Κεφάλαιο 4 - Σειρές (άπειρες)

$1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots = ?$

$1 + 1/4 + 1/8 + 1/16 + \dots = ?$

Ορισμός: Αν (a_n) είναι μία ακολουθία, ορίζουμε
(S_n) των μερικών αθροισμάτων της (a_n):

$S_1 = a_1$, $S_2 = a_1 + a_2$

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Αν η (S_n) συγκλίνει σε κάποιο αριθμό L, λέμε ότι η άπειρη σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ συγκλίνει στο L και γράφουμε

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = L$ ή $a_1 + a_2 + \dots + a_n = L$.

Αν η (S_n) αποκλίνει, λέμε ότι η σειρά

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ αποκλίνει.

Γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots$$

ονομάζεται γεωμετρική σειρά.

διαδοχικοί όροι έχουν σταθερό λόγο

$$\frac{ar^{k+1}}{ar^k} = 1$$

Έστω $a_n = ar^{n-1}$, $n \geq 1$

και

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$S_n - rS_n$$

$$(a + ar + \dots + ar^{n-1}) - r(a + ar + \dots + ar^{n-1})$$

(επιμερ.)

$$= a + \cancel{ar} + \cancel{\dots} + \cancel{ar^{n-1}} - \cancel{ar} - \cancel{ar^2} - \cancel{\dots} - \cancel{ar^{n-1}} - ar^n$$

$$= a - ar^n = a(1 - r^n)$$

$$\Rightarrow S_n - rS_n = a(1 - r^n)$$

$$\Rightarrow (1-r)S_n = a(1 - r^n)$$

$r \neq 1$ $\Rightarrow$ $\boxed{S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}}$

• Αν το $|r| > 1$, τότε το $\lim_{n \to \pm\infty} S_n = \pm\infty$

• $|r| < 1$, τότε το $\lim_{n \to \infty} S_n = \frac{a}{1-r}$

$|r| > 1 \Rightarrow r^n \to \pm\infty$
$|r| < 1 \Rightarrow r^n \to 0$

SOS: Άρα η γεωμετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a r^{k-1}$

συγκλίνει στο $\frac{a}{1-r}$ όταν $|r| < 1$

αποκλίνει αν $|r| > 1$

Αρμονική σειρά

• $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$

⇒ Η αρμονική σειρά αποκλίνει

• p: σειρές ($p > 1$)

$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p}$ ⇒ αυτή η σειρά συγκλίνει

Άπειρες σειρές

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_k + \dots$$

Μερικά αθροίσματα:

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

$\sum a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow$ S_n συγκλίνει

Γεωμετρική σειρά:

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = a + ar + ar^2 + \dots$$

$$\frac{ar^{k+1}}{ar^k} = r$$ (διαδοχικοί όροι έχουν σταθερό λόγο)

→ συγκλίνει αν $|r| < 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \frac{a}{1-r}$$

$$* \quad \sum_{k=1}^{\infty} ar^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} ar^k$$

Αρμονική σειρά

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$ αποκλίνει → το (κ) να είναι στον παρονομαστή

p - σειρές $(p \geq 2)$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^p} \rightarrow$$ συγκλίνει

Πχ Να εξετάσετε αν οι σειρές συγκλίνουν

i) $\sum_{k=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$

• Είναι γεωμετρική σειρά με:

$\boxed{a = 1}$ $\boxed{|r| = 1/2}$

• Επειδή $|r| < 1$, άρα η σειρά συγκλίνει στο $\frac{a}{1-r} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$ (Θα καταλήγει στο $2/3$)

βi) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \dots$

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{k+1-k}{k(k+1)} = \frac{k+1}{k(k+1)} - \frac{k}{(k+1)k}$$

$$= \frac{1}{k} - \frac{k}{(k+1)k}$$

$$S_n = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{k} - \frac{k}{(k+1)k} \right)$$

$$= \left(1 - \cancel{\tfrac{1}{2}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{2}} - \cancel{\tfrac{1}{3}}\right) + \left(\cancel{\tfrac{1}{3}} - \cancel{\tfrac{1}{4}}\right) + \dots$$

$$\dots + \left(\cancel{\tfrac{1}{n}} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1}$$

