΒΡΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥ ΜΙΚΤΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

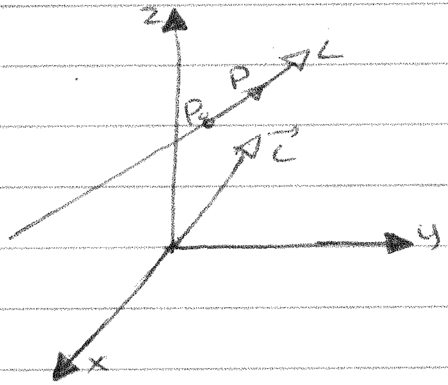
1) $\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = \vec{w}(\vec{u}\times\vec{v}) = \vec{v}(\vec{w}\times\vec{u})$

2) $\vec{u}(\vec{v}\times\vec{w}) = (\vec{u}\times\vec{v})\cdot\vec{w}$

2.5 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

Η εξίσωση $y-x=0$ στον χώρο ορίζει επίπεδο.
(παράλληλη μετατόπιση της $y=x$ στην κατεύθυνση z)





Στον χώρο μια ευθεία προσδιορίζεται από 1 σημείο της και 1 διάνυσμα παράλληλο προς αυτή.

Έστω ευθεία L που διέρχεται από το $P_0(x_0, y_0, z_0)$ και είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\vec{v} = (\alpha, b, c)$

Έστω $P(x,y,z)$ τυχαίο σημείο της ευθείας

$\overrightarrow{P_0P} \parallel \vec{v} \iff$ υπάρχει $t \in \mathbb{R}$ ώστε $\overrightarrow{P_0P} = t\vec{v}$

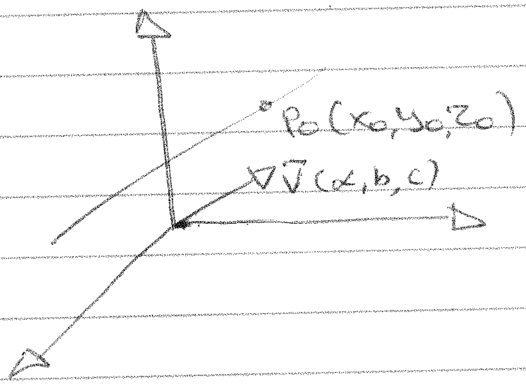
$\Rightarrow (x-x_0, y-y_0, z-z_0) = t(\alpha, b, c)$

$\Rightarrow x-x_0 = ta, \; y-y_0 = tb, \; z-z_0 = tc$

$\Rightarrow x = x_0 + ta, \; y = y_0 + tb, \; z = z_0 + tc \quad t \in \mathbb{R}$

(παραμετρικές εξισώσεις ευθείας)

3/2



$x = x_0 + at$

$y = y_0 + bt$

$z = z_0 + ct$

π.χ. $L_1: x = 2+3t,\ y = 4-4t,\ z = -1+8t$

$L_2: x = 5+3t,\ y = -4t,\ z = 7+8t$

Να δείξετε ότι οι ευθείες ταυτίζονται και να βρεθεί το σημείο τομής τους με το xy-επίπεδο.

Έστω για $t = t_1$ ένα σημείο της $L_1: x = 2+3t_1,\ y = 4-4t_1,\ z = -1+8t_1$

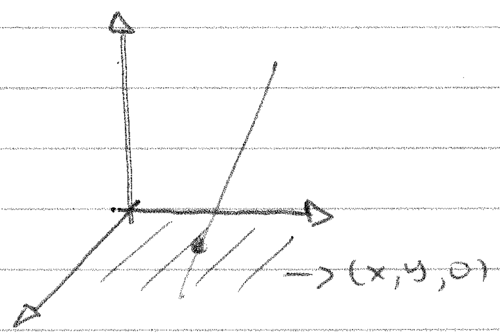
Για $t = t_1 - 1$ στην L_2 παίρνουμε: $x = 5+3(t_1-1),\ y = -4(t_1-1),\ z = 7+8(t_1-1)$

δηλαδή η L_2 διέρχεται από το ίδιο σημείο.

$-4t = 4 - 4t_1$

$\Rightarrow t = t_1 - 1.$

Σημείο τομής με επίπεδο xy



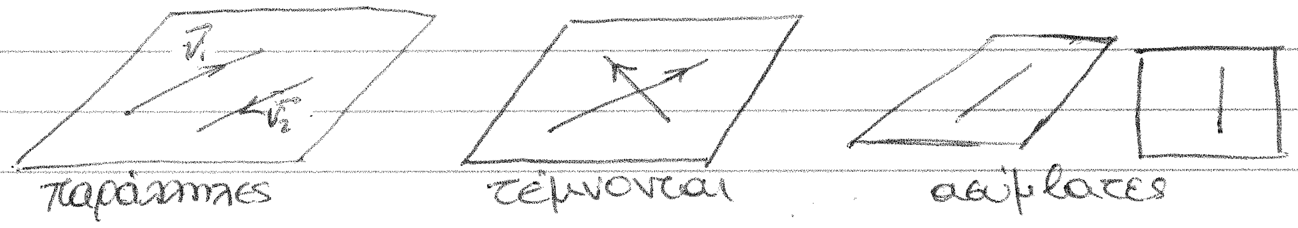
Για $z=0$. έστω L_1: $-1+8t=0$
$\Rightarrow t=\frac{1}{8}$

Για $t=\frac{1}{8}$: $x=2+\frac{3}{8}=\frac{19}{8}$
$y=4-\frac{4}{8}=\frac{7}{2}$
$z=-1+\frac{8}{8}=0$.

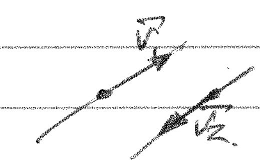
Δηλαδή το σημείο τομής είναι το $\left(\frac{19}{8}, \frac{7}{2}, 0\right)$

π.χ. L_1: $x=1+4t$, $y=5-4t$, $z=-1+5t$
L_2: $x=2+8t$, $y=4-3t$, $z=5+t$.

