

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - S \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \quad (6.29)$$

В случае шарнирного закрепления концов (см. (6.5)) форма колебаний имеет прежний вид (6.20), а частоты определяются из соотношения

$$\omega_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{p} + \frac{S}{p} \left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.30)$$

Сравнение формул (6.21) и (6.30) показывает, что наличие растягивающей силы  $S$  увеличивает частоты собственных колебаний.

### Порядок проведения эксперимента

Включить установку. Постепенным увеличением частоты вращения электродвигателя добиться резонанса на первой собственной частоте, о наличии которого можно судить по максимуму амплитуды первого главного колебания балки. Отметить частоту возмущающей силы по показаниям цифрового тахометра. Аналогичным образом добиваются резонансных колебаний балки на второй и третьей собственных частотах и отмечают значения частоты возмущающей силы. Опыт производится при отсутствии растягивающей силы и при ее наличии.

Для вычисления теоретического значения собственных частот следует измерить параметры  $l$ ,  $b$  и  $h$ . В описываемой установке модуль Юнга материала балки  $E = 0.7 \cdot 10^{11}$  Па, а его плотность  $\rho = 2.85 \cdot 10^3$  кг/м<sup>3</sup>.

## Работа № 7

### КРИТИЧЕСКИЕ УГЛОВЫЕ СКОРОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВАЛА

В данной работе студенты знакомятся с явлением потери устойчивости прямолинейной формы вращающегося вала. Целью работы является измерение первых двух критических угловых скоростей, наблюдение соответствующих форм потери устойчивости и сравнение полученных результатов с теоретическими.

### Описание установки

Схема установки представлена на рис. 21. Основной частью установки является гибкий деревянный вал 3, установленный на станине в двух сферических подшипниках 2 и 4. Вал может скользить вдоль оси подшипника 4. Описанный способ крепления вала дает возможность валу вращаться не только в прямолинейном, но и в изогнутом состоянии. Вал 3 связан с валом электродвигателя 1, находящегося на станине.

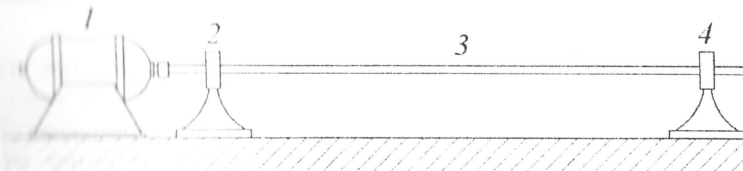


Рис. 21

Частота вращения электродвигателя регулируется автотрансформатором. Измерение угловой скорости вращения вала производится по показаниям цифрового тахометра, отмечающего частоту вращения вала. На станине установлено кольцо, ограничивающее чрезмерно большой прогиб вала.

### Теоретическое исследование

При вращении сравнительно тонких и длинных валов часто можно наблюдать следующее явление. Если постепенно увеличивать угловую скорость  $\omega$ , то при приближении к некоторому зна-

чению  $\omega_1$  вал теряет свою прямолинейную форму, и ось вала начинает описывать некоторую поверхность вращения. При дальнейшем увеличении угловой скорости вал вновь приобретает прямолинейную форму. При приближении к угловой скорости  $\omega_2$  вал опять описывает поверхность вращения, но уже другой формы, и т.д. Такие угловые скорости называются критическими угловыми скоростями. Упругий вал представляет собой систему с бесконечным числом степеней свободы. Поэтому теоретически критических угловых скоростей у вала бесконечно много.

При вращении со скоростью, равной критической, прямолинейная форма вала становится динамически неустойчивой. Это явление можно рассматривать как резонанс особого рода. Вращение вала с критической или околокритической скоростью недопустимо, так как значительные деформации вала, возникающие при этом, могут привести к поломке вала или соприкасающихся с ним деталей установки. Кроме того, вращение вала с такими скоростями вызывает значительную вибрацию машины, что также нежелательно. Рабочая скорость вала должна значительно отличаться от критической. Обычно принимают  $\omega \leq 0.7\omega_1$  или  $\omega \geq 1.3\omega_1$  ( $i = 1, 2, \dots$ ). Валы, работающие со скоростями, превышающими первую критическую, называются гибкими.

Приведем решение задачи о нахождении критических угловых скоростей упругого вала в простейшем случае. Пусть имеется однородный цилиндрический вал, вращающийся в сферических подшипниках. Сферический подшипник допускает вращение вокруг любой оси, проходящей через его центр. Поэтому концы вала можно считать шарнирно закрепленными. Действием силы тяжести будем пренебрегать.

Если невращающийся вал вывести из положения равновесия и затем предоставить самому себе, то он будет совершать колебания около положения равновесия под действием силы упругости. Если искривить вал, вращающийся с угловой скоростью, меньшей первой критической, то он после ряда поперечных колебаний вернется в прямолинейное состояние. Однако в этом случае сила, восстанавливающая прямолинейную форму, ослабляется благодаря появлению центробежной силы, действующей на каждый элемент вала. Таким образом, вал оказывается нагруженным непрерывно распределенной нагрузкой, пропорциональной величине прогиба в каждом сечении.

При увеличении угловой скорости интенсивность распределенной нагрузки тоже увеличивается. Можно достичь такой скорости, при которой силы инерции будут полностью уравновешивать силы упругости и, следовательно, смогут удерживать вал в искривленном состоянии. Соответствующая угловая скорость и будет критической, так как в этом случае любая случайная причина может вызвать сильное искривление вала.

