

Санкт-Петербургский Государственный Университет  
Saint-Petersburg State University

ЛАБОРАТОРИЯ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

**ОТЧЕТ**

**По лабораторной работе 6**

«Определение линейных и угловых перемещений балки»

По дисциплине

«Лабораторный практикум, лабораторная работа»

Выполнили:

Баталов С. А.  
Хайретдинова Д. Д.

Санкт-Петербург  
2021

# 1 Цель работы

Под изгибом понимают такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях исследуемого образца возникают изгибающие моменты. Стержень, работающий на изгиб, называют балкой. Балка называется статически определимой, если все усилия и моменты в ней можно определить из уравнения статики. В частности, используемая в работе балка с одной шарнирно-подвижной и одной шарнирно-неподвижной опорами является статически определимой.

При прямом поперечном изгибе ось бруса, искривляясь, остается в силовой плоскости. В результате деформации каждое из сечений занимает новое положение: их центры тяжести получают вертикальные и горизонтальные линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются на некоторый угол вокруг нейтральной оси. Гипотеза плоских сечений – при повороте сечения остаются плоскими и перпендикулярными изогнутой оси балки.

Цель работы заключается в измерении линейных и угловых перемещений, возникающих в шарнирно закрепленной балке при изгибе ее сосредоточенной силой и сравнении измеренных величин с расчетными данными.

## 2 Экспериментальная установка

Установка (рис. 1) выполнена в настольном исполнении и состоит из сварного основания 1, на котором закреплены стойки 2 и 3 в виде усеченной пирамиды. На стойках устанавливается контрольная балка 4, правый конец которой располагается на шарнирно-подвижной опоре 5, а левый конец на шарнирно-неподвижной опоре 6. Нагружение балки осуществляется через подвес 7 с грузами. На балке нанесены риски с интервалом 50 мм для измерения расстояний при выполнении работы. Линейные перемещения (прогибы) измеряются индикаторной головкой 8 часового типа, закрепленной на горизонтальной планке 9. Для измерения угловых перемещений опор балки используются индикаторные головки 10, закрепленные на рычаге 11. Расстояние между опорами  $700 \pm 2$  мм. Балка выполнена из стали 45.

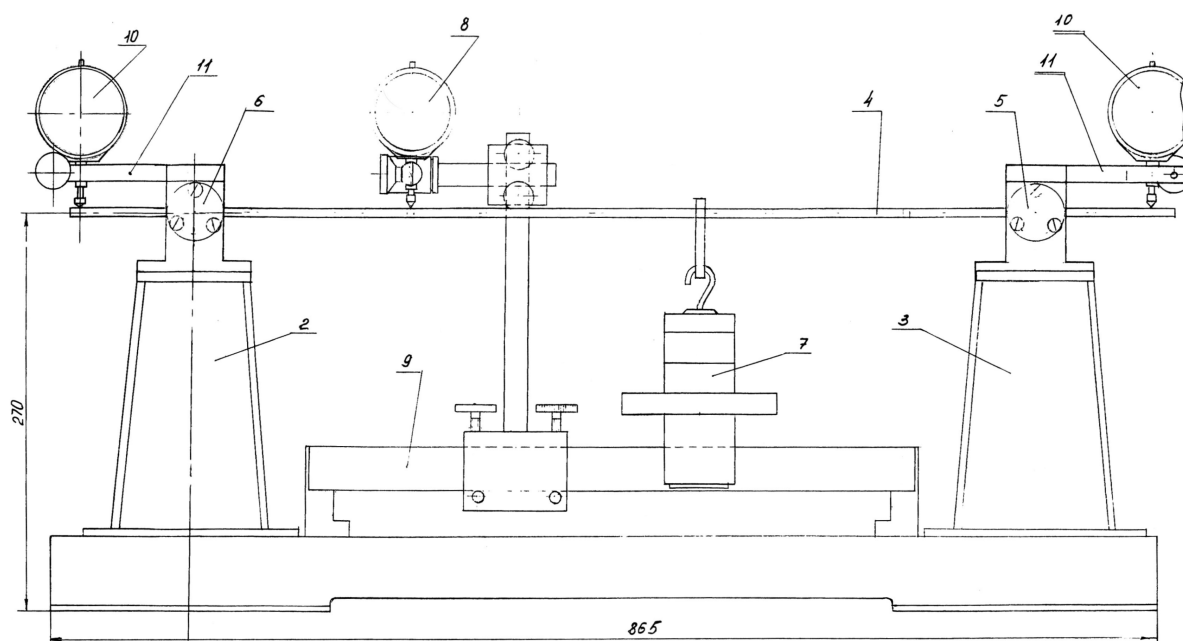


Рис. 1: Схема установки.

## 3 Теоретические исследования

### 3.1 Описание изгиба балки

Под изгибом понимают такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях исследуемого образца возникают изгибающие моменты. Стержень, работающий на изгиб, обычно называют балкой. В результате деформации каждое из сечений занимает новое положение: их центры тяжести получают вертикальные  $\nu$  и горизонтальные  $u$  линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются на угол  $\theta$  вокруг нейтральной оси – продольного сечения. в котором отсутствуют растяжение и сжатие (рис. 2).

