UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Numerická matematika II

Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav

Gadermeteva Anastasiia

15. dubna 2024

Student: PMVT F22000

A. Řešení pohybových rovnic pomocí Verletova algoritmu

Napište program pro výpočet dráhy planety obíhající kolem Slunce. Newtonovy pohybové rovnice řešte pomocí standardního a 'rychlostního' Verletova algoritmu. Řešení proveďte v redukovaných proměnných tj. hmotnosti Slunce a planety jako i Newtonovu gravitační konstantu uvažujte rovné 1.
Proveďte výpočet pro případ, že na počátku je planeta v poloze x=1, y=0, rychlost ve směru x je rovna 0 a rychlost ve směru y je rovna 0.5. Dráhu planety zobrazte graficky.

Úvod do Standardního Verletova Algoritmu:

Standardní Verletův algoritmus pro výpočet dráhy částice vychází z Taylorova rozvoje pozice částice v čase $t + \Delta t$ a $t - \Delta t$:

$$\bar{r}(t + \Delta t) = 2\bar{r}(t) - \bar{r}(t - \Delta t) + t^2 * \bar{a}(t)$$

kde $\bar{a}(t)$ je zrychlení částice v čase t, které je odvozeno z působících sil podle Newtonova druhého zákona $\bar{F} = m\bar{a}$

V případě gravitační interakce mezi dvěma tělesy je síla a tedy i zrychlení určena Newtonovým gravitačním zákonem:

$$\bar{F} = - G \frac{m_1 m_2}{r^2} * \hat{r}$$

kde G je gravitační konstanta, $m_1 m_2$ jsou hmotnosti těles, r je jejich vzájemná vzdálenost a $\hat{r}$ je jednotkový vektor směřující od jednoho tělesa k druhému.

V redukovaných proměnných, kde $G,\ m_1,\ m_2$ jsou rovny 1, lze sílu vyjádřit jako:

$$\bar{F} = -\frac{\bar{r}}{r^3}$$

Úvod do Rychlostního Verletova Algoritmu:

Rychlostní Verletův algoritmus je varianta, která explicitně vypočítává rychlost částice v každém kroku a používá ji pro aktualizaci pozice:

$$\bar{r}(t + \Delta t) = \bar{r}(t) + \Delta t * \bar{V}(t) + \frac{\Delta t^2}{2} * \bar{a}(t)$$

Výpočet zrychlení v čase $t + \Delta t$: $\bar{a}(t + \Delta t)$ se vypočítá na základě síly působící na částici v nové pozici $\bar{r}(t + \Delta t)$

Aktualizace rychlosti:

$$\bar{V}(t + \Delta t) = \bar{V}(t) + \frac{\Delta t}{2} * (\bar{a}(t) + \bar{a}(t + \Delta t))$$

Postup řešení Standardního Verletova Algoritmu:

Inicializace počátečních podmínek: $\overline{r}_0 = (1.0,\ 0.0);\ \overline{V}_0 = (0.0,\ 0.5);\ t = 3;\ \Delta t = 0.001$

Výpočet počáteční pozice pro $t = -\Delta t$: $\overline{r}_{-t} = \overline{r}_0 - \Delta t * \overline{V}_0$

Iterace pro požadovaný počet časových kroků:

Výpočet vzdálenosti: $\overline{r} = \sqrt{x^2 + y^2}$

Výpočet sílu působící na planetu: $\overline{F}_0 = (-\frac{1}{r^3}) * \overline{r}_0$

Aktualizace pozici pomocí Verletova algoritmu: $\overline{r}_n = 2\overline{r}_0 - \overline{r}_{-t} + \Delta t^2 * \overline{F}_0$

Příprava proměnných pro další iteraci: $\overline{r}_{-t} = \overline{r}_0\ \overline{r}_0 = \overline{r}_n$

Postup řešení Standardního Verletova Algoritmu:

Inicializace počátečních podmínek: $\overline{r}_0 = (1.0,\ 0.0);\ \overline{V}_0 = (0.0,\ 0.5);\ t = 3;\ \Delta t = 0.001$

Iterace pro požadovaný počet časových kroků:

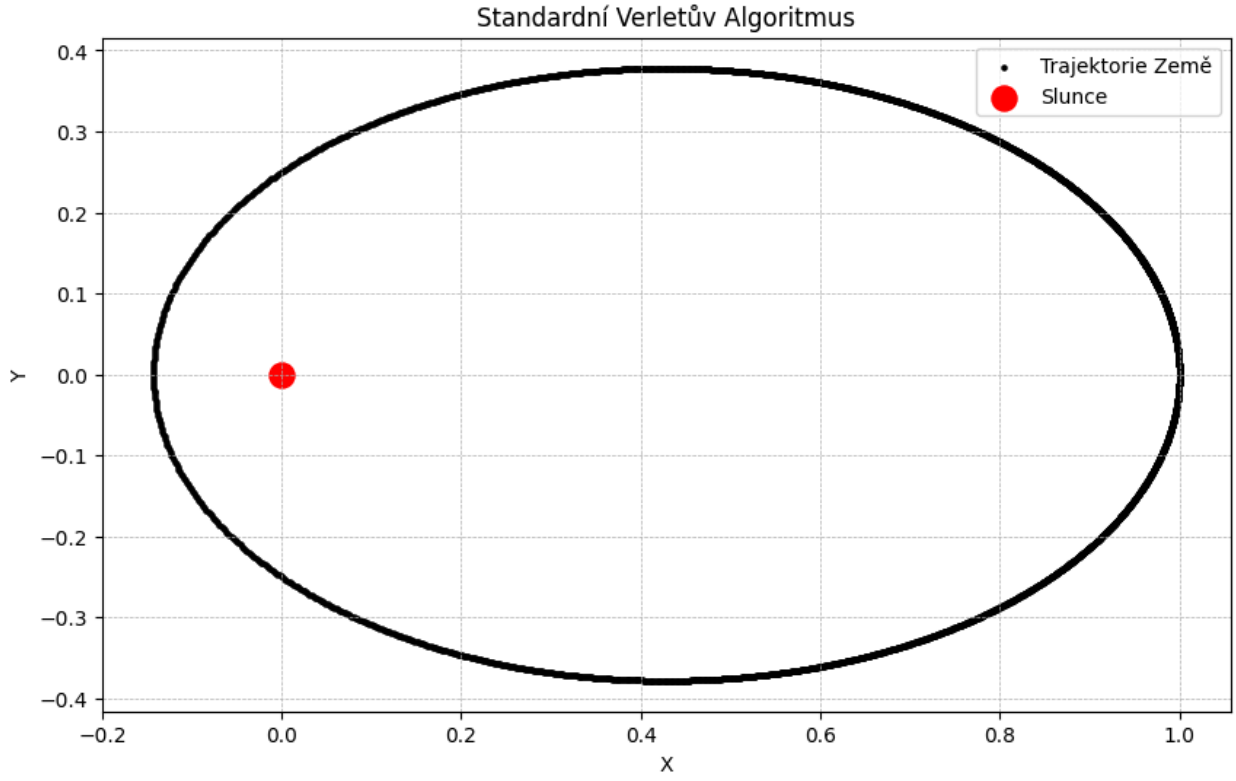
Výpočet síly na základě aktuální pozice: $\overline{F} = (-\frac{1}{r^3}) * \overline{r}_0$

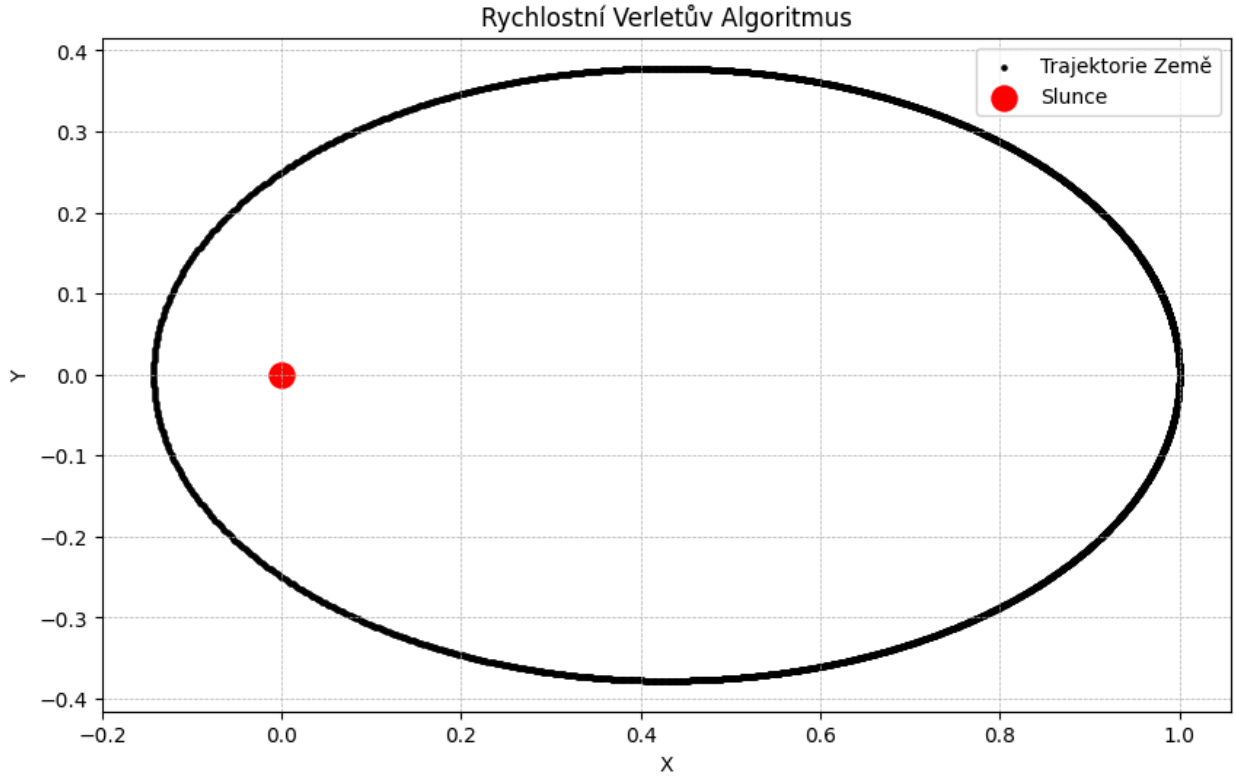
Aktualizace pozice pomocí počáteční rychlosti a působící síly: $\overline{r}_n = \overline{r}_0 + \Delta t * \overline{V}_0 + \frac{\Delta t^2}{2} * \overline{F}$

Výpočet nové síly $\overline{F}_n$ na základě předběžně aktualizované pozice $\overline{r}_n$: $\overline{F}_n = (-\frac{1}{r_n^3}) * \overline{r}_n$

Aktualizace rychlosti: $\overline{V}_n = \overline{V}_0 + \frac{\Delta t}{2} * (\overline{F} + \overline{F}_n)$

Grafické zobrazení dráhy





B. Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav Rungovou-Kuttovou metodou.

1. Napište program pro numerické řešení obyčejné diferenciální rovnice $y' = \frac{y^2+1}{xy}$ s počáteční podmínkou $y(1) = 2$. Eulerovou a modifikovanou Eulerovou metodou. Numerické řešení srovnejte s analytickým řešením: $y = \sqrt{5x^2 - 1}$ a spočtěte globální diskretizační chybu.

Úvod

Eulerova metoda:

Eulerova metoda je jednoduchá numerická metoda, která umožňuje přibližně řešit obyčejné diferenciální rovnice (ODR). Základní myšlenkou je, že úsek křivky lze aproximovat tečnou čárou a tuto čáru použít k předpovědi dalšího bodu na křivce.

Kroky Eulerovy metody:

1. **Inicializace**: Začínáme s počáteční hodnotou y_0 a volíme velikost kroku h.
2. **Předpověď sklonu křivky**: Vypočítáme hodnotu derivace $f(x_n, y_n)$ v aktuálním bodě (x_n, y_n).
3. **Krok metody Euler**: Pomocí hodnoty derivace uděláme krok podél křivky, abychom našli novou hodnotu y_{n+1}. Vzorec pro tento krok: $y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n)$
4. **Opakování**: Opakujeme kroky 2 a 3 pro každé nové n, dokud nedosáhneme požadované hodnoty x.

Modifikovaná Eulerova metoda:

Modifikovaná Eulerova metoda je vylepšením běžné Eulerovy metody, která zvyšuje přesnost aproximace řešení ODR.

