

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II
Εαρινό εξάμηνο 2021

Ασκήσεις 6ου Κεφαλαίου

1. Αποδείξτε ότι η $\phi(x, y) = \tan^{-1}(xy)$ είναι συνάρτηση δυναμικού του πεδίου $F(x, y) = \frac{y}{1+x^2y^2}i + \frac{x}{1+x^2y^2}j$.

2. Να βρεθεί η απόκλιση και ο στροβιλισμός του διανυσματικού πεδίου $F(x, y, z) = x^2i - 2j + yzk$.

Απάντηση: $\operatorname{div} F = 2x + y$, $\operatorname{curl} F = zk$.

3. Έστω τα διανυσματικά πεδία $F(x, y, z) = 2xi + j + 4yk$, $G(x, y, z) = xi + yj - zk$. Να υπολογίσετε το $\nabla \cdot (F \times G)$.

Απάντηση: $4x$

4. Έστω $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ένα δύο φορές παραγωγίσιμο διανυσματικό πεδίο. Ποιες από τις παρακάτω εκφράσεις έχουν νόημα; Αυτές που έχουν, ορίζουν βαθμωτή συνάρτηση ή διανυσματικό πεδίο;

- | | | |
|---|--|--|
| i) $\operatorname{curl}(\operatorname{grad} F)$ | ii) $\operatorname{grad}(\operatorname{curl} F)$ | iii) $\operatorname{div}(\operatorname{grad} F)$ |
| iv) $\operatorname{grad}(\operatorname{div} F)$ | v) $\operatorname{curl}(\operatorname{div} F)$ | vi) $\operatorname{div}(\operatorname{curl} F)$ |

Απάντηση: (i), (ii), (iii), (v) δεν έχουν νόημα, (iv) έχει νόημα και είναι διανυσματικό πεδίο (vi) έχει νόημα και είναι βαθμωτό πεδίο.

5. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα.

- i) $\int_C \frac{1}{1+x} ds$, $C : r(t) = ti + \frac{2}{3}t^{3/2}j$ ($0 \leq t \leq 3$),
- ii) $\int_C \frac{x}{1+y^2} ds$, $C : x = 1 + 2t$, $y = t$ ($0 \leq t \leq 1$).

Απάντηση: i) 2, ii) $\sqrt{5}(\pi/4 + \ln 2)$

6. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C F \cdot dr$, όπου $F(x, y) = 2i + 5j$ και C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(1, -3)$ στο $(4, -3)$.

Απάντηση: 6

7. Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα $\int_C (3x + 2y)dx + (2x - y)dy$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

- i) C το ευθύγραμμο τμήμα από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$,
- ii) C το παραβολικό τόξο $y = x^2$ από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$,
- iii) C η καμπύλη $y = \sin(\pi x/2)$ από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$,
- iv) C η καμπύλη $x = y^3$ από το $(0, 0)$ στο $(1, 1)$.

Απάντηση: i) 3 ii) 3 iii) 3 iv) 3

8. Να ελέγξετε αν τα παρακάτω διανυσματικά πεδία είναι συντηρητικά και αν είναι, να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού.

- i) $F(x, y) = xi + yj$
- ii) $F(x, y) = x^2yi + 5xy^2j$
- iii) $F(x, y) = (\cos y + y \cos x)i + (\sin x - x \sin y)j$

Απάντηση: i) Συντηρητικό, $\phi(x, y) = x^2/2 + y^2/2 + K$ ii) Όχι συντηρητικό iii) Συντηρητικό, $\phi(x, y) = x \cos y + y \sin x + K$

9. Υπολογίστε το ολοκλήρωμα $\int_{(2,-2)}^{(-1,0)} 2xy^3 dx + 3y^2x^2 dy$ αφού πρώτα δείξετε ότι είναι ανεξάρτητο της διαδρομής.

Απάντηση: 32

10. Έστω το διανυσματικό πεδίο $F = (x^3 - 2xy^3)i - 3x^2y^2j$.

- i) Ναδειχθεί ότι το F είναι συντηρητικό πεδίο..
- ii) Να βρεθεί βαθμωτή συνάρτηση ϕ ώστε $F = \nabla\phi$.
- iii) Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα του πεδίου F κατά μήκος της παραμετρικής καμπύλης $x = \cos^3 \theta$, $y = \sin^3 \theta$, $\theta \in [0, \pi/2]$.

Απάντηση: ii) $\phi(x, y) = \frac{x^4}{4} - 2xy^3 + c$ iii) $-\frac{1}{4}$

11. Να υπολογιστούν τα παρακάτω ολοκληρώματα με χρήση του Θεωρήματος Green.

- i) $\oint_C y^2 dx + x^2 dy$, C το τετράγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ και $(0, 1)$.
- ii) $\oint_C (x^2 - y) dx + x dy$, C ο κύκλος $x^2 + y^2 = 4$
- iii) $\oint_C \ln(1 + y) dx - \frac{xy}{1 + y} dy$, C το τρίγωνο με κορυφές $(0, 0)$, $(2, 0)$ και $(0, 4)$.

Απάντηση: i) 0 ii) 8π iii) -4