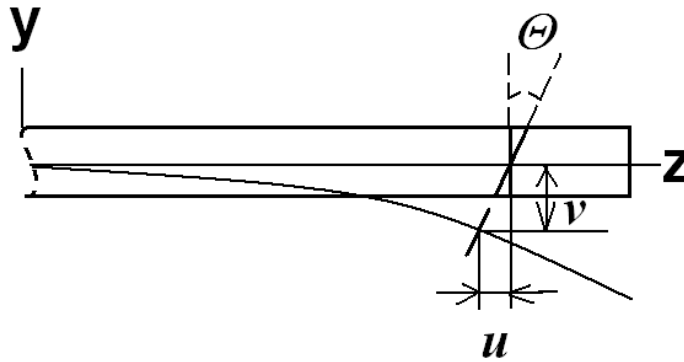


Рис. 2: Линейные и угловые перемещения при изгибе.

В сопротивлении материалов горизонтальными перемещениями  $u$  пренебрегают и изучают прогибы  $\nu$  и повороты  $\theta$ . Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб балки известно:

$$\nu'' = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI}, \quad (1)$$

где  $M(z)$  – распределение изгибающих моментов по длине образца,  $I$  – момент инерции поперечного сечения балки,  $y$  – координата по высоте сечения. Для балки прямоугольного поперечного сечения момент инерции равен (рис. 3):

$$I = \int_F y^2 dF = \frac{bh^3}{12}. \quad (2)$$

Интегрируя выражение (1), получим зависимость от координаты  $z$  угла поворота  $\theta$ , а интегрируя второй раз – прогиба  $\nu$ . Константы интегрирования можно определить из условий отсутствия прогиба на шарнирных опорах.

Изгибающий момент  $M$  в сечении  $z$  численно равен сумме моментов всех внешних сил (включая силы реакции в опорах), действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. При этом изгибающий момент считается положительным, если элемент изгибается выпуклостью вниз. Распределение какой-либо величины по длине балки в сопротивлении материалов называется эпюрой.

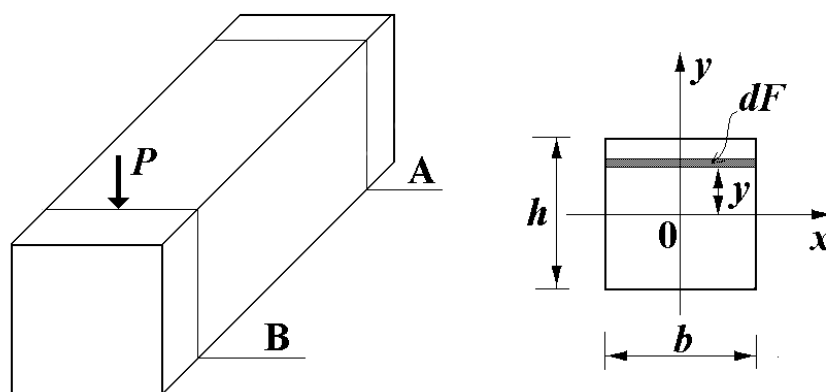


Рис. 3: К определению момента инерции сечения.

### 3.2 Расчет изгиба балки

Мы предполагаем, что нам известны все геометрические размеры балки и установки, материал балки, величина прикладываемого усилия. В нашей задаче (рис. 4) будем считать известными расстояния  $a_1, a_2, a_3$ , нагрузку  $P$ , момент инерции  $I$  поперечного сечения балки и модуль Юнга  $E$  материала балки. Предполагаем, что координаты  $a_1$  и  $a_3$  соответствуют местам крепления балки, а  $a_2$  соответствует точке приложения силы.

Наш стержень имеет несколько участков нагружения (рис. 4), поэтому определение произвольных постоянных приводит к решению системы уравнений с большим числом неизвестных, что связано с громоздкими вычислениями. Мы применим «метод Бубнова» интегрирования дифференциального уравнения упругой линии, что сведет задачу к определению лишь двух постоянных интегрирования.

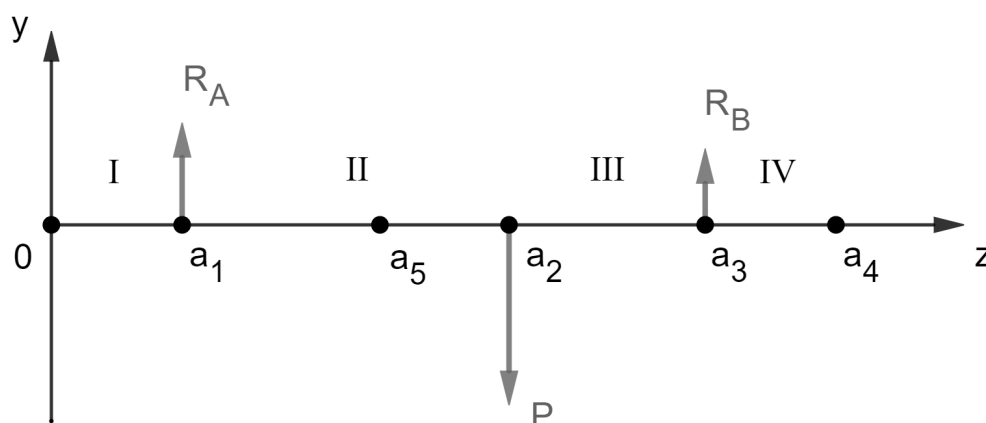


Рис. 4: Схема нагружения балки.

