

## ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II Εαρινό εξάμηνο 2021

### Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Ναδειχθεί ότι τα  $(4, 5, 2)$ ,  $(1, 7, 3)$  και  $(2, 4, 5)$  είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.

**Απάντηση:**  $\|AB\| = \|AC\| = \|BC\| = \sqrt{14}$ .

2. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) κέντρο  $(7, 1, 1)$ , ακτίνα 4,
- ii) κέντρο  $(1, 0, -1)$ , διάμετρος 8,
- iii) κέντρο  $(-1, 3, 2)$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
- iv) κέντρο  $(2, -1, -3)$ , εφάπτεται στο  $xy$ -επίπεδο.

**Απάντηση:** i)  $(x-7)^2 + (y-1)^2 + (z-1)^2 = 16$ , ii)  $(x-1)^2 + y^2 + (z+1)^2 = 16$ , iii)  $(x+1)^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 14$ .

3. Περιγράψτε την επιφάνεια με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$ .

**Απάντηση:** Κύκλος με κέντρο  $(-5, -2, -1)$  και ακτίνα 7.

4. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα για τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.

- i)  $x^2 + y^2 = 25$
- ii)  $y^2 + z^2 = 25$
- iii)  $x^2 + z^2 = 25$

5. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.

- i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $x$  και το σημείο  $(0, 1, 2)$ .
- ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $y$  και το σημείο  $(1, 0, 2)$ .
- iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $z$  και διέρχεται από το  $(1, 1, 0)$ .
- iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y$  και διέρχεται από το  $(1, 0, 1)$ .

**Απάντηση:** i)  $z = 2y$  ii)  $z = 2x$ , iii)  $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$ , iv)  $(x-1)^2 + (z-1)^2 = 1$ .

6. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ . Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;

**Απάντηση:**  $3 \pm \sqrt{6}$ .

7. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα.

- i)  $(1, -2, 2)$
- ii)  $(2, 2, -1)$
- iii)  $-i + 2j + 3k$
- iv)  $2i + 3j - k$

8. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .

- i)  $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$ ,
- ii)  $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$ .

**Απάντηση:** i)  $(-1, 3)$ , ii)  $(-3, 6, 1)$ .

9. Έστω  $\vec{u} = 3\mathbf{i} - k$ ,  $\vec{v} = \mathbf{i} - j + 2k$ ,  $\vec{w} = 3j$ . Να γίνουν οι πράξεις.

- i)  $\vec{w} - \vec{v}$       ii)  $6\vec{u} + 4\vec{w}$       iii)  $-\vec{v} - 2\vec{w}$
- iv)  $4(3\vec{u} + \vec{v})$     v)  $-8(\vec{v} + \vec{w}) + 2\vec{u}$     vi)  $3\vec{w} - (-\vec{v} - \vec{w})$

**Απάντηση:** i)  $-\mathbf{i} + 4j - 2k$ , ii)  $18\mathbf{i} + 12j - 6k$ , iii)  $-\mathbf{i} - 5j - 2k$ , iv)  $40\mathbf{i} - 4j - 4k$ , v)  $-2\mathbf{i} - 16j - 18k$ , vi)  $\mathbf{i} + 11j + 2k$ .

10. Να βρεθεί η νόρμα του  $\vec{v}$ .

- i)  $\vec{v} = (1, -1)$
- ii)  $\vec{v} = (-1, 2, 4)$
- iii)  $\vec{v} = -3\mathbf{i} + 2j + k$

**Απάντηση:** i)  $\sqrt{2}$ , ii)  $\sqrt{21}$ , iii)  $\sqrt{14}$ .

11. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
- ii) Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.

**Απάντηση:** Λάθος, Σωστό.

12. Να βρεθεί διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.

- i) Αντίθετη κατεύθυνση από το  $\vec{v} = (3, -4)$  και μέτρο το μισό του μέτρου του  $\vec{v}$ .
- ii) Μήκος  $\sqrt{17}$  και κατεύθυνση ίδια με το  $\vec{v} = (7, 0, -6)$ .

**Απάντηση:** i)  $(-3/2, 2)$ , ii)  $(7/\sqrt{5}, 0, -6/\sqrt{5})$ .

13. Να βρεθεί διάνυσμα  $\vec{v}$  στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες. Με  $\theta$  συμβολίζουμε τη γωνία του διανύσματος με τον άξονα  $Ox$ .

