$\frac{\infty}{\infty}$

DLH $\Rightarrow \frac{1}{3}\lim_{L\to+\infty} \cancel{\frac{1}{3e^{3L}}} + \frac{1}{9}$

0

$= \frac{1}{9}$ //

Κεφάλαιο 3 - Ακολουθίες

$f:[a,b] \to \mathbb{R}$, συνάρτηση

$a: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, ακολουθία.

Ορισμός: Μία συνάρτηση a με π.ο. τους θετικούς ακέραιους λέγεται ακολουθία

→ Οι τιμές των συναρτήσεων γράφονται: $a(1), a(2), \ldots a(n)$ ή $a_1 \ldots a_n$

και ονομάζονται όροι της ακολουθίας

→ Η ακολουθία συμβολίζεται με:

$\{a_n\}$ ή (a_n) ή a_n

→ Τρόποι ορισμού μιας ακολουθίας:

1) Με γενικό όρο:

Πχ $a_n = \frac{n}{n+2}$

Πχ $a_1 = \frac{1}{3}$, $a_2 = \frac{2}{4}$, $a_3 = \frac{3}{5}$, ...

2) με αναδρομικό τύπο.

Πχ $a_0 = 1$, $a_1 = -1$, $a_{n+1} = a_n - a_{n-1}$

$n \geq 1$.

δηλαδή, $a_2 = a_1 - a_0 = -1 - 1 = -2$.

$a_3 = a_2 - a_1 = -2 - (-1) = -1$.

$a_4 = a_3 - a_2 = -1 - (-2) = 1$.

Πχ Να βρεθούν οι 5 πρώτοι όροι των ακολουθιών:

i) $a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^2}$

$a_1 = \frac{(-1)^2}{1^2} = 1$, $a_2 = \frac{(-1)^3}{4} = -\frac{1}{4}$

$a_3 = \frac{1}{9}$, $a_4 = -\frac{1}{16}$, $a_5 = \frac{1}{25}$

ii) $a_n = \frac{n}{2^n}$

$a_1 = \frac{1}{2}$, $a_2 = \frac{2}{4}$, $a_3 = \frac{3}{8}$, $a_4 = \frac{4}{16}$

$a_5 = \frac{5}{32}$

iii) $a_1=\sqrt{6}$, $a_{n+1}=\sqrt{6+a_n}$, $n\geq 1$

$a_1=\sqrt{6}$, $a_2=\sqrt{6+a_1}=\sqrt{6+\sqrt{6}}$

$a_3=\sqrt{6+a_2}=\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}$

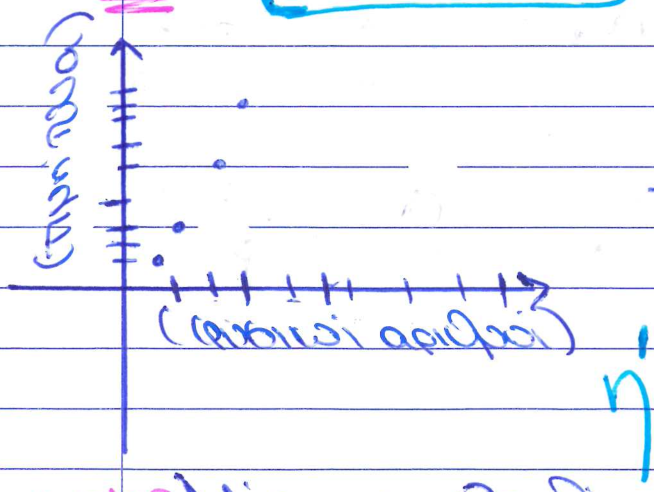
$a_4=\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6\sqrt{6}}}}$

iv) $a_n=5$

$a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=5$.

Γραφική παράσταση

Πχ $\boxed{a_n=n^2}$

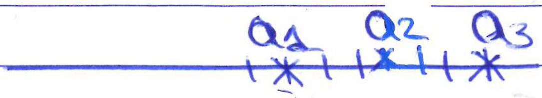


ή

$a_1=1$
$a_2=4$
$a_3=9$

Τα σημεία ανήκουν στην παραβολή $y=x^2$

ορισμός: Μια ακολουθία a_n συγκλίνει σε ένα αριθμό L αν



$\lim\limits_{n\to+\infty} a_n=L$ ή $a_n\to L$

Θεώρημα: (Ιδιότητες των ορίων)

Έστω ότι οι ακολουθίες a_n και b_n συγκλίνουν στους αριθμούς L_1 και L_2 αντίστοιχα.

