

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Εαρινό εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Έστω $f(x, y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Να υπολογιστούν τα:

i) $f(2, 1)$ ii) $f(t, t^2)$ iii) $f(2y^2, 4y)$

2. Έστω $f(x, y, z) = xy^2z^3 + 3$. Να υπολογιστούν τα:

i) $f(2, 1, 2)$ ii) $f(a, a, a)$ iii) $f(t, t^2, -t)$ iv) $f(a + b, a - b, b)$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

i) $f(x, y) = \ln(1 - x^2 - y^2)$

ii) $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 4}$

iii) $f(x, y) = \frac{1}{x - y^2}$

iv) $f(x, y) = \ln(xy)$

v) $f(x, y, z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$

vi) $f(x, y, z) = \sqrt{25 - x^2 - y^2 - z^2}$.

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

i) $\lim_{(x,y) \rightarrow (1,3)} 4(xy^2 - x)$

ii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (-1,2)} \frac{xy^3}{x + y}$

iii) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{3}{x^2 + 2y^2}$

iv) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x - y}{x^2 + y^2}$

v) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^4 - y^4}{x^2 + y^2}$

vi) $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{3x^2 + 2y^2}$

vii) $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

5. Έστω $f(x, y) = e^{2x} \sin y$. Να υπολογιστούν τα:

i) $\frac{\partial f}{\partial x}$

ii) $\frac{\partial f}{\partial y}$

iii) $f_x(0, y)$

iv) $f_y(\ln 2, 0)$

6. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μερικές παράγωγοι.

i) $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$, για $z = 9x^2y - 3x^5y$

ii) $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$, για $z = xe^{\sqrt{15xy}}$

7. Έστω $f(x, y) = \sqrt{3x + 2y}$.

- i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας $z = f(x, y)$ στην x -κατεύθυνση στο $(4, 2)$.
- ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς y της f στο $(4, 2)$.

8. Για τη συνάρτηση $f(x, y, z) = z \ln(x^2 y \cos z)$ να υπολογιστούν οι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ και $\frac{\partial f}{\partial z}$.

9. Ένα σωματίδιο κινείται στην τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = x^2 + 3y^2$ και του επιπέδου $y = 1$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του z ως προς x όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο $(2, 1, 7)$;

10. Ο όγκος V ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi r^2 h$, όπου r είναι η ακτίνα και h το ύψος.

- i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν το h είναι σταθερό;
- ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς h όταν το r είναι σταθερό;
- iii) Αν $h = 4$ και το r μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν $r = 6$;

11. Για την συνάρτηση $f(x, y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$ να αποδειχθεί ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

12. Για την συνάρτηση $f(x, y) = x^3 y^5 - 2x^2 y + x$ να υπολογιστούν οι παράγωγοι f_{xxy} , f_{yxy} και f_{yyy} .

13. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

- i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτησης $f(x, y)$ στο σημείο (x_0, y_0) , τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) .
- ii) Αν οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο $(0, 0)$, τότε και η $f(x, y)$ είναι συνεχής στο $(0, 0)$.

14. Να υπολογιστεί η παράγωγος dz/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i) $z = 3x^2 y^3$, $x = t^4$, $y = t^2$
- ii) $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$
- iii) $z = 3 \cos x - \sin(xy)$, $x = 1/t$, $y = 3t$

15. Να υπολογιστεί η παράγωγος dw/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i) $w = 5x^2 y^3 z^4$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^5$
- ii) $w = 5 \cos(xy) - \sin(xz)$, $x = 1/t$, $y = t$, $z = t^3$

16. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial u}$ και $\frac{\partial z}{\partial v}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

- i) $z = 8x^2 y - 2x + 3y$, $x = uv$, $y = u - v$
- ii) $z = x/y$, $x = 2 \cos u$, $y = 3 \sin v$

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

- i) $dR/d\phi$, $R = e^{2s-t^2}$, $s = 3\phi$, $t = \phi^{1/2}$
- ii) $\frac{dw}{dx}$, $w = 3xy^2 z^3$, $y = 3x^2 + 2$, $z = \sqrt{x-1}$.

18. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial z}{\partial x}$ και $\frac{\partial z}{\partial y}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$

ii) $ye^x - 5 \sin(3z) = 3z$

19. Να βρεθεί η $D_{\vec{u}}f$ στο σημείο P .

i) $f(x, y) = (1 + xy)^{3/2}, P(3, 1), \vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$

ii) $f(x, y) = \sin(5x - 3y), P(3, 5), \vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$

iii) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y), P(0, 0), \vec{u} = -\frac{1}{\sqrt{10}}\vec{i} - \frac{3}{\sqrt{10}}\vec{j}$

iv) $f(x, y, z) = 4x^5y^2z^3, P(2, -1, 1), \vec{u} = \frac{1}{3}\vec{i} + \frac{2}{3}\vec{j} - \frac{2}{3}\vec{k}$

20. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του \vec{a} .

i) $f(x, y) = 4x^3y^2, P(2, 1), \vec{a} = 4\vec{i} - 3\vec{j}$

ii) $f(x, y, z) = \frac{z-x}{z+y}, P(1, 0, -3), \vec{a} = -6\vec{i} + 3\vec{j} - 2\vec{k}$.

21. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του διανύσματος που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα x .

i) $f(x, y) = \sqrt{xy}, P(1, 4), \theta = \pi/3$

ii) $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}, P(-1, -2), \theta = \pi/2$

22. Έστω ότι $D_{\vec{u}}f(1, 2) = -5$ και $D_{\vec{v}}f(1, 2) = 10$, όπου $\vec{u} = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$ και $\vec{v} = \frac{4}{5}\vec{i} + \frac{3}{5}\vec{j}$.

i) Να βρεθούν τα $f_x(1, 2)$ και $f_y(1, 2)$.

ii) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1, 2)$ στην κατεύθυνση που δείχνει στην αρχή των αξόνων.

23. Έστω $f_x(-5, 1) = -3$ και $f_y(-5, 1) = 2$. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $P(-5, 1)$ στην κατεύθυνση από το P στο $Q(-4, 3)$.

24. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης αύξησης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x, y) = 4x^3y^2, P(-1, 1)$

ii) $f(x, y, z) = x^3z^2 + y^3z + z - 1, P(1, 1, -1)$

iii) $f(x, y, z) = \frac{x}{z} + \frac{z}{y^2}, P(1, 2, -2)$

25. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης μείωσης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x, y) = 20 - x^2 - y^2, P(-1, -3)$

ii) $f(x, y, z) = 4e^{xy} \cos z, P(0, 1, \pi/4)$

26. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν $\vec{v} = 2\vec{u}$ τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην κατεύθυνση του \vec{v} είναι διπλάσια από την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του \vec{u} σε ένα σημείο (x_0, y_0) .

ii) Αν \vec{u} είναι μοναδιαίο διάνυσμα και $D_{\vec{u}}f(x, y) = 0$ για κάθε (x, y) , τότε η f είναι σταθερή.

27. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο $(3, -2, 1)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2i - j - 2k$ είναι -5 και $\|\nabla f(3, -2, 1)\| = 5$, να βρεθεί το $\nabla f(3, -2, 1)$.
28. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο P .
- $x^2 + y^2 + z^2 = 25, P(-3, 0, 4)$
 - $x^2 - xyz = 56, P(-4, 5, 2)$
 - $z = e^{3y} \sin 3x, P(\pi/6, 0, 1)$
29. Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$.
- Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$.
 - Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο $(2, 2, 1)$.
 - Να βρεθεί η γωνία του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$ με το xy -επίπεδο.
30. Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.
- $z = x^3 y^2$
 - $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$
31. Να βρεθεί σημείο της επιφάνειας $z = 3x^2 - y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $6x + 4y - z = 5$.
32. Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία κάθετη στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.
33. Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία.
- $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$
 - $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$
 - $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{2}{xy}$
34. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης στο χωρίο R .
- $f(x, y) = xy - x - 3y, R$ το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0), (0, 4)$ και $(5, 0)$
 - $f(x, y) = x^2 - 3y^2 - 2x + 6y, R$ το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0), (0, 2), (2, 2)$ και $(2, 0)$.
 - $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - x, R$ ο δίσκος $x^2 + y^2 \leq 4$
35. Να βρεθούν τρεις θετικοί αριθμοί με άθροισμα 48 και μέγιστο δυνατό γινόμενο.
36. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου $x + y + z = 5$ στο πρώτο οκτημόριο ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) στα οποία η $f(x, y, z) = xy^2 z^2$ έχει μέγιστη τιμή.
37. Ένα κλειστό ορθογώνιο κουτί με όγκο 16cm^3 φτιάχνεται από δύο υλικά. Οι άνω και κάτω έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει $0,10\text{€}$ ανά cm^2 ενώ οι παράπλευρες έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει $0,05\text{€}$ ανά cm^2 . Να βρεθούν οι διαστάσεις του κουτιού που ελαχιστοποιούν το κόστος των υλικών.
38. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης υπό τη δοσμένη συνθήκη με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.
- $f(x, y) = 4x^3 + y^2, 2x^2 + y^2 = 1$
 - $f(x, y, z) = 2x + y - 2z, x^2 + y^2 + z^2 = 4$

iii) $f(x, y, z) = xyz, x^2 + y^2 + z^2 = 1.$

39. Να βρεθεί διάνυσμα στον χώρο με μήκος 5 και μέγιστο δυνατό άθροισμα συντεταγμένων.

40. Να βρεθούν διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μέγιστο όγκο που να εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας a .