

Санкт-Петербургский Государственный Университет
Saint-Petersburg State University

ЛАБОРАТОРИЯ ПРОЧНОСТИ МАТЕРИАЛОВ

ОТЧЕТ

По лабораторной работе 6

«Определение линейных и угловых перемещений балки»

По дисциплине

«Лабораторный практикум, лабораторная работа»

Выполнили:

Баталов С. А.
Хайретдинова Д. Д.

Санкт-Петербург
2021

1 Цель работы

Под изгибом понимают такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях исследуемого образца возникают изгибающие моменты. Стержень, работающий на изгиб, называют балкой. Балка называется статически определимой, если все усилия и моменты в ней можно определить из уравнения статики. В частности, используемая в работе балка с одной шарнирно-подвижной и одной шарнирно-неподвижной опорами является статически определимой.

При прямом поперечном изгибе ось бруса, искривляясь, остается в силовой плоскости. В результате деформации каждое из сечений занимает новое положение: их центры тяжести получают вертикальные и горизонтальные линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются на некоторый угол вокруг нейтральной оси. Гипотеза плоских сечений – при повороте сечения остаются плоскими и перпендикулярными изогнутой оси балки.

Цель работы заключается в измерении линейных и угловых перемещений, возникающих в статически определимой шарнирно закрепленной балке при изгибе ее сосредоточенной силой и сравнении измеренных величин с расчетными данными.

2 Экспериментальная установка

Установка (рис. 1) выполнена в настольном исполнении и состоит из сварного основания 1, на котором закреплены стойки 2 и 3 в виде усеченной пирамиды. На стойках устанавливается контрольная балка 4, правый конец которой располагается на шарнирно-подвижной опоре 5, а левый конец на шарнирно-неподвижной опоре 6. Нагружение балки осуществляется через подвес 7 с грузами. На балке нанесены риски с интервалом 50 мм для измерения расстояний при выполнении работы. Линейные перемещения (прогибы) измеряются индикаторной головкой 8 часового типа, закрепленной на горизонтальной планке 9. Для измерения угловых перемещений опор балки используются индикаторные головки 10, закрепленные на рычаге 11. Расстояние между опорами 700 ± 2 мм. Балка выполнена из стали 45.

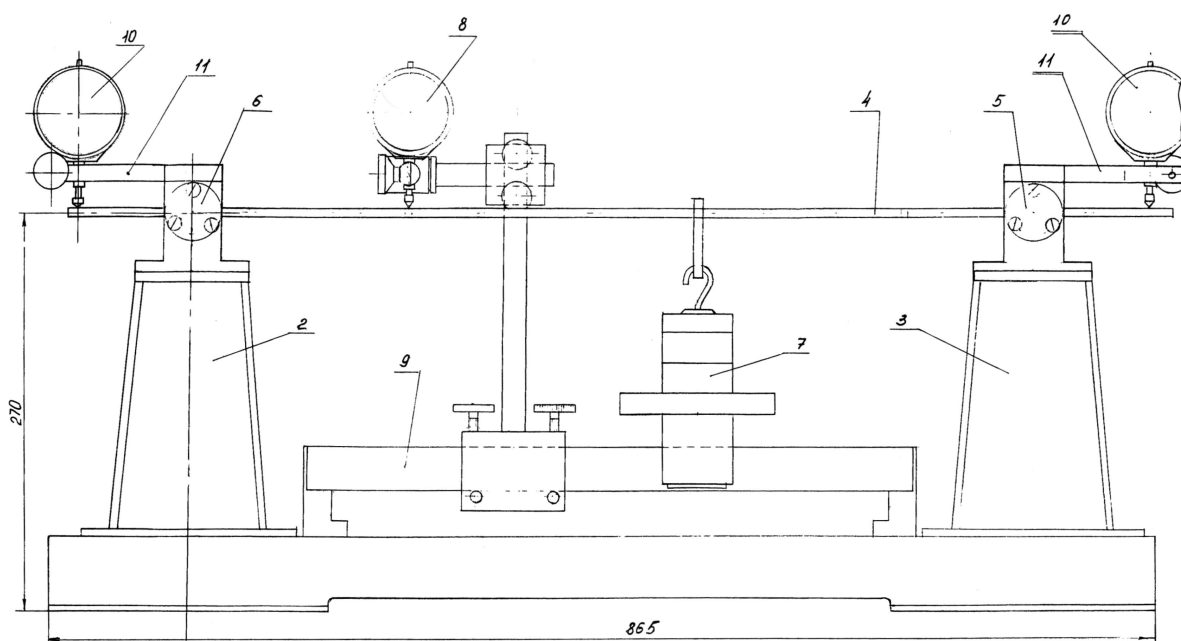


Рис. 1: Схема установки.

3 Теоретические исследования

3.1 Описание изгиба балки

Под изгибом понимают такой вид деформации, при котором в поперечных сечениях исследуемого образца возникают изгибающие моменты. Стержень, работающий на изгиб, обычно называют балкой. В результате деформации каждое из сечений занимает новое положение: их центры тяжести получают вертикальные ν и горизонтальные u линейные перемещения, а сами сечения поворачиваются на угол θ вокруг нейтральной оси – продольного сечения. в котором отсутствуют растяжение и сжатие (рис. 2).

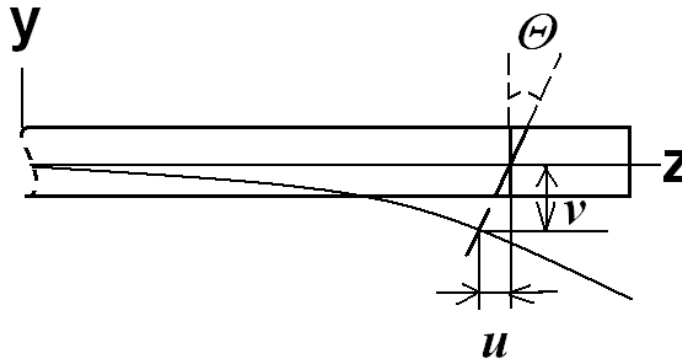


Рис. 2: Линейные и угловые перемещения при изгибе.

В сопротивлении материалов горизонтальными перемещениями u пренебрегают и изучают прогибы ν и повороты θ . Дифференциальное уравнение, описывающее изгиб балки известно:

$$\nu'' = \frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{M(z)}{EI}, \quad (1)$$

где $M(z)$ – распределение изгибающих моментов по длине образца, I – момент инерции поперечного сечения балки, y – координата по высоте сечения. Для балки прямоугольного поперечного сечения момент инерции равен (рис. 3):

$$I = \int_F y^2 dF = \frac{bh^3}{12}. \quad (2)$$

Интегрируя выражение (1), получим зависимость от координаты z угла поворота θ , а интегрируя второй раз – прогиба ν . Константы интегрирования можно определить из условий отсутствия прогиба на шарнирных опорах.

Изгибающий момент M в сечении z численно равен сумме моментов всех внешних сил (включая силы реакции в опорах), действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. При этом изгибающий момент считается положительным, если элемент изгибается выпуклостью вниз. Распределение какой-либо величины по длине балки в сопротивлении материалов называется эпюрой.

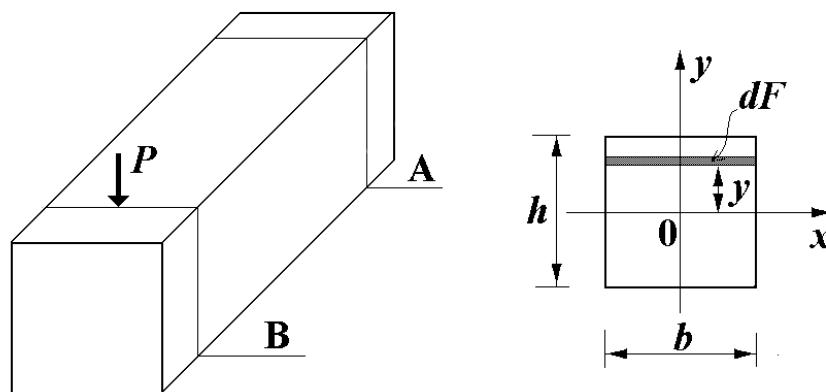


Рис. 3: К определению момента инерции сечения.

3.2 Расчет изгиба балки

Мы предполагаем, что нам известны все геометрические размеры балки и установки, материал балки, величина прикладываемого усилия. В нашей задаче (рис. 4) будем считать известными расстояния a_1, a_2, a_3 , нагрузку P , момент инерции I поперечного сечения балки и модуль Юнга E материала балки. Предполагаем, что координаты a_1 и a_3 соответствуют местам крепления балки, а a_2 соответствует точке приложения силы.

