

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 3ου Κεφαλαίου

1. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $r(t) = (\cos \pi t)\mathbf{i} - \ln t\mathbf{j} + (\sqrt{t-2})\mathbf{k}$.
2. Να περιγράψετε το γράφημα της διανυσματικής εξίσωσης.
 - i) $\vec{r} = (3 - 2t)\mathbf{i} + 5t\mathbf{j}$,
 - ii) $\vec{r} = 2 \cos t\mathbf{i} - 3 \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$.
3. Να δειχθεί ότι το γράφημα της διανυσματικής συνάρτησης $r(t) = \sin t\mathbf{i} + 2 \cos t\mathbf{j} + \sqrt{3} \sin t\mathbf{k}$ είναι κύκλος.
(Υπόδειξη: Δείξτε ότι το γράφημα βρίσκεται στην τομή σφαίρας και επιπέδου.)
4. Να δειχθεί ότι η καμπύλη $r(t) = t \cos t\mathbf{i} + t \sin t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ($t \geq 0$) βρίσκεται στην επιφάνεια του κώνου $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. Περιγράψτε το σχήμα της καμπύλης.
5. Να βρεθούν τα παρακάτω όρια.
 - i) $\lim_{t \rightarrow +\infty} r(t)$, όπου $r(t) = \left(\frac{t^2 + 1}{3t^2 + 2}, \frac{1}{t} \right)$.
 - ii) $\lim_{t \rightarrow 1} r(t)$, όπου $r(t) = \left(\frac{3}{t^2}, \frac{\ln t}{t^2 - 1}, \sin 2t \right)$.
6. Είναι η συνάρτηση $r(t) = t^2\mathbf{i} + \frac{1}{t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ συνεχής στο 0;
7. Να βρεθεί η εφαπτομένη της $r(t) = 2 \cos \pi t\mathbf{i} + 2 \sin \pi t\mathbf{j} + 3t\mathbf{k}$ στο σημείο όπου $t_0 = \frac{1}{3}$.
8. Έστω $r(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + \mathbf{k}$. Να βρεθούν:
 - i) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) - r'(t))$,
 - ii) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \times r''(t))$,
 - iii) $\lim_{t \rightarrow 0} (r(t) \cdot r'(t))$.
9. Να υπολογιστούν τα ολοκλήρωματα.
 - i) $\int_0^1 (e^{2t}\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + t\mathbf{k}) dt$,
 - ii) $\int \left(t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \frac{1}{t}\mathbf{k} \right) dt$.
10. Να βρεθεί η διανυσματική συνάρτηση $y(t)$ που ικανοποιεί τις συνθήκες $y'(t) = \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j}$ και $y(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$.
11. Έστω σωματίδιο που κινείται στον χώρο με διάνυσμα θέσης $r(t) = 12\sqrt{t}\mathbf{i} + t^{3/2}\mathbf{j}$ ($t > 0$). Να βρεθεί η ελάχιστη τιμή του μέτρου ταχύτητάς του και η θέση στην οποία την λαμβάνει.

12. Να βρεθεί το διάνυσμα θέσης και η ταχύτητα σωματιδίου με επιτάχυνση $a(t) = \sin t \mathbf{i} + \cos t \mathbf{j} + e^t \mathbf{k}$, αρχική ταχύτητα $v(0) = k$ και αρχική θέση $r(0) = -\mathbf{i} + k$.