Να εξετάσετε αν οι ευθείες είναι παράλληλες ή τέμνονται



Οι ευθείες είναι παράλληλες $\Leftrightarrow$ τα παράλληλα διανύσματά τους είναι παράλληλα



Η L_1 είναι παράλληλη στο $\vec{v}_1=(4,-4,5)$
Η L_2 είναι παράλληλη στο $\vec{v}_2=(8,-3,1)$.

Για να είναι παράλληλα πρέπει $\vec{v}_2=a\vec{v}_1$ για κάποιο $a\in R$.
Προφανώς δεν είναι παράλληλα άρα ούτε και οι ευθείες είναι παράλληλες.

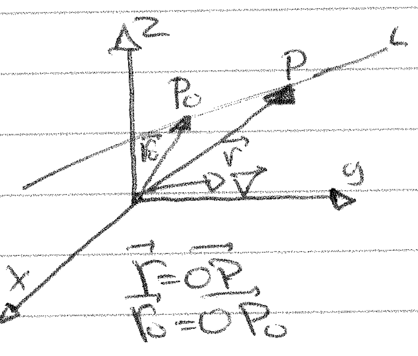
Αν υπάρχει σημείο τομής (x_0, y_0, z_0), υπάρχουν $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\begin{cases} 1+4t_1 = 2+8t_2 \\ 5-4t_1 = 4-3t_2 \\ -1+5t_1 = 5+t_2 \end{cases}$$

Αθροίζοντας τις 2 πρώτες εξισώσεις παίρνουμε $6=6+5t_2 \Rightarrow t_2=0$.
Άρα η πρώτη γίνεται $1+4t_1=2 \Rightarrow t_1=\frac{1}{4}$
Η τρίτη γίνεται $-1+5\cdot\frac{1}{4}=5+0$ · άτοπο.

$\Rightarrow$ Άρα δεν υπάρχει σημείο τομής, άρα ασύμβατες

Έστω ευθεία L που διέρχεται από το σημείο P_0 και είναι παράλληλη στο $\vec{v}$



$\vec{r}=\vec{OP}$, $\vec{r_0}=\vec{OP_0}$

- Αν P τυχαίο σημείο της ευθείας $\vec{P_0P} \parallel \vec{v}$

Επίσης: $\vec{r}=\vec{r_0}+\vec{P_0P}$

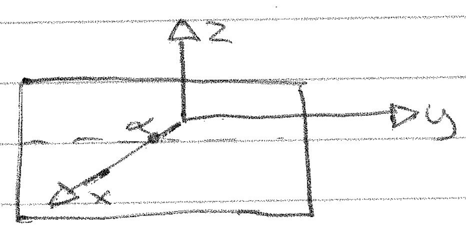
$\Rightarrow \boxed{\vec{r}=\vec{r_0}+t\vec{v}}$ Διανυσματική εξίσωση ευθείας

- Αν η L δίνεται παραμετρικά: $x=x_0+at$, $y=y_0+bt$, $z=z_0+ct$ και λύσουμε ως προς t παίρνουμε

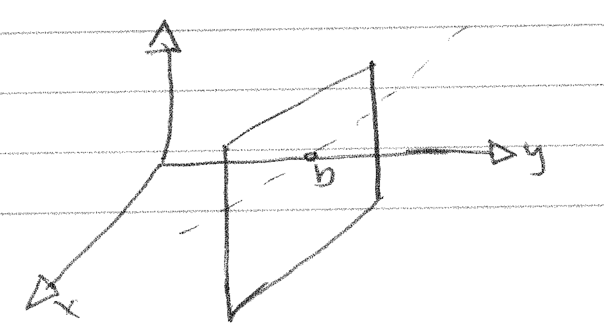
$$\boxed{\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}}$$ Συμμετρικές εξισώσεις ευθείας

2.6. ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΕΠΙΠΕΔΩΝ

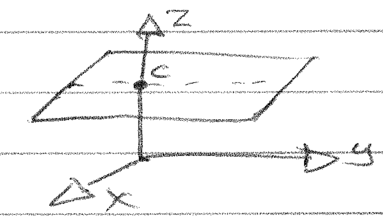
$\boxed{x=a}$ Επίπεδο παράλληλο στο yz-επίπεδο που τέμνει τον άξονα x στο a.



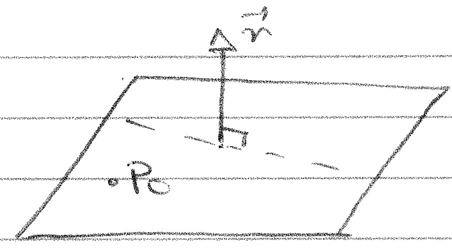
$\boxed{y=b}$ Επίπεδο παράλληλο στο xz-επίπεδο που τέμνει τον άξονα y στο b



$\boxed{z=c}$ Επίπεδο παράλληλο στο xy-επίπεδο που τέμνει τον άξονα z στο c



ΓΕΝΙΚΗ ΕΞΙΣΩΣΗ ΕΠΙΠΕΔΟΥ



Έστω επίπεδο που διέρχεται από το σημείο $P_0(x_0, y_0, z_0)$ που είναι κάθετο στο $\vec{n}=(a,b,c)$

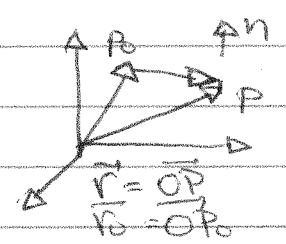
Έστω τυχαίο σημείο $P(x,y,z)$ στο επίπεδο θα πρέπει:

$\overrightarrow{P_0P} \perp n \iff \overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0 \iff (x-x_0, y-y_0, z-z_0)(a,b,c)=0$

$\Rightarrow \boxed{a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0}$ Καρτεσιανή εξίσωση επιπέδου.

Εναλλακτικά: $\overrightarrow{P_0P}\cdot\vec{n}=0$

$\Rightarrow \boxed{(\vec{r}-\vec{r}_0)\cdot\vec{n}=0}$ Διανυσματική εξίσωση επιπέδου.



