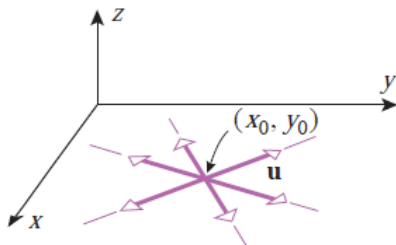


4.6 Παράγωγος κατά κατεύθυνση και κλίση

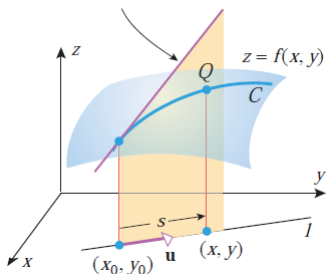
Είδαμε ότι οι μερικές παράγωγοι $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ εκφράζουν ρυθμό μεταβολής/κλίση εφαπτομένης στην κατεύθυνση του x ή y . Θέλουμε να γενικεύσουμε σε τυχαία κατεύθυνση.



Η κατεύθυνση στο xy -επίπεδο ορίζεται από ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ με αρχή το σημείο (x_0, y_0) . Η ευθεία που είναι παράλληλη στο \vec{u} και διέρχεται από το (x_0, y_0) έχει παραμετρικές εξισώσεις

$$L : x = x_0 + tu_1, y = y_0 + tu_2.$$

Αν περιορίσουμε την f στην ευθεία L παίρνουμε την συνάρτηση $f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)$.



Ορισμός

Έστω $f(x, y)$ συνάρτηση και $\vec{u} = u_1 i + u_2 j$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η **παράγωγος της f στην κατεύθυνση του \vec{u} στο (x_0, y_0)** συμβολίζεται με $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ και ορίζεται ως η παρακάτω παράγωγος, αν υπάρχει:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = \frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)]_{t=0}$$

Παράδειγμα

Έστω $f(x, y) = xy$, $\vec{u} = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j$. Να βρεθεί η $D_{\vec{u}}f(1, 2)$.

Ορισμός

Έστω $f(x, y, z)$ συνάρτηση και $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j} + u_3\vec{k}$ μοναδιαίο διάνυσμα. Η **παράγωγος της f στην κατεύθυνση του \vec{u} στο (x_0, y_0, z_0)** συμβολίζεται με $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ και ορίζεται ως η παρακάτω παράγωγος, αν υπάρχει:

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0, z_0) = \frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2, z_0 + tu_3)]_{t=0}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας μπορούμε να βρούμε απλούστερο τρόπο υπολογισμού.

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}[f(x_0 + tu_1, y_0 + tu_2)]_{t=0} &= \left[\frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} \right]_{t=0} \\ &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2\end{aligned}$$

Θεώρημα

- Αν $z = f(x, y)$ παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0) και $\vec{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j}$ μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0)$ υπάρχει και

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2.$$

- Αν $w = f(x, y, z)$ παραγωγίσιμη στο (x_0, y_0, z_0) και $\vec{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k}$ μοναδιαίο διάνυσμα, τότε η $D_{\vec{u}}f(x_0, y_0, z_0)$ υπάρχει και

$$D_{\vec{u}}f(x_0, y_0, z_0) = f_x(x_0, y_0, z_0)u_1 + f_y(x_0, y_0, z_0)u_2 + f_z(x_0, y_0, z_0)u_3.$$

Παράδειγμα

Να βρεθεί η παράγωγος της $f(x, y) = e^{xy}$ στο $(-2, 0)$ στην κατεύθυνση του μοναδιαίου διανύσματος που σχηματίζει γωνία $\pi/3$ με τον θετικό άξονα των x .

Παράδειγμα

Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z) = x^2y - yz^3 + z$ στο $(1, -2, 0)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2\vec{i} + \vec{j} - 2\vec{k}$.

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}f(x_0, y_0) &= f_x(x_0, y_0)u_1 + f_y(x_0, y_0)u_2 \\ &= (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0)) \cdot (u_1, u_2) \end{aligned}$$

Ορισμός

- Αν $f(x, y)$ συνάρτηση, η **κλίση** της f συμβολίζεται με ∇f ή $\text{grad } f$ και ορίζεται ως

$$\nabla f = f_x(x, y)i + f_y(x, y)j$$

- Αν $f(x, y, z)$ συνάρτηση, η **κλίση** της f συμβολίζεται με ∇f ή $\text{grad } f$ και ορίζεται ως

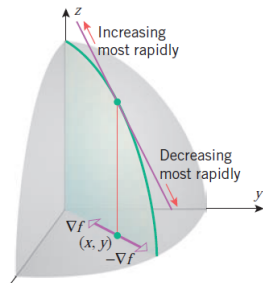
$$\nabla f = f_x(x, y, z)i + f_y(x, y, z)j + f_z(x, y, z)k$$

Θεώρημα

Στο σημείο (x, y) η $z = f(x, y)$ έχει

- μέγιστη κλίση εφαπτομένης/ρυθμό μεταβολής στην κατεύθυνση $\nabla f(x, y)$ η οποία είναι ίση με $\|\nabla f(x, y)\|$ και
- ελάχιστη κλίση εφαπτομένης/ρυθμό μεταβολής στην κατεύθυνση $\nabla f(x_0, y_0)$ η οποία είναι ίση με $-\|\nabla f(x, y)\|$.

(Το ίδιο και για τρεις μεταβλητές)



Παράδειγμα

Έστω $f(x, y) = x^2 e^y$. Να βρεθεί η μέγιστη τιμή της κατευθυνόμενης παραγώγου στο $(-2, 0)$ και το μοναδιαίο διάνυσμα που δείχνει αυτήν την κατεύθυνση.

Θεώρημα

Έστω $f(x, y)$ με συνεχείς μερικές παραγώγους σε ανοικτό δίσκο με κέντρο (x_0, y_0) και $\nabla f(x_0, y_0) \neq \vec{0}$. Τότε το διάνυσμα $\nabla f(x_0, y_0)$ είναι κάθετο στην καμπύλη στάθμης της f που διέρχεται από το (x_0, y_0) .

(Το ίδιο και για τρεις μεταβλητές)

Απόδειξη: