

ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς II

Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 2ου Κεφαλαίου

1. Να δειχθεί ότι τα $(4, 5, 2)$, $(1, 7, 3)$ και $(2, 4, 5)$ είναι κορυφές ισόπλευρου τριγώνου.
2. Να βρείτε την εξίσωση της σφαίρας στις παρακάτω περιπτώσεις.
 - i) κέντρο $(7, 1, 1)$, ακτίνα 4,
 - ii) κέντρο $(1, 0, -1)$, διάμετρος 8,
 - iii) κέντρο $(-1, 3, 2)$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων,
 - iv) κέντρο $(2, -1, -3)$, εφάπτεται στο xy -επίπεδο.
3. Περιγράψτε την επιφάνεια με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 4y + 2z - 19 = 0$.
4. Δώστε ένα πρόχειρο σχήμα για τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
 - i) $x^2 + y^2 = 25$
 - ii) $y^2 + z^2 = 25$
 - iii) $x^2 + z^2 = 25$
5. Βρείτε μια εξίσωση που περιγράφει τις παρακάτω επιφάνειες στον χώρο.
 - i) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα x και το σημείο $(0, 1, 2)$.
 - ii) Επίπεδο που περιλαμβάνει τον άξονα y και το σημείο $(1, 0, 2)$.
 - iii) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα z και διέρχεται από το $(1, 1, 0)$.
 - iv) Ορθός κύλινδρος με ακτίνα 1 και άξονα την ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα y και διέρχεται από το $(1, 0, 1)$.
6. Ένα έντομο περπατάει στην σφαίρα με εξίσωση $x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 2y - 4z - 3 = 0$. Ποια είναι η πιο κοντινή και η πιο μακρινή απόσταση που μπορεί να έχει από την αρχή των αξόνων;
7. Να σχεδιάσετε τα διανύσματα.
 - i) $(1, -2, 2)$
 - ii) $(2, 2, -1)$
 - iii) $-i + 2j + 3k$
 - iv) $2i + 3j - k$
8. Βρείτε τις συντεταγμένες του διανύσματος $\overrightarrow{P_1P_2}$.
 - i) $P_1(3, 5), P_2(2, 8)$,
 - ii) $P_1(5, -2, 1), P_2(2, 4, 2)$.
9. Έστω $\vec{u} = 3i - k$, $\vec{v} = i - j + 2k$, $\vec{w} = 3j$. Να γίνουν οι πράξεις.
 - i) $\vec{w} - \vec{v}$
 - ii) $6\vec{u} + 4\vec{w}$
 - iii) $-\vec{v} - 2\vec{w}$
 - iv) $4(3\vec{u} + \vec{v})$
 - v) $-8(\vec{v} + \vec{w}) + 2\vec{u}$
 - vi) $3\vec{w} - (-\vec{v} - \vec{w})$
10. Να βρεθεί η νόρμα του \vec{v} .

- i) $\vec{v} = (1, -1)$
 ii) $\vec{v} = (-1, 2, 4)$
 iii) $\vec{v} = -3i + 2j + k$
- 11.** Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.
 i) Το μέτρο του αθροίσματος δύο διανυσμάτων είναι ίσο με το άθροισμα των μέτρων των δύο διανυσμάτων.
 ii) Υπάρχουν ακριβώς δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι παράλληλα σε ένα δοσμένο μη μηδενικό διάνυσμα.
- 12.** Να βρεθεί διάνυσμα που ικανοποιεί την δοσμένη συνθήκη.
 i) Αντίθετη κατεύθυνση από το $\vec{v} = (3, -4)$ και μέτρο το μισό του μέτρου του \vec{v} .
 ii) Μήκος $\sqrt{17}$ και κατεύθυνση ίδια με το $\vec{v} = (7, 0, -6)$.
- 13.** Να βρεθεί διάνυσμα \vec{v} στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιεί τις δοσμένες συνθήκες. Με θ συμβολίζουμε τη γωνία του διανύσματος με τον άξονα Ox .
 i) $\|\vec{v}\| = 3, \theta = \pi/4$
 ii) $\|\vec{v}\| = 2, \theta = 90^\circ$
- 14.** Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα στο καρτεσιανό επίπεδο που ικανοποιούν τη δοσμένη συνθήκη.
 i) Παράλληλα στην ευθεία $y = 3x + 2$.
 ii) Παράλληλα στην ευθεία $x + y = 4$.
 iii) Κάθετα στην ευθεία $y = -5x + 1$.
- 15.** Έστω $\vec{r} = (x, y, z)$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Περιγράψτε το σύνολο των σημείων (x, y, z) που ικανοποιούν την δοσμένη εξίσωση.
 i) $\|\vec{r}\| = 1$
 ii) $\|\vec{r}\| \leq 1$
 iii) $\|\vec{r}\| > 1$
- 16.** Βρείτε αν τα διανύσματα σχηματίζουν οξεία, ορθή ή αμβλεία γωνία.
 i) $\vec{u} = 7i + 3j + 5k, \vec{v} = -8i + 4j + 2k$
 ii) $\vec{u} = 6i + j + 3k, \vec{v} = 4i - 6k$
 iii) $\vec{u} = (4, 1, 6), \vec{v} = (-3, 0, 2)$
- 17.** Χρησιμοποιώντας διανύσματα να δείξετε ότι το τρίγωνο με κορυφές $A(2, -1, 1), B(3, 2, -1)$ και $C(7, 0, -2)$ είναι ορθογώνιο και να βρείτε σε ποια κορυφή βρίσκεται η ορθή γωνία.
- 18.** Να δείξετε ότι $\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2\|\vec{u}\|^2 + 2\|\vec{v}\|^2$ και να δώσετε γεωμετρική ερμηνεία του αποτελέσματος.
- 19.** i) Χρησιμοποιώντας ορίζουσα, να υπολογιστεί το $i \times (i + j + k)$.
 ii) Υπολογίστε το παραπάνω γινόμενο χωρίς ορίζουσα, χρησιμοποιώντας μόνο ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου.
- 20.** Να βρεθεί το $\vec{u} \times \vec{v}$.

