UNIVERZITA J. E. PURKYNĚ V ÚSTÍ NAD LABEM
Přírodovědecká fakulta

Numerická matematika II

Výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů

Gadermeteva Anastasiia

7. Březen 2024

Student: PMVT F22000

A. Matice setrvačnosti a hlavní momenty setrvačnosti

Těleso je tvořeno třemi kovovými koulemi o hmotnostech m1=1 kg, m2=2 kg a m3=3 kg navzájem spojenými do tvaru trojúhelníku. Vzdálenost koulí 1-2=1 m, vzdálenost koulí 2-3=0.5 m a úhel 1-2-3=120o.

Spočtěte střed hmotnosti tohoto tělesa.
Spočtěte prvky matice setrvačnosti vzhledem ke středu hmotnosti.
Spočtěte hlavní momenty setrvačnosti.

B. Jacobiho metoda pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů symetrické matice

Napište program pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů symetrické matice Jacobiho metodou.
Programem vypočtěte vlastní čísla a vlastní vektory symetrické matice:

$$\begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Výpočet Středu Hmotnosti

Střed hmotnosti (těžiště) systému je vypočítán jako vážený průměr poloh všech hmotných bodů, kde váhami jsou jejich hmotnosti:

$$\bar{r}_{střed} = \frac{m_1\bar{r}_1 + m_2\bar{r}_2 + m_3\bar{r}_3}{m_1+m_2+m_3}$$

kde $\bar{r}_1$ $\bar{r}_2$ $\bar{r}_3$ jsou polohové vektory jednotlivých koulí a m_1 m_2 m_3 jsou jejich hmotnosti.

Výpočet prvků matice setrvačnosti:

Matice setrvačnosti I pro těleso vzhledem ke středu hmotnosti je definována jako:

$$\begin{bmatrix} I_x & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z \end{bmatrix}$$

kde I_x I_y I_z jsou momenty setrvačnosti vzhledem k osám x y z

D_{xy} D_{xz} D_{yz} jsou deviační momenty setrvačnosti.

Tyto prvky se vypočítají pomocí poloh r'_i hmotnostních bodů převedených do souřadnicového systému se středem v těžišti.

Výpočet hlavních momentů setrvačnosti:

Hlavní momenty setrvačnosti jsou vlastními čísly matice setrvačnosti I

K jejich nalezení se řeší charakteristická rovnice $det(I - \lambda E) = 0$, kde E je jednotková matice a λ jsou hledané hlavní momenty setrvačnosti.

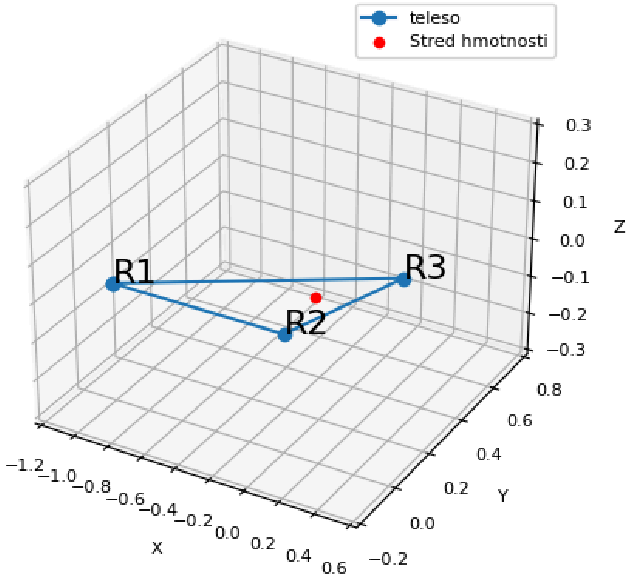
Sarrusovo pravidlo pro výpočet determinantu 3x3 matice uvažme matici $I - \lambda E$ ve tvaru:

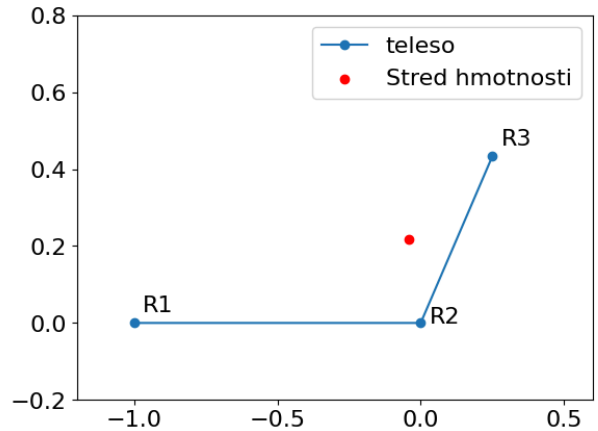
$$\begin{bmatrix} I_x - \lambda & -D_{xy} & -D_{xz} \\ -D_{xy} & I_y - \lambda & -D_{yz} \\ -D_{xz} & -D_{yz} & I_z - \lambda \end{bmatrix}$$

Pro nalezení hlavních momentů setrvačnosti, použít kubickou rovnici získanou z výrazu pro determinant.

