

ТИПОВИЙ РОЗРАХУНОК № 6**Диференціальні рівняння****Завдання 1. Знайти загальний інтеграл диференціального рівняння:**

1.1 a) $4x dx - 3y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx;$

b) $y' = \frac{y^2}{x^2} + 4 \frac{y}{x} + 2.$

1.2 a) $x\sqrt{1+y^2} + yy'\sqrt{1+x^2} = 0;$

b) $xy' = \frac{3y^3 + 2yx^2}{2y^2 + x^2}.$

1.3 a) $\sqrt{4+y^2} dx - y dy = x^2 y dy;$

b) $y' = \frac{x+y}{x-y}.$

1.4 a) $\sqrt{3+y^2} dx - y dy = x^2 y dy;$

b) $xy' = \sqrt{x^2 + y^2} + y.$

1.5 a) $6x dx - 6y dy = 2x^2 y dy - 3xy^2 dx;$

b) $2y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \frac{y}{x} + 3.$

1.6 a) $x\sqrt{3+y^2} dx + y\sqrt{2+x^2} dy = 0;$

b) $xy' = \frac{3y^3 + 4yx^2}{2y^2 + 2x^2}.$

1.7 a) $(e^{2x} + 5)dy + ye^{2x} dx = 0;$

b) $y' = \frac{x+2y}{2x-y}.$

1.8 a) $y'y\sqrt{\frac{1-x^2}{1-y^2}} + 1 = 0;$

b) $xy' = 2\sqrt{x^2 + y^2} + y.$

1.9 a) $6x dx - 6y dy = 3x^2 y dy - 2xy^2 dx;$

b) $3y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \frac{y}{x} + 4.$

1.10 a) $x\sqrt{5+y^2} dx + y\sqrt{4+x^2} dy = 0;$

$$\text{b)} \quad xy' = \frac{3y^3 + 6yx^2}{2y^2 + 3x^2}.$$

$$\text{1.11 a)} \quad y(4 + e^x)dy - e^x dx = 0;$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{x^2 + xy - y^2}{x^2 - 2xy}.$$

$$\text{1.12 a)} \quad \sqrt{4 - x^2} y' + xy^2 + x = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = \sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$\text{1.13 a)} \quad 2xdx - 2ydy = x^2 ydy - 2xy^2 dx;$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 6 \frac{y}{x} + 6.$$

$$\text{1.14 a)} \quad x\sqrt{4 + y^2} dx + y\sqrt{1 + x^2} dy = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = \frac{3y^3 + 8yx^2}{2y^2 + 4x^2}.$$

$$\text{1.15 a)} \quad (e^x + 8)dy - ye^x dx = 0;$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{x^2 + 2xy - y^2}{2x^2 - 2xy}.$$

$$\text{1.16 a)} \quad \sqrt{5 + y^2} + yy'\sqrt{1 - x^2} = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = 3\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$\text{1.17 a)} \quad 6xdx - ydy = x^2 ydy - 3xy^2 dx;$$

$$\text{b)} \quad 2y' = \frac{y^2}{x^2} + 8 \frac{y}{x} + 8.$$

$$\text{1.18 a)} \quad y \ln y + xy' = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = \frac{3y^3 + 10yx^2}{2y^2 + 5x^2}.$$

$$\text{1.19 a)} \quad (1 + e^x)y' = ye^x;$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{x^2 + 3xy - y^2}{3x^2 - 2xy}.$$

$$\text{1.20 a)} \quad \sqrt{1 - x^2} y' + xy^2 + x = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = 3\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

$$\text{1.21 a)} \quad 6xdx - 2ydy = 2x^2ydy - 3xy^2dx;$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{y^2}{x^2} + 8\frac{y}{x} + 12.$$

$$\text{1.22 a)} \quad y(1 + \ln y) + xy' = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = \frac{3y^3 + 12yx^2}{2y^2 + 6x^2}.$$

$$\text{1.23 a)} \quad (3 + e^x)yy' = e^x;$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{x^2 + xy - 3y^2}{x^2 - 4xy}.$$

$$\text{1.24 a)} \quad \sqrt{3 + y^2} + y'y\sqrt{1 - x^2} = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = 2\sqrt{3x^2 + y^2} + y.$$

$$\text{1.25 a)} \quad xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx;$$

$$\text{b)} \quad 4y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 5.$$

$$\text{1.26 a)} \quad \sqrt{5 + y^2}dx + 4(x^2y + y)dy = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = \frac{3y^3 + 14yx^2}{2y^2 + 7x^2}.$$

$$\text{1.27 a)} \quad (1 + e^x)yy' = e^x;$$

$$\text{b)} \quad y' = \frac{x^2 + xy - 5y^2}{x^2 - 6xy}.$$

$$\text{1.28 a)} \quad \sqrt{2 + y^2}dx + 3(x^2y + y)dy = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = 4\sqrt{x^2 + y^2} + y.$$

$$\text{1.29 a)} \quad 2xdx - ydy = x^2ydy - xy^2dx;$$

$$\text{b)} \quad 3y' = \frac{y^2}{x^2} + 10\frac{y}{x} + 10.$$

$$\text{1.30 a)} \quad \sqrt{2 - x^2}y' + 2xy^2 + 2x = 0;$$

$$\text{b)} \quad xy' = 4\sqrt{2x^2 + y^2} + y.$$

Завдання 3. Знайти розв'язок задачі Коші:

- 3.1 a) $y' - y/x = x^2, y(1) = 0;$
- 3.2 a) $y' - y \operatorname{ctgx} = 2x \sin x, y(\pi/2) = 0;$
- 3.3 a) $y' + y \cos x = \frac{1}{2} \sin 2x, y(0) = 0;$
- 3.4 a) $y' + y \operatorname{tgx} = \cos^2 x, y(\pi/4) = \frac{1}{2};$
- 3.5 a) $y' - \frac{y}{x+2} = x^2 + 2x, y(-1) = 3/2;$
- 3.6 a) $y' - \frac{y}{x+1} = e^x(x+1), y(0) = 1;$
- 3.7 a) $y' - y/x = x \sin x, y(\pi/2) = 1;$
- 3.8 a) $y' + y/x = \sin x, y(\pi) = 1/\pi;$
- 3.9 a) $y' + y/2x = x^2, y(1) = 1;$
- 3.10 a) $y' + \frac{2x}{1+x^2} y = \frac{2x^2}{1+x^2}, y(0) = \frac{2}{3};$
- 3.11 a) $y' - \frac{2x-5}{x^2} y = 5, y(2) = 4;$
- 3.12 a) $y' + y/x = \frac{x+1}{x} e^x, y(1) = e;$
- 3.13 a) $y' - y/x = -2 \frac{\ln x}{x}, y(1) = 1;$
- 3.14 a) $y' - y/x = -12/x^3, y(1) = 4;$
- 3.15 a) $y' + 2 y/x = x^3, y(1) = -5/6;$
- 3.16 a) $y' + y/x = 3x, y(1) = 1;$
- 3.17 a) $y' - \frac{2xy}{1+x^2} = 1+x^2, y(1) = 3;$
- 3.18 a) $y' + \frac{1-2x}{x^2} y = 1, y(1) = 1;$
- 3.19 a) $y' + 3 y/x = 2/x^3, y(1) = 1;$
- 3.20 a) $y' + 2xy = -2x^3, y(1) = e^{-1};$
- 3.21 a) $y' + \frac{xy}{2(1-x^2)} = \frac{x}{2}, y(0) = \frac{2}{3};$
- 3.22 a) $y' + xy = -x^3, y(0) = 3;$
- 3.23 a) $y' - \frac{2}{x+1} y = e^x(x+1)^2, y(0) = 1;$

- 3.24 a) $y' + 2xy = xe^{-x^2} \sin x, y(0) = 1;$
 3.25 a) $y' - 2y/(x+1) = (x+1)^3, y(0) = 1/2;$
 3.26 a) $y' - y \cos x = -\sin 2x, y(0) = 3;$
 3.27 a) $y' - 4xy = -4x^3, y(0) = -1/2;$
 3.28 a) $y' - y/x = -\frac{\ln x}{x}, y(1) = 1;$
 3.29 a) $y' - 3x^2 y = x^2(1+x^3)/3, y(0) = 0;$
 3.30 a) $y' - y \cos x = \sin 2x, y(0) = -1;$

Завдання 4. Знайти розв'язок задачі Коші:

- 4.1 a) $y' + xy = (1+x)e^{-x} \cdot y^2, y(0) = 1;$
 b) $4y^3 y'' = y^4 - 1, y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = 1/(2\sqrt{2}).$
 4.2 a) $xy' + y = 2y^2 \ln x, y(1) = 1/2;$
 b) $y'' = 128y^3, y(0) = 1, y'(0) = 8.$
 4.3 a) $2(xy' + y) = xy^2, y(1) = 2;$
 b) $y'' y^3 + 64 = 0, y(0) = 4, y'(0) = 2.$
 4.4 a) $y' + 4x^3 y = 4(1+x^3)e^{-4x} y^2, y(0) = 1;$
 b) $y'' + 2 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 1.$
 4.5 a) $xy' - y = -y^2(\ln x + 2) \ln x, y(1) = 1;$
 b) $y'' = 32 \sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 4.$
 4.6 a) $2(y' + xy) = (1+x)e^{-x} y^2, y(0) = 2;$
 b) $y'' = 98y^3, y(1) = 1, y'(1) = 7.$
 4.7 a) $3(xy' + y) = y^2 \ln x, y(1) = 3;$
 b) $y'' y^3 + 49 = 0, y(3) = -7, y'(3) = -1.$
 4.8 a) $2y' + y \cos x = y^{-1} \cos x(1 + \sin x), y(0) = 1;$
 b) $4y^3 y'' = 16y^4 - 1, y(0) = \sqrt{2}/2, y'(0) = 1/\sqrt{2}.$
 4.9 a) $y' + 4x^3 y = 4y^2 e^{4x}(1-x^3), y(0) = -1;$
 b) $y'' + 8 \sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 2.$
 4.10 a) $3y' + 2xy = 2xy^{-2} e^{-2x^2}, y(0) = -1;$
 b) $y'' = 72y^3, y(2) = 1, y'(2) = 6.$