- i) $\vec{u} = (1, 2, -3), \vec{v} = (-4, 1, 2)$
 ii) $\vec{u} = 3i + 2j - k, \vec{v} = -i - 3j + k$
- 21.** Να βρεθούν οι παρακάτω ποσότητες για τα διανύσματα $\vec{u} = (2, -1, 3), \vec{v} = (0, 1, 7)$ και $\vec{w} = (1, 4, 5)$.
 i) $\vec{u} \times (\vec{v} \times \vec{w})$
 ii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times \vec{w}$
 iii) $(\vec{u} \times \vec{v}) \times (\vec{v} \times \vec{w})$
 iv) $(\vec{v} \times \vec{w}) \times (\vec{u} \times \vec{v})$
- 22.** Να βρεθούν δύο μοναδιαία διανύσματα που είναι κάθετα στο επίπεδο που ορίζουν τα σημεία $A(0, -2, 1), B(1, -1, -2)$ και $C(-1, 1, 0)$.
- 23.** Να βρεθεί το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα διανύσματα $\vec{u} = i - j + 2k$ και $\vec{v} = 3j + k$.
- 24.** Να βρεθεί το εμβαδόν του τριγώνου με κορυφές $P(1, 5, -2), Q(0, 0, 0)$ και $R(3, 5, 1)$.
- 25.** Να βρεθεί το $\vec{u} \cdot (\vec{v} \times \vec{w})$ για τα $\vec{u} = 2i - 3j + k, \vec{v} = 4i + j - 3k$ και $\vec{w} = j + 5k$.
- 26.** Να ελέγξετε αν τα διανύσματα είναι στο ίδιο επίπεδο χρησιμοποιώντας τριπλό βαθμωτό γινόμενο.
 i) $\vec{u} = (1, -2, 1), \vec{v} = (3, 0, -2), \vec{w} = (5, -4, 0)$
 ii) $\vec{u} = 5i - 2j + k, \vec{v} = 4i - j + k, \vec{w} = i - j$
 iii) $\vec{u} = (4, -8, 1), \vec{v} = (2, 1, -2), \vec{w} = (3, -4, 12)$
- 27.** Έστω το παραλληλεπίπεδο με διαδοχικές ακμές $\vec{u} = 3i + 2j + k, \vec{v} = i + j + 2k, \vec{w} = i + 3j + 3k$.
 i) Να βρεθεί ο όγκος του.
 ii) Να βρεθεί το εμβαδόν της έδρας που ορίζουν τα \vec{u} και \vec{w} .
 iii) Να βρεθεί η γωνία του \vec{u} με το επίπεδο που περιλαμβάνει την έδρα που ορίζουν τα \vec{v} και \vec{w} .
- 28.** Τι συμπεραίνουμε για τη γωνία δύο διανυσμάτων \vec{u} και \vec{v} για τα οποία ισχύει $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u} \times \vec{v}\|$;
- 29.** Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις ευθείας:
 i) που διέρχεται από τα σημεία $P_1(-1, 3, 5)$ και $P_2(-1, 3, 2)$,
 ii) που έχει διανυσματική εξίσωση $xi + yj + zk = k + t(i - j + k)$,
 iii) που διέρχεται από το $(-2, 0, 5)$ και είναι παράλληλη στην ευθεία $x = 1 + 2t, y = 4 - t, z = 6 + 2t$,
 iv) που είναι η εφαπτομένη του κύκλου $x^2 + y^2 = 25$ στο σημείο $(3, -4)$.
- 30.** Για την ευθεία με διανυσματική εξίσωση $(x, y, z) = (-1, 2, 4) + t(5, 7, -8)$ να βρεθεί ένα σημείο της P και ένα διάνυσμα \vec{v} παράλληλο σε αυτήν.
- 31.** Να βρεθούν τα σημεία τομής με τα επίπεδα xy, xz και yz της ευθείας $x = -2, y = 4 + 2t, z = -3 + t$.
- 32.** Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 2 + t, y = 2 + 3t, z = 3 + t, L_2: x = 2 + 6, y = 3 + 4t, z = 4 + 2t$ τέμνονται και να βρεθούν τα σημεία τομής τους.
- 33.** Να εξετάσετε αν οι ευθείες $L_1: x = 3 - 2t, y = 4 + t, z = 6 - t, L_2: x = 5 - 4t, y = -2 + 2t, z = 7 - 2t$ είναι παράλληλες.

