на резонансной частоте стола. Частоту вынужденных колебаний следует наблюдать по показаниям цифрового частотомера. Отметить, пользуясь калибровочным значением, амплитуду колебаний по вольтметру переменного тока. Перемещая груз на пластине, подобрать такое его положение, при котором наблюдается минимум амплитуды вынужденных колебаний. Отметить значение амплитуды в режиме гашения. Остановить груз динамического гасителя рукой и отметить амплитуду вынужденных колебаний вибрационного стола. Необходимо следить, чтобы значения амплитуд колебаний в режиме гашения $A_Г$ и в резонансном режиме A отмечались на резонансной частоте вынуждающей силы. Эффект гашения считается хорошим, если $A / A_Г \geq 10$.

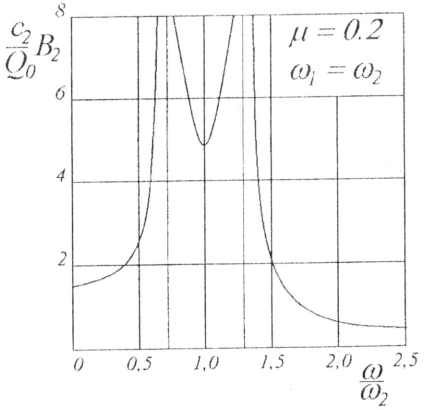


Рис. 12

В отчете должны быть отмечены частота возмущающей силы, расчетное и экспериментальное значения длины пластинки l_2 динамического гасителя, амплитуды колебаний в режиме гашения и в режиме резонанса, а также значение эффекта гашения.

Работа № 4

КОЛЕБАНИЯ СВЯЗАННЫХ МАЯТНИКОВ

В работе изучаются свободные колебания механической системы с двумя степенями свободы. Целью работы является экспериментальное определение и теоретический расчет собственных частот системы с последующим их сравнением, наблюдение форм главных колебаний, исследование вопроса о влиянии наложения дополнительных связей на характер распределения собственных частот системы, изучение явления перекачки энергии от одного колеблющегося тела системы к другому, теоретический расчет и экспериментальное определение частот биений.

Описание установки

Схема установки показана на рис. 13. На общем штативе *1* при помощи призматических опор *2* и *3* установлены два маятника *10* и *8*, совершающие колебания в вертикальной плоскости, проходящей через их точки подвеса. Маятники соединены между собой пружиной *6*. Опора *3* передвижная, что дает возможность изменять натяжение соединительной пружины. Длины маятников регулируются при помощи стопорных болтов *7* и *9*. Оба маятника снабжены фиксаторами, позволяющими жестко закреплять их в вертикальном положении.

Для определения амплитуд колебаний каждый маятник снабжен шкалой и оптоэлектронным датчиком угла отклонения.

Теоретическое исследование

В качестве параметров, определяющих положение системы, возьмем углы φ_1 и φ_2, характеризующие отклонения маятников от их вертикального равновесного положения. Будем считать, что массы обоих маятников одинаковы и равны m. Обозначим l_1 и l_2 длины маятников, а h – расстояния от точек подвеса до точек крепления пружин. Предположим также, что жесткости крайних

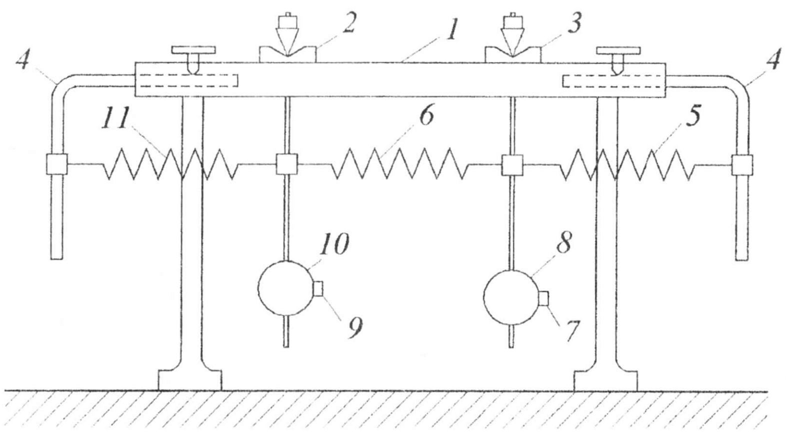


Рис. 13

пружин одинаковы и равны c, а жесткость средней пружины равна c^*.