Наш стержень имеет несколько участков нагружения (рис. 4), поэтому определение произвольных постоянных приводит к решению системы уравнений с большим числом неизвестных, что связано с громоздкими вычислениями. Мы применим «метод Бубнова» интегрирования дифференциального уравнения упругой линии, что сведет задачу к определению лишь двух постоянных интегрирования.

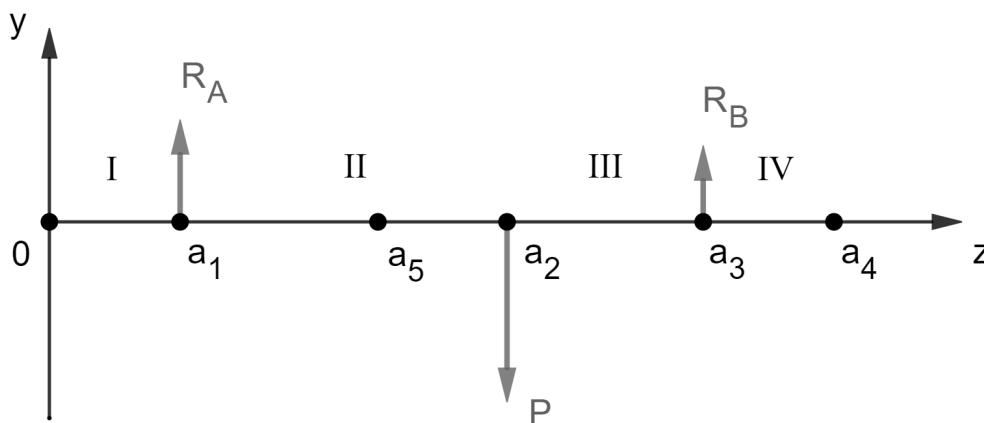


Рис. 4: Схема нагружения балки.

Для решения задачи проинтегрируем уравнение (1) один и два раза соответственно, используя метод Бубнова, получим уравнения для изгиба и для отклонения в четырех областях с двумя постоянными интегрирования, которые соответствуют начальному смещению y_0 и

начальному углу отклонения θ_0 балки:

$$\begin{aligned}
(I) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \theta_0 \\ y(z) = y_0 + \theta_0 z \end{cases}, \\
(II) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{(z-a_1)^2}{2} \right) + \theta_0 \\ y(z) = \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{(z-a_1)^3}{6} \right) + y_0 + \theta_0 z \end{cases}, \\
(III) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{(z-a_1)^2}{2} - P \frac{(z-a_2)^2}{2} \right) + \theta_0 \\ y(z) = \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{(z-a_1)^3}{6} - P \frac{(z-a_2)^3}{6} \right) + y_0 + \theta_0 z \end{cases}, \\
(IV) \quad & \Rightarrow \begin{cases} \theta(z) = \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{(z-a_1)^2}{2} - P \frac{(z-a_2)^2}{2} + R_B \frac{(z-a_3)^2}{2} \right) + \theta_0 \\ y(z) = \frac{1}{EI} \left(R_A \frac{(z-a_1)^3}{6} - P \frac{(z-a_2)^3}{6} + R_B \frac{(z-a_3)^3}{6} \right) + y_0 + \theta_0 z \end{cases}.
\end{aligned} \tag{3}$$

В данном случае нам требуется найти значения реакций R_A и R_B опор. Для этого воспользуемся уравнениями статики для сил и моментов:

$$\begin{cases} R_A + R_B - P = 0 \\ a_1 R_A - a_2 P + a_3 R_B = 0 \end{cases}, \tag{4}$$

теперь нужно найти значения постоянных y_0 и θ_0 , для этого воспользуемся граничными условиями (на опорах значение отклонения балки равно нулю):

$$\begin{cases} y(a_1) = 0 \\ y(a_3) = 0 \end{cases}. \tag{5}$$

Найдем выражения для постоянных интегрирования и запишем окончательно уравнения балки с учетом уравнений статики. Сначала выразим реакции опор:

$$\begin{cases} R_A = P \cdot \frac{a_2 - a_3}{a_1 - a_3} \\ R_B = P \cdot \frac{a_1 - a_2}{a_1 - a_3} \end{cases}. \tag{6}$$

Теперь запишем уравнения для поиска постоянных интегрирования:

$$\begin{aligned}
& \begin{cases} y_0 + \theta_0 a_1 = 0 \\ y_0 + \theta_0 a_3 = \frac{P}{6EI} \cdot \left((a_2 - a_3)(a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^3 \right) \end{cases} \Rightarrow \\
\Rightarrow & \begin{cases} y_0 = -\frac{P}{6EI} \cdot \frac{a_1((a_2 - a_3)(a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^3)}{a_3 - a_1} \\ \theta_0 = \frac{P}{6EI} \cdot \frac{(a_2 - a_3)(a_3 - a_1)^2 + (a_3 - a_2)^3}{a_3 - a_1} \end{cases}.
\end{aligned} \tag{7}$$

В итоге мы нашли все неизвестные величины, теперь достаточно подставить их в уравнения (3) для угла изгиба $\theta(z)$ и отклонения $y(z)$, чтобы получить окончательное решение задачи об изгибе балки.

4 Эксперимент

Все расчеты произведены при помощи пакета Matlab, с кодом программы можно ознакомиться отдельно. Эксперимент проводился в два этапа, сначала балка нагружается слева от центрального индикатора, потом справа. На рис. 5 изображена схема установки и все ее характерные размеры.

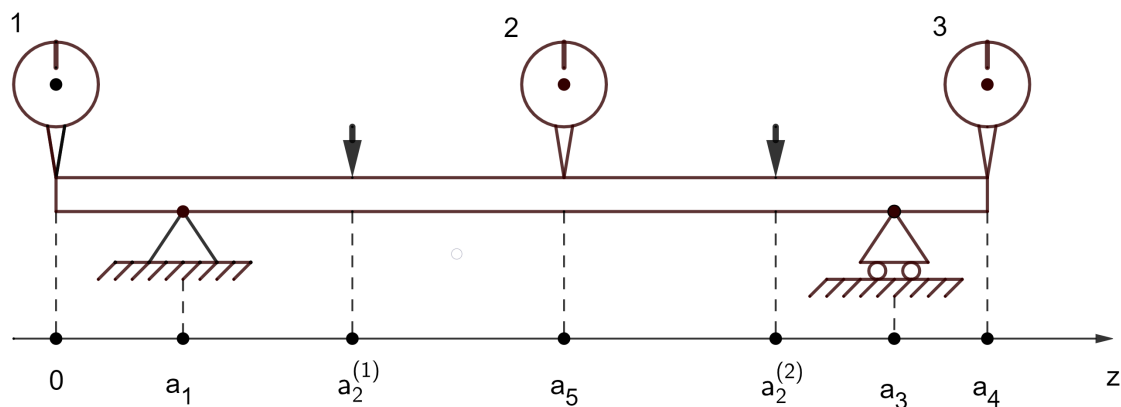


Рис. 5: Измерение длин балки.

Были измерены необходимые расстояния для 2 экспериментов: в 1-ом груз подвешен в точке $a_2^{(1)}$, и во 2-ом груз подвешен в точке $a_2^{(2)}$, также произвели замеры высоты h и толщины b балки с оценкой погрешности.

Величина	Значение	Погрешность	Размерность
b	5.4	±0.1	мм
h	36.1		
a_1	80	±2	
$a_2^{(1)}$	222		
$a_2^{(2)}$	578		
a_3	779		
a_4	862		
a_5	375		
E	200	—	ГПа

Таблица 1: Начальные данные.

Далее провели 2 эксперимента, постепенно нагружая и разгружая балку, снимали показания с индикаторных головок и заносили значения в таблицу, учитывая, что систематическая погрешность измерений для индикатора составляет $\Delta x = 0.5 \cdot 10^{-2}$ мм:

№	Р	Опыт №1			Опыт №2		
		Показания индикаторов			Показания индикаторов		
		y_1	y_2	y_3	y_1	y_2	y_3
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм					
1	1	2	-5	1	1	-4	1
2	2	5	-10	3	4	-12	5
3	3	7	-15	4	6	-19	8
4	5	12	-26	7	10	-32	14
5	7	17	-37	10	15	-44	20
6	12	28	-63	18	25	-76	34
7	7	17	-37	11	15	-45	21
8	5	12	-27	7	11	-33	15
9	3	7	-16	4	7	-20	9
10	2	5	-11	3	4	-13	6
11	1	3	-6	1	2	-6	3

Таблица 2: Экспериментальные данные для обоих опытов.

Будем опытно искать смещение y_0 и начальный угол θ_0 используя показания индикаторов. Смещение y_0 – это есть показание первого индикатора, θ_0 найдем по следующей формуле:

$$\theta \approx \operatorname{tg} \theta = \frac{y_0}{a_1}. \quad (8)$$

Теоретический расчет смещений и углов произведем отдельно, а далее сравним значения, которые получились в обоих случаях. Теперь перейдем к анализу первого эксперимента.

