Πανεπιστήμιο Κύπρου
Τμήμα Μαθηματικών
και Στατιστικής

ΜΑΣ026.2 - Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ

Εαρινό Εξάμηνο 2019-2020

Διδάσκων: Σταμάτης Δημόπουλος
Γραφείο: ΘΕΕ01 - Β135
Τηλέφωνο: 22893914
Email: dimopoulos.stamatios@ucy.ac.cy

Ώρες διδασκαλίας: Δευτέρα & Πέμπτη 18.30-20.30
Αίθουσα διδασκαλίας: ΧΩΔ02 Β204

Ώρες γραφείου: Δευτέρα & Πέμπτη 13.30-14.30
Ιστοσελίδα μαθήματος: `https://st-dimopoulos.github.io/mas026/`

Στόχοι και σκοπός μαθήματος

Το μάθημα έχει σκοπό την εξοικείωση με τις συναρτήσεις πολλών μεταβλητών και τη μελέτη των εννοιών της συνέχειας, της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης σε αυτές. Με αυτό το μάθημα οι φοιτητές θα μπορούν να:

- χρησιμοποιούν διανύσματα και τις ιδιότητες τους στον $\mathbb{R}^3$,
- υπολογίζουν όρια και να ελέγχουν την συνέχεια συναρτήσεων πολλών μεταβλητών,
- ελέγχουν τη διαφορισιμότητα και την ύπαρξη ακρότατων συναρτήσεων πολλών μεταβλητών,
- υπολογίζουν διπλά και τριπλά ολοκληρώματα και να εφαρμόζουν αλλαγή μεταβλητών,
- υπολογίζουν επικαμπύλια και επιφανειακά ολοκληρώματα,
- εφαρμόζουν τα θεμελιώδη θεωρήματα του Διανυσματικού Λογισμού.

Περιγραφή μαθήματος

1. Διανύσματα, εσωτερικό γινόμενο, νόρμες και εξωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^3$, συστήματα συντεταγμένων (πολικές, κυλινδρικές, σφαιρικές).
2. Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών, όρια, συνέχεια, διαφορισιμότητα, κατά κατεύθυνση παράγωγοι, πολυώνυμα Taylor, ακρότατα.
3. Καμπύλες, διανυσματικά πεδία, απόκλιση και στροβιλισμός.
4. Διπλα ολοκληρώματα, θεώρημα Fubini, τριπλά ολοκληρώματα, θεώρημα αλλαγής μεταβλητών.
5. Επικαμπύλια ολοκληρώματα α΄ και β΄ είδους, παραμετρικοποιημένες επιφάνειες και εμβαδόν επιφάνειας, επιφανειακά ολοκληρώματα α΄ και β΄ είδους.
6. Θεμελιώδη θεωρήματα Διανυσματικού Λογισμού (Green, Stokes, Gauss).

Προτεινόμενη βιβλιογραφία

1. Calculus - Early Transcendentals 10th ed. Anton et al. 2012.
2. Διανυσματικός Λογισμός, J. Marsden και A. Tromba (Μετάφραση: Α. Γιαννόπουλος), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1992.
3. Marsden, Jerrold E., and Anthony Tromba. Vector calculus. Macmillan, 2003.

Βαθμολογία

Εξέταση	Ημερομηνία	Ποσοστό
1η Ενδιάμεση εξέταση	22 Φεβρουαρίου 2020	25%
2η Ενδιάμεση εξέταση	4 Απριλίου 2020	25%
Τελική εξέταση	Θα ανακοινωθεί αργότερα	50%

ΜΑΣ026 - ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΓΙΑ ΜΗΧΑΝΙΚΟΥΣ 2.

Σταμάτης Δημόπουλος
dimopoulos.stamatios@ucy.ac.cy
ΘΕΕ01 Β135
Ώρες Γραφείου: Δευτέρα - Πέμπτη 1:30 - 2:30
https://st-dimopoulos.github.io/mas026/
Calculus - Early Transcedentals, Anton et Al (10th edition)
✓ Διανυσματικός Λογισμός, Marsden and Tromba, Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης
(Στην εξέταση ήταν επιτρεπτός ο Πανάκης)

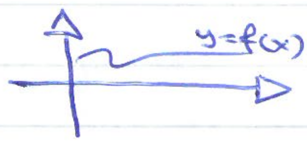
ΕΙΣΑΓΩΓΗ (από ΜΑΣ026) 13/1

Παράγωγος → ρυθμός μεταβολής $\frac{df(x)}{dx}$
→ κλίση εφαπτομένης
→ γραμμική προσέγγιση

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1 - ΑΝΑΛΥΤΙΚΗ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

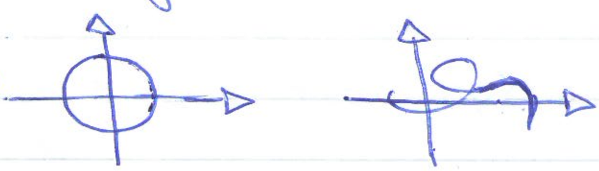
1.1 ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Το γράφημα μιας συνάρτησης $y=f(x)$ είναι καμπύλη στο επίπεδο



Δεν εκφράζονται όλες οι καμπύλες έτσι

π.χ.