Τότε,

1) $\lim_{n \to +\infty} c a_n = c L_1$, $c \in \mathbb{R}$

2) $\lim_{n \to \infty} (a_n \pm b_n) = L_1 \pm L_2$

3) $\lim_{n \to \infty} (a_n * b_n) = L_1 \cdot L_2$

4) $\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L_1}{L_2}$ $L_2 \neq 0$

Υπολογισμός ορίων μέσω συναρτήσεων:

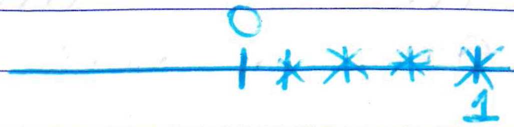
Αν ο γενικός όρος μιας ακολουθίας είναι $f(n)$, όταν $f(x)$ είναι μια συνάρτηση που ορίζεται στο $[1, +\infty)$ τότε,

Αν $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ τότε,

$$\lim_{n \to +\infty} f(n) = L$$

* (το αντίστροφο δεν ισχύει)

Αν $\lim a_n = \pm\infty$, λέμε ότι η a_n αποκλίνει ή δεν συγκλίνει.



Πχ $a_n = \frac{1}{n}$

Έστω $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \geq 1$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ άρα

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$$

Πχ $a_n = \frac{\ln n}{n}$,

Έστω $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ $\quad x \geq 1$

Επίσης, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) \overset{DLH}{=} \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1}} = \frac{1}{x}$

$= 0$

Άρα $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Πχ $a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2n^2}$

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+3n+2}{2n^2} = \frac{1}{2}.$$

Άρα, $\lim\limits_{n\to+\infty} f(n) = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 1/2$

Πχ $a_n = \sqrt[n]{n} = n^{\frac{1}{n}}$

Έστω $f(x) = x^{\frac{1}{x}} = e^{\ln x^{\frac{1}{x}}}$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\ln x \overset{DLH}{\Rightarrow} \lim_{x\to+\infty} \frac{(\ln x)'}{(x)'} = \frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{1}} = 0$$

Άρα $\lim_{x\to+\infty} f(x) = e^0 = 1$.

$$\lim_{n\to+\infty} f(n) = \lim_{n\to+\infty} a^n = 1$$

Θεώρημα: Έστω a_n, b_n, c_n ακολουθίες ώστε $a_n \le b_n \le c_n$ (κριτήριο παρεμβολής)

Αν $a_n \to L$ και $c_n \to L$ τότε $b_n \to L$

Θεώρημα: Αν $|a_n| \to 0$ τότε $a_n \to 0$

Πχ Να βρεθούν τα όρια των ακολουθιών

i) $a_n = \frac{(\sin n)^2}{n}$

$-1 \le \sin n \le 1$.

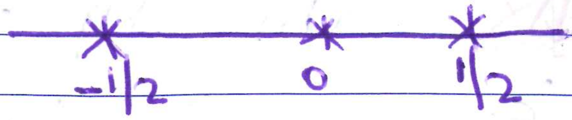
$0 \le (\sin n)^2 \le 1$

$\frac{0}{n} \le \frac{\sin^2 n}{n} \le \frac{1}{n}$

$\Rightarrow$ Επίσης $\lim_{n\to+\infty} 0 = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$

Άρα $\lim_{n\to+\infty} a_n = 0$

ii) $a_n = \frac{(-1)^n}{2^n}$



$|a_n| = \frac{1}{2^n} \to 0 \quad \left(\frac{1}{2^{\infty}} = \frac{1}{\infty} = 0 \right)$

άρα, $a_n = 0$

Ακολουθίες

Πεδίο ορισμού $\quad a : \mathbb{N} \to \mathbb{R} \quad (n \geq 1)$

$\overset{\shortparallel}{a_n}$

a_n συγκλίνει $\iff \lim\limits_{n \to +\infty} a_n = L \in \mathbb{R}$

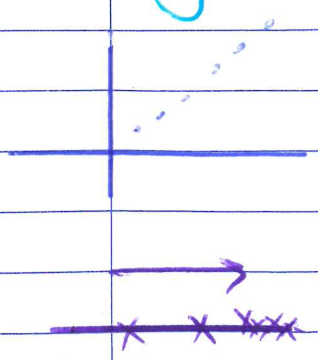
αποκλίνει $\iff \lim a_n$ δεν υπάρχει ή είναι $+\infty$ ή $-\infty$.

Μονότονη ακολουθία

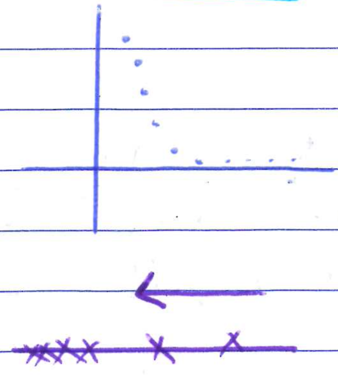
Ορισμός: Η ακολουθία λέγεται

- αύξουσα αν $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots \leq a_n \leq \dots$
- φθίνουσα αν $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots \geq a_n \geq \dots$

Αύξουσα:



Φθίνουσα:



- (a_n) αύξουσα $\Leftrightarrow a_{n+1} \geq a_n \ \forall n$

$$\Leftrightarrow \frac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1$$

- (a_n) φθίνουσα $\Leftrightarrow$ $a_{n+1} \leq a_n$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$$

Παρατήρηση: Αν $a_n = f(n)$ όπου $f(x)$ είναι παραγωγίσιμη για $x \geq 1$ τότε:

* $f'(x) \geq 0 \Rightarrow (a_n)$ αύξουσα
* $f'(x) \leq 0 \Rightarrow (a_n)$ φθίνουσα

Πχ Να εξετάσετε αν οι ακολουθίες είναι μονότονες:

i) $a_n = \dfrac{n}{2n+1}$

$$a_{n+1} = \frac{n+1}{2(n+1)+1} = \frac{n+1}{2n+2+1} = \frac{n+1}{2n+3}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{n+1}{2n+3}^{\ (2n+1)} - \frac{n}{2n+1}^{\ (2n+3)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{(2n+1)(n+1) - n(2n+3)}{(2n+3)(2n+1)}$$

$$= \frac{\cancel{2n^2} + 2n + n + 1 - \cancel{2n^2} - 3n}{(2n+3)(2n+1)} = \frac{1}{(2n+3)(2n+1)} > 0$$

$a_{n+1} > a_n$ άρα (a_n) αύξουσα.

{n! παραγοντικό}
{$n! = 1.2.3\ldots n$}

ii) $a_n = \dfrac{n!}{3^n}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{(n+1)!}{3^{n+1}}}{\frac{n!}{3^n}} = \frac{(n+1)!\,3^n}{n!\,3^{n+1}}$$

Το παραγοντικό συμπεριφέρεται αυστηρά εκθετικώ.

$$= \frac{(n+1)}{3}$$

* για $n = 1, 2$ $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$

* για $n \geq 3$ $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

Η (a_n) δεν είναι μονότονη

(αλλά αυτήν ορίζαμε για $n \geq 3$, θα ήταν αύξουσα)

ii) $a_n = \dfrac{\ln(n+2)}{n+2}$

Έστω η συνάρτηση $f(x) = \dfrac{\ln(x+2)}{x+2}$, $x \geq 1$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x+2}(x+2) - \ln(x+2)}{(x+2)^2}$$

$$= \frac{1 - \ln(x+2)}{(x+2)^2}$$

για $x \geq 1$
$x+2 \geq 3 > e$
άρα $\ln(x+2) > 1$
αυτόπως $f'(x) < 0$ για $x \geq 1$
Άρα η (a_n) είναι φθίνουσα.

Όρια μονότονων συναρτήσεων:

a_n ↑  (όριο το ∞)

Θεώρημα:

Αν μία ακολουθία (a_n) είναι αύξουσα τότε υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

1) Υπάρχει άνω φράγμα, δηλαδή ο αριθμός M ώστε $a_n \le M$ $\forall n$.
Σε αυτή τη περίπτωση η (a_n) συγκλίνει σε κάποιο αριθμό $L \le M$.

2) Δεν υπάρχει άνω φράγμα.
Σε αυτή τη περίπτωση:
$$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$$

Θεώρημα: Αν η (a_n) είναι φθίνουσα υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

1) Υπάρχει κάτω φράγμα, δηλαδή ο αριθμός M ώστε $a_n \ge M$ $\forall n$.
Σε αυτή τη περίπτωση η (a_n) συγκλίνει σε κάποιο αριθμό $L \ge M$

2) Δεν υπάρχει κάτω φράγμα
Σε αυτή τη περίπτωση:
$$\lim_{n\to-\infty} a_n = -\infty$$

Πχ Να εξετάσετε αν οι ακολουθίες συγκλίνουν

i) $a_n = \frac{2^n}{(n+1)!}$

$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}}{\frac{2^n}{(n+1)!}} = \frac{2^{n+1}\cdot(n+1)!}{2^n (n+2)!} = \frac{2}{n+2} < 1$ για κάθε $n \geq 1$

Άρα η (a_n) είναι φθίνουσα.

Επίσης $a_n \geq 0$ δηλαδή, υπάρχει κάτω φράγμα.

Συνεπώς, η (a_n) συγκλίνει.

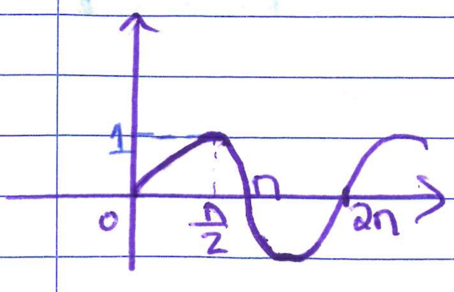
ii) $a_n = \cos\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

Έστω $f(x) = \cos\left(\frac{\pi}{2x}\right)$, $x \geq 1$

$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\left(\frac{\pi}{2x}\right)'$

$f'(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)\cdot\left(-\pi/2x^2\right) = \frac{\pi}{2x^2}\sin\left(\frac{\pi}{2x}\right)$

για $x \geq 1$, $0 \leq \pi/2x \leq \pi/2$



Άρα $f'(x) \geq 0 \Rightarrow (a_n)$ αύξουσα.
Επίσης $a_n \leq 1$, την έχει άνω φράγμα
$\Rightarrow a_n$ συγκλίνει.