Для нахождения критической угловой скорости составим дифференциальное уравнение изогнутой оси вала для однородной балки постоянного сечения. Как известно из курса сопротивления материалов, уравнение изогнутой оси имеет вид

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (7.1)$$

где  $E$  — модуль упругости материала,  $I$  — момент инерции площади поперечного сечения вала относительно его диаметра (для круга  $I = \pi r^4 / 4$ ),  $y(x, t)$  — прогиб,  $M$  — изгибающий момент. Дифференцируя уравнение (7.1) два раза по  $x$  и принимая во внимание, что вторая производная от изгибающего момента равна интенсивности  $q$  распределенной нагрузки, получаем

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = q.$$

При вращении вала на каждый элемент изогнутого вала действует центробежная сила

$$p\omega^2 y dx,$$

где  $p$  — масса единицы длины вала. Следовательно, интенсивность распределенной нагрузки в нашем случае равна

$$q = p\omega^2 y,$$

поэтому дифференциальное уравнение изогнутой оси вала принимает вид

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = p\omega^2 y. \quad (7.2)$$

Уравнение (7.2) не содержит членов, явно зависящих от времени, так как мы пренебрегли действием силы тяжести. Действительно, уравнение (7.2) написано в проекции на направление  $OO'$  (рис. 22). На рис. 22 изображено сечение плоскостью, перпендикулярной изогнутой оси вала. Точка  $O$  — центр сечения не-

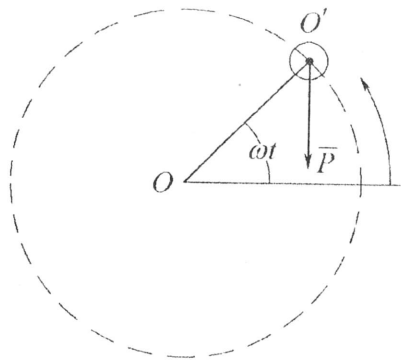


Рис. 22

изогнутого вала, точка  $O'$  — центр сечения вращающегося изогнутого вала в момент  $t$ . Проекция силы тяжести соответствующего поперечного сечения вала на направление  $OO'$  дала бы член вида  $P \sin \omega t$ .

Установим, при каких условиях вал может вращаться равномерно, приняв изогнутую форму. Так как уравнение (7.2) не содержит членов, явно зависящих

от времени, то его можно рассматривать как обыкновенное дифференциальное уравнение. Общий интеграл этого уравнения имеет вид

$$Y = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{-\alpha x} + C_3 \cos \alpha x + C_4 \sin \alpha x, \quad (7.3)$$

где

$$\alpha = \sqrt[4]{\frac{p \omega^2}{EI}}.$$

Уравнение (7.2) и граничные условия полностью совпадают с уравнением (6.10) и граничными условиями (6.12) в работе № 6. Воспользовавшись результатами этой работы, приходим к заключению, что вал может вращаться в изогнутом состоянии при следующих значениях коэффициента  $\alpha$ :

$$\alpha_n = \frac{\pi n}{l}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Соответствующие значения критических угловых скоростей

$$\omega_n = \frac{\pi^2 n^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{p}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (7.4)$$

Критические угловые скорости совпадают с частотами собственных поперечных колебаний вала, их последовательные значения относятся как квадраты чисел натурального ряда.

Как показано в работе № 6, значениям

$$\alpha_n = \pi n / l$$

соответствуют следующие ненулевые решения уравнения (7.2):

$$Y_n = C_4^{(n)} \sin \alpha_n x, \quad n = 1, 2, 3, \dots,$$

которые определяют различные формы искривления вращающегося вала. Каждой критической скорости соответствует своя форма искривления вала (см. рис. 20).

Таким образом, если угловая скорость идеально сбалансированного вала не совпадает ни с одним из критических значений (7.4), то вращающийся вал стремится сохранить прямолинейную форму. Если угловая скорость вала совпадает с одним из критических значений, то, кроме прямолинейной формы, возможны и искривленные формы динамического равновесия вала. Иными словами, при критических скоростях прямолинейная форма вала теряет свою устойчивость.

То, что мы наблюдаем на опыте, несколько отличается от теоретических результатов. Во-первых, строго говоря, невозможно изготовить идеально сбалансированный вал, поэтому вал немного «бьет» при любой угловой скорости. Во-вторых, при критических угловых скоростях вала его прогиб не бывает произвольным, но имеет конечную величину. Это объясняется тем, что при выводе уравнений мы пользовались линейной постановкой задачи, а также не учитывали диссипативных сил.

### Порядок проведения эксперимента

Включить установку. Плавно увеличивая частоту вращения электродвигателя, добиться потери устойчивости вала на первой критической угловой скорости. Об этом режиме движения можно судить, наблюдая деформацию вала по первой форме. Отметить частоту вращения вала по показаниям частотомера.

Увеличивая частоту вращения электродвигателя, добиться потери устойчивости вала на второй критической угловой скорости. Отметить деформацию вала по второй форме. Отметить частоту вращения вала по показаниям частотомера.

Не рекомендуется долго держать вал в состоянии вращения на второй критической угловой скорости.

Для теоретического расчета критических угловых скоростей использовать следующие данные: длина вала  $l = 1950$  мм, диаметр вала  $d = 16$  мм, модуль упругости материала вала  $E = 1.38 \cdot 10^{10}$  Па, плотность  $\rho = 500$  кг/м<sup>3</sup>.