



Protokol k Šikmému Vrhů

Gadermeteva Anastasiia

6. října 2023

Student: PMVT F22000

Abstract

Tato práce se zaměřuje na analýzu šikmého vrhu v pozemských podmínkách s důrazem na použití numerických metod pro řešení pohybových rovnic.

Contents

1	Úvod (Formulace Problému)	2
2	Model	2
2.1	Fyzikální Model Šikmého Vrhů	2
2.2	Analytická Metoda	2
2.3	Matematické Rovnice Pohybu	3
3	Řešení Modelu	3
3.1	Numerická Metoda	3
3.2	Elementární Metody Numerického Řešení Pohybových Rovnic . .	3
3.3	Volba Metody AVR pro Výpočty	4
3.3.1	Seznam Rovnic pro Výpočet s Odporem Vzduchu	4
3.3.2	Bez Odporu Vzduchu	4
4	Výsledky a Diskuze	5
4.1	Prezentace Výsledků Simulací pro Různé Úhly a Počáteční Rychlosti	5
4.2	Diskuse o Rozdílích mezi Simulacemi a Teoretickými Trajektoriemi	6
5	Závěr	6
6	Reference	7

1 Úvod (Formulace Problému)

Cílem tohoto protokolu je prozkoumat a analyzovat šikmý vrh v pozemských podmínkách. Mějme odpalovací zařízení, u kterého můžeme nastavit úhel odpálení α a počáteční rychlost tělesa v_0 . Projektil je tvaru koule o poloměru r a má hmotnost m . Porovnáme výsledky simulací pro několik úhlů a počátečních rychlostí s teoretickými trajektoriemi ve vakuu s homogenním gravitačním polem. Přesnost matematického modelu fyzikálního děje a rychlost výpočtu jsou značně závislé na použité numerické metodě.

2 Model

Šikmý vrh je pohyb tělesa vystřeleného pod určitým úhlem vzhůru nebo dolů v gravitačním poli. Pohyb tělesa je ovlivněn gravitací a odporovou silou vzduchu. Těleso je vystřeleno s počáteční rychlostí v_0 pod úhlem θ k horizontální ose.

2.1 Fyzikální Model Šikmého Vrhů

Pro analýzu šikmého vrhu v pozemských podmínkách se berou v úvahu následující hlavní síly: Gravitační síla - síla působící svisle dolů:

$$F = mg$$

m - hmotnost střely, tělesa g - zrychlení volného pádu.

Síla odporu vzduchu: Tato síla závisí na rychlosti tělesa a jejím tvaru. Pro vysoké rychlosti se používá vzorec

$$F = -\frac{1}{2}CS\rho v^2$$

C - koeficient odporu, S - průřezová plocha,
 ρ - hustota vzduchu, v - rychlost tělesa.

2.2 Analytická Metoda

Analytická metoda spočívá v tom, že nejprve vyřešíme pohybovou rovnici pomocí prostředků matematické analýzy. Nalezneme explicitní funkce $r = r(t)$ a $v = v(t)$, které jsou řešením pohybové rovnice. Postupným dosazováním členů z posloupnosti $\{t_i\}$ do funkčních vzorců vypočítáme jednotlivé členy posloupností $\{r(t_i)\}$ a $\{v(t_i)\}$.

2.3 Matematické Rovnice Pohybu

Matematický popis šikmého vrhu zahrnuje následující rovnice pohybu:

Vertikální pohyb:

$$y(t) = y_0 + v_0 \sin(\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

Horizontální pohyb:

$$x(t) = x_0 + v_0 \cos(\theta)t \quad (2)$$

Kde:

$y(t)$ je vertikální poloha tělesa v čase t

y_0 je počáteční vertikální poloha

v_0 je počáteční rychlost tělesa

g je gravitační zrychlení (přibližně 9.81 m/s^2).

$x(t)$ je horizontální poloha tělesa v čase t

x_0 je počáteční horizontální poloha

θ je úhel výstřelu,

3 Řešení Modelu

3.1 Numerická Metoda

Při řešení pohybových rovnic šikmého vrhu s danými počátečními podmínkami využíváme numerické metody. Tyto metody se zakládají na použití rekurentních vzorců pro přesné určení polohy a rychlosti tělesa v čase. Hlavním cílem numerického řešení je nalezení posloupnosti časů $\{t_i\}$ stanovení posloupnosti příslušných polohových vektorů $\{r(t_i)\}$, případně i posloupnosti okamžitých rychlostí $\{v(t_i)\}$, které co nejpresněji aproximují skutečné hodnoty získané analytickým řešením úlohy.