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 1 - 0 = 1$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)} = 1 \quad \text{(η σειρά συγκλίνει στο 1)}$$

Απορία.
πώς θα γνωρίζουμε πότε θα κάνουμε αυτή τη διαδικασία. Μπορούσαμε να το κάνουμε με Α, Β δηλ. $\frac{A}{k} + \frac{B}{k+1}$

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{5}{k} = 5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{3} + \dots$

Αφού είναι αρμονική σειρά, άρα αποκλίνει.

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} 3^{2k} \cdot 5^{1-k} = \sum_{k=1}^{\infty} 9^{k} \cdot 5^{1-k}$

$(3^2)^k = (9)^k$

$= \sum_{k=1}^{\infty} 9^{k} \cdot \frac{1}{5^{k-1}}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} 9 \cdot 9^{k-1} \cdot \frac{1}{5^{k-1}}$

$= \sum_{k=1}^{\infty} 9 \left(\frac{9}{5}\right)^{k-1}$

Γεωμετρική με:

$\boxed{a = 9}$

$\boxed{r = \frac{9}{5}}$

$r > 1$, Άρα αποκλίνει

Ερωτήσεις:

1) Αν συγκλίνουν ή αποκλίνει.

2) Αν συγκλίνει η σειρά, ποιο είναι το όριο: $\Rightarrow$

Πχ $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = -\ln 2$

$$S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\frac{3}{4} + \ln\frac{3}{9} + \ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left(1-\frac{1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{k^2-1}{k^2}\right) = \ln\left(\frac{(k+1)(k-1)}{k^2}\right)$$

$$= \ln\left(\frac{k+1}{k} \cdot \frac{k-1}{k}\right) = \ln\left(\frac{k+1}{k}\right)^{*} + \ln\left(\frac{k-1}{k}\right)$$

αναστρέφω το *

$\ln\frac{1}{x} = -\ln x$ $\Rightarrow$

$$= \ln\left(\frac{k-1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)^{*}$$

$$S_n = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\ln\left(\frac{k-1}{k}\right) - \ln\left(\frac{k}{k+1}\right)\right)$$

$$= \left(\ln\frac{1}{2} - \cancel{\ln\frac{2}{3}}\right) + \left(\cancel{\ln\frac{2}{3}} - \cancel{\ln\frac{3}{4}}\right) + \cancel{\ldots}$$

$$\cancel{\ldots} + \left(\ln\frac{n-1}{n} - \ln\frac{n}{n+1}\right)$$

$$= \ln\frac{1}{2} - \ln\frac{n}{n+1}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{1}{2} - \ln\frac{n}{n+1}\right) = \ln\frac{1}{2} - \lim_{n\to\infty}\left(\ln\frac{n}{n}\right)$$

$$= \ln\frac{1}{2} - \ln \cancelto{0}{1}$$

$$= \ln\frac{1}{2} - 0$$

$$= \ln 2$$

1) Κριτήριο αποκλισης:

Αν $\lim_{k \to +\infty} a_k \neq 0$ τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

αποκλίνει.

Το αντίστροφο δεν ισχύει αν:

$\lim a_k = 0$, $\sum a_k$ συγκλίνει ή αποκλίνει

Πχ $\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}\right)$

Πχ $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^2+1}{2k^2+2k+5} = \lim_{k \to \infty} \frac{k^2}{2k^2} = \frac{1}{2} \neq 0$

Άρα σίγουρα η σειρά αποκλίνει.

Πχ $\sum_{k=1}^{\infty} \ln k = +\infty$

$\lim_{k \to \infty} \ln k = +\infty$, Η σειρά αποκλίνει

2) Κριτήριο ολοκλήρωσης (η σειρά συγκλίνει)

Αν ο όρος $a_k \geq 0$ μιας μη αρνητικής ακολουθίας δίνονται από τις τιμές $f(x)$ μιας μη αρνητικής και φθίνουσας συνάρτησης $f(x)$, $x \geq 1$.

Τότε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ και το ολοκλήρωμα $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$, αμφότερα συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

Πχ 5) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2}$

Έστω $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, $x \geq 1$

$f(x) > 0, \ \forall x \geq 1$

$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2} < 0, \ \forall x \geq 1$

$\Rightarrow f$ φθίνουσα//

Εξετάζω αν το όριο του ολοκληρώματος συγκλίνει ή αποκλίνει:

$$\int_1^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{L\to\infty} \int_1^{L} \frac{1}{1+x^2}\,dx$$

$$= \lim_{L\to+\infty} \left[\text{τοξεφ}\, x\right]_1^L$$

τοξεφ$1 = \pi/4$

τοξεφ$\infty = \pi/2$

$$= \lim_{L\to+\infty} (\text{τοξεφ}\, L - \text{τοξεφ}\, 1)$$

$$= \pi/2 - \pi/4 = \pi/4.$$

Αφού το ολοκλήρωμα συγκλίνει, άρα η σειρά συγκλίνει.

ii) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\ln k}{k^2}$

Έστω $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$, $\ln x$ αφού $x \geq 2$
Άρα $\ln x > 0, \forall x \in [2, +\infty)$

$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} x^2 - \ln x \, 2x}{x^4} = \frac{x - 2x \ln x}{x^4}$

$= \frac{\cancel{x}(1 - 2\ln x)}{x^{\cancel{4}}}$

$= \frac{1 - 2\ln x}{x^3}$

$\left(\overset{2\ln x}{\overset{\shortparallel}{\ln x^2}} \geq \ln x^4 \geq 1 \right)$

$f'(x) < 0$, Άρα η f είναι φθίνουσα.

$\int_2^{\infty} \frac{\ln x}{x^2} dx = \lim_{L \to +\infty} \int_2^L \frac{\ln x}{x^2} dx$

(κατά παράγ.)

$\boxed{u \cdot v - \int v du}$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^L - \int_2^L -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx$

$u = \ln x$

$du = \frac{1}{x} dx$

$v = \int \frac{1}{x^2} dx$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^L + \int_2^L \frac{1}{x^2} dx$

$v = \int x^{-2} dx$

$\boxed{v = -x^{-1}}$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} \right]_2^L + \int_2^L x^{-2} dx$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} - x^{-1} \right]_2^L$

$= \left[-\frac{\ln x}{x} - \frac{1}{x} \right]_2^L$

$$= -\frac{\ln L}{L} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{L} + \frac{1}{2}$$

Άρα $$\int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{L \to +\infty} \left(-\frac{\ln L}{L} + \frac{\ln 2}{2} - \frac{1}{L} + \frac{1}{2} \right)$$

$$= \lim_{L \to +\infty} \frac{\ln L}{L} + \frac{\ln 2}{2} - 0 + 1/2$$

$$\overset{DLH}{\Longrightarrow} \lim_{L \to +\infty} \frac{\frac{1}{L}}{1} + \frac{\ln 2 + 1}{2}$$

$$= \ln 2 + 1$$

Εφόσον το ολοκλήρωμα συγκλίνει και η σειρά συγκλίνει.

$\sum a_k$

1) Αν $\lim_{k\to\infty} a_k \neq 0$, τότε η σειρά αποκλίνει

2) $a_k = f(k)$, f μη-αρνητική και φθίνουσα, τότε

$\sum a_k$ συγκλίνει $\Leftrightarrow \int_1^{\infty} f(x)\,dx$ συγκλίνει

$\sum \frac{\ln k}{k^2}$

Πχ

$\sum \frac{2k+5}{k^2+5k+7}$

Έστω

$f(x) = \frac{2x+5}{x^2+5x+7}$, $x \geq 1$

$f(x) \geq 0$, $\forall x \geq 1$.

$$f'(x) = \frac{2(x^2+5x+7) - (2x+5)(2x+5)}{(x^2+5x+7)^2}$$

$$= \frac{2x^2+10x+14-4x^2-20x-25}{(x^2+5x+7)^2}$$

$$= \frac{-2x^2-10x-11}{(x^2+5x+7)^2}$$

Άρα f φθίνουσα $\forall x \geq 1$

$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_1^\infty \frac{2x+5}{x^2+5x+7}\,dx$$

$$=\lim_{L\to+\infty}\left[\ln(x^2+5x+7)\right]_1^L$$

$$=\lim_{L\to+\infty}\left(\ln(L^2+5L+7)-\ln 13\right)$$

$$=+\infty.$$

Άρα η σειρά αποκλίνει.

