1.3 Ειδικές περιπτώσεις πινάκων

Ορισμός

Αν A είναι πίνακας $m \times n$, ο **ανάστροφος** του A συμβολίζεται με A^T και είναι ένας $n \times m$ πίνακας που προκύπτει κάνοντας τις γραμμές του A στήλες και τις στήλες γραμμές.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Ιδιότητες

1. $(A^T)^T = A$
2. $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T \quad (\lambda \in \mathbb{R})$
4. $(AB)^T = B^T A^T$

Ειδικές περιπτώσεις τετραγωνικών πινάκων

1. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **διαγώνιος** αν κάθε στοιχείο εκτός της κυρίας διαγωνίου είναι μηδενικό.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **άνω τριγωνικός** αν κάθε στοιχείο κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικό.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

Ειδικές περιπτώσεις τετραγωνικών πινάκων

3. Ένας τετραγωνικός πίνακας λέγεται **κάτω τριγωνικός** αν κάθε στοιχείο πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδενικό.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

4. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **συμμετρικός** αν $A^T = A$, δηλαδή η κύρια διαγώνιος είναι άξονας συμμετρίας.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 4 & 2 & 6 \\ 5 & 6 & 3 \end{pmatrix}$$

Ειδικές περιπτώσεις τετραγωνικών πινάκων

5. Ένας τετραγωνικός πίνακας A λέγεται **αντισυμμετρικός** αν $A^T = -A$.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

Αν ο A είναι αντισυμμετρικός τότε τα στοιχεία της κυρίας διαγωνίου είναι ίσα με 0 και τα συμμετρικά ως προς την διαγώνιο στοιχεία είναι αντίθετα.

Ιδιότητες

1. Ο ανάστροφος κάτω τριγωνικού πίνακα είναι άνω τριγωνικός.
2. Ο ανάστροφος άνω τριγωνικού πίνακα είναι κάτω τριγωνικός.
3. Αν ο A είναι συμμετρικός, τότε και ο A^T είναι συμμετρικός.
4. Αν οι A, B είναι συμμετρικοί τότε και οι $A - B$ και $B - A$ είναι συμμετρικοί.
5. Αν ο A είναι συμμετρικός τότε και ο λA είναι συμμετρικός για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.

Παρατήρηση

Αν οι A, B είναι συμμετρικοί, είναι πιθανόν ο AB να μην είναι συμμετρικός.

Παράδειγμα

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Θέωρημα

Έστω A, B συμμετρικοί πίνακες. Τότε ο AB είναι συμμετρικός αν και μόνο αν $AB = BA$.

Απόδειξη:

Θέωρημα

Έστω A, B συμμετρικοί πίνακες. Τότε ο $AB - BA$ είναι αντισυμμετρικός.

Απόδειξη: