ΜΑΣ026 - Μαθηματικά για Μηχανικούς ΙΙ
Εαρινό εξάμηνο 2020

Ασκήσεις 4ου Κεφαλαίου

1. Έστω $f(x,y) = x + \sqrt[3]{xy}$. Να υπολογιστούν τα:
i) $f(2,1)$ ii) $f(t,t^2)$ iii) $f(2y^2,4y)$

Απάντηση: i) $2+\sqrt[3]{2}$ ii) $2t$ iii) $2y^2+2y$

2. Έστω $f(x,y,z) = xy^2z^3+3$. Να υπολογιστούν τα:
i) $f(2,1,2)$ ii) $f(a,a,a)$ iii) $f(t,t^2,-t)$ iv) $f(a+b,a-b,b)$

Απάντηση: i) 19 ii) a^6+3 iii) $-t^8+3$ iv) $(a+b)(a-b)^2b^3+3$

3. Να προσδιοριστεί το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων. Στην περίπτωση των δύο μεταβλητών να δοθεί κι ένα πρόχειρο σχέδιο.

i) $f(x,y) = \ln(1-x^2-y^2)$
ii) $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-4}$
iii) $f(x,y) = \dfrac{1}{x-y^2}$
iv) $f(x,y) = \ln(xy)$
v) $f(x,y,z) = xe^{-\sqrt{y+2}}$
vi) $f(x,y,z) = \sqrt{25-x^2-y^2-z^2}$.

Απάντηση: i) $x^2+y^2<1$ ii) $x^2+y^2\geq 4$ iii) $x\neq y^2$ iv) 1ο και 3ο τεταρτημόριο v) $y\geq -2$ vi) $x^{+}y^2+z^{\leq}25$

4. Να υπολογιστούν τα όρια ή να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχουν.

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,3)} 4(xy^2-x)$

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy^3}{x+y}$

iii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{3}{x^2+2y^2}$

iv) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x-y}{x^2+y^2}$

v) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4-y^4}{x^2+y^2}$

vi) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy}{3x^2+2y^2}$

vii) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(2,-1,2)} \dfrac{xz^2}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

Απάντηση: i) 8 ii) -8 iii) δεν υπάρχει iv) δεν υπάρχει v) 0 vi) δεν υπάρχει vii) 8/3

5. Έστω $f(x,y) = e^{2x}\sin y$. Να υπολογιστούν τα:
i) $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ii) $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ iii) $f_x(0,y)$ iv) $f_y(\ln 2, 0)$

Απάντηση: i) $2e^{2x}\sin y$ ii) $e^{2x}\cos y$ iii) $2\sin y$ iv) 4

6. Να υπολογιστούν οι παρακάτω μερικές παράγωγοι.

i) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, για $z = 9x^2y - 3x^5y$

ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$, για $z = xe^{\sqrt{15xy}}$

Απάντηση: i) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = 18xy - 15x^4y$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = 2x^2 - 3x^5$ ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = (1+\sqrt{15xy})e^{\sqrt{15xy}}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{15x^2e^{\sqrt{15xy}}}{2\sqrt{15xy}}$

7. Έστω $f(x,y) = \sqrt{3x+2y}$.

i) Να υπολογιστεί η κλίση της επιφάνειας $z = f(x,y)$ στην x-κατεύθυνση στο $(4,2)$.

ii) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής ως προς y της f στο $(4,2)$.

Απάντηση: i) $3/8$ ii) $1/4$

8. Για τη συνάρτηση $f(x,y,z) = z\ln(x^2y\cos z)$ να υπολογιστούν οι $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial z}$.

Απάντηση: i) $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 2z/x$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = z/y$, $\dfrac{\partial f}{\partial z} = \ln\bigl(x^2y\cos z\bigr) - \dfrac{z\sin z}{\cos z}$

9. Ένα σωματίδιο κινείται στην τομή του ελλειπτικού παραβολοειδούς $z = x^2 + 3y^2$ και του επιπέδου $y = 1$. Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του z ως προς x όταν το σωματίδιο βρίσκεται στο $(2,1,7)$;

Απάντηση: 4

10. Ο όγκος V ενός κυλίνδρου δίνεται από τον τύπο $V = \pi r^2 h$, όπου r είναι η ακτίνα και h το ύψος.

i) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν το h είναι σταθερό;

ii) Ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς h όταν το r είναι σταθερό;

iii) Αν $h = 4$ και το r μεταβάλλεται ελεύθερα, ποιος είναι ο ρυθμός μεταβολής του V ως προς r όταν $r = 6$;

Απάντηση: i) $2\pi rh$ ii) πr^2 iii) 48π

11. Για την συνάρτηση $f(x,y) = 4x^2 - 8xy^4 + 7y^5 - 3$ να αποδειχθεί ότι $f_{xy} = f_{yx}$.

