

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Ναδειχθεί ότι τα $(4, 5, 2)$, $(1, 7, 3)$ και $(2, 4, 5)$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

Απάντηση: $\|AB\| = \|AC\| = \|BC\| = \sqrt{14}$.

2. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) κέντρο $(7, 1, 1)$, ακτίνα 4,
- ii) κέντρο $(1, 0, -1)$, διάμετρος 8,
- iii) κέντρο $(-1, 3, 2)$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
- iv) κέντρο $(2, -1, -3)$, εφάπτεται στο xy -επίπεδο.

Απάντηση: i) $(x-7)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$, ii) $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$, iii) $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 14$.

3. Περιγράψτε την επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$.

Απάντηση: Κύκλος με κέντρο $(-5, -2, -1)$ και ακτίνα 7.

4. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα για τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.

- i) $x^2 + y^2 = 25$
- ii) $y^2 + z^2 = 25$
- iii) $x^2 + z^2 = 25$

5. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.

- i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα x και το σημείο $(0, 1, 2)$.
- ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα y και το σημείο $(1, 0, 2)$.
- iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα z και διέρχεται από το $(1, 1, 0)$.
- iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το $(1, 0, 1)$.

Απάντηση: i) $z = 2x$, ii) $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$, iii) $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1$.

6. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;

Απάντηση: $3 \pm \sqrt{6}$.

7. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα.

- i) $(1, -2, 2)$
- ii) $(2, 2, -1)$
- iii) $-i + 2j + 3k$
- iv) $2i + 3j - k$

8. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{P_1P_2}$.

- i) $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$,
- ii) $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$.

Απάντηση: i) $(-1, 3)$, ii) $(-3, 6, 1)$.

9. Έστω $\vec{u} = 3\vec{i} - k, \vec{v} = \vec{i} - j + 2k, \vec{w} = 3j$. Να γίνουν οι πράξεις.

- i) $\vec{w} - \vec{v}$ ii) $6\vec{u} + 4\vec{w}$ iii) $-\vec{v} - 2\vec{w}$
- iv) $4(3\vec{u} + \vec{v})$ v) $-8(\vec{v} + \vec{w}) + 2\vec{u}$ vi) $3\vec{w} - (-\vec{v} - \vec{w})$

Απάντηση: i) $-\vec{i} + 4j - 2k$, ii) $18\vec{i} + 12j - 6k$, iii) $-\vec{i} - 5j - 2k$, iv) $40\vec{i} - 4j - 4k$, v) $-2\vec{i} - 16j - 18k$, vi) $-\vec{i} + 13j - 2k$.

10. Να βρεθεί η νόρμα του \vec{v} .

- i) $\vec{v} = (1, -1)$
- ii) $\vec{v} = (-1, 2, 4)$
- iii) $\vec{v} = -3\vec{i} + 2j + k$

Απάντηση: i) $\sqrt{2}$, ii) $\sqrt{21}$, iii) $\sqrt{14}$.

11. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
- ii) Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.

Απάντηση: Λάθος, Σωστό.

12. Να βρεθεί διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.

- i) Αντίθετη κατεύθυνση από το $\vec{v} = (3, -4)$ και μέτρο το μισό του μέτρου του \vec{v} .
- ii) Μήκος $\sqrt{17}$ και κατεύθυνση ίδια με το $\vec{v} = (7, 0, -6)$.

Απάντηση: i) $(-3/2, 2)$, ii) $(7/\sqrt{5}, 0, -6/\sqrt{5})$.

13. Να βρεθεί διάνυσμα \vec{v} στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες. Με θ συμβολίζουμε τη γωνία του διανύσματος με τον άξονα Ox .

- i) $\|\vec{v}\| = 3, \theta = \pi/4$
- ii) $\|\vec{v}\| = 2, \theta = 90^\circ$

Απάντηση: i) $(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$, ii) $(0, 2)$.

14. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιούν τη δοσμένη συνθήκη.

- i) Παράλληλα στην ευθεία $y = 3x + 2$.
- ii) Παράλληλα στην ευθεία $x + y = 4$.
- iii) Κάθετα στην ευθεία $y = -5x + 1$.

Απάντηση: i) $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$, ii) $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$, iii) $\pm \frac{1}{\sqrt{26}}(5, 1)$.

15. Έστω $\vec{r} = (x, y, z)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.

- i) $\|\vec{r}\| = 1$
- ii) $\|\vec{r}\| \leq 1$
- iii) $\|\vec{r}\| > 1$

Απάντηση: i) Σφαίρα κέντρου O και ακτίνας 1, ii) Συμπαγής σφαίρα κέντρου O και ακτίνας 1, iii) Εξωτερικό σφαίρας κέντρου O και ακτίνας 1.

16. Βρείτε αν τα διανύσματα σχηματίζουν οξεία, ορθή ή αμβλεία γωνία.