Získané posloupnosti pak dále využíváme při grafickém znázornění pohybu, kdy buď zobrazujeme v určitém měřítku vztažnou soustavu a jednotlivé polohy hmotného bodu, nebo sestavujeme grafy znázorňující, jak se mění v závislosti na čase souřadnice polohového vektoru, případně i vektorů rychlosti a zrychlení, nebo jejich velikosti.

3.2 Elementární Metody Numerického Řešení Pohybových Rovnic

K řešení pohybových rovnic šikmého vrhu spolu s pohybovou rovnicí upravenou na tvar $a = \frac{f(t,v,r)}{m}$ používáme elementární numerické metody. Tyto metody používají rekurentní vztahy pro určení následujících hodnot polohy (r_i) a rychlosti (v_i) v čase t_{i+1} :

$$v_{i+1} = v_i + ah, \quad (3)$$

$$r_{i+1} = r_i + v_i h, \quad (4)$$

$$t_{i+1} = t_i + h, \quad (5)$$

kde h je krok času. Existují tři možné pořadí kroků v těchto metodách, nazývané ARV, AVR a RAV. Pro tento výpočet byla zvolena metoda AVR.

3.3 Volba Metody AVR pro Výpočty

Metoda AVR je v realizaci poměrně jednoduchá a efektivní z hlediska výpočtů. Poskytuje dostatečnou přesnost pro mnoho praktických aplikací, zejména v situacích, kdy přesná analytická řešení jsou obtížně dostupná nebo nemožná. Poskytuje dobrý kompromis mezi přesností výsledků a výpočetním zatížením. To je obzvláště důležité, když je třeba modelovat trajektorie střel s různými počátečními podmínkami a v různých prostředích, což vyžaduje mnoho iterací a výpočtů.

3.3.1 Seznam Rovnic pro Výpočet s Odporem Vzduchu

Pro výpočet s odporem vzduchu můžeme použít následující rovnice:

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} \quad (6)$$

$$v_x = v_0 \cos(\alpha) \quad v_y = v_0 \sin(\alpha) \quad (7)$$

$$F_x = -\frac{1}{2}cs\rho vv_x \quad F_y = -\frac{1}{2}cs\rho vv_y \quad (8)$$

$$a_x = \frac{F_x}{m} \quad a_y = \frac{F_y}{m} - g \quad (9)$$

$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x \Delta t \quad v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y \Delta t \quad (10)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t \quad y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \Delta t \quad (11)$$

3.3.2 Bez Odporu Vzduchu

Pro výpočet bez odporu vzduchu používáme jednodušší rovnice:

$$v_x = v_0 \cos(\alpha) \quad v_y = v_0 \sin(\alpha) \quad (12)$$

$$a_x = 0 \quad a_y = -g \quad (13)$$

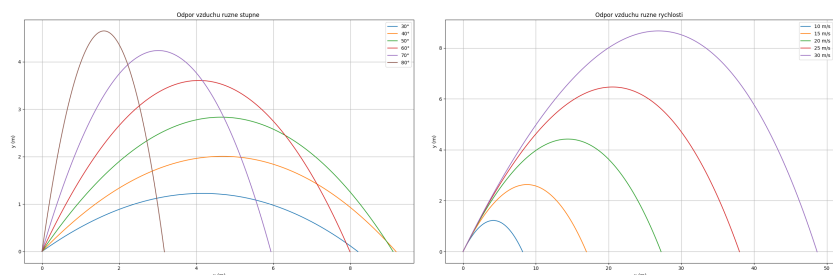
$$v_x(t + \Delta t) = v_x(t) + a_x \Delta t \quad v_y(t + \Delta t) = v_y(t) + a_y \Delta t \quad (14)$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + v_x(t) \Delta t \quad y(t + \Delta t) = y(t) + v_y(t) \Delta t \quad (15)$$