Απάντηση: $f_{xy} = f_{yx} = -32y^3$

12. Για την συνάρτηση $f(x,y) = x^3y^5 - 2x^2y + x$ να υπολογιστούν οι παράγωγοι f_{xxy}, f_{yxy} και f_{yyy}.

Απάντηση: $f_{xxx} = 6y^5$, $f_{yxy} = 60x^2y^3$, $f_{yyy} = 60x^3y^2$

13. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν υπάρχουν οι μερικές παράγωγοι της συνάρτηση $f(x,y)$ στο σημείο (x_0,y_0), τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο (x_0,y_0).

ii) Αν οι f_x και f_y είναι συνεχείς στο $(0,0)$, τότε και η $f(x,y)$ είναι συνεχής στο $(0,0)$.

Απάντηση: Λάθος, Σωστό

14. Να υπολογιστεί η παράγωγος dz/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z = 3x^2y^3$, $x = t^4$, $y = t^2$

ii) $z = \ln(2x^2 + y)$, $x = \sqrt{t}$, $y = t^{2/3}$

iii) $z = 3\cos x - sin(xy)$, $x = 1/t$, $y = 3t$

Απάντηση: i) $42t^{13}$ ii) $\dfrac{1}{2t + t^{2/3}}\left(2 + \dfrac{2}{3}t^{-1/3}\right)$ iii) $-\dfrac{3}{t^2}\sin\dfrac{1}{t}$

15. Να υπολογιστεί η παράγωγος dw/dt χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $w = 5x^2y^3z^4$, $x = t^2$, $y = t^3$, $z = t^5$

ii) $w = 5\cos(xy) - \sin(xz)$, $x = 1/t$, $y = t$, $z = t^3$

Απάντηση: i) $165t^{32}$ ii) $-3t\cos t^2$

16. Να υπολογιστούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial u}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial v}$ χρησιμοποιώντας τον κανόνα αλυσίδας.

i) $z = 8x^2y - 2x + 3y$, $x = uv$, $y = u - v$

ii) $z = x/y$, $x = 2\cos u$, $y = 3\sin v$

Απάντηση: i) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = 24u^2v^2 - 16uv^3 - 2v + 3$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = 16u^3v - 24u^2v^2 - 2u - 3$ ii) $\dfrac{\partial z}{\partial u} = -dfrac2\sin u3\sin v$, $\dfrac{\partial z}{\partial v} = -\dfrac{2\cos u\cos v}{3\sin^2 v}$

17. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι χρησιμοποιώντας κανόνα αλυσίδας.

i) $dR/d\phi$, $R = e^{2s-t^2}$, $s = 3\phi$, $t = \phi^{1/2}$

ii) $\dfrac{dw}{dx}$, $w = 3xy^2z^3$, $y = 3x^2 + 2$, $z = \sqrt{x - 1}$.

Απάντηση: i) $5e^{5\phi}$ ii) $\dfrac{3}{2}(3x^2 + 2)(39x^3 - 30x^2 + 10x - 4)\sqrt{x - 1}$

18. Να βρεθούν οι μερικές παράγωγοι $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ στις παρακάτω περιπτώσεις.

i) $x^2 - 3yz^2 + xyz - 2 = 0$

ii) $ye^x - 5\sin(3z) = 3z$

Απάντηση: i) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{2x + yz}{6yz - xy}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{3z^2 - xz}{xy - 6yz}$ ii) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{ye^x}{15\cos(3z) + 3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{e^x}{15\cos(3z) + 3}$

19. Να βρεθεί η $D_{\vec{u}}f$ στο σημείο P.

i) $f(x, y) = (1 + xy)^{3/2}$, $P(3, 1)$, $\vec{u} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\imath + \dfrac{1}{\sqrt{2}}\jmath$

ii) $f(x, y) = \sin(5x - 3y)$, $P(3, 5)$, $\vec{u} = \frac{3}{5}\imath - \frac{4}{5}\jmath$

iii) $f(x, y) = \ln(1 + x^2 + y)$, $P(0, 0)$, $\vec{u} = -\dfrac{1}{\sqrt{10}}\imath - \dfrac{3}{\sqrt{10}}\jmath$

iv) $f(x,y,z)=4x^5y^2z^3$, $P(2,-1,1)$, $\vec{u}=\frac{1}{3}\imath+\frac{2}{3}\jmath-\frac{2}{3}k$

Απάντηση: i) $6\sqrt{2}$ ii) $\dfrac{27}{5}$ iii) -320

20. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του $\vec{a}$.

i) $f(x,y)=4x^3y^2$, $P(2,1)$, $\vec{a}=4\imath-3\jmath$

ii) $f(x,y,z)=\dfrac{z-x}{z+y}$, $P(1,0,-3)$, $\vec{a}=-6\imath+3\jmath-2k$.

