

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Εαρινό εξάμηνο 2020**

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

1. Αποδείξτε ότι η  $\phi(x, y) = \tan^{-1}(xy)$  είναι συνάρτηση δυναμικού του πεδίου  $F(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2}i + \frac{x}{1+x^2y^2}j$ .

2. Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου  $F(x, y, z) = x^2i - 2j + yzk$ .

**Απάντηση:**  $\operatorname{div} F = 2x + y$ ,  $\operatorname{curl} F = zk$ .

3. Έστω τα διανυσματικά πεδία  $F(x, y, z) = 2xi + j + 4yk$ ,  $G(x, y, z) = xi + yj - zk$ . Να υπολογίσετε το  $\nabla \cdot (F \times G)$ .

**Απάντηση:**  $4x$

4. Έστω  $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  ένα δύο φορές παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα; Αυτές που έχουν, ορίζουν βαθμωτή συνάρτηση ή διανυσματικό πεδίο;

- |   |  |  |
|---|--|--|
| i) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} F)$ | ii) $\operatorname{grad}(\operatorname{curl} F)$ | iii) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F)$ |
| iv) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} F)$ | v) $\operatorname{curl}(\operatorname{div} F)$   | vi) $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F)$  |

**Απάντηση:** (i), (ii), (iii), (v) δεν έχουν νόημα, (iv) έχει νόημα και είναι διανυσματικό πεδίο (vi) έχει νόημα και είναι βαθμωτό πεδίο.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

- i)  $\int_C \frac{1}{1+x} ds$ ,  $C : r(t) = ti + \frac{2}{3}t^{3/2}j$  ( $0 \leq t \leq 3$ ),
- ii)  $\int_C \frac{x}{1+y^2} ds$ ,  $C : x = 1 + 2t$ ,  $y = t$  ( $0 \leq t \leq 1$ ).

**Απάντηση:** i) 2, ii)  $\sqrt{5}(\pi/4 + \ln 2)$

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_C F \cdot dr$ , όπου  $F(x, y) = 2i + 5j$  και  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα από το  $(1, -3)$  στο  $(4, -3)$ .

**Απάντηση:** 6

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα  $\int_C (3x + 2y)dx + (2x - y)dy$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i)  $C$  το ευθύγραμμο τμήμα από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ ,
- ii)  $C$  το παραβολικό τόξο  $y = x^2$  από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ ,
- iii)  $C$  η καμπύλη  $y = \sin(\pi x/2)$  από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ ,
- iv)  $C$  η καμπύλη  $x = y^3$  από το  $(0, 0)$  στο  $(1, 1)$ .

**Απάντηση:** i) 3 ii) 3 iii) 3 iv) 3

8. Να ελέγξετε αν τα παρακάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και αν είναι, να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού.

- i)  $F(x, y) = xi + yj$
- ii)  $F(x, y) = x^2yi + 5xy^2j$
- iii)  $F(x, y) = (\cos y + y \cos x)i + (\sin x - x \sin y)j$

**Απάντηση:** i) Συντηρητικό,  $\phi(x, y) = x^2/2 + y^2/2 + K$  ii) Όχι συντηρητικό iii) Συντηρητικό,  $\phi(x, y) = x \cos y + y \sin x + K$

9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα  $\int_{(2,-2)}^{(-1,0)} 2xy^3 dx + 3y^2x^2 dy$  αφού πρώτα δείξετε ότι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

**Απάντηση:** 32

10. Έστω το διανυσματικό πεδίο  $F = (x^3 - 2xy^3)i - 3x^2y^2j$ .

- i) Ναδειχθεί ότι το  $F$  είναι συντηρητικό πεδίο..
- ii) Να βρεθεί βαθμωτή συνάρτηση  $\phi$  ώστε  $F = \nabla \phi$ .
- iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα του πεδίου  $F$  κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης  $x = \cos^3 \theta$ ,  $y = \sin^3 \theta$ ,  $\theta \in [0, \pi/2]$ .

**Απάντηση:** ii)  $\phi(x, y) = \frac{x^4}{4} - 2xy^3 + c$  iii)  $-\frac{1}{4}$

11. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με χρήση του Θεωρήματος Green.

- i)  $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$ ,  $C$  το τετράγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(1, 0)$ ,  $(1, 1)$  και  $(0, 1)$ .
- ii)  $\oint_C (x^2 - y) dx + x dy$ ,  $C$  ο κύκλος  $x^2 + y^2 = 4$
- iii)  $\oint_C \ln(1 + y) dx - \frac{xy}{1 + y} dy$ ,  $C$  το τρίγωνο με κορυφές  $(0, 0)$ ,  $(2, 0)$  και  $(0, 4)$ .

**Απάντηση:** i) 0 ii)  $8\pi$  iii)  $-4$