

Санкт-Петербургский государственный университет
Saint-Petersburg State University

Кафедра теоретической и прикладной механики

ОТЧЕТ
По лабораторной работе 4
«Крутильные колебания вала с дисками»

По дисциплине
«Лабораторный практикум по теоретической механике»

Выполнили:

Баталов С. А.
Антонова М. Н.
Клюшин М. А.
Хайретдинова Д. Д.

Санкт-Петербург
2021

1. Описание установки

В данной работе рассматриваются колебания механической системы с тремя степенями свободы. Целью работы является экспериментальное определение частот и главных форм собственных колебаний системы, их теоретический расчет и последующее сравнение.

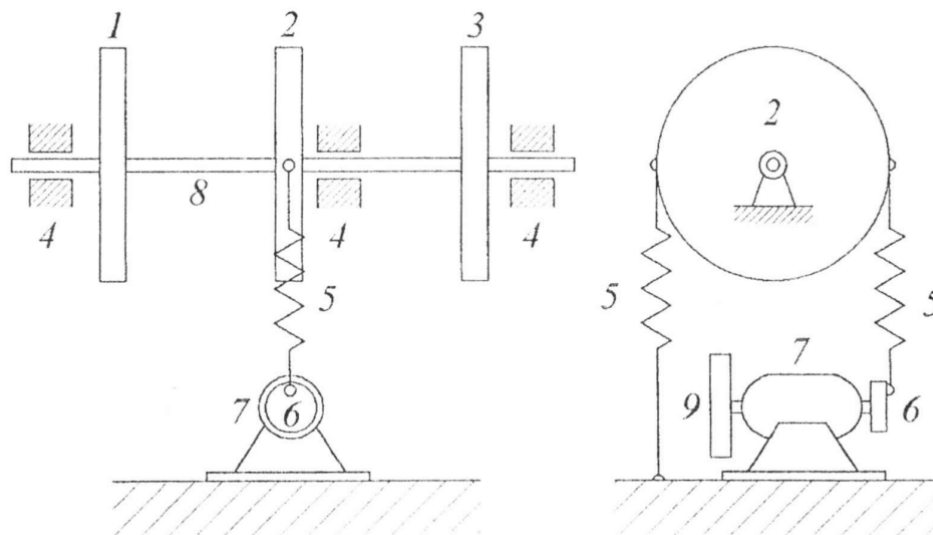


Рис. 1. Схема лабораторной установки.

На рис. 1 изображена схема лабораторной установки. Основной частью установки является упругий вал 8 с тремя жестко укрепленными на нем дисками 1, 2 и 3. Вал может вращаться в подшипниках 4, установленных на станине. К ободу среднего диска 2 прикреплены пружины 5, одна из которых связана со станиной, а другая – с эксцентриком 6, закрепленном на валу электродвигателя 7. На валу электродвигателя укреплены маховик 9 для стабилизации частоты вращения и диск оптоэлектронного тахометрического датчика. Сигнал с тахометрического датчика поступает на вход электронного цифрового тахометра, показания которого соответствуют частоте вращения вала в герцах.

2. Параметры установки

В следующей таблице представлены заранее известные величины: плотность материала дисков – ρ , модуль сдвига материала вала – G , жесткость пружины – $c_{\text{п}}$.

Таблица 1: Известные константы.

Номер	Величина	Значение	Размерность
1	ρ	$7,85 \cdot 10^3$	кг/м ³
2	G	$8,33 \cdot 10^{10}$	Па
3	$c_{\text{п}}$	4900	Н/м

Для расчета частот и форм собственных колебаний системы потребуется измерить некоторые параметры установки. Данные измерений приведены в таблице 2. Здесь r_i – радиусы дисков, d_i – толщины дисков, l_i – расстояния между дисками, r – радиус упругого вала, e – расстояние от точки крепления пружины до центра эксцентрика.

Таблица 2: Результаты измерений параметров установки.

Номер	Величина	Значение	Погрешность	Размерность
1	r_1	0,150	0,0005	м
2	r_2	0,150	0,0005	м
3	r_3	0,150	0,0005	м
4	d_1	0,025	0,0005	м
5	d_2	0,020	0,0005	м
6	d_3	0,025	0,0005	м
7	l_1	0,445	0,0005	м
8	l_2	0,616	0,0005	м
9	r	0,005	0,00005	м
10	e	0,021	0,0005	м

3. Теоретические исследования

Для начала произведем вспомогательные вычисления и рассчитаем моменты инерции дисков. Для этого воспользуемся формулой (1).

$$I_i = \frac{1}{2}m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r_i^4 d_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Далее определим жесткость на скручивание участков вала. Воспользуемся формулой (2). Здесь $I_p = \frac{1}{2}\pi r^4$ – полярный момент инерции поперечного сечения вала.

$$c_k = \frac{GI_p}{l_k} = \frac{G\pi r^4}{2l_k}, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Для дальнейшей работы составляется система уравнений Лагранжа второго рода для данной задачи и упрощается. В итоге приходим к уравнению (3), решениями которого являются квадраты искомых частот ω_i собственных колебаний системы.

$$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \quad y = \omega^2. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= I_1 I_2 I_3, \quad a_1 = -c_2 I_1 I_2 - c_3 I_1 I_3 - c_1 I_2 I_3, \\ a_2 &= c_2(c_3 - c_2)I_1 + c_1 c_2 I_2 + c_1(c_3 - c_1)I_3, \\ a_3 &= -c_1 c_2(c_3 - c_1 - c_2), \quad c_3 = c_1 + c_2 + 2c_{\pi} r_2^2. \end{aligned}$$

Для поиска главных форм собственных колебаний воспользуемся формулами (4) и (5). Найти значения амплитуд $\Phi_i(\omega)$ колебаний дисков можно с помощью выражения (5). Отношение амплитуд при резонансе можно рассчитать по формуле (6).

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_1 - \omega^2 I_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_3 - \omega^2 I_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - \omega^2 I_3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 c_{\pi} e \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Далее используется обозначение $\Delta_i(\omega)$ – определитель, полученный из определителя $\Delta(\omega)$ заменой i -го столбца столбцом свободных членов b .

$$\Phi_i(\omega) = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

$$\frac{\Phi_1(\omega_k)}{\Phi_2(\omega_k)} = \frac{\Delta_1(\omega_k)}{\Delta_2(\omega_k)}, \quad \frac{\Phi_2(\omega_k)}{\Phi_3(\omega_k)} = \frac{\Delta_2(\omega_k)}{\Delta_3(\omega_k)}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

4. Результаты расчетов

Все вычисления производились в системе *СИ* с использованием пакета вычислительных инструментов *Mathlab*. Программа для проведения расчетов находится в файле «*script_4.m*», входные данные располагаются в файле «*input_data.csv*». Далее представлены таблицы с результатами вычислений.

Таблица 3: Расчет вспомогательных величин.

Номер	Величина	Значение	Размерность
1	I_1	0,1560	кг · м ²
2	I_2	0,1248	кг · м ²
3	I_3	0,1560	кг · м ²
4	c_1	183,7743	Н · м
5	c_2	132,7590	Н · м
6	c_3	537,0334	Н · м

Таблица 4: Расчет коэффициентов уравнения (3).

Номер	Величина	Значение
1	a_0	0,0030
2	a_1	-19,2468
3	a_2	21553,4703
4	a_3	-5379695,0995

В таблице 5 представлены окончательные результаты теоретических расчетов. Иллюстрация главных форм собственных колебаний представлена на рис. 2.

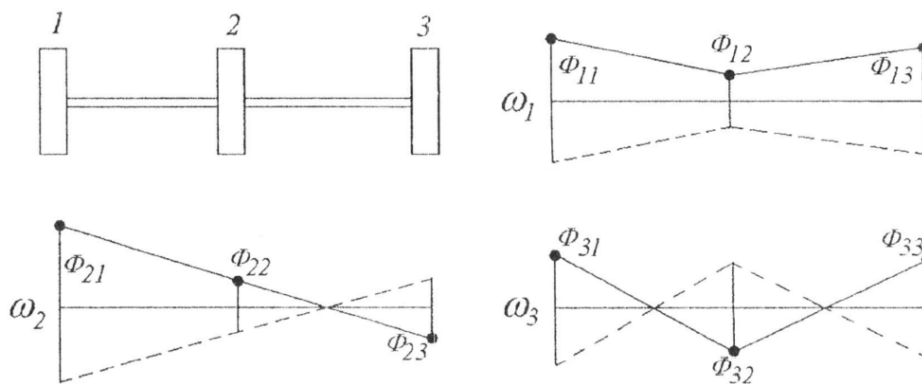


Рис. 2. Схема главных форм колебаний.

Таблица 5: Собственные частоты и формы колебаний системы.

Номер	Величина	Значение	Размерность
1	ω_1	18,8936	1/с
2	ω_2	31,5569	1/с
3	ω_3	70,5473	1/с
4	$\Phi_1(\omega_1)$	0,5844	—
5	$\Phi_2(\omega_1)$	0,4073	—
6	$\Phi_3(\omega_1)$	0,7017	—
7	$\Phi_1(\omega_2)$	-0,7368	—
8	$\Phi_2(\omega_2)$	-0,1137	—
9	$\Phi_3(\omega_2)$	0,6664	—
10	$\Phi_1(\omega_3)$	-0,2904	—
11	$\Phi_2(\omega_3)$	0,9371	—
12	$\Phi_3(\omega_3)$	-0,1932	—

5. Результаты экспериментов

Далее представлены значения величин полученных в ходе эксперимента. Все замеры производились три раза. Теоретические расчеты и экспериментальные результаты представлены в таблице 6.

Таблица 6: Экспериментальные значения частот собственных колебаний системы.

Величина	Теория	Эксперимент				Размерность
		№1	№2	№3	Среднее	
ω_1	18,90	18,22	18,85	16,96	18,01	1/с
ω_2	31,47	32,04	32,67	32,00	32,24	1/с
ω_3	71,22	70,99	70,37	71,00	70,79	1/с

Далее представлены нормированные векторы главных форм собственных колебаний системы, соответствующие разным частотам.

$$\Phi(\omega_1) = \begin{pmatrix} 0,5844 \\ 0,4073 \\ 0,7017 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\omega_2) = \begin{pmatrix} -0,7368 \\ -0,1137 \\ 0,6664 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\omega_3) = \begin{pmatrix} -0,2904 \\ 0,9371 \\ -0,1932 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Данные таблицы 6 позволяют заключить, что теоретический расчет оказался довольно точным и хорошо приблизил действительные характеристики установки. Также важно отметить, что теоретические значения векторов главных форм соответствуют распределениям амплитуд колебаний дисков, наблюдаемым в ходе работы установки.

В результате проделанной работы были получены частоты и главные формы собственных колебаний системы, состоящей из трех дисков, закрепленных на упругом валу рис. 1. Все теоретические и практические результаты представлены выше.