

**ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II**  
**Εαρινό εξάμηνο 2021**

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Να δειχθεί ότι τα  $(4, 5, 2)$ ,  $(1, 7, 3)$  και  $(2, 4, 5)$  είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.
2. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.
  - i) κέντρο  $(7, 1, 1)$ , ακτίνα 4,
  - ii) κέντρο  $(1, 0, -1)$ , διάμετρος 8,
  - iii) κέντρο  $(-1, 3, 2)$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
  - iv) κέντρο  $(2, -1, -3)$ , εφάπτεται στο  $xy$ -επίπεδο.
3. Περιγράψτε την επιφάνεια με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$ .
4. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα για τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
  - i)  $x^2 + y^2 = 25$
  - ii)  $y^2 + z^2 = 25$
  - iii)  $x^2 + z^2 = 25$
5. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
  - i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $x$  και το σημείο  $(0, 1, 2)$ .
  - ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $y$  και το σημείο  $(1, 0, 2)$ .
  - iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $z$  και διέρχεται από το  $(1, 1, 0)$ .
  - iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y$  και διέρχεται από το  $(1, 0, 1)$ .
6. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ . Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;
7. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα.
  - i)  $(1, -2, 2)$
  - ii)  $(2, 2, -1)$
  - iii)  $-i + 2j + 3k$
  - iv)  $2i + 3j - k$
8. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .
  - i)  $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$ ,
  - ii)  $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$ .
9. Έστω  $\vec{u} = 3i - k, \vec{v} = i - j + 2k, \vec{w} = 3j$ . Να γίνουν οι πράξεις.
  - i)  $\vec{w} - \vec{v}$       ii)  $6\vec{u} + 4\vec{w}$       iii)  $-\vec{v} - 2\vec{w}$
  - iv)  $4(3\vec{u} + \vec{v})$     v)  $-8(\vec{v} + \vec{w}) + 2\vec{u}$     vi)  $3\vec{w} - (-\vec{v} - \vec{w})$
10. Να βρεθεί η νόρμα του  $\vec{v}$ .

- i)  $\vec{v} = (1, -1)$
- ii)  $\vec{v} = (-1, 2, 4)$
- iii)  $\vec{v} = -3i + 2j + k$

**11.** Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
- ii) Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.

**12.** Να βρεθεί διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.

- i) Αντίθετη κατεύθυνση από το  $\vec{v} = (3, -4)$  και μέτρο το μισό του μέτρου του  $\vec{v}$ .
- ii) Μήκος  $\sqrt{17}$  και κατεύθυνση ίδια με το  $\vec{v} = (7, 0, -6)$ .

**13.** Να βρεθεί διάνυσμα  $\vec{v}$  στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες. Με  $\theta$  συμβολίζουμε τη γωνία του διανύσματος με τον άξονα  $Ox$ .

- i)  $\|\vec{v}\| = 3, \theta = \pi/4$
- ii)  $\|\vec{v}\| = 2, \theta = 90^\circ$

**14.** Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιούν τη δοσμένη συνθήκη.

- i) Παράλληλα στην ευθεία  $y = 3x + 2$ .
- ii) Παράλληλα στην ευθεία  $x + y = 4$ .
- iii) Κάθετα στην ευθεία  $y = -5x + 1$ .

**15.** Έστω  $\vec{r} = (x, y, z)$  ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων  $(x, y, z)$  που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.

- i)  $\|\vec{r}\| = 1$
- ii)  $\|\vec{r}\| \leq 1$
- iii)  $\|\vec{r}\| > 1$

**16.** Βρείτε αν τα διανύσματα σχηματίζουν οξεία, ορθή ή αμβλεία γωνία.

- i)  $\vec{u} = 7i + 3j + 5k, \vec{v} = -8i + 4j + 2k$
- ii)  $\vec{u} = 6i + j + 3k, \vec{v} = 4i - 6k$
- iii)  $\vec{u} = (4, 1, 6), \vec{v} = (-3, 0, 2)$

**17.** Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές  $A(2, -1, 1), B(3, 2, -1)$  και  $C(7, 0, -2)$  είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.

**18.** Να δείξετε ότι  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$  και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.