Υπενθύμιση

$$\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^p}, \quad p\geq 2$$

συγκλίνει.

Θα το επαληθεύσουμε με το κριτήριο ολοκλήρωσης.

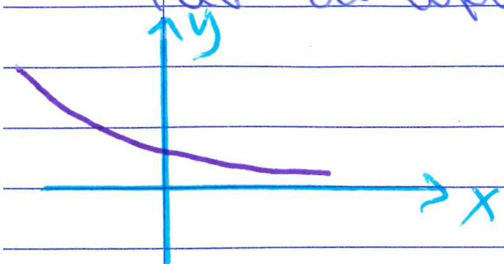
Έστω $f(x)=\frac{1}{x^p}$, $p\geq 1$.

$f(x)\geq 0, \ \forall x\geq 1$

f φθίνουσα $\forall x\geq 1$.

$f'(x)=(x^{-p})' = -p^{-p-1}<0, \ \forall x\geq 1$.

(αν δεν θυμόμαστε το γράφημα μπορούμε να παραγ.)



$$\int_1^\infty f(x)\,dx = \lim_{L\to+\infty}\int_1^\infty \frac{1}{x^p}\,dx.$$

$$= \lim_{L \to +\infty} \int_1^{\infty} x^{-p}\, dx = \lim_{L \to +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^L$$

$$\frac{1}{1-p} \lim_{L \to +\infty} \left(L^{-p+1} - 1 \right) = \frac{1}{1-p} \lim_{L \to +\infty} \left(\frac{1}{L^{p-1}} - 1 \right)$$

$$= \frac{1}{1-p} (0 - 1) = -\frac{1}{1-p}$$

Άρα η σειρά συγκλίνει.

Κριτήριο οριακής σύγκρισης

Έστω ότι η $\sum a_k$ και $\sum b_k$ είναι σειρές με θετικούς όρους.

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k}$$

Αν το ρ είναι πεπερασμένο (δηλ. όχι $\pm\infty$), και $\rho \neq 0$, τότε οι σειρές αμφότερες συγκλίνουν ή αποκλίνουν.

Πχ Να εξετάσετε αν οι σειρές συγκλίνουν.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k + \ln k}$ (διαλέγουμε μία σειρά που γνωρίζουμε αν συγκλίνει ή αποκλίνει και θα της συγκρίνουμε).

Θα τη συγκρίνουμε με την αρμονική σειρά $\sum \frac{1}{k}$, $a_k = \frac{1}{2k + \ln k}$, $b_k = \frac{1}{k}$.

Αποκλίνει

$$\rho = \lim_{k \to \infty} \frac{a_k}{b_k} = \lim_{k \to \infty} \frac{\frac{1}{2k+\ln k}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{2k + \ln k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k}{2k+\ln k} \overset{DLH}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2+\frac{1}{k}} = 1/2 \neq 0$$

Από το κριτήριο σύγκρισης, αφού η αρμονική σειρά αποκλίνει, η αρχική μας σειρά αποκλίνει.

note: Αν ρ=0, δεν έχουμε συμπέρασμα.

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+3}{(k+1)(k+2)(k+5)}$

συγκρίνουμε με την $\sum \frac{1}{k}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+3}{(k+1)(k+2)(k+5)}}{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^2+3k}{(k+1)(k+2)(k+5)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k^2}{k^3} = \boxed{0 = \rho}$$

⇒ Δεν έχουμε συμπέρασμα (άρα πρέπει να βρούμε τρόπο έτσι ώστε η σειρά να αποκλίνει ή να συγκλίνει)

συγκρίνουμε με την σειρά:

$\sum \frac{1}{k^2}$ (p-σειρά, με p=2, συγκλίνει)

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+3}{(k+1)(k+2)(k+5)}}{\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{k^3+3k^3}{(k+1)(k+2)(k+5)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{k^3}}{\cancel{k^3}} = 1$$

⇒ Αφού η $\sum \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, άρα και η αρχική σειρά συγκλίνει.

Κριτήριο λόγου

Έστω ότι η $\sum a_k$ είναι μία σειρά με θετικούς όρους και έστω

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k}$$

Περιπτώσεις:

1) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = +\infty$, η σειρά αποκλίνει
2) Αν $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει
3) Αν $\rho = 0$, δεν υπάρχει αποτέλεσμα

Ασκ Να εξετάσετε αν οι σειρές συγκλίνουν

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!\,10^k}{3^k}$$

όπου υπάρχει παραγοντικό είναι με κριτήριο λόγου. Δηλ. καλύτερα στο πηλίκο

$$a_k = \frac{k!\,10^k}{3^k}$$

$$a_{k+1} = \frac{(k+1)!\,10^{k+1}}{3^{k+1}}$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{(k+1)!\,10^{k+1}}{3^{k+1}}}{\frac{k!\,10^k}{3^k}}$$

$$\Rightarrow \lim_{k\to\infty} \frac{\overset{(k+1)}{\cancel{(k+1)!}}\,\overset{10}{\cancel{10^{k+1}}}\cdot \cancel{3^k}}{\underset{3}{\cancel{3^{k+1}}}\cdot \cancel{k!}\,\cancel{10^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\cdot 10}{3}$$

$$= \lim_{k\to\infty} k = +\infty$$

$\Rightarrow$ Αποκλίνει

Όχι αποδεικτική στην εξέταση.

ii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^3+1}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{\dfrac{2^{k+1}}{(k+1)^3+1}}{\dfrac{2^k}{k^3+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\cancel{2^{k+1}}^{\,2}(k^3+1)}{\cancel{2^k}((k+1)^3+1)}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2(k^3+1)}{(k+1)^3+1}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{2\cancel{k^3}}{\cancel{k^3}} = 2 > 1$$

Τότε η σειρά αποκλίνει, από το κριτήριο λόγου αφού $\rho > 1$.

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{e^{k^2}}$

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \frac{\dfrac{(k+1)!}{e^{(k+1)^2}}}{\dfrac{k!}{e^{k^2}}} = \lim_{k\to+\infty} \frac{\cancel{(k+1)!}^{\,(k+1)} \cdot e^{k^2}}{\cancel{k!} \cdot e^{(k+1)^2}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{(k+1)\,e^{k^2}}{e^{(k+1)^2}} = \lim_{k\to\infty} (k+1)\,e^{k^2-(k+1)^2}$$

$*\,(e^k)^2 \neq e^{k^2} = e^{(k^2)}$

$$= \lim_{k\to\infty} (k+1)\,e^{k^2-k^2-2k-1}$$

$$= \lim_{k\to+\infty} (k+1)\, e^{-2k-1} = \lim_{k\to+\infty} \frac{k+1}{e^{2k+1}}$$

$$\overset{DLH}{\Rightarrow} \lim_{k\to\infty} \frac{1}{2\cdot e^{2k+1}} = 0 < 1$$

$$\boxed{e^{\infty} = 0}$$

Από το κριτήριο λόγου, η σειρά συγκλίνει.

Υπενθύμιση: Η γεωμετρική σειρά

$\sum_{k=1}^{\infty} a r^{k-1}$ συγκλίνει αν

- $|r| < 1$, αποκλίνει.
- $|r| > 1$, επειδή το κριτήριο λόγου χρησιμοποιείται για θετικές σειρές, υποθέτουμε ότι $r \geq 0$. Επαλήθευση με κριτήριο λόγου.

