4.3 Μερικές παράγωγοι

- Θέλουμε να μελετήσουμε τον ρυθμό μεταβολής μιας συνάρτηση $z = f(x, y)$.
- Αρχικά θα θεωρούμε ότι μια μεταβλητή είναι σταθερή, π.χ. θέτουμε $x = x_0$ και μελετάμε τον ρυθμό μεταβολής ως προς y, δηλαδή την παράγωγο $\dfrac{d}{dy} f(x_0, y)$.
- Το ίδιο μπορούμε να κάνουμε κρατώντας το y σταθερό.

Αυτό μας οδηγεί στον ορισμό των μερικών παραγώγων.

Ορισμός

Έστω $z = f(x, y)$ και συνάρτηση και (x_0, y_0) ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η **μερική παράγωγος της** f **ως προς** x στο (x_0, y_0) συμβολίζεται με $f_x(x_0, y_0)$ και ορίζεται ως

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dx} f(x, y_0)\bigg|_{x=x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Ορισμός

Έστω $z = f(x, y)$ και συνάρτηση και (x_0, y_0) ένα σημείο του πεδίου ορισμού της. Η **μερική παράγωγος της** f **ως προς** y στο (x_0, y_0) συμβολίζεται με $f_x(x_0, y_0)$ και ορίζεται ως

$$f_x(x_0, y_0) = \frac{d}{dy} f(x, y_0)\bigg|_{y=y_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}$$

Παράδειγμα

Έστω $f(x,y) = 2x^3y^2 + 2y + 4x$. Να βρεθούν οι $f_x(1,3)$ και $f_y(0,2)$.

Ορισμός

Έστω συνάρτηση $f(x, y)$. Οι μερικές παράγωγοι της f ορίζονται (ως συναρτήσεις) ως εξής:

$$f_x(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h, y) - f(x, y)}{h}$$

$$f_y(x, y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x, y + h) - f(x, y)}{h}$$

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x}, \; f_y = \frac{\partial f}{\partial y}$$

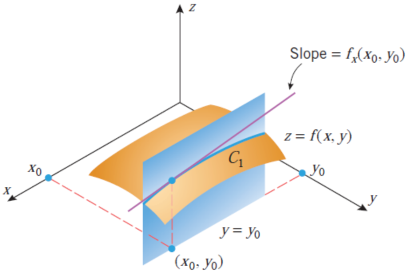
Συμβολισμός:

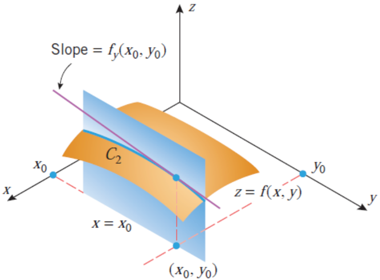
$$f_x(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0),$$

$$f_y(x_0, y_0) = \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0, y_0)} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$$

Γεωμετρική ερμηνεία

Όταν θέτουμε $y = y_0$ ισοδύναμα τέμνουμε το γράφημα της $f(x, y)$ με το επίπεδο $y = y_0$ και η $f_x(x_0, y_0)$ εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης που προκύπτει. Αντίστοιχα για την $f_y(x_0, y_0)$.

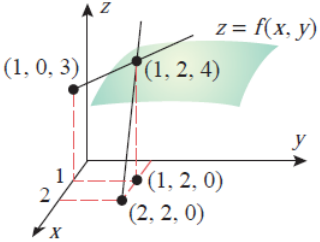




Η $f_x(x_0, y_0)$ λέγεται και **κλίση της f στην κατεύθυνση του** x στο (x_0, y_0). (αντίστοιχα για την $f_y(x_0, y_0)$)

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της $f(x, y)$ στο $(1, 2)$.



Η ύπαρξη μερικών παραγώγων δεν συνεπάγεται συνέχεια.

Παράδειγμα

Έστω
$$f(x,y) = \begin{cases} -\dfrac{xy}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Να δείξετε ότι υπάρχουν οι $f_x(0,0)$ και $f_y(0,0)$ αλλά η f δεν είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Αν έχουμε συνάρτηση $f(x, y, z)$ τότε ορίζουμε με αντίστοιχο τρόπο τις μερικές παραγώγους $f_x = \dfrac{\partial f}{\partial x}$, $f_y = \dfrac{\partial f}{\partial y}$, $f_z = \dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης
$f(x, y, z) = x^3 y^2 z^4 + 2xy + z$.

Μερικές παράγωγοι ανώτερης τάξης

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial x} = f_{xx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial y} = f_{yy}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial xy} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y} = f_{yx}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial yx} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial f}{\partial x} = f_{xy}$$

- Οι f_{xy} και f_{yx} ονομάζονται **μικτές παράγωγοι**.
- Αντίστοιχα ορίζουμε $\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial f}{\partial y^2 \partial x}, \ldots$

Θεώρημα

Αν οι $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ *και* $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ *είναι συνεχείς τότε είναι ίσες.*

Παράδειγμα

Έστω $f(x, y) = x^2 y^3 + x^4 y$. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι δεύτερης τάξης.