Для решения задачи проинтегрируем уравнение (1) один и два раза соответственно, используя метод Бубнова, получим уравнения для изгиба и для отклонения в четырех областях с двумя постоянными интегрирования, которые соответствуют начальному смещению  $y_0$  и

начальному углу отклонения  $\theta_0$  балки:

$$\begin{aligned}
(I) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \theta_0 \\ y(z) = y_0 + \theta_0 z \end{cases}, \\
(II) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{(z-a_1)^2}{2} \right) + \theta_0 \\ y(z) = \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{(z-a_1)^3}{6} \right) + y_0 + \theta_0 z \end{cases}, \\
(III) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{(z-a_1)^2}{2} - P \frac{(z-a_2)^2}{2} \right) + \theta_0 \\ y(z) = \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{(z-a_1)^3}{6} - P \frac{(z-a_2)^3}{6} \right) + y_0 + \theta_0 z \end{cases}, \\
(IV) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{(z-a_1)^2}{2} - P \frac{(z-a_2)^2}{2} + R_B \frac{(z-a_3)^2}{2} \right) + \theta_0 \\ y(z) = \frac{1}{EI} \left( R_A \frac{(z-a_1)^3}{6} - P \frac{(z-a_2)^3}{6} + R_B \frac{(z-a_3)^3}{6} \right) + y_0 + \theta_0 z \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3}$$

В данном случае нам требуется найти значения реакций  $R_A$  и  $R_B$  опор. Для этого воспользуемся уравнениями статики для сил и моментов:

$$\begin{cases} R_A + R_B - P = 0 \\ a_1 R_A - a_2 P + a_3 R_B = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

теперь нужно найти значения постоянных  $y_0$  и  $\theta_0$ , для этого воспользуемся граничными условиями (на опорах значение отклонения балки равно нулю):

$$\begin{cases} y(a_1) = 0 \\ y(a_3) = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Найдем выражения для постоянных интегрирования и запишем окончательно уравнения балки с учетом уравнений статики. Сначала выразим реакции опор:

$$\begin{cases} R_A = P \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} \\ R_B = P \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} \end{cases}. \tag{6}$$

Теперь запишем уравнения для поиска постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} y_0 + \theta_0 a_1 = 0 \\ y_0 + \theta_0 a_3 = \frac{P}{6EI} \cdot \left( (a_2 - a_3)(a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^3 \right) \end{cases} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \begin{cases} y_0 = -\frac{P}{6EI} \cdot \frac{a_1((a_2 - a_3)(a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^3)}{a_3 - a_1} \\ \theta_0 = \frac{P}{6EI} \cdot \frac{(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^3}{a_3 - a_1} \end{cases}.
\end{aligned} \tag{7}$$

В итоге мы нашли все неизвестные величины, теперь достаточно подставить их в уравнения (3) для угла изгиба  $\theta(z)$  и отклонения  $y(z)$ , чтобы получить окончательное решение задачи об изгибе балки.

## 4 Эксперимент

Все расчеты произведены при помощи пакета Matlab, с кодом программы можно ознакомиться отдельно. Эксперимент проводился в два этапа, сначала балка нагружается слева от центрального индикатора, потом справа. На рис. 5 изображена схема установки и все ее характерные размеры.

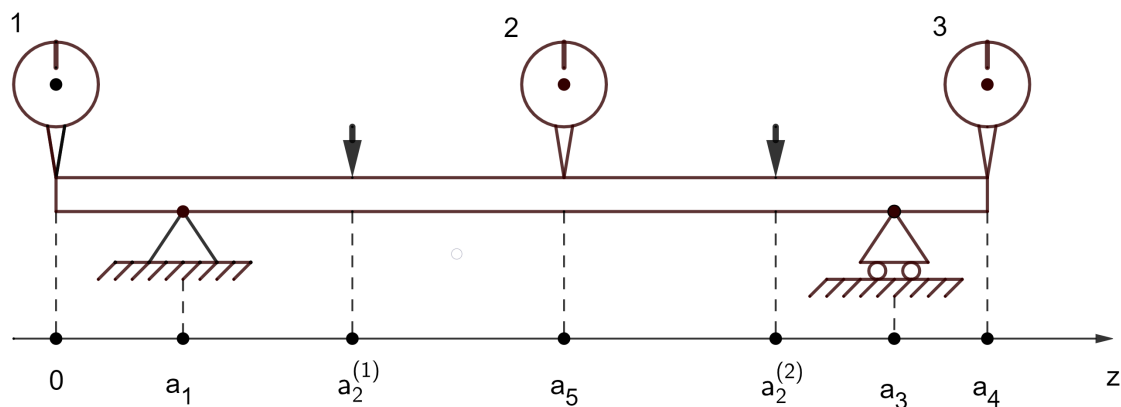


Рис. 5: Измерение длин балки.