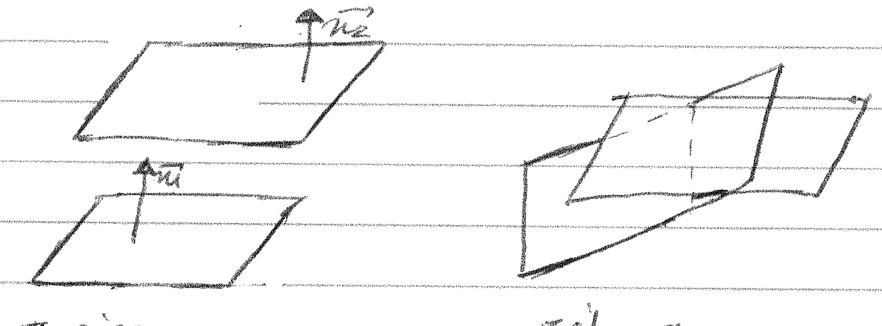
π.χ. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου που διέρχεται από το σημείο $(3,-1,7)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n}=(4,2,-5)$

$4(x-3)+2(y+1)-5(z-7)=0.$

$4x+2y-5z+25=0.$

Γενικά, η εξίσωση $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=d$ γράφεται ισοδύναμα $ax+bx+cz+d=0.$

π.χ. Είναι τα επίπεδα $3x-4y+5z=0$. και $-6x+8y-10z=0$ παράλληλα?



παράλληλα   τέμνονται

Τα επίπεδα είναι παράλληλα <=> τα κάθετα διανύσματα τους είναι παράλληλα.

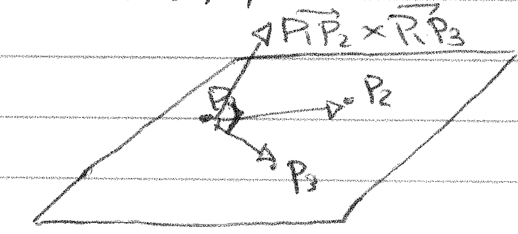
Το πρώτο επίπεδο έχει κάθετο διάνυσμα : $\vec{n_1}=(3,-4,5)$

Το δεύτερο επίπεδο έχει κάθετο διάνυσμα : $\vec{n_2}=(-6,8,-10)$

→ Παρατηρούμε ότι $\vec{n_2}=2\vec{n_1} \iff \vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$

=> Τα επίπεδα είναι παράλληλα

π.χ. Να βρεθεί εξίσωση επιπέδου που διέρχεται από τα σημεία $P_1(1,2,-1)$ $P_2(2,3,1)$ και $P_3(3,-1,2)$

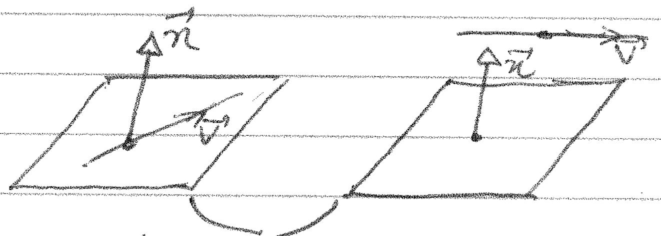


Ένα διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο είναι το $\vec{P_1P_2}\times\vec{P_1P_3} = \dots = 9\hat{i}+\hat{j}-5\hat{k}$

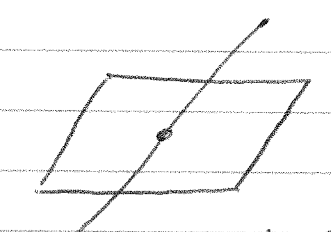
Άρα η εξίσωση του επιπέδου είναι $9(x-1)+(y-2)-5(z+1)=0$.

$\Rightarrow 9x+y-5z-16=0$.

π.χ. Να εξετάσετε αν η ευθεία $x=3+8t$, $y=4+5t$, $z=-3-t$ είναι παράλληλη στο επίπεδο $x-3y+5z=12$.



παράλληλη στο επίπεδο.



τέμνει το επίπεδο.

Η ευθεία είναι παράλληλη στο $\vec{v}=(8,5,-1)$
Το επίπεδο είναι κάθετο στο $\vec{n}=(1,-3,5)$.

Για να είναι η ευθεία παράλληλη στο επίπεδο θα πρέπει $\vec{v}\perp\vec{n} \Rightarrow \vec{v}\vec{n}=0$

$\vec{v}\cdot\vec{n}=8-15-5=-12\neq 0$.

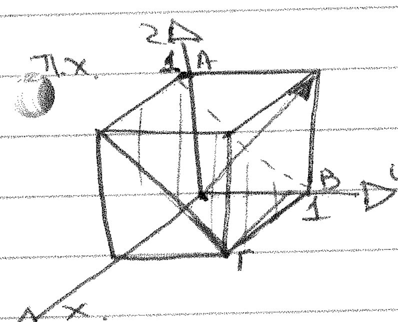
$\Rightarrow$ Άρα η ευθεία δεν είναι παράλληλη στο επίπεδο.

Το σημείο τομής (x_0,y_0,z_0) θα πρέπει να ικανοποιεί το σύστημα

$$\begin{cases} x_0=3+8t \\ y_0=4+5t \\ z_0=-3-t \\ x_0-3y_0+5z_0=12 \end{cases}$$

Η πρώτη γίνεται
$(3+8t)-3(4+5t)+5(-3-t)=12$
$\Rightarrow \dots \Rightarrow t=-3$.

Άρα $x_0=3+8(-3)=-21$, δηλαδή $(-21,-11,0)$.
$y_0=4+5(-3)=-11$
$z_0=-3-(-3)=0$.

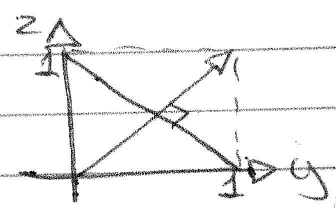


Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου

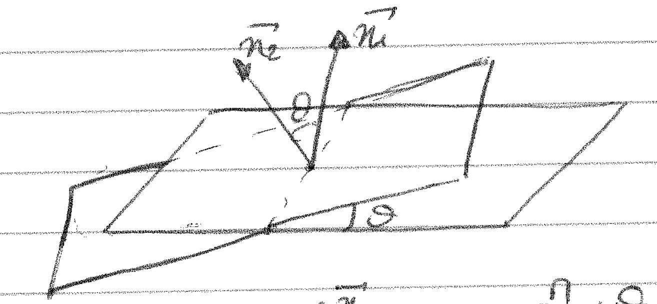
1ος τρόπος: Το επίπεδο διέρχεται από τα σημεία $A(0,0,1)$ $B(0,1,0)$ $\Gamma(1,1,0)$.