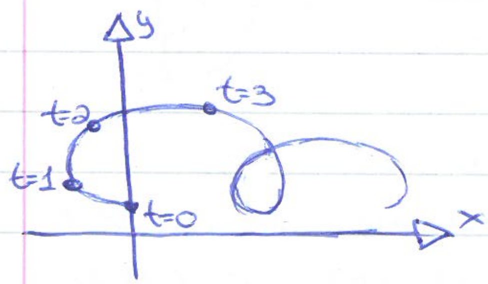


Οι καμπύλες του xy-επιπέδου εκφράζονται καλύτερα με 2 εξισώσεις $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ που περιγράφουν τη θέση που έχει ένα σωματίδιο που κινείται στην καμπύλη σε χρόνο t.

π.χ. $\begin{cases} x = t - 3\sin t \\ y = 4 - 3\cos t \end{cases}$ $(0 \le t \le 4\pi)$

Κάναμε πίνακα τιμών

t	0	1	2	3	4	5		10
x	0	-1,5	-0,7	2,6	6,3	7,9	...	11,6
y	1	2,4	5,2	7	6	3,1		6,5



ΟΡΙΣΜΟΣ: Οι εξισώσεις $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ λέγονται παραμετρικές εξισώσεις

Το σύνολο των σημείων (x,y) για τις διάφορες τιμές του t λέγεται καμπύλη ή γράφημα

Η μεταβλητή t λέγεται παράμετρος

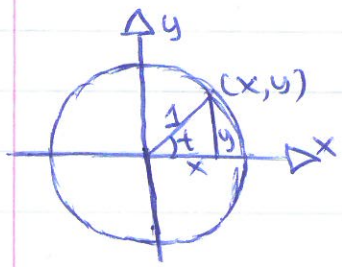
→ Αν δεν δίνεται πεδίο ορισμού για το t, θα εννοείται ότι $t \in \mathbb{R}$.

→ Αν το t παίρνει τιμές σε ένα διάστημα $[\alpha, b]$ θα γράφουμε $x = f(t)$ $(a \le t \le b)$
$y = g(t)$

Π.χ. Να βρεθεί το γράφημα των παραμετρικών εξισώσεων $x = \cos t$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$
$y = \sin t$
απαλοίφοντας την παράμετρο t.

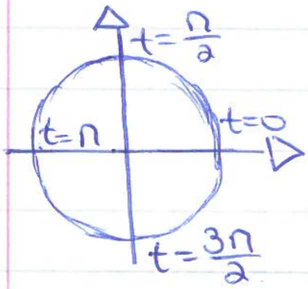
Υψώνοντας στο τετράγωνο και προσθέτοντας έχουμε
$$x^2+y^2=\cos^2 t+\sin^2 t$$
$$x^2+y^2=1$$

Το γράφημα είναι μέρος του κύκλου με κέντρο O και ακτίνα 1.



Μπορούμε να θεωρήσουμε το t σαν γωνία, διότι από την τριγωνομετρία έχουμε $x=\cos t$ και $y=\sin t$

Άρα για $0 \leq t \leq 2\pi$ "χαράζουμε" μια φορά ολόκληρο τον κύκλο με αριστερόστροφη φορά (αντίθετα από το ρολόι)

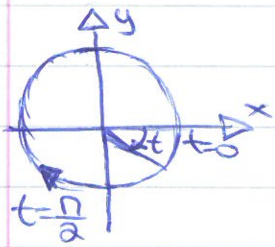


Αν είχαμε μόνο $0 \leq t \leq \pi$ θα "χαράζαμε" μόνο το πάνω ημικύκλιο.

→ Η κατεύθυνση με την οποία χαράζεται το γράφημα παραμετρικών εξισώσεων λέγεται <u>προσανατολισμός</u>.

Καμπύλη → Σύνολο σημείων του xy-επιπέδου
Παραμετρική καμπύλη → Καμπύλη με προσανατολισμό

Π.χ. Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις για τον μοναδιαίο κύκλο με δεξιόστροφη φορά.



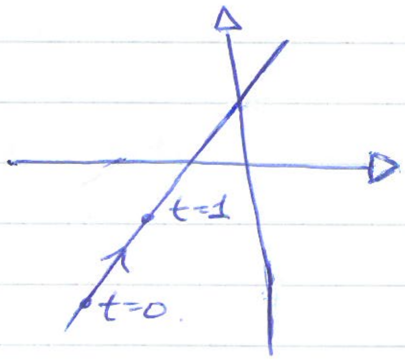
Χρησιμοποιούμε αρνητικές γωνίες.
Αντικαθιστούμε το t με $-t$
$x = \cos(-t)$, $y = \sin(-t)$ $(0 \le t \le 2\pi)$
$x = \cos t$, $y = -\sin t$ $(0 \le t \le 2\pi)$.