Были измерены необходимые расстояния для 2 экспериментов: в 1-ом груз подвешен в точке  $a_2^{(1)}$ , и во 2-ом груз подвешен в точке  $a_2^{(2)}$ , также произвели замеры высоты  $h$  и толщины  $b$  балки с оценкой погрешности.

Величина	Значение	Погрешность	Размерность
b	5.4	±0.1	мм
h	36.1		
a <sub>1</sub>	80	±2	
a <sub>2</sub> <sup>(1)</sup>	222		
a <sub>2</sub> <sup>(2)</sup>	578		
a <sub>3</sub>	779		
a <sub>4</sub>	862		
a <sub>5</sub>	375		
E	200	—	ГПа

Таблица 1: Начальные данные.

Далее провели 2 эксперимента, постепенно нагружая и разгружая балку, снимали показания с индикаторных головок и заносили значения в таблицу, учитывая, что систематическая погрешность измерений для индикатора составляет  $\Delta x = 0.5 \cdot 10^{-2}$  мм:

№	Р	Опыт №1			Опыт №2		
		Показания индикаторов			Показания индикаторов		
		$y_1$	$y_2$	$y_3$	$y_1$	$y_2$	$y_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм					
1	1	2	-5	1	1	-4	1
2	2	5	-10	3	4	-12	5
3	3	7	-15	4	6	-19	8
4	5	12	-26	7	10	-32	14
5	7	17	-37	10	15	-44	20
6	12	28	-63	18	25	-76	34
7	7	17	-37	11	15	-45	21
8	5	12	-27	7	11	-33	15
9	3	7	-16	4	7	-20	9
10	2	5	-11	3	4	-13	6
11	1	3	-6	1	2	-6	3

Таблица 2: Экспериментальные данные для обоих опытов.

Будем опытно искать смещение  $y_0$  и начальный угол  $\theta_0$  используя показания индикаторов. Смещение  $y_0$  – это есть показание первого индикатора,  $\theta_0$  найдем по следующей формуле:

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{y_0}{a_1}. \quad (8)$$

Теоретический расчет смещений и углов произведем отдельно, а далее сравним значения, которые получились в обоих случаях. Теперь перейдем к анализу первого эксперимента.

#### 4.1 Опыт №1

Сначала проведем анализ экспериментальных данных, получим значения смещений и углов. Далее произведем теоретический расчет и сравним его с экспериментальными данными.

№	$P$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\theta_1$	$\Delta \theta_1$	$\theta_3$	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	2		-5		1		-0.25	0.06	0.12	0.06
2	2	5		-10		3		-0.63	0.06	0.36	0.06
3	3	7	0.5	-15	0.5	4	0.5	-0.88	0.07	0.48	0.06
4	5	12		-26		7		-1.50	0.07	0.84	0.06
5	7	17		-37		10		-2.10	0.08	1.20	0.07
6	12	28		-63		18		-3.50	0.11	2.20	0.08

Таблица 3: Экспериментальные данные для опыта №1.



Теперь мы проведем теоретический расчет, используя результаты, полученные ранее. Будем учитывать погрешность косвенных измерений, но прежде чем перейти к основному расчету, найдем значение момента сечения балки:

$$I = 21171 \pm 429 \text{ мм}^4. \quad (9)$$

Теперь составим основную таблицу теоретических результатов:

№	$P$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\theta_1$	$\Delta \theta_1$	$\theta_3$	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2} \text{ мм}$						$\cdot 10^{-3} \text{ рад}$			
1	1	0.045	0.002	-0.099	0.002	0.031	0.002	-0.006	0.001	0.004	0.001
2	2	0.090	0.003	-0.197	0.003	0.062	0.003	-0.011	0.001	0.007	0.001
3	3	0.134	0.005	-0.296	0.005	0.093	0.005	-0.017	0.001	0.011	0.001
4	5	0.224	0.008	-0.493	0.008	0.155	0.008	-0.028	0.001	0.019	0.001
5	7	0.313	0.011	-0.690	0.011	0.218	0.011	-0.039	0.001	0.026	0.001
6	12	0.537	0.019	-1.183	0.019	0.373	0.019	-0.067	0.002	0.045	0.002

Таблица 4: Расчетные данные для опыта №1.

Далее изобразим графики зависимости отклонения  $\nu$  балки в трех точках и изгиба  $\theta$  от величины приложенной нагрузки  $P$ . Также построим эпюры изгибающих моментов и эпюры сил, возникающих в стержне.