2ος τρόπος: Ένα κάθετο διάνυσμα είναι το σημείο $(0,1,1)=\vec{j}+\vec{k}$

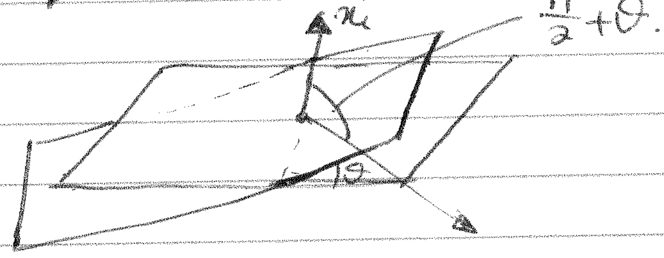
Άρα $0(x-0)+(y-0)+(z-1)=0$.
$\Rightarrow y+z=1$.



ΓΩΝΙΑ ΤΟΜΗΣ ΕΠΙΠΕΔΟΥ



Έστω θ η γωνία τομής 2 επιπέδων με κάθετα διανύσματα $\vec{n_1}$ και $\vec{n_2}$
$(0 \le \theta \le \pi/2)$



Τότε $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$

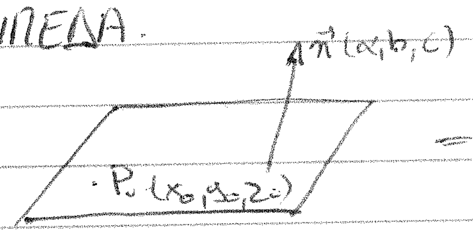
π.χ. $2x-4y+4z=6$. Ποιά είναι η γωνία τομής τους?
$6x+2y-3z=4$

$\vec{n_1}=(2,-4,4)$ $\quad \cos\theta = \dfrac{|n_1 n_2|}{\|n_1\|\,\|n_2\|} = \dfrac{|12-8-12|}{\sqrt{4+16+16}\,\sqrt{36+4+9}} = \dfrac{4}{21}$.
$\vec{n_2}=(6,2,-3)$

άρα $\theta = \cos^{-1}\frac{4}{21} \approx 79^\circ$

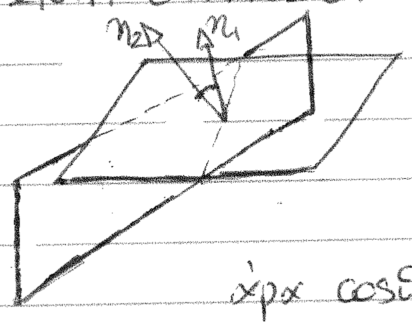
6/2.

ΕΠΙΠΕΔΑ.



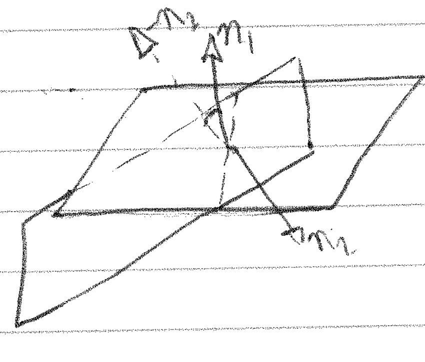
$a(x-x_0)+(y-y_0)+c(z-z_0)=0$
$\Rightarrow ax+by+cz=0$

ΓΩΝΙΑ ΕΠΙΠΕΔΟΥ

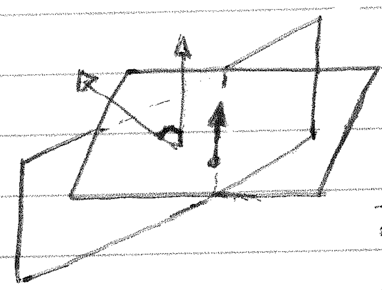


με κάθετο διανύσματα
- $\vec{n_1}$ και $\vec{n_2}$ ή
- $\vec{n_1}$ και $-\vec{n_2}$

άρα $\cos\theta = \dfrac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{\|\vec{n_1}\|\cdot\|\vec{n_2}\|}$



π.χ. $2x-4y+4z=6$, $\vec{n_1}=(2,-4,4)$ $\theta \approx 79^\circ$
$6x+2y-3z=4$, $\vec{n_2}=(6,2,-3)$



Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας τομής τους

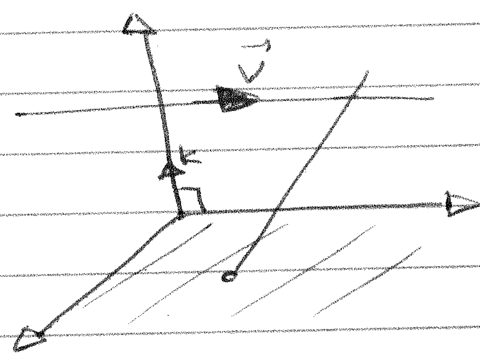
Έστω L η ευθεία τομής και $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$
$\vec{n_1} \perp$ επίπεδο 1 $\Rightarrow \vec{n_1} \perp L$ $\Big\} \Rightarrow \vec{n_1}\times\vec{n_2} \parallel L$.
$\vec{n_2} \perp$ επίπεδο 2 $\Rightarrow \vec{n_2} \perp L$ (διότι $\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ κάθετο στα $\vec{n_1}$ και $\vec{n_2}$)

Άρα το $\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}$ είναι παράλληλο στην ευθεία L

$$\vec{v}=\vec{n_1}\times\vec{n_2}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -4 & -4 \\ 6 & 2 & -3 \end{vmatrix} = \dots = 4\hat{i}+30\hat{j}+28\hat{k}$$

Ελέγχαμε αν η ευθεία έχει σημείο της μορφής $(x,y,0)$.