**19.** i) Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το  $i \times (i + j + k)$ .

- ii) Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

**20.** Να βρεθεί το  $\vec{u} \times \vec{v}$ .

- i)  $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-4, 1, 2)$   
 ii)  $\vec{u} = 3i + 2j - k, \vec{v} = -i - 3j + k$
- 21.** Να βρεθούν οι παρακάτω ποσότητες για τα διανύσματα  $\vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = (0, 1, 7)$  και  $\vec{w} = (1, 4, 5)$ .  
 i)  $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$   
 ii)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$   
 iii)  $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$   
 iv)  $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$
- 22.** Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία  $A(0, -2, 1), B(1, -1, -2)$  και  $C(-1, 1, 0)$ .
- 23.** Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα  $\vec{u} = i - j + 2k$  και  $\vec{v} = 3j + k$ .
- 24.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές  $P(1, 5, -2), Q(0, 0, 0)$  και  $R(3, 5, 1)$ .
- 25.** Να βρεθεί το  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  για τα  $\vec{u} = 2i - 3j + k, \vec{v} = 4i + j - 3k$  και  $\vec{w} = j + 5k$ .
- 26.** Να ελέγξετε αν τα διανύσματα είναι στο ίδιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τριπλό βαθμωτό γινόμενο.  
 i)  $\vec{u} = (1, -2, 1), \vec{v} = (3, 0, -2), \vec{w} = (5, -4, 0)$   
 ii)  $\vec{u} = 5i - 2j + k, \vec{v} = 4i - j + k, \vec{w} = i - j$   
 iii)  $\vec{u} = (4, -8, 1), \vec{v} = (2, 1, -2), \vec{w} = (3, -4, 12)$
- 27.** Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές  $\vec{u} = 3i + 2j + k, \vec{v} = i + j + 2k, \vec{w} = i + 3j + 3k$ .  
 i) Να βρεθεί ο όγκος του.  
 ii) Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$ .  
 iii) Να βρεθεί η γωνία του  $\vec{u}$  με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$ .
- 28.** Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  για τα οποία ισχύει  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ ;
- 29.** Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:  
 i) που διέρχεται από τα σημεία  $P_1(-1, 3, 5)$  και  $P_2(-1, 3, 2)$ ,  
 ii) που έχει διανυσματική εξίσωση  $xi + yj + zk = k + t(i - j + k)$ ,  
 iii) που διέρχεται από το  $(-2, 0, 5)$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $x = 1 + 2t, y = 4 - t, z = 6 + 2t$ ,  
 iv) που είναι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = 25$  στο σημείο  $(3, -4)$ .
- 30.** Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση  $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$  να βρεθεί ένα σημείο της  $P$  και ένα διάνυσμα  $\vec{v}$  παράλληλο σε αυτήν.
- 31.** Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα  $xy, xz$  και  $yz$  της ευθείας  $x = -2, y = 4 + 2t, z = -3 + t$ .
- 32.** Να δείξετε ότι οι ευθείες  $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t, L_2: x = 2 + t, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$  τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.
- 33.** Να εξετάσετε αν οι ευθείες  $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t, L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$  είναι παράλληλες.

34. Να δείξετε ότι οι ευθείες  $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t$ ,  $L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$  ταυτίζονται.
35. Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις.
- Διέρχεται από το σημείο  $P(2, 6, 1)$  και είναι κάθετο στο διάνυσμα  $\vec{n} = (1, 4, 2)$ .
  - Διέρχεται από τα σημεία  $(-2, 1, 1)$ ,  $(0, 2, 3)$  και  $(1, 0, -1)$ .
  - Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο επίπεδο  $4x - 2y + 7z + 12 = 0$ .
  - Διέρχεται από το  $(1, 2, -1)$  και είναι κάθετο στην ευθεία τομής των επιπέδων  $2x + y + z = 2$  και  $x + 2y + z = 3$ .
36. Εξετάστε αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, κάθετα ή τίποτα από τα παραπάνω.
- $2x - 8y - 6x - 2 = 0$ ,  $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
  - $3x - 2y + z = 1$ ,  $4x + 5y - 2z = 4$
  - $x - y + 3z - 2 = 0$ ,  $2x + z = 1$
37. Εξετάστε αν η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται και αν ναι, προσδιορίστε την τομή τους.
- $x = t, y = t, z = t$ ,  $3x - 2y + z - 5 = 0$
  - $x = 2 - t, y = 3 + t, z = t$ ,  $2x + y + z = 1$
38. Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας τομής των επιπέδων  $x + 2y - 2z = 5$  και  $6x - 3y + 2z = 8$ .
39. Δείξτε ότι οι ευθείες  $x = -2 + t, y = 3 + 2t, z = 4 - t$  και  $x = 3 - t, y = 4 - 2t, z = t$  είναι παράλληλες και βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.
40. Να δείξετε ότι τα επίπεδα  $-2x + y + z = 0$  και  $6x - 3y - 3z - 5 = 0$  είναι παράλληλα και να βρείτε την απόστασή τους.
41. Να δείξετε ότι οι ευθείες  $x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$  και  $x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$  είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόστασή τους.
42. Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο  $(2, 1, -3)$  που εφάπτεται στο επίπεδο  $x - 3y + 2z = 4$ .
43. Προσδιορίστε την τετραγωνική επιφάνεια.
- $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
  - $z = \frac{y^2}{25} - x^2$
  - $x^2 + y^2 - z^2 = 16$
  - $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
  - $4z = x^2 + 4y^2$
  - $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
44. Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές.
- $(4\sqrt{3}, 4, -4)$  από καρτεσιανές σε κυλινδρικές,
  - $(1, \sqrt{3}, -2)$  από καρτεσιανές σε σφαιρικές,
  - $(5, \pi/6, \pi/4)$  από σφαιρικές σε καρτεσιανές,
  - $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$  από κυλινδρικές σε καρτεσιανές.

**45.** Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις σε καρτεσιανές και περιγράψτε την επιφάνεια που εκφράζουν. Σε κάθε περίπτωση δίνεται το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

- i)  $r = 3$ , κυλινδρικές,
- ii)  $r = 4 \sin \theta$ , κυλινδρικές,
- iii)  $r^2 + z^2 = 1$ , κυλινδρικές,
- iv)  $\phi = \pi/4$ , σφαιρικές,
- v)  $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$ , σφαιρικές.

**46.** Δίνονται παρακάτω οι καρτεσιανές εξισώσεις επιφανειών. Να μετατραπούν σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

- i)  $z = 3x^2 + 3y^2$ ,
- ii)  $2x + 3y + 4z = 1$ .