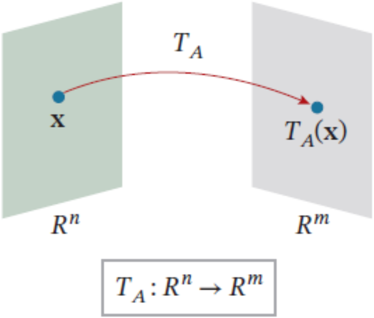
Γραμμικές απεικονίσεις

Ορισμός

Κάθε συνάρτηση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **απεικόνιση/μετασχηματισμός** και αντιστοιχεί κάθε διάνυσμα $\mathbf{x}$ του $\mathbb{R}^n$ σε ένα μόνο διάνυσμα $\mathbf{y} = T(\mathbf{x})$ του $\mathbb{R}^m$.



Παράδειγμα

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3,\ T(\mathbf{x}) = 2\mathbf{x}$.

Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

- Να βρεθεί το $T\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

- Να βρεθεί $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ώστε $T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$,

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 3 & 5 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 3x_2 \\ 3x_1 + 5x_2 \\ -x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}.$$

- Να ελεγχθεί αν το $\mathbf{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ είναι στο πεδίο τιμών της απεικόνισης.

Ορισμός

Μια απεικόνιση $T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ονομάζεται **γραμμική** αν

1. $T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})$, για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$,
2. $T(\lambda\mathbf{x}) = \lambda T(\mathbf{x})$, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $T(\mathbf{x}) = \mathbb{O}$

Παράδειγμα

$T: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$

Παράδειγμα

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,\ T(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}$

Ιδιότητες

Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση, $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$.

1. $T(\lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2) = \lambda_1 T(\mathbf{x}_1) + \lambda_2 T(\mathbf{x}_2)$
2. $T(\mathbb{O}) = \mathbb{O}$
3. $T(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) - T(\mathbf{y})$
4. $T(-\mathbf{x}) = -T(\mathbf{x})$

Παράδειγμα

Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + \mathbf{x}_0$, όπου $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x}_0 \neq \mathbb{O}$. Είναι η T γραμμική;

Θεώρημα

Η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *είναι γραμμική αν και μόνο αν υπάρχει* $m \times n$ *πίνακας* A *ώστε* $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$.

Απόδειξη:

Ορισμός

Έστω $T\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση. Ο πίνακας

$$A = [\,T(\mathbf{e}_1)\,T(\mathbf{e}_2)\,\ldots\,T(\mathbf{e}_n)]$$

λέγεται **κανονικός πίνακας** της απεικόνισης T.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο κανονικός πίνακας της γραμμικής απεικόνισης

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_2 \end{pmatrix}.$$

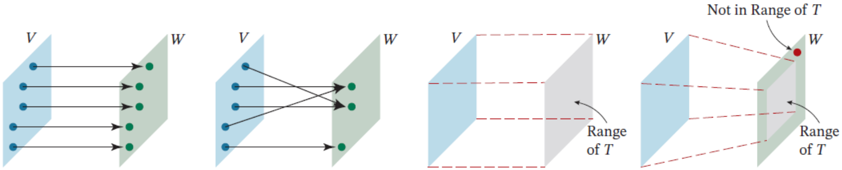
Παράδειγμα

Έστω η απεικόνιση $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 \\ x_1 - 3x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$. Να δειχθεί ότι η T είναι γραμμική και να βρεθεί ο κανονικός πίνακας της.

Ορισμός

Μια απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ λέγεται

- **1-1**, αν $T(\mathbf{x}) = T(\mathbf{y}) \implies \mathbf{x} = \mathbf{y}$ (ή ισοδύναμα $\mathbf{x} \neq \mathbf{y} \implies T(\mathbf{x}) \neq T(\mathbf{y})$),
- **επί**, αν για κάθε $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ υπάρχει $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ώστε $T(\mathbf{x}) = \mathbf{y}$.



Παράδειγμα

Να ελεγχθεί αν οι παρακάτω απεικονίσεις είναι 1-1.

1. $T(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$
2. $T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_2^2 \\ \vdots \\ x_n^2 \end{pmatrix}$

Θεώρημα

Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ γραμμική απεικόνιση με $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.

1. *T 1-1*
2. $T(\mathbf{x}) = \mathbb{O} \implies \mathbf{x} = \mathbb{O}$
3. *Το γραμμικό σύστημα $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση.*
4. *Οι στήλες του A είναι γραμμικά ανεξάρτητες.*

T 1-1 $\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ έχει μόνο την τετριμμένη λύση
$\Leftrightarrow$ η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε στήλη (δηλαδή δεν υπάρχουν ελεύθερες μεταβλητές)

Θεώρημα

Αν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *γραμμική απεικόνιση με* $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ *τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

1. T *επί*
2. *Για κάθε* $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ *το γραμμικό σύστημα* $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ *είναι συμβιβαστό.*
3. $\mathrm{Col}(A) = \mathbb{R}^m$.

T επί $\Leftrightarrow$ $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ συμβιβαστό για κάθε $\mathbf{b}$

$\Leftrightarrow$ η κλιμακωτή μορφή του A έχει ηγετικό στοιχείο σε κάθε γραμμή

Παράδειγμα

Έστω $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, όπου $A = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$. Είναι η T 1-1 ή/και επί;

Παράδειγμα

Έστω $T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 + x_2 \\ 5x_1 + 7x_2 \\ x_1 + 3x_2 \end{pmatrix}$. Είναι η T 1-1 ή/και επί;

Θεώρημα (Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

(I) *Ο A είναι αντιστρέψιμος.*

(XIII) *Η γραμμική απεικόνιση $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ είναι 1-1.*

(XIV) *Η γραμμική απεικόνιση $T(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ είναι επί.*