Απάντηση: i) 0 ii) $-8/63$

21. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο P στην κατεύθυνση του διανύσματος που σχηματίζει γωνία θ με τον θετικό άξονα x.

i) $f(x,y)=\sqrt{xy}$, $P(1,4)$, $\theta=\pi/3$

ii) $f(x,y)=\dfrac{x-y}{x+y}$, $P(-1,-2)$, $\theta=\pi/2$

Απάντηση: i) $1/2+\sqrt{3}/8$ ii) $2/9$

22. Έστω ότι $D_{\vec{u}}f(1,2)=-5$ και $D_{\vec{v}}f(1,2)=10$, όπου $\vec{u}=\dfrac{3}{5}\imath-\dfrac{4}{5}\jmath$ και $\vec{v}=\dfrac{4}{5}\imath+\dfrac{3}{5}\jmath$.

i) Να βρεθούν τα $f_x(1,2)$ και $f_y(1,2)$.

ii) Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $(1,2)$ στην κατεύθυνση που δείχνει στην αρχή των αξόνων.

Απάντηση: i) $f_x(1,2)=5$, $f_y(1,2)=10$ ii) $-5\sqrt{5}$

23. Έστω $f_x(-5,1)=-3$ και $f_y(-5,1)=2$. Να βρεθεί η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στο $P(-5,1)$ στην κατεύθυνση από το P στο $Q(-4,3)$.

Απάντηση: $1/\sqrt{5}$

24. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης αύξησης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x,y)=4x^3y^2$, $P(-1,1)$

ii) $f(x,y,z)=x^3z^2+y^3z+z-1$, $P(1,1,-1)$

iii) $f(x,y,z)=\dfrac{x}{z}+\dfrac{z}{y^2}$, $P(1,2,-2)$

Απάντηση: i) $(3/\sqrt{13},-2/\sqrt{13})$, $4\sqrt{13}$ ii) $(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$, $3\sqrt{2}$ iii) $(-1/\sqrt{2},1/\sqrt{2},0)$, $\sqrt{2}/2$

25. Να βρεθεί μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση γρηγορότερης μείωσης της f στο P και ο ρυθμός μεταβολής σε εκείνη την κατεύθυνση.

i) $f(x,y)=20-x^2-y^2$, $P(-1,-3)$

ii) $f(x,y,z)=4e^{xy}\cos z$, $P(0,1,\pi/4)$

Απάντηση: i) $(-1/\sqrt{10},-3/\sqrt{10})$, $-2\sqrt{10}$ ii) $(-1/2\sqrt{2},0,-2\sqrt{2})$, -4

26. Να χαρακτηριστεί η κάθε πρόταση ως σωστή (Σ) ή λάθος (Λ) και να αιτιολογηθεί η απάντησή σας.

i) Αν $\vec{v} = 2\vec{u}$ τότε η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην κατεύθυνση του $\vec{v}$ είναι διπλάσια από την κατευθυνόμενη παράγωγο στην κατεύθυνση του $\vec{u}$ σε ένα σημείο (x_0, y_0).

ii) Αν $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα και $D_{\vec{u}}f(x, y) = 0$ για κάθε (x, y), τότε η f είναι σταθερή.

Απάντηση: i) Λάθος ii) Λάθος

27. Η κατευθυνόμενη παράγωγος της $f(x, y, z)$ στο $(3, -2, 1)$ στην κατεύθυνση του $\vec{a} = 2\imath - \jmath - 2k$ είναι -5 και $\|\nabla f(3, -2, 1)\| = 5$, να βρεθεί το $\nabla f(3, -2, 1)$.

Απάντηση: $(-10/3, 5/3, 10/3)$

28. Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου και οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο σημείο P.

i) $x^2 + y^2 + z^2 = 25$, $P(-3, 0, 4)$

ii) $x^2 - xyz = 56$, $P(-4, 5, 2)$

iii) $z = e^{3y} \sin 3x$, $P(\pi/6, 0, 1)$

Απάντηση: i) $-3x + 4z - 25 = 0$, $x = -3 - 6t, y = 0, z = 4 + 8t$ ii) $-18x + 8y + 20x - 152 = 0$, $x = -4 - 18t, y = 5 + 8t, z = 2 + 20t$ iii) $-3y + z = 1$, $x = \pi/6, y = -3t, z = 1 + t$

29. Έστω το ελλειψοειδές $x^2 + y^2 + 4z^2 = 12$.

i) Να βρεθεί η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$.

ii) Να βρεθούν οι παραμετρικές εξισώσεις της κάθετης ευθείας στο $(2, 2, 1)$.

iii) Να βρεθεί η γωνία του εφαπτόμενου επιπέδου στο $(2, 2, 1)$ με το xy-επίπεδο.

