Работа № 5

КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ВАЛА С ДИСКАМИ

Работа знакомит студентов с колебаниями механической системы с тремя степенями свободы. Целью работы является экспериментальное определение частот и главных форм собственных колебаний системы, их теоретический расчет и последующее сравнение. При измерении частот студенты знакомятся с работой электронного цифрового тахометра.

Описание установки

На рис. 16 изображена схема лабораторной установки. Основной частью установки является упругий вал *8* с тремя жестко укрепленными на нем дисками *1*, *2* и *3*. Вал может вращаться в подшипниках *4*, установленных на станине. К ободу среднего диска *2* прикреплены пружины *5*, одна из которых связана со станиной, а другая – с эксцентриком *6*, закрепленным на валу электродвигателя *7*. На валу электродвигателя укреплены маховик *9* для стабилизации частоты вращения и диск оптоэлектронного тахометрического датчика. Сигнал с тахометрического датчика поступает на вход электронного цифрового тахометра, показания которого соответствуют частоте вращения вала в герцах.

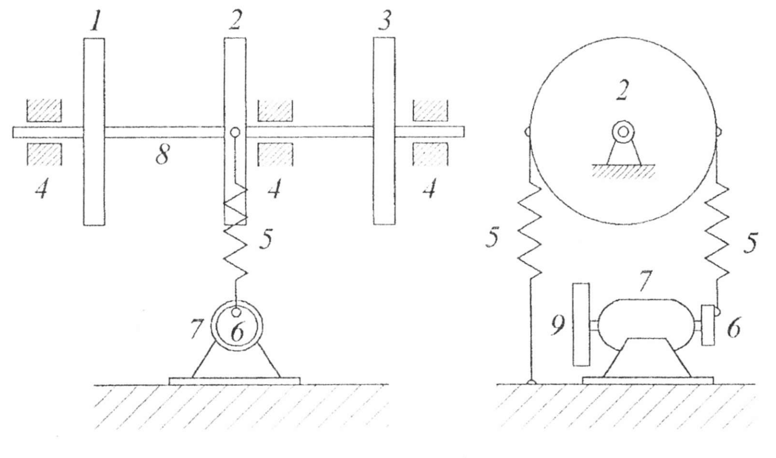

Рис. 16

Теоретическое исследование

Крутильные колебания упругих валов возникают при резком изменении момента, приложенного к валу, например, при пуске или остановке двигателя, вращающего вал. Крутильные колебания возникают и тогда, когда на вал действует периодически изменяющийся момент, например, если вал связан с кривошипно-шатунным механизмом. В этом случае колебания вала особенно опасны, так как может наступить резонанс. Непосредственное наблюдение крутильных колебаний вращающихся валов затруднено тем, что они накладываются на общее вращение вала. Поэтому в лабораторной установке, предназначенной для наблюдения крутильных колебаний, возбуждаются вынужденные колебания неподвижного вала.

В рассматриваемой установке моменты инерции дисков много больше момента инерции вала относительно его продольной оси, поэтому моментом инерции вала можно пренебречь и рассматривать эту систему как систему с тремя степенями свободы.

В качестве обобщенных координат выберем углы φ_1, φ_2, φ_3, характеризующие отклонения дисков от положения равновесия. Тогда кинетическая энергия системы будет равна

$$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} I_i \dot{\varphi}_i^2,$$

где I_i – момент инерции i-го диска относительно его оси. Обозначим l_1 – расстояние между дисками *1* и *2*, l_2 – расстояние между дисками *2* и *3*. Жесткость на скручивание соответствующих участков вала может быть определена по формуле

$$c_k = \frac{GI_p}{l_k}, \quad k = 1, 2,$$

где G – модуль сдвига для материала вала; $I_p = \frac{1}{2}\pi r^4$ – полярный момент инерции поперечного сечения вала, r – радиус вала. Жесткость одной пружины *5* обозначим c_{11}. Тогда потенциальная энергия системы равна

$$\Pi = \frac{1}{2}\left[c_1\left(\varphi_2-\varphi_1\right)^2 + c_2\left(\varphi_3-\varphi_2\right)^2 + 2c_\Pi\left(r_2\varphi_2\right)^2\right].$$