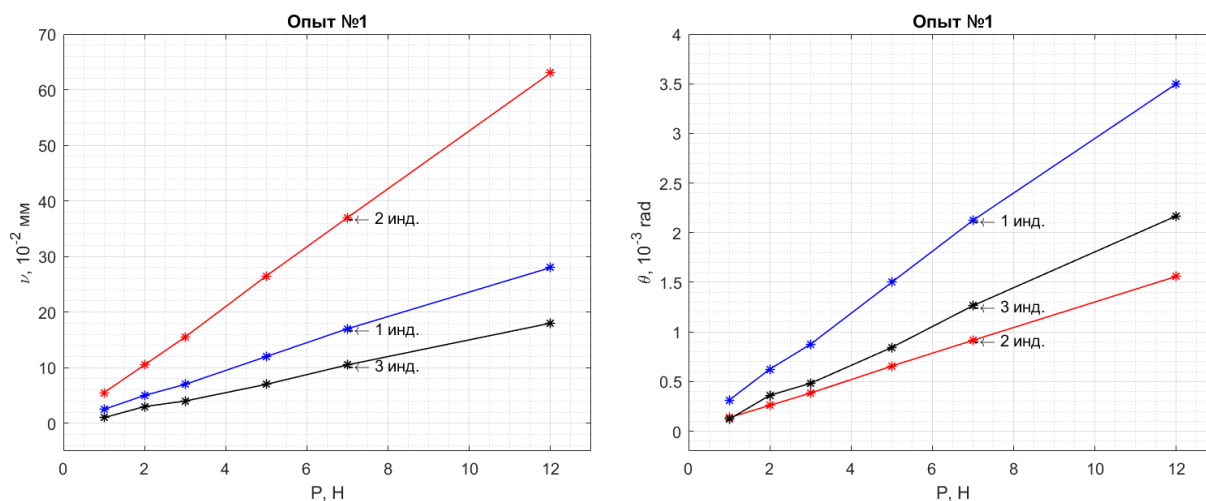


Рис. 6: Графики зависимости отклонения  $\nu$  балки и изгиба  $\theta$  от приложенной нагрузки  $P$ .