Απάντηση: i) $x + y + 2z - 6 = 0$ ii) $x = 2 + 4t, y = 2 + 4t, z = 1 + 8t$ iii) $\cos\theta = 2/\sqrt{6}$, $\theta \approx 35,26^o$

30. Να βρεθούν τα σημεία της επιφάνειας στα οποία το εφαπτόμενο επίπεδο είναι οριζόντιο.

i) $z = x^3y^2$

ii) $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + 4y$

Απάντηση: i) $(x, 0, 0)$, $(0, y, 0)$ ii) $(0, -2, -4)$

31. Να βρεθεί σημείο της επιφάνειας $z = 3x^2 - y^2$ στο οποίο το εφαπτόμενο επίπεδο είναι παράλληλο στο επίπεδο $6x + 4y - z = 5$.

Απάντηση: $(1, 2, -1)$

32. Να δειχθεί ότι κάθε ευθεία κάθετη στη σφαίρα $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

33. Να βρεθούν τα τοπικά μέγιστα ή ελάχιστα και τα σαγματικά σημεία.

i) $f(x, y) = y^2 + xy + 3y + 2x + 3$

ii) $f(x, y) = xy - x^3 - y^2$

iii) $f(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{2}{xy}$

Απάντηση: i) Σαγματικό σημείο στο $(1,2)$ ii) Σαγματικό σημείο στο $(0,0)$, τοπικό ελάχιστο στο $(1/6,1/12)$ iii) Τοπικά ελάχιστα στα $(1,1)$ και $(-1,-1)$

34. Να βρεθούν τα ολικά ακρότατα της συνάρτησης στο χωρίο R.

i) $f(x,y)=xy-x-3y$, R το τρίγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(0,4)$ και $(5,0)$

ii) $f(x,y)=x^2-3y^2-2x+6y$, R το τετράγωνο με κορυφές $(0,0)$, $(0,2)$, $(2,2)$ και $(2,0)$.

iii) $f(x,y)=x^2+2y^2-x$, R ο δίσκος $x^2+y^2\leq 4$

Απάντηση: i) Μέγιστη τιμή 0, ελάχιστη τιμή -12 ii) μέγιστη τιμή 3, ελάχιστη τιμή -1 iii) μέγιστη τιμή $33/4$, ελάχιστη τιμή $-1/4$

35. Να βρεθούν τρεις θετικοί αριθμοί με άθροισμα 48 και μέγιστο δυνατό γινόμενο.

Απάντηση: $x=y=z=16$

36. Να βρεθούν τα σημεία του επιπέδου $x+y+z=5$ στο πρώτο οκτημόριο ($x\geq 0, y\geq 0, z\geq 0$) στα οποία η $f(x,y,z)=xy^2z^2$ έχει μέγιστη τιμή.

Απάντηση: $(1,2,2)$

37. Ένα κλειστό ορθογώνιο κουτί με όγκο $16cm^3$ φτιάχνεται από δύο υλικά. Οι άνω και κάτω έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει 0,10€ ανά cm^2 ενώ οι παράπλευρες έδρες φτιάχνονται από υλικό που κοστίζει 0,05€ ανά cm^2. Να βρεθούν οι διαστάσεις του κουτιού που ελαχιστοποιούν το κόστος των υλικών.

Απάντηση: $x=2, y=2, z=4$

38. Βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης υπό τη δοσμένη συνθήκη με τη μέθοδο των πολλαπλασιαστών Lagrange.

i) $f(x,y)=4x^3+y^2$, $2x^2+y^2=1$

ii) $f(x,y,z)=2x+y-2z$, $x^2+y^2+z^2=4$

iii) $f(x,y,z)=xyz$, $x^2+y^2+z^2=1$.

Απάντηση: i) Μέγιστη τιμή $\sqrt{2}$, ελάχιστη τιμή $-\sqrt{2}$ ii) μέγιστη τιμή 6, ελάχιστη τιμή -6 iii) μέγιστη τιμή $\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$, ελάχιστη τιμή $-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}$

39. Να βρεθεί διάνυσμα στον χώρο με μήκος 5 και μέγιστο δυνατό άθροισμα συντεταγμένων.

Απάντηση: $\vec{v}=(5/\sqrt{3},5/\sqrt{3},5/\sqrt{3})$

40. Να βρεθούν διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με μέγιστο όγκο που να εγγράφεται σε σφαίρα ακτίνας a.

Απάντηση: $x=y=z=2a/\sqrt{3}$.