Βάσεις και διάσταση

Ορισμός

Έστω $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ ένα υποσύνολο διανυσματικού χώρου V. Το S λέγεται **βάση** του V αν

1. $\text{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\} = V$
2. Τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα.

Οι βάσεις λειτουργούν ως συστήματα συντεταγμένων.

Παράδειγμα

Έστω $\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$, …, $\mathbf{e}_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$. Το σύνολο $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots, \mathbf{e}_n\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^n$ και ονομάζεται **κανονική βάση**.

Παράδειγμα

Τα διανύσματα $\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

Εφόσον μια βάση παράγει ολόκληρο τον διανυσματικό χώρο V, κάθε διάνυσμα του V γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης.

Θεώρημα

Αν $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *είναι βάση του διανυσματικού χώρου* V *τότε κάθε* $\mathbf{b} \in V$ *γράφεται με μοναδικό τρόπο ως*

$$\mathbf{b} = \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \ldots + \lambda_m \mathbf{v}_m$$

για κάποια $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$.

Τα $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ ονομάζονται **συντεταγμένες** του $\mathbf{b}$ ως προς την βάση S.

Απόδειξη

Παράδειγμα

Να βρεθούν οι συντεταγμένες του $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 9 \end{pmatrix}$ ως προς την βάση

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 9 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}.$$

Θεώρημα

Έστω $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_m\}$ *βάση ενός διανυσματικού χώρου* V*.*

- *Κάθε υποσύνολο του* V *με περισσότερα από* m *διανύσματα είναι γραμμικά εξαρτημένο.*
- *Κάθε υποσύνολο του* V *με λιγότερα από* m *διανύσματα δεν παράγει τον χώρο* V*.*

Συνεπώς, κάθε βάση έχει το ίδιο πλήθος στοιχείων.

Ορισμός

Το πλήθος στοιχείων μιας οποιασδήποτε βάση ενός διανυσματικού χώρου V ονομάζεται διάσταση του V και συμβολίζεται με $\dim(V)$.

Παράδειγμα

$\dim(\mathbb{R}^n) = n$

Παράδειγμα

Αν τα $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, τότε $\dim(\mathrm{Span}\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}) = n$.

Παράδειγμα

Έστω $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -4 \\ -3 & -2 & 4 \\ 6 & 1 & -8 \end{pmatrix}$. Να βρεθεί η διάσταση του μηδενικού χώρου του A, δηλαδή το $\dim(\mathrm{Nul}(A))$.