- i)  $\|\vec{v}\| = 3, \theta = \pi/4$
- ii)  $\|\vec{v}\| = 2, \theta = 90^\circ$

**Απάντηση:** i)  $(3\sqrt{2}/2, 3\sqrt{2}/2)$ , ii)  $(0, 2)$ .

14. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιούν τη δοσμένη συνθήκη.

- i) Παράλληλα στην ευθεία  $y = 3x + 2$ .
- ii) Παράλληλα στην ευθεία  $x + y = 4$ .
- iii) Κάθετα στην ευθεία  $y = -5x + 1$ .

**Απάντηση:** i)  $\pm \frac{1}{\sqrt{10}}(1, 3)$ , ii)  $\pm \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1)$ , iii)  $\pm \frac{1}{\sqrt{26}}(5, 1)$ .

**15.** Έστω  $\vec{r} = (x, y, z)$  ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων  $(x, y, z)$  που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.

- i)  $\|\vec{r}\| = 1$
- ii)  $\|\vec{r}\| \leq 1$
- iii)  $\|\vec{r}\| > 1$

**Απάντηση:** i) Σφαίρα κέντρου  $O$  και ακτίνας 1, ii) Συμπαγής σφαίρα κέντρου  $O$  και ακτίνας 1, iii) Εξωτερικό σφαίρας κέντρου  $O$  και ακτίνας 1.

**16.** Βρείτε αν τα διανύσματα σχηματίζουν οξεία, ορθή ή αμβλεία γωνία.

- i)  $\vec{u} = 7\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \vec{v} = -8\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
- ii)  $\vec{u} = 6\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \vec{v} = 4\mathbf{i} - 6\mathbf{k}$
- iii)  $\vec{u} = (4, 1, 6), \vec{v} = (-3, 0, 2)$

**Απάντηση:** i) Αμβλεία, ii) οξεία, iii) ορθή.

**17.** Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές  $A(2, -1, 1), B(3, 2, -1)$  και  $C(7, 0, -2)$  είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.

**Απάντηση:**  $\hat{B} = \pi/2$ .

**18.** Να δείξετε ότι  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$  και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

**Απάντηση:** Θεώρημα διαγωνίων παραλληλογράμμου.

- 19.**
- i) Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το  $\mathbf{i} \times (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$ .
  - ii) Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

**Απάντηση:**  $-\mathbf{j} + \mathbf{k}$ .

**20.** Να βρεθεί το  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

- i)  $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-4, 1, 2)$
- ii)  $\vec{u} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \vec{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

**Απάντηση:** i)  $7\mathbf{i} + 10\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ , ii)  $-\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$ .

**21.** Να βρεθούν οι παρακάτω ποσότητες για τα διανύσματα  $\vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = (0, 1, 7)$  και  $\vec{w} = (1, 4, 5)$ .

- i)  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- ii)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
- iii)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$
- iv)  $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$

**Απάντηση:** i)  $-20\mathbf{i} - 67\mathbf{j} - 9\mathbf{k}$ , ii)  $-78\mathbf{i} + 52\mathbf{j} - 26\mathbf{k}$ , iii)  $0\mathbf{i} - 56\mathbf{j} - 392\mathbf{k}$ , iv)  $0\mathbf{i} + 56\mathbf{j} + 392\mathbf{k}$ .

**22.** Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία  $A(0, -2, 1), B(1, -1, -2)$  και  $C(-1, 1, 0)$ .

**Απάντηση:**  $\pm \frac{1}{4\sqrt{6}}(8, 4, 4)$ .

**23.** Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα  $\vec{u} = i - j + 2k$  και  $\vec{v} = 3j + k$ .

**Απάντηση:**  $\sqrt{59}$ .

**24.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές  $P(1, 5, -2)$ ,  $Q(0, 0, 0)$  και  $R(3, 5, 1)$ .

**Απάντηση:**  $\sqrt{374}/2$ .

**25.** Να βρεθεί το  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  για τα  $\vec{u} = 2i - 3j + k$ ,  $\vec{v} = 4i + j - 3k$  και  $\vec{w} = j + 5k$ .

