ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3 - ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ

Έστω $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$f(\vec{x}) = (f_1(\vec{x}), f_2(\vec{x}))$$

$$\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f(\vec{x}) = \left(\lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f_1(\vec{x}), \lim_{\vec{x} \to \vec{x}_0} f_2(\vec{x})\right)$$

Η f για (x, y) στο $\vec{x}_0$ <=> οι f_1, f_2 είναι συνεχείς στο $\vec{x}_0$

$$D = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$ καμπύλες στο $\mathbb{R}^2$ και $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια συνάρτηση $r: I \to \mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$ (I διάστημα) $I \subseteq \mathbb{R}$ λέγεται καμπύλη και γράφουμε

$$r(t) = (r_1(t), r_2(t))$$
$$r(t) = (x(t), y(t))$$

Π.χ.

$r = [0, 1] \to \mathbb{R}^2$

$r(t) = (t, t^2)$

Ταυτίζουμε τη συνάρτηση της καμπύλης με την εικόνα της.

Π.χ. ευθείες στον $\mathbb{R}^3$

$$\begin{cases} x = x_0 + at \\ y = y_0 + bt \\ z = z_0 + ct \end{cases}$$

Η ίδια ευθεία είναι εικόνα της $r(t) = (x_0 + at, y_0 + bt, z_0 + ct)$

Όταν η r έχει εικόνα μια καμπύλη, λέμε ότι είναι παραμετρικοποίηση της f.

Παραγώγιση Καμπυλών: $r'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$

Πράξεις Μεταξύ Καμπυλών: $r, s : I \to \mathbb{R}^3$

$r+s,\ r\cdot s,\ \lambda r\ (\lambda \in \mathbb{R}),\ \frac{r}{s}$

$r(t)\cdot s(t) = r_1(t)\cdot s_1(t) + r_2(t)s_2(t) + r_3(t)s_3(t)$

$r(t)s(t) = \dots$

Αποδεικνύεται ότι: $\frac{d(r(t)\cdot s(t))}{dt} = r'(t)\cdot s(t) + s'(t)\cdot r(t)$

$$\frac{d(r(t)\times s(t))}{dt} = r'(t)\times s(t) + r(t)\times s'(t)$$

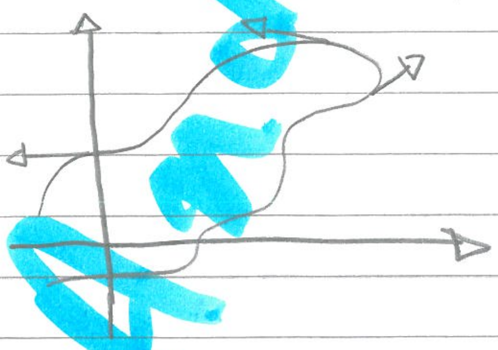
ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $r : I \to \mathbb{R}^3$ μια καμπύλη

1) Αν η r είναι παραγωγίσιμη, τότε
$r'(t) = \lim_{h\to 0} \frac{r(t+h)+r(t)}{h}$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας της καμπύλης

2) Αν η r είναι παραγωγίσιμη και $r'(t) \neq 0$ τότε το $r'(t)$ είναι το εφαπτόμενο διάνυσμα της r και το $\frac{r'(t)}{\|r'(t)\|}$ είναι το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα της r.

