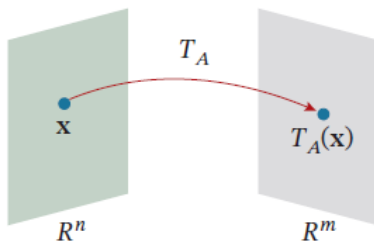


2.4 Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Κάθε συνάρτηση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **απεικόνιση/μετασχηματισμός** και αντιστοιχεί κάθε διάνυσμα \mathbf{x} του \mathbb{R}^n σε ένα μόνο διάνυσμα $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ του \mathbb{R}^m .



$$T_A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Παράδειγμα

$$T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}.$$

Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

- Να βρεθεί το $T \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

- Να βρεθεί $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ώστε $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

- Να ελεγχθεί αν το $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ είναι στο πεδίο τιμών της απεικόνισης.

Ορισμός

Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **γραμμική** αν

- 1 $T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
- 2 $T(\lambda \mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα

- $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$
- $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
- $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$

Έστω $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

$$① \quad T(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{x}_2)$$

$$② \quad T(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$$

$$③ \quad T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})$$

$$④ \quad T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$$

Παράδειγμα

Έστω $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, όπου $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbf{0}$. Είναι η T γραμμική;

Θεώρημα

Η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει $m \times n$ πίνακας A ώστε $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Απόδειξη:

Ορισμός

Έστω $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας

$$A = [T(\mathbf{e}_1) T(\mathbf{e}_2) \dots T(\mathbf{e}_n)]$$

λέγεται **κανονικός πίνακας** της απεικόνισης T .

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο κανονικός πίνακας της γραμμικής απεικόνισης

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

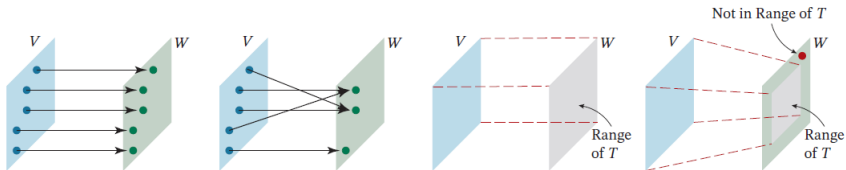
Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$. Ναδειχθεί ότι η T είναι γραμμική και να βρεθεί ο κανονικός πίνακας της.

Ορισμός

Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ λέγεται

- **1-1**, αν $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (ή ισοδύναμα $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \implies T(\mathbf{x}) \neq T(\mathbf{y})$),
- **επί**, αν για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.



Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν οι παρακάτω απεικονίσεις είναι 1-1.

❶ $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

❷ $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$

Θεώρημα

Αν $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση με $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- 1 T 1-1
- 2 $T(\mathbf{x}) = \mathbf{0} \implies \mathbf{x} = \mathbf{0}$
- 3 Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.
- 4 Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

T 1-1 $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση
 \Leftrightarrow η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη (δηλαδή δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές)

Θεώρημα

Αν $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση με $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

- 1 T επί
- 2 Για κάθε $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ είναι συμβιβαστό.
- 3 $\text{Col}(A) = \mathbb{R}^m$.

T 1-1 $\Leftrightarrow A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ συμβιβαστό για κάθε \mathbf{b}
 \Leftrightarrow η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή

Παράδειγμα

Έστω $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Είναι η T 1-1 ή/και επί;

Παράδειγμα

Έστω $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$. Είναι η T 1-1 ή/και επί;