Postup řešení:

Nejprve jsem vypočítala střed hmotnosti tělesa. Vizualizací středu hmotnosti ve 2D a 3D prostoru:





střed hmotnosti = [-0.04166667, 0.21650635, 0.0]

Následně jsem určila prvky matice setrvačnosti I vzhledem ke středu hmotnosti, používající polohy r'_i hmotnostních bodů v systému s těžištěm jako referenčním bodem.

$$\begin{bmatrix} 0.2812 & -0.3789 & -0.0 \\ -0.3789 & 1.1771 & -0.0 \\ -0.0 & -0.0 & 1.4583 \end{bmatrix}$$

Pomocí kubické rovnice jsem našla hlavní momenty setrvačnosti:

Hlavní momenty setrvačnosti:

$I_x = 1.45833326797898$

$I_y = 1.315838598411748$

$I_z = 0.142494669567234$

Jacobiho metoda je iterační algoritmus pro výpočet vlastních čísel a vlastních vektorů symetrické matice.

Úhel φ rotace je vypočítán tak, aby nové prvky na pozicích $p\ q$ a $q\ p$ byly nulové po aplikaci rotace:

$$\varphi = \frac{1}{2} arctan(\frac{2a_{pq}}{a_{pp} - a_{qq}})$$

kde a_{pq} prvek matice na pozici $p\ q$, a_{pp} a_{qq} jsou prvky na diagonálních pozicích $p\ p$ a $q\ q$

Určení kosinusu a sinusu úhlu φ, které použijeme při aplikaci rotace na matici:

$$z = cos(\varphi) \quad s = sin(\varphi)$$

$$z = \sqrt{\frac{\nu + |M|}{2\nu}} \quad s = \frac{sgn(M)\ \omega}{2\ \nu\ c}, \text{ kde } \omega = -a_{rs} \quad M = \frac{a_{rr} - a_{ss}}{s} \quad \nu = \sqrt{\omega^2 + M^2}$$

kde a_{rs} - největší nediagonální prvek matice, kde r a s jsou řádek a sloupec odpovídajících největšímu nedigonálnímu prvku

Aplikujete rotaci na matici následujícím způsobem:

$$a_{ri}^{(k+1)} = a_{ir}^{(k+1)} = c\,a_{ir}^{(k)} - z\,a_{is}^{(k)} \qquad a_{si}^{(k+1)} = a_{is}^{(k+1)} = c\,a_{is}^{(k)} + z\,a_{ir}^{(k)}$$

pro $(i = 1,\ \dots\ , n;\ i \neq r, s)$

$$a_{rr}^{(k+1)} = c^2\,a_{rr}^{(k)} - z^2\,a_{ss}^{(k)} - 2cz\,a_{rs}^{(k)} \qquad a_{ss}^{(k+1)} = c^2\,a_{ss}^{(k)} - z^2\,a_{rr}^{(k)} + 2cz\,a_{rs}^{(k)}$$

Po rotace, největší nedigonální prvky budou nulové: $a_{sr}^{(k+1)} = a_{rs}^{(k+1)} = 0$

Konstrukce akumulované matice T:

Inicializace T jako jednotkovou matici a nastavení jejích prvků $T_{rr} = T_{ss} = c \quad T_{rs} = -T_{sr} = -z$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} c & -z & 0 \\ z & c & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ukázkový příklad pro pozice a_{rs}, kde r=0, s=1

Aktualizace akumulované matice Q:

Pokud je to první iterace $Q = T_{copy}$

V dalších iteracích se aktualizuje jako $Q = R * T$, kde $R = Q_{copy}$ z předchozího kroku před aktualizací.

Postup řešení:

Nejprve definujeme vstupní symetrickou matici.

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

Iterace:

Vybereme prvek mimo diagonálu s maximální absolutní hodnotou, který budeme rotovat.

Vypočítáme úhel pro rotaci tak, aby se vybraný prvek po rotaci převedl na nulu.

Aplikujeme rotaci na matici i na akumulovanou matici rotací (pro výpočet vlastních vektorů).

Iterujeme, dokud nejsou všechny prvky mimo diagonálu dostatečně malé nebo dokud nebude dosažen maximalní počet iterace.

Vlastní čísla jsou na diagonále finální matice a vlastní vektory získáme z akumulované matice rotací.

Vlastní čísla: $[2.9927201\ 5.871053\ \ 2.1362262]$

Vlastní vektory:

$[[\ 0.54535635\ \ -0.40334227\ \ -0.73477988]$

$[\ 0.55321533\ \ 0.83176819\ \ -0.04598349]$

$[\ 0.62971356\ \ -0.38141407\ \ 0.67674525]]$