UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Numerická matematika II

3. Úvod do numerického řešení parciálních diferenciálních rovnic metodou sítí

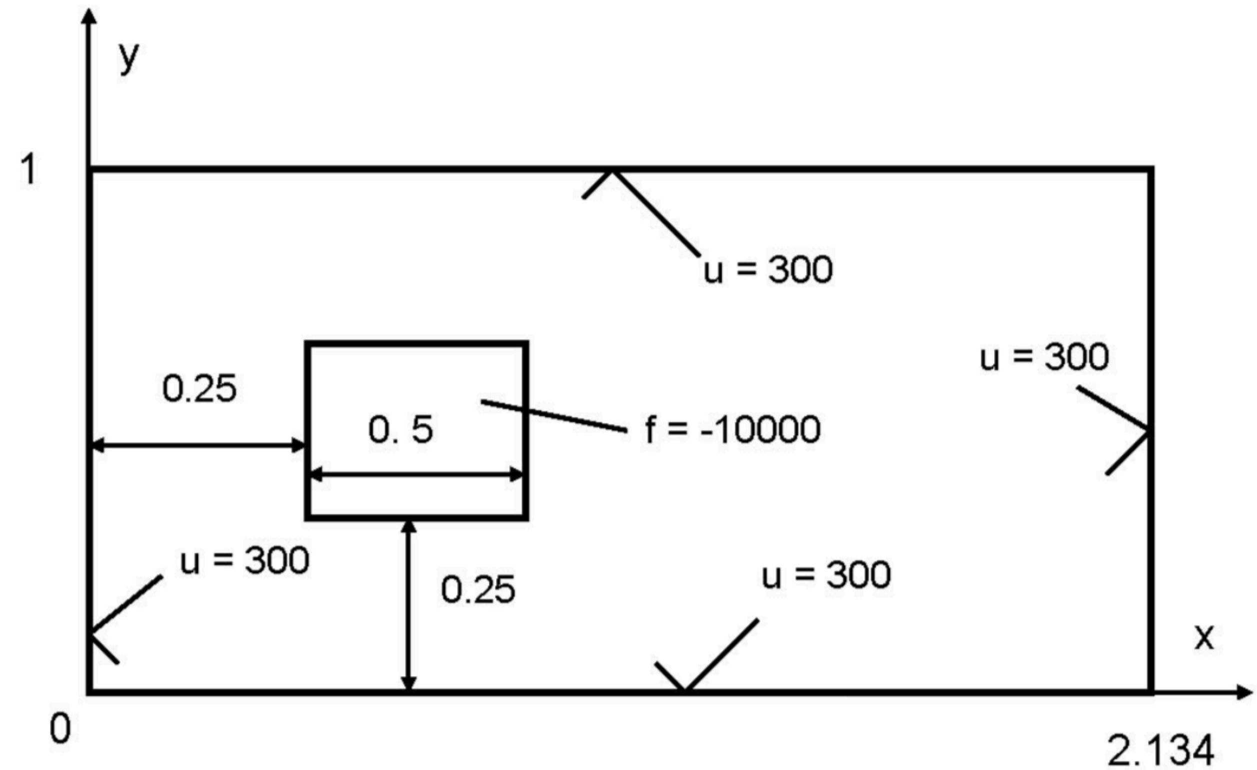
Gadermeteva Anastasiia

15. května 2024

Student: PMVT F22000

A. Numerické řešení Dirichletovy úlohy pro Poissonovu parciální diferenciální rovnici metodou sítí

Metodou sítí řešte Dirichletovu úlohu pro Poissonovu parciální diferenciální rovnici: $\Delta u = f(x, y)$ v oblasti: $W = (0, 2.134) \times (0, 1)$ s okrajovými podmínkami jak je znázorněno na obrázku.



Úvod:

Metoda sítí:

Metoda sítí, známá také jako metoda konečných diferencí, je numerický postup, který převádí parciální diferenciální rovnice na systém algebraických rovnic. Tento přístup je založen na diskretizaci prostoru, což znamená rozdělení oblasti na konečný počet malých oblastí, obvykle obdélníky nebo čtverce.

Dirichletova úloha pro Poissonovu rovnici je typ okrajové úlohy, při které hledáme funkci u(x, y), která splňuje danou parciální diferenciální rovnici (PDR) v určité oblasti a přitom na okrajích této oblasti nabývá předem stanovených hodnot.

Poissonova rovnice:

Poissonova rovnice v obecné formě je dána jako: $\Delta u(x, y) = f(x, y)$,

kde $u(x, y)$- je hledaná funkce a $f(x, y)$ - je známá funkce definující zdroje nebo ponory v dané oblasti.

Δ - je Laplaceův operátor, který v dvourozměrném prostoru můžeme napsat jako: $\Delta u = \frac{\partial u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial y^2}$

Dirichletova úloha:

Dirichletova úloha je typ okrajové úlohy, kde hledáme řešení Poissonovy rovnice v nějaké uzavřené oblasti W se zadanými hodnotami na hranici ∂W této oblasti.

Řešení metodou konečných diferencí:

Pro numerické řešení této úlohy rozdělíme oblast W na mřížku s bodovým rozestupem h. Laplaceův operátor je aproximován pomocí diferenčního schématu, kde druhé derivace jsou nahrazeny diferenčními kvocienty:

$$\frac{\partial u}{\partial x^2} \approx \frac{u_{i+1,j} - 2\,u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y^2} \approx \frac{u_{i,j+1} - 2\,u_{i,j} + u_{i,j-1}}{h^2}$$

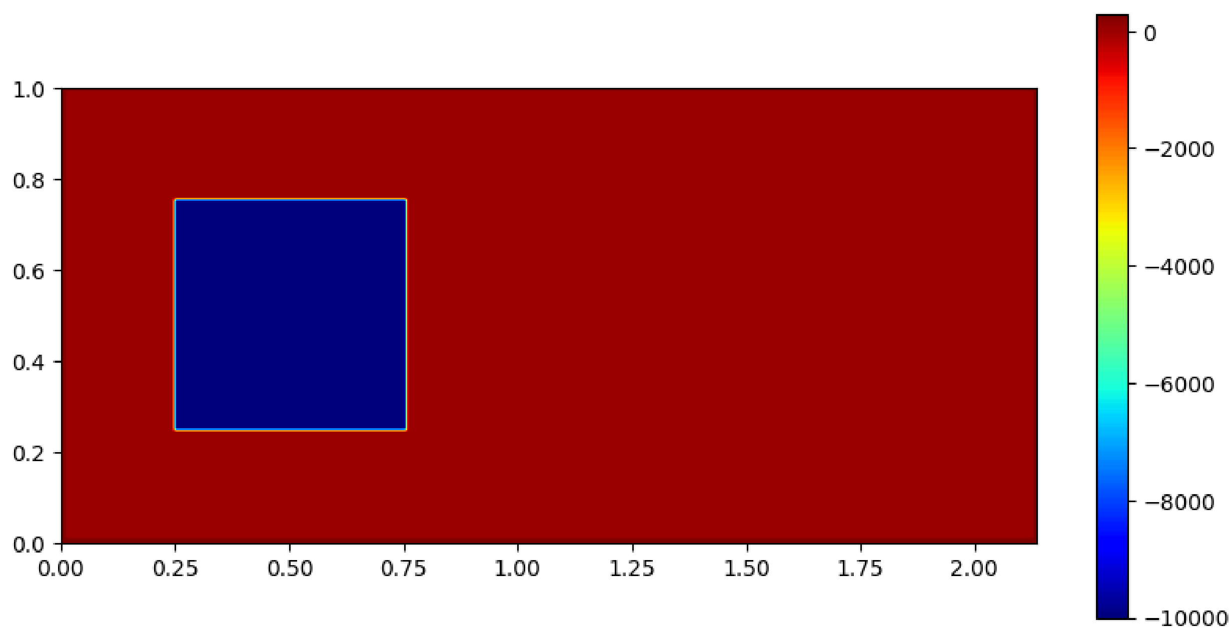
Postup řešení:

1. Definice oblasti W, jako pravoúhlý obdélník s rozměry $x \in (0, 2.134),\ y \in (0, 1)$
2. Diskretizace oblasti W, na síť s konstantním krokem h v obou směrech $h = 0.01$.
3. Aplikace Dirichletových okrajových podmínek na hranicích oblasti W.
4. Iterace řešení do požadovaného počtu iterací.

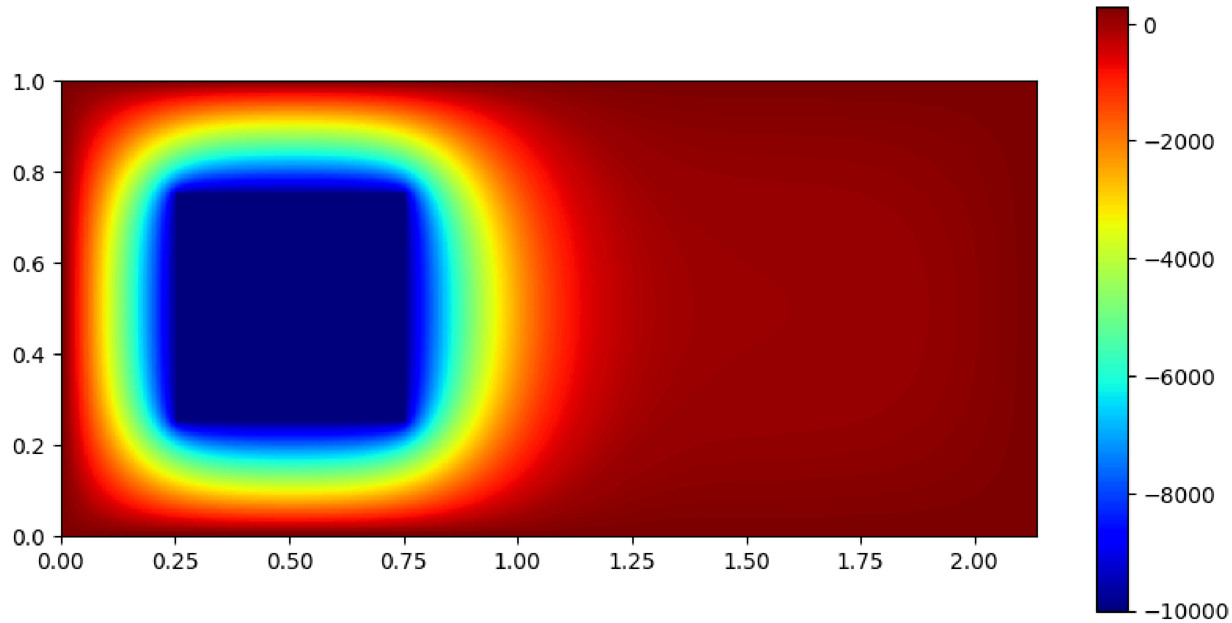
Počáteční podmínky:

x_0	x_{max}	y_0	y_{max}	h	u_{okraj}	f_{zdroj}	Počet iterace	Poloha zdroje
0	2.134	0	1	0.01	300	-1000	1000	$(0.25, 0.25),\ (0.25,\ 0.75)$ $(0.75,\ 0.75),\ (0.75,\ 0.25)$

Počáteční konfigurace oblasti:



Vysledná oblast po 1000 iterace:



B. Numerické řešení rovnice vedení tepla metodou sítí

Metodou sítí řešte smíšenou úlohu pro rovnici vedení tepla $\frac{\partial u}{\partial t} = 0.5\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + sin(t)$

s počáteční podmínkou: $u(x, 0) = \frac{1}{1+x^2}$; $x \in < 0, b >$

a okrajovou podmínkou: $u(0, t) = 1$, $u(b, t) = \frac{1}{1+b^2}$; $b = 4$

Řešení proveďte explicitní, implicitní a Crankovou-Nickolsonovou metodou do času $t_{max} = 4$.

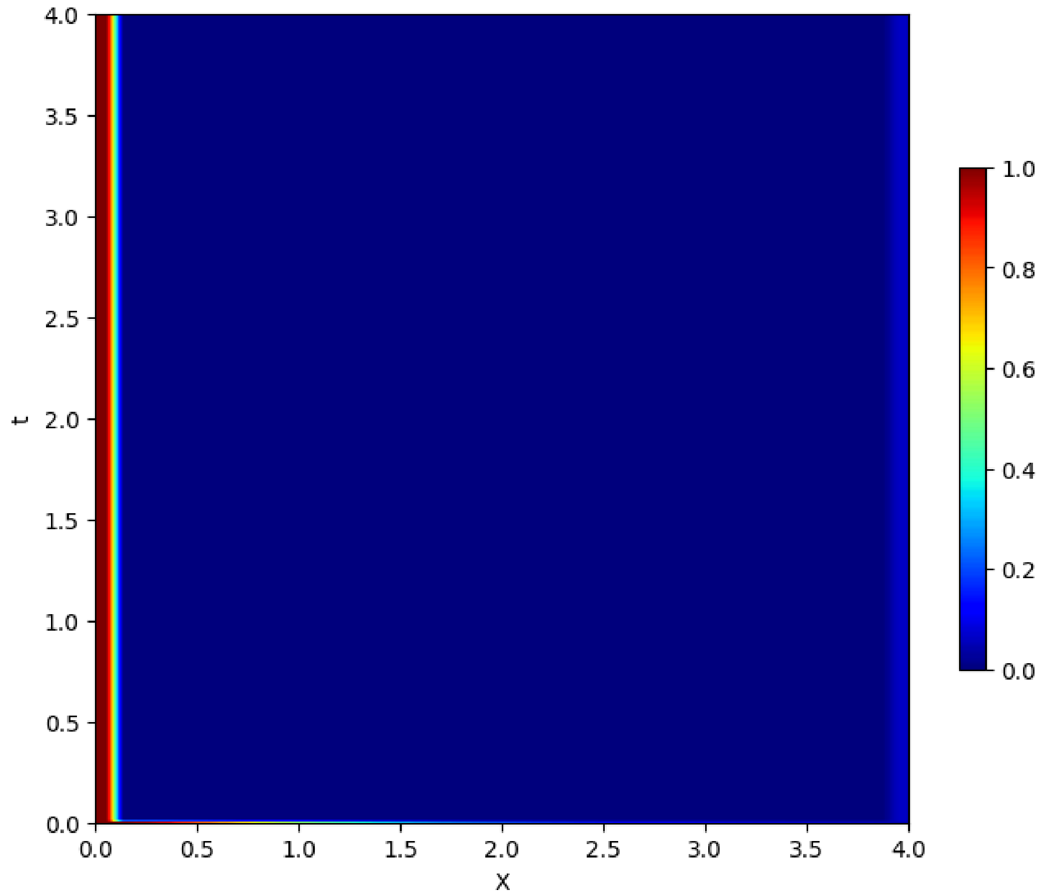
Rovnice vedení tepla:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = p\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t)$$

Popis rovnice:

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ - reprezentuje difúzi tepla, $f(x, t) = sin(t)$ - představuje vnější zdroj tepla, který se mění v čase, $p = 0.5$

Každá metoda zahrnuje stejné sestavení počáteční oblasti u pro $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$:



Počáteční a okrajové podmínky:

x_0	x_{max}	t_0	t_{max}	h	τ	$u_{all,0}$	$u_{0,all}$	$u_{-1,all}$
0	4	0	4	0.1	0.01	$\frac{1}{1+x_i^2}$	1	$\frac{1}{17}$