Π.χ. Να βρεθεί το γράφημα της παραμετρικής καμπύλης $\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = 6t-7 \end{cases}$ απαλοίφωντας την παράμετρο t.

$$\begin{cases} x = 2t-3 \\ y = 6t-7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x = 6t-9 \quad (-) \\ y = 6t-7 \end{cases}$$

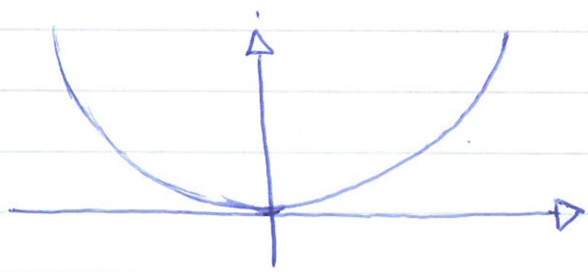
$$3x - y = -2$$
$$\Rightarrow y = 3x+2.$$

Για $t=0$: $x=-3$. $y=-7$,
Για $t=1$: $x=-1$ $y=-1$.



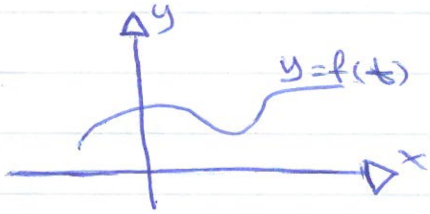
Παρατήρηση: Οι παραμετρικές εξισώσεις δεν δίνουν απαραίτητα έναν μοναδικό προσανατολισμό

Π.χ. $x = \sin t$
$y = (\sin t)^2$



ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΩΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΕΣ ΚΑΜΠΥΛΕΣ

Το γράφημα μιας συνάρτησης $y=f(x)$ μπορεί να εκφρασεί ως $x=t$, $y=f(t)$.

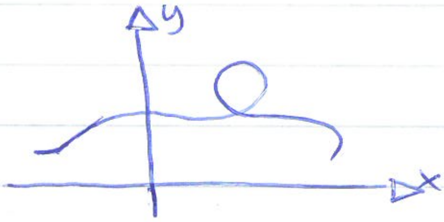


π.χ. $y=\cos x$ εκφράζεται παραμετρικά ως $x=t$, $y=\cos t$

→ Αν η f^{-1} ορίζεται, εκφράζεται παραμετρικά ως $x=f(t)$, $y=t$.

ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΕΣ ΠΑΡΑΜΕΤΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Θα υποθέσουμε ότι έχουμε $x=f(t)$, $y=g(t)$



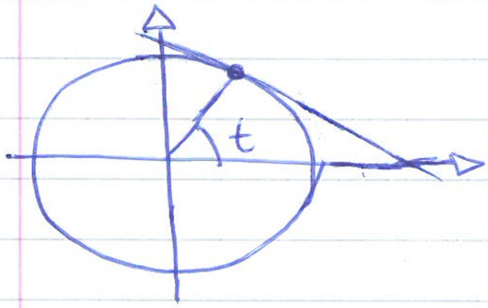
όπου f,g έχουν συνεχείς παραγώγους. Η κλίση της εφαπτομένης σε σημείο όπου $t=t_0$ θα είναι ίση με $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=t_0}$

Από κανόνα αλυσίδας $\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}$

Αν $\frac{dx}{dt}\neq 0$ τότε $\boxed{\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}}$

π.χ. $x=\cos t$, $y=\sin t$, $0\le t\le 2\pi$. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης στο σημείο $t=\frac{\pi}{6}$.

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}=\frac{\cos t}{-\sin t}\bigg|_{t=\frac{\pi}{6}}=\frac{\cos\frac{\pi}{6}}{-\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{1}{2}}=-\sqrt{3}.$$



→ Αν $\frac{dy}{dt}=0$ η εφαπτομένη είναι οριζόντια.

→ Αν $\frac{dx}{dt}=0$ έχουμε 2 περιπτώσεις:

(i) $\frac{dy}{dt}\neq 0$ έχουμε κατακόρυφη εφαπτομένη.

(ii) $\frac{dy}{dt}=0$ δεν γνωρίζουμε.

π.χ. Μια χάρτινη σαΐτα πετάει κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $x=t-3\sin t$, $y=4-3\cos t$ $(t\ge 0)$ και συγκρούεται με έναν τοίχο όταν $t=10$.

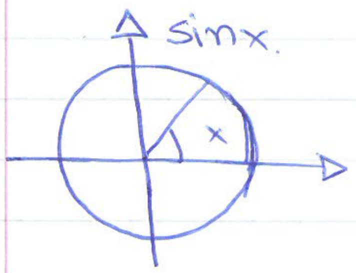
(a) Ποιές χρονικές στιγμές πετούσε οριζόντια?

(b) Ποιες χρονικές στιγμές πετούσε κατακόρυφα?

(a) Ψάχνουμε χρονικές στιγμές t όπου $\frac{dy}{dt}=0$ και $\frac{dx}{dt}\neq 0$.

$\frac{dy}{dt} = 3\sin t = 0. \Rightarrow \sin t = 0$

$\Rightarrow t=0, t=2\pi, t=3\pi$ (γιατί $t \leq 10$)



$\frac{dx}{dt} = 1-3\cos t$ άρα $\frac{dx}{dt}\neq 0$ για όλες τις πάραπανω τιμές.