- 4.11 a) $2xy' - 3y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = 1/\sqrt{2};$
b) $y''y^3 + 36 = 0, y(0) = 3, y'(0) = 2.$
- 4.12 a) $3xy' + 5y = (4x - 5)y^4, y(1) = 1;$
b) $y'' = 18\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 3.$
- 4.13 a) $2y' + 3y \cos x = e^{2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, y(0) = 1;$
b) $4y^3y'' = y^4 - 16, y(0) = 2\sqrt{2}, y'(0) = 1/\sqrt{2}.$
- 4.14 a) $3(xy' + y) = xy^2, y(1) = 3;$
b) $y'' = 50y^3, y(3) = 1, y'(3) = 5.$
- 4.15 a) $y' - y = 2xy^2, y(0) = 1/2;$
b) $y''y^3 + 25 = 0, y(2) = -5, y'(2) = -1.$
- 4.16 a) $2xy' - 3y = -(20x^2 + 12)y^3, y(1) = 1/2\sqrt{2};$
b) $y'' + 18\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 3.$
- 4.17 a) $y' + 2xy = 2x^3y^3, y(0) = \sqrt{2};$
b) $y'' = 8\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 2.$
- 4.18 a) $xy' + y = y^2 \ln x, y(1) = 1;$
b) $y'' = 32y^3, y(4) = 1, y'(4) = 4.$
- 4.19 a) $2y' + 3y \cos x = e^{2x}(8 + 12\cos x)y^{-1}, y(0) = 2;$
b) $y''y^3 + 16 = 0, y(1) = 2, y'(1) = 2.$
- 4.20 a) $4y' + x^3y = e^{-2x}(x^3 + 8)y^2, y(0) = 1;$
b) $y'' + 32\sin y \cos^3 y = 0, y(0) = 0, y'(0) = 4.$
- 4.21 a) $8xy' - 12y = -(5x^2 + 3)y^3, y(1) = \sqrt{2};$
b) $y'' = 50\sin^3 y \cos y, y(1) = \pi/2, y'(1) = 5.$
- 4.22 a) $2(y' + y) = xy^2, y(0) = 2;$
b) $y'' = 18y^3, y(1) = 1, y'(1) = 3.$
- 4.23 a) $y' + xy = (x - 1)e^x y^2, y(0) = 1;$
b) $y''y^3 + 9 = 0, y(1) = 1, y'(1) = 3.$
- 4.24 a) $2y' - 3y \cos x = -e^{-2x}(2 + 3\cos x)y^{-1}, y(0) = 1;$
b) $y^3y'' = 4(y^4 - 1), y(0) = \sqrt{2}, y'(0) = \sqrt{2}.$

- 4.25 a) $y' - y = xy^2$, $y(0) = 1$;
 b) $y'' + 50 \sin y \cos^3 y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$.
- 4.26 a) $2(xy' + y) = y^2 \ln x$, $y(1) = 2$;
 b) $y'' = 8y^3$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 2$.
- 4.27 a) $y' + y = xy^2$, $y(0) = 1$;
 b) $y''y^3 + 4 = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = -2$.
- 4.28 a) $y' + 2y \operatorname{cth} x = y^2 \operatorname{ch} x$, $y(1) = 1/\operatorname{sh} 1$;
 b) $y'' = 2 \sin^3 y \cos y$, $y(1) = \pi/2$, $y'(1) = 1$.
- 4.29 a) $2(y' + xy) = (x - 1)e^x y^2$, $y(0) = 2$;
 b) $y^3 y'' = y^4 - 16$, $y(0) = 2\sqrt{2}$, $y'(0) = \sqrt{2}$.
- 4.30 a) $y' - y \operatorname{tg} x = -(2/3)y^4 \sin x$, $y(0) = 1$;
 b) $y'' = 2y^3$, $y(-1) = 1$, $y'(-1) = 1$.