- 34.** Να δείξετε ότι οι ευθείες $L_1: x = 1 + 3t, y = -2 + t, z = 2t$, $L_2: x = 4 - 6t, y = -1 - 2t, z = 2 - 4t$ ταυτίζονται.
- 35.** Να βρεθεί η εξίσωση του επιπέδου στις παρακάτω περιπτώσεις.
- Διέρχεται από το σημείο $P(2, 6, 1)$ και είναι κάθετο στο διάνυσμα $\vec{n} = (1, 4, 2)$.
 - Διέρχεται από τα σημεία $(-2, 1, 1)$, $(0, 2, 3)$ και $(1, 0, -1)$.
 - Διέρχεται από την αρχή των αξόνων και είναι παράλληλο στο επίπεδο $4x - 2y + 7z + 12 = 0$.
 - Διέρχεται από το $(1, 2, -1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία τομής των επιπέδων $2x + y + z = 2$ και $x + 2y + z = 3$.
- 36.** Εξετάστε αν τα επίπεδα είναι παράλληλα, κάθετα ή τίποτα από τα παραπάνω.
- $2x - 8y - 6x - 2 = 0$, $-x + 4y + 3z - 5 = 0$
 - $3x - 2y + z = 1$, $4x + 5y - 2z = 4$
 - $x - y + 3z - 2 = 0$, $2x + z = 1$
- 37.** Εξετάστε αν η ευθεία και το επίπεδο τέμνονται και αν ναι, προσδιορίστε την τομή τους.
- $x = t, y = t, z = t$, $3x - 2y + z - 5 = 0$
 - $x = 2 - t, y = 3 + t, z = t$, $2x + y + z = 1$
- 38.** Βρείτε το συνημίτονο της γωνίας τομής των επιπέδων $x + 2y - 2z = 5$ και $6x - 3y + 2z = 8$.
- 39.** Δείξτε ότι οι ευθείες $x = -2 + t, y = 3 + 2t, z = 4 - t$ και $x = 3 - t, y = 4 - 2t, z = t$ είναι παράλληλες και βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που τις περιέχει.
- 40.** Να δείξετε ότι τα επίπεδα $-2x + y + z = 0$ και $6x - 3y - 3z - 5 = 0$ είναι παράλληλα και να βρείτε την απόστασή τους.
- 41.** Να δείξετε ότι οι ευθείες $x = 1 + 7t, y = 3 + t, z = 5 - 3t$ και $x = 4 - t, y = 6, z = 7 + 2t$ είναι ασύμβατες και να βρεθεί η απόστασή τους.
- 42.** Βρείτε την εξίσωση της σφαίρας με κέντρο $(2, 1, -3)$ που εφάπτεται στο επίπεδο $x - 3y + 2z = 4$.
- 43.** Προσδιορίστε την τετραγωνική επιφάνεια.
- $z = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9}$
 - $z = \frac{y^2}{25} - x^2$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 16$
 - $x^2 + y^2 - z^2 = 0$
 - $4z = x^2 + 4y^2$
 - $z^2 - x^2 - y^2 = 1$
- 44.** Να κάνετε τις παρακάτω μετατροπές.
- $(4\sqrt{3}, 4, -4)$ από καρτεσιανές σε κυλινδρικές,
 - $(1, \sqrt{3}, -2)$ από καρτεσιανές σε σφαιρικές,
 - $(5, \pi/6, \pi/4)$ από σφαιρικές σε καρτεσιανές,
 - $(\sqrt{3}, \pi/6, 3)$ από κυλινδρικές σε καρτεσιανές.

45. Μετατρέψτε τις παρακάτω εξισώσεις σε καρτεσιανές και περιγράψτε την επιφάνεια που εκφράζουν. Σε κάθε περίπτωση δίνεται το αρχικό σύστημα συντεταγμένων.

- i) $r = 3$, κυλινδρικές,
- ii) $r = 4 \sin \theta$, κυλινδρικές,
- iii) $r^2 + z^2 = 1$, κυλινδρικές,
- iv) $\phi = \pi/4$, σφαιρικές,
- v) $\rho \sin \phi = 2 \cos \theta$, σφαιρικές.

46. Δίνονται παρακάτω οι καρτεσιανές εξισώσεις επιφανειών. Να μετατραπούν σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.

- i) $z = 3x^2 + 3y^2$,
- ii) $2x + 3y + 4z = 1$.