Άρα πετάισε οριζόντια για $t=0$ $t=2\pi$
$t=\pi$ $t=3\pi$.

(b) Ψάχνουμε τις τιμές του t όπου $\frac{dx}{dt}=0$ και $\frac{dy}{dt}\neq 0$

$\frac{dx}{dt} = 1-\cos t = 0 \Rightarrow \cos t = \frac{1}{3}$

$\Rightarrow t = \cos^{-1}\frac{1}{3}$, $t = 2\pi \pm \cos^{-1}\frac{1}{3}$

Σε αυτές τις τιμές του t, $\frac{dy}{dt}\neq 0$

Άρα πετάισε κατακόρυφα για $t=\cos^{-1}\frac{1}{3}$

$t=2\pi\pm\cos^{-1}\frac{1}{3}$

π.χ. Για την παραμετρική καμπύλη $x = t^2$, $y = t^3$ να βρεθούν οι ποσότητες $\frac{dy}{dx}$ και $\frac{d^2y}{dx^2}$ για τα σημεία (1,1) και (1,-1)

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{2t} = \frac{3}{2}t$$

Στο σημείο (1,1), $t=1$ άρα $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=1} = \frac{3}{2}$.

Στο σημείο (1,-1), $t=-1$ άρα $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=-1} = \frac{-3}{2}$.

$$\frac{d^2y}{dt} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx^2} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}} = \frac{6t}{2t} = 3.$$

Άρα $\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=1} = \left.\frac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=-1} = 3.$

Αντιστοίχηση.

(a) $x=\sqrt{t},\ y=\sin 3t$

(b) $x=2\cos t,\ y=3\sin t$

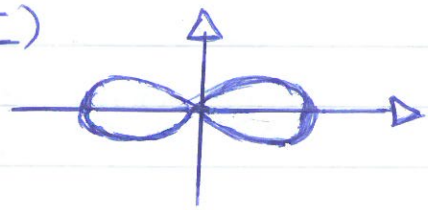
(c) $x=t\cos t,\ y=t\sin t$

(d) $x=\dfrac{3t}{1+t^3},\ y=\dfrac{3t^2}{1+t^3}$

(e) $x=\dfrac{t^3}{1+t^2},\ y=\dfrac{2t^2}{1+t^2}$

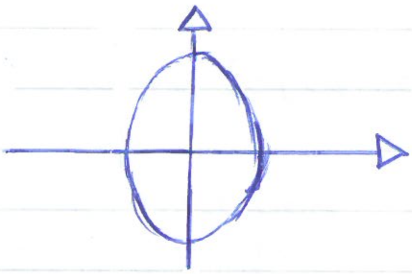
(f) $x=\dfrac{1}{2}\cos t,\ y=\sin 2t$

I)



(f) γιατί x και y φραγμένο

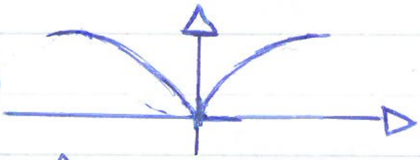
II)



(b) γιατί $\left(\dfrac{x}{2}\right)^2+\left(\dfrac{y}{3}\right)^2=1$

→ έλλειψη.

III)

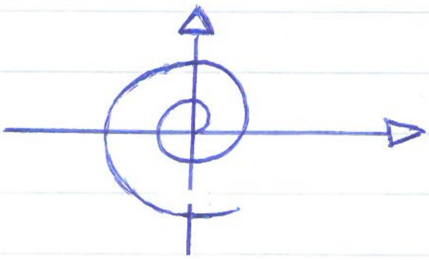


(e) γιατί $y\geq 0$

IV)

(a) γιατί $x>0$
(και y φραγμένο)

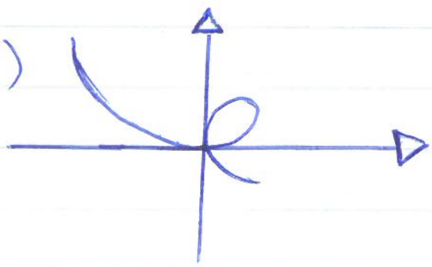
V)



(c) $x^2+y^2=t^2$

→ κύκλος με αυξανόμενη ακτίνα.

VI)



(d)

Σύνοψη

xy-επίπεδο $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ Π.Ο $[\alpha, b]$ $(a \le t \le b)$

$t \in \mathbb{R}$ (αυτονόητο)

Κατεύθυνση → προσανατολισμός
- δεξιόστροφη $t \to -\theta$
- αριστερόστροφη $t \to \theta$

αν ορίζεται f^{-1} → παραμετρικά $x = f(t)$, $y = t$.