Завдання 5. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- 5.1 a) $y'''x \ln x = y''$; b) $y''' + 3y'' + 2y' = 1 - x^2$.
- 5.2 a) $xy''' + y'' = 1$; b) $y''' - y'' = 6x^2 + 3x$.
- 5.3 a) $2xy''' = y''$; b) $y''' - y' = x^2 + x$.
- 5.4 a) $xy''' + y'' = x + 1$; b) $y^{\text{IV}} - 3y''' + 3y'' - y' = 2x$.
- 5.5 a) $\operatorname{tg} x \cdot y'' - y' + \frac{1}{\sin x} = 0$; b) $y^{\text{IV}} - y''' = 5(x + 2)^2$.
- 5.6 a) $x^2 y'' + xy' = 1$; b) $y^{\text{IV}} - 2y''' + y'' = 2x(1 - x)$.
- 5.7 a) $y''' \operatorname{ctg} 2x + 2y'' = 0$; b) $y^{\text{IV}} + 2y''' + y'' - y' = x^2 + x - 1$.
- 5.8 a) $x^3 y''' + x^2 y'' = 1$; b) $y^{\text{V}} - y^{\text{IV}} = 2x + 3$.
- 5.9 a) $\operatorname{tg} x \cdot y''' = 2y''$; b) $3y^{\text{IV}} + y''' = 6x - 1$.
- 5.10 a) $\operatorname{cth} 2x \cdot y''' = 2y''$; b) $y^{\text{IV}} + 2y''' + y'' = 4x^2$.
- 5.11 a) $x^4 y'' + x^3 y' = 1$; b) $y''' + y'' = 5x^2 - 1$.
- 5.12 a) $xy''' + 2y'' = 0$; b) $y^{\text{IV}} + 4y''' + 4y'' = x - x^2$.
- 5.13 a) $(1 + x^2)y'' + 2xy' = x^3$; b) $7y''' - y'' = 12x$.
- 5.14 a) $x^5 y''' + x^4 y'' = 1$; b) $y''' + 3y'' + 2y' = 3x^2 + 2x$.
- 5.15 a) $xy''' - y'' + \frac{1}{x} = 0$; b) $y''' - y' = 3x^2 - 2x + 1$.
- 5.16 a) $xy''' + y'' + x = 0$; b) $y''' - y'' = 4x^2 - 3x + 2$.

- 5.17 a) $thx \cdot y^{IV} = y'''$; б) $y^{IV} - 3y''' + 3y'' - y' = x - 3$.
- 5.18 a) $xy''' + y'' = \sqrt{x}$; б) $y^{IV} + 2y''' + y'' - y' = 12x^2 - 6x$.
- 5.19 a) $y'''tgx = y'' + 1$; б) $y''' - 4y'' = 32 - 384x^2$.
- 5.20 a) $y'''tg5x = 5y''$; б) $y^{IV} + 2y''' + y'' = 2 - 3x^2$.
- 5.21 a) $y'''th7x = 7y''$; б) $y''' + y'' = 49 - 24x^2$.
- 5.22 a) $x^3y''' + x^2y'' = \sqrt{x}$; б) $y''' - 2y'' = 3x^2 + x - 4$.
- 5.23 a) $cthx \cdot y'' - y' + \frac{1}{chx} = 0$; б) $y''' - 13y'' + 12y' = x - 1$.
- 5.24 a) $(x+1)y''' + y'' = x+1$; б) $y^{IV} + y''' = x$.
- 5.25 a) $(1 + \sin x)y''' = \cos x \cdot y''$; б) $y''' - y'' = 6x + 5$.
- 5.26 a) $xy''' + y'' = \frac{1}{\sqrt{x}}$; б) $y''' + 3y'' + 2y' = x^2 + 2x + 3$.
- 5.27 a) $-xy''' + 2y'' = \frac{2}{x^2}$; б) $y''' - 5y'' + 6y' = (x-1)^2$.
- 5.28 a) $cthx \cdot y'' + y' = chx$; б) $y^{IV} - 6y''' + 9y'' = 3x - 1$.
- 5.29 a) $x^4y'' + x^3y' = 4$; б) $y''' - 13y'' + 12y' = 18x^2 - 39$.
- 5.30 a) $y'' + \frac{2x}{x^2 + 1}y' = 2x$; б) $y^{IV} + y''' = 12x + 6$.

