

→ Οριός: Εάν Γ διαυγείστες
και χρειάζεται.

Era νοούμενο $W \subseteq \Gamma$ αρχαία μέρη του.
και για το \emptyset του Γ στην περιοχή W
και στην πόλη (Πάτρα, Βαρύπος,
Πατραϊκός) την Γ φαντάζεται W διαυγείστες
χρειάζεται.

ταύτιση στην αρχαία και στην παραδοσιακή της παράδοση:

→ Θεώρημα: Εάν Γ διαυγείστες και
 $W \subseteq \Gamma$. Τότε W είναι μέρη του Γ αρχαίας:

αν $U, V \in W$ τότε $U \cup V \in W$
αν $U \in W$ και $V \in W$ τότε $U \cup V \in W$

⊗ παραδείγματα

① εάν $\Gamma = \mathbb{R}^n$

Το νοούμενο $W = \{\emptyset\}$ είναι μέρη του \mathbb{R}^n

Το νοούμενο \mathbb{R}^n είναι μέρη του \mathbb{R}^n

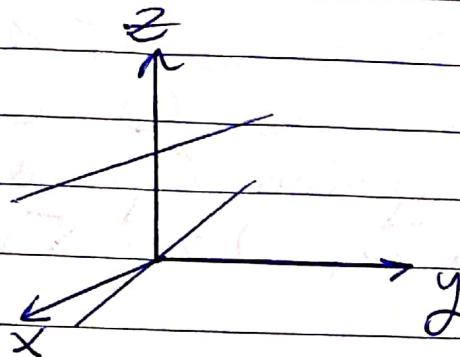
Τα $\{\emptyset\}$ και \mathbb{R}^n αρχαία τερματίστες
μέρη του \mathbb{R}^n

(2) Στον \mathbb{R}^3 κάθε ευθεία
αναπαριχή της είναι μονοδιάστατη
και \mathbb{R}^3

\Rightarrow Κατανοώντας

Λεπτίζεται το

① είναι μονοδιάστατη
και \mathbb{R}^3



\Rightarrow Να πορεύεται

Σετ είναι μονοδιάστατης και \mathbb{R}^3

Καθε ευθεία στον \mathbb{R}^3 που διέπειται από το 0

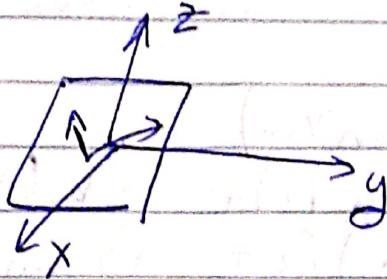
γραμμή και είναι

$$\{\vec{u} + t \vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ για κάποια } \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\lambda \vec{u} + \nu \vec{v} = (\lambda + \nu) \vec{v} \in L$$

$$k(\lambda \vec{v}) = (k\lambda) \vec{v} \in L$$

(3) Στον \mathbb{R}^3 ταξιδεύεις στο διάρκεια
από την αρχή των αξιών στην εισαγόμενη πλάτη του \mathbb{R}^3



Τετοια αντίστοιχη γραφού
και σαν

$$\{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

για κάθιστα διανομέματα
 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$(\underset{\lambda}{\lambda} \vec{u} + \underset{\mu}{\mu} \vec{v}) + (\underset{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{u} + \underset{\mu_2}{\mu_1} \vec{v}) = (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{u} + (\mu_1 + \mu_2) \vec{v}$$

$$k(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = (k\lambda) \vec{u} + (k\mu) \vec{v}$$

(4) Τα $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ τοπεται στο $\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$
Ειναι μια συμμετοχη του \mathbb{R}^n