Κριτήριο ρίζας

Έστω ότι η $\sum a_k$ είναι σειρά με θετικούς όρους και έστω:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k} = \lim_{k\to\infty} (a_k)^{1/k}$$

- Αν $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει
- Αν $\rho > 1$, η σειρά αποκλίνει
- Αν $\rho = 0$, δεν υπάρχει συμπέρασμα

Δx Να εξετάσετε αν η σειρές συγκλίνουν.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} k^k$

$\boxed{a_k = k^k}$

αν είναι το k στην δύναμη θα κάναμε κριτήριο ρίζας

$(a_k)^{1/k} = (k^k)^{\frac{1}{k}} = k$

$(a^N)^v = a^{N\cdot v}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}(a_k)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty} k = +\infty$$

Από το κριτήριο ρίζας η σειρά αποκλίνει.

$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty}\left(\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k^2}\right)^{\frac{1}{k}} = \lim_{k\to\infty}\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k}$$

$$= \lim_{k\to+\infty}\left(\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}}\right)^{k} = 1^{+\infty}$$

Έστω $y = \ln\left[\left(\frac{k}{k+1}\right)^{k}\right] = k\ln\frac{k}{k+1}$

$$\lim_{k\to\infty} y = \lim_{k\to\infty} k\cdot\ln\frac{k}{k+1} = \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\frac{k}{k+1}}{\frac{1}{k}}$$

$$\text{DLH} \Rightarrow \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{k+1}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right)'}{-\frac{1}{k^2}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{k}\cdot\frac{k+1-k}{(k+1)^2}}{-\frac{1}{k^2}} = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{k(k+1)}}{-\frac{1}{k^2}}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \left(\frac{-k^2}{k(k+1)}\right) = \lim_{k\to\infty} \left(-\frac{k}{k+1}\right)$$

$$= \lim_{k\to+\infty} -\frac{\cancel{k}}{\cancel{k}} = -1$$

Άρα

$$\rho = \lim_{k\to+\infty} \left(\frac{k}{k+1}\right)^k = \lim_{k\to+\infty} e^y = e^{-1} = \frac{1}{e} < 1$$

Κριτήρια σύγκλισης

Κριτήριο ρίζας

Σa_k σειρά με θετικό όρο:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a_k}$$

1) Αν $\rho < 1$, η σειρά συγκλίνει
2) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = \infty$, αποκλίνει
3) Αν $\rho = 0$ δεν έχουμε αποτέλεσμα

Πχ

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\ln k}{k}\right)^k$$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\left(\frac{\ln k}{k}\right)^k} = \lim_{k\to\infty} \frac{\ln k}{k} =$$

$$\overset{DLH\ \frac{\infty}{\infty}}{=} \lim \frac{\frac{1}{k}}{1} = 0 < 1$$

Άρα η σειρά συγκλίνει

Εναλλάσσουσες σειρές (αλλάζει το πρόσημο)

Είναι σειρές της μορφής

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k} \cdot a_k = -a_1 + a_2 - a_3 + \dots$$

όπου a_k είναι θετικοί αριθμοί

Κριτήριο Εναλλάσσουσας σειράς

Μία εναλλάσσουσα σειρά συγκλίνει όταν:

- $a_1 > a_2 > a_3 > \dots$ $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$

Πχ $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \dots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$

Ονομάζεται:
Εναλλάσσουσα αρμονική σειρά

$a_k = \frac{1}{k}$ $a_1 > a_2 > a_3 \dots$

$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$, άρα η σειρά συγκλίνει

Πχ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot e^{-k}$

$a_k = e^{-k}$, $a_1 > a_2 > a_3$ (χωρίς τα πρόσημα)

$\lim_{k\to\infty} e^{-k} = 0$, Άρα η σειρά συγκλίνει

Πχ

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{k+3}{k(k+1)}$$

(ο παρονομαστής κινείται πιο γρήγορα από τον αριθμ. Άρα διατείνει στο 0)

$$a_k = \frac{k+3}{k(k+1)}$$

Μπορώ να το δικαιολογήσω με;
Πχ $a_1 = \dots, a_2 = \dots$ για να το δικαιολ. ότι είναι φθίνουσα