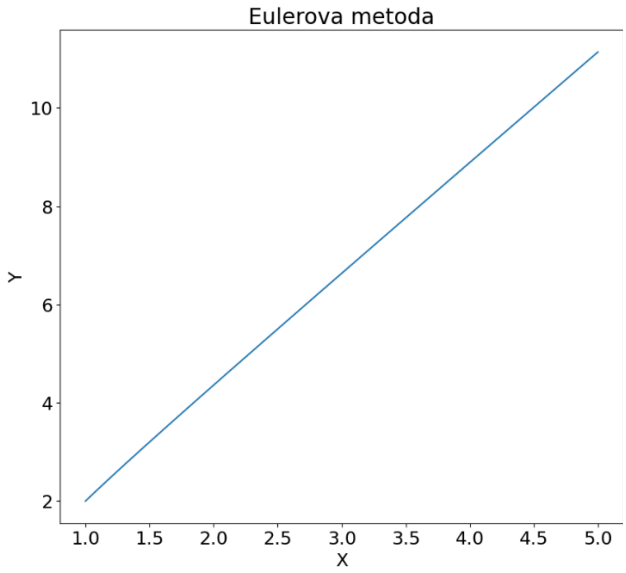
Kroky modifikované Eulerovy metody:

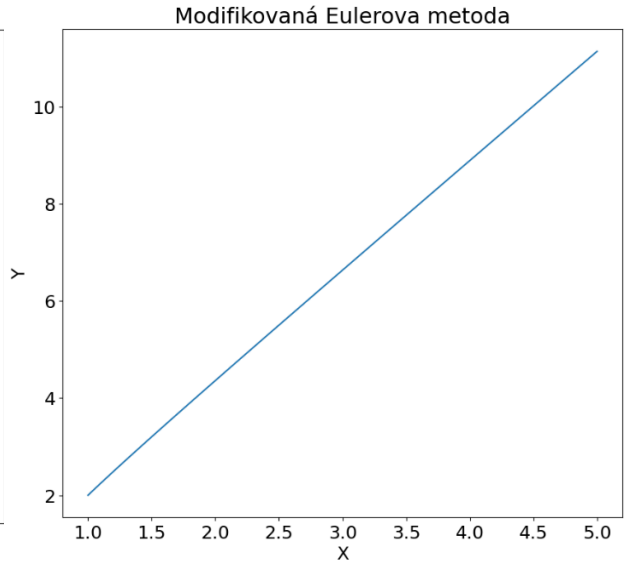
1. **Inicializace**: Stejně začneme s počáteční hodnotou y_0 a volíme velikost kroku h.
2. **Předpověď poloviční směrnice křivky**: Vypočítáme hodnotu derivace $f(x_n, y_n)$ v aktuálním bodě (x_n, y_n).
3. **Krok modifikované Eulerovy metody**: Použijeme poloviční směrnici pro předběžný krok: $y^*_{n+1} = y_n + \frac{h}{2} f(x_n, y_n)$
4. **Upřesnění směrnice křivky**: Poté vypočítáme hodnotu derivace v bodě (x_{n+1}, y^*_{n+1})
5. **Finální krok modifikované Eulerovy metody**: Použijeme upřesněnou hodnotu derivace pro finální krok: $y_{n+1} = y_n + hf(x_{n+1}, y^*_{n+1})$
6. **Opakování**: Opakujeme kroky 2-5 pro každé nové n, dokud nedosáhneme požadované hodnoty x.

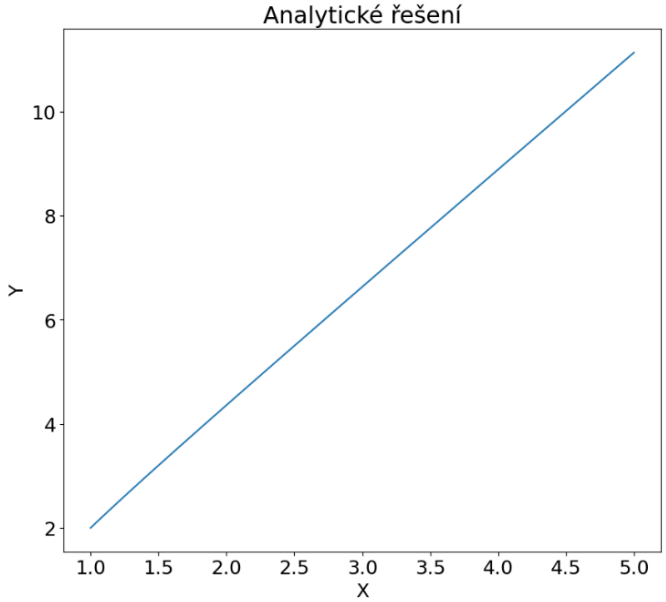
Výsledky:

Počátečních podmínky:

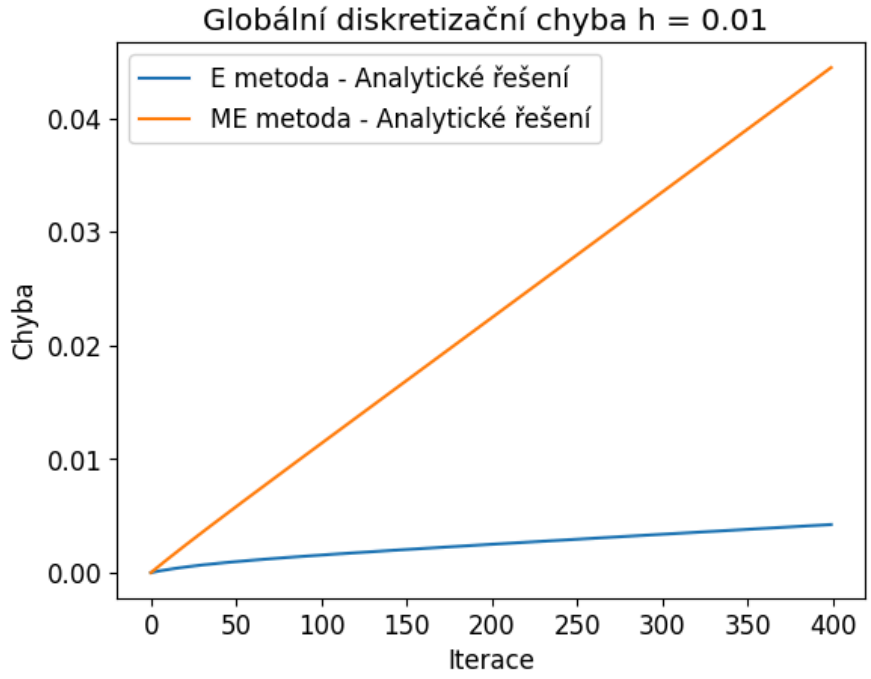
x_0	y_0	x_{max}	h
1.0	2.0	5.0	0.0001

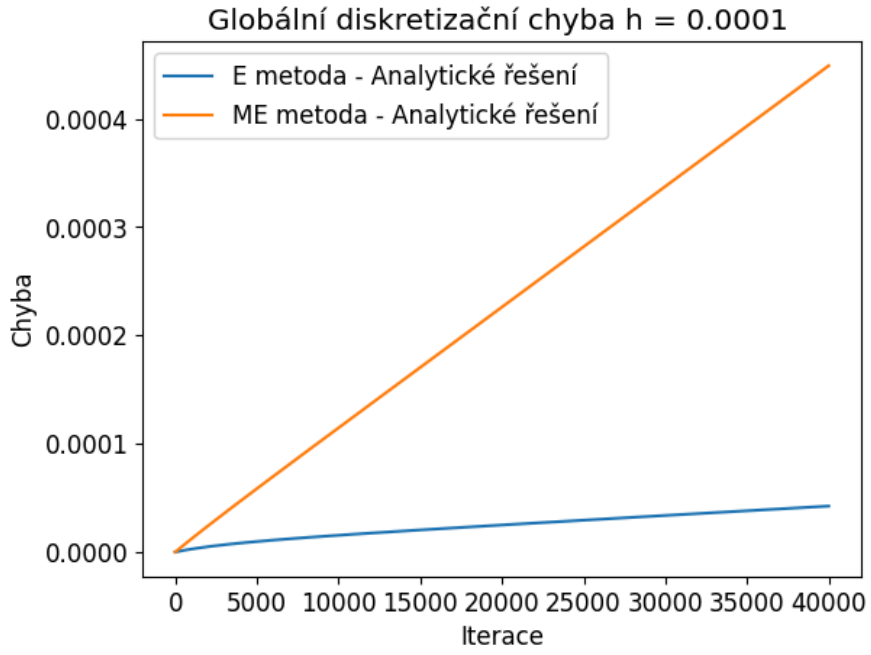






Globální diskretizační chyba- je rozdíl mezi analytickým řešením rovnice a řešením získaným pomocí numerické metody v daném bodě. Tato chyba ukazuje, jak přesně numerická metoda aproximuje skutečné řešení problému.





Při použití Eulerovy a modifikované Eulerovy metody pro numerické řešení diferenciální rovnice bylo zjištěno, že velikost kroku h má významný vliv na globální diskretizační chybu. Specificky, při snížení velikosti kroku z h = 0.01 na h = 0.0001 došlo k výraznému poklesu chyby u obou metod. Tento pokles chyby naznačuje, že menší kroky h výrazně zlepšují přesnost numerického řešení v porovnání s analytickým výsledkem.

2. Napište program pro numerické řešení obyčejné diferenciální rovnice $y' = \frac{y^2+1}{xy}$ s počáteční podmínkou $y(1) = 2$ Rungovou-Kuttovou metodou 4. řádu. Numerické řešení srovnejte s analytickým řešením: $y = \sqrt{5x^2 - 1}$ a spočtěte globální diskretizační chybu.

Úvod

Rungova-Kuttova metoda 4. řádu:

Princip metody RK4 spočívá v kombinaci několika odhadů sklonů funkce, které poskytují konečnou aproximaci řešení v každém kroku. To umožňuje metodu získat vysokou úroveň přesnosti i stability bez potřeby extrémně malých kroků, což je činí efektivnější ve srovnání s jednoduššími metodami, jako je Eulerova metoda. RK4 je tedy vhodná pro aplikace, kde je kladen důraz na přesnost a efektivitu výpočtu.

Předpokládejme, že máme diferenciální rovnici ve tvaru: $y' = f(x, y)$ kde y'- je derivace y vzhledem k x, a $f(x, y)$ je daná funkce, která může záviset na x i na y.

V RK4 je přírůstková funkce definována pomocí čtyř koeficientů k_1, k_2, k_3, k_4

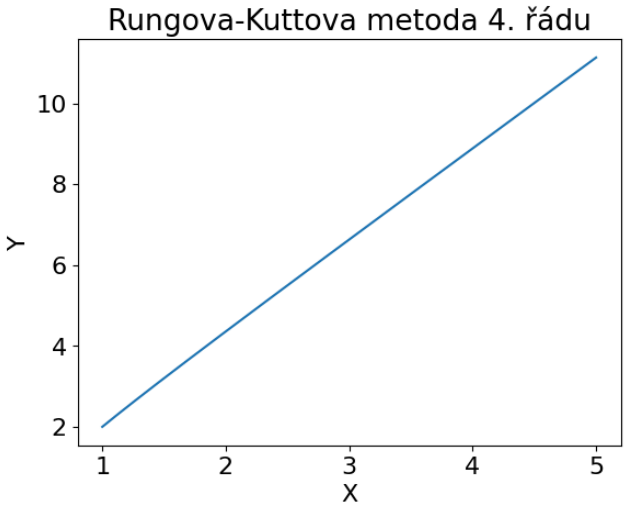
Cílem RK4 je najít přibližnou hodnotu y v bodě $x + h$, kde h je krok. Metoda používá následující kroky:

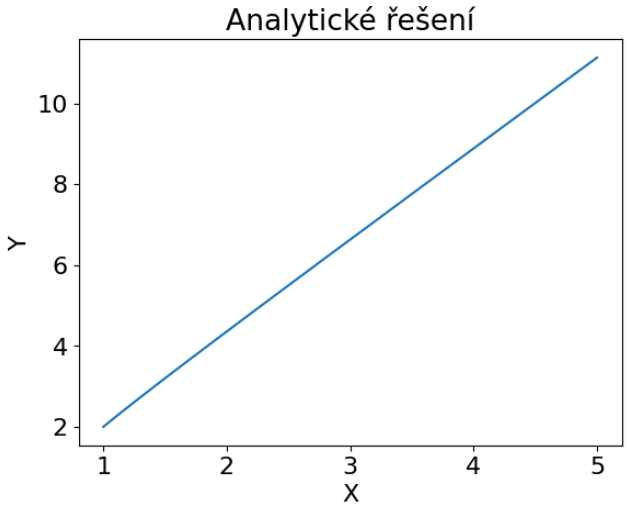
1. Výpočet k_1:
   $k_1 = h * f(x_n, y_n)$
2. Výpočet k_2:
   $k_2 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_1)$
3. Výpočet k_3:
   $k_3 = h * f(x_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{h}{2}k_2)$
4. Výpočet k_4:
   $k_4 = h * f(x_n + h, y_n + hk_3)$
5. Výpočet y_{n+1}:
   $y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$

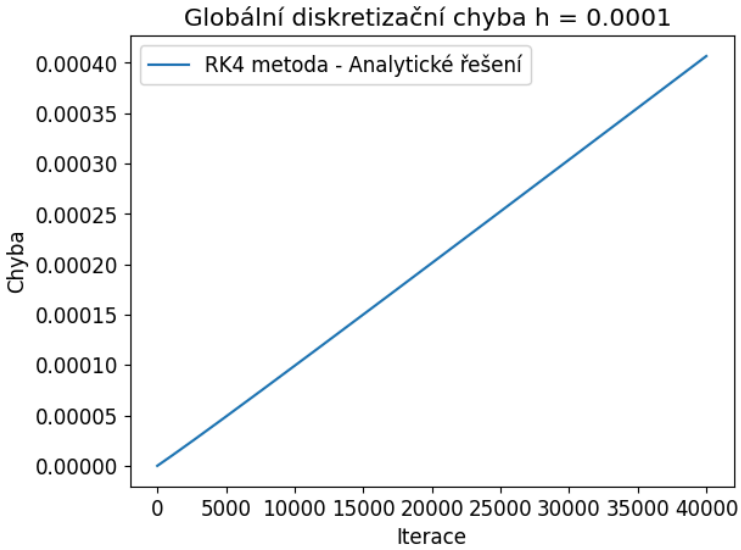
Výsledky:

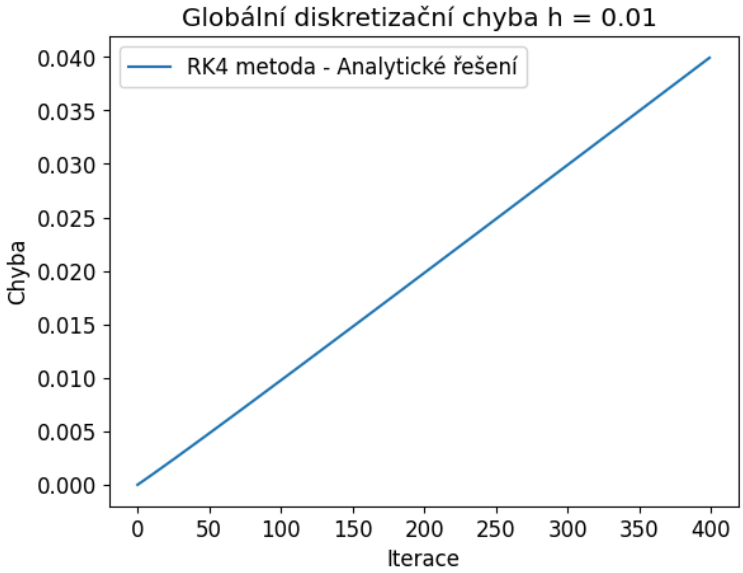
Počátečních podmínky:

x_0	y_0	x_{max}	h
1.0	2.0	5.0	0.0001


Rungova-Kuttova metoda 4. řádu
Y
X
2
4
6
8
10
1
2
3
4
5


Analytické řešení
Y
X
2
4
6
8
10
1
2
3
4
5


Globální diskretizační chyba h = 0.0001
RK4 metoda - Analytické řešení
Chyba
Iterace
0.00000
0.00005
0.00010
0.00015
0.00020
0.00025
0.00030
0.00035
0.00040
0
5000
10000
15000
20000
25000
30000
35000
40000


Globální diskretizační chyba h = 0.01
RK4 metoda - Analytické řešení
Chyba
Iterace
0.000
0.005
0.010
0.015
0.020
0.025
0.030
0.035
0.040
0
50
100
150
200
250
300
350
400

3. Napište program pro numerické řešení soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic $y'_1 = xy_1 + y_2$, $y'_2 = y_1 y_2 - 2$ s počátečními podmínkami $y_1(0) = 0,\ y_2(0) = 1$ Rungovou-Kuttovou metodou 4. řádu. Výpočet proveďte do $x_{max} = 3$.

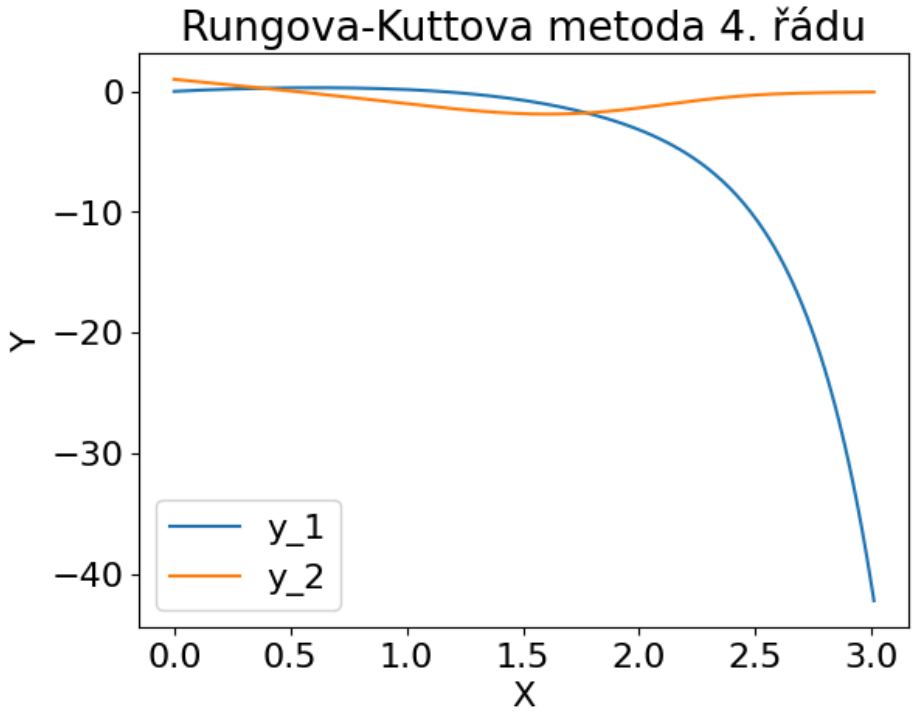
   Program napište obecně tj. aby se dal použít pro soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic.

Specifikace programu:
Program bude navržen obecně, aby bylo možné jej použít pro řešení soustavy n ODR. Struktura programu umožní definici libovolného počtu diferenciálních rovnic a počátečních podmínek.

Postup řešení:

1. Definice funkce: $f_1(x, \overline{y}), f_2(x, \overline{y}), \ \dots\ , f_n(x, \overline{y}),$ kde $\overline{y}$ je vektor proměnných $y_1,\ y_2,\ \dots\ ,\ y_n$.
2. Inicializace počátečních podmínek a parametrů:
   $x_0 = 0,\ y_0 = [y_1(0),\ y_2(0),\ \dots\ ,\ y_n(0)],\ x_{max} = 3,\ h = 0.01$
3. Metoda Runge-Kutta 4. řádu:
   Vypočítat $k_{1i},\ k_{2i},\ k_{3i},\ k_{4i}$ pro každé i od 1 do n podle standardních RK4 vzorců.

Výsledky:



C. Numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic a jejich soustav metodou prediktor-korektor

1. Napište program pro numerické řešení obyčejné diferenciální rovnice $y' = \frac{y^2+1}{xy}$ s počáteční podmínkou $y(1) = 2$ metodou prediktor-korektor. Pro prediktor použijte Adamsonův-Bashforthův explicitní vzorec 4. řádu a pro korektor Adamsonův-Moultonův implicitní vzorec 4. řádu.

Úvod

Metoda prediktor-korektor:

Je dvoufázový přístup k řešení ODR, který kombinuje explicitní a implicitní numerické metody s cílem zvýšit přesnost výsledků. Prediktor - odhadne příští hodnotu řešení (explicitní část), korektorem - tuto hodnotu upraví na základě dalšího výpočtu (implicitní část).

Adamsonův-Bashforthův explicitní vzorec 4. řádu (prediktor):

Používá hodnoty funkce a jejich derivací v předchozích čtyřech krocích k odhadu hodnoty funkce v dalším kroku:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(55 f_n - 59 f_{n-1} + 37 f_{n-2} - 9 f_{n-3})$$

kde f_n, f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3} jsou hodnoty derivace funkce f v předchozích krocích.

Adamsonův-Moultonův implicitní vzorec 4. řádu (korektor):

Korektor, který implicitně vypočítá hodnotu funkce s použitím informací z aktuálního i předpovězeného kroku:

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{24}(9 f_{n+1} + 19 f_n - 5 f_{n-1} + f_{n-2})$$

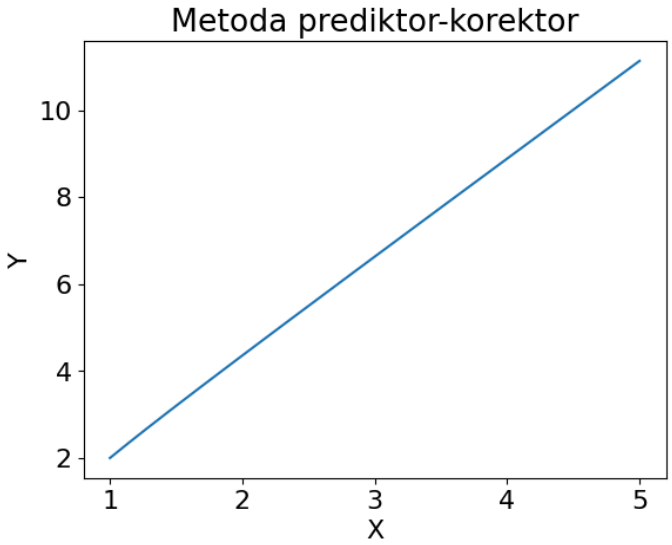
kde f_{n+1} je derivace v nově predikované pozici y_{n+1} což vyžaduje implicitní výpočet.

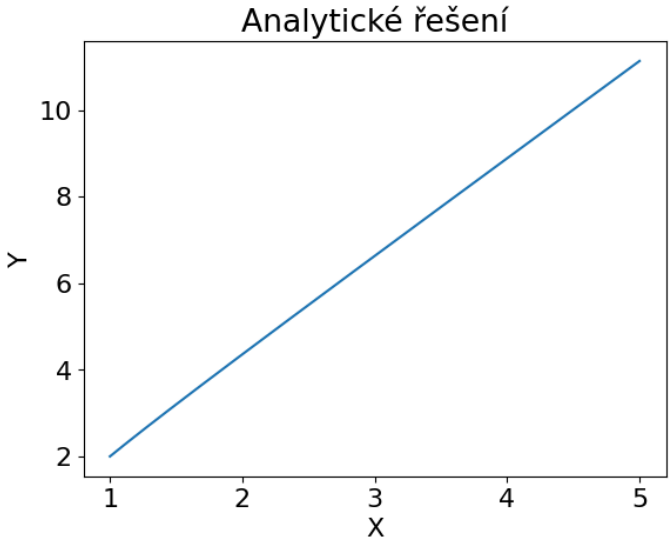
Postup řešení:

1. Inicializace počátečních podmínek

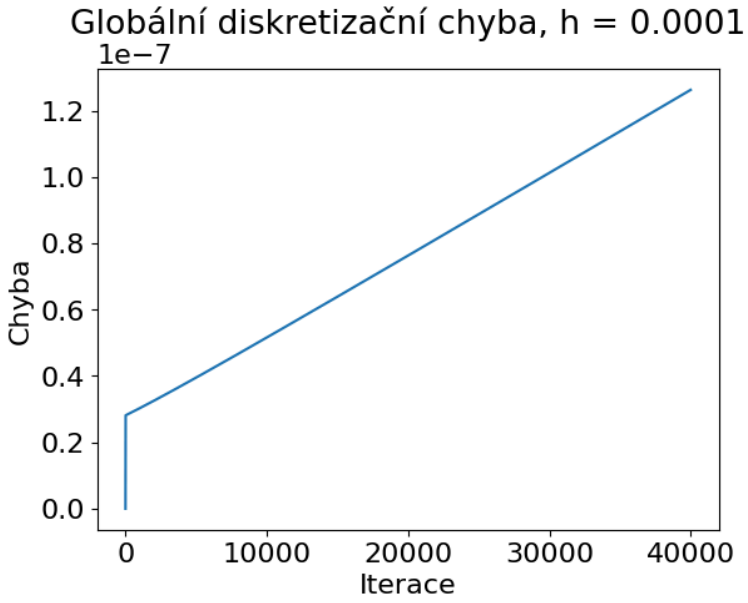
x_0	y_0	x_{max}	h
1.0	2.0	5.0	0.001

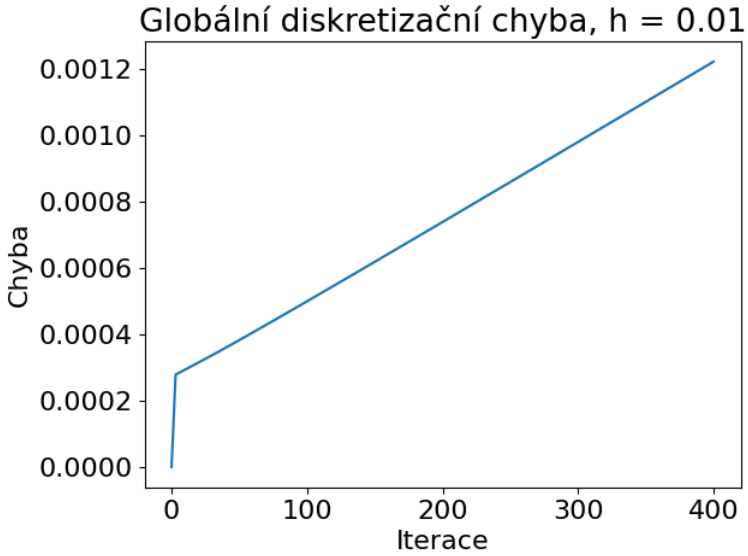
2. Jednokrokova metoda, Runge-Kutta 4. řádu, pro výpočet: y_1 , y_2 , y_3 v bodech x_1 , x_2 , x_3
3. Metoda prediktor-korektoraž do dosažení hodnoty x_{max} :
    - Výpočet derivací v minulých krocích pro použití v A-B vzorci.
    - Použití prediktoru pro odhad hodnoty y v následujícím kroku.
    - Výpočet hodnoty derivace na základě odhadované hodnoty y pomocí korektoru A-M vzorce.
    - Korekce hodnoty y na základě nově získaného odhadu.





2. Numerické řešení srovnejte s analytickým řešením: $y = \sqrt{5x^2 - 1}$, tj. spočtěte globální diskretizační chybu.





Globální diskretizační chyba zjištěná u vícekrokových metod je podstatně nižší ve srovnání s jednokrokovými metodami při použití stejného kroku h.

3. Napište program pro numerické řešení soustavy dvou obyčejných diferenciálních rovnic $y'_1 = xy_1 + y_2$, $y'_2 = y_1 y_2 - 2$ s počátečními podmínkami $y_1(0) = 0$, $y_2(0) = 1$ metodou prediktor-korektor. Pro prediktor použijte Adamsonův-Bashforthův explicitní vzorec 4. řádu a pro korektor Adamsonův-Moultonův implicitní vzorec 4. řádu. Výpočet proveďte do $x_{max} = 3$.

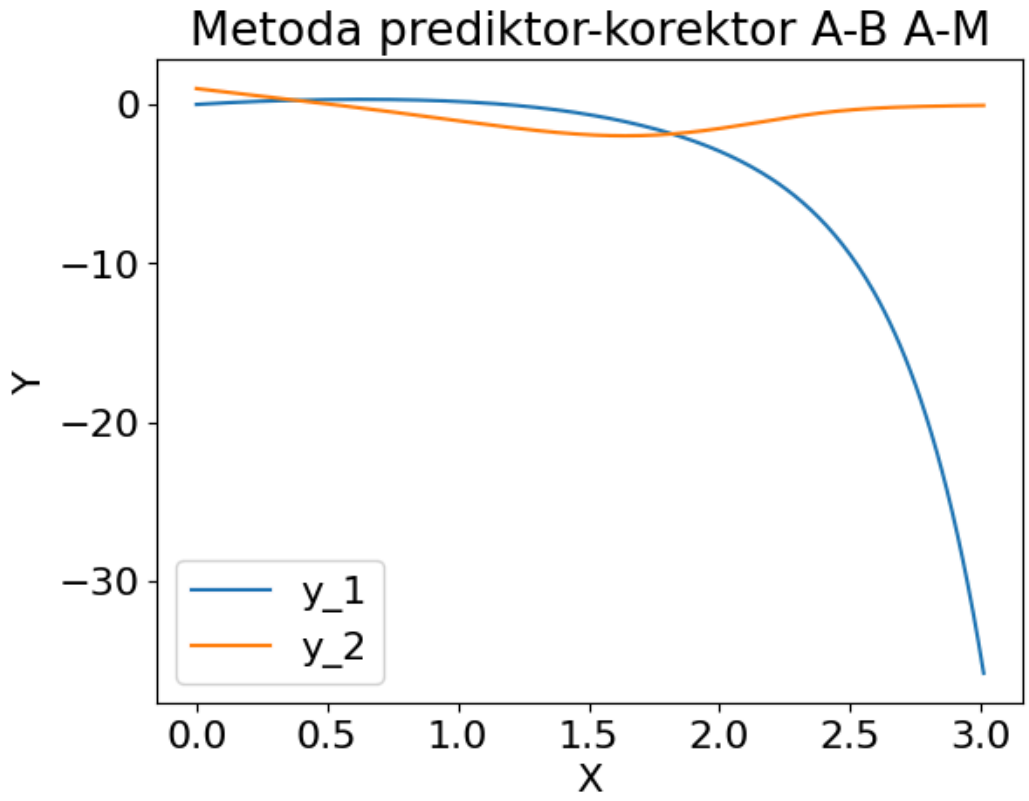
Program napište obecně tj. aby se dal použít pro soustavu n obyčejných diferenciálních rovnic.

Specifikace programu:
Program bude navržen obecně, aby bylo možné jej použít pro řešení soustavy n ODR. Struktura programu umožní definici libovolného počtu diferenciálních rovnic a počátečních podmínek.

Postup řešení:

1. Definice funkce: $f_1(x, \bar{y}), f_2(x, \bar{y}), \ldots, f_n(x, \bar{y})$, kde $\bar{y}$ je vektor proměnných $y_1, y_2, \ldots, y_n$.
2. Inicializace počátečních podmínek a parametrů:
   $x_0 = 0$, $y_0 = [y_1(0), y_2(0), \ldots, y_n(0)]$, $x_{max} = 3$, $h = 0.01$
3. Metoda Runge-Kutta 4. řádu: pro výpočet: y_1, y_2, y_3 v bodech x_1, x_2, x_3
4. Metoda prediktor-korektoraž do dosažení hodnoty x_{max}

Výsledky:



Zhrnutí:

Jednokrokové metody:

- Využívají pouze informace z aktuálního kroku (aktuální pozice a derivace) k výpočtu hodnoty v dalším kroku.
- Příklady: Eulerova metoda, metoda Runge-Kutta.
- Hlavní výhoda: Jednoduchost a snadná implementace.
- Nevýhoda: Může vyžadovat menší krok h pro zajištění stability a přesnosti, což může vést k vyšší výpočetní náročnosti pro dlouhodobé integrace.

Vícekrokové metody:

- K výpočtu aktuálního kroku využívají informace z několika předchozích kroků (hodnoty funkce a/nebo jejích derivací z více kroků zpět).
- Příklady: Metody Adamsonova-Bashforthova a Adamsonova-Moultonova.
- Hlavní výhoda: Lepší využití informací z minulosti může vést k vyšší stabilitě a přesnosti.
- Nevýhoda: Vyžadují správnou inicializaci s dostatečným množstvím předchozích dat, což může být komplikovanější na začátku výpočtu.

D. Soustavy se silným tlumením (stiff soustavy)

1. Rungovou-Kuttovou metodou 4. řádu řešte soustavu obyčejných diferenciálních rovnic:

$$u' = 998u + 1998v \qquad v' = -999u - 1999v$$

s počátečními podmínkami: $u(0) = 1,\ v(0) = 0$. Pozn. Numerické řešení je stabilní pro $h < \frac{1}{1000}$

Pro aplikaci Runge-Kuttovy metody provedeme postup:

1. Definice funkcí:

$$f_1(u, v) = 998u + 1998v \qquad f_2(u, v) = -999u - 1999v$$

2. Počáteční podmínky:

$$\text{pro } x_0 = 0,\ u(0) = 1,\ v(0) = 0,\quad h = 0.001$$

4. Metoda Runge-Kutta 4. řádu:

Vypočítat $k_{1i},\ k_{2i},\ k_{3i},\ k_{4i}$ pro každé i od 1 do n podle standardních RK4 vzorců.

Výpočet k_1:

$$k_1 = h * f_n(u_n,\ v_n)$$

Výpočet k_2:

$$k_2 = h * f_n(u_n + \tfrac{h}{2}k_1,\ v_n + \tfrac{h}{2}k_1)$$

Výpočet k_3:

$$k_3 = h * f_n(u_n + \tfrac{h}{2}k_2,\ v_n + \tfrac{h}{2}k_2)$$

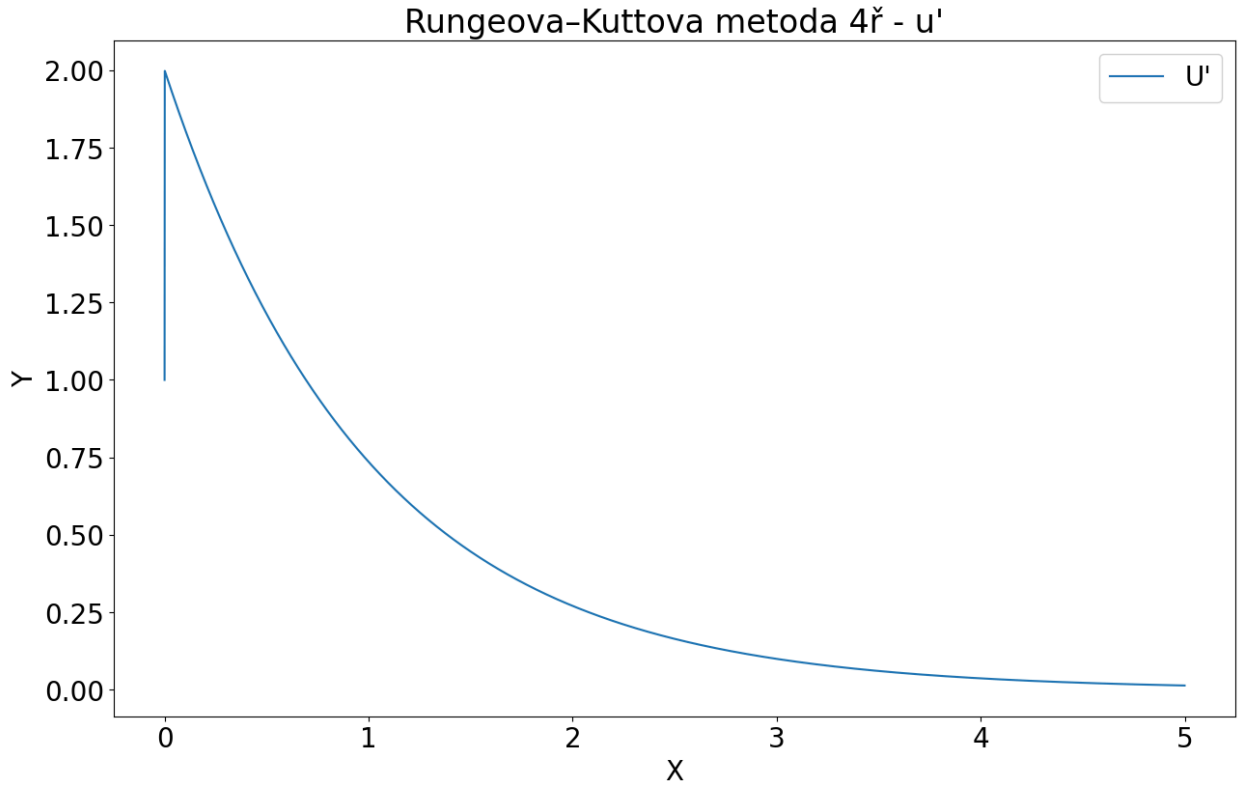
Výpočet k_4:

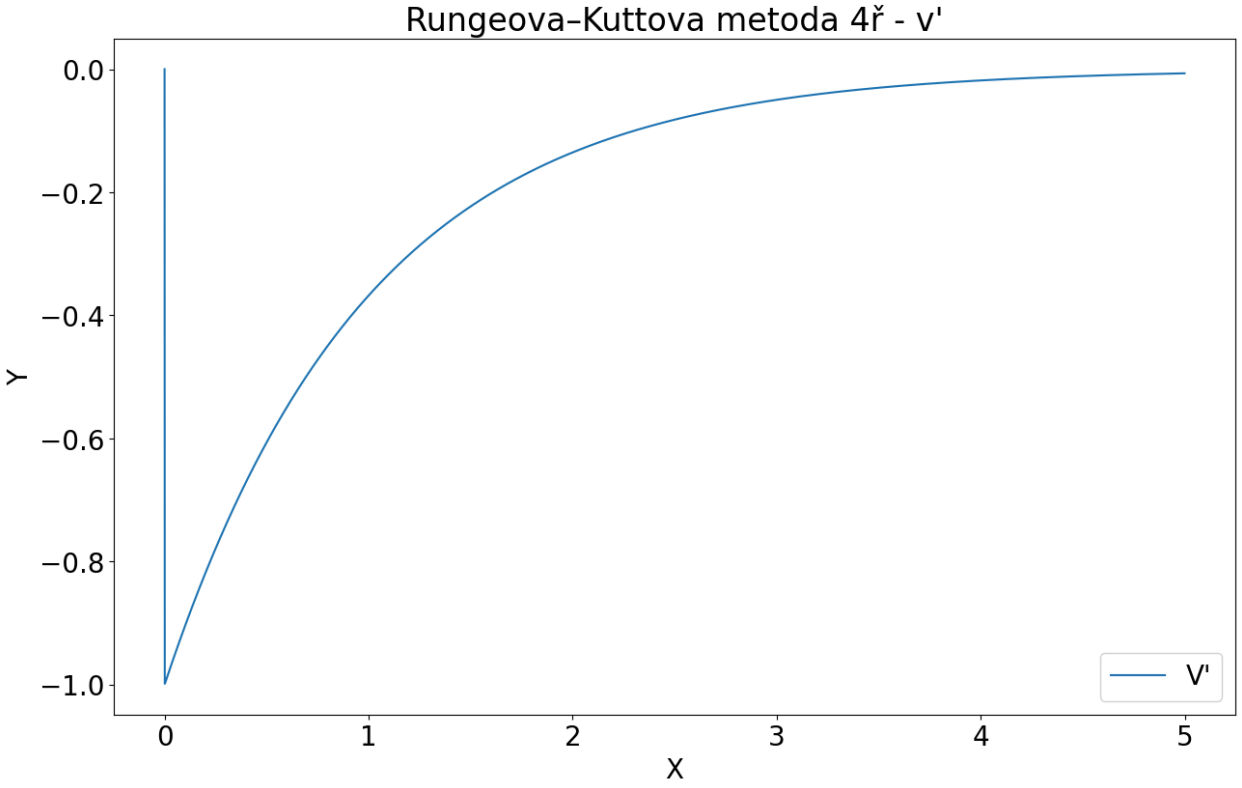
$$k_4 = h * f_n(u_n + hk_3,\ v_n + hk_3)$$

5. Aktualizace $u_{n+1},\ v_{n+1}$:

$$u_{n+1} = u_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad v_{n+1} = v_n + \tfrac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

Výsledky:


Rungeova–Kuttova metoda 4ř - u'
U'
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
Y
0
1
2
3
4
5
X


Rungeova–Kuttova metoda 4ř - v'
V'
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
Y
0
1
2
3
4
5
X

2. Eulerovou implicitní metodou řešte soustavu obyčejných diferenciálních rovnic::

$$u' = 998u + 1998v \qquad v' = -999u - 1999v$$

s počátečními podmínkami: $u(0) = 1,\ v(0) = 0$. Pozn.Eulerova implicitní metoda vyžaduje inverzi matice.

Princip implicitního algoritmu pomocí Eulerovy metody

- Eulerova metoda (explicitní):

Pro jednoduchou rovnici $y' = -cy$, kde $c > 0$, máme funkci $f(x, y) = -cy$

Explicitní Eulerův krok vypadal takto:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i) = y_i + h(-cy_i) = y_i(1 - hc),$$

Metoda je podmíněně stabilní pro $h < \frac{2}{c}$

- Eulerova metoda (implicitní)

Pro stejnou rovnici: $y' = -cy$

Výpočetní krok:

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_{i+1}, y_{i+1}) = y_i - hcy_{i+1}$$

$$y_i = y_{i+1}(1 + hc) \quad -> y_{i+1} = \frac{y_i}{1+hc},$$

Metoda je absolutně stabilní.

V podstatě, explicitní metoda předpokládá, že víme, jak se věci vyvíjejí na začátku kroku, zatímco implicitní metoda se snaží uhádnout, jaké budou na konci kroku, a pak se pokusí toto odhadnutí korigovat, aby to odpovídalo. Implicitní metoda může být náročnější na výpočet, ale je obvykle stabilnější, což je užitečné zejména u složitějších nebo citlivějších problémů, jako jsou stiff rovnice.

Eulerova implicitní schéma pro stiff rovnice s konstantními koeficienty

V případě, že se jedná o systém rovnic, můžeme použít implicitní schéma, kde lineární aproximace funkce f vede k výpočtu pomocí Jacobiovy matice(skládá se z prvních derivací funkce f podle proměnných systému).

Pro funkci f ve tvaru:

$$f(u,v) = \begin{pmatrix} 998u & 1998v \\ -999u & -1999v \end{pmatrix}$$

Jacobiova matice $\bar{J}$:

$$J = \begin{pmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{pmatrix}$$

Semi-implicitní metoda

V semi-implicitní metodě se používá lineární aproximace funkce f přes Jacobiovu matici J pro výpočet nové hodnoty y_{i+1}:

$$y_{i+1} = y_i + hJ^{-1} f_i$$

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + h \begin{bmatrix} 998 & 1998 \\ -999 & -1999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix}$$

Přeuspořádáním dostaneme:

$$(I - hJ) \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}$$

kde I - jednotková matice, J- Jacobiova matice.

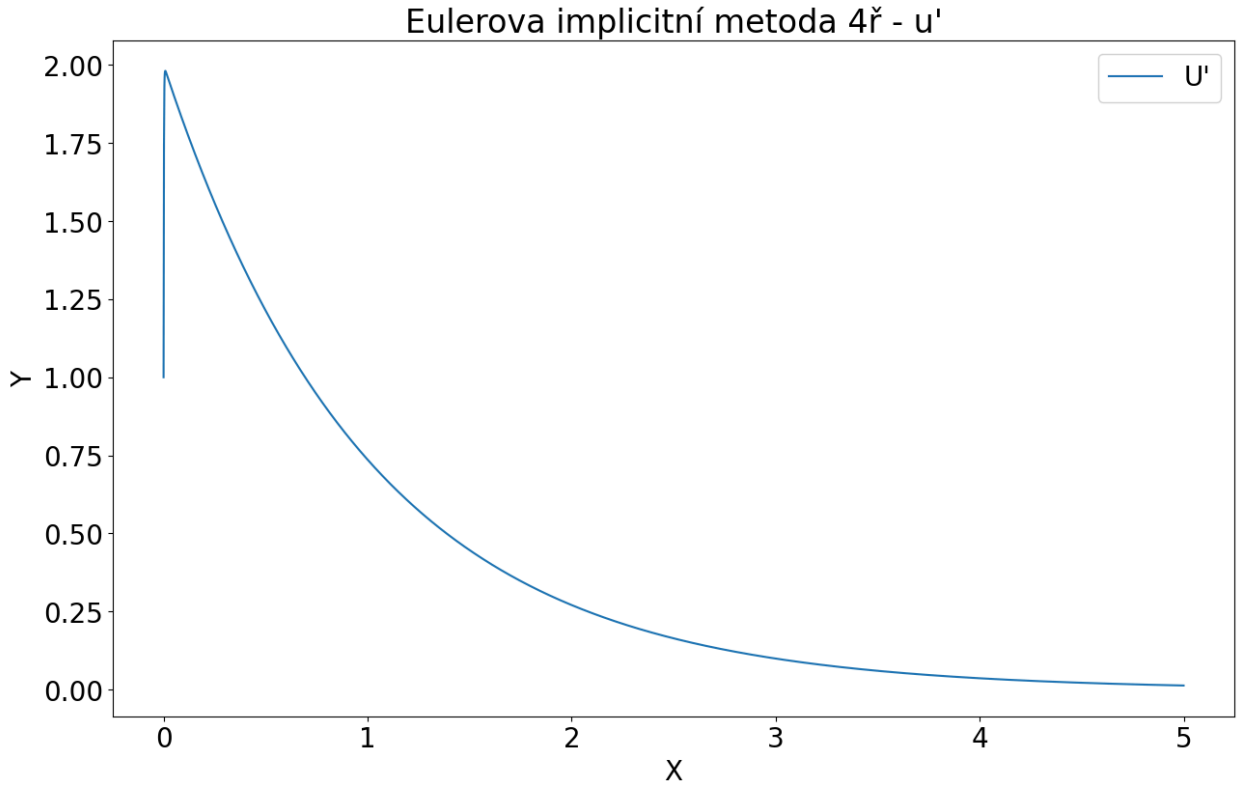
Pro získání u_{n+1} v_{n+1} musíme nejprve invertovat matici $I - hJ$:

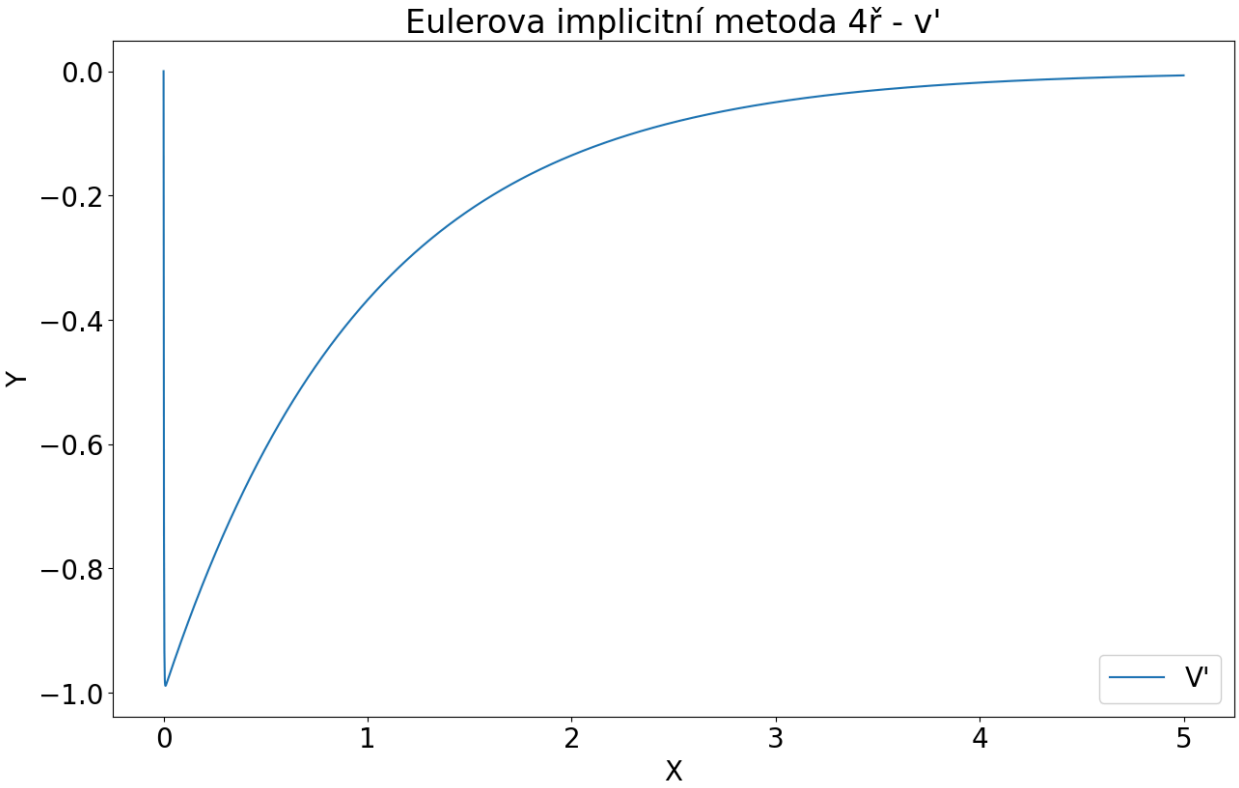
$$(I - hJ)^{-1} = \frac{1}{\det(I - hJ)} \begin{bmatrix} 1 + 1999h & -1998h \\ 999h & 1 - 998h \end{bmatrix},$$

kde:

$$\det(I - hJ) = (1 - 998h)(1 + 1999h) + 1998h \cdot 999h$$

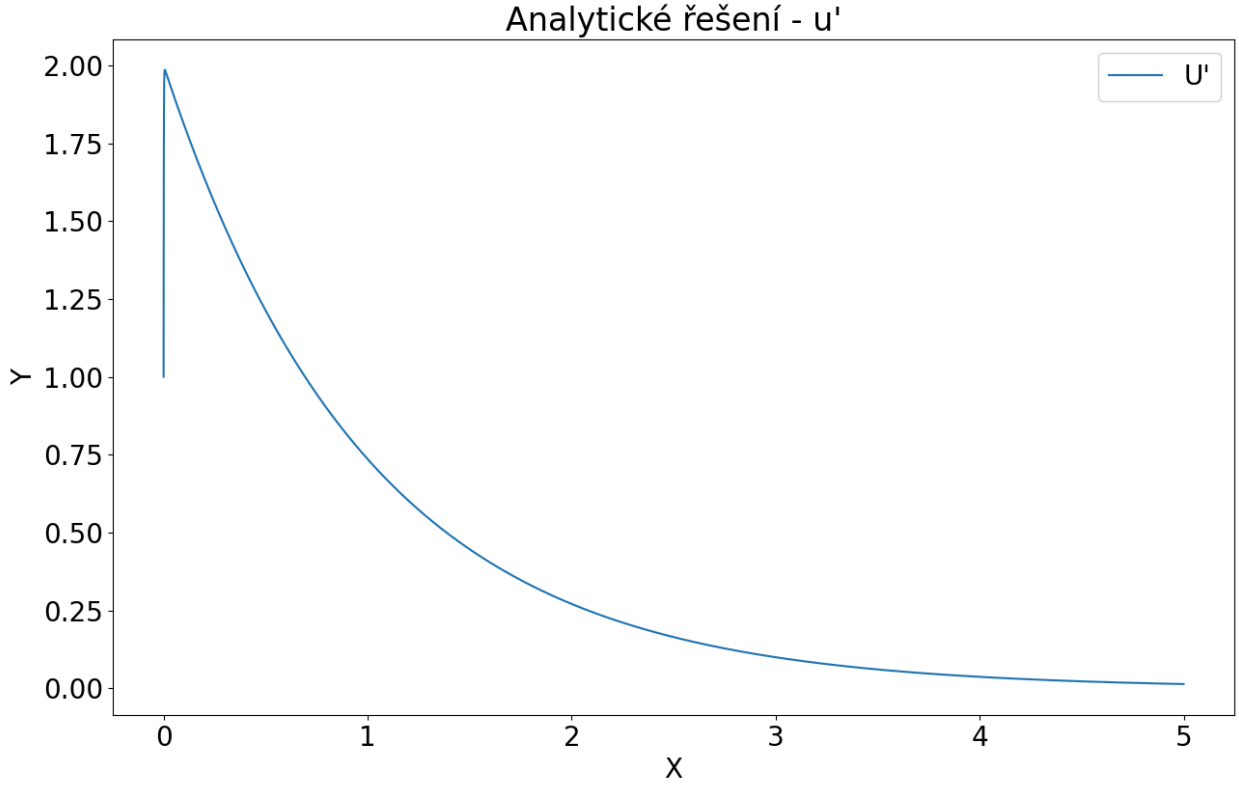
Výsledky:

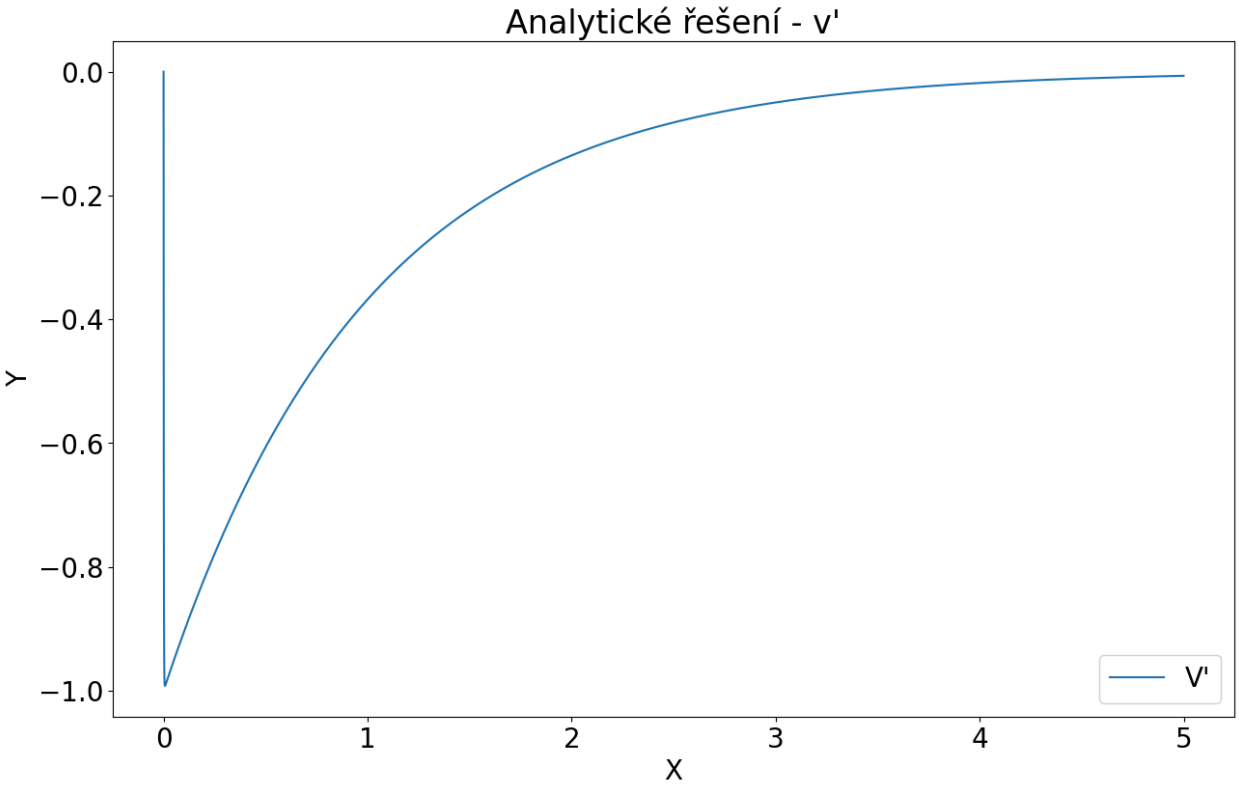

Eulerova implicitní metoda 4ř - u'
U'
2.00
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0.00
Y
0
1
2
3
4
5
X

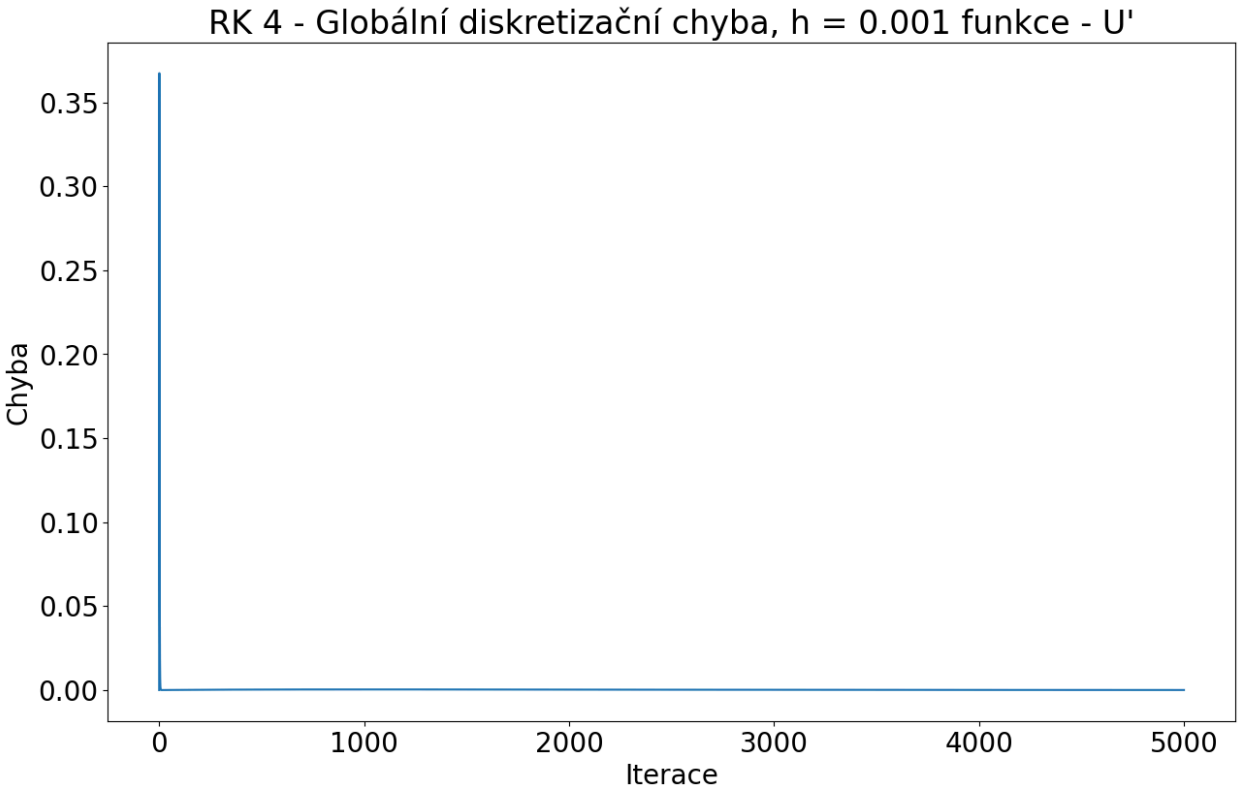

Eulerova implicitní metoda 4ř - v'
V'
0.0
−0.2
−0.4
−0.6
−0.8
−1.0
Y
0
1
2
3
4
5
X

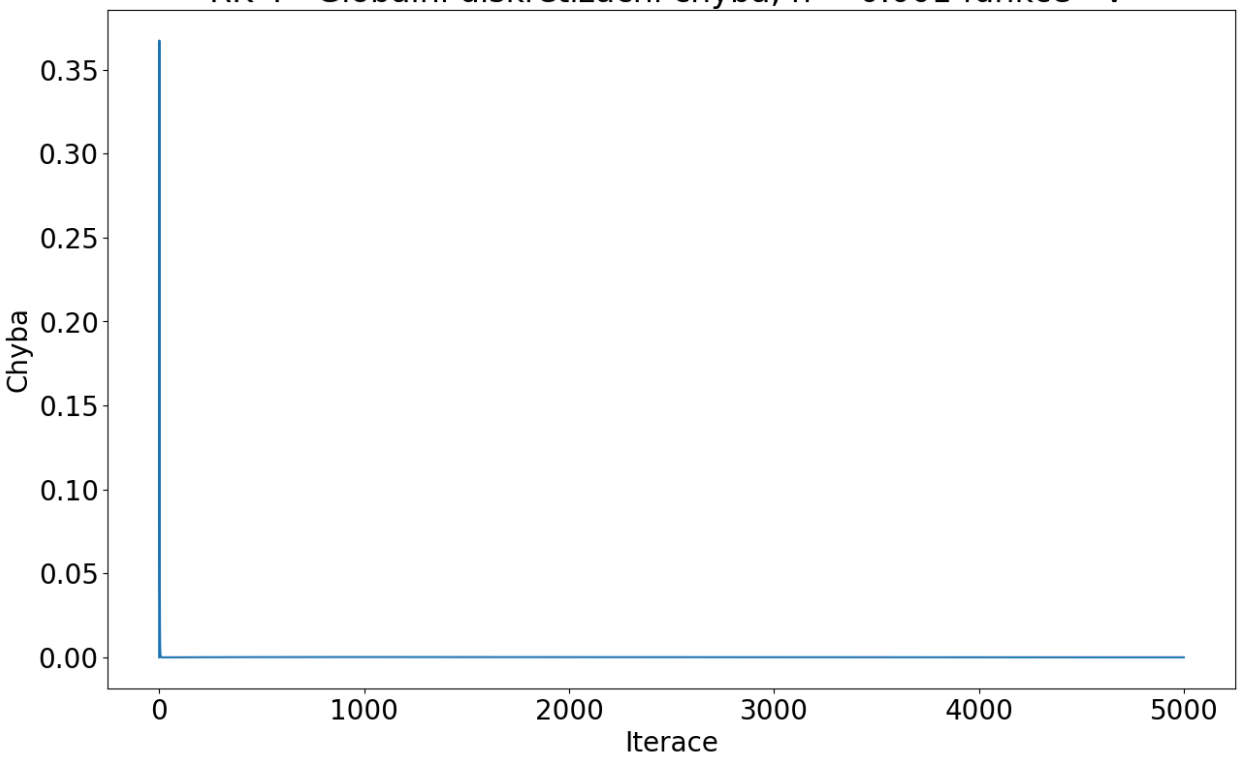
3. Numerické řešení porovnejte s analytickým řešením:

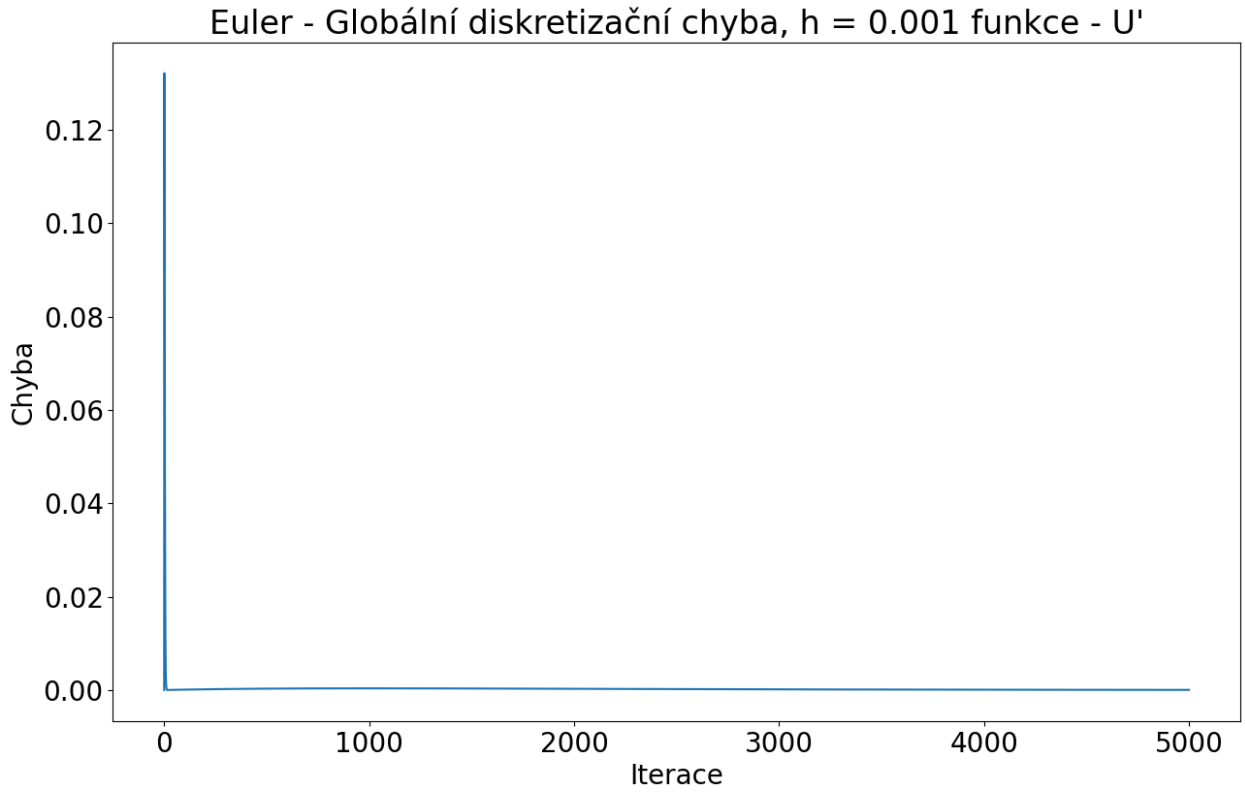
$u = 2exp(-x) - exp(-1000x) \quad v = -exp(-x) + exp(-1000x)$

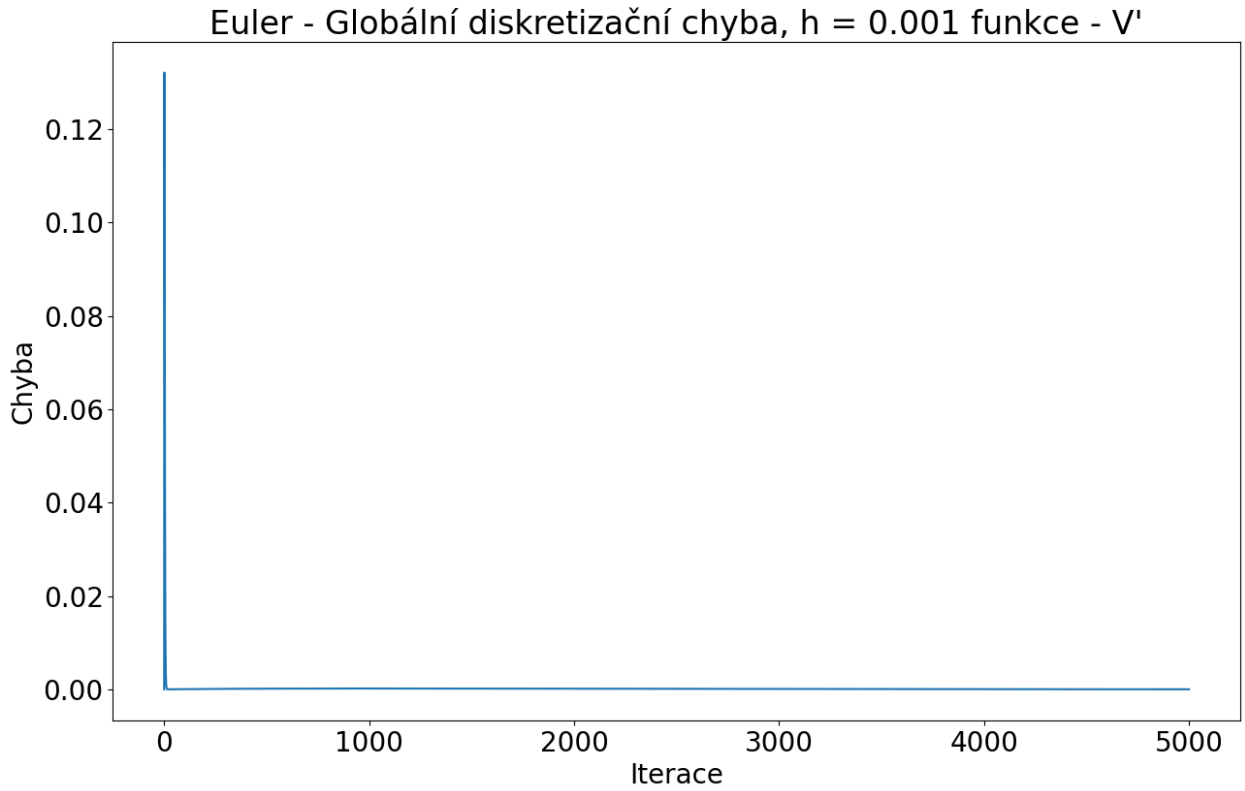





RK 4 - Globální diskretizační chyba, h = 0.001 funkce - U'
Chyba
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
1000
2000
3000
4000
5000
Iterace


RK 4 - Globální diskretizační chyba, h = 0.001 funkce - V'
Chyba
0.35
0.30
0.25
0.20
0.15
0.10
0.05
0.00
0
1000
2000
3000
4000
5000
Iterace


Euler - Globální diskretizační chyba, h = 0.001 funkce - U'
Chyba
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
1000
2000
3000
4000
5000
Iterace


Euler - Globální diskretizační chyba, h = 0.001 funkce - V'
Chyba
0.12
0.10
0.08
0.06
0.04
0.02
0.00
0
1000
2000
3000
4000
5000
Iterace

E. Numerické řešení Dirichletovy úlohy pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu metodou sítí

1. Metodou sítí řešte Dirichletovu úlohu pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu:
   $x^2\,y'' - 2xy' - 4y = 6x$, s okrajovými podmínkami: $y(1) = 0,\ y(2) = -1.5$

Okrajová úloha:

Okrajová úloha (Boundary Value Problem - BVP) je typ diferenciální rovnice, kde hledáme řešení, které splňuje specifické podmínky na určitých "okrajích" intervalu, v našem případě na bodech $x = 1$ a $x = 2$. Tyto podmínky pomáhají jednoznačně definovat řešení, které by bylo jinak neurčité pouze s diferenciální rovnicí.

Metoda sítí:

Metoda sítí, známá také jako metoda konečných diferencí, je numerický postup, který převádí parciální diferenciální rovnice na systém algebraických rovnic. Tento přístup je založen na diskretizaci prostoru, což znamená rozdělení oblasti na konečný počet malých oblastí, obvykle obdélníky nebo čtverce.

Dirichletova úloha:

Dirichletova úloha je speciální typ okrajové úlohy, kde jsou okrajové podmínky definovány formou hodnot funkce v okrajových bodech. V našem případě jsou hodnoty funkce y přesně specifikovány pro $x = 1$ a $x = 2$.

Postup řešení:

1. Formulace diferenciální rovnice druhého řádu:

$$x^2\,y'' - 2xy' - 4y = 6x$$

   Převedeme ji do samoadjungovaného tvaru:

$$y'' - \frac{2}{x}y' - \frac{4}{x^2}y = \frac{6}{x},\ \text{kde}$$

$$p(x) = \frac{1}{x^2},\quad q(x) = \frac{4}{x^4},\quad f(x) = -\frac{6}{x^3}$$

$$-\left(\frac{1}{x^2}y'\right)' + \frac{4}{x^4}y = -\frac{6}{x^3}$$

2. Diskretizace intervalu:

Interval $[1, 2]$ rozdělíme na n diskrétních bodů $x_a,\ x_1,\ x_2 \ldots,\ x_n$, kde $x_a = 1$ a $x_n = 2$.

$x_i = a + ih \quad (i = 0, 1, \ldots, n)$

Velikost kroku h je definována jako $h = \frac{b-a}{n}$

3. Aproximace derivací:

Pro aproximaci druhé derivace y'' v bodě x_i použijeme centrální diferenční schéma:

$y_i'' \simeq \frac{y_{i-1}-2y_i+y_{y+1}}{h^2}$

Pro první derivaci y' použijeme:

$y_i' \simeq \frac{y_{i+1}-y_{i-1}}{2h}$

Značení: $p_i = p(x_i),\ \ p_{i\pm\frac{1}{2}} = p(x_i \pm \frac{h}{2}),\ \ q_i = q(x_i),\ \ f_i = f(x_i)$

4. Sestavení soustavy rovnic:

Pro vnitřní body $x_i\ (kde\ i = 2, \dots, n-1)$ dosadíme aproximace do diferenciální rovnice a získáme lineární rovnice:

$$-p_{i-\frac{1}{2}}\ y_{i-1} + (p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q_i)\ y_i - p_{i+\frac{1}{2}}\ y_{i+1} = h^2 f_i$$

$$y_1 = 0,\ \ y_n = -1.5$$

5. Sestavení matice A a vektoru $\overline{g}$:

Matice A:

- Diagonální prvky $A[i,i]$ Pro každý vnitřní bod x_i, jsou dány jako:

$$A[i,i] = p_{i-\frac{1}{2}} + p_{i+\frac{1}{2}} + h^2 q_i$$

- Nediagonální prvky $A[i,i-1]$ a $A[i,i+1]$ (přímo vedle hlavní diagonály (nad a pod)). Jsou definovány jako:

$$A[i,i-1] = -p_{i-\frac{1}{2}} \text{ a } A[i,i+1] = -p_{i+\frac{3}{2}},\ \ i = [0, \dots, n-1]$$

! Všechny prvky mimo hlavní diagonálu a dvě sousední diagonály jsou nulové.

$$A = \begin{bmatrix} p_{\frac{1}{2}} + p_{\frac{3}{2}} + h^2 q_1 & -p_{\frac{3}{2}} & 0 & \cdots \\ -p_{\frac{3}{2}} & p_{\frac{3}{2}} + p_{\frac{5}{2}} + h^2 q_2 & 0 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & \cdots & -p_{n-\frac{3}{2}} & p_{n-\frac{3}{2}} + p_{n-\frac{1}{2}} + h^2 q_{n-1} \end{bmatrix}$$

Vektor $\overline{g}$:

Je to pravá strana maticové rovnice, která obsahuje hodnoty závislé na funkci $f(x)$ a okrajových podmínkách:

Pro první a poslední prvek vektoru $\overline{g}$ musíme zahrnout okrajové podmínky $\alpha = 0$ a $\beta = -1.5$:

$$g[1] = h^2 f_1 + p_{\frac{1}{2}}\alpha \text{ a } g[n] = h^2 f_{n-1} + p_{n-\frac{1}{2}}\beta \ \ a\ g[i] = h^2 f_i\ [2, \dots, n-1],$$

