

## ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

### Εαρινό εξάμηνο 2020

#### Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Ναδειχθεί ότι τα  $(4, 5, 2)$ ,  $(1, 7, 3)$  και  $(2, 4, 5)$  είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.
2. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.
  - i) κέντρο  $(7, 1, 1)$ , ακτίνα 4,
  - ii) κέντρο  $(1, 0, -1)$ , διάμετρος 8,
  - iii) κέντρο  $(-1, 3, 2)$ , διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
  - iv) κέντρο  $(2, -1, -3)$ , εφάπτεται στο  $xy$ -επίπεδο.
3. Περιγράψτε την επιφάνεια με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$ .
4. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα για τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
  - i)  $x^2 + y^2 = 25$
  - ii)  $y^2 + z^2 = 25$
  - iii)  $x^2 + z^2 = 25$
5. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
  - i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $x$  και το σημείο  $(0, 1, 2)$ .
  - ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα  $y$  και το σημείο  $(1, 0, 2)$ .
  - iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $z$  και διέρχεται από το  $(1, 1, 0)$ .
  - iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα  $y$  και διέρχεται από το  $(1, 0, 1)$ .
6. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση  $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$ . Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;
7. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα.
  - i)  $(1, -2, 2)$
  - ii)  $(2, 2, -1)$
  - iii)  $-i + 2j + 3k$
  - iv)  $2i + 3j - k$
8. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος  $\overrightarrow{P_1P_2}$ .
  - i)  $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$ ,
  - ii)  $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$ .
9. Έστω  $\vec{u} = 3i - k$ ,  $\vec{v} = i - j + 2k$ ,  $\vec{w} = 3j$ . Να γίνουν οι πράξεις.
  - α)  $\vec{w} - \vec{v}$
  - β)  $6\vec{u} + 4\vec{w}$
  - γ)  $-\vec{v} - 2\vec{w}$
  - δ)  $4(3\vec{u} + \vec{v})$
  - ε)  $-8(\vec{v} + \vec{w}) + 2\vec{u}$
  - στ)  $3\vec{w} - (-\vec{v} - \vec{w})$

10. Να βρεθεί η νόρμα του  $\vec{v}$ .
- $\vec{v} = (1, -1)$
  - $\vec{v} = (-1, 2, 4)$
  - $\vec{v} = -3i + 2j + k$
11. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.
- Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
  - Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.
12. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.
- Αντίθετη κατεύθυνση από το  $\vec{v} = (3, -4)$  και μέτρο το μισό του μέτρου του  $\vec{v}$ .
  - Μήκος  $\sqrt{17}$  και κατεύθυνση ίδια με το  $\vec{v} = (7, 0, -6)$ .
13. Να βρεθεί διάνυσμα  $\vec{v}$  στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες. Με  $\theta$  συμβολίζουμε τη γωνία του διανύσματος με τον άξονα  $Ox$ .
- $\|\vec{v}\| = 3, \theta = \pi/4$
  - $\|\vec{v}\| = 2, \theta = 90^\circ$
14. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιούν τη δοσμένη συνθήκη.
- Παράλληλα στην ευθεία  $y = 3x + 2$ .
  - Παράλληλα στην ευθεία  $x + y = 4$ .
  - Κάθετα στην ευθεία  $y = -5x + 1$ .
15. Έστω  $\vec{r} = (x, y, z)$  ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων  $(x, y, z)$  που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.
- $\|\vec{r}\| = 1$
  - $\|\vec{r}\| \leq 1$
  - $\|\vec{r}\| > 1$
16. Βρείτε αν τα διανύσματα σχηματίζουν οξεία, ορθή ή αμβλεία γωνία.
- $\vec{u} = 7i + 3j + 5k, \vec{v} = -8i + 4j + 2k$
  - $\vec{u} = 6i + j + 3k, \vec{v} = 4i - 6k$
  - $\vec{u} = (4, 1, 6), \vec{v} = (-3, 0, 2)$
17. Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές  $A(2, -1, 1), B(3, 2, -1)$  και  $C(7, 0, -2)$  είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.
18. Να δείξετε ότι  $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$  και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.
19.
  - Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το  $i \times (i + j + k)$ .
  - Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.

20. Να βρεθεί το  $\vec{u} \times \vec{v}$ .
- $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-4, 1, 2)$
  - $\vec{u} = 3i + 2j - k, \vec{v} = -i - 3j + k$
21. Να βρεθούν οι παρακάτω ποσότητες για τα διανύσματα  $\vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = (0, 1, 7)$  και  $\vec{w} = (1, 4, 5)$ .
- $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
  - $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
  - $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$
  - $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$
22. Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία  $A(0, -2, 1), B(1, -1, -2)$  και  $C(-1, 1, 0)$ .
23. Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα  $\vec{u} = i - j + 2k$  και  $\vec{v} = 3j + k$ .
24. Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές  $P(1, 5, -2), Q(0, 0, 0)$  και  $R(3, 5, 1)$ .
25. Να βρεθεί το  $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$  για τα  $\vec{u} = 2i - 3j + k, \vec{v} = 4i + j - 3k$  και  $\vec{w} = j + 5k$ .
26. Να ελέγξετε αν τα διανύσματα είναι στο ίδιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τριπλό βαθμωτό γινόμενο.
- $\vec{u} = (1, -2, 1), \vec{v} = (3, 0, -2), \vec{w} = (5, -4, 0)$
  - $\vec{u} = 5i - 2j + k, \vec{v} = 4i - j + k, \vec{w} = i - j$
  - $\vec{u} = (4, -8, 1), \vec{v} = (2, 1, -2), \vec{w} = (3, -4, 12)$
27. Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές  $\vec{u} = 3i + 2j + k, \vec{v} = i + j + 2k, \vec{w} = i + 3j + 3k$ .
- Να βρεθεί ο όγκος του.
  - Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα  $\vec{u}$  και  $\vec{w}$ .
  - Να βρεθεί η γωνία του  $\vec{u}$  με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα  $\vec{v}$  και  $\vec{w}$ .
28. Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων  $\vec{u}$  και  $\vec{v}$  για τα οποία ισχύει  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$ ;
29. Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:
- που διέρχεται από τα σημεία  $P_1(-1, 3, 5)$  και  $P_2(-1, 3, 2)$ ,
  - που έχει διανυσματική εξίσωση  $xi + yj + zk = k + t(i - j + k)$ ,
  - που διέρχεται από το  $(-2, 0, 5)$  και είναι παράλληλη στην ευθεία  $x = 1 + 2t, y = 4 - t, z = 6 + 2t$ ,
  - που είναι η εφαπτομένη του κύκλου  $x^2 + y^2 = 25$  στο σημείο  $(3, -4)$ .
30. Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση  $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$  να βρεθεί ένα σημείο της  $P$  και ένα διάνυσμα  $\vec{v}$  παράλληλο σε αυτήν.
31. Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα  $xy, xz$  και  $yz$  της ευθείας  $x = -2, y = 4 + 2t, z = -3 + t$ .
32. Να δείξετε ότι οι ευθείες  $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t, L_2: x = 2 + 6, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$  τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.
33. Να εξετάσετε αν οι ευθείες  $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t, L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$  είναι παράλληλες.
34. Να δείξετε ότι οι ευθείες  $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t, L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$  ταυτίζονται.