

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

1. Αποδείξτε ότι η $\phi(x, y) = \tan^{-1}(xy)$ είναι συνάρτηση δυναμικού του πεδίου $F(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2}\mathbf{i} + \frac{x}{1+x^2y^2}\mathbf{j}$.

2. Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $F(x, y, z) = x^2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$.

3. Έστω τα διανυσματικά πεδία $F(x, y, z) = 2x\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4y\mathbf{k}$, $G(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$. Να υπολογίσετε το $\nabla \cdot (F \times G)$.

4. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα δύο φορές παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα; Αυτές που έχουν, ορίζουν βαθμωτή συνάρτηση ή διανυσματικό πεδίο;

i) $\text{curl}(\text{grad } F)$

ii) $\text{grad}(\text{curl } F)$

iii) $\text{div}(\text{grad } F)$

iv) $\text{grad}(\text{div } F)$

v) $\text{curl}(\text{div } F)$

vi) $\text{div}(\text{curl } F)$

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

i) $\int_C \frac{1}{1+x} ds$, $C : r(t) = t\mathbf{i} + \frac{2}{3}t^{3/2}\mathbf{j}$ ($0 \leq t \leq 3$),

ii) $\int_C \frac{x}{1+y^2} ds$, $C : x = 1 + 2t$, $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$).

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C F \cdot d\mathbf{r}$, όπου $F(x, y) = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ και C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, -3)$ στο $(4, -3)$.

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C (3x + 2y)dx + (2x - y)dy$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i) C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$,

ii) C το παραβολικό τόξο $y = x^2$ από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$,

iii) C η καμπύλη $y = \sin(\pi x/2)$ από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$,

iv) C η καμπύλη $x = y^3$ από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$.

8. Να ελέγξετε αν τα παρακάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και αν είναι, να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού.

i) $F(x, y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$

ii) $F(x, y) = x^2y\mathbf{i} + 5xy^2\mathbf{j}$

iii) $F(x, y) = (\cos y + y \cos x)\mathbf{i} + (\sin x - x \sin y)\mathbf{j}$

9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{(2,-2)}^{(-1,0)} 2xy^3 dx + 3y^2x^2 dy$ αφού πρώτα δείξετε ότι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

10. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με χρήση του Θεωρήματος Green.

- i) $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$, C το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ και $(0, 1)$.
- ii) $\oint_C (x^2 - y) dx + x dy$, C ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$
- iii) $\oint_C \ln(1 + y) dx - \frac{xy}{1 + y} dy$, C το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(2, 0)$ και $(0, 4)$.