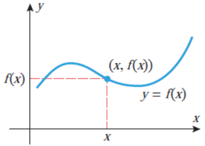
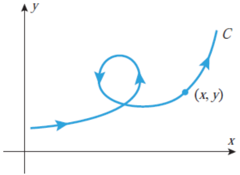
Κεφάλαιο 1 - Αναλυτική Γεωμετρία στο Επίπεδο

1.1 Παραμετρικές Καμπύλες

Κάθε συνάρτηση $y = f(x)$ μπορεί να εκφραστεί σαν καμπύλη του επιπέδου.



Δεν εκφράζονται όλες οι καμπύλες με αυτόν τον τρόπο.



Παράδειγμα

$$\begin{cases} x = t - 3\sin t \\ y = 4 - 3\cos t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant 4\pi)$$

Ορισμός

Οι εξισώσεις $\begin{cases} x = f(t) \\ y = g(t) \end{cases}$ λέγονται **παραμετρικές εξισώσεις** και το σύνολο των σημείων (x, y) για τις διάφορες τιμές του t λέγεται **παραμετρική καμπύλη**. Η μεταβλητή t λέγεται **παράμετρος** των εξισώσεων.

Σημείωση: Αν δεν δίνεται πεδίο ορισμού για το t, θα εννοείται ότι είναι το ευρύτερο σύνολο για το οποίο ορίζονται κι οι δύο εξισώσεις.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το γράφημα της παραμετρικής καμπύλης

$$x = \cos t,\ y = \sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

Η κατεύθυνση με την οποία χαράζεται η καμπύλη ονομάζεται **προσανατολισμός** της καμπύλης.

$$\begin{array}{rcl} \text{Καμπύλη} & \longrightarrow & \text{Σύνολο σημείων στο } xy\text{-επίπεδο} \\ \text{Παραμετρική καμπύλη} & \longrightarrow & \text{Καμπύλη με προσανατολισμό} \end{array}$$

Παράδειγμα

Να βρεθούν παραμετρικές εξισώσεις για τον μοναδιαίο κύκλο με δεξιόστροφη φορά.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το γράφημα της παραμετρικής καμπύλης

$$x = 2t - 3, \ y = 6t - 7$$

Σημείωση: Μια παραμετρική καμπύλη μπορεί να μην έχει σταθερό προσανατολισμό

Παράδειγμα

$$x = \sin t, \; y = \sin^2 t$$

Το γράφημα μιας συνάρτησης $y = f(x)$ μπορεί να εκφραστεί μέσω των παραμετρικών εξισώσεων

$$x = t, \; y = f(t)$$

Αν η f είναι 1-1, τότε η f^{-1} μπορεί να εκφραστεί μέσω των παραμετρικών εξισώσεων

$$x = f(t), \; y = t$$

Παράδειγμα

$y = \cos x, \; x \in [-2\pi, 2\pi]$

Έστω παραμετρική καμπύλη

$$x = f(t), \; y = g(t)$$

όπου οι f, g έχουν συνεχείς παραγώγους.
Από κανόνα αλυσίδας $\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{dy}{dx}\dfrac{dx}{dt}$. Επομένως

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

Με τον παραπάνω τύπο, το $\dfrac{dy}{dx}$ είναι συνάρτηση του t και εκφράζει την κλίση της εφαπτομένης της παραμετρικής καμπύλης για μια δεδομένη τιμή του t.

Παράδειγμα

Έστω η παραμετρική καμπύλη $x = \cos t,\ y = \sin t$ $(0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$. Να βρεθεί η κλίση της εφαπτομένης της καμπύλης στο σημείο όπου $t = \pi/6$.

$$\boxed{\frac{dy}{dx} = \frac{dy/dt}{dx/dt}}$$

- Αν $\frac{dx}{dt} \neq 0$ και $\frac{dy}{dt} = 0$ τότε η εφαπτομένη είναι οριζόντια.
- Αν $\frac{dx}{dt} = 0$ τότε έχουμε δύο περιπτώσεις.
  - Αν $\frac{dy}{dt} \neq 0$ τότε η εφαπτομένη είναι κατακόρυφη.
  - Αν $\frac{dy}{dt} = 0$ τότε δεν υπάρχει συμπέρασμα.

Παράδειγμα

Μια σαΐτα από χαρτί ακολουθει τροχιά κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης

$$x = t - 3\sin t,\ y = 4 - 3\cos t\ (t \geqslant 0)$$

και συγκρούεται με έναν τοίχο σε χρόνο $t = 10$.

- Ποιες χρονικές στιγμές πετούσε οριζόντια;
- Ποιες χρονικές στιγμές πετούσε κατακόρυφα;

Παράδειγμα

Για την παραμετρική καμπύλη

$$x = t^2,\ y = t^3\ (t \in \mathbb{R})$$

να βρεθούν οι ποσότητες $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d^2y}{dx^2}$ στο σημείο $(1,1)$.

Ορισμός

Αν η παραμετρική καμπύλη $x = x(t),\ y = y(t)$ $(a \leqslant t \leqslant b)$ είναι τέτοια ώστε δεν χαράζει το ίδιο τμήμα δεύτερη φορά, τότε το μήκος της δίνεται από τον τύπο

$$L = \int_a^b \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2}\, dt$$

Συνέχεια

Παράδειγμα

Να βρεθεί το μήκος κύκλου ακτίνας a με παραμετρικές εξισώσεις

$$x = a\cos t,\ y = a\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$$

Παράδειγμα

Να αντιστοιχήσετε τις παραμετρικές καμπύλες με τα αντίστοιχα γραφήματά τους.

(a) $x = \sqrt{t},\ y = \sin 3t$ (b) $x = 2\cos t,\ y = 3\sin t$

(c) $x = t\cos t,\ y = t\sin t$

(d) $x = \dfrac{3t}{1+t^3},\ y = \dfrac{3t^2}{1+t^3}$

(e) $x = \dfrac{t^3}{1+t^2},\ y = \dfrac{2t^2}{1+t^2}$

(f) $x = \frac{1}{2}\cos t,\ y = \sin 2t$