4.1 Опыт №1

Сначала проведем анализ экспериментальных данных, получим значения смещений и углов. Далее произведем теоретический расчет и сравним его с экспериментальными данными.

№	P	y_1	Δy_1	y_2	Δy_2	y_3	Δy_3	θ_1	$\Delta \theta_1$	θ_3	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	2	0.5	-5	0.5	1	0.5	-0.25	0.06	0.12	0.06
2	2	5		-10		3		-0.63	0.06	0.36	0.06
3	3	7		-15		4		-0.88	0.07	0.48	0.06
4	5	12		-26		7		-1.50	0.07	0.84	0.06
5	7	17		-37		10		-2.10	0.08	1.20	0.07
6	12	28		-63		18		-3.50	0.11	2.20	0.08

Таблица 3: Экспериментальные данные для опыта №1.

Теперь мы проведем теоретический расчет, используя результаты, полученные ранее. Будем учитывать погрешность косвенных измерений, но прежде чем перейти к основному расчету, найдем значение момента сечения балки:

$$I = 21171 \pm 429 \text{ мм}^4. \quad (9)$$

Теперь составим основную таблицу теоретических результатов:

№	P	y_1	Δy_1	y_2	Δy_2	y_3	Δy_3	θ_1	$\Delta \theta_1$	θ_3	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2} \text{ мм}$						$\cdot 10^{-3} \text{ рад}$			
1	1	0.045	0.002	-0.099	0.002	0.031	0.002	-0.006	0.001	0.004	0.001
2	2	0.090	0.003	-0.197	0.003	0.062	0.003	-0.011	0.001	0.007	0.001
3	3	0.134	0.005	-0.296	0.005	0.093	0.005	-0.017	0.001	0.011	0.001
4	5	0.224	0.008	-0.493	0.008	0.155	0.008	-0.028	0.001	0.019	0.001
5	7	0.313	0.011	-0.690	0.011	0.218	0.011	-0.039	0.001	0.026	0.001
6	12	0.537	0.019	-1.183	0.019	0.373	0.019	-0.067	0.002	0.045	0.002

Таблица 4: Расчетные данные для опыта №1.

Далее изобразим графики зависимости отклонения ν балки в трех точках и изгиба θ от величины приложенной нагрузки P .

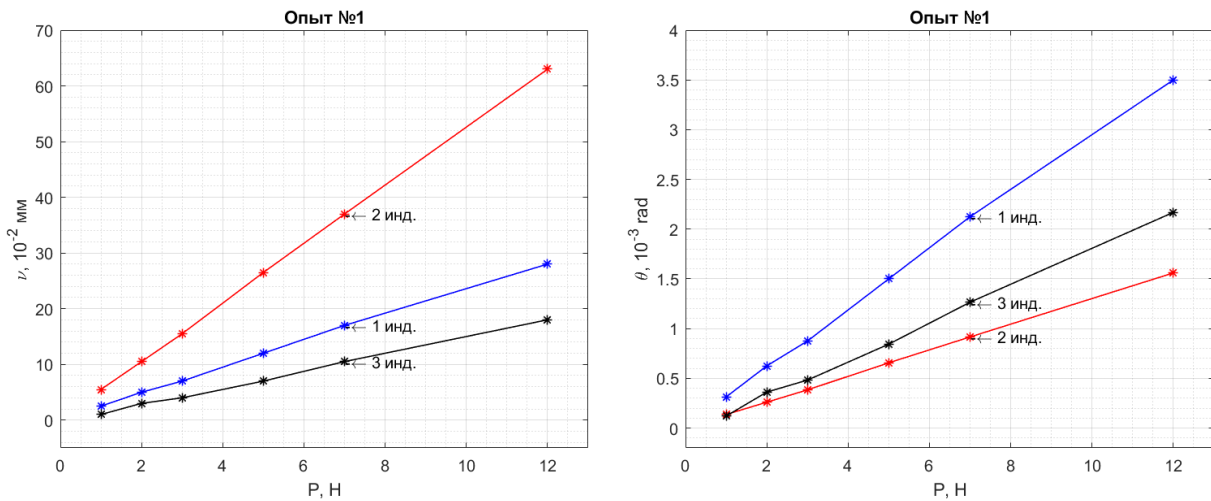


Рис. 6: Графики зависимости отклонения ν балки и изгиба θ от приложенной нагрузки P .

Теперь построим эпюры изгибающих моментов и эпюры сил, возникающих в стержне.

