

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Εαρινό εξάμηνο 2020**

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Έστω  $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$ . Να υπολογιστούν τα:

i)  $f(2, 1)$                       ii)  $f(t, t^2)$                       iii)  $f(2y^2, 4y)$

**Απάντηση:**  $[2, +\infty)$

2. Έστω  $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3$ . Να υπολογιστούν τα:

i)  $f(2, 1, 2)$                       ii)  $f(a, a, a)$                       iii)  $f(t, t^2, -t)$                       iv)  $f(a + b, a - b, b)$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

i)  $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

ii)  $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

iii)  $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$

iv)  $f(x, y) = \ln(xy)$

v)  $f(x, y, z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$

vi)  $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$ .

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

i)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 4(xy^2 - x)$

ii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x + y}$

iii)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$

iv)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$

v)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

vi)  $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

vii)  $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

5. Έστω  $f(x, y) = e^{2x} \sin y$ . Να υπολογιστούν τα:

i)  $\frac{\partial f}{\partial x}$

ii)  $\frac{\partial f}{\partial y}$

iii)  $f_x(0, y)$

iv)  $f_y(\ln 2, 0)$

6. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μερικές παράγωγοι.

i)  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , για  $z = 9x^2y - 3x^5y$

ii)  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$ , για  $z = xe^{\sqrt{15xy}}$

7. Έστω  $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$ .

- i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας  $z = f(x, y)$  στην  $x$ -κατεύθυνση στο  $(4, 2)$ .
- ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς  $y$  της  $f$  στο  $(4, 2)$ .

8. Για τη συνάρτηση  $f(x, y, z) = z \ln(x^2 y \cos z)$  να υπολογίστουν οι  $\frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $\frac{\partial f}{\partial y}$  και  $\frac{\partial f}{\partial z}$ .

9. Ένα σωματίδιο κινείται στην τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς  $z = x^2 + 3y^2$  και του επιπέδου  $y = 1$ . Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $z$  ως προς  $x$  όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο  $(2, 1, 7)$ ;

10. Ο όγκος  $V$  ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο  $V = \pi r^2 h$ , όπου  $r$  είναι η ακτίνα και  $h$  το ύψος.

- i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $V$  ως προς  $r$  όταν το  $h$  είναι σταθερό;
- ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $V$  ως προς  $h$  όταν το  $r$  είναι σταθερό;
- iii) Αν  $h = 4$  και το  $r$  μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του  $V$  ως προς  $r$  όταν  $r = 6$ ;

11. Για την συνάρτηση  $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$  να αποδειχθεί ότι  $f_{xy} = f_{yx}$ .

12. Για την συνάρτηση  $f(x, y) = x^3 y^5 - 2x^2 y + x$  να υπολογιστούν οι παράγωγοι  $f_{xxy}$ ,  $f_{yxy}$  και  $f_{yyy}$ .

13. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης  $f(x, y)$  στο σημείο  $(x_0, y_0)$ , τότε η  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(x_0, y_0)$ .
- ii) Αν οι  $f_x$  και  $f_y$  είναι συνεχείς στο  $(0, 0)$ , τότε και η  $f(x, y)$  είναι συνεχής στο  $(0, 0)$ .

14. Να υπολογιστεί η παράγωγος  $dz/dt$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i)  $z = 3x^2 y^3$ ,  $x = t^4$ ,  $y = t^2$
- ii)  $z = \ln(2x^2 + y)$ ,  $x = \sqrt{t}$ ,  $y = t^{2/3}$
- iii)  $z = 3 \cos x - \sin(xy)$ ,  $x = 1/t$ ,  $y = 3t$

15. Να υπολογιστεί η παράγωγος  $dw/dt$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i)  $w = 5x^2 y^3 z^4$ ,  $x = t^2$ ,  $y = t^3$ ,  $z = t^5$
- ii)  $w = 5 \cos(xy) - \sin(xz)$ ,  $x = 1/t$ ,  $y = t$ ,  $z = t^3$

16. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial z}{\partial u}$  και  $\frac{\partial z}{\partial v}$  χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i)  $z = 8x^2 y - 2x + 3y$ ,  $x = uv$ ,  $y = u - v$
- ii)  $z = x/y$ ,  $x = 2 \cos u$ ,  $y = 3 \sin v$

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

- i)  $dR/d\phi$ ,  $R = e^{2s-t^2}$ ,  $s = 3\phi$ ,  $t = \phi^{1/2}$
- ii)  $\left. \frac{dw}{ds} \right|_{s=1/4}$ ,  $w = 3xy^2 z^3$ ,  $y = 3x^2 + 2$ ,  $z = \sqrt{x-1}$ .

18. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι  $\frac{\partial z}{\partial x}$  και  $\frac{\partial z}{\partial y}$  στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i)  $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$

ii)  $ye^x - 5 \sin(3z) = 3z$