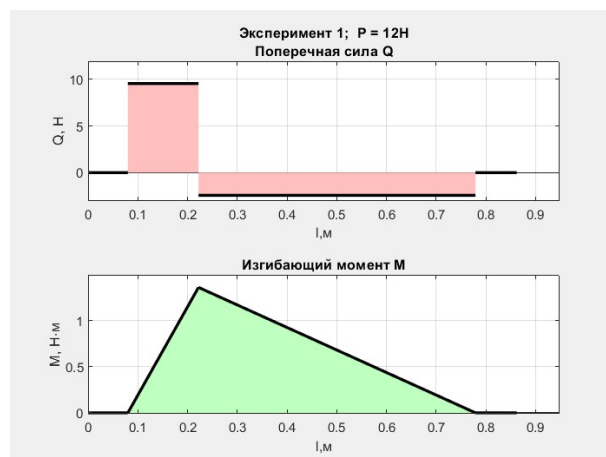
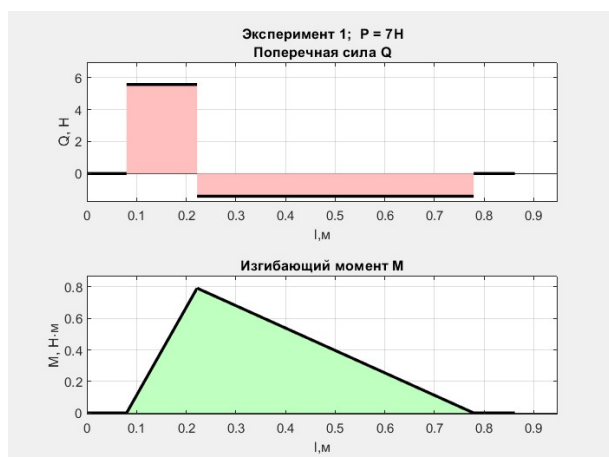
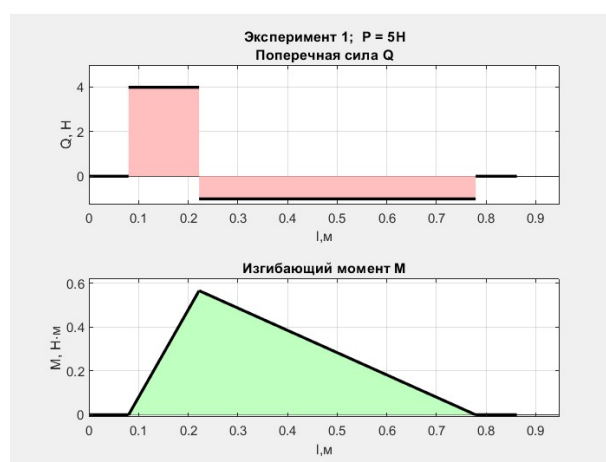
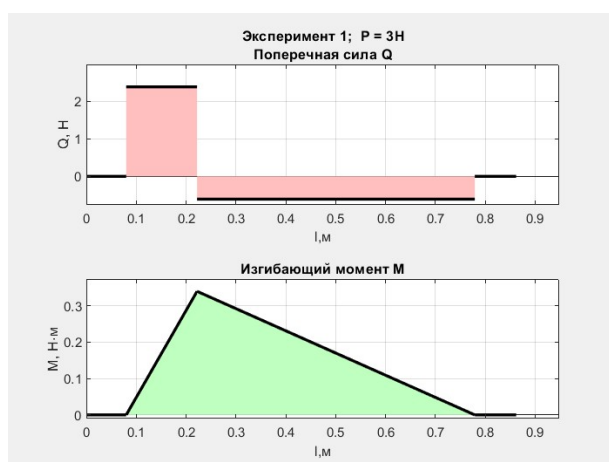
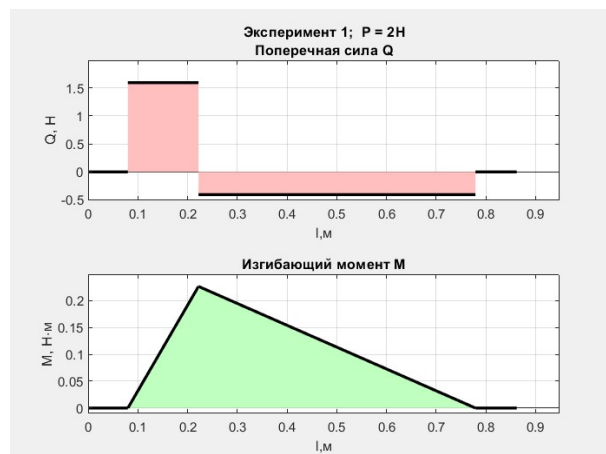
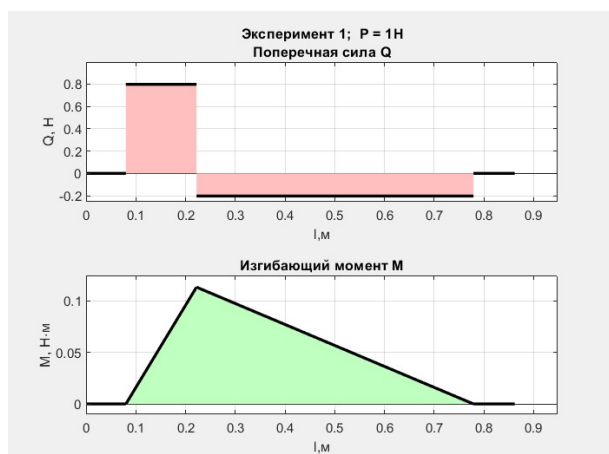


Рис. 7: Эпюры изгибающих моментов и сил для опыта №1.

## 4.2 Опыт №2

№	$P$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\theta_1$	$\Delta \theta_1$	$\theta_3$	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	1	0.5	-4	0.5	1	0.5	-0.13	0.06	0.12	0.06
2	2	4		-12		5		-0.50	0.06	0.60	0.06
3	3	6		-19		8		-0.75	0.07	0.96	0.06
4	5	10		-32		14		-1.30	0.07	1.70	0.07
5	7	15		-44		20		-1.90	0.08	2.40	0.08
6	12	25		-76		34		-3.10	0.09	4.1	0.12

Таблица 5: Экспериментальные данные для опыта №2.

№	$P$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\theta_1$	$\Delta \theta_1$	$\theta_3$	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	0.041	0.001	-0.121	0.001	0.056	0.001	-0.005	0.001	0.007	0.001
2	2	0.081	0.003	-0.241	0.003	0.112	0.003	-0.010	0.002	0.013	0.001
3	3	0.122	0.004	-0.362	0.004	0.168	0.004	-0.015	0.002	0.020	0.001
4	5	0.203	0.007	-0.603	0.007	0.280	0.007	-0.025	0.001	0.034	0.001
5	7	0.284	0.010	-0.844	0.010	0.392	0.010	-0.036	0.001	0.047	0.001
6	12	0.487	0.017	-1.447	0.017	0.672	0.017	-0.061	0.002	0.081	0.002

Таблица 6: Расчетные данные для опыта №2.