$\vec{v}\cdot k = (-4,30,-28)(0,0,1) = 28 \neq 0$.



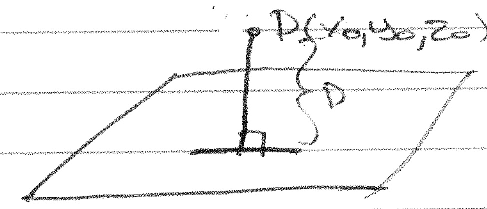
Άρα $\vec{v}$ δεν είναι κάθετο στο $\hat{k}$, άρα η ευθεία τέμνει το xy-επίπεδο στο $(x,y,0)$.

Βάλαμε $z=0$ στις εξισώσεις των επιπέδων

$$\begin{cases} 2x-4y=6 \\ 6x+2y=4 \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{matrix} x=1 \\ y=-1 \end{matrix}$$

Άρα η ευθεία έχει παραμετρικές εξισώσεις
$x=1+4t$
$y=-1+30t$
$z=28t$

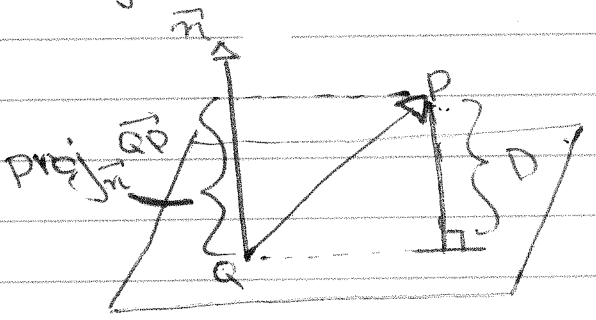
Απόσταση Σημείου Από Επίπεδο.



Έστω σημείο $P(x_0,y_0,z_0)$ και επίπεδο $ax+by+cz+d=0$. Η απόσταση του P από το επίπεδο είναι

$$D=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Απόδειξη



Έστω $\vec{n}(a,b,c)$ το κάθετο διάνυσμα του επιπέδου και $Q(x_1,y_1,z_1)$ ένα σημείο του επιπέδου.

Υποθέτουμε ότι το $\vec{n}$ έχει αρχή το Q.

Άρα $D=\|proj_{\vec{n}}\vec{QP}\| = \left\|\frac{\vec{QP}\cdot\vec{n}}{\|\vec{n}\|^2}\vec{n}\right\| = \frac{\|\vec{QP}\cdot\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|^2}\|\vec{n}\| = \frac{\|\vec{QP}\cdot\vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}$

$\vec{QP}=(x_0-x_1,y_0-y_1,z_0-z_1)$

$\vec{QP}\cdot\vec{n}=a(x_0-x_1)+b(y_0-y_1)+c(z_0-z_1)$

$=ax_0+by_0+cz_0-(ax_1+by_1+cz_1)$

$=ax_0+by_0+cz_0+d$

διότι (x_1,y_1,z_1) σημείο του επιπέδου άρα $ax_1+\quad+cz_1+d=0$

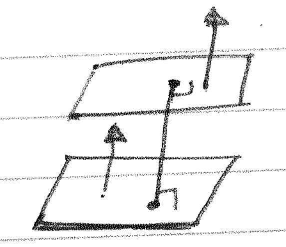
άρα $D=\dfrac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

π.χ. Απόσταση του σημείου $(1,-4,-3)$ από το επίπεδο $2x-3y+6z=-1$

$$D=\frac{|2\cdot1-3\cdot(-4)+6(-3)+1|}{\sqrt{2^2+(-3)^2+6^2}}=\dots=\frac{3}{7}$$

Απόσταση Παράλληλων Επιπέδων.

π.χ. Να δείξετε ότι $x+2y-2z=3$ και $2x+4y-4z=7$. είναι παράλληλα επίπεδα και να βρεθεί η απόσταση τους.



Τα κάθετα επίπεδα είναι παράλληλα
$\Rightarrow$ τα κάθετα διανύσματα είναι παράλληλα

$n_1=(1,2,-2)$ $\quad \vec{n_2}=2\vec{n_1}$

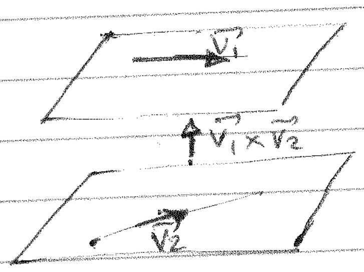
$n_2=(2,4,-4)$ $\quad$ άρα $\vec{n_1} \parallel \vec{n_2}$

Για να βρούμε σημείο του 1ου επιπέδου βάζουμε $y=z=0$ στην εξίσωση και $x=3$ άρα $(3,0,0)$

Άρα η απόσταση του επιπέδου είναι η απόσταση του $(3,0,0)$ από το άλλο επίπεδο.

$$D=\frac{|2\cdot 3+4\cdot 0-4\cdot 0-7|}{\sqrt{2^2+4^2+4^2}}=\dots=\frac{1}{6}$$

Απόσταση Ασύμβατων Ευθειών.



Ασύμβατες ευθείες βρίσκονται σε παράλληλα επίπεδα

π.χ. $L_1: x=1+4t,\ y=5-4t,\ z=-1+5t$ $\quad$ Έχουμε δει ότι είναι ασύμβατες.
$L_2: x=2+8t,\ y=4-3t,\ z=5+t.$ $\quad$ Να βρεθεί η απόσταση τους.

Έστω $\vec{v_1}=(4,-4,5)$, $\vec{v_2}=(8,-3,1)$ τα παράλληλα διανύσματα των ευθειών.

Έστω P_1, P_2 παράλληλα επίπεδα που περιέχουν τις L_1 και L_2

$$\vec{n} = \vec{V_1} \times \vec{V_2}$$

$\vec{V_1} \parallel P_1$, $\vec{n} \perp \vec{V_1} \Rightarrow \vec{n} \perp P_1$

$\vec{V_2} \parallel P_2$, $\vec{n} \perp \vec{V_2} \Rightarrow \vec{n} \perp P_2$

$$\vec{n} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 4 & -4 & 5 \\ 8 & -3 & 1 \end{vmatrix} = \dots = 11\hat{i} + 36\hat{j} + 20\hat{k}$$

Ένα σημείο στο P_1: Βάζουμε $t=0$ στην L_1

$x=1,\ y=5,\ z=-1.$

Ένα σημείο στο P_2: Βάζουμε $t=0$ στην L_2.

