

Санкт-Петербургский государственный университет

St Petersburg University

Математико-Механический факультет

Отчет по лабораторной работе №7

«Поперечные колебания круглой пластины»

Выполнили студенты 351 гр.:

Бобу Юлия,

Соболев Леонид,

Теплова Татьяна,

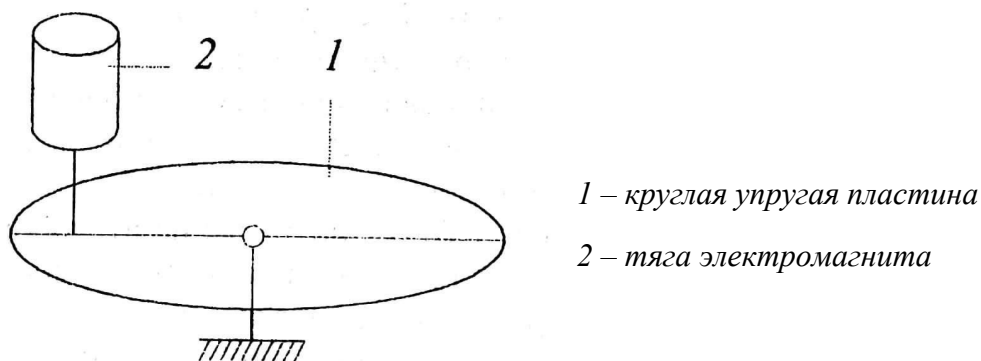
Курбанов Нурлан,

Егоров Павел,

Пчельников Павел.

Санкт-Петербург, 2020

Схема установки



Исходные данные

Толщина пластины $h = 3 \text{ мм}$

Радиус пластины $R = 24 \text{ см}$

Диаметр отверстия $d = 8 \text{ мм}$

Коэффициент Пуассона $\sigma = 0.5$

Плотность материала пластины $\rho = 2850 \text{ кг/м}^3$

Модуль упругости $E = 7 \cdot 10^{10} \text{ Па}$

Теоретические данные

Собственная форма колебаний однородной пластины подчиняется дифференциальному уравнению в полярных координатах:

$$\Delta(\Delta w) - \frac{\rho h p^2}{D} w = 0, \text{ где } \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}, D = \frac{E h^3}{12(1-\sigma^2)}$$

Краевые условия, соответствующие свободному краю пластины, получаются в виде:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (2 - \sigma) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0.$$

Условия жесткого закрепления по краям центрального отверстия принимают вид:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0.$$

Первое уравнение будет выполнено для форм, удовлетворяющих уравнениям:

$$\Delta w \pm k^2 w, \quad k^4 = \frac{\rho h p^2}{D}$$

Решение ищется методом разделения переменных в виде $w(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi)$.

Подставляя это решение в уравнение и разделяя переменные, получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2\Phi}{d\varphi^2} + n^2\Phi = 0, \quad \frac{d^2R}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dR}{dr} + \left(\pm k^2 - \frac{n^2}{r^2}\right)R = 0$$

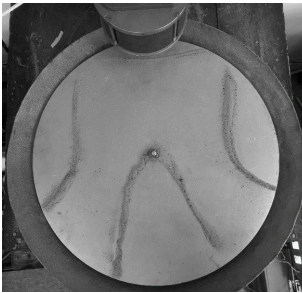
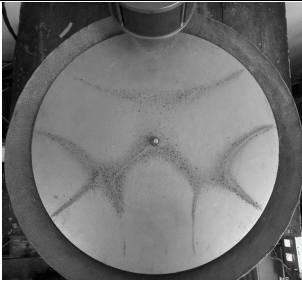
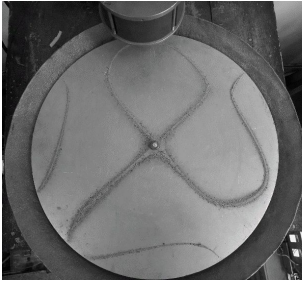

Общее решение для целых значений n имеет вид:

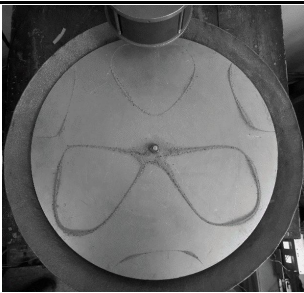
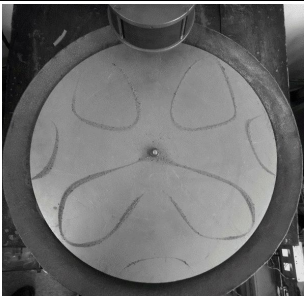
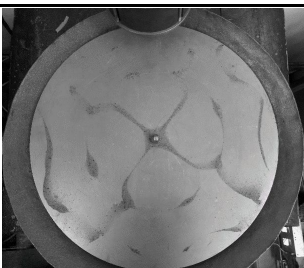
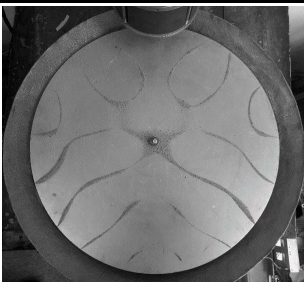

$$w(r, \varphi) = \cos(n\varphi) (J_n(kr) + \lambda I_n(kr) + \mu N_n(kr) + \nu K_n(kr))$$

J_n – функция Бесселя порядка n ; I_n – модифицированная функция Бесселя порядка n ;

N_n – функция Неймана порядка n ; K_n – функция Бесселя порядка n .

Экспериментальные данные

Собственная частота, Гц	Собственная форма
220	
370	
430	
530	

620	
880	
1020	
1140	
1340	
1670	