

## Κεφάλαιο 4 - Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

## 4.1. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Πολλά φυσικά μεγέθη εξαρτώνται από περισσότερες από μία μεταβλητές.

Εμβαδόν ορθογωνίου	$\leftrightarrow$	συνάρτηση μήκους και πλάτους
Όγκος παραλληλεπίπεδου	$\leftrightarrow$	συνάρτηση μήκους, πλάτους και ύψους
Μέση τιμή $n$ πραγματικών αριθμών	$\leftrightarrow$	συνάρτηση $n$ πραγματικών αριθμών

## Ορισμός

Μια **πραγματική** ή **βαθμωτή** συνάρτηση  $f$  δύο μεταβλητών  $x$  και  $y$  με πεδίο ορισμού  $D$  είναι μια διαδικασία που αντιστοιχεί σε κάθε ζεύγος  $(x, y) \in D$  έναν πραγματικό αριθμό  $f(x, y)$ .

- Η εξίσωση  $z = f(x, y)$  παριστάνει μια επιφάνεια στον  $\mathbb{R}^3$ .

## Ορισμός

Μια **πραγματική** ή **βαθμωτή** συνάρτηση  $f$  τριών μεταβλητών  $x$ ,  $y$  και  $z$  με πεδίο ορισμού  $D$  είναι μια διαδικασία που αντιστοιχεί σε κάθε τριάδα  $(x, y, z) \in D$  έναν πραγματικό αριθμό  $f(x, y, z)$ .

- Η εξίσωση  $w = f(x, y, z)$  παριστάνει μια επιφάνεια στον  $\mathbb{R}^4$ , άρα δεν υπάρχει γεωμετρική απεικόνιση.

## Παράδειγμα

Έστω η συνάρτηση  $f(x, y) = \sqrt{y+1} + \ln(x^2 - y)$ . Να βρεθεί το  $f(e, 0)$  και να σχεδιαστεί το πεδίο ορισμού της  $f$ .

## Παράδειγμα

Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = \sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}.$$

## Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης  $f(x, y) = 1 - x - \frac{1}{2}y$ .

## Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης  $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ .

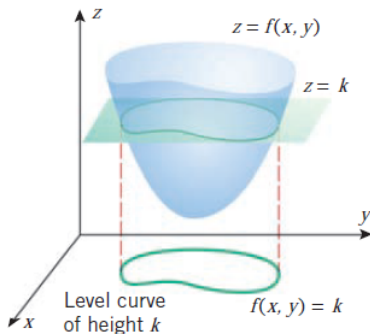
## Παράδειγμα

Να σχεδιαστεί το γράφημα της συνάρτησης  $f(x, y) = -\sqrt{x^2 + y^2}$ .



## Ορισμός

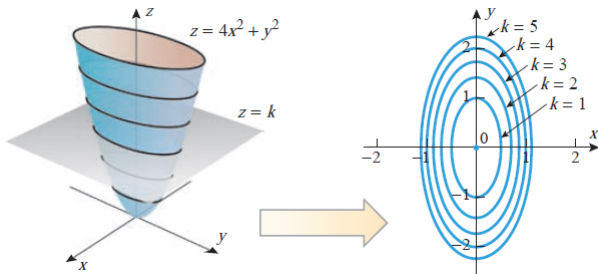
Έστω  $z = f(x, y)$  συνάρτηση δύο μεταβλητών. Η καμπύλη που προκύπτει από την εξίσωση  $z = k$ , όπου  $k \in \mathbb{R}$  λέγεται **καμπύλη στάθμης ύψους  $k$** .



Σχεδιάζοντας τις καμπύλες στάθμης στο  $xy$ -επίπεδο παίρνουμε μια δισδιάστατη απεικόνιση της συνάρτησης.

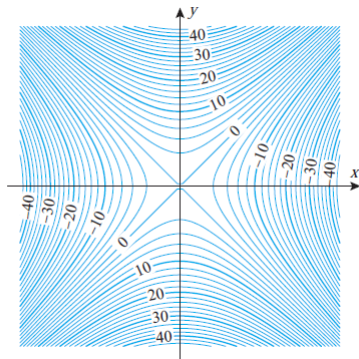
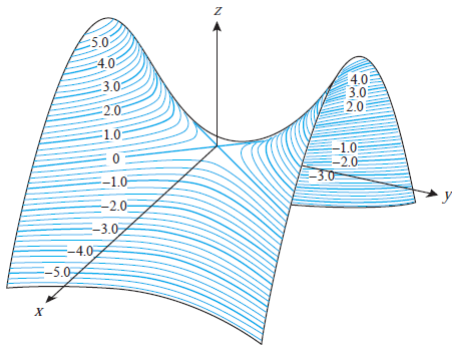
### Παράδειγμα

$$f(x, y) = 4x^2 + y^2$$



## Παράδειγμα

$$f(x, y) = y^2 - x^2$$



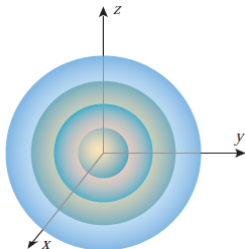
# Επιφάνειες στάθμης

## Ορισμός

Έστω  $w = f(x, y, z)$  συνάρτηση τριών μεταβλητών. Η επιφάνεια που προκύπτει από την εξίσωση  $w = k$ , όπου  $k \in \mathbb{R}$  λέγεται **επιφάνεια στάθμης με τιμή  $k$** .

## Παράδειγμα

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$$



## Παράδειγμα

$$f(x, y, z) = z^2 - x^2 - y^2$$