$x=2,\ y=4,\ z=5.$

Άρα το P_2 έχει εξίσωση $11(x-2)+36(y-4)+20(z-5)=0$

$\Rightarrow 11x+36y+20z-266=0.$

$$D = \frac{|11\cdot 1 + 36\cdot 5 + 20(-1) - 266|}{\sqrt{11^2+36^2+20^2}} = \dots = \frac{95}{\sqrt{1817}}$$

10/2.

2.7 ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΕΠΙΦΑΝΕΙΕΣ

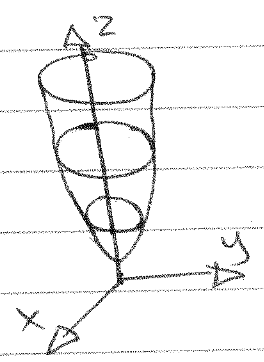
Για να καταλάβουμε το σχήμα μιας επιφάνειας παίρνουμε τομές με γνωστά επίπεδα.

π.χ. $z=x^2+y^2$

Για $z=0$ $\quad x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0.$

$z=1$ $\quad x^2+y^2=1 \Rightarrow$ κύκλος

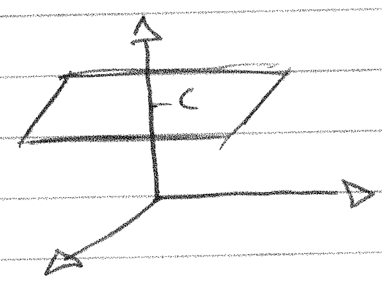
$z=-1$ $\quad x^2+y^2=-1 \Rightarrow$ αδύνατη



Για $x=0, z=y^2$ (παραβολή)

Για $y=0, z=x^2$ (παραβολή)

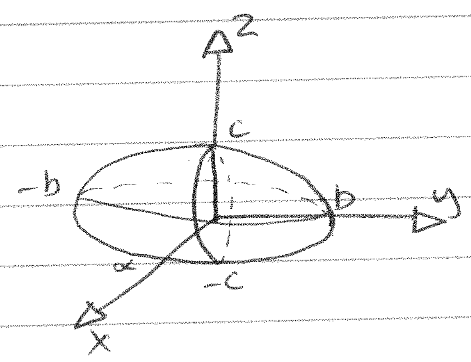
$z=c$



Η τομή μιας επιφάνειας με ένα επίπεδο λέγεται ίχνος.

1) ΕΛΛΕΙΨΟΕΙΔΕΣ ($\alpha>0, b>0, c>0$)

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$



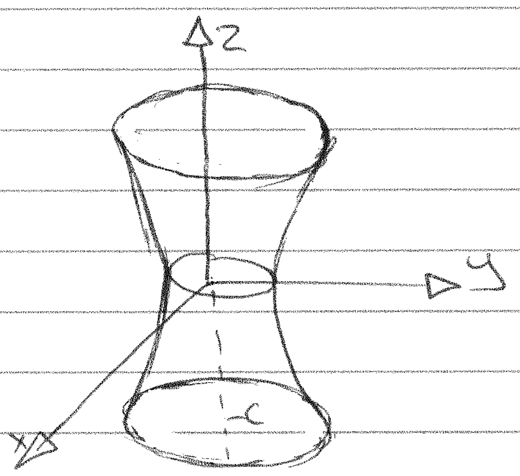
Για $x=0$ $\quad \frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Για $y=0$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$

Για $z=0$ $\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

2) ΜΟΝΟΧΩΝΟ ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΙΔΕΣ

$$\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1.\ (\alpha>0, b>0, c>0)$$



Για $z=0$. $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ (έλλειψη)

Για $z=\pm c$ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=2$. (έλλειψη)

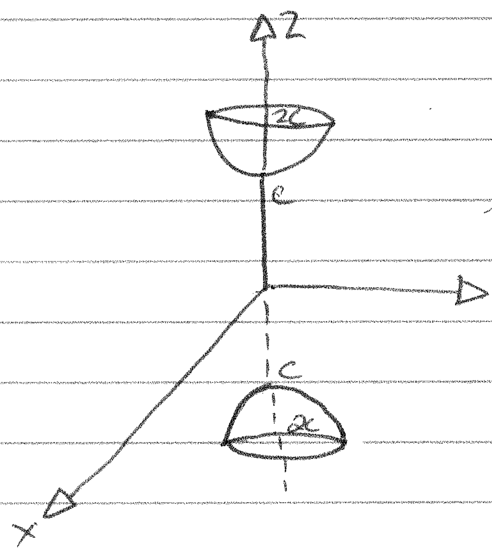
Για $x=0$. $\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (υπερβολή)

Για $y=0$ $\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$ (υπερβολή)

3) ΔΙΧΩΝΟ ΥΠΕΡΒΟΛΟΕΔΕΣ

$$\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=1\quad (\alpha>0, b>0, c>0)$$

Για $z=0$ $\frac{-x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ (αδύνατη)



Για $z=\pm c$ $-\frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{b^2}=0 \Rightarrow x=y=0$.

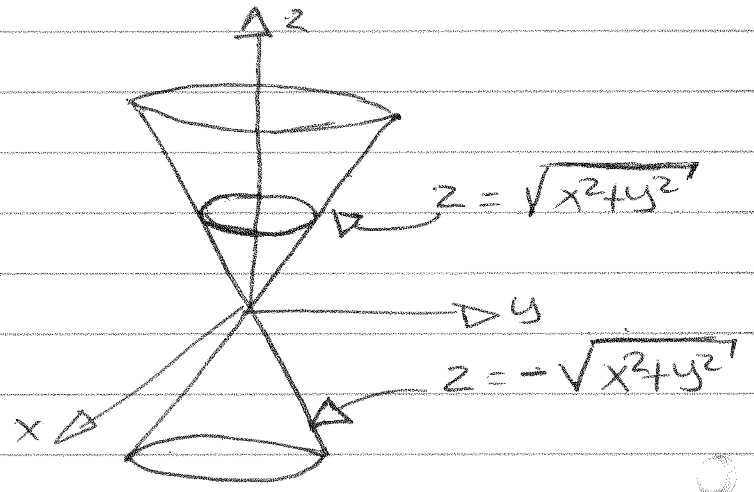
Για $z=\pm 2c$ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=3 \Rightarrow$ έλλειψη.