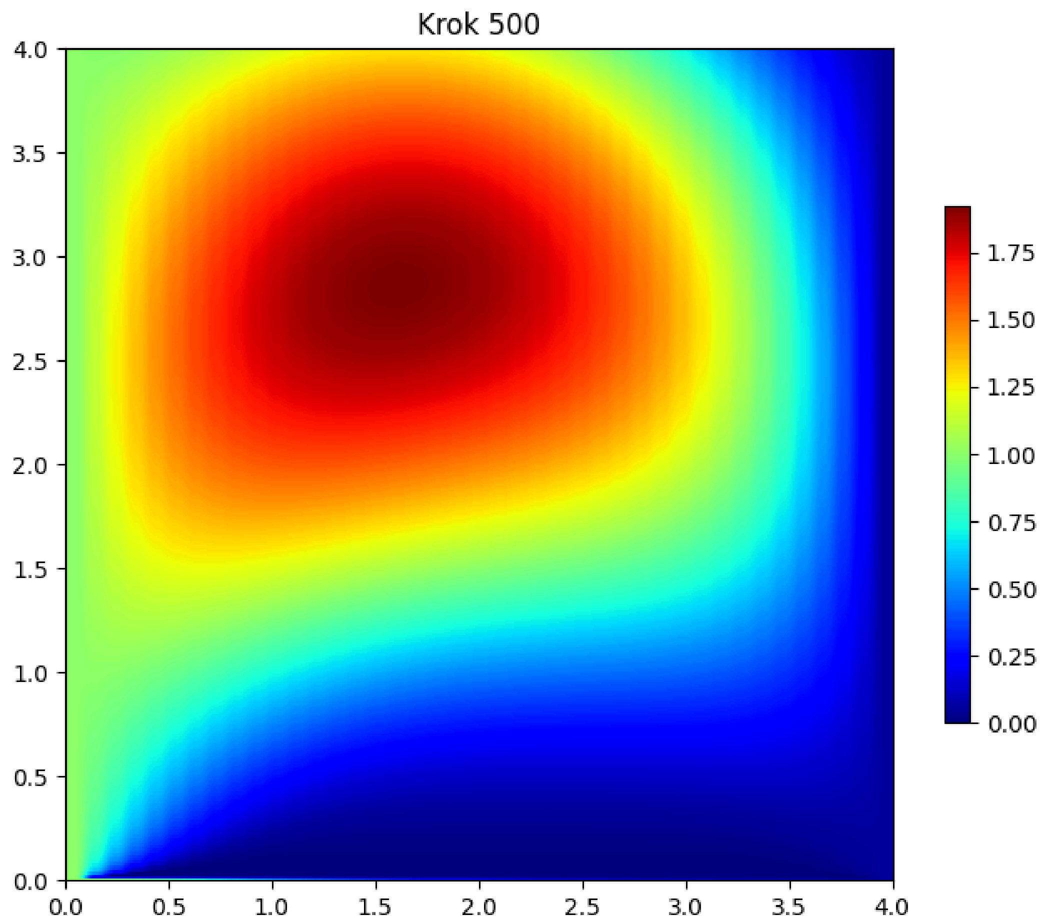
Metody řešení:

1. Explicitní metoda:

Při explicitní metodě vypočítáme nové hodnoty u v každém časovém kroku pouze z předchozích hodnot.

$$u_{i,k+1} = \sigma\left(u_{i-1,k} + u_{i+1,k}\right) + (1 - 2\sigma)\, u_{i,k} + \tau f_{i,k}, \text{ kde } \sigma = p\frac{\tau}{h^2}.$$

Tento přístup je jednoduchý, ale může být nestabilní pro $\sigma \leq 0.5$



2. Implicitní metoda:

V této metodě je diskretizace rovnice taková, že všechny členy závisející na čase $k + 1$ jsou na levé straně rovnice. Každý bod $u_{i, k+1}$, je lineárně závislý pouze na svém předchůdci $u_{i-1, k+1}$, sobě samotném $u_{i, k+1}$ a a svém následníkovi $u_{i+1, k+1}$, což vede k nutnosti řešit systém lineárních rovnic:

$$- \sigma u_{i-1, k+1} + (1 + 2\sigma) u_{i, k+1} - \sigma u_{i+1, k+1} = u_{i, k} + \tau f_{i, k+1}$$

1. Matice A:

Je to čtvercová matice velikosti $len_x \times len_t$

Diagonální prvky matice obsahují koeficient $(1 + 2\sigma)$

Nad a pod diagonální prvky (prvky přímo pod a nad hlavní diagonálou) obsahují $- \sigma$

2. Úprava Matice A pro okrajové podmínky:

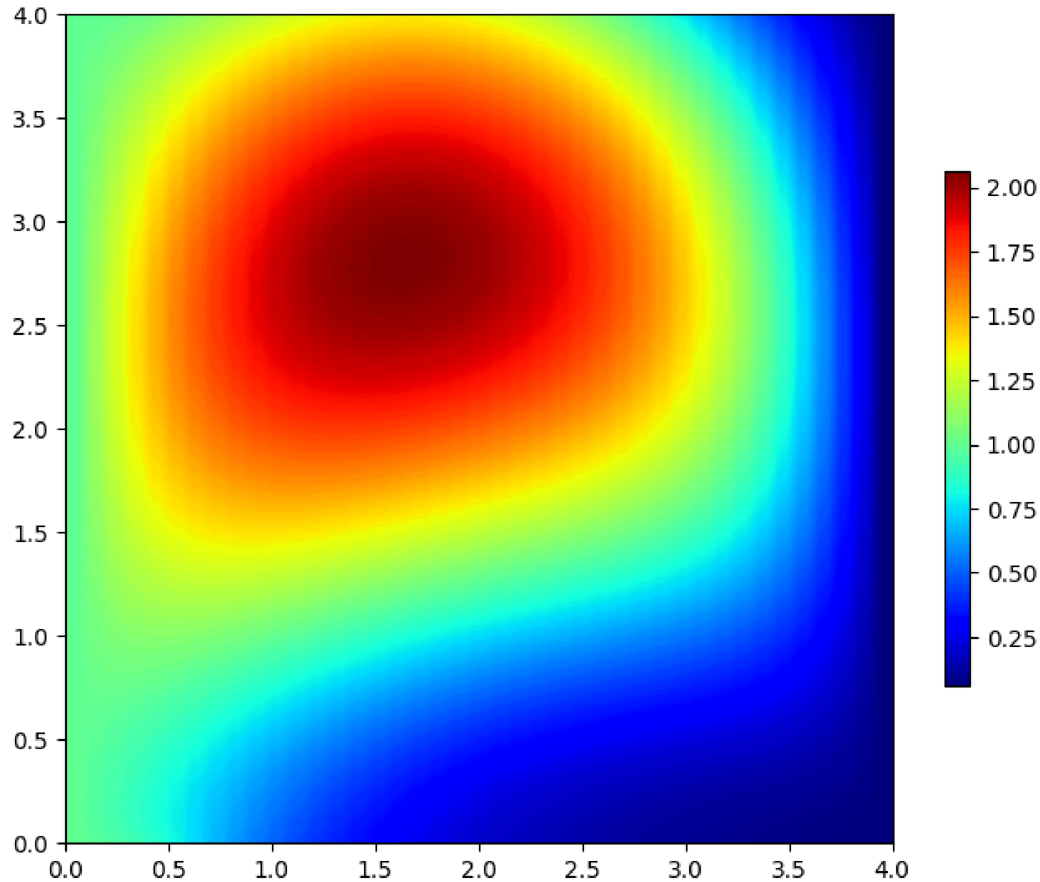
$$A_{0, all} = 0,\ A_{0, 0} = 1 : u_0 = 1 \quad A_{-1, all} = 0,\ A_{-1, -1} = 1$$

3. Iterace přes časové kroky: Pro každý časový krok:

Sestavíme vektor g, který zahrnuje hodnoty z předchozího časového kroku a případně další které reprezentují pravou stranu rovnice

Řešíme soustavu rovnic $A * u_{k+1} = g$, pro získání nových hodnot u v čase t_{k-1}

Implicitní metoda je neomezeně stabilní a vhodná pro situace, kde je třeba použít velké časové kroky.



3. Crank-Nicolsonova metoda:

Kombinuje explicitní a implicitní přístupy tak, že rovnice pro $u_{i,\,k+1}$ obsahuje průměr z explicitních a implicitních členů:

$$-\ \sigma\, u_{i-1,\,k+1} + 2(1\ +\ \sigma)\, u_{i,\,k+1} -\ \sigma\, u_{i+1,\,k+1} =\ \sigma\,(u_{i-1,\,k} + u_{i+1,\,k}) +\ 2(1\ -\ \sigma)u_{i,\,k} +\ \tau(f_{i,k} + f_{i,k+1})$$

Implementace a výpočty

Budeme postupovat podle jednotlivých metod, kde každá metoda bude vyžadovat specifickou implementaci a nastavení parametrů τ a h s ohledem na stability a přesnost.

