

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτηση $r(t) = (\cos \pi t)\mathbf{i} - \ln t\mathbf{j} + (\sqrt{t-2})\mathbf{k}$.

Απάντηση: $[2, +\infty)$

2. Να περιγράψετε το γράφημα της διανυσματικής εξίσωσης.

i) $\vec{r} = (3 - 2t)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$,

ii) $\vec{r} = 2 \cos t\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + k$.

Απάντηση: i) ευθεία, ii) έλλειψη

3. Να δειχθεί ότι το γράφημα της διανυσματικής συνάρτηση $r(t) = \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \sqrt{3} \sin t\mathbf{k}$ είναι κύκλος.
(Υπόδειξη: Δείξτε ότι το γράφημα βρίσκεται στην τομή σφαίρας και επιπέδου.)

Απάντηση: $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ και $z = \sqrt{3}x$

4. Να δειχθεί ότι η καμπύλη $r(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ($t \geq 0$) βρίσκεται στην επιφάνεια του κώνου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Περιγράψτε το σχήμα της καμπύλης.

Απάντηση: Κωνική έλικα

5. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.

i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$, όπου $r(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{3t^2 + 2}, \frac{1}{t} \right)$.

ii) $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$, όπου $r(t) = \left(\frac{3}{t^2}, \frac{\ln t}{t^2 - 1}, \sin 2t \right)$.

Απάντηση: i) $(1/3, 0)$ ii) $(3, 1/2, \sin 2)$

6. Είναι η συνάρτηση $r(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ συνεχής στο 0;

Απάντηση: Όχι

7. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $r(t) = 2 \cos \pi t\mathbf{i} + 2 \sin \pi t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ στο σημείο όπου $t_0 = \frac{1}{3}$.

Απάντηση: $\vec{r} = (1 - \sqrt{3}\pi t)\mathbf{i} + (\sqrt{3} + \pi t)\mathbf{j} + (1 + 3t)\mathbf{k}$

8. Έστω $r(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + k$. Να βρεθούν:

i) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) - r'(t))$,

ii) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \times r''(t))$,

iii) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \cdot r'(t))$.

Απάντηση: i) $\mathbf{i} - \mathbf{j} + k$, ii) $-\mathbf{j}$, iii) 0

9. Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματα.

i) $\int_0^1 (e^{2t}i + e^{-t}j + tk) dt,$

ii) $\int \left(t^2i - 2tj + \frac{1}{t}k \right) dt.$

Απάντηση: i) $(e^2/2 - 1/2)i - (1/e - 1)j + \frac{1}{2}k$, ii) $\frac{t^3}{3}i - t^2j + \ln|t|k + \vec{C}$

10. Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $y(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $y'(t) = \cos t i + \sin t j$ και $y(0) = i - j$.

Απάντηση: $y(t) = (1 + \sin t)i - \cos t j$

11. Έστω σωματιδίο που κινείται στον χώρο με διάνυσμα θέσης $r(t) = 12\sqrt{t}i + t^{3/2}j$ ($t > 0$). Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μέτρου ταχύτητάς του και η θέση στην οποία την λαμβάνει.

Απάντηση: $3\sqrt{2}$ στη θέση $24i + 8j$

12. Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα σωματιδίου με επιτάχυνση $a(t) = \sin t i + \cos t j + e^t k$, αρχική ταχύτητα $v(0) = k$ και αρχική θέση $r(0) = -i + k$.

Απάντηση: $r(t) = (t - \sin t - 1)i + (1 - \cos t)j + e^t k$