Завдання 6. Знайти загальний розв'язок диференціального рівняння:

- 6.1 а) $y''' - 4y'' + 5y' - 2y = (16 - 12x)e^{-x}$;
 б) $y'' + 2y' = 4e^x(\sin x + \cos x)$;
 в) $y'' - 2y' = 2ch2x$.
- 6.2 а) $y''' - 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^x$;
 б) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 6x$;
 в) $y'' + y = 2 \sin x - 6 \cos x + 2e^x$.
- 6.3 а) $y''' - y'' - y' + y = (3x + 7)e^{2x}$;
 б) $y'' + 2y' = -2e^x(\sin x + \cos x)$;
 в) $y''' - y' = 2e^x + \cos x$.
- 6.4 а) $y''' - 2y'' + y' = (2x + 5)e^{2x}$;
 б) $y'' + y = 2 \cos 7x + 3 \sin 7x$;
 в) $y'' - 3y' = 2ch3x$.
- 6.5 а) $y''' - 3y'' + 4y = (18x - 21)e^{-x}$;
 б) $y'' + 2y' + 5y = -\sin 2x$;

- 6.6** **в)** $y'' + 4y = -8\sin 2x + 32\cos 2x + 4e^{2x}.$
а) $y''' - 5y'' + 8y' - 4y = (2x - 5)e^x;$
б) $y'' - 4y' + 8y = e^x(5\sin x - 3\cos x);$
в) $y''' - y' = 4e^x + 6\cos x + 10\sin x.$
- 6.7** **а)** $y''' - 4y'' + 4y' = (x - 1)e^x;$
б) $y'' + 2y' = e^x(\sin x + \cos x);$
в) $y'' - 4y' = 16\operatorname{ch} 4x.$
- 6.8** **а)** $y''' + 2y'' + y' = (18x + 21)e^{2x};$
б) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 3x;$
в) $y'' + 9y = -18\sin 3x - 18e^{3x}.$
- 6.9** **а)** $y''' + y'' - y' - y = (8x + 4)e^x;$
б) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 4x;$
в) $y''' - 4y' = 24e^{2x} - 4\cos 2x + 8\sin 2x.$
- 6.10** **а)** $y''' - 3y' - 2y = -4xe^x;$
б) $y'' + y = 2\cos 3x - 3\sin 3x;$
в) $y'' - 5y' = 50\operatorname{ch} 5x.$
- 6.11** **а)** $y''' - 3y' + 2y = (4x + 9)e^{2x};$
б) $y'' + 2y' + 5y = -2\sin x;$
в) $y'' + 16y = 16\cos 4x - 16e^{4x}.$
- 6.12** **а)** $y''' + 4y'' + 5y' + 2y = (12x + 16)e^x;$
б) $y'' - 4y' + 8y = e^x(-3\sin x + 4\cos x);$
в) $y''' - 9y' = -9e^{3x} + 18\sin 3x - 9\cos 3x.$
- 6.13** **а)** $y''' - y'' - 2y' = (6x - 11)e^{-x};$
б) $y'' + 2y' = 10e^x(\sin x + \cos x);$
в) $y'' - y' = 2\operatorname{ch} x.$
- 6.14** **а)** $y''' + y'' - 2y' = (6x + 5)e^x;$
б) $y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 5x;$
в) $y'' + 25y = 20\cos 5x - 10\sin 5x + 50e^{5x}.$
- 6.15** **а)** $y''' + 4y'' + 4y' = (9x + 15)e^x;$
б) $y'' + y = 2\cos 5x + 3\sin 5x;$
в) $y''' - 16y' = 48e^{4x} + 64\cos 4x - 64\sin 4x.$

- 6.16** а) $y''' - 3y'' - y' + 3y = (4 - 8x)e^x$;
 б) $y'' + 2y' + 5y = -17 \sin 2x$;
 в) $y'' + 2y' = 2sh2x$.
- 6.17** а) $y''' - y'' - 4y' + 4y = (7 - 6x)e^x$;
 б) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos x$;
 в) $y'' + 36y = 24 \sin 6x - 12 \cos 6x + 36e^{6x}$.
- 6.18** а) $y''' + 3y'' + 2y' = (1 - 2x)e^{-x}$;
 б) $y'' - 4y' + 8y = e^x(3 \sin x + 5 \cos x)$;
 в) $y''' - 25y' = 25(\sin 5x + \cos 5x) - 50e^{5x}$.
- 6.19** а) $y''' - 5y'' + 7y' - 3y = (20 - 16x)e^{-x}$;
 б) $y'' + 2y' = 6e^x(\sin x + \cos x)$;
 в) $y'' + 3y' = 2sh3x$.
- 6.20** а) $y''' - 4y'' + 3y' = -4xe^x$;
 б) $y'' - 4y' + 4y = -e^{2x} \sin 4x$;
 в) $y'' + 49y = 14 \sin 7x + 7 \cos 7x - 98e^{7x}$.
- 6.21** а) $y''' - 5y'' + 3y' + 9y = (32x - 32)e^{-x}$;
 б) $y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 5x$;
 в) $y''' - 36y' = 36e^{6x} - 72(\cos 6x + \sin 6x)$.
- 6.22** а) $y''' - 6y'' + 9y' = 4xe^x$;
 б) $y'' + y = 2 \cos 7x - 3 \sin 7x$;
 в) $y'' + 4y' = 16sh4x$.
- 6.23** а) $y''' - 7y'' + 15y' - 9y = (8x - 12)e^x$;
 б) $y'' + 2y' + 5y = -\cos x$;
 в) $y'' + 64y = 16 \sin 8x - 16 \cos 8x - 64e^{8x}$.
- 6.24** а) $y''' - y'' - 5y' - 3y = -(8x + 4)e^x$;
 б) $y'' - 4y' + 8y = e^x(2 \sin x - \cos x)$;
 в) $y''' - 49y' = 14e^{7x} - 49(\cos 7x + \sin 7x)$.
- 6.25** а) $y''' + 5y'' + 7y' + 3y = (16x + 20)e^x$;
 б) $y'' + 2y' = 3e^x(\sin x + \cos x)$;
 в) $y'' + 5y' = 50sh5x$.
- 6.26** а) $y''' - 2y'' - 3y' = (8x - 14)e^{-x}$;