- i) $\vec{u} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \vec{v} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- ii) $\vec{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \vec{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$
- iii) $\vec{u} = (4, 1, 6), \vec{v} = (-3, 0, 2)$

Απάντηση: i) Αμβλεία, ii) οξεία, iii) ορθή.

17. Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(2, -1, 1), B(3, 2, -1)$ και $C(7, 0, -2)$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.

Απάντηση: $\hat{B} = \pi/2$.

18. Να δείξετε ότι $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

Απάντηση: Θεώρημα διαγωνίων παραλληλογράμμου.

- 19.**
- i) Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$.
 - ii) Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

Απάντηση: $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

20. Να βρεθεί το $\vec{u} \times \vec{v}$.

- i) $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-4, 1, 2)$
- ii) $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \vec{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Απάντηση: i) $7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$, ii) $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$.

21. Να βρεθούν οι παρακάτω ποσότητες για τα διανύσματα $\vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = (0, 1, 7)$ και $\vec{w} = (1, 4, 5)$.

- i) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- ii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
- iii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- iv) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$

Απάντηση: i) $-20\mathbf{i} - 67\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$, ii) $-78\mathbf{i} + 52\mathbf{j} - 26\mathbf{k}$, iii) $0\mathbf{i} - 56\mathbf{j} - 392\mathbf{k}$, iv) $0\mathbf{i} + 56\mathbf{j} + 392\mathbf{k}$.

22. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $A(0, -2, 1), B(1, -1, -2)$ και $C(-1, 1, 0)$.

Απάντηση: $\pm \frac{1}{4\sqrt{6}}(8, 4, 4)$.

23. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{u} = i - j + 2k$ και $\vec{v} = 3j + k$.

Απάντηση: $\sqrt{59}$.

24. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $P(1, 5, -2)$, $Q(0, 0, 0)$ και $R(3, 5, 1)$.

Απάντηση: $\sqrt{374}/2$.

25. Να βρεθεί το $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ για τα $\vec{u} = 2i - 3j + k$, $\vec{v} = 4i + j - 3k$ και $\vec{w} = j + 5k$.

Απάντηση: 80.

26. Να ελέγξετε αν τα διανύσματα είναι στο ίδιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τριπλό βαθμωτό γινόμενο.

i) $\vec{u} = (1, -2, 1)$, $\vec{v} = (3, 0, -2)$, $\vec{w} = (5, -4, 0)$

ii) $\vec{u} = 5i - 2j + k$, $\vec{v} = 4i - j + k$, $\vec{w} = i - j$

iii) $\vec{u} = (4, -8, 1)$, $\vec{v} = (2, 1, -2)$, $\vec{w} = (3, -4, 12)$

Απάντηση: i) συνεπίπεδα, ii) συνεπίπεδα, iii) όχι συνεπίπεδα.

27. Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές $\vec{u} = 3i + 2j + k$, $\vec{v} = i + j + 2k$, $\vec{w} = i + 3j + 3k$.

i) Να βρεθεί ο όγκος του.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα \vec{u} και \vec{w} .

iii) Να βρεθεί η γωνία του \vec{u} με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα \vec{v} και \vec{w} .

Απάντηση: i) 9, ii) $\sqrt{122}$, iii) $\cos^{-1}(9/14) - \pi/2$.

28. Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} για τα οποία ισχύει $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$;

Απάντηση: $\theta = \pi/4$.

29. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:

i) που διέρχεται από τα σημεία $P_1(-1, 3, 5)$ και $P_2(-1, 3, 2)$,

ii) που έχει διανυσματική εξίσωση $xi + yj + zk = k + t(i - j + k)$,

iii) που διέρχεται από το $(-2, 0, 5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $x = 1 + 2t$, $y = 4 - t$, $z = 6 + 2t$,

iv) που είναι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $(3, -4)$.

Απάντηση: i) $x = -3$, $y = 3$, $z = 5 - 3t$, ii) $x = 6$, $y = -t$, $z = 1 + t$, iii) $x = -2 + 2t$, $y = -t$, $z = 5 + 2t$,
iv) $x = 3 + 4t$, $y = -4 + 3t$.

30. Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$ να βρεθεί ένα σημείο της P και ένα διάνυσμα \vec{v} παράλληλο σε αυτήν.

Απάντηση: $(-1, 2, 4)$, $5i + 7j - 8k$.

31. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα xy , xz και yz της ευθείας $x = -2$, $y = 4 + 2t$, $z = -3 + t$.

Απάντηση: $(-2, 10, 0)$, $(-2, 0, -5)$.

32. Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t$, $L_2: x = 2 + 6, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$ τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.

Απάντηση: Σημείο τομής $(1, -1, 2)$.

33. Να εξετάσετε αν οι ευθείες $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t$, $L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$ είναι παράλληλες.

Απάντηση: Είναι παράλληλες.

34. Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t$, $L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$ ταυτίζονται.

35. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) Διέρχεται από το σημείο $P(2, 6, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (1, 4, 2)$.
- ii) Διέρχεται από τα σημεία $(-2, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ και $(1, 0, -1)$.
- iii) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο επίπεδο $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.
- iv) Διέρχεται από το $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία τομής των επιπέδων $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.

Απάντηση: i) $x + 4y + 2z - 28 = 0$, ii) $2y - z - 1 = 0$, iii) $4x - 2y + 7z = 0$, iv) $-x - y + 3z + 6 = 0$.

36. Εξετάστε αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, κάθετα ή τίποτα από τα παραπάνω.

- i) $2x - 8y - 6z - 2 = 0$, $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
- ii) $3x - 2y + z = 1$, $4x + 5y - 2z = 4$
- iii) $x - y + 3z - 2 = 0$, $2x + z = 1$

Απάντηση: i) παράλληλα, ii) κάθετα, iii) όχι κάθετα, όχι παράλληλα.

37. Εξετάστε αν η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται και αν ναι, προσδιορίστε την τομή τους.

- i) $x = t, y = t, z = t, 3x - 2y + z - 5 = 0$
- ii) $x = 2 - t, y = 3 + t, z = t, 2x + y + z = 1$

Απάντηση: i) Τέμνονται στο $(5/2, 5/2, 5/2)$, ii) δεν τέμνονται.

38. Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας τομής των επιπέδων $x + 2y - 2z = 5$ και $6x - 3y + 2z = 8$.

Απάντηση: $4/21$.

39. Δείξτε ότι οι ευθείες $x = -2 + t, y = 3 + 2t, z = 4 - t$ και $x = 3 - t, y = 4 - 2t, z = t$ είναι παράλληλες και βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.

Απάντηση: $-7x - y - 9z + 25 = 0$

40. Να δείξετε ότι τα επίπεδα $-2x + y + z = 0$ και $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ είναι παράλληλα και να βρείτε την απόστασή τους.

Απάντηση: $D = 5/\sqrt{54}$.

41. Να δείξετε ότι οι ευθείες $x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$ είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόστασή τους.

Απάντηση: $D = 25/\sqrt{126}$.

42. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο $(2, 1, -3)$ που εφάπτεται στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.

Απάντηση: $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{121}{14}$.

43. Προσδιορίστε την τετραγωνική επιφάνεια.

- i) $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
- ii) $z = \frac{y^2}{25} - x^2$
- iii) $x^2 + y^2 - z^2 = 16$
- iv) $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
- v) $4z = x^2 + 4y^2$
- vi) $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

Απάντηση: i) Ελλειπτικό παραβολοειδές με $a = 2, b = 3$, ii) υπερβολικό παραβολοειδές με $a = 1, b = 5$, iii) μονόχωνο υπερβολοειδές με $a = b = c = 4$, iv) κώνος, v) ελλειπτικό παραβολοειδές με $a = 2, b = 1$, vi) δίχωνο παραβολοειδές με $a = b = c = 1$.

44. Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές.

- i) $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ από καρτεσιανές σε κυλινδρικές,
- ii) $(1, \sqrt{3}, -2)$ από καρτεσιανές σε σφαιρικές,
- iii) $(5, \pi/6, \pi/4)$ από σφαιρικές σε καρτεσιανές,
- iv) $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$ από κυλινδρικές σε καρτεσιανές.

Απάντηση: i) $(8, 6, \pi/4)$, ii) $(2\sqrt{2}, \pi/3, 3\pi/4)$, iii) $(5\sqrt{6}/4, 5\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/2)$, iv) $(3/2, \sqrt{3}/2, 3)$.

45. Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις σε καρτεσιανές και περιγράψτε την επιφάνεια που εκφράζουν. Σε κάθε περίπτωση δίνεται το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

- i) $r = 3$, κυλινδρικές,
- ii) $r = 4 \sin \theta$, κυλινδρικές,
- iii) $r^2 + z^2 = 1$, κυλινδρικές,
- iv) $\phi = \pi/4$, σφαιρικές,
- v) $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$, σφαιρικές.

Απάντηση: i) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, κύλινδρος, ii) $x^2 + (y - 2)^2 = 4$, κύλινδρος, iii) $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, σφαίρα, iv) $z = x^2 + y^2$, κώνος, v) $(x - 1)^2 + y^2 = 1$, κύλινδρος.

46. Δίνονται παρακάτω οι καρτεσιανές εξισώσεις επιφανειών. Να μετατραπούν σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

- i) $z = 3x^2 + 3y^2$,
- ii) $2x + 3y + 4z = 1$.

Απάντηση: i) Κυλινδρικές: $z = 3r$, Σφαιρικές: $\rho = \frac{1}{3} \cot \phi \csc \phi$, ii) Κυλινδρικές: $2r \cos \theta + 3r \sin \theta + 4z = 1$, Σφαιρικές: $2\rho \sin \phi \cos \theta + 3\rho \sin \phi \sin \theta + 4\rho \cos \phi = 1$.