3) Αν r είναι 2 φορές παραγωγίσιμη τότε το $r''(t)$ είναι το διάνυσμα επιτάχυνσης



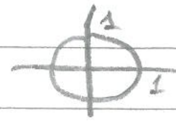
Παράδειγμα: $r(t) = (e^{2t}, e^{t}, e^{-t})$

Να βρεθεί το μοναδιαίο διάνυσμα στο $(1,1,1)$

$r'(t) = (2e^{2t}, e^{t}, -e^{-t})$

Για $t=0$, $r(0) = (1,1,1)$
άρα το εφαπτόμενο διάνυσμα είναι το
$r'(0) = (2,1,-1)$
Το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα του $\frac{r'(0)}{\sqrt{6}}$

Παράδειγμα (κυκλική κίνηση)
$r(t) = (\cos t, \sin t)$ $t \in [0, 2\pi]$



Σωματίδιο που περιστρέφεται γύρω από το $(0,0)$ με σταθερή ταχύτητα s ακτίνα r_0
Παραμετρικοποίηση: $r(t) = \left(r_0 \cos \frac{s}{r_0} t, r_0 \sin \frac{s}{r_0} t\right)$, $t \in \mathbb{R}$

ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Έστω $r: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ παραγωγίσιμη και $t_0 < t_1$
Το μήκος τόξου της καμπύλης στο $[t_0, t_1]$
Έστω ίση με: $L(r) = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2}\, dt$

Π.χ. $\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$, $t \in \mathbb{R}$
Μήκος τόξου στο $[0, 2\pi]$

$r'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

$\|r'(t)\| = \sqrt{(1-\cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2\cos t}$

$L(c) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - \cos t}\, dt = 2 \int_0^{2\pi} \sqrt{\frac{1 - \cos t}{2}}\, dt = 2 \int_0^{2\pi} \sin\left(\frac{t}{2}\right) dt = \ldots = 8$

No. Date

ΚΑΜΠΥΛΕΣ $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^2$ ή $\mathbb{R}^3$

$r'(t)$ = διάνυσμα ταχύτητος

$r''(t)$ = διάνυσμα επιτάχυνσης

Αν $r'(t)\neq 0$, $r'(t)$ = εφαπτόμενο διάνυσμα

Μήκος στο $[t_0,t]$ $L=\int_{t_0}^{t}\|r'(t)\|\,dt$

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

$r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$

Η εφαπτομένη σε ένα σημείο $r(t_0)$ (με $r'(t_0)\neq 0$) της καμπύλης δίνεται από τον τύπο

$$l(t_0)=r(t_0)+r'(t_0)\cdot(t-t_0)$$

Εφαρμογή: Έστω καμπύλη $r:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^3$ με μηδενική επιτάχυνση.
Ν.δ.ο η r είναι ευθεία ή σημείο

$r''(t)=(0,0,0)$

$r'(t)=(c_1,c_2,c_3)$ $\qquad c_i\in\mathbb{R}$

$r(t)=(c_1t+d_1,\ c_2t+d_2,\ c_3t+d_3)$ $\qquad d_i\in\mathbb{R}$

Αν $c_1\neq 0$ ή $c_2\neq 0$ ή $c_3\neq 0$ είναι ευθεία στον $\mathbb{R}^3$

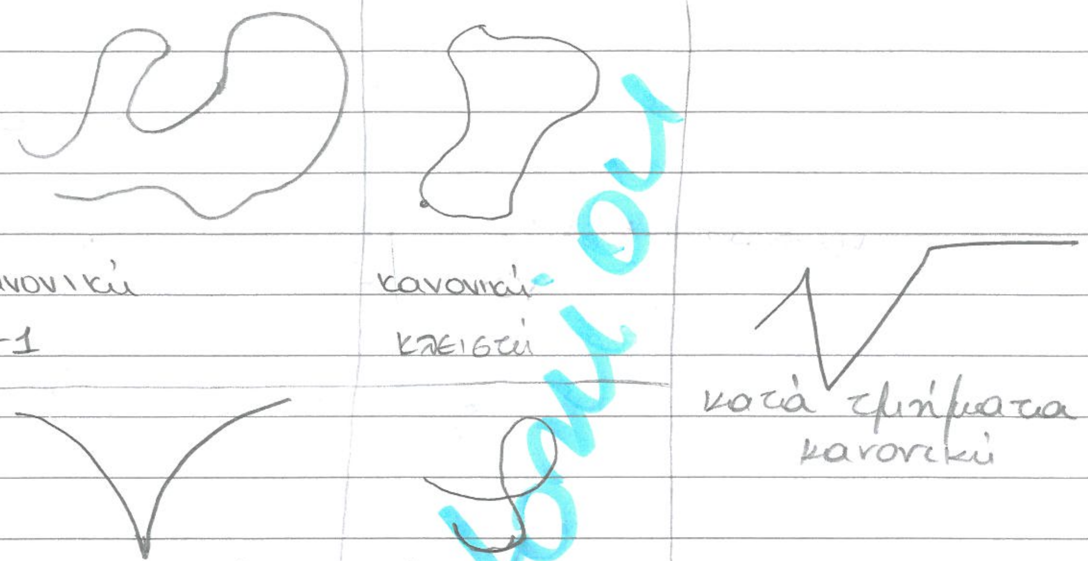
Αν $c_1=c_2=c_3$ είναι σημείο στον $\mathbb{R}^3$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Μια καμπύλη $r:I\to\mathbb{R}^3$ λέγεται