Εφαπτομένες Παραμετρικών Καμπύλων

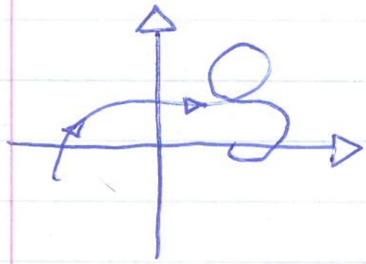
Κανόνας Αλυσίδας

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} \qquad \text{Αν } \frac{dx}{dt} \neq 0 \quad \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

- $\frac{dy}{dt} = 0$ οριζόντια εφαπτομένη
- $\frac{dx}{dt} = 0$ → $\frac{dy}{dt} \neq 0$ κατακόρυφη εφαπτομένη
  → $\frac{dy}{dt} = 0$ δεν γνωρίζουμε

$$\frac{d^2y}{dt} = \frac{dy'}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d^2y}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)}{\frac{dx}{dt}}$$

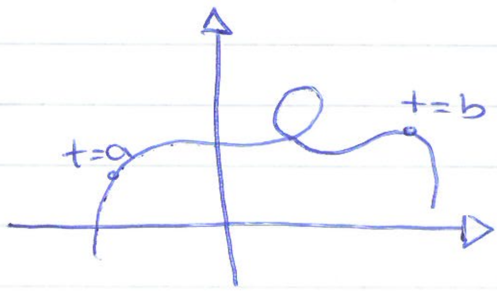


$\longrightarrow$ $x = f(t)$
$y = g(t)$.

κλίση εφαπτομένης $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$

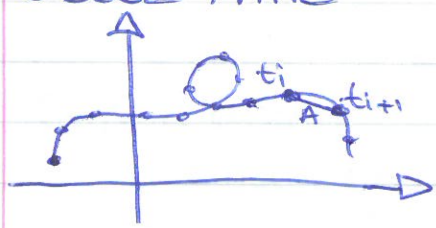
ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

Αν η παραμετρική καμπύλη
$x = x(t)$, $y = y(t)$ $(\alpha \leq t \leq b)$
είναι τέτοια ώστε δεν περάσει
2φορές το ίδιο τμήμα, το μήκος
της δίνεται από τον τύπο



$$L = \int_{\alpha}^{b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

ΕΚΤΟΣ ΥΛΗΣ:



Το ευθύγραμμο τμήμα A έχει άκρα $(x(t_i), y(t_i))$, $(x(t_{i+1}), y(t_{i+1}))$
Έχει μήκος
$\sqrt{[y(t_{i+1}) - y(t_i)]^2 - [x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2}$

Θεώρημα Μέσης Τιμής στο $[t_i, t_{i+1}]$

$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)$ $\qquad (t_{i+1} - t_i) = \Delta t_i$
$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i)$

Άρα $l_i = \sqrt{x'(t_i^*)\Delta t_i)^2 - (y'(t_i^{**})\Delta t_i)^2}$
$l_i = \sqrt{x_i'(t_i^*)^2 + y'(t_i^{**})^2}\, \Delta t_i$

Άρα $L \approx \Sigma l_i = \Sigma \sqrt{\dots}\, \Delta t_i$
$\Big\downarrow$ όριο
$$\int_{\alpha}^{b} \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt.$$

π.χ. Μήκος κύκλου ακτίνας a με παραμετρικές εξισώσεις
$x = a\cos t,\ y = a\sin t\ (0 \le t \le 2\pi)$

$x'(t) = -a\sin t$
$y'(t) = a\cos t$

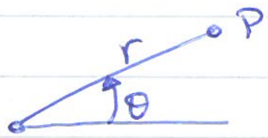
$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t} = \sqrt{a^2} = a$$

Άρα $L = \int_0^{2\pi} a\,dt = 2\pi a$.

1.2 ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ.

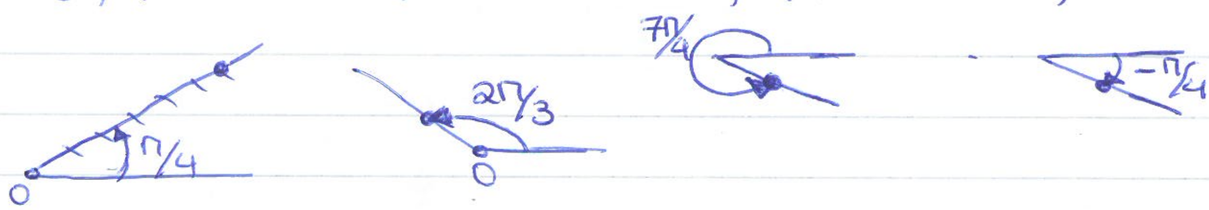
Πολικό Σύστημα Συντεταγμένων:
- Σημείο O (πόλος)
- Ημιευθεία με αρχή O → πολικός άξονας

Τα σημεία P εκφράζονται με πολικές συντεταγμένες (r,θ) όπου:
r = απόσταση από τον πόλο
θ = γωνία της ημιευθείας προς το OP.



Το ζεύγος $(0,\theta)$ περιγράφει τον πόλο για οποιαδήποτε γωνία θ.