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

Θα το ανοδειξύσμε με δείγμα

Έστω $u, w \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$
 $\Rightarrow \text{Αργα } u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$
 $w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m \quad (k_i \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} u + w &= (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) + (k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m) \\ &= (\lambda_1 + k_1) v_1 + (\lambda_2 + k_2) v_2 + \dots + (\lambda_m + k_m) v_m \\ &\in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \end{aligned}$$

$$\text{Eaw} \quad v \in \text{Span} \{v_1, \dots, v_m\}$$

$$A \in \mathbb{R}^{n \times m}, \quad u = a_1 v_1 + \dots + a_m v_m$$

$$\begin{aligned}
 KU &= K(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) \\
 &= K(\lambda_1 v_1) + K(\lambda_2 v_2) + \dots + K(\lambda_m v_m) \\
 &= (\lambda_1) v_1 + (\lambda_2) v_2 + \dots + (\lambda_m) v_m
 \end{aligned}$$

$$\in \text{Span} \{v_1, \dots, v_m\}$$

(5) tr o f t h e given $m \times n$ divar as 107F
 to Col(A) given vñóxwges 200 R^m

(7) given row (1) satisfy
 $\text{Col}(A) = \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\}$

names

Con A

(6) ~~Ar~~ Ar o A ειναι $m \times n$ Ιινακας τοτε
το αναδο των $x \in \mathbb{R}^n$ ωστε $AX = 0$
(το αναδο αυτων των αναγραφικ
αυτηματος) ειναι νησικυπος των
 \mathbb{R}^n .

Εσω x_1, x_2 αισθετικ της $AX = 0$

$$\text{δηλ. } AX_1 = 0 \text{ και } AX_2 = 0$$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$$

tpa $\Rightarrow x_1 + x_2$ αισθετικ της $AX = 0$

Ar $a \in \mathbb{R}$

$$A(2x_1) = 2(Ax_1) = 20 = 0$$

tpa $2x_1$ αισθετικ της $AX = 0$

→ Ορισμός: Έχει ο A συντομότερα τον οριζόντιο πίνακα της A να αποτελείται από μόνο λύσεις της $AX = 0$

(Σημ. αυτάς λύσεις των συγχρόνων ανθεκτικών της πίνακα A) είναι μόνη μέριμνα των B^n και οριζόντια πλευράς χωρίς λύσεις στην μηδερχίας της A και αποτελείται από τις λύσεις της $AX = 0$ της A .

$$A \xrightarrow{\text{Col}(A) \text{ and } N\ell(A)}$$

→ Ορισμός: Εάν $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ είναι μεσογειούδης του B^n . Τότε S οργανώνει τον B^n αν:

- ① $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = B^n$
- ② S γραμμικά αρρεγαπτικό

~~⊗~~ Ιταρισμένη γραμμή

$$(1) \text{ Εάν } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε διαίρεση $\text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$
 και είναι γραμμικό σύνολο ανεξάρτητο
 (γνωστό)

Από το $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι βασική βάση του \mathbb{R}^n
 και άλλοι κανονικοί βασικοί του \mathbb{R}^n

$$(2) \text{ Εάν } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ βασική βάση του \mathbb{R}^3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχει γραμμικά δοντιά σε κάθε γραμμή

Άποφα $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$

($Ax=b \Rightarrow$ έχει αυτήν την μορφή b)

Επίσης δεν υπάρχουν διαλύτρες πεταζόμενες
 (κάθε στήλη έχει γραμμικό ίχο)

Άποφα γραμμικό ανεξάρτητο

($AX=0$ σίνει πολλά αυτά την τετραγωνική.)

Άποφα είναι βάση

→ Οριός: Εάν Γ διαυγείστες
και χρειάζεται.

Era νοούμενο $W \subseteq \Gamma$ αρχαία μίκης
του Γ οπότε το $\{0\}$ του Γ ανήκει στο W
και οι πρέξεις (πρόσωπον, Βαλεντίνος,
Πατριαρχείος) των Γ φαντάρων της διαυγείστες
χρειάζεται.

