

## Работа № 1

### ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТЫ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ ВИБРАЦИОННОГО СТОЛА

В этой работе студенты знакомятся с колебаниями механической системы с одной степенью свободы. Основной целью работы является экспериментальное определение частоты собственных колебаний системы и сравнение ее с теоретически найденным значением. Одновременно студенты знакомятся с компьютерными методами обработки экспериментальных данных.

#### Описание установки

Схема установки показана на рис. 1. Горизонтальная площадка 1 укреплена на четырех стойках 5. Стойки представляют собой плоские стальные пружины, нижние концы которых жестко закреплены на неподвижном основании, а верхние концы жестко скреплены с площадкой. Площадка 1 совершает вынужденные колебания под действием периодической возмущающей силы, создаваемой эксцентриками 3. Эксцентрики связаны с площадкой двумя пружинами 2. Вал эксцентриков 3 связан ременной передачей с валом электродвигателя 4, скорость вращения которого регулируется автотрансформатором. Для измерения частоты вращения эксцентриков 3 используется цифровой тахометр.

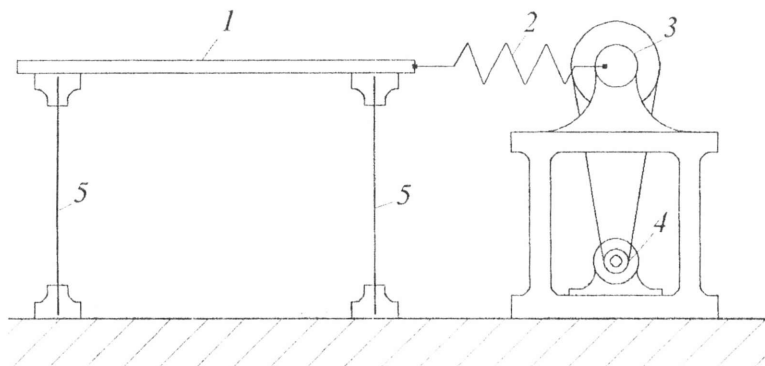


Рис. 1

На вибрационном столе установлен оптоэлектронный датчик перемещения, преобразующий механическое перемещение стола в

электрическое напряжение. Электрический сигнал с датчика перемещения поступает на вход автоматизированной системы обработки измерительной информации на базе персонального компьютера. Подробнее об устройстве и принципе действия цифрового тахометра, оптоэлектронного датчика перемещения и автоматизированной системы обработки измерительной информации рассказывается в Приложениях 2-4.

#### Теоретическое исследование

Рассмотрим горизонтальную площадку массой  $M$ , укрепленную на четырех упругих стойках, к которой приложена возмущающая сила  $\vec{Q}(t)$ , действующая в горизонтальном направлении.

Масса площадки значительно превышает массу стоек, поэтому массой стоек можно пренебречь, сохраняя их упругие свойства и считая всю систему системой с одной степенью свободы.

Направим ось  $x$  горизонтально (рис. 2) и начало отсчета поместим в равновесном положении  $O$  центра масс  $C$  площадки. Отклонение центра масс площадки от его равновесного положения ( $OC = x$ ) при наших предположениях будет определять состояние системы. Кинетическая энергия будет равна

$$T = \frac{1}{2} M \dot{x}^2.$$

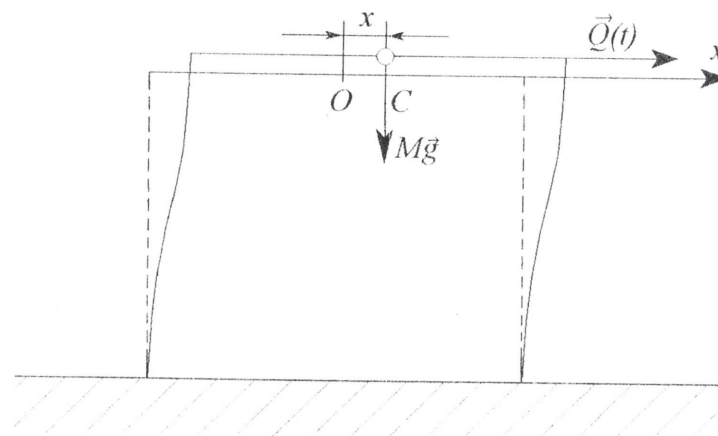


Рис. 2

Потенциальная энергия имеет вид

$$\Pi = 4 \left( \frac{1}{2} c x^2 \right),$$

где  $c$  — жесткость одной стойки.