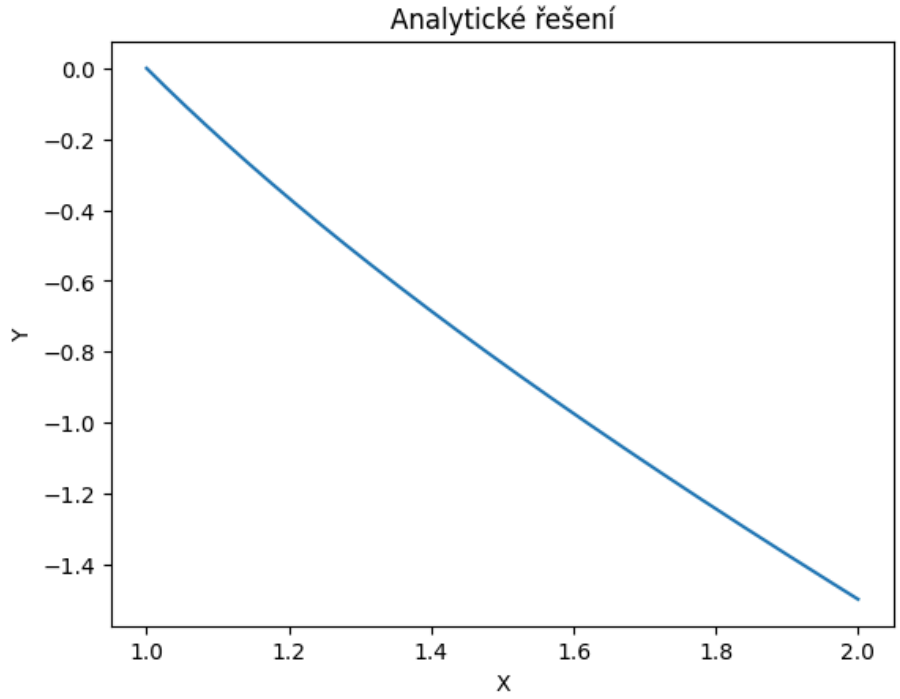
kde

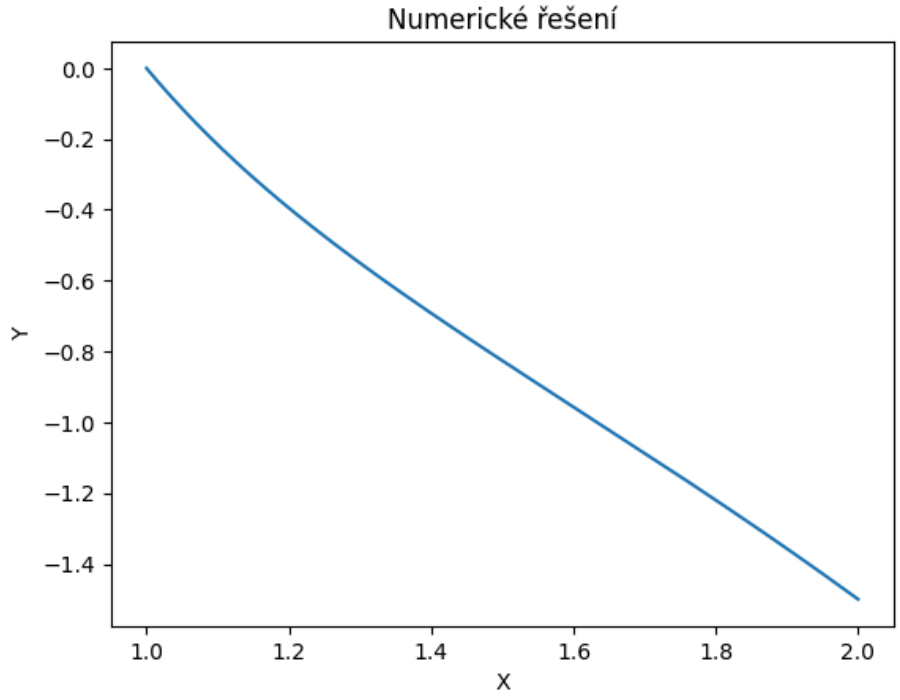
$$f_1 = f(x_0 + h)\ \ p_{\frac{1}{2}} = p(x_0 + \frac{h}{2})\ f_{n-1} = f(x_n - h)\ p_{n-\frac{1}{2}} = p(x_n - \frac{h}{2})$$

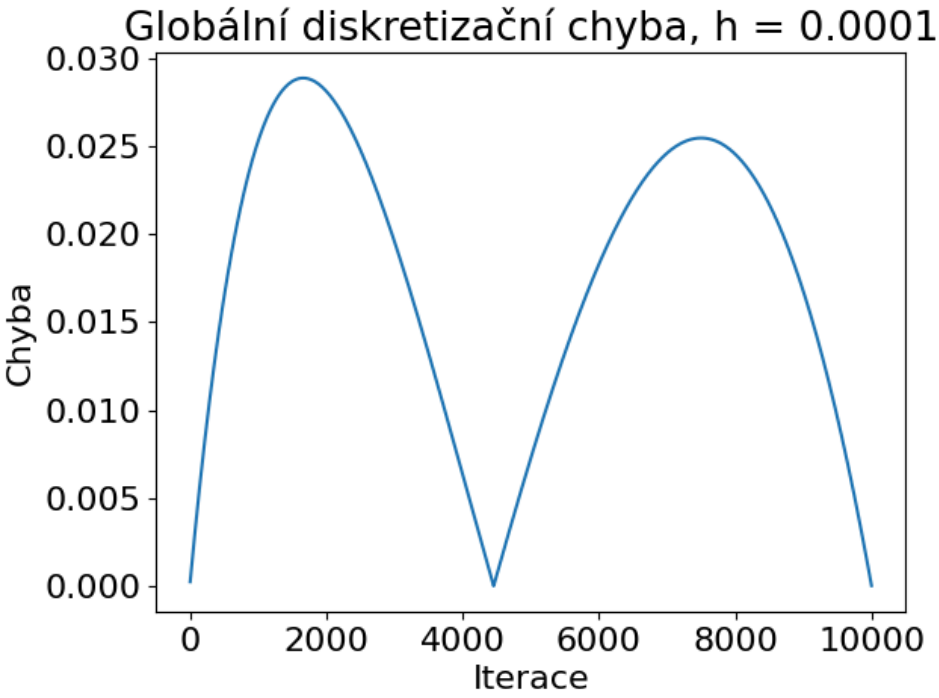
6. Řešení soustavy :

Převádíme problém na systém lineárních rovnic, které můžeme zapsat ve formě maticové rovnice: $A\overline{y} = \overline{g}$.

Výsledky:






Globální diskretizační chyba, h = 0.0001
0.030
0.025
0.020
0.015
0.010
0.005
0.000
Chyba
0
2000
4000
6000
8000
10000
Iterace

F. Metoda střelby

1. Metodou střelby řešte Dirichletovu úlohu pro obyčejnou lineární diferenciální rovnici 2. řádu: $x^2\,y'' - 2xy' - 4y = 6x$, s okrajovými podmínkami: $y(1) = 0,\ y(2) = -1.5$

Uvod:

Metoda střelby - transformuje původní problém s okrajovými podmínkami na problém s počátečními podmínkami.
Základní princip metody spočívá v "střelbě" z jednoho okraje intervalu a úpravě střelby tak, aby byly splněny okrajové podmínky na druhém konci.

1. Transformace rovnice:

Nejprve převedeme rovnici druhého řádu na systém dvou rovnic prvního řádu.

$$x^2\,y'' - 2xy' - 4y = 6x,$$

Zavedeme $y = y_1$, a $y' = y_2$ čímž dostáváme:

$$y_1' = y_2$$
$$y_2' = \frac{2}{x}y_2 + \frac{4}{x^2}y_1 + \frac{6}{x}$$

2. Nastavení počátečních podmínek:

Začneme s počáteční hodnotou y_1: $y(1) = 0$ a zvolíme počáteční hodnotu y_2: $y'(1) = s$ jako volný parametr, který budeme vybírat.

3. Numerický výpočet:

Použijeme numerickou metodu (například Runge-Kutta 4. řádu) pro řešení systému rovnic $x_0 = 1,\ x_n = 2$

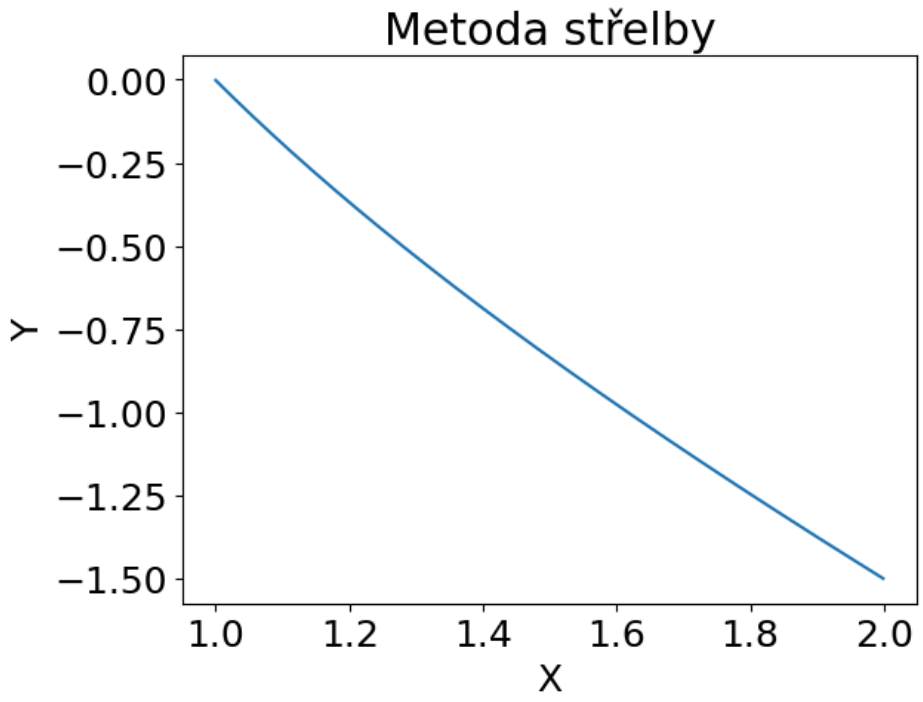
4. Korekce střelby:

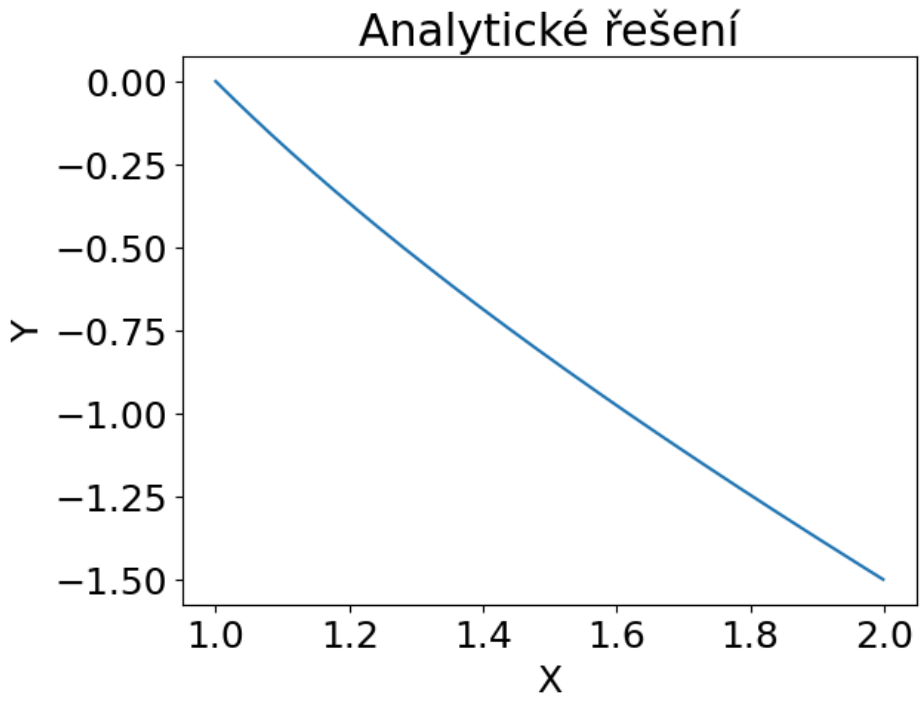
Hodnotu s $(y'(1))$ upravujeme iterativ ně tak, aby hodnota $y_1(2)$ odpovídala okrajové podmínce $y(2) = -1.5,\ x = 2$

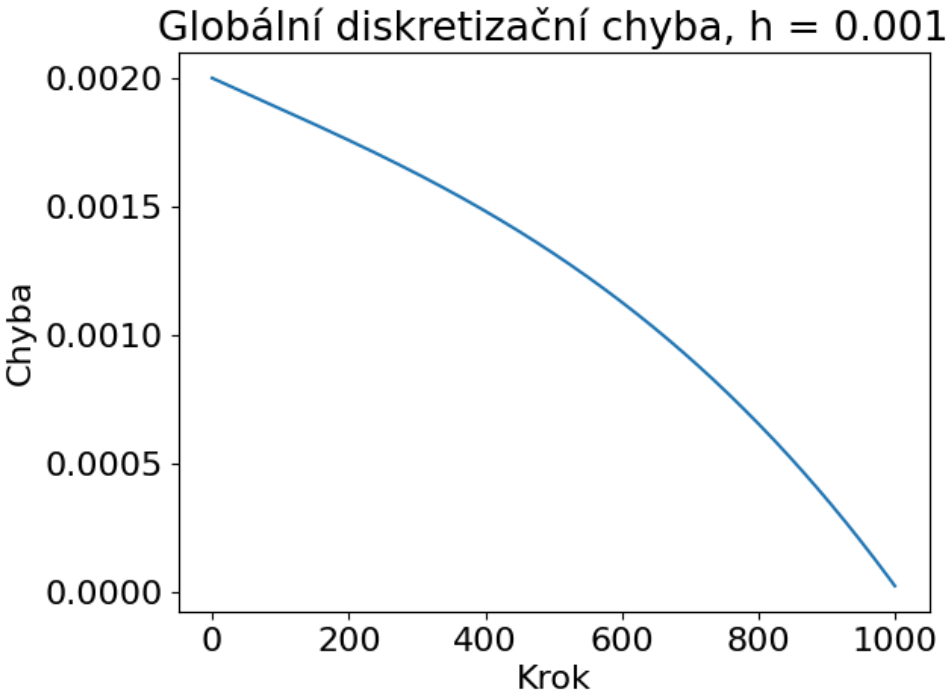
5. Vyhodnocení a opakování:

Postup opakujeme, dokud nedosáhneme požadované přesnosti, mezi $y_1(2)$ a -1.5, například 10^{-5}

Výsledky:


Metoda střelby
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
Y
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
X


Analytické řešení
0.00
−0.25
−0.50
−0.75
−1.00
−1.25
−1.50
Y
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
2.0
X


Globální diskretizační chyba, h = 0.001
0.0020
0.0015
0.0010
0.0005
0.0000
Chyba
0
200
400
600
800
1000
Krok