4.2 Опыт №2

Теперь рассмотрим ситуацию, когда сила приложена в другом месте балки. Так же как и в первом опыте проведем анализ экспериментальных данных, получим значения смещений и углов. Далее произведем теоретический расчет и сравним его с экспериментальными данными.

№	P	y_1	Δy_1	y_2	Δy_2	y_3	Δy_3	θ_1	$\Delta \theta_1$	θ_3	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	1		-4		1		-0.13	0.06	0.12	0.06
2	2	4		-12		5		-0.50	0.06	0.60	0.06
3	3	6	0.5	-19	0.5	8	0.5	-0.75	0.07	0.96	0.06
4	5	10		-32		14		-1.30	0.07	1.70	0.07
5	7	15		-44		20		-1.90	0.08	2.40	0.08
6	12	25		-76		34		-3.10	0.09	4.1	0.12

Таблица 5: Экспериментальные данные для опыта №2.

№	P	y_1	Δy_1	y_2	Δy_2	y_3	Δy_3	θ_1	$\Delta \theta_1$	θ_3	$\Delta \theta_3$
	Н	$\cdot 10^{-2}$ мм						$\cdot 10^{-3}$ рад			
1	1	0.041	0.001	-0.121	0.001	0.056	0.001	-0.005	0.001	0.007	0.001
2	2	0.081	0.003	-0.241	0.003	0.112	0.003	-0.010	0.002	0.013	0.001
3	3	0.122	0.004	-0.362	0.004	0.168	0.004	-0.015	0.002	0.020	0.001
4	5	0.203	0.007	-0.603	0.007	0.280	0.007	-0.025	0.001	0.034	0.001
5	7	0.284	0.010	-0.844	0.010	0.392	0.010	-0.036	0.001	0.047	0.001
6	12	0.487	0.017	-1.447	0.017	0.672	0.017	-0.061	0.002	0.081	0.002

Таблица 6: Расчетные данные для опыта №2.

Далее проведем аналогичный теоретический расчет, но в этот раз учтем, что центральный индикатор находится левее точки приложения нагрузки, то есть мы будем использовать уравнение балки для соответствующего промежутка. Зная это, составим требуемую таблицу.

Далее изобразим графики зависимости отклонения ν балки в трех точках и изгиба θ от величины приложенной нагрузки P .

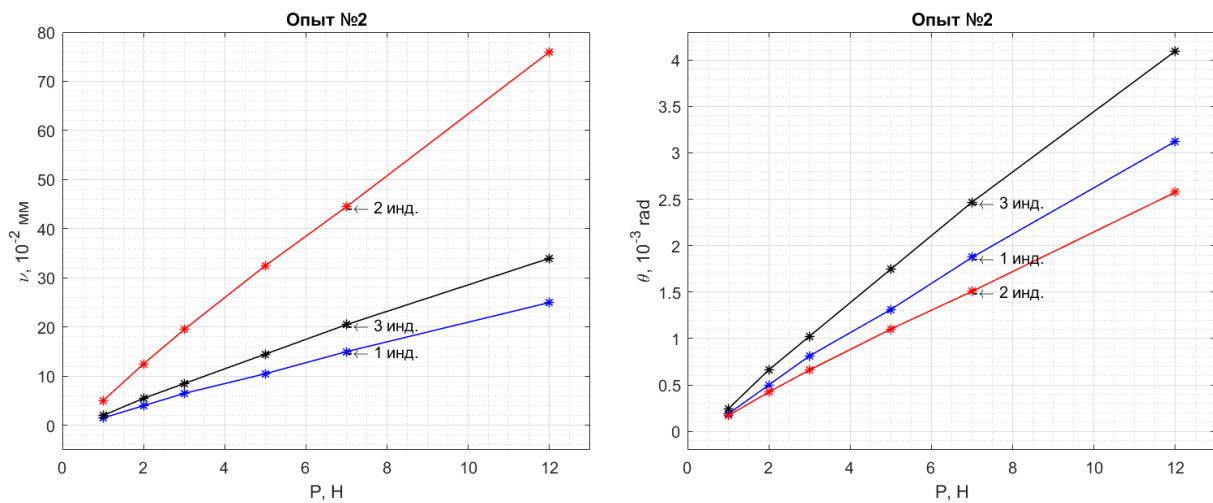


Рис. 7: Графики зависимости отклонения ν балки и изгиба θ от приложенной нагрузки P .

Теперь построим эпюры изгибающих моментов и эпюры сил, возникающих в стержне.

5 Выводы