Вообще говоря, в выражение потенциальной энергии следует включить слагаемые, обусловленные деформациями пружин 2 (см. рис. 1), однако жесткости этих пружин много меньше жесткостей стоек 5, поэтому указанными слагаемыми можно пренебречь.

Стойка представляет собой балку, оба конца которой зашцеplены. Верхний конец может перемещаться вместе с площадкой. Прогиб подвижного конца под действием приложенной к нему силы  $P$  равен

$$\Delta = \frac{Pl^3}{12EI}, \quad (1.1)$$

где  $l$  — длина балки,  $E$  — модуль Юнга,  $I$  — момент инерции сечения балки относительно нейтральной линии. Для прямоугольного сечения

$$I = \frac{b^3 h}{12}, \quad (1.2)$$

где  $b$  и  $h$  — стороны прямоугольника (рис. 3).

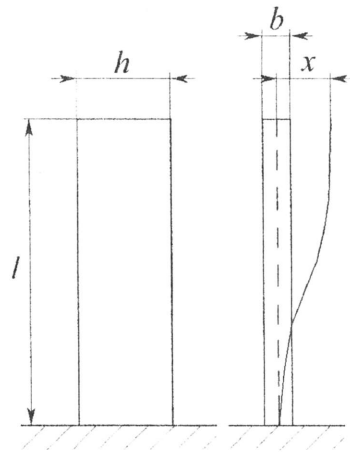


Рис. 3

На основании (1.1) и (1.2) жесткость стойки  $c$  равна

$$c = \frac{P}{\Delta} = \frac{Eb^3 h}{l^3}. \quad (1.3)$$

Составим уравнение движения в виде

$$M \ddot{x} + 4c x = Q(t).$$

Возмущающая сила создается вращающимися эксцентриками. Для определения этой силы воспользуемся выражением (3) из Приложения 1. Обозначим жесткость пружины  $c_{\Pi}$  и заменим  $\omega t$  на  $\omega t + \pi/2$ . Принимая во внимание то, что в этой лабораторной установке имеются два эксцентрика и две пружины, что эквивалентно одному эксцентрику с пружиной двойной жесткости, получаем возмущающую силу в виде

$$Q(t) = 2c_{\Pi} \varepsilon \sin \omega t.$$

Уравнение вынужденных колебаний вибрационного стола принимает вид

$$M \ddot{x} + 4c x = Q_0 \sin \omega t,$$

где  $Q_0 = 2c_{\Pi} \varepsilon$ . Поделив это уравнение на  $M$ , получим

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = q_0 \sin \omega t, \quad (1.4)$$

где

$$\omega_0^2 = \frac{4c}{M}, \quad q_0 = \frac{Q_0}{M}. \quad (1.5)$$

Общее решение уравнения (1.4) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения. Общее решение однородного уравнения соответствует собственным (свободным) колебаниям системы, а частное решение неоднородного уравнения — чисто вынужденным колебаниям. Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x = C_1 \cos \omega_0 t + C_2 \sin \omega_0 t,$$

где  $\omega_0$  — частота собственных колебаний системы, вычисляемая по формуле (1.5), а  $C_1$ ,  $C_2$  — произвольные постоянные, определяемые из начальных условий. Будем искать частное решение неоднородного уравнения (1.4) в виде  $x = A \sin \omega t$ . Тогда для амплитуды  $A$  вынужденных колебаний найдем

$$A = \frac{q_0}{\omega_0^2 - \omega^2}. \quad (1.6)$$

Из последнего выражения видно, что амплитуда вынужденных колебаний будет неограниченно расти по мере приближения частоты  $\omega$  к частоте  $\omega_0$  собственных колебаний системы. Это явление называется резонансом.

В проведенном расчете не приняты во внимание силы сопротивления, которые всегда имеются в реальных системах. Силы сопротивления обуславливают затухание собственных колебаний. Поэтому через некоторое время после начала колебаний под действием возмущающей силы устанавливаются колебания чисто вынужденного характера. Кроме того, силы сопротивления препятствуют неограниченному росту амплитуды вынужденных колебаний при резонансе.

Предположим, что силы сопротивления пропорциональны первой степени скорости. Тогда уравнение колебаний примет вид

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + \omega_0^2 x = q_0 \sin \omega t. \quad (1.7)$$

При  $h < \omega_0$  общее решение уравнения (1.7) есть сумма общего решения соответствующего однородного уравнения, определяющего свободные затухающие колебания, и частного решения неоднородного уравнения, определяющего вынужденные колебания.