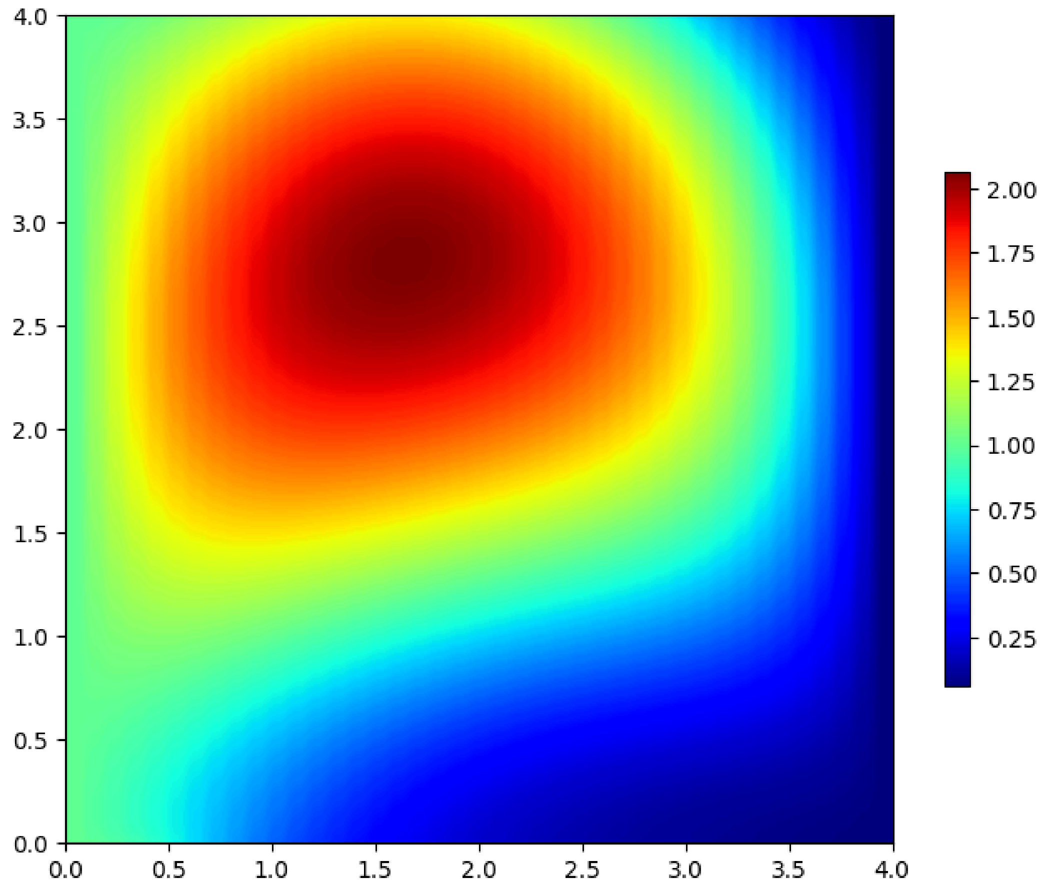
1. Matice A vytvoříme a upravíme stejným způsobem jako v implicitní metodě

Prvky hlavní diagonály obsahují $2(1\ +\ \sigma)$. Nad a pod diagonální prvky obsahují $-\ \sigma$

2. Iterace přes časové kroky: Pro každý časový krok:

Sestavíme vektor g, který zahrnuje hodnoty z předchozího časového kroku a další členy, které reprezentují pravou stranu rovnice.

Řešíme soustavu rovnic $A\ *\ u_{k+1}\ =\ g$, pro získání nových hodnot u v čase t_{k+1}



C. Numerické řešení rovnice kmitání struny (vlnové rovnice) metodou sítí

Metodou sítí řešte smíšenou úlohu pro rovnici kmitání struny (vlnovou rovnici) $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

s počáteční podmínkou: $u(x, 0) = 0;\ x \in < 0, 1 >$

$\frac{\partial u}{\partial t} = u_t(x, 0) = 0;\ x \in < 0, 1 >$, v $t = 0$

a okrajovou podmínkou: $u(0, t) = 0.2\, sin^2(\pi c t)$,

$u(1, t) = 0$

jeden konec struny kmitá podle funkce sin^2, zatímco druhý konec zůstává fixní.

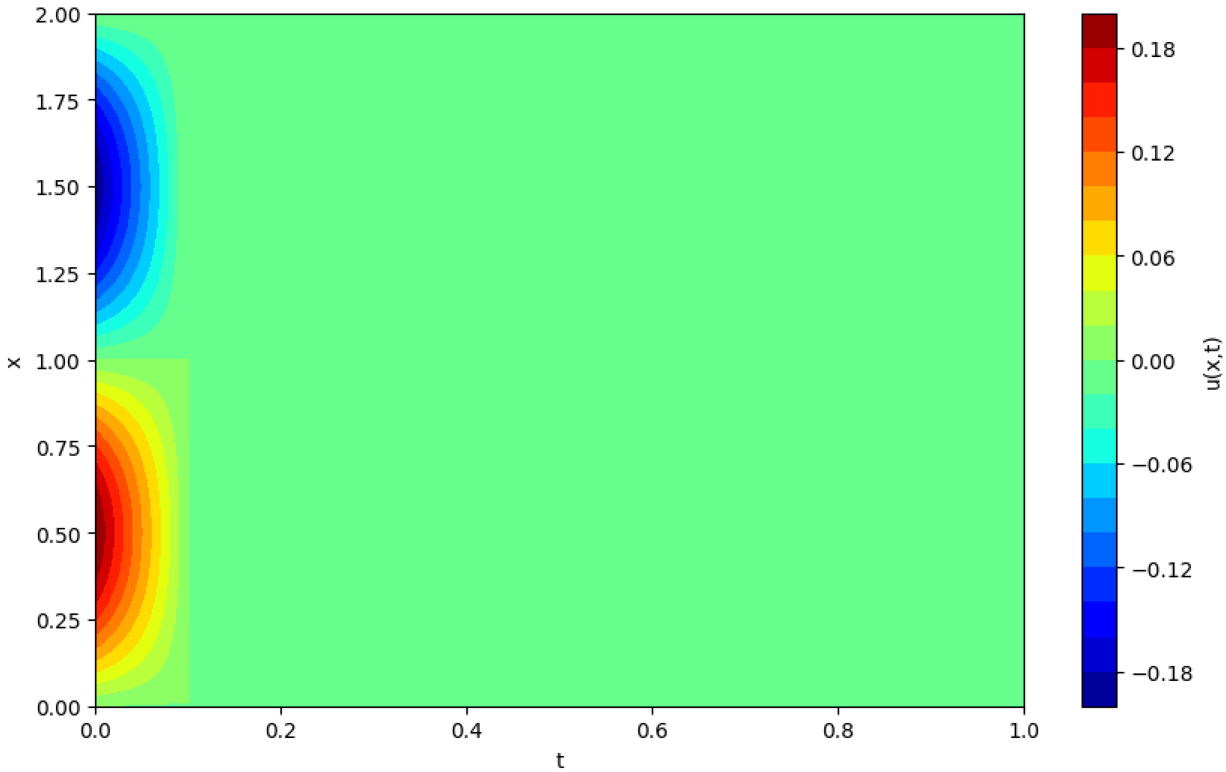
Řešení proveďte explicitní, implicitní a Crankovou-Nickolsonovou metodou do času $t_{max} = \frac{2}{c}$.

