ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ
Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Έστω $f(x,y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Να υπολογιστούν τα:
i) $f(2,1)$ ii) $f(t,t^2)$ iii) $f(2y^2,4y)$

2. Έστω $f(x,y,z) = xy^2z^3 + 3$. Να υπολογιστούν τα:
i) $f(2,1,2)$ ii) $f(a,a,a)$ iii) $f(t,t^2,-t)$ iv) $f(a+b,a-b,b)$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

i) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$
ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$
iii) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y^2}$
iv) $f(x,y) = \ln(xy)$
v) $f(x,y,z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$
vi) $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$.

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 4(xy^2-x)$
ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy^3}{x+y}$
iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3}{x^2+2y^2}$
iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$
v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$
vi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{3x^2+2y^2}$
vii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,-1,2)} \dfrac{xz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

5. Έστω $f(x,y) = e^{2x}\sin y$. Να υπολογιστούν τα:
i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ iii) $f_x(0,y)$ iv) $f_y(\ln 2, 0)$

6. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μερικές παράγωγοι.

i) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, για $z = 9x^2y - 3x^5y$
ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, για $z = xe^{\sqrt{15xy}}$

7. Έστω $f(x,y)=\sqrt{3x+2y}$.

i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας $z=f(x,y)$ στην x-κατεύθυνση στο $(4,2)$.

ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς y της f στο $(4,2)$.

8. Για τη συνάρτηση $f(x,y,z)=z\ln(x^2y\cos z)$ να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

9. Ένα σωματίδιο κινείται στην τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z=x^2+3y^2$ και του επιπέδου $y=1$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του z ως προς x όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο $(2,1,7)$;

10. Ο όγκος V ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V=\pi r^2h$, όπου r είναι η ακτίνα και h το ύψος.

i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν το h είναι σταθερό;

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς h όταν το r είναι σταθερό;

iii) Αν $h=4$ και το r μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν $r=6$;

11. Για την συνάρτηση $f(x,y)=4x^2-8xy^4+7y^5-3$ να αποδειχθεί ότι $f_{xy}=f_{yx}$.

12. Για την συνάρτηση $f(x,y)=x^3y^5-2x^2y+x$ να υπολογιστούν οι παράγωγοι f_{xxy}, f_{yxy} και f_{yyy}.

13. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτηση $f(x,y)$ στο σημείο (x_0,y_0), τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0).

ii) Αν οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο $(0,0)$, τότε και η $f(x,y)$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.

14. Να υπολογιστεί η παράγωγος dz/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z=3x^2y^3$, $x=t^4$, $y=t^2$

ii) $z=\ln(2x^2+y)$, $x=\sqrt{t}$, $y=t^{2/3}$

iii) $z=3\cos x-sin(xy)$, $x=1/t$, $y=3t$

15. Να υπολογιστεί η παράγωγος dw/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $w=5x^2y^3z^4$, $x=t^2$, $y=t^3$, $z=t^5$

ii) $w=5\cos(xy)-\sin(xz)$, $x=1/t$, $y=t$, $z=t^3$

16. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z=8x^2y-2x+3y$, $x=uv$, $y=u-v$

ii) $z=x/y$, $x=2\cos u$, $y=3\sin v$

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

i) $dR/d\phi$, $R=e^{2s-t^2}$, $s=3\phi$, $t=\phi^{1/2}$

ii) $\dfrac{dw}{dx}$, $w=3xy^2z^3$, $y=3x^2+2$, $z=\sqrt{x-1}$.

18. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i) $x^2-3yz^2+xyz-2=0$

ii) $ye^x - 5\sin(3z) = 3z$

19. Να βρεθεί η $D_{\vec{u}}f$ στο σημείο P.

i) $f(x,y) = (1+xy)^{3/2}$, $P(3,1)$, $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\imath + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\jmath$

ii) $f(x,y) = \sin(5x-3y)$, $P(3,5)$, $\vec{u} = \frac{3}{5}\imath - \frac{4}{5}\jmath$

iii) $f(x,y) = \ln(1+x^2+y)$, $P(0,0)$, $\vec{u} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\imath - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\jmath$

iv) $f(x,y,z) = 4x^5y^2z^3$, $P(2,-1,1)$, $\vec{u} = \frac{1}{3}\imath + \frac{2}{3}\jmath - \frac{2}{3}k$

20. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του $\vec{a}$.

i) $f(x,y) = 4x^3y^2$, $P(2,1)$, $\vec{a} = 4\imath - 3\jmath$

ii) $f(x,y,z) = \dfrac{z-x}{z+y}$, $P(1,0,-3)$, $\vec{a} = -6\imath + 3\jmath - 2k$.

21. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του διανύσματος που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα x.

i) $f(x,y) = \sqrt{xy}$, $P(1,4)$, $\theta = \pi/3$

ii) $f(x,y) = \dfrac{x-y}{x+y}$, $P(-1,-2)$, $\theta = \pi/2$

22. Έστω ότι $D_{\vec{u}}f(1,2) = -5$ και $D_{\vec{v}}f(1,2) = 10$, όπου $\vec{u} = \dfrac{3}{5}\imath - \dfrac{4}{5}\jmath$ και $\vec{v} = \dfrac{4}{5}\imath + \dfrac{3}{5}\jmath$.

i) Να βρεθούν τα $f_x(1,2)$ και $f_y(1,2)$.

ii) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1,2)$ στην κατεύθυνση που δείχνει στην αρχή των αξόνων.

23. Έστω $f_x(-5,1) = -3$ και $f_y(-5,1) = 2$. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $P(-5,1)$ στην κατεύθυνση από το P στο $Q(-4,3)$.

24. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης αύξησης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x,y) = 4x^3y^2$, $P(-1,1)$

ii) $f(x,y,z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1$, $P(1,1,-1)$

iii) $f(x,y,z) = \dfrac{x}{z} + \dfrac{z}{y^2}$, $P(1,2,-2)$

25. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης μείωσης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x,y) = 20 - x^2 - y^2$, $P(-1,-3)$

ii) $f(x,y,z) = 4e^{xy}\cos z$, $P(0,1,\pi/4)$

26. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν $\vec{v} = 2\vec{u}$ τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{v}$ είναι διπλάσια από την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ σε ένα σημείο (x_0,y_0).

ii) Αν $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και $D_{\vec{u}}f(x,y) = 0$ για κάθε (x,y), τότε η f είναι σταθερή.

27. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο $(3, -2, 1)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2\imath - \jmath - 2k$ είναι -5 και $\|\nabla f(3, -2, 1)\| = 5$, να βρεθεί το $\nabla f(3, -2, 1)$.

28. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο P.

i) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $P(-3, 0, 4)$

ii) $x^2 - xyz = 56$, $P(-4, 5, 2)$

iii) $z = e^{3y} \sin 3x$, $P(\pi/6, 0, 1)$

29. Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$.

i) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$.

ii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο $(2, 2, 1)$.

iii) Να βρεθεί η γωνία του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$ με το xy-επίπεδο.

30. Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.

i) $z = x^3 y^2$

ii) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

31. Να βρεθεί σημείο της επιφάνειας $z = 3x^2 - y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $6x + 4y - z = 5$.

32. Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία κάθετη στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.