1) C^1 αν είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο
2) κανονική αν είναι παραγωγίσιμη και $r'(t)\neq 0\ \forall t$
3) κατά τμήματα κανονική αν υπάρχει διαίρεση του I σε διαστήματα $[x_0,x_1]\cup[x_1,x_2]\cup\dots$
4) απλή αν είναι 1-1 (δεν αυτοτέμνεται)
5) κλειστή αν $r(a)=r(b)$ $(I=[a,b])$

π.χ



κανονική
1-1

κανονική
κλειστή

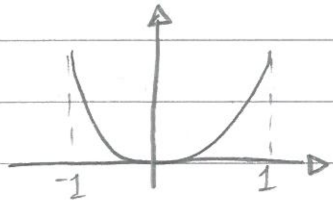
κατά τμήματα
κανονική

όχι κανονική

όχι 1-1

→ Η κανονικότητα αναφέρεται στη συνάρτηση της καμπύλης μόνο

π.χ.



$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid -1\le x\le 1,\ y=x^2\}$

Παραμετρικοποιείται από την $r(t)=(t,t^2)$
$t\in[-1,1]$

Η $f(x)=x^2$ έχει μηδενική παράγωγο στο 0 αλλά
$r'(t)=(1,2t)\neq(0,0)$

→ Για μήκος κατά τμήμα κανονικής καμπύλης ολοκληρώνουμε σε κάθε διάστημα χωριστά.

π.χ. $r(t)=(|t|,|t-\frac{1}{2}|)$, $t\in[-1,1]=[-1,\frac{1}{2}]\cup[\frac{1}{2},1]$

$L(r)=\int_{-1}^{0}\|r'(t)\|\,dt+\int_{0}^{\frac{1}{2}}\|r'(t)\|\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}\|r'(t)\|\,dt$

Στο $[1,0]$: $r(t)=(-t,\frac{1}{2}-t)$ Στο $[0,\frac{1}{2}]$: $r(t)=(t,\frac{1}{2}-t)$ Στο $[\frac{1}{2},1]$: $r(t)=(t,t-\frac{1}{2})$

$r'(t)=(-1,-1)$ $\|r'(t)\|=\sqrt{2}$ $r'(t)=(-1,-1)$ $\|r'(t)\|=\sqrt{2}$, $r'(t)=(1,1)$ $\|r'(t)\|=\sqrt{2}$

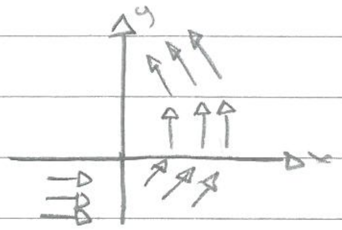
$\int_{-1}^{0}\|r'(t)\|\,dt=\sqrt{2}$ $\int_{0}^{\frac{1}{2}}\|r'(t)\|\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\int_{\frac{1}{2}}^{1}\|r'(t)\|\,dt=\frac{\sqrt{2}}{2}$