**Απάντηση:** 80.

**26.** Να ελέγξετε αν τα διανύσματα είναι στο ίδιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τριπλό βαθμωτό γινόμενο.

i)  $\vec{u} = (1, -2, 1)$ ,  $\vec{v} = (3, 0, -2)$ ,  $\vec{w} = (5, -4, 0)$

ii)  $\vec{u} = 5i - 2j + k$ ,  $\vec{v} = 4i - j + k$ ,  $\vec{w} = i - j$

iii)  $\vec{u} = (4, -8, 1)$ ,  $\vec{v} = (2, 1, -2)$ ,  $\vec{w} = (3, -4, 12)$

**Απάντηση:** i) συνεπίπεδα, ii) συνεπίπεδα, iii) όχι συνεπίπεδα.

**27.** Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές  $\vec{u} = 3i + 2j + k$ ,  $\vec{v} = i + j + 2k$ ,  $\vec{w} = i + 3j + 3k$ .

i) Να βρεθεί ο όγκος του.

ii) Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$ .

iii) Να βρεθεί η γωνία του  $\vec{u}$  με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$ .

**Απάντηση:** i) 9, ii)  $\sqrt{122}$ , iii)  $\cos^{-1}(9/14) - \pi/2$ .

**28.** Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  για τα οποία ισχύει  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ ;

**Απάντηση:**  $\theta = \pi/4$ .

**29.** Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:

i) που διέρχεται από τα σημεία  $P_1(-1, 3, 5)$  και  $P_2(-1, 3, 2)$ ,

ii) που έχει διανυσματική εξίσωση  $xi + yj + zk = k + t(i - j + k)$ ,

iii) που διέρχεται από το  $(-2, 0, 5)$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $x = 1 + 2t$ ,  $y = 4 - t$ ,  $z = 6 + 2t$ ,

iv) που είναι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = 25$  στο σημείο  $(3, -4)$ .

**Απάντηση:** i)  $x = -3$ ,  $y = 3$ ,  $z = 5 - 3t$ , ii)  $x = 6$ ,  $y = -t$ ,  $z = 1 + t$ , iii)  $x = -2 + 2t$ ,  $y = -t$ ,  $z = 5 + 2t$ ,  
iv)  $x = 3 + 4t$ ,  $y = -4 + 3t$ .

**30.** Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση  $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$  να βρεθεί ένα σημείο της  $P$  και ένα διάνυσμα  $\vec{v}$  παράλληλο σε αυτήν.

**Απάντηση:**  $(-1, 2, 4)$ ,  $5i + 7j - 8k$ .

**31.** Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα  $xy$ ,  $xz$  και  $yz$  της ευθείας  $x = -2$ ,  $y = 4 + 2t$ ,  $z = -3 + t$ .

**Απάντηση:**  $(-2, 10, 0)$ ,  $(-2, 0, -5)$ .

**32.** Να δείξετε ότι οι ευθείες  $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t$ ,  $L_2: x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$  τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.

**Απάντηση:** Σημείο τομής  $(1, -1, 2)$ .

**33.** Να εξετάσετε αν οι ευθείες  $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t$ ,  $L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$  είναι παράλληλες.

**Απάντηση:** Είναι παράλληλες.

**34.** Να δείξετε ότι οι ευθείες  $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t$ ,  $L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$  ταυτίζονται.

**35.** Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) Διέρχεται από το σημείο  $P(2, 6, 1)$  και είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{n} = (1, 4, 2)$ .
- ii) Διέρχεται από τα σημεία  $(-2, 1, 1)$ ,  $(0, 2, 3)$  και  $(1, 0, -1)$ .
- iii) Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο επίπεδο  $4x - 2y + 7z + 12 = 0$ .
- iv) Διέρχεται από το  $(1, 2, -1)$  και είναι κάθετο στην ευθεία τομής των επιπέδων  $2x + y + z = 2$  και  $x + 2y + z = 3$ .

**Απάντηση:** i)  $x + 4y + 2z - 28 = 0$ , ii)  $2y - z - 1 = 0$ , iii)  $4x - 2y + 7z = 0$ , iv)  $-x - y + 3z + 6 = 0$ .

**36.** Εξετάστε αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, κάθετα ή τίποτα από τα παραπάνω.

- i)  $2x - 8y - 6z - 2 = 0$ ,  $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
- ii)  $3x - 2y + z = 1$ ,  $4x + 5y - 2z = 4$
- iii)  $x - y + 3z - 2 = 0$ ,  $2x + z = 1$

**Απάντηση:** i) παράλληλα, ii) κάθετα, iii) όχι κάθετα, όχι παράλληλα.

**37.** Εξετάστε αν η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται και αν ναι, προσδιορίστε την τομή τους.

- i)  $x = t, y = t, z = t$ ,  $3x - 2y + z - 5 = 0$
- ii)  $x = 2 - t, y = 3 + t, z = t$ ,  $2x + y + z = 1$

**Απάντηση:** i) Τέμνονται στο  $(5/2, 5/2, 5/2)$ , ii) δεν τέμνονται.

**38.** Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας τομής των επιπέδων  $x + 2y - 2z = 5$  και  $6x - 3y + 2z = 8$ .