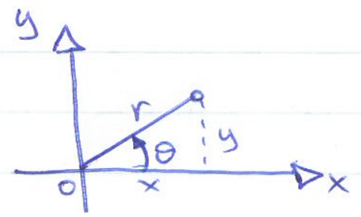
π.χ.
$(6,\frac{\pi}{4})$ $(1,\frac{2\pi}{3})$ $(1,\frac{7\pi}{4})$ $(1,-\frac{\pi}{4})$



Γενικά: το ίδιο σημείο μπορεί να έχει διαφορετικές πολικές συντεταγμένες
Για να το αποφύγουμε υποθέτουμε ότι: $r \geq 0$
$0 \leq \theta \leq 2\pi$.

ΣΧΕΣΗ ΚΑΡΤΕΣΙΑΝΩΝ ΚΑΙ ΠΟΛΙΚΩΝ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΩΝ

Σε πολικό σύστημα συντεταγμένων τοποθετούμε 2 άξονες x και y ώστε το Ox να συμπίπτει με τον πολικό άξονα.



Από τριγωνομετρία:
→ τύπος αλλαγής πολικές → καρτεσιανές
$x = r\cos\theta$
$y = r\sin\theta$
→ τύπος αλλαγής καρτεσιανές → πολικές
$r = \sqrt{x^2 + y^2}$
$\tan\theta = \frac{y}{x}$

π.χ Να μετατραπεί το $(r,\theta) = (6, \frac{2\pi}{3})$ σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$x = 6\cos(\frac{2\pi}{3}) = 6(-\frac{1}{2}) = -3$
$y = 6\sin(\frac{2\pi}{3}) = 6(\frac{\sqrt{3}}{2}) = 3\sqrt{3}$

π.χ. Να μετατραπεί το $(x,y) = (-2, -2\sqrt{3})$ σε πολικές συντεταγμένες

$r = \sqrt{(-2)^2 + (-2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+3\cdot4} = 4$
$\tan\theta = \frac{-2\sqrt{3}}{-2} = \sqrt{3}$

$\theta = \frac{\pi}{3}$ ή $\theta = \frac{4\pi}{3}$ $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$
$\Rightarrow \theta = \frac{4\pi}{3}$ διότι το σημείο είναι στο 3ο τεταρτημόριο

ΓΡΑΦΗΜΑΤΑ ΣΕ ΠΟΛΙΚΕΣ ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ

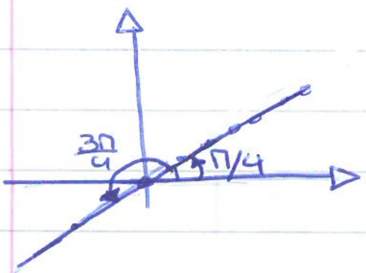
π.χ. $r=1$

Σύνολο σημείων με απόσταση 1 από το Ο → κύκλος

ή

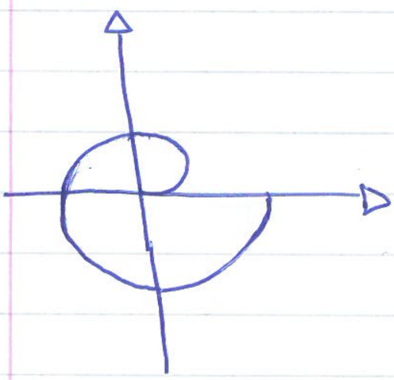
$\sqrt{x^2+y^2}=1 \Rightarrow x^2+y^2=1$ → κύκλος

π.χ. $\theta=\frac{\pi}{4}$



Ημιευθεία με αρχή Ο, γωνία $\pi/4$ με τον Οx.

π.χ. $r=\theta$.

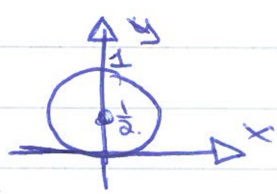


Σπείρα

π.χ. $r=\sin\theta$

$$r^2=r\sin\theta \Rightarrow x^2+y^2=y$$
$$\Rightarrow x^2+(y^2-y)=0.$$
$$\Rightarrow x^2+(y^2-y+\tfrac{1}{4})=\tfrac{1}{4}$$
$$\Rightarrow x^2+(y-\tfrac{1}{2})^2=\tfrac{1}{4}$$

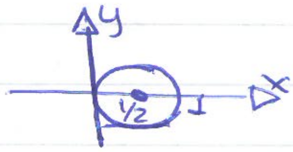
κύκλος με κέντρο $(0,\frac{1}{2})$ και ακτίνας $\frac{1}{2}$



π.χ. $r=\cos\theta$.

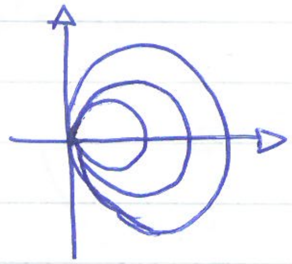
$r^2 = r\cos\theta \Rightarrow x^2+y^2=x$.
$\Rightarrow (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$.

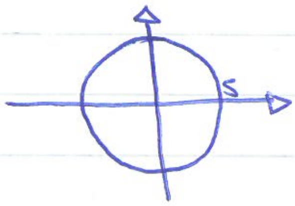
κύκλος με κέντρο $(\frac{1}{2},0)$ και ακτίνα $\frac{1}{2}$.



