ΜΑΣ029 - Στοιχεία Γραμμικής Άλγεβρας
Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου - Β μέρος

1. Αν οι στηλές ενός 7×7 πίνακα D είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, τι μπορείτε να πείτε για τις λύσεις του $D\mathbf{x} = \mathbf{b}$;

2. Προσδιορίστε αν τα πιο κάτω σύνολα είναι βάσεις του $\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$.

i) $\left\{ \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 10 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$

ii) $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 \\ -7 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$

iii) $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -6 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 \\ -4 \\ 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 8 \\ 9 \end{bmatrix}, \right\}$

3. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 9 & -2 \\ 6 & 5 & 1 & 12 \\ 3 & 4 & 8 & -3 \end{bmatrix}$$

i) Είναι το Nul$A$ υπόχωρος $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^4$?

ii) Είναι το Col$A$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$ ή $\mathbb{R}^4$?

iii) Βρείτε μία βάση του πυρήνα Nul$A$ και προσδιορίστε την διάστασή του.

iv) Βρείτε μία βάση του Col$A$ και τον βαθμό του πίνακα A.

4. Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 8 & -3 & -7 \\ -1 & 2 & 7 & 3 & 4 \\ -2 & 2 & 9 & 5 & 5 \\ 3 & 6 & 9 & -5 & -2 \end{bmatrix}$$

i) Βρείτε μία βάση του πυρήνα Nul$A$ και το nullity του A.

ii) Βρείτε μία βάση του υποχώρου Col$A$ του $\mathbb{R}^4$ και την διάσταση του.

5. Έστω ο πίνακας

$$E = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ -3 & 9 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 4 & -3 \\ -4 & 12 & 2 & 7 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -3 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

i) Βρείτε το rankE.

ii) Βρείτε την μηδενικότητα του E.

6. Ἔστω ο αντιστρέψιμος πίνακας:

$$C = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 8 & -3 \\ -2 & -6 & 3 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

i) Βρείτε το ColC.
ii) Βρείτε το NulC.

7. Έστω F ένας 5×5 πίνακας του οποίου ο χώρος που παράγεται από τις στήλες του δεν είναι το $\mathbb{R}^5$. Τι μπορείτε να πείτε για τον μηδενοχώρο του;

8. Βρείτε μία βάση του υποχώρου που παράγεται από τα διανύσματα:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 9 \\ -6 \\ 12 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -4 \\ 5 \\ -3 \\ 7 \end{bmatrix} \right\}$$

Ποια η διάσταση του υποχώρου;

9. Έστω η βάση $\mathcal{B} = \{\begin{bmatrix} 1 \\ -4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \end{bmatrix}\}$ του υποχώρου H και $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -3 \\ 7 \end{bmatrix} \in H$. Βρείτε το διάνυσμα $\mathcal{B}$-συντεταγμένων του $\mathbf{y}$.

10. Έστω η βάση $\mathcal{E} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ -3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ -7 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$ του υποχώρου K και $\mathbf{z} = \begin{bmatrix} 4 \\ 10 \\ -7 \end{bmatrix} \in K$. Βρείτε το διάνυσμα $[\mathbf{z}]_{\mathcal{E}}$.

11. Θεωρούμε την απεικόνιση $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 6 \\ 3 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

Βρείτε το διάνυσμα $\mathbf{x}$ του οποίου η εικόνα είναι $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} -1 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}$ και προσδιορίστε αν το $\mathbf{x}$ είναι μοναδικό.

12. Βρείτε όλα τα $\mathbf{x}$ που απεικονίζονται στο μηδενικό διάνυσμα μέσω του μετασχηματισμού $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 7 & -5 \\ 0 & 1 & -4 & 3 \\ 2 & -6 & 6 & -4 \end{bmatrix}$$

Έστω $\mathbf{y} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$. Είναι το $\mathbf{y}$ στο πεδίο τιμών του γραμμικού μετασχηματισμού $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$;

13. Έστω $\mathbf{e_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $\mathbf{e_2} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\mathbf{y_1} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \end{bmatrix}$ και $\mathbf{y_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 6 \end{bmatrix}$ και $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ένας γραμμικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το $\mathbf{e_1}$ στο $\mathbf{y_1}$ και το $\mathbf{e_2}$ στο $\mathbf{y_2}$. Βρείτε τις εικόνες των $\begin{bmatrix} 5 \\ -3 \end{bmatrix}$ και $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$.

14. Προσδιορίστε αν οι παρακάτω μετασχηματισμοί είναι γραμμικοί:

i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $T(x_1, x_2) = (2x_1 - 3x_2, x_1 + 4, 5x_2)$

ii) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2 - x_3)$

15. Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα A που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό.

i) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(\mathbf{e_1}) = (3, 1, 3, 1)$ και $T(\mathbf{e_2}) = (-5, 2, 0, 0)$, όπου $\mathbf{e_1} = (1, 0)$ και $\mathbf{e_2} = (0, 1)$.

ii) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ απεικονίζει το $\mathbf{e_1}$ στο $\mathbf{e_1} - 2\mathbf{e_2}$ και αφήνει το $\mathbf{e_2}$ αναλλοίωτο.

16. Έστω $T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (0, x_1 + x_2, x_2 + x_3, x_3 + x_4)$.

i) Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα A που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό T.

ii) Προσδιορίστε αν ο T είναι (α) $1 - 1$, (β) επί.

17. Έστω $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - 5x_2 + 4x_3, x_2 - 6x_3)$.

i) Προσδιορίστε τον κανονικό πίνακα A που αντιστοιχεί στον γραμμικό μετασχηματισμό T.

ii) Προσδιορίστε αν ο T είναι (α) $1 - 1$, (β) επί.