**Απάντηση:**  $4/21$ .

**39.** Δείξτε ότι οι ευθείες  $x = -2 + t, y = 3 + 2t, z = 4 - t$  και  $x = 3 - t, y = 4 - 2t, z = t$  είναι παράλληλες και βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.

**Απάντηση:**  $-7x - y - 9z + 25 = 0$

**40.** Να δείξετε ότι τα επίπεδα  $-2x + y + z = 0$  και  $6x - 3y - 3z - 5 = 0$  είναι παράλληλα και να βρείτε την απόστασή τους.

**Απάντηση:**  $D = 5/\sqrt{54}$ .

**41.** Να δείξετε ότι οι ευθείες  $x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$  και  $x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$  είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόστασή τους.

**Απάντηση:**  $D = 25/\sqrt{126}$ .

**42.** Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο  $(2, 1, -3)$  που εφάπτεται στο επίπεδο  $x - 3y + 2z = 4$ .

**Απάντηση:**  $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 + (z + 3)^2 = \frac{121}{14}$ .

**43.** Προσδιορίστε την τετραγωνική επιφάνεια.

i)  $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$

ii)  $z = \frac{y^2}{25} - x^2$

iii)  $x^2 + y^2 - z^2 = 16$

iv)  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$

v)  $4z = x^2 + 4y^2$

vi)  $z^2 - x^2 - y^2 = 1$

**Απάντηση:** i) Ελλειπτικό παραβολοειδές με  $a = 2, b = 3$ , ii) υπερβολικό παραβολοειδές με  $a = 1, b = 5$ , iii) μονόχωνο υπερβολοειδές με  $a = b = c = 4$ , iv) κώνος, v) ελλειπτικό παραβολοειδές με  $a = 2, b = 1$ , vi) δίχωνο παραβολοειδές με  $a = b = c = 1$ .

**44.** Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές.

i)  $(4\sqrt{3}, 4, -4)$  από καρτεσιανές σε κυλινδρικές,

ii)  $(1, \sqrt{3}, -2)$  από καρτεσιανές σε σφαιρικές,

iii)  $(5, \pi/6, \pi/4)$  από σφαιρικές σε καρτεσιανές,

iv)  $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$  από κυλινδρικές σε καρτεσιανές.

**Απάντηση:** i)  $(8, 6, \pi/4)$ , ii)  $(2\sqrt{2}, \pi/3, 3\pi/4)$ , iii)  $(5\sqrt{6}/4, 5\sqrt{2}/4, 5\sqrt{2}/2)$ , iv)  $(3/2, \sqrt{3}/2, 3)$ .

**45.** Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις σε καρτεσιανές και περιγράψτε την επιφάνεια που εκφράζουν. Σε κάθε περίπτωση δίνεται το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

i)  $r = 3$ , κυλινδρικές,

ii)  $r = 4 \sin \theta$ , κυλινδρικές,

iii)  $r^2 + z^2 = 1$ , κυλινδρικές,

iv)  $\phi = \pi/4$ , σφαιρικές,

v)  $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$ , σφαιρικές.

**Απάντηση:** i)  $x^2 + y^2 = 3$ , κύλινδρος, ii)  $x^2 + (y - 2)^2 = 4$ , κύλινδρος, iii)  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , σφαίρα, iv)  $z = x^2 + y^2$ , κώνος, v)  $(x - 1)^2 + y^2 = 1$ , κύλινδρος.

**46.** Δίνονται παρακάτω οι καρτεσιανές εξισώσεις επιφανειών. Να μετατραπούν σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

i)  $z = 3x^2 + 3y^2$ ,

ii)  $2x + 3y + 4z = 1$ .

**Απάντηση:** i) Κυλινδρικές:  $z = 3r$ , Σφαιρικές:  $\rho = \frac{1}{3} \cot \phi \csc \phi$ , ii) Κυλινδρικές:  $2r \cos \theta + 3r \sin \theta + 4z = 1$ ,  
Σφαιρικές:  $2\rho \sin \phi \cos \theta + 3\rho \sin \phi \sin \theta + 4\rho \cos \phi = 1$ .