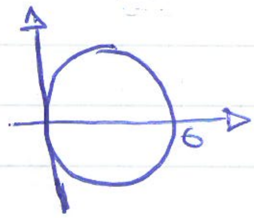
Γενικά:

$r=a$: κύκλος κέντρου $(0,0)$ ακτίνας a
$r=2a\cos\theta$: $(a,0)$ a
$r=2a\sin\theta$: $(0,a)$ a
$\theta=a$: ημιευθεία με αρχή O, γωνίας a.

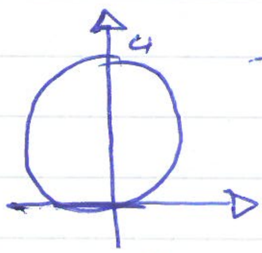




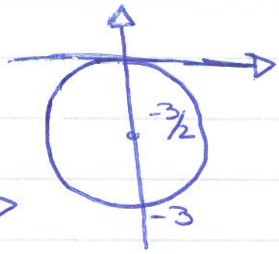
$r=5$



$r=6\cos\theta$



$r=4\sin\theta$



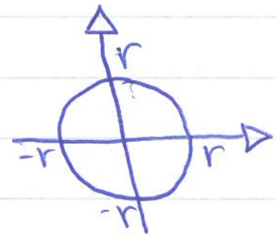
$r=-3\sin\theta$.
ή αλγεβρικά

Σε καρτεσιανές $x^2+(y+\frac{3}{2})^2=\frac{9}{4}$
$\Rightarrow x^2+y^2+3y+\frac{9}{4}=\frac{9}{4}$
$\Rightarrow x^2+y^2+3y=0$
$\Rightarrow x^2+y^2=-3y$
$\Rightarrow r^2=-3r\sin\theta$
$\Rightarrow r=-3\sin\theta$.

1.3 ΚΩΝΙΚΕΣ ΤΟΜΕΣ

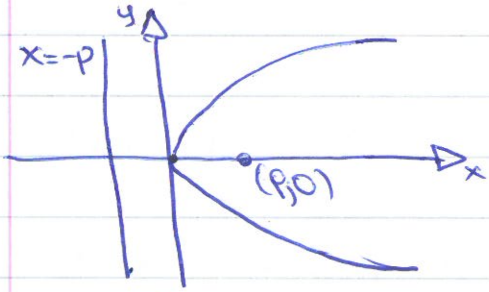
Κύκλος κέντρου (x_0, y_0) ακτίνας r

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$

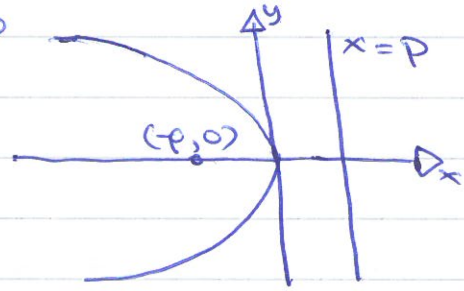


Παραβολή σημείων που έχουν ίση απόσταση από 1 σημείο -εστία- και μια ευθεία -διευθύνουσα-.

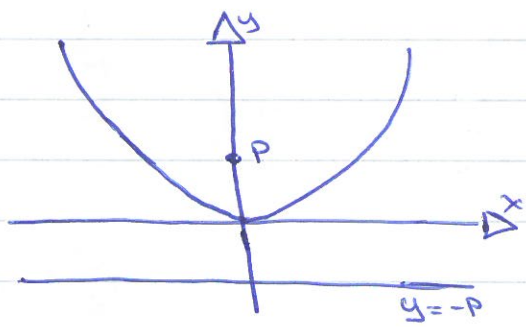
$p>0$



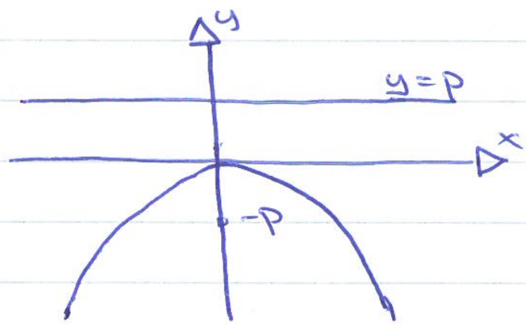
$y^2=4px$



$y^2=-4px$



$x^2=4py$

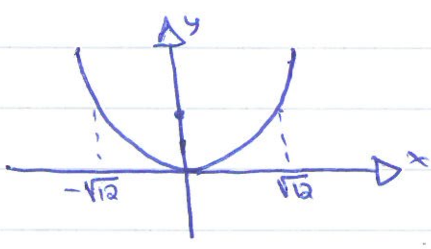


$x^2=-4py$

Π.χ Να σχεδιαστούν οι παραβολές $x^2=12y$ και $y^2+8x=0$

$x^2=12y$: ανοίγει στην y-κατεύθυνση

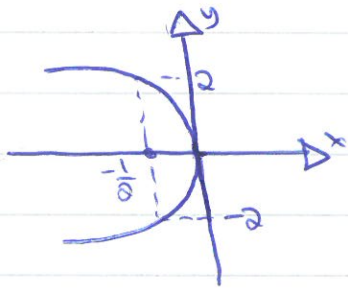
για $y=1 \Rightarrow x^2=\pm 12 \Rightarrow x=\pm\sqrt{12}$



$y^2+8x=0 \Rightarrow y^2=-8x$:

ανοίγει στην x-κατεύθυνση

για $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow y^2=4 \Rightarrow y=\pm 2$.



