

4.2 Όρια και συνέχεια

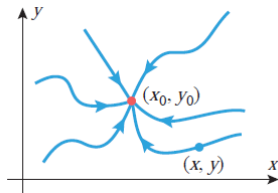
Συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Υπνεθύμιση: Αν $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ είναι συνάρτηση μίας μεταβλητής, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L$ αν και μόνο αν

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L \text{ και } \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L$$

Ο χαρακτηρισμός βασίζεται στο γεγονός ότι σε έναν άξονα μπορούμε να κινηθούμε μόνο δεξιά ή αριστερά.

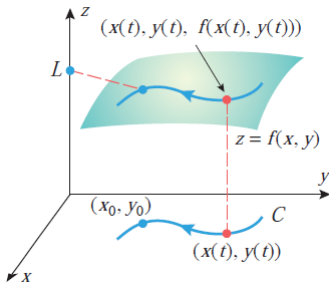
Για να γενικεύσουμε σε συναρτήσεις δύο μεταβλητών, λαμβάνουμε υπόψιν ότι το πεδίο ορισμού είναι υποσύνολο του xy -επιπέδου, άρα έχουμε περισσότερες κατευθύνσεις που μπορούμε να κινηθούμε.



Ορισμός

Έστω $f(x, y)$ μια συνάρτηση και $C : x = x(t), y = y(t)$ παραμετρική καμπύλη που διέρχεται από το (x_0, y_0) , όπου $x_0 = x(t_0)$ και $y_0 = y(t_0)$. Ορίζουμε το **όριο της f στο (x_0, y_0) κατά μήκος της C** ως εξής:

$$\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ C}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t))$$



Αντίστοιχα ορίζεται και το όριο κατά μήκος καμπύλης σε συνάρτηση τριών μεταβλητών.

Ορισμός

Έστω $f(x, y, z)$ μια συνάρτηση και $C : x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ παραμετρική καμπύλη που διέρχεται από το (x_0, y_0, z_0) , όπου $x_0 = x(t_0)$, $y_0 = y(t_0)$ και $z_0 = z(t_0)$. Ορίζουμε το **όριο της f στο (x_0, y_0, z_0) κατά μήκος της C** ως εξής:

$$\lim_{\substack{(x,y,z) \rightarrow (x_0,y_0,z_0) \\ C}} f(x, y) = \lim_{t \rightarrow t_0} f(x(t), y(t), z(t))$$

Παράδειγμα

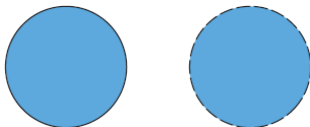
Έστω $f(x, y) = -\frac{xy}{x^2 + y^2}$. Να βρεθεί το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ κατά μήκος:

- ❶ του άξονα x
- ❷ του άξονα y
- ❸ της ευθείας $y = x$
- ❹ της ευθείας $y = -x$
- ❺ της παραβολής $y = x^2$

Για να μπορούμε να θεωρήσουμε τυχαία καμπύλη που διέρχεται από ένα σημείο (x_0, y_0) χρησιμοποιούμε ανοιχτά σύνολα.

Ορισμός

Έστω C κύκλος με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r . Το σύνολο των σημείων που περικλείεται από το C χωρίς τα σημεία του ίδιου του κύκλου ονομάζεται **ανοικτός δίσκος** με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r . Αν συμπεριλάβουμε και τα σημεία του κύκλου τότε ορίζουμε τον **κλειστό δίσκο** με κέντρο (x_0, y_0) και ακτίνα r .

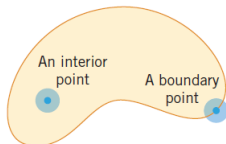


Αντίστοιχα, σε τρεις διαστάσεις ορίζουμε την ανοικτή και κλειστή μπάλα με κέντρο (x_0, y_0, z_0) και ακτίνα r .

Ορισμός

Έστω D ένα υποσύνολο του \mathbb{R}^2 .

- Ένα σημείο (x_0, y_0) του D λέγεται **εσωτερικό σημείο** αν υπάρχει ανοικτός δίσκος με κέντρο το (x_0, y_0) που να περιέχεται ολόκληρος στο D .
- Ένα σημείο (x_0, y_0) του D λέγεται **συνοριακό σημείο** αν κάθε ανοικτός δίσκος με κέντρο το (x_0, y_0) περιέχει σημεία και εντός και εκτός του D .
- Το D λέγεται **κλειστό** αν περιέχει όλα τα συνοριακά του σημεία.
- Το D λέγεται **ανοικτό** αν δεν περιέχει κανένα συνοριακό σημείο.



Αντίστοιχοι ορισμοί δίνονται και σε τρεις διαστάσεις.

Ορισμός

Έστω $f(x, y)$ συνάρτηση που ορίζεται σε ανοικτό δίσκο D με κέντρο το (x_0, y_0) με εξαίρεση το σημείο (x_0, y_0) . Θα γράφουμε

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = L$$

αν καθώς το $(x, y) \in D$ πλησιάζει το (x_0, y_0) το $f(x, y)$ πλησιάζει το L .

- Ο ορισμός είναι διαισθητικός. Για την αυστηρή διατύπωση χρησιμοποιήστε την βιβλιογραφία.
- Θα θεωρήσουμε δεδομένο ότι όλες οι γνωστές ιδιότητες των ορίων ισχύουν για τα όρια συναρτήσεων δύο μεταβλητών (και για αυτά κατά μήκος καμπύλης).

Παράδειγμα

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} (f + g)(x, y) = \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) + \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} g(x, y)$$

Θέωρημα

Αν $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = L$ τότε $\lim_{\substack{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0) \\ C}} f(x,y) = L$ για κάθε καμπύλη C που διέρχεται από το (x_0, y_0) .

- Το αντίστροφο δεν ισχύει.
- Το θεώρημα συνεπάγεται ότι αν το όριο είναι διαφορετικό κατά μήκος δύο καμπυλών ή το όριο κατά μήκος μίας καμπύλης δεν υπάρχει, τότε το όριο δεν υπάρχει.

Παράδειγμα

Να δειχθεί ότι το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$ δεν υπάρχει.

Ορισμός

Μια συνάρτηση $f(x, y)$ λέγεται **συνεχής στο** (x_0, y_0) αν ορίζεται στο (x_0, y_0) και

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x, y) = f(x_0, y_0)$$

Αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο ανοικτού συνόλου D τότε λέγεται **συνεχής στο** D .

Χωρίς απόδειξη θα θεωρήσουμε ότι

- πολωνυμικές, ρητές, εκθετικές, λογαριθμικές, τριγωνομετρικές,
- πράξει συνεχών συναρτήσεων

είναι συνεχείς.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2}$.

Οι ορισμοί των ορίων και της συνέχειας δίνονται αντίστοιχα και για συναρτήσεις τριών μεταβλητών.

Παράδειγμα

Να βρεθεί το $\lim_{(x,y,z) \rightarrow (2,-1,2)} \frac{xz^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$