$$\text{б)} \quad y'' - 4y' + 4y = e^{2x} \sin 4x;$$

$$\text{в)} \quad y'' + 81y = 9 \sin 9x + 3 \cos 9x + 162e^{9x}.$$

$$\text{6.27 а)} \quad y''' + 2y'' - 3y' = (8x + 6)e^x;$$

$$\text{б)} \quad y'' + 6y' + 13y = e^{-3x} \cos 8x;$$

$$\text{в)} \quad y''' - 64y' = 128 \cos 8x - 64e^{8x}.$$

$$\text{6.28 а)} \quad y''' + 6y'' + 9y' = (16x + 24)e^x;$$

$$\text{б)} \quad y'' + 2y' + 5y = 10 \cos x;$$

$$\text{в)} \quad y'' + y' = 2 \operatorname{sh} x.$$

$$\text{6.29 а)} \quad y''' - y'' - 9y' + 9y = (12 - 16x)e^x;$$

$$\text{б)} \quad y'' + y = 2 \cos 4x + 3 \sin 4x;$$

$$\text{в)} \quad y'' + 100y = 20 \sin 10x - 30 \cos 10x - 200e^{10x}.$$

$$\text{6.30 а)} \quad y''' + 4y'' + 3y' = 4(1 - x)e^{-x};$$

$$\text{б)} \quad y'' - 4y' + 8y = e^x(-\sin x + 2 \cos x);$$

$$\text{в)} \quad y''' - 81y' = 162e^{9x} + 81 \sin 9x.$$

Завдання 7. Знайти розв'язок задачі Коші:

$$\text{7.1} \quad y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \cos \pi x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{7.2} \quad y'' + 3y' = 9e^{3x} / (1 + e^{3x}), \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = 3(1 - \ln 2).$$

$$\text{7.3} \quad y'' + 4y = 8 \operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4.$$

$$\text{7.4} \quad y'' - 6y' + 8y = 4 / (1 + e^{-2x}), \quad y(0) = 1 + 2 \ln 2, \quad y'(0) = 6 \ln 2.$$

$$\text{7.5} \quad y'' - 9y' + 18y = 9e^{3x} / (1 + e^{-3x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{7.6} \quad y'' + \pi^2 y = \pi^2 / \sin \pi x, \quad y(1/2) = 1, \quad y'(1/2) = \pi^2 / 2.$$

$$\text{7.7} \quad y'' + \frac{1}{\pi^2} y = \frac{1}{\pi^2 \cos(x/\pi)}, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{7.8} \quad y'' - 3y' = \frac{9e^{-3x}}{3 + e^{-3x}}, \quad y(0) = 4 \ln 4, \quad y'(0) = 3(3 \ln 4 - 1).$$

$$\text{7.9} \quad y'' + y = 4 \operatorname{ctg} x, \quad y(\pi/2) = 4, \quad y'(\pi/2) = 4.$$

$$\text{7.10} \quad y'' - 6y' + 8y = 4 / (2 + e^{-2x}), \quad y(0) = 1 + 3 \ln 3, \quad y'(0) = 10 \ln 3.$$

$$\text{7.11} \quad y'' + 6y' + 8y = 4e^{-2x} / (2 + e^{2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{7.12} \quad y'' + 9y = 9 / \sin 3x, \quad y(\pi/6) = 4, \quad y'(\pi/6) = 3\pi/2.$$

$$\text{7.13} \quad y'' + 9y = 9 / \cos 3x, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0.$$