Uvod:

Vlnová rovnice je dána vztahem:

$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t)$ $\quad c > 0$ - rychlost šíření vlny ve struně. $c = 1, f(x,t) = 0$

Každá metoda zahrnuje stejné sestavení počáteční oblasti u pro $h = 0.1$ a $\tau = 0.01$:



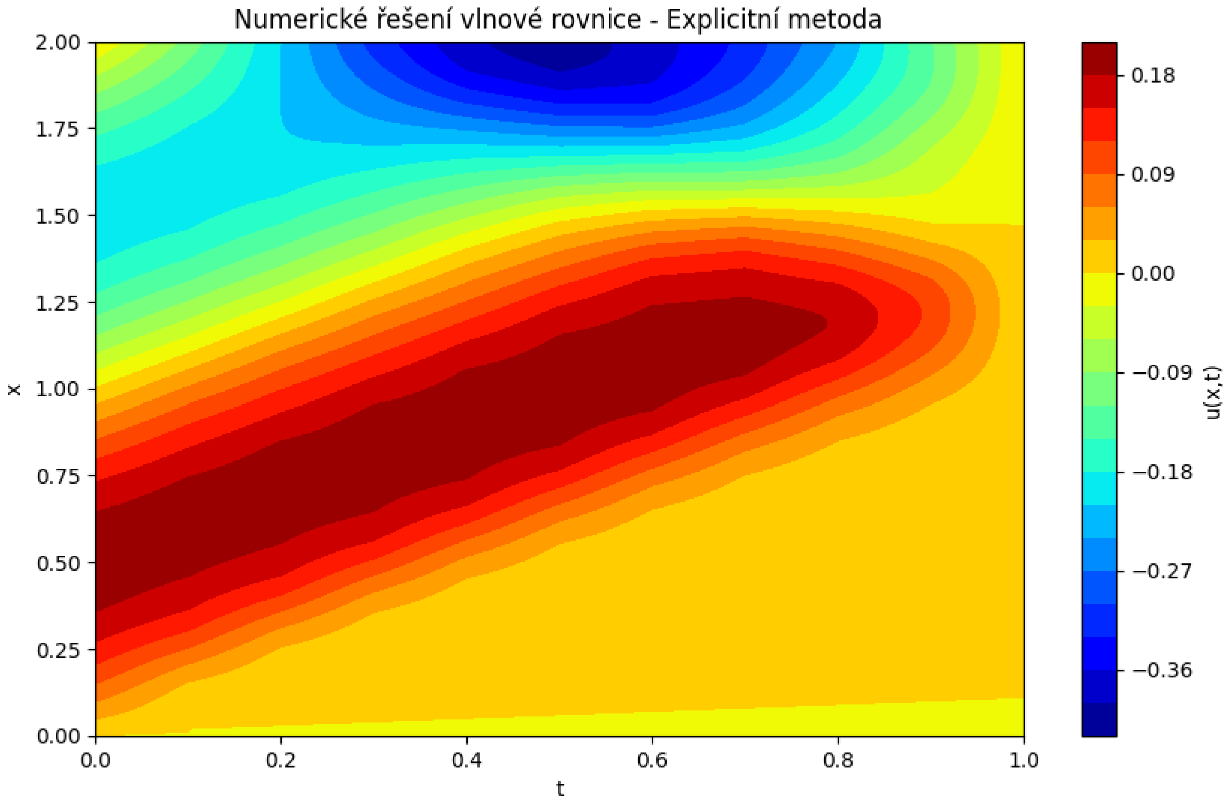
Explicitní metoda:

Oblast x a čas t jsou rozděleny do mřížky s kroky h a τ

Rovnice pro explicitní metodu

$$u_{i,k+1} = 2(1-\sigma^2)\,u_{i,k} + \sigma^2\,(u_{i-1,k} + u_{i+1,k}) - u_{i-1,k} + \tau^2 f_{i,k},$$
$$\text{kde } \sigma = c\frac{\tau}{h}.$$

Tento přístup je jednoduchý, ale může být nestabilní pro $\sigma \leq 1$



Implicitní metoda:

Rovnice pro implicitní metodu:

$$-\sigma^2 u_{i+1,\,k+1} + (1 + 2\sigma^2)\, u_{i,\,k+1} - \sigma^2 u_{i-1,\,k+1} = 2u_{i,\,k} - u_{i,k-1} + \tau^2 f_{i,\,k+1}$$