Για $x=0$ $\frac{z^2}{c^2}-\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ υπερβολή

Για $y=0$ $\frac{z^2}{c^2}-\frac{x^2}{\alpha^2}=1 \Rightarrow$ υπερβολή

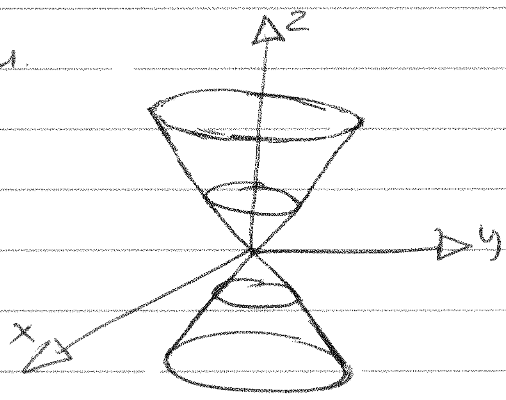
4) ΚΩΝΟΣ

$z^2 = x^2+y^2$



Για $z=0$, $x^2+y^2=0 \Rightarrow x=y=0$.
Για $z=1$, $x^2+y^2=1 \Rightarrow$ κύκλος.
$z=-1$, $x^2+y^2=1 \Rightarrow$ κύκλος.
Για $x=0$, $z^2=y^2 \Rightarrow z=\pm y$
Για $y=0$, $z^2=x^2 \Rightarrow z=\pm x$

$z^2 = \frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(\alpha>0,\ b>0)$ ← ελλειπτικός κωνος.



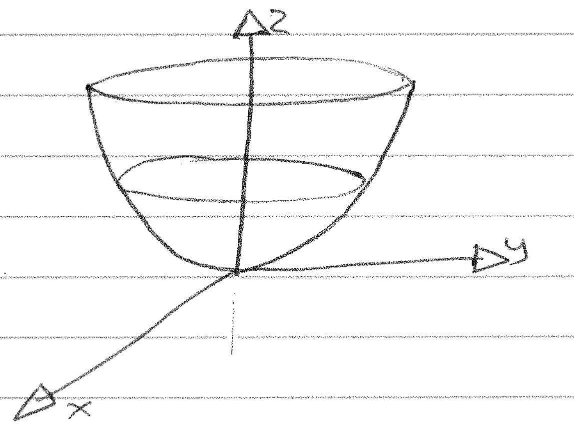
Για $z=\pm 1$ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ έλλειψη

Για $x=0$ $z^2=\frac{y^2}{b^2} \Rightarrow z=\pm\frac{y}{b}$

Για $y=0$ $z^2=\frac{x^2}{\alpha^2} \Rightarrow z=\pm\frac{x}{\alpha}$

5) ΕΛΛΕΙΠΤΙΚΟ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ

$z^2=\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}$ $(\alpha>0,\ b>0)$.

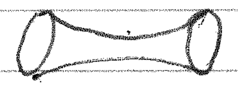


Για $z=0$, $x=y=0$.
Για $z=1$ $\frac{x^2}{\alpha^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \Rightarrow$ έλλειψη.

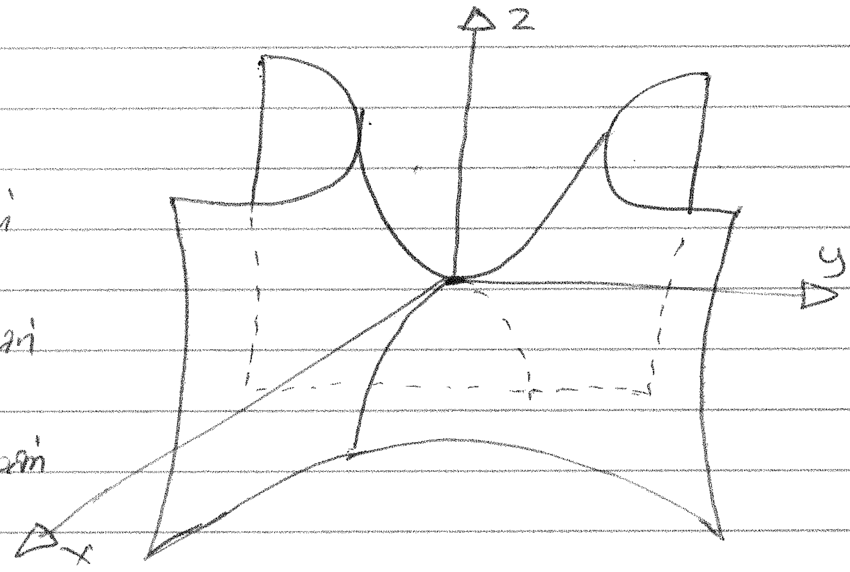
Για $x=0$ $z=\frac{y^2}{b^2} \Rightarrow$ παραβολή

Για $y=0$ $z=\frac{x^2}{\alpha^2} \Rightarrow$ παραβολή

6) ΥΠΕΡΒΟΛΙΚΟ ΠΑΡΑΒΟΛΟΕΙΔΕΣ.



$z = \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{\alpha^2}$ $(\alpha > 0, b > 0)$.