Упругую силу, действующую на диск *2* при вращении вала мотора *7* с угловой скоростью ω, можно записать в виде

$$c_\Pi e \sin\omega t,$$

Обобщенная сила, соответствующая координате φ_2, равна моменту

$$Q_2 = r_2 c_\Pi e \sin\omega t,$$

где r_2 – радиус диска 2, e – расстояние от точки крепления пружины *5* до центра эксцентрика *6*.

Уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} &I_1\ddot{\varphi}_1 + c_1\left(\varphi_1-\varphi_2\right) = 0,\\ &I_2\ddot{\varphi}_2 - c_1\varphi_1 + c_3\varphi_2 - c_2\varphi_3 = q_0\sin\omega t,\\ &I_3\ddot{\varphi}_3 - c_2\varphi_2 + c_2\varphi_3 = 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где для краткости обозначено

$$c_3 = c_1 + c_2 + 2c_\Pi r_2^2, \quad q_0 = r_2 c_\Pi e.$$

Как и в предыдущих работах, общее решение системы (5.1) складывается из общего решения соответствующей однородной системы, определяющего собственные колебания, и частного решения неоднородной системы, определяющего вынужденные колебания. Однако, в связи с наличием сопротивлений, собственные колебания затухают, и устанавливаются чисто вынужденные колебания, которые будем искать в виде

$$\varphi_i = \Phi_i \sin\omega t, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.2}$$

Для амплитуд крутильных колебаний Φ_i получим систему уравнений

$$\begin{aligned} &\left(c_1-\omega^2 I_1\right)\Phi_1 - c_1\Phi_2 = 0,\\ &-c_1\Phi_1 + \left(c_3-\omega^2 I_2\right)\Phi_2 - c_2\Phi_3 = q_0,\\ &-c_2\Phi_2 + \left(c_2-\omega^2 I_3\right)\Phi_3 = 0. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Пусть определитель

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_1-\omega^2 I_1 & -c_1 & 0\\ -c_1 & c_3-\omega^2 I_2 & -c_2\\ 0 & -c_2 & c_2-\omega^2 I_3 \end{vmatrix}$$

системы (5.3) отличен от нуля. Тогда решение этой системы таково:

$$\Phi_i(\omega) = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad i = 1,\ 2,\ 3. \tag{5.4}$$

Здесь Δ_i – определитель, полученный из Δ заменой i-го столбца столбцом, составленным из правых частей уравнений (5.3).

Амплитуды $\Phi_i(\omega)$ будут безгранично возрастать, когда знаменатель Δ будет приближаться к нулю. Такое неограниченное возрастание амплитуд вынужденных колебаний соответствует явлению резонанса в том случае, если не учитываются силы сопротивления. Резонанс имеет место при совпадении частот возмущающей силы с одной из частот собственных колебаний системы. Приравнивая определитель $\Delta(\omega)$ к нулю, получаем уравнение собственных частот. Нетрудно установить, что к уравнению $\Delta(\omega) = 0$ можно придти также и при рассмотрении общего решения однородной системы, соответствующей (5.1).

Вычислив определитель Δ, запишем уравнение частот в следующей форме:

$$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \tag{5.5}$$

где

$$\begin{aligned} &y = \omega^2,\\ &a_0 = I_1 I_2 I_3, \quad a_1 = -c_2 I_1 I_2 - c_3 I_1 I_3 - c_1 I_2 I_3,\\ &a_2 = c_2(c_3-c_2)I_1 + c_1 c_2 I_2 + c_1\left(c_3-c_1\right)I_3,\\ &a_3 = -c_1 c_2\left(c_3-c_1-c_2\right) = -2c_1 c_2 c_\Pi r_2^2. \end{aligned}$$

Так как в последовательности коэффициентов уравнения (5.1) имеются три перемены знаков, то это уравнение имеет три вещественных положительных корня. Для вычисления корней кубического уравнения (5.5) y_1, y_2, y_3 можно воспользоваться формулами Кардано. Однако проще искать их численными методами.

