

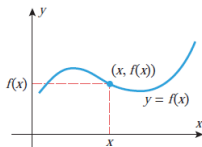
Κεφάλαιο 1 - Αναλυτική Γεωμετρία στο Επίπεδο

Αυτή η εργασία χορηγείται με άδεια Creative Commons Αναφορά δημιουργού-Μη εμπορική-Παρόμοια διανομή 4.0 International License.

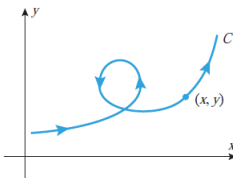


1.1 Παραμετρικές Καμπύλες

Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ μπορεί να εκφραστεί σαν καμπύλη του επιπέδου.



Δεν εκφράζονται όλες οι καμπύλες με αυτόν τον τρόπο.



Παράδειγμα

$$\begin{cases} x = t - 3 \sin t \\ y = 4 - 3 \cos t \end{cases} \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$$

Ορισμός

Οι εξισώσεις $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** και το σύνολο των σημείων (x, y) για τις διάφορες τιμές του t λέγεται **παραμετρική καμπύλη**. Η μεταβλητή t λέγεται **παράμετρος** των εξισώσεων.

Σημείωση: Αν δεν δίνεται πεδίο ορισμού για το t , θα εννοείται ότι είναι το ευρύτερο σύνολο για το οποίο ορίζονται κι οι δύο εξισώσεις.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το γράφημα της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

Η κατεύθυνση με την οποία χαράζεται η καμπύλη ονομάζεται **προσανατολισμός** της καμπύλης.

Καμπύλη \longrightarrow Σύνολο σημείων στο xy -επίπεδο

Παραμετρική καμπύλη \longrightarrow Καμπύλη με προσανατολισμό

Παράδειγμα

Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις για τον μοναδιαίο κύκλο με δεξιόστροφη φορά.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το γράφημα της παραμετρικής καμπύλης

$$x = 2t - 3, y = 6t - 7$$

Σημείωση: Μια παραμετρική καμπύλη μπορεί να μην έχει σταθερό προσανατολισμό

Παράδειγμα

$$x = \sin t, \quad y = \sin^2 t$$

Το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ μπορεί να εκφραστεί μέσω των παραμετρικών εξισώσεων

$$x = t, y = f(t)$$

Αν η f είναι 1-1, τότε η f^{-1} μπορεί να εκφραστεί μέσω των παραμετρικών εξισώσεων

$$x = f(t), y = t$$

Παράδειγμα

$$y = \cos x, x \in [-2\pi, 2\pi]$$

Έστω παραμετρική καμπύλη

$$x = f(t), y = g(t)$$

όπου οι f, g έχουν συνεχείς παραγώγους.

Από κανόνα αλυσίδας $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{dt}$. Επομένως

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

Με τον παραπάνω τύπο, το $\frac{dy}{dx}$ είναι συνάρτηση του t και εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της παραμετρικής καμπύλης για μια δεδομένη τιμή του t .

Παράδειγμα

Έστω η παραμετρική καμπύλη $x = \cos t$, $y = \sin t$ ($0 \leq t \leq 2\pi$). Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο όπου $t = \pi/6$.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}$$

- Αν $\frac{dx}{dt} \neq 0$ και $\frac{dy}{dt} = 0$ τότε η εφαπτομένη είναι οριζόντια.
- Αν $\frac{dx}{dt} = 0$ τότε έχουμε δύο περιπτώσεις.
 - Αν $\frac{dy}{dt} \neq 0$ τότε η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.
 - Αν $\frac{dy}{dt} = 0$ τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Παράδειγμα

Μια σαΐτα από χαρτί ακολουθεί τροχιά κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης

$$x = t - 3 \sin t, \quad y = 4 - 3 \cos t \quad (t \geq 0)$$

και συγκρούεται με έναν τοίχο σε χρόνο $t = 10$.

- Ποιες χρονικές στιγμές πετούσε οριζόντια;
- Ποιες χρονικές στιγμές πετούσε κατακόρυφα;

Παράδειγμα

Για την παραμετρική καμπύλη

$$x = t^2, y = t^3 \quad (t \in \mathbb{R})$$

να βρεθούν οι ποσότητες $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ στο σημείο $(1, 1)$.

Ορισμός

Αν η παραμετρική καμπύλη $x = x(t)$, $y = y(t)$ ($a \leq t \leq b$) είναι τέτοια ώστε δεν χαράζει το ίδιο τμήμα δεύτερη φορά, τότε το μήκος της δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί το μήκος κύκλου ακτίνας a με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

Παράδειγμα

Να αντιστοιχήσετε τις παραμετρικές καμπύλες με τα αντίστοιχα γραφήματά τους.

(a) $x = \sqrt{t}$, $y = \sin 3t$ (b) $x = 2 \cos t$, $y = 3 \sin t$

(c) $x = t \cos t$, $y = t \sin t$

(d) $x = \frac{3t}{1+t^3}$, $y = \frac{3t^2}{1+t^3}$

(e) $x = \frac{t^3}{1+t^2}$, $y = \frac{2t^2}{1+t^2}$

(f) $x = \frac{1}{2} \cos t$, $y = \sin 2t$