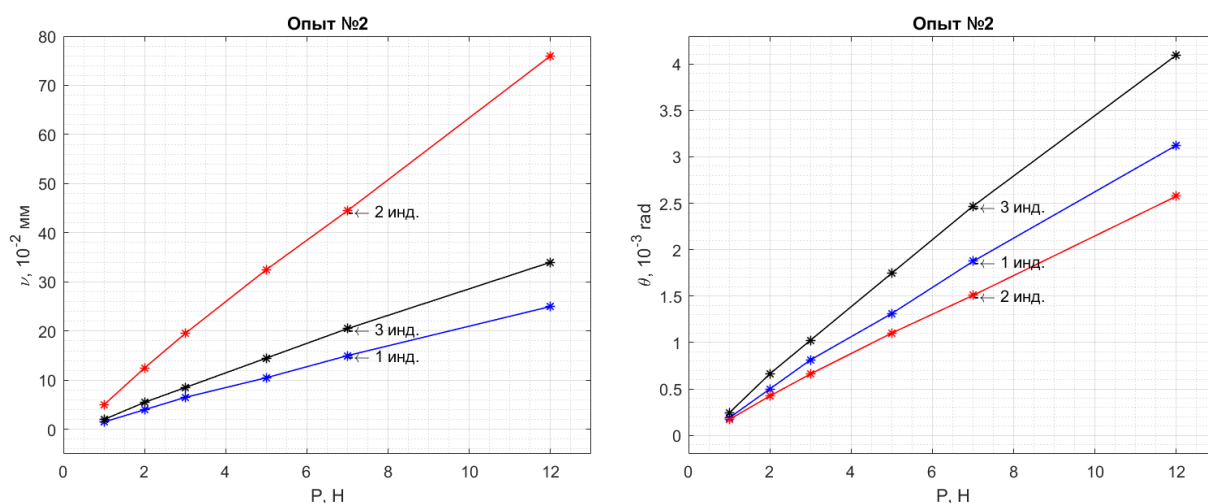


Рис. 8: Графики зависимости отклонения  $\nu$  балки и изгиба  $\theta$  от приложенной нагрузки  $P$ .

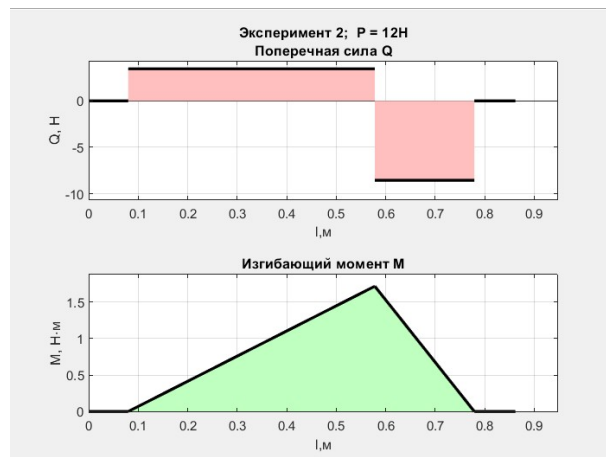
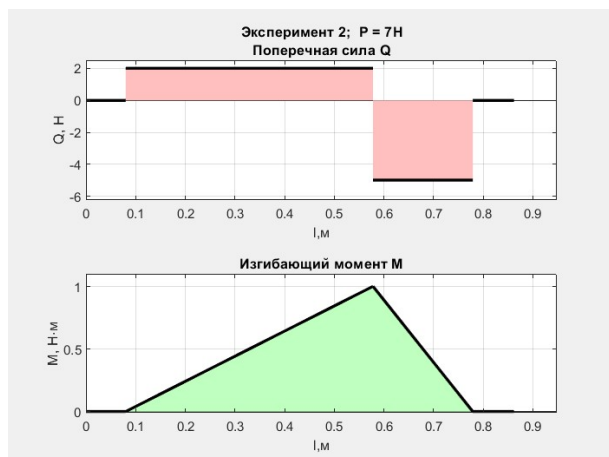
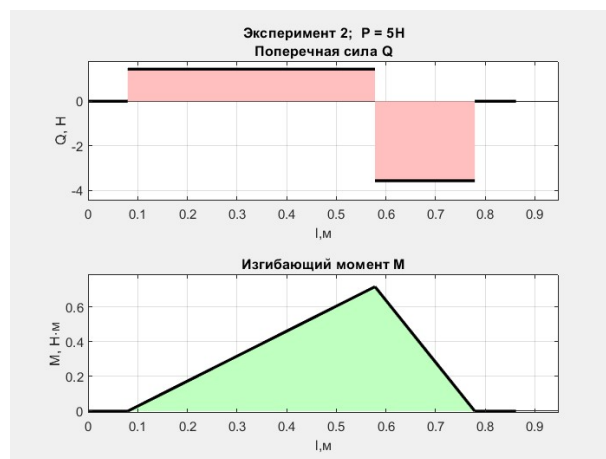
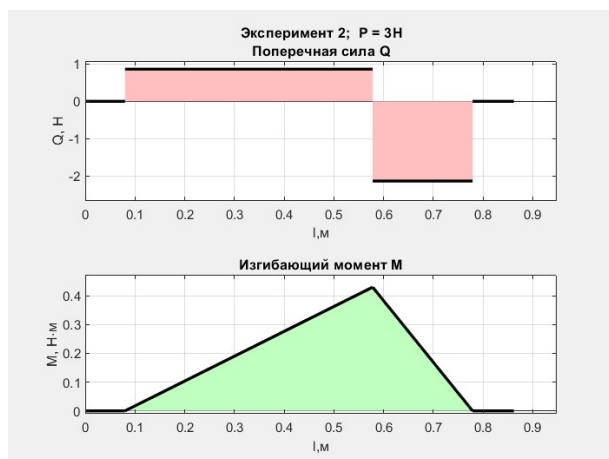
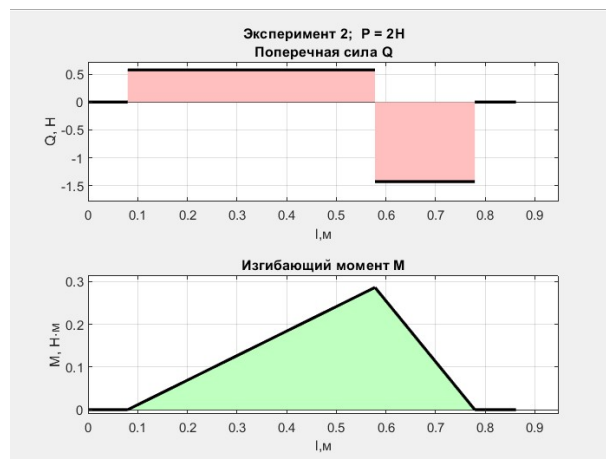
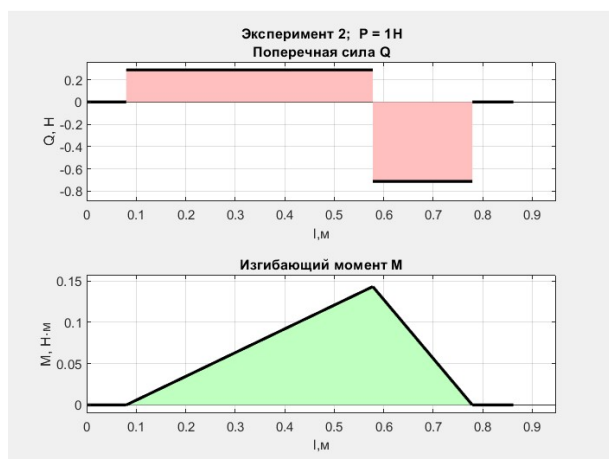