Как уже было отмечено, при приближении частоты ω к одной из частот собственных колебаний ω_i амплитуды колебаний дисков стремятся к бесконечности. В реальной системе из-за наличия сил сопротивления амплитуды колебаний дисков резко возрастают, но остаются конечными. Определим отношение этих амплитуд при резонансе. На основании (5.4) имеем

$$\frac{\Phi_1(\omega_k)}{\Phi_2(\omega_k)} = \frac{\Delta_1(\omega_k)}{\Delta_2(\omega_k)}, \quad \frac{\Phi_2(\omega_k)}{\Phi_3(\omega_k)} = \frac{\Delta_2(\omega_k)}{\Delta_3(\omega_k)}, \quad k = 1, 2, 3.$$

Вычисляя эти отношения при ω_1, ω_2 и ω_3, получаем распределение амплитуд, схематически изображенное на рис. 17.

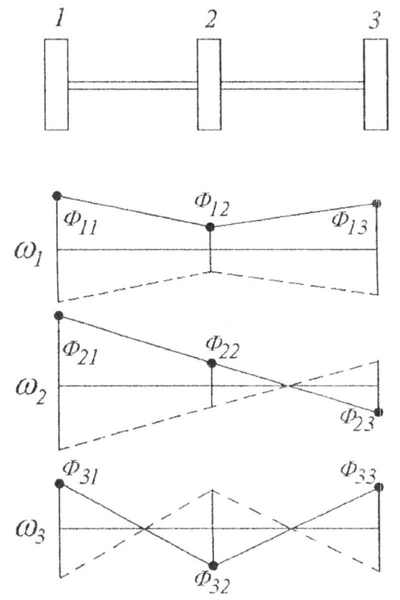

Рис. 17

При частоте ω_1 все три диска одновременно поворачиваются в одну сторону. Частоте ω_2 отвечает форма крутильных колебаний, которая характеризуется наличием одного узла: когда диск *1* поворачивается в ту же сторону, что и диск *2*, диск *3* поворачивается в противоположную сторону – его колебания, как говорят, происходят в противофазе с колебаниями дисков *1* и *2*. При частоте ω_3 имеет место форма крутильных колебаний, характеризуемая наличием двух узлов: колебания дисков *1* и *3* происходят в противофазе с колебаниями диска *2*.

Порядок проведения эксперимента

Включить установку и проверить ее работоспособность. Для этого регулятором автотрансформатора запустить электродвигатель. При этом диски должны колебаться, а на шкале цифрового

частотомера должно появиться значение частоты вращения вала электродвигателя.

Регулируя частоту вращения двигателя, добиться резонанса на первой собственной частоте. Увеличивая частоту вращения мотора, получить резонанс на второй собственной частоте. Правильность резонанса проверить по наличию одного узла на нити-индикаторе, прикрепленной к верхним точкам дисков.

Далее, увеличивая частоту вращения мотора, получить резонанс на третьей собственной частоте. Правильность резонанса проверить по наличию двух узлов на нити-индикаторе. Отметить показания тахометра и измерить амплитуды колебаний дисков во всех трех случаях резонанса. Остановить мотор и выключить установку.

Измерить геометрические размеры вала и дисков и расстояния между дисками. Вычислить моменты инерции дисков и крутильную жесткость участков вала. Плотность материала дисков $\rho = 7.85 \cdot 10^3$ кг/м^3, модуль сдвига материала вала $G = 8.33 \cdot 10^{10}$ Па, жесткость пружины $c_{\Pi} = 4900$ Н/м. Вычислить собственные частоты и главные формы колебаний и сравнить их с экспериментальными результатами.