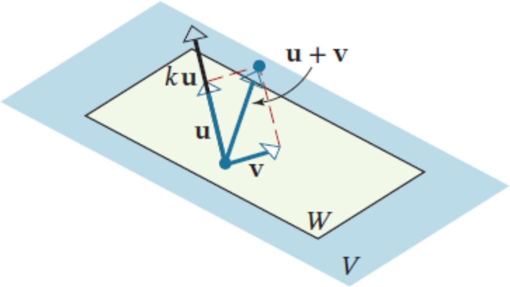
2.5 Υπόχωροι

Ορισμός

Αν V είναι ένας διανυσματικός χώρος και $W \subseteq V$ τότε το W λέγεται **υπόχωρος** του V αν περιέχει το $\mathbb{O}$ του V και η πρόσθεση κι ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός του V κάνουν το W διανυσματικό χώρο.



Αντί να ελέγξουμε όλα τα αξιώματα των διανυσματικών χώρων, χρησιμοποιούμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα

Αν V είναι διανυσματικός χώρος και $W \subseteq V$ τότε το W είναι υπόχωρος του V αν ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες.

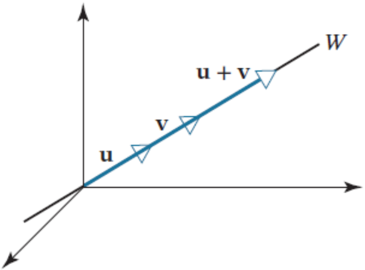
1. $\mathbb{O} \in W$
2. *Αν* $u, v \in W$ *τότε* $u + v \in W$.
3. *Αν* $\lambda \in \mathbb{R}$ *και* $u \in W$, *τότε* $\lambda u \in W$.

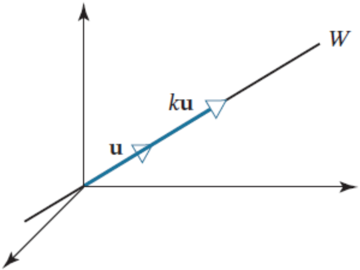
Παράδειγμα

Τα υποσύνολα $W_1 = \{\mathbb{O}\}$ και $W_2 = \mathbb{R}^n$ του $\mathbb{R}^n$ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα

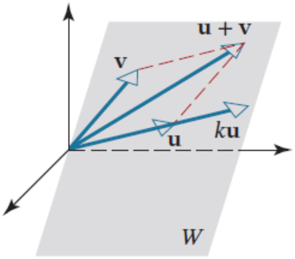
Στον $\mathbb{R}^3$, κάθε ευθεία είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Αν μια ευθεία διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.





Παράδειγμα

Στον $\mathbb{R}^3$, κάθε επίπεδο είναι ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^3$. Αν το επίπεδο διέρχεται από την αρχή των αξόνων, τότε είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$.



Παράδειγμα

Αν $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{R}^n$ τότε το σύνολο $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Παράδειγμα

Αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε ο χώρος στηλών του A, $\mathrm{Col}(A)$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$.

Παράδειγμα

Το σύνολο λύσεων ενός ομογενούς γραμμικού συστήματος $A\mathbf{x} = \mathbb{O}$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, αν ο A είναι $m \times n$ πίνακας, τότε ο μηδενικός χώρος του A, $\mathrm{Nul}(A)$, είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.