

## Работа № 8

### ПОПЕРЕЧНЫЕ КОЛЕБАНИЯ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНЫ

В этой лабораторной работе студенты знакомятся с поперечными колебаниями круглой упругой пластины. Целью работы является экспериментальное определение собственных частот поперечных колебаний упругой пластины, наблюдение соответствующих собственных форм колебаний и сравнение экспериментально определенных собственных частот с их расчетными значениями. В процессе исследования студенты знакомятся с методом наблюдения собственных форм поперечных колебаний упругой пластины, использующим фигуры Хладни.

#### Описание установки

Экспериментальная установка, показанная на рис. 23, представляет собой круглую упругую пластину 1, жестко закрепленную по краям центрального отверстия и свободную на внешнем крае. К пластине подсоединена тяга электромагнита 2, питаемого переменным током звуковой частоты от генератора. Электромагнит предназначен для создания периодической возмущающей силы, прикладываемой к пластине, частота возмущающей силы равна частоте переменного тока, поступающего в электромагнит от генератора.

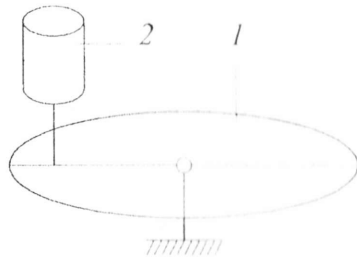


Рис. 23

Для получения фигур Хладни используется мелкий песок, которым посыпают пластину. При достижении резонанса пластина

колеблется по одной из своих собственных форм, и песок на ней перераспределяется, скапливаясь вблизи узловых линий, образуя характерные «узоры», которые называются фигурами Хладни. Фигуры Хладни позволяют определить ту собственную форму колебаний пластины, которая присутствует при данном резонансе. Соответствующую собственную частоту считаем равной частоте резонанса и определяем ее по шкале генератора звуковой частоты.

#### Теоретическое исследование

Приведем краткие теоретические сведения о поперечных колебаниях упругой пластины. Более подробное изложение этого вопроса можно найти, например, в [1].

При построении математической модели поперечных колебаний упругой пластины исходят из следующих предположений. Пластина предполагается тонкой, т. е. ее толщина является малой по сравнению с длиной и шириной. Длина и ширина пластины предполагаются величинами одного порядка. В пластине присутствует так называемый нейтральный слой, расстояния между точками которого не меняются при малых прогибах пластины. В однородной пластине нейтральный слой совпадает со срединной поверхностью, делящей высоту пластины пополам.

Далее, рассматривая поперечные колебания плоской пластины, примем нейтральный слой за координатную плоскость  $Oxy$ . Тогда малый прогиб пластины можно задать в виде функции  $w_0(x, y, t)$ , представляющей вертикальное перемещение точки нейтрального слоя в зависимости от ее координат на плоскости  $Oxy$  и времени. Если пластина совершает одно из главных колебаний, то ее прогиб можно представить в виде

$$w_0(x, y, t) = w(x, y) \sin(pt + \alpha).$$

Функция  $w(x, y)$  представляет собой собственную форму колебаний пластины, соответствующую собственной частоте  $p$ . Собственная форма колебаний однородной пластины подчиняется дифференциальному уравнению

$$D \left( \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right) - \rho h p^2 w = 0, \quad (8.1)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}$  – цилиндрическая жесткость пластины,  $E$  – модуль упругости,  $h$  – толщина пластины,  $\sigma$  – коэффициент Пуассона,  $\rho$  – плотность материала пластины, и удовлетворяет условию на краю пластины

$$\oint M_L \frac{\partial}{\partial n} (\delta w) dl - \oint \left( N_L - \frac{\partial H_L}{\partial L} \right) \delta w = 0. \quad (8.2)$$

Здесь  $M_L$  – изгибающий момент на краю пластины,  $H_L$  – крутящий момент на краю пластины,  $N_L$  – поперечная сила на краю пластины,  $\delta w$  – вариация функции  $w$ ,  $\vec{l}$  – вектор касательной к контуру пластины,  $\vec{n}$  – вектор нормали к контуру пластины.

Краевые условия, выражаемые равенством (8.2), выполняются автоматически в следующих трех случаях: если края пластины жестко закреплены; если края пластины свободно оперты; если края пластины свободны. Действительно, в первом случае  $\delta w = 0$  и  $\frac{\partial}{\partial n} (\delta w) = 0$ , а во втором  $\delta w = 0$  и  $M_L = 0$ . Если же края

пластины свободны, то  $M_L = 0$  и  $N_L - \frac{\partial H_L}{\partial L} = 0$ . Используя

приведенные в [1] выражения для  $M_L$ ,  $N_L$  и  $H_L$ , получаем краевые условия для собственных форм колебаний пластины в следующем виде:  $w|_L = f(x, y)$  и  $\frac{\partial w}{\partial n}|_L = 0$  – для жестко закреп-

ленного края пластины,  $w|_L = f(x, y)$  и  $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}|_L + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial l^2}|_L = 0$  –

для свободно опертого края,  $\frac{\partial^2 w}{\partial n^2}|_L + \sigma \frac{\partial^2 w}{\partial l^2}|_L = 0$  и

$$\frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + (2 - \sigma) \frac{\partial^2 w}{\partial l^2} \right] \Big|_L = 0 \text{ – для свободного края.}$$

В нашей лабораторной работе исследуются поперечные колебания круглой пластины со свободным внешним краем, жестко закрепленной по краям центрального отверстия диаметром  $d$ . Поэтому уравнение (8.1), описывающее собственные формы поперечных колебаний пластины, и соответствующие краевые условия целесообразно преобразовать, используя полярные координаты  $(\rho, \varphi)$  вместо декартовых координат  $(x, y)$ . В результате уравнение (8.1) примет вид

$$\Delta(\Delta w) - \frac{\rho h p^2}{D} w = 0, \quad (8.3)$$

где

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2}.$$

Краевые условия, соответствующие свободному краю пластины, получаются в виде

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = 0, \quad (8.4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left[ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (2 - \sigma) \left( \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) \right] = 0.$$

Условия жесткого закрепления по краям центрального отверстия принимают вид

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \quad (8.5)$$

Уравнение (8.3) будет выполнено для форм, удовлетворяющих уравнениям

$$\Delta w \pm k^2 w = 0, \quad (8.6)$$

где

$$k^4 = \frac{\rho h p^2}{D}.$$

Решение уравнений (8.6) будем искать методом разделения переменных в виде

$$w(r, \varphi) = R(r) \Phi(\varphi). \quad (8.7)$$

Подставляя решение (8.7) в уравнения (8.6) и разделяя переменные, получаем следующую систему уравнений:

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi = 0, \quad (8.8)$$

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \pm k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R = 0.$$

Общее решение системы (8.8) для целых значений  $n$  для круглой пластины с круглым отверстием в центре имеет вид

$$w(r, \varphi) = \cos(n\varphi) \left( \begin{aligned} &J_n(kr) + \lambda I_n(kr) + \\ &+ \mu N_n(kr) + \nu K_n(kr) \end{aligned} \right), \quad (8.9)$$

где  $J_n$  — функция Бесселя порядка  $n$ ;  $I_n$  — модифицированная функция Бесселя порядка  $n$ ;  $N_n$  — функция Неймана порядка  $n$ ;  $H_n$  — модифицированная функция Ганкеля порядка  $n$ . Между введенными функциями имеются зависимости:

$$I_n(z) = i^{-n} J_n(iz),$$

$$K_n(z) = \frac{\pi}{2} i^{n+1} H_n^{(1)}(iz), \quad H_n^{(1)}(z) = J_n(z) + iN_n(z),$$

$\lambda$ ,  $\mu$ ,  $\nu$  и  $k$  — постоянные, определяемые из краевых условий на внешнем краю пластины и на краю внутреннего отверстия.

Геометрические места нулей функции (8.9) представляют собой семейства радиальных и concentрических узловых линий колебаний пластины. Полярные координаты точек, принадлежащих радиальным узловым линиям, подчиняются уравнению

$$\cos(n\varphi) = 0,$$

а координаты точек, принадлежащих concentрическим узловым линиям, — уравнению

$$J_n(kr) + \lambda I_n(kr) + \mu N_n(kr) + \nu K_n(kr) = 0.$$

Очевидно, что радиальные узловые линии представляют собой диаметры, проходящие через центр пластины, а concentрические узловые линии — окружности с центром в центре пластины (рис. 24). Количество узловых диаметров равно  $n$ , а количество concentрических узловых линий  $m$  — числу нулей функции

$J_n(kr) + \lambda I_n(kr) + \mu N_n(kr) + \nu K_n(kr)$  на отрезке  $(kd, kR)$ . Собственную форму колебаний, имеющую  $n$  узловых диаметров и  $m$  узловых окружностей, обозначим  $w_{nm}$ , соответствующую собственную частоту —  $p_{nm}$ .

