1.5 Ισοδυναμία Πινάκων

Είδαμε ότι οι αλγεβρικές πράξεις μεταξύ εξισώσεων ενός συστήματος μεταφράζονται σε πράξεις μεταξύ γραμμών ενός πίνακα.

1. Εναλλαγή δύο γραμμών ($R_i \leftrightarrow R_j$)
2. Πολλαπλασιασμός γραμμής με $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ ($R_i \to \lambda R_i$)
3. Πρόσθεση πολλαπλασίου μίας γραμμής σε μία άλλη ($R_i \to R_i + \lambda R_j$)

Ορισμός

Οι παραπάνω τρεις πράξεις λέγονται **στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμών** (ΣΜΓ).

Κάθε ΣΜΓ μπορεί να αντιστραφεί.

ΣΜΓ	Αντίστροφος ΣΜΓ
$R_i \leftrightarrow R_j$	$R_j \leftrightarrow R_i$
$R_i \to \lambda R_i$	$R_i \to \dfrac{1}{\lambda} R_i$
$R_i \to R_i + \lambda R_j$	$R_i \to R_i - \lambda R_j$

Αυτό σημαίνει ότι αν σε έναν πίνακα A εφαρμόσουμε ΣΜΓ και λάβουμε πίνακα B, με τους αντίστροφους ΣΜΓ μπορούμε από τον B να οδηγηθούμε πίσω στον A.

Ορισμός

Δύο πίνακες A, B λέγονται γραμμοϊσοδύναμοι ή απλά ισοδύναμοι αν ο καθένας προκύπτει από τον άλλον με ΣΜΓ. Συμβολίζεται με $A \sim B$.

Παράδειγμα

Εξηγήστε γιατί ο πίνακας $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ είναι ισοδύναμος με τον I.

Ορισμός

Ένας $n \times n$ πίνακας λέγεται **στοιχειώδης** αν προκύπτει από την εφαρμογή ενός ΣΜΓ στον I_n.

Παράδειγμα

Εξηγήστε γιατί οι παρακάτω πίνακες είναι στοιχειώδεις.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Θέωρημα

Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι στοιχειώδης πίνακας.

Οι ΣΜΓ μπορούν να οριστούν εναλλακτικά ως πολλαπλασιασμός με κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα.

- Εναλλαγή γραμμών $R_i \leftrightarrow R_j$.

Οι ΣΜΓ μπορούν να οριστούν εναλλακτικά ως πολλαπλασιασμός με κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα.

- Πολλαπλασιασμός γραμμής με $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 0$ $\left(R_i \rightarrow \lambda R_i\right)$.

Οι ΣΜΓ μπορούν να οριστούν εναλλακτικά ως πολλαπλασιασμός με κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα.

- Πρόσθεση πολλαπλασίου μίας γραμμής σε μία άλλη $(R_i \to R_i + \lambda R_j)$.

Ορισμός

Ένας πίνακας λέγεται **ανηγμένος κλιμακωτός** αν:

1. Κάθε μη μηδενική γραμμή έχει πρώτο μη μηδενικό στοιχείο 1, το οποίο καλούμε ηγετικό 1.
2. Αν υπάρχουν μηδενικές γραμμές βρίσκονται στο κάτω μέρος του πίνακα.
3. Αν υπάρχουν δύο διαδοχικές μη μηδενικές γραμμές τότε το ηγετικό 1 της δεύτερης βρίσκεται πιο δεξιά από το ηγετικό 1 της πρώτης.
4. Κάθε στήλη που περιέχει ηγετικό 1 έχει όλα τα υπόλοιπα στοιχεία της ίσα με 0.

Αν ο πίνακας ικανοποιεί τις συνθήκες (1), (2) & (3) λέγεται **κλιμακωτός**.

Παράδειγμα

Οι παρακάτω πίνακες είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι παρακάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί αλλά όχι ανηγμένοι.

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα

Οι παρακάτω πίνακες είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

$$\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&0&*\\0&1&0&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&0&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&*&0&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&1&0&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&1&0&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&0&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

Οι παρακάτω πίνακες είναι κλιμακωτοί αλλά όχι ανηγμένοι.

$$\begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&1&*\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}1&*&*&*\\0&1&*&*\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix},\quad \begin{bmatrix}0&1&*&*&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&1&*&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&1&*&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&1&*&*&*&*\\0&0&0&0&0&0&0&0&1&*\end{bmatrix}$$

Θέωρημα

- *Κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με μοναδικό ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.*
- *Κάθε πίνακας είναι ισοδύναμος με έναν κλιμακωτό πίνακα (όχι απαραίτητα μοναδικό).*

Σύμφωνα με το (2) υπάρχει περίπτωση ένας πίνακας να έχει περισσότερες από μία κλιμακωτές μορφές.

Θέωρημα

Οι ισοδύναμες κλιμακωτές μορφές ενός πίνακα A έχουν τον ίδιο αριθμό μηδενικών γραμμών και τα ηγετικά 1 εμφανίζονται στις ίδιες θέσεις.

Παράδειγμα

Να μετατραπεί σε ανηγμένο κλιμακωτό ο πίνακας

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Θέωρημα (Θεώρημα Αντιστρόφου Πίνακα)

Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα για έναν $n \times n$ τετραγωνικό πίνακα A.

(I) *Ο A είναι αντιστρέψιμος.*

(II) *Η ανηγμένη κλιμακωτή μορφή του A είναι ο I_n.*

(III) *Ο A γράφεται σαν γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.*

- Κατά τη διάρκεια του μαθήματος θα προσθέτουμε συνεχώς συνθήκες σε αυτό το θεώρημα.
- Το θεώρημα μας δίνει τρόπο υπολογισμού του αντιστρόφου πίνακα.

Έστω $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας.

- Σύμφωνα με το (II), υπάρχουν ΣΜΓ που μετατρέπουν τον A στον I_n. Ισοδύναμα, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ ώστε

$$\begin{aligned} & E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 A = I_n \\ \Leftrightarrow\ & E_k E_{k-1} \ldots E_2 E_1 I_n = A^{-1} \end{aligned}$$

- Άρα η ίδια ακολουθία ΣΜΓ που μετατρέπει τον A στον I_n μετατρέπει και τον I_n στον A^{-1}.

Αλγόριθμος εύρεσης αντιστρόφου πίνακα

- Γράφουμε τον A μαζί με τον I_n ως έναν πίνακα $[A \mid I_n]$.
- Εφαρμόζουμε ΣΜΓ που μετατρέπουν τον A στον I_n.
- Καταλήγουμε με πίνακας της μορφής $[I_n \mid A^{-1}]$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ 1 & 0 & 8 \end{pmatrix}$.

Παράδειγμα

Να ελέγξετε αν ο πίνακας $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 1 \\ -1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ είναι αντιστρέψιμος.