Άρα $L(r)=\sqrt{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\Rightarrow L(r)=2\sqrt{2}$

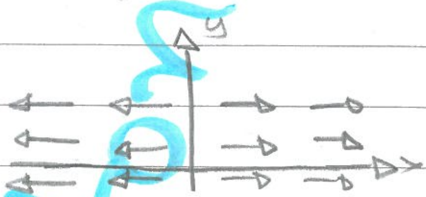
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΑ ΣΗΜΕΙΑ

Μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ ή $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ λέγεται διανυσματικό πεδίο

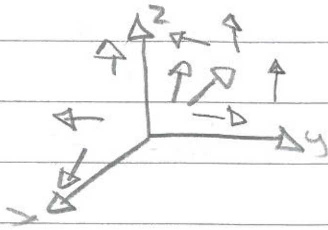
Π.χ. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$



$f(x,y)=(x,0)$



$f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$



[Παρένθεση: Αν $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ λέγεται και βαθμωτό πεδίο

→ Για $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ γράφουμε

$F(x,y,z)=(F_1(x_1,y_1,z_1)+F_2(x_2,y_2,z_2)+F_3(x_3,y_3,z_3))$

$F(x,y,z)=F_1\hat{i}+F_2\hat{j}+F_3\hat{k}$

Π.χ. $F=x^2y\hat{i}+x\hat{j}+xz\hat{k}$

$F(x,y,z)=(x^2y,x,xz)$

Π.χ. Αν $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ παραγωγίσιμη το ∇f είναι διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$ (καλείται και πεδίο κλίσης)

$\nabla f=\text{grad}\, f$

→ Για να μελετήσουμε διανυσματικά πεδία χρησιμοποιούμε ποσότητες βασισμένες στον τελεστή ∇.

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\hat{i}+\frac{\partial}{\partial y}\hat{j}+\frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

ΑΠΟΚΛΙΣΗ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f = f_1\hat{i} + f_2\hat{j} + f_3\hat{k}$ ένα διανυσματικό πεδίο στο $\mathbb{R}^3$

Η απόκλιση του f είναι:

$$\mathrm{div} f = \underset{\substack{\text{εσωτερικό} \\ \text{γινόμενο}}}{\nabla f} = \frac{\partial f_1}{\partial x} + \frac{\partial f_2}{\partial y} + \frac{\partial f_3}{\partial z}.$$

π.χ. $f = x^2y\,\hat{i} + z\hat{j} + xyz\hat{k}$

$$\mathrm{div} f = \nabla f = \frac{\partial (x^2y)}{\partial x} + \frac{\partial (z)}{\partial y} + \frac{\partial (xyz)}{\partial z}$$

$$= 2xy + xy$$

$$= 3xy$$

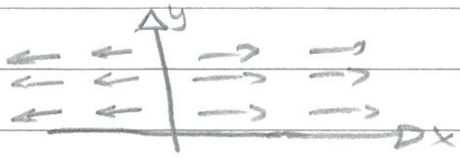
Ερμηνεία: Αν υποθέσουμε ότι το f παριστάνει την ταχύτητα των μορίων ενός αερίου.