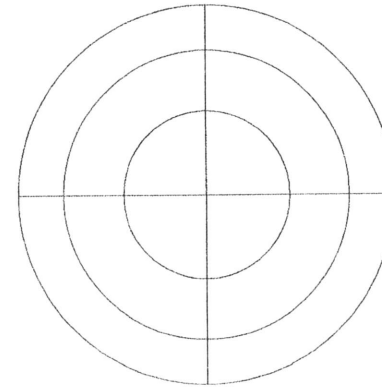


Рис. 24

Собственную частоту  $p_{nm}$ , соответствующую собственной форме  $w_{nm}$ , можно определить следующим образом: подставляя решение (8.9) в уравнения (8.4) и (8.5) и решая совместно полученные уравнения, находим  $k$ ,  $\lambda$ ,  $\mu$  и  $\nu$ . Далее определяем количество узловых диаметров и окружностей и собственную частоту  $p_{nm}$ , соответствующую собственной форме колебаний  $w_{nm}$ .

Значению  $m = 0$  соответствуют наименьшее значение числа  $k$  и наименьшее значение собственной частоты. Следующие по порядку собственные частоты подчиняются неравенству  $p_{10} < p_{11} < p_{12} < \dots$

В нашей лабораторной работе собственные частоты колебаний пластины определяются резонансным методом. О наличии резонанса судят по заметному возрастанию амплитуды вынужденных колебаний пластины и формированию так называемых фигур Хладни. Фигуры Хладни образуются из песка, собирающегося в узловых линиях колеблющейся пластины. Они позволяют определить количество узловых диаметров  $n$  и узловых окружностей  $m$

и судить о том, какая из собственных форм колебаний  $w_{nm}$  присутствует. Соответствующую резонансную частоту мы считаем равной собственной частоте  $P_{nm}$ .

### Порядок выполнения работы

Включить генератор и установить на нем наименьшее значение частоты. Плавнo увеличивая частоту генератора, добиться резонанса с наименьшей частотой. Нанести на пластину песок и, дождавшись образования фигуры Хладни, проверить по какой собственной форме  $w_{nm}$  происходят колебания. Определить соответствующую резонансную частоту по шкале генератора. Рассчитать собственную частоту  $P_{nm}$ . Расчет рекомендуется производить, используя математические пакеты, реализующие аналитические и численные вычисления, например, пакет Mathematica. Сравнить расчетное значение частоты  $P_{nm}$  с измеренной резонансной частотой. Повторить эксперимент для других резонансных частот (по усмотрению преподавателя). В расчетах использовать следующие значения параметров:  $h = 3$  мм,  $R = 24$  см,  $d = 8$  мм,  $E = 7 \cdot 10^{10}$  Па,  $\sigma = 0.5$ ,  $\rho = 2850$  кг/м<sup>3</sup>.

## Работа № 9

### КОЛЕБАНИЯ ПЛАСТИНКИ В ДОЗВУКОВОМ ПОТОКЕ ГАЗА

#### Постановка задачи

При движении летательного аппарата (ЛА) в плотных слоях атмосферы элементы его корпуса могут совершать интенсивные колебания, возбуждаемые набегающим потоком воздуха. Чтобы выяснить существо этого явления, рассмотрим колебания пластинки, укрепленной на двух пружинах и находящейся в потоке газа, движущегося с постоянной дозвуковой скоростью  $v$ . Подобная простейшая схема может рассматриваться как элемент, например, крыла ЛА.

Положение пластинки характеризуется двумя координатами: углом поворота  $\varphi$  и вертикальным перемещением  $y$  центра пластинки  $C$  (рис. 25); предполагается, что горизонтальные перемещения пластинки невозможны. Размер пластинки в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, обозначим буквой  $l$ , коэффициенты жесткости упругих опор  $c_1$  и  $c_2$  будем относить к единице длины пластинки в указанном направлении. Массу единицы площади пластинки обозначим  $m$ , длину пластинки —  $b$ .

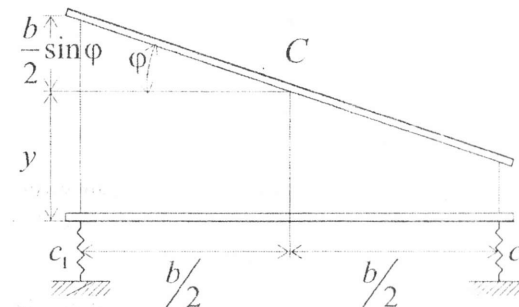


Рис. 25

Кинетическая  $T$  и потенциальная  $\Pi$  энергия системы определяются выражениями