Решение задач. Асимптотические оценки.

Упорядочите функции по возрастанию скорости роста (сверху — медленнее всего растущая функция, снизу — быстрее всего растущая).

1) $\log_2 \log_2 n$
2) $\sqrt{\log_4 n}$
3) $\log_3 n$
4) $(\log_2 n)^2$
5) $\sqrt{n}$
6) $\frac{n}{\log_5 n}$
7) $\log_2(n!)$
8) $3^{\log_2 n}$
9) n^2
10) $7^{\log_2 n}$
11) $(\log_2 n)^{\log_2 n}$
12) $n^{\log_2 n}$
13) $n^{\sqrt{n}}$
14) 2^n
15) 4^n
16) 2^{3n}
17) $n!$
18) 2^{2^n}

Пояснения:

Функцию 2^{2^n} можно представить как: $e^{2^n \cdot \ln 2}$, а функцию $n!$ как: $e^{\ln n!}$, где $\ln n! \approx n \cdot \ln n - n$. Видно, что $n \cdot \ln n - n$ растет медленнее, чем $2^n \cdot \ln 2$, а значит и $n!$ растет медленнее, чем 2^{2^n}.

При этом $n!$ растет быстрее, чем 2^{3n}; 4^n; 2^n, так как факториал растет быстрее любой показательной функции. 2^n; 4^n; 2^{3n} расположены по порядку возрастания скорости роста так, как $2 < 4 < 2^3$.

Теперь возьмем функции 2^n; $n^{\sqrt{n}}$; $n^{\log_2 n}$ и представим их так: $e^{n\cdot\ln 2}$; $e^{\sqrt{n}\cdot\ln n}$; $e^{\log_2(n)\cdot\ln n}$. Видно, что n растет быстрее, чем $\sqrt{n}\cdot\ln n$ (так как $\ln n$ растет с меньшей скоростью, чем $\sqrt{n}$). Значит 2^n будет расти быстрее, чем $n^{\sqrt{n}}$. А $n^{\log_2 n}$ будет расти медленнее, чем $n^{\sqrt{n}}$ (так как $\log_2 n$ растет медленнее $\sqrt{n}$).

$(\log_2 n)^{\log_2 n} = o(n^{\log_2 n})$, так как $\log_2 n = o(n)$.

$7^{\log_2 n} = o((\log_2 n)^{\log_2 n})$, так как $7 = o(\log_2 n)$.

$n^2 = o(7^{\log_2 n})$, представим эти функции так: $(e^2)^{\ln n}$; $(e^{\frac{\ln 7}{\ln 2}})^{\ln n}$. Последняя возрастает быстрее, так как $e^{\frac{\ln 7}{\ln 2}} > e^2$. Но $3^{\log_2 n} = o(n^2)$, так как $e^{\frac{\ln 3}{\ln 2}} < e^2$.

$\log_2(n!) = o(3^{\log_2 n})$, представим эти функции так: $\frac{n\cdot\ln n-n}{\ln 2}$; $n^{\log_2 3}$. Видно, что $n^{\log_2 3}$ возрастает быстрее, чем $n^{1,5}$, которая возрастает быстрее функции $n\cdot\ln n$. Значит $\frac{n\cdot\ln n-n}{\ln 2} = o(n^{\log_2 3})$.

$\frac{n}{\log_5 n} = o(\log_2(n!))$, представим эти функции так: $e^{\ln n-\ln\log_5 n}$; $e^{\frac{n\cdot\ln n-n}{\ln 2}}$. Видно, что $\ln n - \ln log_5 n = o(n\cdot\ln n - n)$.

$\sqrt{n} = o(\frac{n}{\log_5 n})$, представим эти функции так: $(e^{\frac{1}{2}})^{\ln n}$; $e^{\frac{n\cdot\ln n-n}{\ln 2}}$. Видно, что $\ln n = o(n\cdot\ln n)$. Значит оценка правильная.

$(\log_2 n)^2 = o(\sqrt{n})$, представим эти функции так: $e^{2\cdot\ln log_2 n}$; $e^{\frac{1}{2}\cdot\ln n}$. Видно, что $2\cdot\ln log_2 n = o(\frac{1}{2}\cdot\ln n)$. Значит оценка правильная.

$\log_3 n = o((\log_2 n)^2)$, представим эти функции так: $e^{\ln\log_3 n}$; $e^{2\cdot\ln\log_2 n}$. Видно, что $e^2 > e$. Значит вторая функция растет быстрее, чем первая.

Далее порядок сортировки функций по возрастанию очевиден.