$\mathrm{div} f > 0 \Rightarrow$ το αέριο διαστέλλεται

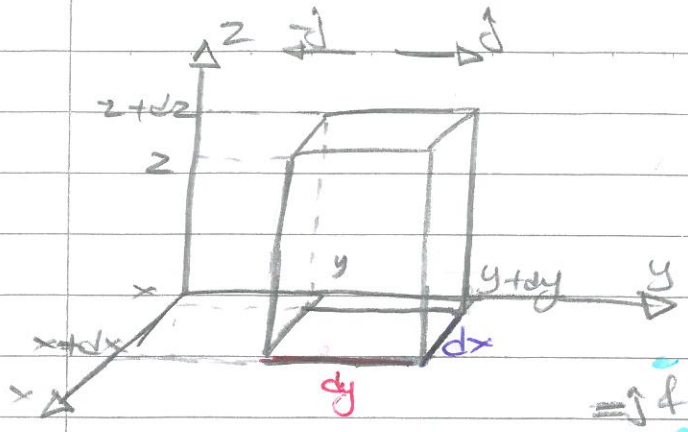
$\mathrm{div} f < 0 \Rightarrow$ το αέριο συστέλλεται

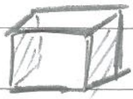
π.χ. $f(x,y) = (x,0)$

$\mathrm{div} f > 0$



Το div f έχει σχέση με τις γραμμές ροής που "βγαίνουν" από ένα στοιχειώδες χωρίο.





Έδρες παράλληλες στο xz-επίπεδο

π.χ. ροή που βγαίνει από την αριστερή έδρα

$= \vec{j} \cdot f(x,y,z) \cdot$ εμ. έδρας

$= -\vec{j} \cdot f(x,y,z)\,dx\,dz$

$= -f_2(x,y,z)\,dx\,dz$.

ροή που βγαίνει από την δεξιά έδρα

$= \vec{j}\, f(x,y,z)\,dx\,dz$

$= -\vec{j}\left(f(x,y,z)+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot dy\right)dx\,dz$

$= f_2(x,y,z)\,dx\,dz + \frac{\partial f_2}{\partial y}\cdot dx\,dy\,dz$

→ Αθροιστικά η ροή είναι $\frac{\partial f_2}{\partial y}\,dx\,dy\,dz$

Στις άλλες κατευθύνσεις $\frac{\partial f_1}{\partial x}\,dx\,dy\,dz$ και $\frac{\partial f_3}{\partial z}\cdot dx\,dy\,dz$

π.χ. Εξίσωση Maxwell $\nabla \cdot B = 0$

οπότε σε μαγνητικό πεδίο δεν υπάρχει σημείο που να "μπαίνουν" πιο πολλές γραμμές από όσες βγαίνουν.

$\Rightarrow$ δεν υπάρχουν μαγνητικά μονόπολα

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα διανυσματικό πεδίο με μηδενική απόκλιση λέγεται ασυμπίεστο

ΣΤΡΟΒΙΛΙΣΜΟΣ

ΟΡΙΣΜΟΣ

Έστω $f=f_1\hat{i}+f_2\hat{j}+f_3\hat{k}$ ένα διανυσματικό πεδίο στον $\mathbb{R}^3$.
Ο στροβιλισμός του f είναι

$$\operatorname{curl} f = \nabla\times f = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix}$$

$$\operatorname{curl} f = \left(\frac{\partial f_3}{\partial y}-\frac{\partial f_2}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial f_1}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial f_2}{\partial z}-\frac{\partial f_3}{\partial y}\right)\hat{k}$$

π.χ. $f = xy\hat{i}-\sin z\hat{j}+\hat{k}$

$$\nabla\times f = \left(\frac{\partial(1)}{\partial y}-\frac{\partial(-\sin z)}{\partial z}\right)\hat{i}+\left(\frac{\partial(xy)}{\partial z}-\frac{\partial(1)}{\partial x}\right)\hat{j}+\left(\frac{\partial(1)}{\partial z}-\frac{\partial(xy)}{\partial y}\right)\hat{k}$$

$$\nabla\times f = \cos z\,\hat{i}-x\hat{k}$$

Ερμηνεία: $\operatorname{curl} f \neq (0,0,0)$, υπάρχει περιστροφή στο f.

π.χ. Εξισώσεις Maxwell $\nabla\times E = -\frac{\partial B}{\partial t}$

ΟΡΙΣΜΟΣ

Ένα διανυσματικό πεδίο με μηδενικό στροβιλισμό λέγεται <u>αστρόβιλο</u>.