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{\frac{k+4}{(k+1)(k+2)}}{\frac{k+3}{k(k+1)}} = \frac{k+4+k\cancel{(k+1)}}{\cancel{(k+1)}(k+3)(k+2)}$$

$$= \frac{k^2+4}{k^2+2k+3k+6}$$

$$= \frac{k^2+4}{k^2+5k+6} < 1$$

$$\Rightarrow a_{k+1} < a_k$$

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k+3}{k(k+1)} = \lim_{k \to \infty} \frac{k}{k^2} = 0$$, άρα η σειρά συγκλίνει

Ορισμός: Λέμε ότι μία σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απόλυτα αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ συγκλίνει.

Θεώρημα: Αν η $\sum a_k$ συγκλίνει απόλυτα, δηλ. αν η $\sum |a_k|$ συγκλίνει τότε και η $\sum a_k$ συγκλίνει.

Αν η σειρά $\sum a_k$ συγκλίνει αλλά δεν συγκλίνει απόλυτα, τότε λέμε ότι συγκλίνει σχετικά.

Πχ $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{1}{k}$

Είδαμε πριν ότι συγκλίνει όμως

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left|(-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}\right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \text{ αποκλίνει.}$$

Δηλ. η $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \cdot \frac{1}{k}$ συγκλίνει σχετικά.

Κριτήριο λόγου για απόλυτη σύγκλιση

Έστω η σειρά $\sum a_k$ με μη μηδενικούς όρους και έστω:

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \lim_{k\to\infty} \left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right|$$

i) Αν $\rho < 1$, τότε η $\sum a_k$ συγκλίνει απόλυτα

ii) Αν $\rho > 1$ ή $\rho = \infty$, τότε η $\sum a_k$ αποκλίνει

iii) Αν $\rho = 1$, ∄ απότελεσμα.

Πχ Να εξετάσετε αν οι σειρές συγκλίνουν απόλυτα.

i) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{k}{5^k}$

$$\rho = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1} \cdot \frac{k+1}{5^{k+1}}}{(-1)^k \cdot \frac{k}{5^k}} \right| =$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{k+1}{5^{k+1}}}{\frac{k}{5^k}} = \lim_{k\to\infty} \frac{5^k(k+1)}{5^{k+1} \cdot k}$$

$$= \lim_{k\to\infty} \frac{k+1}{5k} = \lim_{k\to\infty} \frac{k}{5k} = \frac{1}{5} < 1.$$

Άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα.

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{k+1}}{k^{4/3}} \right| = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{4/3}}$ p-σειρά με $p=4/3$

Επειδή $p>1$, συγκλίνει άρα η σειρά συγκλίνει απόλυτα

iii)

$$\sum_{k=3}^{\infty} \frac{(-1)^k \ln k}{k}$$

$$\sum_{k=3}^{\infty} \left| \frac{(-1)^k \ln k}{k} \right| = \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\ln k}{k}$$

Θα εξετάσω αν η σειρά συγκλίνει με κριτήριο ολοκλήρωσης:

Έστω $f(x) = \frac{\ln x}{x}, \quad x \geq 3$

$f(x) \geq 0, \ \forall x \geq 3$

$\Rightarrow f'(x) = \dots = \frac{1-\ln x}{x^2} < 0$ $\Rightarrow$ $\boxed{\ln 3 > 1}$

$\Rightarrow$ η f είναι φθίνουσα $\forall x \geq 3$

$$\int_3^{\infty} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{L\to\infty} \int_3^{L} \frac{\ln x}{x}\,dx = \lim_{L\to\infty} \left[\frac{\ln^2 x}{2} \right]_3^{L}$$

$$= \lim_{L\to\infty} \left(\frac{\ln^2 L}{2} - \frac{\ln^2 3}{2} \right) = \infty$$

Αφού το ολοκλήρωμα βγήκε ∞, άρα και η σειρά θα βγεί ∞ (1η εκδοχή μέχρι εδώ η λύση)

$\Rightarrow$ Αποκλίνει.