Общее решение однородного уравнения имеет вид

$$x = Ce^{-nt} \sin(\omega_0' t + \gamma), \quad (1.8)$$

где  $\omega_0' = \sqrt{\omega_0^2 - n^2}$ ,  $n$  – коэффициент затухания, а  $C$  и  $\gamma$  – произвольные постоянные.

Частное решение неоднородного уравнения (1.7) будем искать в виде

$$x = A \sin(\omega t + \alpha),$$

где  $\alpha$  – фазовый сдвиг, обусловленный затуханием. Подставив в уравнение (1.7) искомый вид решения, найдем

$$A = \frac{q_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4n^2 \omega^2}}, \quad \alpha = \arctg \frac{2n\omega}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

При резонансе, т. е. при совпадении частоты возмущающей силы  $\omega$  с частотой собственных колебаний  $\omega_0$ , амплитуда равна

$$A = \frac{q_0}{2n\omega_0}, \quad (1.9)$$

т. е. имеет конечное значение, которое тем больше, чем меньше коэффициент затухания  $n$ .

Исследуя  $A(\omega)$  на экстремум, установим, что амплитуда  $A$  достигает максимума, равного

$$A_{\max} = \frac{q_0}{2n\sqrt{\omega_0^2 - n^2}}, \quad (1.10)$$

не при резонансе, а при

$$\omega_* = \sqrt{\omega_0^2 - 2n^2}.$$

Если коэффициент затухания  $n$  будет мал, то  $\omega_*$  мало отличается от  $\omega_0$ , а максимальное значение амплитуды (1.10) – от амплитуды (1.9).

Для измерения собственной частоты обычно применяют или резонансный метод, или метод обработки осциллограмм.

Идея резонансного метода определения собственной частоты системы заключается в том (подробнее см. в Приложении I), что вместо собственных колебаний наблюдают вынужденные. Варьируя частоту возмущающей силы, наблюдают амплитуду вынужденных колебаний. Когда последняя достигнет максимального значения, замеряют частоту возмущающей силы и утверждают, что собственная частота равна найденному значению частоты возмущающей силы.

Ошибка резонансного метода, как это следует из предыдущего рассмотрения, тем меньше, чем меньше коэффициент затухания  $n$ .

Перейдем к методу обработки осциллограммы. Пусть рис. 4 представляет экспериментально полученный график свободных колебаний стола, соответствующих решению (1.8). Измеряя отрезки  $AC = CE = EG = \dots$ , определяем условный период  $T$  свободных колебаний при наличии затухания. Частота  $\omega_0'$  равна  $\frac{2\pi}{T}$ .

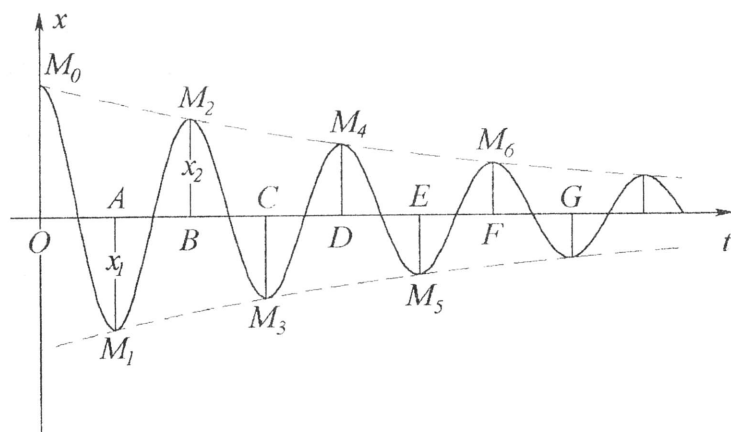


Рис. 4

В соответствии с выражением (1.8) отрезок  $OM_0 = C \sin \gamma$  равен отклонению от положения равновесия в начальный момент времени. Отрезки  $AM_1 = x_1$ ,  $BM_2 = x_2$ , ..., представляющие собой величины последовательных максимальных отклонений площадки от равновесного положения, равны

$$x_1 = Ce^{-nt_1}, x_2 = x_1 e^{-\frac{nT}{2}}, x_3 = x_2 e^{-\frac{nT}{2}}, \dots,$$

$$\text{где } t_1 = \frac{1}{\omega'_0} \left( \arctg \frac{\omega'_0}{n} - \gamma \right).$$

Измерив на осциллограмме два последовательных отклонения, можно определить логарифмический декремент колебаний:

$$\delta = \ln \left| \frac{x_k}{x_{k+1}} \right| = \frac{nT}{2}.$$

Тогда найдется коэффициент  $n = \frac{2\delta}{T}$ . Определив  $\omega'$  и  $n$ , можно

найти частоту  $\omega_0$  собственных колебаний системы без затухания.

Осциллограмму свободных колебаний можно также использовать для получения амплитудно-частотной характеристики вынужденных колебаний вибрационного стола. Комплексная амплитудно-частотная характеристика получается в результате преобра-

зования Лапласа над осциллограммой свободных колебаний, возникших под воздействием ударной нагрузки (см. Приложение 4).

### Порядок проведения эксперимента

Для определения частоты собственных колебаний стола резонансным методом следует включить в сеть электродвигатель 4 (см. рис. 1) и, регулируя частоту вращения электродвигателя, добиться наибольшей амплитуды колебаний стола. Амплитуду колебаний можно оценить по масштабной линейке или по показаниям вольтметра переменного тока, подсоединенного к оптоэлектронному датчику горизонтального перемещения стола. Максимум показаний вольтметра соответствует максимуму амплитуды. Частота возмущающей силы измеряется непосредственно по показаниям цифрового тахометра.

Для записи осциллограммы свободных колебаний стола следует подключить вход платы сбора данных к оптоэлектронному датчику перемещения стола, вывести стол из состояния равновесия, воздействуя на него ударом, и записать осциллограмму в файл с расширением dat. Этот файл представляет собой запись значений отклонений стола  $x_k$  от положения равновесия в последовательные равноотстоящие моменты времени  $t_k$ , т. е. табличное представление функции  $x(t)$  на равномерной сетке значений времени  $t$ .

Для обработки осциллограммы следует интерполировать данные, содержащиеся в полученном файле, и построить график интерполирующей функции. По графику определить частоту свободных колебаний и логарифмический декремент колебаний.

Для построения амплитудно-частотной характеристики необходимо выполнить преобразование Лапласа над осциллограммой свободных колебаний и затем построить график функции  $|x(i\omega)|$ . Преобразование Лапласа будем вычислять, пользуясь методом прямоугольников в следующем виде:

$$x(s) = \sum_{k=0}^N x_k e^{-shk} h, \quad (1.11)$$

где  $h$  – шаг сетки значений времени,  $N$  – количество отсчетов,

содержащихся в записи осциллограммы. При вычислении следует использовать  $h = 10^{-3}$  с.

Для вычисления теоретического значения частоты собственных колебаний стола следует измерить параметры стоек  $l$ ,  $b$ ,  $h$  и далее воспользоваться формулами (1.3) и (1.5). В описываемой установке модуль Юнга материала стоек  $E = 2.2 \cdot 10^{11}$  Па, масса стола  $M = 9.1$  кг.

## Работа № 2

### КОЛЕБАНИЯ МАССЫ ПРИ КИНЕМАТИЧЕСКОМ ВОЗБУЖДЕНИИ

В настоящей лабораторной работе студенты знакомятся с простейшей колебательной системой – массой, колеблющейся на пружине. Целью работы является исследование вынужденных колебаний в системе с кинематическим возмущением и построение амплитудно-частотной характеристики вынужденных колебаний.

#### Описание установки

Лабораторная установка, показанная на рис. 5, состоит из массы на пружине подвешенного вертикально механизма для введения в систему возмущающей силы и линейки для измерения амплитуды колебаний маятника. Груз 1 подвешен на пружине 2 и скользит по вертикальным направляющим стержням 3. Верхний конец пружины 2 соединен с кулисой 4. Кулиса 4 движется в вертикальном направлении под действием стержня 5, соединенного с камнем 6 кулисного механизма. Камень 6 вращается по часовой стрелке через червячную передачу 7 электродвигателем 8. Направляющие 9 ограничивают движение кулисы 4 только вертикальным направлением. При вращении камня 6 с постоянной угловой скоростью кулиса 4 совершает гармонические колебания в вертикальном направлении и является источником возмущающей силы в системе. Частоту возмущающей силы можно менять, регулируя частоту вращения электропривода. Линейка 10 предназначена для измерения амплитуды колебаний маятника.

#### Краткие теоретические сведения

Для построения математической модели вынужденных колебаний рассматриваемой системы введем ось координат  $x$ , направленную вертикально вниз, с началом координат в центре камня кулисного механизма. Вычислим проекции на ось  $x$  всех сил, действующих на груз. Учет силы тяжести, силу упругости и силу тре-