ταύτιση γεγονούς είναι τα αξιώματα της διαν. χρήσης
χρησιμοποιούνται τα παρακάτω:

→ Θεώρημα: Εάν Γ διαν. χρειάζεται
και $W \subseteq \Gamma$. Τότε W είναι μίκης
του Γ αριθμού:

$$\begin{aligned} &\text{αρ } UFW \text{ το } UFW \\ &\text{αν } UFW \text{ και } AEW \text{ το } AEW \end{aligned}$$

⊗ παραδείγματα

① εάν $\Gamma = \mathbb{R}^n$

Το νοούμενο $W = \{0\}$ είναι μίκης της \mathbb{R}^n

Το μονύμενο \mathbb{R}^n είναι μίκης της \mathbb{R}^n

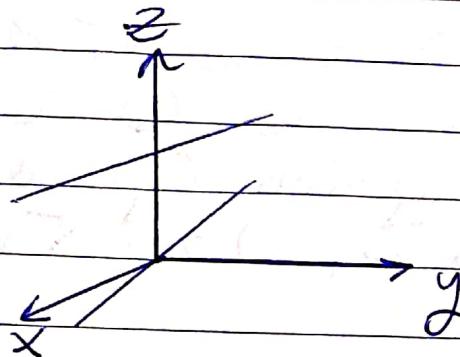
Ta $\{0\}$ και \mathbb{R}^n αρχαία τερψημένος
μίκης του \mathbb{R}^n

(2) Στον \mathbb{R}^3 κάθε ευθεία
αναπαριχή της είναι μονοδιάστατη
και \mathbb{R}^3

\Rightarrow Κατανοώντας

Λεπτίζεται το

① είναι μονοδιάστατη
και \mathbb{R}^3



\Rightarrow Να πορεύεται

Σετ είναι μονοδιάστατης και \mathbb{R}^3

Καθε ευθεία στον \mathbb{R}^3 που διέπειται από το 0

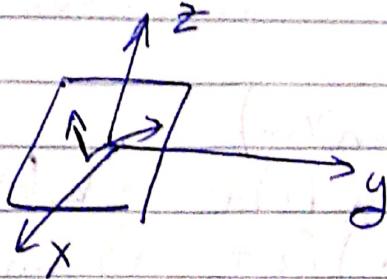
γραμμή και είναι

$$\{\vec{u} + t \vec{v} \mid t \in \mathbb{R}\} \text{ για κάποια } \vec{v} \in \mathbb{R}^3$$

$$\lambda \vec{u} + \nu \vec{v} = (\lambda + \nu) \vec{v} \in L$$

$$\lambda (\nu \vec{v}) = (\lambda \nu) \vec{v} \in L$$

(3) Στον \mathbb{R}^3 ταξιδεύεις στο διάρκεια
από την αρχή των αξιών στην εισαγόμενη πλάτη του \mathbb{R}^3



Τετοια αντίστοιχη γραφού
και σαν

$$\{ \lambda \vec{u} + \mu \vec{v} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \}$$

για κάθιστα διανομέματα
 $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$

$$(\underset{\lambda}{\lambda} \vec{u} + \underset{\mu}{\mu} \vec{v}) + (\underset{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{u} + \underset{\mu_2}{\mu_1} \vec{v}) = (\lambda_1 + \lambda_2) \vec{u} + (\mu_1 + \mu_2) \vec{v}$$

$$k(\lambda \vec{u} + \mu \vec{v}) = (k\lambda) \vec{u} + (k\mu) \vec{v}$$

(4) Τα $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$ τοπεται στο $\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$
Ειναι μια συμβολη του \mathbb{R}^n

$$\text{Span}\{v_1, \dots, v_m\} = \{ \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m \mid \lambda_i \in \mathbb{R} \}$$

Θα το ανοδειξύσμε με δείγμα

Έστω $u, w \in \text{Span}\{v_1, \dots, v_m\}$
 $\Rightarrow \text{Αργα } u = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_m v_m \quad (\lambda_i \in \mathbb{R})$
 $w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m \quad (k_i \in \mathbb{R})$

$$\begin{aligned} u + w &= (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) + (k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_m v_m) \\ &= (\lambda_1 + k_1) v_1 + (\lambda_2 + k_2) v_2 + \dots + (\lambda_m + k_m) v_m \\ &\in \text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \end{aligned}$$

$\text{For } v \in \text{Span} \{v_1, \dots, v_m\}$

Asa $v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m$
($\lambda_i \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} Kv &= k(\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_m v_m) \\ &= k(\lambda_1 v_1) + k(\lambda_2 v_2) + \dots + k(\lambda_m v_m) \\ &= (k\lambda_1) v_1 + (k\lambda_2) v_2 + \dots + (k\lambda_m) v_m \end{aligned}$$

$\in \text{Span} \{v_1, \dots, v_m\}$

(5) $\text{Col}(A)$ é o subespaço gerado pelas linhas de A , ou seja, é o subespaço de \mathbb{R}^m gerado pelas linhas de A .