$$\text{7.14} \quad y'' - y' = e^{-x} / (2 + e^{-x}), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = \ln 9 - 1.$$

$$7.15 \quad y'' + 4y = 4\operatorname{ctg} 2x, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2.$$

$$7.16 \quad y'' - 3y' + 2y = 1/(3 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 8\ln 2, \quad y'(0) = 14\ln 2.$$

$$7.17 \quad y'' - 6y' + 8y = 4e^{2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$7.18 \quad y'' + 16y = 16/\sin 4x, \quad y(\pi/8) = 3, \quad y'(\pi/8) = 2\pi.$$

$$7.19 \quad y'' + 16y = 16/\cos 4x, \quad y(0) = 3, \quad y'(0) = 0.$$

$$7.20 \quad y'' - 2y' = 4e^{-2x}/(1 + e^{-2x}), \quad y(0) = \ln 4, \quad y'(0) = \ln 4 - 2.$$

$$7.21 \quad y'' + \frac{y}{4} = \frac{1}{4}\operatorname{ctg}(x/2), \quad y(\pi) = 2, \quad y'(\pi) = 1/2.$$

$$7.22 \quad y'' - 3y' + 2y = 1/(2 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 3\ln 3, \quad y'(0) = 5\ln 3.$$

$$7.23 \quad y'' + 3y' + 2y = e^{-x}/(2 + e^x), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$7.24 \quad y'' + 4y = \frac{4}{\sin 2x}, \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2, \quad y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \pi.$$

$$7.25 \quad y'' + 4y = 4/\cos 2x, \quad y(0) = 2, \quad y'(0) = 0.$$

$$7.26 \quad y'' + y' = e^x/(2 + e^x), \quad y(0) = \ln 27, \quad y'(0) = 1 - \ln 9.$$

$$7.27 \quad y'' + y = 2\operatorname{ctg} x, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2.$$

$$7.28 \quad y'' - 3y' + 2y = 1/(1 + e^{-x}), \quad y(0) = 1 + 2\ln 2, \quad y'(0) = 3\ln 2.$$

$$7.29 \quad y'' - 3y' + 2y = e^x/(1 + e^{-x}), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

$$7.30 \quad y'' + y = \frac{1}{\sin x}, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad y'\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Завдання 8. Знайти лінію, що проходить через точку M_0 , яка має властивість, що в довільній її точці M нормальний вектор MN із кінцем на осі Oy має довжину, рівну a , та утворює гострий кут із додатним напрямом осі Oy :

$$8.1 \quad M_0(15,1), \quad a=25.$$

$$8.2 \quad M_0(12,2), \quad a=20.$$

$$8.3 \quad M_0(9,3), \quad a=15.$$

$$8.4 \quad M_0(6,4), \quad a=10.$$

$$8.5 \quad M_0(3,5), \quad a=5.$$

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 , якщо відрізок довільної її нормалі, що міститься між осями координат, ділиться точкою лінії у відношенні $a:b$ (рахуючи від осі Oy).

$$8.6 \quad M_0(1,1), \quad a:b=1:2.$$

$$8.7 \quad M_0(-2,3), \quad a:b=1:3.$$

$$8.8 \quad M_0(0,1), \quad a:b=2:3.$$

$$8.9 \quad M_0(1,0), \quad a:b=3:2.$$

$$8.10 \quad M_0(2,-1), \quad a:b=3:1.$$

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 , якщо відрізок довільної її

дотичної між точкою дотику та віссю Oy ділиться в точці перетину з віссю абсцис у відношенні $a:b$ (рахуючи від осі Oy).

8.11 $M_0(2,-1)$, $a:b=1:1$.

8.12 $M_0(1,2)$, $a:b=2:1$.

8.13 $M_0(-1,1)$, $a:b=3:1$.

8.14 $M_0(2,1)$, $a:b=1:2$.

8.15 $M_0(1,-1)$, $a:b=1:3$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 , якщо відрізок довільної її дотичної, що міститься між осями координат, ділиться в точці дотику у відношенні $a:b$ (рахуючи від осі Oy).

8.16 $M_0(1,2)$, $a:b=1:1$.

8.17 $M_0(2,1)$, $a:b=1:2$.

8.18 $M_0(1,3)$, $a:b=2:1$.

8.19 $M_0(2,-3)$, $a:b=3:1$.

8.20 $M_0(3,-1)$, $a:b=3:2$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 , яка має властивість, що в довільній її точці M дотичний вектор MN із кінцем на осі Ox має проекцію на вісь Ox , що обернено пропорційна абсцисі точки M . Коефіцієнт пропорційності дорівнює a .

8.21 $M_0(1,e)$, $a = -1/2$.

8.22 $M_0(2,e)$, $a = -2$.

8.23 $M_0(-1, \sqrt{e})$, $a = -1$.

8.24 $M_0(2, 1/e)$, $a = 2$.

8.25 $M_0(1, 1/e^2)$, $a = 1/4$.

Знайти лінію, що проходить через точку M_0 , яка має властивість, що в довільній її точці M дотичний вектор MN із кінцем на осі Oy має проекцію на вісь Oy , що дорівнює a .

8.26 $M_0(1,2)$, $a = -1$.

8.27 $M_0(1,4)$, $a = 2$.

8.28 $M_0(1,5)$, $a = -2$.

8.29 $M_0(1,3)$, $a = -4$.

8.30 $M_0(1,6)$, $a = 3$.

Завдання 11. Знайти загальний розв'язок лінійної неоднорідної системи диференціальних рівнянь:

11.1
$$\begin{cases} x' = x + y - \sin t \\ y' = x - y + e^{2t} \end{cases}$$

11.2
$$\begin{cases} x' = 4x - y \\ y' = 3x + 2y - te^{-t} \end{cases}$$

11.3
$$\begin{cases} x' = -3x + y + t^2 \\ y' = -20x + 6y - \cos 2t \end{cases}$$

$$\begin{array}{ll}
11.4 & \begin{cases} x' = x - y + \sin 3t \\ y' = x + y - t \end{cases} \\
11.5 & \begin{cases} x' = 2x + 2y - t^2 e^t \\ y' = x + y + t \end{cases} \\
11.6 & \begin{cases} x' = 5x + 5y \\ y' = x + y + t \cos 3t \end{cases} \\
11.7 & \begin{cases} x' = 4x + y - e^t \cos t \\ y' = 8x + y + t \end{cases} \\
11.8 & \begin{cases} x' = y - 7x + t^2 \\ y' = -2x + 5y - 1 \end{cases} \\
11.9 & \begin{cases} x' = x - 3y \\ y' = 3x + y + e^t \cos 2t + 3 \end{cases} \\
11.10 & \begin{cases} x' = 3x + 4y - 5t \\ y' = 2x + y + \sin t \end{cases} \\
11.11 & \begin{cases} x' = x + 2y - 10e^{3t} \\ y' = y - 2x + 5t \end{cases} \\
11.12 & \begin{cases} x' = x + y + 8t^2 \\ y' = 2x - y - \cos t \end{cases} \\
11.13 & \begin{cases} x' = 3x - y + e^{-3t} \\ y' = x + y + t^2 + 3 \end{cases} \\
11.14 & \begin{cases} x' = y + e^{-t} \sin 3t \\ y' = x - y \end{cases} \\
11.15 & \begin{cases} x' = x + y \\ y' = 5x + 5y - 3e^{-t} \cos t \end{cases} \\
11.16 & \begin{cases} x' = 4x + y + te^{-t} \\ y' = 8x + y - \sin t \end{cases} \\
11.17 & \begin{cases} x' = 4x + y - 3t^2 \\ y' = 8x + 2y + e^{-t} \end{cases} \\
11.18 & \begin{cases} x' = -x - 3y - 2te^t \\ y' = -x - 3y + 10 \end{cases}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
11.19 & \begin{cases} x' = 4x + y + t \\ y' = y - 2x + e^t \end{cases} \\
11.20 & \begin{cases} x' = 2x + y - 3t \\ y' = -7x - 7y + 2 \sin t \end{cases} \\
11.21 & \begin{cases} x' = 2x - y + 5t^2 \\ y' = 7x + y + e^t \cos t \end{cases} \\
11.22 & \begin{cases} x' = y + te^{2t} \\ y' = x - 3 \cos t \end{cases} \\
11.23 & \begin{cases} x' = -y - 2 \cos 2 - 5t \\ y' = x - y + t^2 \end{cases} \\
11.24 & \begin{cases} x' = 2x + te^{-3t} \\ y' = x + 2y - 5t \end{cases} \\
11.25 & \begin{cases} x' = x - 7y - 2e^{-t} \sin t \\ y' = x + 2y + te^{-t} \end{cases} \\
11.26 & \begin{cases} x' = y - 3 \sin 2t \\ y' = 4x - 3y + t^3 \end{cases} \\
11.27 & \begin{cases} x' = x + 4y - t^2 e^t \\ y' = x + y + 3t \cos t \end{cases} \\
11.28 & \begin{cases} x' = x + y + 5t \\ y' = 4x + y - e^{3t} \end{cases} \\
11.29 & \begin{cases} x' = -4y - t^2 \sin 3t \\ y' = x - 3y + 5e^{2t} \end{cases} \\
11.30 & \begin{cases} x' = -y + 6t^2 \\ y' = 9x^2 - 2y - 4e^{-2t} \end{cases}
\end{array}$$