Рис. 9: Эпюры изгибающих моментов и сил для опыта №2.

## 5 Выводы

Основные цели работы (измерение линейных и угловых перемещений, возникающих в шарнирно закрепленной балке при изгибе ее сосредоточенной силой и сравнении измеренных величин с расчетными данными) были выполнены. Основные теоретические результаты приведены, результаты вычислений сведены в таблицы. Отдельно были рассмотрены два случая нагружения балки, в каждом из них были построены эпюры изгибающих моментов и сил.

Стоит отметить, что теоретический результат довольно сильно отличается от полученного практическими методами, в подобных задачах это допустимо. Однако, крайне интересно отметить, что при принудительном изменении модуля Юнга материала балки, например, до значения  $E = 4$  ГПа, можно наблюдать очень хорошее совпадение результатов теоретических расчетов и практических измерений (таблица 7 и 8).

№	$P$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\theta_1$	$\Delta \theta_1$	$\theta_3$	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	2.3	0.08	-5.1	0.08	1.6	0.08	-0.2	0.01	0.2	0.02
2	2	4.7	0.17	-10.3	0.18	3.2	0.17	-0.5	0.01	0.4	0.02
3	3	7.0	0.25	-15.5	0.25	4.9	0.27	-0.8	0.02	0.6	0.02
4	5	11.7	0.42	-25.9	0.41	8.1	0.41	-1.4	0.03	1.0	0.04
5	7	16.4	0.59	-36.3	0.60	11.4	0.54	-2.0	0.05	1.4	0.05
6	12	28.2	1.01	-62.2	1.01	19.6	1.00	-3.5	0.09	2.3	0.10

Таблица 7: Расчетные данные для опыта №1 ( $E = 4$  ГПа).

№	$P$	$y_1$	$\Delta y_1$	$y_2$	$\Delta y_2$	$y_3$	$\Delta y_3$	$\theta_1$	$\Delta \theta_1$	$\theta_3$	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	2.1	0.07	-6.3	0.07	2.9	0.08	-0.2	0.007	0.3	0.007
2	2	4.2	0.15	-12.6	0.11	5.8	0.14	-0.5	0.013	0.7	0.013
3	3	6.4	0.22	-19.0	0.20	8.8	0.20	-0.8	0.02	1.0	0.02
4	5	10.6	0.37	-31.7	0.34	14.7	0.36	-1.3	0.033	1.7	0.033
5	7	14.9	0.52	-44.4	0.52	20.6	0.53	-1.8	0.047	2.4	0.047
6	12	25.6	0.90	-76.1	0.92	35.3	0.91	-3.2	0.08	4.2	0.08

Таблица 8: Расчетные данные для опыта №2 ( $E = 4$  ГПа).