1. Matice A:

    Je to čtvercová matice velikosti $len_x \times len_t$

    Diagonální prvky matice obsahují koeficient $(1 + 2\sigma^2)$

    Nad a pod diagonální prvky (prvky přímo pod a nad hlavní diagonálou) obsahují $-\sigma$

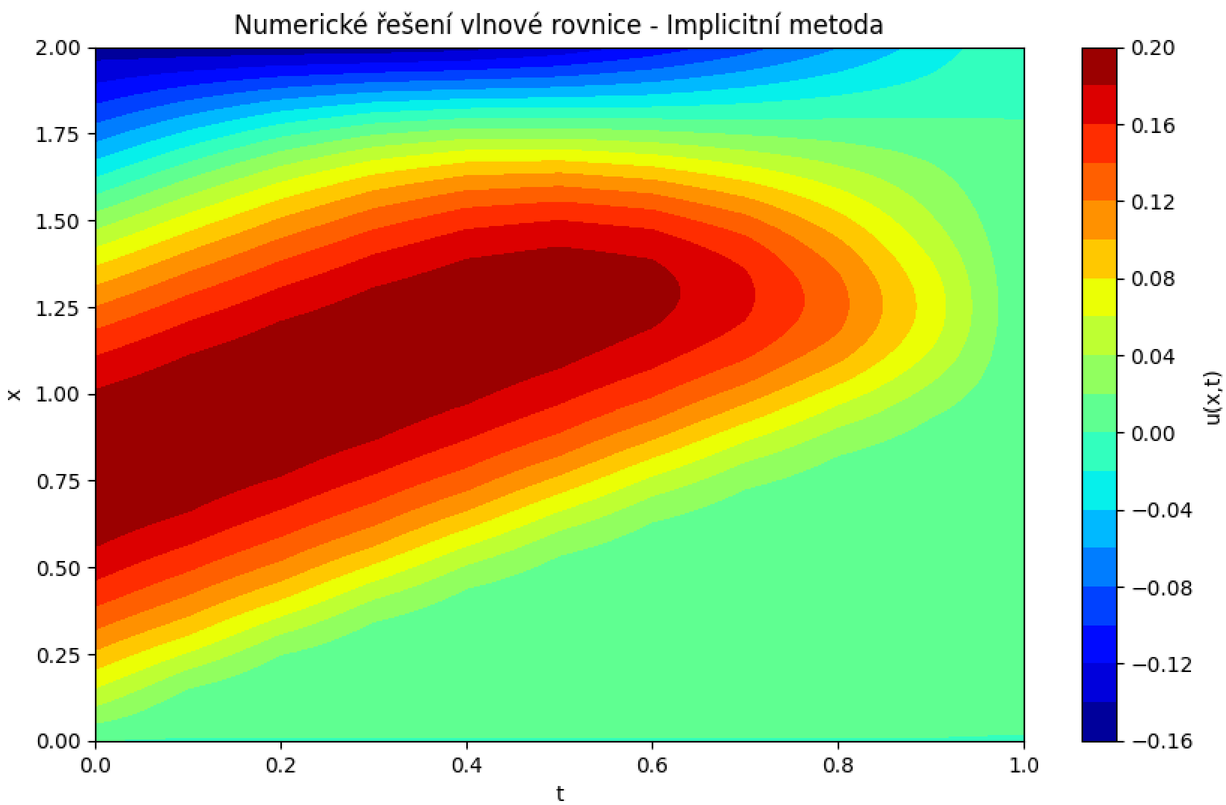
2. Úprava Matice A pro okrajové podmínky:

$$A_{0,\,all} = 0,\ A_{0,\,0} = 1 : u_0 = 1 \quad A_{-1,\,all} = 0,\ A_{-1,\,-1} = 1$$

3. Iterace přes časové kroky: Pro každý časový krok:

    Sestavíme vektor g, který zahrnuje hodnoty z předchozího časového kroku a případně další které reprezentují pravou stranu rovnice

    Řešíme soustavu rovnic $A * u_{k+1} = g$, pro získání nových hodnot u v čase t_{k+1}



Crank-Nicolsonova metoda:

Rovnice pro implicitní metodu:

$$-\frac{\sigma^2}{2}u_{i-1,k+1} + (1+\sigma^2)u_{i,k+1} - \frac{\sigma^2}{2}u_{i+1,k+1} =$$
$$= 2u_{i,k} - u_{i,k-1} + \frac{\sigma^2}{2}(u_{i+1,k} - 2u_{i,k} + u_{i-1,k}) + \frac{\tau^2}{2}(f_{i,k+1} + f_{i,k})$$

1. Matice A vytvoříme a upravíme stejným způsobem jako v implicitní metodě

   Prvky hlavní diagonály obsahují $(1+\sigma^2)$. Nad a pod diagonální prvky obsahují $-\frac{\sigma^2}{2}$

2. Úprava Matice A pro okrajové podmínky:

$$A_{0,all} = 0,\ A_{0,0} = 1: u_0 = 1 \quad A_{-1,all} = 0,\ A_{-1,-1} = 1$$

3. Iterace přes časové kroky: Pro každý časový krok:

   Sestavíme vektor g, který zahrnuje hodnoty z předchozího časového kroku a případně další které reprezentují pravou stranu rovnice

   Řešíme soustavu rovnic $A * u_{k+1} = g$, pro získání nových hodnot u v čase t_{k+1}