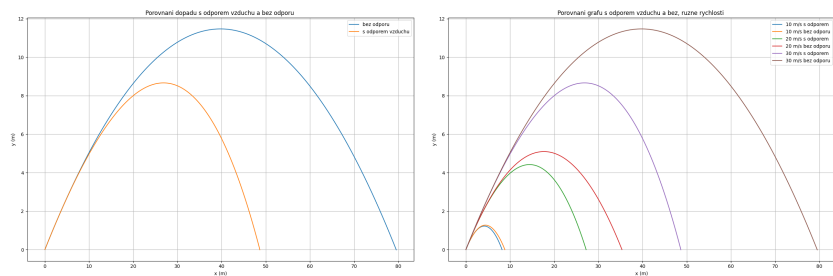
4 Výsledky a Diskuze

4.1 Prezentace Výsledků Simulací pro Různé Úhly a Počáteční Rychlosti

V této části provedeme simulace šikmého vrhu pro různé počáteční úhly a rychlosti a prezentujeme výsledky pomocí grafů.



(a) Pohyb koule s odporem vzduchu při různých úhlech (b) Pohyb koule s odporem vzduchu při různých počátečních rychlostech



(a) Pohyb koule s a bez odporu vzduchu (b) Pohyb koule s a bez odporu vzduchu při různých úhlech

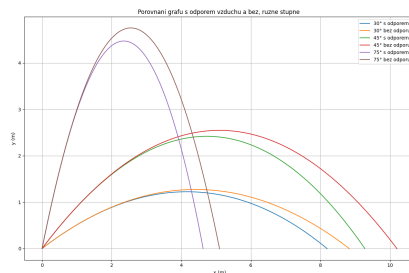


Figure 3: Pohyb koule s a bez odporu vzduchu při různých rychlostech

Výše uvedené grafy ilustrují různé aspekty šikmého vrhu a vliv odporu vzduchu na trajektorii koule. Tyto výsledky budou důležité pro lepší pochopení fyzikálního jevu a jeho aplikace v různých oborech.

4.2 Diskuse o Rozdílech mezi Simulacemi a Teoretickými Trajektoriemi

Provedla jsem simulace šikmého vrhu a porovnávala je s teoretickými trajektoriemi pro různé úhly startu a počáteční rychlosti. V průběhu diskuse jsme identifikovali několik hlavních rozdílů mezi simulacemi a teorií:

1. **Odpor vzduchu:** Do simulací jsem zahrнула odpor vzduchu, který má významný vliv na trajektorii koule. To kontrastuje s teoretickými trajektoriemi, které jsou obvykle vypracovány bez zohlednění tohoto faktoru.
2. **Ideální podmínky vs. skutečný svět:** Teoretické trajektorie jsou založeny na ideálních předpokladech, jako je homogenní gravitační pole a zanedbávání odporu vzduchu. Na druhou stranu simulace odrážejí skutečné podmínky na Zemi, kde mají tyto faktory vliv.
3. **Numerické aproximace:** Při provádění simulací jsem použila numerické metody k řešení pohybových rovnic. Tyto aproximace mohou vést k malým odchylkám od přesných řešení.
4. **Experimentální nejistoty:** Simulace mohou také obsahovat určité experimentální nejistoty, jako je volba počátečních podmínek a specifických hodnot konstant (např. koeficient odporu vzduchu), které mohou ovlivnit výsledky.

Celkově simulace poskytují realističtější pohled na chování těla v reálném prostředí, zatímco teoretické trajektorie slouží jako základní referenční body pro srovnání. Rozdíly mezi simulacemi a teoretickými trajektoriemi nám pomáhají lépe porozumět fyzikálním jevům v reálném světě.

5 Závěr

V této práci jsem se zaměřila na šikmý vrh v pozemských podmínkách, a to jak prostřednictvím simulací, tak teoretické analýzy. Identifikovala jsem významný vliv odporu vzduchu na trajektorii koule a provedla jsem podrobné porovnání mezi výsledky simulací a teoretickými modely.

Tato práce poskytuje hlubší vhled do fyzikálních jevů spojených se šikmým vrhem a zdůrazňuje rozdíly mezi ideálními teoretickými předpoklady a reálnými podmínkami na Zemi. Tyto znalosti mají klíčový význam pro lepší porozumění pohybu projektilů v reálném světě.

6 Reference

Modelování pohybů numerickými metodami *Přemysl Šedivý*

Zdrojový kód této práce se nachází na [GitHub](#)