Σημείωση: Για διανυσματικά πεδία $F=f_1\hat{i}+f_2\hat{j}$ στον $\mathbb{R}^2 \longrightarrow \operatorname{curl} f = \frac{\partial f_2}{\partial x}-\frac{\partial f_1}{\partial y}$.

ΘΕΩΡΗΜΑ

$\text{div}(\text{curl} f) = \nabla(\nabla \times f) = 0$. Αποδεικνύεται από τους ορισμούς

ΘΕΩΡΗΜΑ

Αν $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ 2 φορές παραγωγίσιμη $\nabla \times (\nabla f) = \vec{0}$
(η κλίση είναι αστρόβιλη)

ΛΑΠΛΑΣΙΑΝΗ

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\hat{i} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\hat{j} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\hat{k}$$

Η λαπλασιανή ενός βαθμωτού πεδίου $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ είναι

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

Εξίσωση Laplace: $\nabla^2 f = 0$.

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΟ ΠΕΔΙΟ

Ένα διανυσματικό πεδίο λέγεται συντηρητικό αν υπάρχει βαθμωτό πεδίο ώστε $F = \nabla f$.

ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΛΟΓΙΣΜΟΥ

1) $\nabla(f+g) = \nabla f + \nabla g$
2) $\nabla(\lambda f) = \lambda \nabla f,\ \lambda \in \mathbb{R}$
3) $\nabla fg = f\nabla g + g \nabla f$
4) $\nabla \frac{f}{g} = \frac{g\nabla f - f\nabla g}{g^2}$
5) $\text{div}(F+G) = \text{div}(F) + \text{div}(G)$
6) $\text{curl}(F+G) = \text{curl}(F) + \text{curl}(G)$
7) $\text{div}(F \times G) = G\,\text{curl}(F) + F\,\text{curl}(G)$

Παρένθεση: ∇ σε άλλα συστήματα συντεταγμένων

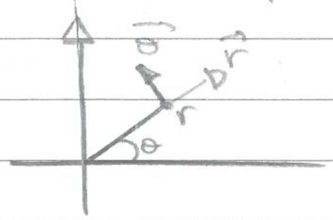
π.χ. ∇ στον $\mathbb{R}^3$ σε κυλινδρικές συντεταγμένες

1) επιλογή διανυσματικής βάσης

2) ∇ με κανόνα αλυσίδας

Στον $\mathbb{R}^3$: διανύσματα βάσης $\{\hat{i},\hat{j},\hat{k}\}$

Στις κυλινδρικές: πολικές $\{\hat{r},\hat{\theta},\hat{k}\}$



$$\hat{r} = \cos\theta\,\hat{i} + \sin\theta\,\hat{j}$$
$$\hat{\theta} = -\sin\theta\,\hat{i} + \cos\theta\,\hat{j}$$

αποδεικνύεται ότι

$$\hat{i} = \cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}$$
$$\hat{j} = \sin\theta\,\hat{r} + \cos\theta\,\hat{\theta}$$
$$\hat{k} = \hat{k}$$

κανόνας αλυσίδας:

- $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z}\cdot\cancel{\frac{\partial z}{\partial x}}^{\,0}$

- $\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{\partial\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\partial x} = \dots = \cos\theta$

- $\frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial\left(\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)\right)}{\partial x} = \dots = \frac{-\sin\theta}{r}$

άρα $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial r}\sin\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{\sin\theta}{r}$

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x}\hat{i} + \dots$$
$$= \left(\frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta}\cdot\frac{\sin\theta}{r}\right)\left(\cos\theta\,\hat{r} - \sin\theta\,\hat{\theta}\right) = \dots = \hat{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \dots$$

Προκύπτει

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r}\hat{r} + \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{1}{r}\hat{\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\hat{k}$$