Για $x=0$ $z = \frac{y^2}{b^2} \Rightarrow$ παραβολή

Για $y=0$ $z = -\frac{x^2}{\alpha^2} \Rightarrow$ παραβολή

Για $z=1$ $\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{\alpha^2} = 1 \Rightarrow$ υπερβολή

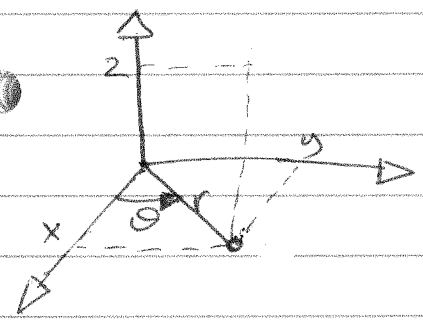
Για $z=-1$ $\frac{x^2}{\alpha^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \Rightarrow$ υπερβολή

2.8. ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ ΚΑΙ ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.

ΚΥΛΙΝΔΡΙΚΕΣ (r, θ, z)

$r \geq 0$

$0 \leq \theta \leq 2\pi$.



Από κυλινδρικές σε καρτεσιανές

$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$.

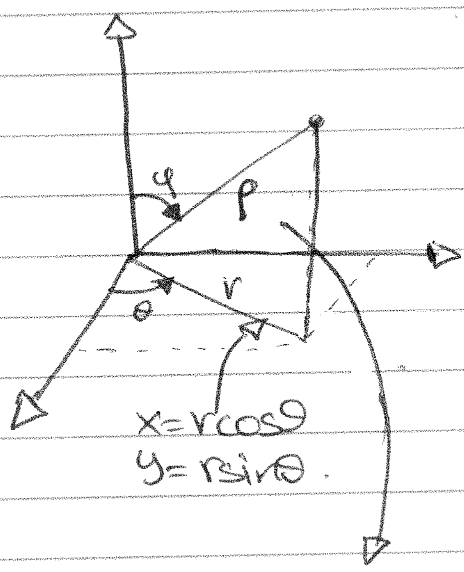
Από καρτεσιανές σε πολικές.

$r = \sqrt{x^2+y^2}$

$\tan\theta = \frac{y}{x}$

$z = z$.

ΣΦΑΙΡΙΚΕΣ. (ρ, θ, φ).

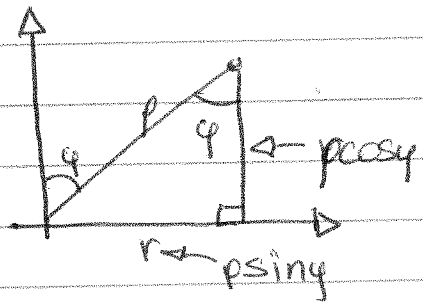


$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$.

$\rho \geq 0$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$
$0 \leq \varphi \leq \pi$

Από σφαιρικές σε καρτεσιανές.

$x = \rho\cos\varphi\cos\theta$
$y = \rho\sin\varphi\sin\theta$
$z = \rho\cos\varphi$

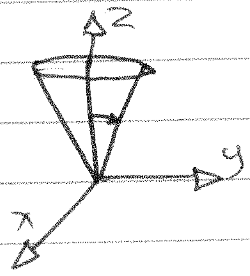


Από καρτεσιανές σε σφαιρικές

$\rho = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$
$\cos\varphi = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Επιφάνειες εκ περιστροφής → κυλινδρικές
Επιφάνειες με συμμετρίες ως προς O → σφαιρικές

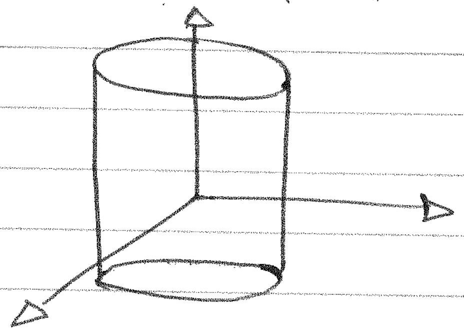
π.χ. Κώνος.



Καρτεσιανές: $z = \sqrt{x^2+y^2}$
Κυλινδρικές: $z = r$.
Σφαιρικές: $\varphi = \frac{\pi}{4}$ $\Rightarrow z = \sqrt{x^2+y^2}$

$$\Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi\cos^2\theta + \rho^2\sin^2\varphi\sin^2\theta}$$
$$\Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}$$
$$\Rightarrow \rho\cos\varphi = \sqrt{\rho^2\sin^2\varphi}$$
$$\xRightarrow{\sin\varphi>0} \rho\cos\varphi = \rho\sin\varphi$$
$$\Rightarrow \cos\varphi = \sin\varphi$$
$$\xRightarrow{0<\varphi\leq\pi} \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

π.χ. Κύλινδρος.

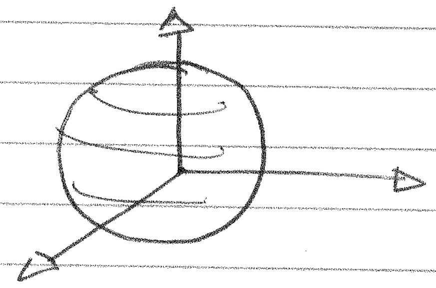


$x^2+y^2=1$

$r=1$

$\rho=\csc\varphi=\frac{1}{\sin\varphi}$.

π.χ. Σφαίρα.

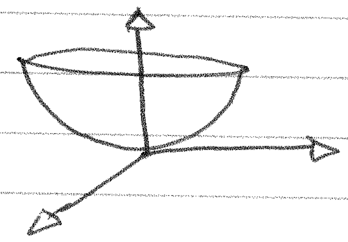


$x^2+y^2+z^2=1$

$z^2=1-r^2$

$\rho=1$.

π.χ. Παραβολοειδές.

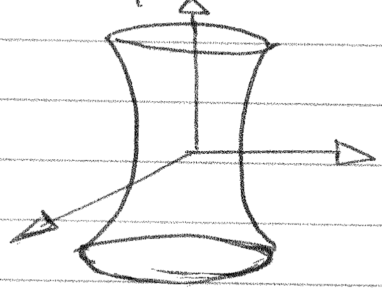


$z=x^2+y^2$

$z=r^2$

$\rho=\cos\varphi\csc^2\varphi$.

π.χ. Υπερβολοειδές



$x^2+y^2-z^2=1$.

$z^2=r^2-1$

$\rho^2=-\sec2\varphi$.

ΥΛΗ 1ΗΣ ΕΝΔΙΑΜΕΣΗΣ.