Работа №6

ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ БАЛКИ

Работа знакомит студентов с колебаниями механической системы с бесконечным числом степеней свободы. Основной целью работы является экспериментальное определение первых трех частот собственных колебаний балки, сравнение их с теоретическими значениями, а также наблюдение форм собственных колебаний.

Описание установки

На рис. 18 изображена схема установки. Основной частью установки является упругая балка *4*, шарнирно закрепленная в опорах *3* и *8*, установленных на столе. Опора *3* может перемещаться вдоль направляющих стола. Фиксируя опору *3* в разных положениях, можно изменять рабочую длину балки *4*. Шарнир опоры *3* допускает продольное перемещение балки.

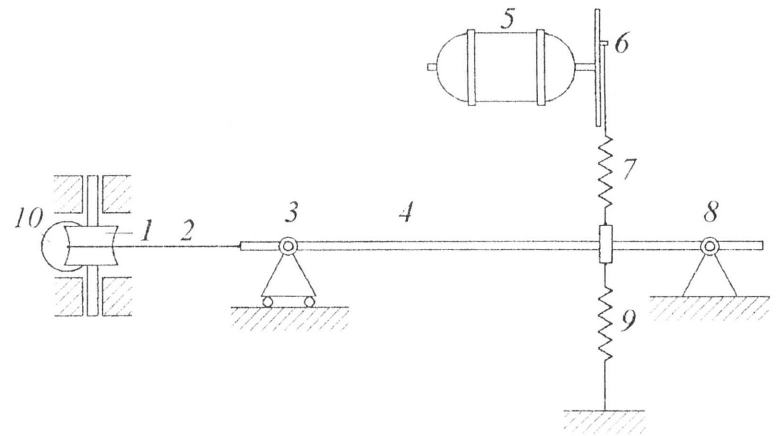

Рис. 18

Упругие колебания балки вызываются периодической возмущающей силой, создаваемой мотором *5* с эксцентриком *6*. Упругая связь балки с эксцентриком осуществляется посредством пружины *7*, предварительный натяг которой компенсируется пружиной *9*. Угловая скорость мотора регулируется автотрансформатором. К

концу балки прикреплен трос *2*, перекинутый через ролик *1*. К другому концу троса можно прикрепить груз *10* и тем самым создать продольную силу, растягивающую балку. Частота вращения мотора наблюдается непосредственно на цифровом тахометре.

Теоретическое исследование

Во всех предыдущих работах рассматривались системы с конечным числом степеней свободы. Они получались в результате того, что за одними элементами конструкции сохранялись их упругие свойства, а массой их пренебрегали; вся масса предполагалась сосредоточенной в других элементах конструкции, которые считались абсолютно жесткими.

При рассмотрении колебаний балки нет оснований для такого допущения. Будем предполагать, что каждый элемент балки обладает массой и упругими свойствами. Для определения деформаций, возникающих в балке при колебаниях, необходимо знать перемещение всех ее точек. Поэтому балка является системой с бесконечным числом степеней свободы. Колебания таких систем описываются дифференциальными уравнениями в частных производных, тогда как системы с конечным числом степеней свободы – обыкновенными дифференциальными уравнениями.

Для вывода уравнения поперечных колебаний балки рассмотрим равновесие элемента балки длиной dx (рис. 19). На концы элемента действуют перерезывающие силы Q и $Q+\dfrac{\partial Q}{\partial x}dx$ и изгибающие моменты M и $M+\dfrac{\partial M}{\partial x}dx$. Кроме того, на элемент действует поперечная распределенная нагрузка $\left(f(x,t)-p\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}\right)dx$, состоящая из внешней нагрузки $f(x,t)$, отнесенной к единице длины балки, и нагрузки от действия сил инерции. Здесь y – величина поперечного смещения оси балки, p – масса единицы длины балки. Для прямоугольного сечения

$$p=\rho bh,$$

где ρ – плотность материала балки, b – ширина, h – высота сечения.

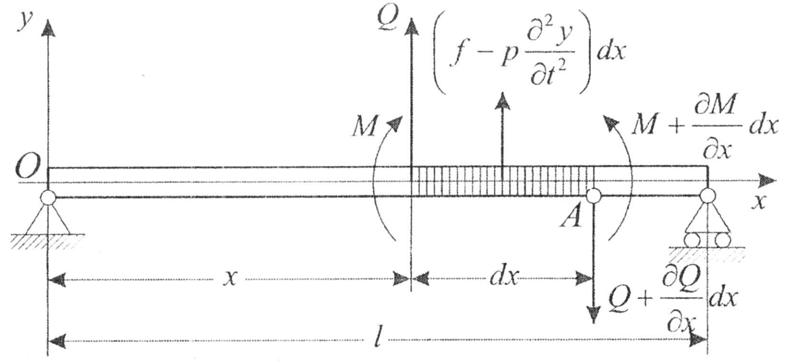

Рис. 19

Проецируя на ось y все силы, действующие на элемент, получаем

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = f(x,t) - p\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}. \tag{6.1}$$

Уравнение моментов этих сил относительно точки A дает

$$\frac{\partial M}{\partial x} = Q. \tag{6.2}$$

При выводе соотношений (6.1) и (6.2) пренебрегали членами порядка $(dx)^2$ по сравнению с dx.

Из курса сопротивления материалов известно, что при малых перемещениях изгибающий момент M связан со смещением y соотношением

$$M = EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}, \tag{6.3}$$

где E – модуль упругости, I – момент инерции площади поперечного сечения балки относительно нейтральной оси. Дифференцируя по x один раз равенство (6.2) и два раза равенство (6.3) и исключая из них величины Q и M, получаем дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(EI\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\right) + p\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = f(x,t). \tag{6.4}$$

К этому уравнению следует добавить граничные условия. Они будут различными для различных случаев закрепления концов. В нашем случае оба конца балки шарнирно оперты, поэтому прогиб и изгибающий момент равны нулю и граничные условия принимают вид

$$y = 0, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0 \quad \text{при} \quad x = 0, \quad x = l. \tag{6.5}$$

Проинтегрируем уравнение свободных колебаний балки (уравнение (6.4) при $f(x,t) \equiv 0$) с шарнирно опертыми концами (условие (6.5)). Будем предполагать, что балка однородна и имеет постоянное поперечное сечение. В этом случае $E = \text{const}$, $I = \text{const}$ (для прямоугольного сечения $I = b^3h/12$). При наших предположениях уравнение (6.4) и граничные условия принимают вид

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + p\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0, \tag{6.6}$$

$$y(0,t) = y(l,t) = 0, \quad \frac{\partial^2 y(0,t)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y(l,t)}{\partial x^2} = 0. \tag{6.7}$$

Решение будем искать в виде произведения двух функций, одна из которых зависит только от координаты x, а другая – только от времени t:

$$y = X(x)T(t). \tag{6.8}$$

Подставляя решение (6.8) в уравнение (6.6) и деля на XT, получаем

$$\frac{EI\dfrac{d^4 X}{dx^4}}{X} = -p\frac{\dfrac{d^2 T}{dt^2}}{T}. \tag{6.9}$$

Так как левая часть соотношения (6.9) не зависит от t, а правая часть – от x, то отсюда следует, что левая и правая части равны некоторому постоянному числу λ, т. е.

$$EI\frac{d^4 X}{dx^4} - \lambda X = 0, \tag{6.10}$$

$$p\frac{d^2T}{dt^2}+\lambda T=0. \tag{6.11}$$

Подставляя решение (6.8) в уравнение (6.7), находим

$$X(0)=X(l)=0,\quad \left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=0}=\left.\frac{d^2X}{dx^2}\right|_{x=l}=0. \tag{6.12}$$

Оказывается, что не при любых значениях λ существует отличное от нуля решение уравнения (6.10), удовлетворяющее условиям (6.12). Займемся нахождением этих λ и соответствующих им решений. Будем искать частное решение (6.10) в виде

$$X=e^{\alpha x}. \tag{6.13}$$

Подставляя решение (6.13) в уравнение (6.10), имеем

$$\alpha^4=\frac{\lambda}{EI}. \tag{6.14}$$

Четырем корням уравнения (6.14) соответствуют четыре частных решения уравнения (6.10) вида

$$e^{\alpha x},\quad e^{-\alpha x},\quad \cos\alpha x,\quad \sin\alpha x.$$

Общее решение есть их линейная комбинация

$$X=C_1e^{\alpha x}+C_2e^{-\alpha x}+C_3\cos\alpha x+C_4\sin\alpha x. \tag{6.15}$$

Удовлетворяя условиям (6.12), придем к системе четырех линейных однородных уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4:

$$\begin{gathered}
C_1+C_2+C_3=0,\\
C_1e^{\alpha l}+C_2e^{-\alpha l}+C_3\cos\alpha l+C_4\sin\alpha l=0,\\
C_1\alpha^2+C_2\alpha^2-C_3\alpha^2=0,\\
C_1\alpha^2e^{\alpha l}+C_2\alpha^2e^{-\alpha l}-C_3\alpha^2\cos\alpha l-C_4\alpha^2\sin\alpha l=0.
\end{gathered} \tag{6.16}$$

Эта система имеет ненулевое решение, если ее определитель Δ равен нулю. Вычисления показывают, что

$$\Delta=4\alpha^4\left(e^{-\alpha l}-e^{\alpha l}\right)\sin\alpha l.$$

Поскольку $\alpha\neq 0$ и $l\neq 0$, определитель Δ может быть равным нулю лишь в том случае, если

$$\sin\alpha l=0. \tag{6.17}$$

Решая последнее уравнение, найдем

$$\alpha_k=\frac{k\pi}{l},\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots, \tag{6.18}$$

и, подставив решение (6.18) в уравнение (6.14), получим

$$\lambda_k=EI\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4. \tag{6.19}$$

При условии (6.17) из системы (6.16) получаем

$$C_1=C_2=C_3=0,\quad C_4\neq 0,$$

и поэтому уравнение (6.10) при граничных условиях (6.12) имеет решения

$$X_k(x)=C_4^{(k)}\sin\alpha_k x,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6.20}$$

Функции $X_k(x)$ определяет форму колеблющейся балки в фиксированный момент времени.

На рис. 20 представлены первые три формы собственных

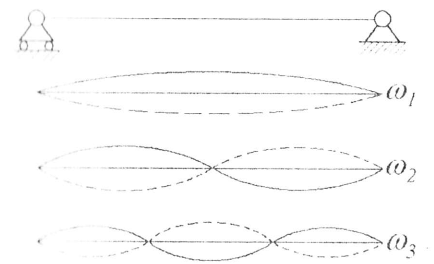

Рис. 20

колебаний. Легко заметить, что $X_k(x)$ обращается в нуль в промежутке $0<x<l$ при $k=2$ в одной точке, при $k=3$ – в двух точках и т. д. Эти точки называются узлами.

Переходя к уравнению (6.11), находим

$$T_k(t)=A_k\cos\omega_k t+B_k\sin\omega_k t,\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где частота собственных колебаний ω_k равна

$$\omega_k=\sqrt{\frac{\lambda_k}{p}}=\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2\sqrt{\frac{EI}{p}},\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6.21}$$

Отсюда видно, что последовательные частоты собственных колебаний пропорциональны квадратам чисел натурального ряда.

Общее решение задачи о свободных колебаниях балки получим как линейную комбинацию решений вида (6.8)

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos \omega_k t + B_k \sin \omega_k t \right) \sin \alpha_k x, \qquad (6.22)$$

где произвольные постоянные A_k и B_k определяются из начальных условий.

Рассмотрим теперь задачу о вынужденных колебаниях балки под действием периодической возмущающей силы, создающей внешнюю поперечную нагрузку вида

$$f(x,t) = F(x) \sin \omega t.$$

В этом случае общее решение уравнения

$$EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + p \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = F(x) \sin \omega t \qquad (6.23)$$

складывается из общего решения (6.22) соответствующего однородного уравнения (6.6) и некоторого частного решения, которое мы будем искать в виде

$$y(x,t) = Y(x) \sin \omega t. \qquad (6.24)$$

Подставляя (6.24) в (6.23), находим, что функция $Y(x)$ должна удовлетворять уравнению

$$EI \frac{d^4 Y}{dx^4} - p\omega^2 Y = F(x) \qquad (6.25)$$

и граничным условиям (6.12).

Будем искать функцию $Y(x)$ в виде ряда

$$Y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} D_k \sin \alpha_k x \qquad (6.26)$$

с неопределенными коэффициентами D_k. Решение (6.26) удовлетворяет граничным условиям (6.12). Для определения коэффициента D_k подставим (6.26) в (6.25), умножим обе части результата на $\sin \alpha_k x$ и проинтегрируем по x от 0 до l. Тогда, учитывая ортогональность функций $\sin \alpha_k x$, находим

$$D_k = \frac{\frac{2}{l} \int_0^l F(x) \sin \alpha_k x \, dx}{\omega_k^2 - \omega^2}. \qquad (6.27)$$

Частное решение уравнения (6.23) при условиях (6.5) имеет вид

$$y(x,t) = \frac{2}{l} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\int_0^l F(\xi) \sin \alpha_k \xi \, d\xi}{\omega_k^2 - \omega^2} \sin \alpha_k x \right) \sin \omega t. \qquad (6.28)$$

В формуле (6.28) выделим член ряда, соответствующий некоторому частному значению $k = m$. По мере приближения частоты возмущающей силы ω к частоте собственных колебаний ω_m этот член будет неограниченно возрастать (если только $\int_0^l F(\xi) \sin \alpha_m \xi \, d\xi \neq 0$) и сумма ряда будет определяться в основном этим членом. При совпадении частот ω и ω_m имеет место резонанс. Можно сказать, что в случае резонанса устанавливаются вынужденные колебания соответствующей формы

$$X_m = A_m \sin \alpha_m x$$

с неограниченной амплитудой. Опыт показывает, что при резонансе амплитуда колебаний значительно возрастает, но остается ограниченной. Это несоответствие с теоретическими выводами, полученными выше, объясняется тем, что при выводе уравнения колебаний балки мы не учитывали влияние диссипативных сил.

В лабораторной установке возмущающая сила такова, что ее можно считать сосредоточенной в точке ее приложения. Рассматривая ее в виде дельта-функции Дирака от координаты, придем к заключению, что и в этом случае остаются справедливыми выводы о вынужденных колебаниях при резонансах.

На вопросе о колебаниях балки, растянутой продольной силой, подробно останавливаться не будем, отсылая интересующихся к указанной ниже литературе. Приведем лишь некоторые результаты. Уравнение свободных колебаний балки, растянутой продольной силой S, имеет вид

$$EI\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - S\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + p\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0. \qquad (6.29)$$

В случае шарнирного закрепления концов (см. (6.5)) форма колебаний имеет прежний вид (6.20), а частоты определяются из соотношения

$$\omega_k = \sqrt{\left(\frac{k\pi}{l}\right)^4 \frac{EI}{p} + \frac{S}{p}\left(\frac{k\pi}{l}\right)^2}, \quad k = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \qquad (6.30)$$

Сравнение формул (6.21) и (6.30) показывает, что наличие растягивающей силы S увеличивает частоты собственных колебаний.

Порядок проведения эксперимента

Включить установку. Постепенным увеличением частоты вращения электродвигателя добиться резонанса на первой собственной частоте, о наличии которого можно судить по максимуму амплитуды первого главного колебания балки. Отметить частоту возмущающей силы по показаниям цифрового тахометра. Аналогичным образом добиваются резонансных колебаний балки на второй и третьей собственных частотах и отмечают значения частоты возмущающей силы. Опыт производится при отсутствии растягивающей силы и при ее наличии.

Для вычисления теоретического значения собственных частот следует измерить параметры l, b и h. В описываемой установке модуль Юнга материала балки $E = 0.7\cdot 10^{11}$ Па, а его плотность $\rho = 2.85\cdot 10^3$ кг/м^3.

Работа №7

КРИТИЧЕСКИЕ УГЛОВЫЕ СКОРОСТИ ВРАЩАЮЩЕГОСЯ ВАЛА

В данной работе студенты знакомятся с явлением потери устойчивости прямолинейной формы вращающегося вала. Целью работы является измерение первых двух критических угловых скоростей, наблюдение соответствующих форм потери устойчивости и сравнение полученных результатов с теоретическими.

Описание установки

Схема установки представлена на рис. 21. Основной частью установки является гибкий деревянный вал *3*, установленный на станине в двух сферических подшипниках *2* и *4*. Вал может скользить вдоль оси подшипника *4*. Описанный способ крепления вала дает возможность валу вращаться не только в прямолинейном, но и в изогнутом состоянии. Вал *3* связан с валом электродвигателя *1*, находящегося на станине.

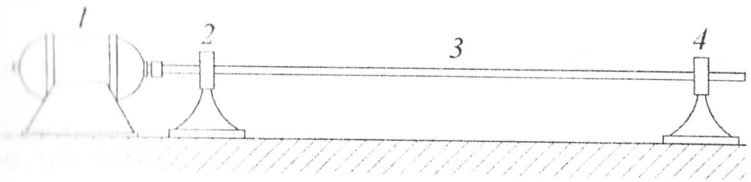

Рис. 21

Частота вращения электродвигателя регулируется автотрансформатором. Измерение угловой скорости вращения вала производится по показаниям цифрового тахометра, отмечающего частоту вращения вала. На станине установлено кольцо, ограничивающее чрезмерно большой прогиб вала.

Теоретическое исследование

При вращении сравнительно тонких и длинных валов часто можно наблюдать следующее явление. Если постепенно увеличивать угловую скорость ω, то при приближении к некоторому зна-