(A) $\text{Col}(A) = \text{Span}\{c_1, \dots, c_n\}$

onde

$c_i = (a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{ni})^T$

é a i -ésima coluna de A .

Exemplo: Seja $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$

Então $\text{Col}(A) = \text{Span}\{c_1, c_2, c_3\}$

onde $c_1 = (1, 4, 7)^T$, $c_2 = (2, 5, 8)^T$ e $c_3 = (3, 6, 9)^T$.

(6) ~~Ar~~ Ar o A ειναι $m \times n$ Ιινακας τοτε
το αναδο των $x \in \mathbb{R}^n$ ωστε $AX = 0$
(το αναδο αυτων των αναγραφικ
αυτηματος) ειναι νησικυπος των
 \mathbb{R}^n .

Εσω x_1, x_2 αισθετικ της $AX = 0$

$$\text{δηλ. } AX_1 = 0 \text{ και } AX_2 = 0$$

$$A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = 0 + 0 = 0$$

tpa $\Rightarrow x_1 + x_2$ αισθετικ της $AX = 0$

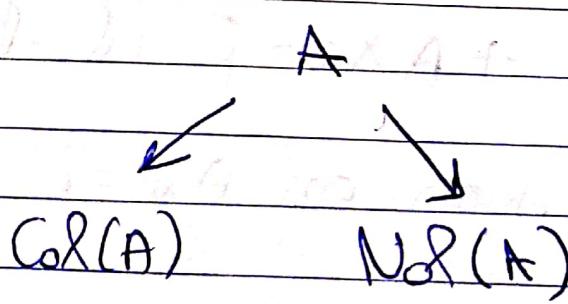
Ar $a \in \mathbb{R}$

$$A(2x_1) = 2(Ax_1) = 20 = 0$$

tpa $2x_1$ αισθετικ της $AX = 0$

→ Ορισμός: Έχει ο A συντομότερα τον οριζόντιο πίνακα της A από την άποψη της $AX = 0$

(Σημ. αυτός απέδειξε ότι σημαντικός για την εργασία μας να γνωρίζουμε την B^n και οριζόντια πλευρά της A) σύντομα μέχρι την B^n και οριζόντια πλευρά της A θα γνωρίζουμε την $\text{Col}(A)$.



→ Ορισμός: Είναι $S = \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$ μια μεμβρανούσα της B^n . Το S οργανώνει την B^n ως:

- ① $\text{Span}\{v_1, v_2, \dots, v_m\} = B^n$
- ② S γραμμικά αρρεγαπτικό

~~⊗~~ Ιταρισμένη γραμμή

$$(1) \text{ Εάν } e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

Έχουμε διαίρεση $\text{Span}\{e_1, e_2, \dots, e_n\} = \mathbb{R}^n$
 και είναι γραμμικό σύνολο ανεξάρτητο
 (γνωστό)

Από το $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ είναι βασική βάση του \mathbb{R}^n
 και άλλοι κανονικοί βασικοί του \mathbb{R}^n

$$(2) \text{ Εάν } v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι $\{v_1, v_2, v_3\}$ βασική βάση του \mathbb{R}^3

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & -3 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Έχει γραμμικά συντομεύσεις και γραμμικός

Άπο $\text{Span}\{v_1, v_2, v_3\} = \mathbb{R}^3$

($Ax=b \Rightarrow$ έχει αυτήν την μορφή b)

Επίσης δεν υπάρχουν διαλύτρες πεταζόμενες
 (καθε στήλη έχει γραμμικό \perp)

Άπο βασική ανεξάρτητο

($AX=0$ σίνει πολλά αυτά την τετραγωνική.)

Άπο είναι βασική