π.χ. Να βρεθεί εξίσωση για την παραβολή με κορυφή (0,0), συμμετρική ως προς το $y'y$ που διέρχεται από το (5,2)

Είναι της μορφής $x^2 = 4py$

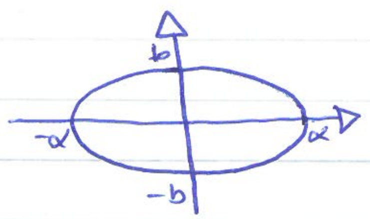
Για $x=5, y=2$: $25 = 4p \cdot 2$

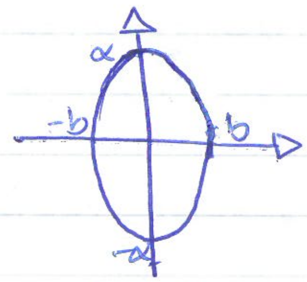
$\Rightarrow 4p = \frac{25}{2}$

$\Rightarrow x^2 = \frac{25}{2}y$

ΕΛΛΕΙΨΗ

Σύνολο των σημείων που απέχει ίσο άθροισμα αποστάσεων από 2 σημεία - εστίες:-.





Έχει 2 άξονες μεγάλο και μικρό

$\frac{x^2}{\alpha^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$

$(\alpha > b > 0)$

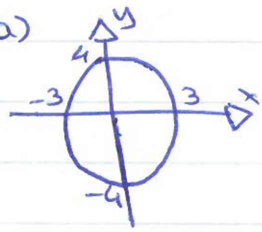
$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{\alpha^2} = 1$

$(a > b > 0)$

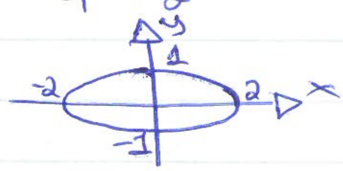
π.χ. Να σχεδιαστούν οι ελλείψεις. (α) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} = 1$

(b) $x^2 + 2y^2 = 4$.

(α)

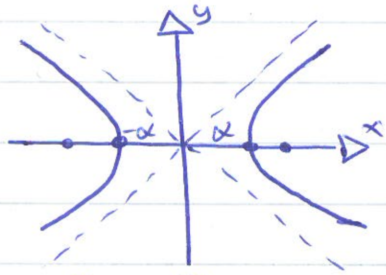


(b) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{2} = 1.$

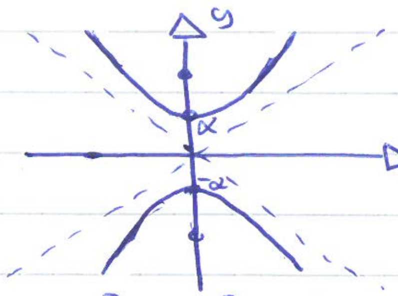


ΥΠΕΡΒΟΛΗ

Σύνολο σημείων με ίση διαφορά αποστάσεων από 2 σημεία - εστίες -. Έχει 2 ασύμπτωτες.



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$



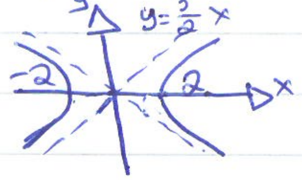
$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

Ασύμπτωτες $y = \pm \frac{b}{a} x$ Ασύμπτωτες $y = \pm \frac{a}{b} x$

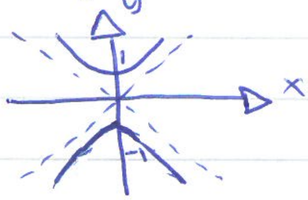
Τρικ για ασύμπτωτες: βάζουμε στο 2ο μέλος 0 και λύνουμε ως προς y

π.χ. Να σχεδιαστούν οι υπερβολές (α) $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} = 1$
(b) $y^2 - x^2 = 1$.

(α) Υπερβολή: ανοίγει στην x-κατεύθυνση.
Κορυφές: $\frac{x^2}{4} + \frac{0^2}{9} = 1 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = \pm 2$. $(2,0)\ (-2,0)$.
Ασύμπτωτες: $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 0 \Rightarrow y^2 = \frac{9}{4}x^2 \Rightarrow y = \pm \frac{3}{2} x$.



(b) Κορυφές: $(0,1)\ (0,-1)$
Ασύμπτωτες: $y = \pm x$.



π.χ. Να βρεθεί εξίσωση υπερβολής με κορυφές $(0, \pm 8)$ και ασύμπτωτες $y = \pm \frac{4}{3}x$

Είναι της μορφής $\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$.

Ασύμπτωτες $y = \pm \frac{a}{b}x$ $\Rightarrow a = 4$, $b = 3$.

(κλίση ασύμπτωτων μπορεί να δώσει a ή b).