Пренебрегая массами пружин и массами стержней маятников, получаем следующие дифференциальные уравнения малых колебаний системы:

$$\begin{aligned} ml_1^2\ddot{\varphi}_1 &= -mgl_1\varphi_1 - c^*h^2(\varphi_1-\varphi_2) - ch^2\varphi_1, \\ ml_2^2\ddot{\varphi}_2 &= -mgl_2\varphi_2 + c^*h^2(\varphi_1-\varphi_2) - ch^2\varphi_2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Величины, стоящие в правых частях уравнений (4.1), представляют собой моменты сил относительно точек подвеса маятников: $mgl_1\varphi_1$ и $mgl_2\varphi_2$ – моменты сил тяжести, $c^*h^2(\varphi_1-\varphi_2)$ – момент восстанавливающей силы средней пружины, $ch^2\varphi_1$ и $ch^2\varphi_2$ – моменты восстанавливающих сил крайних пружин.

Запишем систему (4.1) в виде

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi}_1 + a_{11}\varphi_1 - a_{12}\varphi_2 &= 0, \\ \ddot{\varphi}_2 - a_{21}\varphi_1 + a_{22}\varphi_2 &= 0, \end{aligned} \tag{4.2}$$

где

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{g}{l_1} + \frac{h^2}{ml_1^2}(c+c^*), \quad a_{21} = \frac{c^*h^2}{ml_2^2}, \\ a_{12} &= \frac{c^*h^2}{ml_1^2}, \quad a_{22} = \frac{g}{l_2} + \frac{h^2}{ml_2^2}(c+c^*). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Ищем решение системы (4.2) в форме

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= A_1\sin(kt+\alpha), \\ \varphi_2 &= A_2\sin(kt+\alpha). \end{aligned} \tag{4.4}$$

Подставляя (4.4) в (4.2), получаем

$$\begin{aligned} (a_{11}-k^2)A_1 - a_{12}A_2 &= 0, \\ -a_{21}A_1 + (a_{22}-k^2)A_2 &= 0. \end{aligned} \tag{4.5}$$

Из уравнения частот

$$k^4 - (a_{11}+a_{22})k^2 + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}) = 0 \tag{4.6}$$

найдем выражения для квадратов собственных частот

$$\begin{aligned} k_1^2 &= \frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22}) - \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\right], \\ k_2^2 &= \frac{1}{2}\left[(a_{11}+a_{22}) + \sqrt{(a_{11}+a_{22})^2 - 4(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})}\right], \end{aligned} \tag{4.7}$$

откуда следует, что $k_1^2 < k_2^2$.

Для случая одинаковых маятников ($l_1 = l_2 = l$) имеем

$$k_1^2 = \frac{g}{l} + \frac{ch^2}{ml^2}, \quad k_2^2 = \frac{g}{l} + \frac{ch^2}{ml^2} + \frac{2c^*h^2}{ml^2}.$$

(4.8)

Подставляя k_1^2 и k_2^2 в систему (4.5), получаем

$$\frac{A_1^{(1)}}{A_2^{(1)}} = \frac{a_{12}}{a_{11}-k_1^2}, \quad \frac{A_1^{(2)}}{A_2^{(2)}} = \frac{a_{12}}{a_{11}-k_2^2},$$

откуда

$$\begin{aligned} A_1^{(1)} &= C_1a_{12}, \quad & A_1^{(2)} &= C_2a_{12}, \\ A_2^{(1)} &= C_1(a_{11}-k_1^2), \quad & A_2^{(2)} &= c_2(a_{11}-k_2^2). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Общее решение системы (4.1)

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \varphi_1^{(1)} + \varphi_1^{(2)} = A_1^{(1)} \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right) + A_1^{(2)} \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right), \\ \varphi_1 &= \varphi_2^{(1)} + \varphi_2^{(2)} = A_2^{(1)} \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right) + A_2^{(2)} \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Здесь C_1, C_2, α_1, α_2 – произвольные постоянные, определяемые из начальных условий движения.

Из рассмотрения общего решения системы следует, что каждый из маятников при произвольных начальных условиях совершает сложное движение, представляющее собой наложение друг на друга двух гармонических колебаний с различными частотами k_1 и k_2. Как известно, результирующее движение уже не будет гармоническим.

Гармонические колебания, соответствующие собственным частотам k_1 и k_2, называются главными колебаниями системы.

В рассматриваемом случае имеют место два главных колебания:

первое

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(1)} &= C_1 a_{12} \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right), \\ \varphi_2^{(1)} &= C_1 \left(a_{11} - k_1^2\right) \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right); \end{aligned}$$

второе

$$\begin{aligned} \varphi_1^{(2)} &= C_2 a_{12} \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right), \\ \varphi_2^{(2)} &= C_2 \left(a_{11} - k_2^2\right) \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Из формул (4.7) и (4.11) следует, что собственные частоты и отношения амплитуд в каждом главном колебании не зависят от начальных условий движения. Отношение амплитуд в каждом из главных колебаний определяет форму главных колебаний.

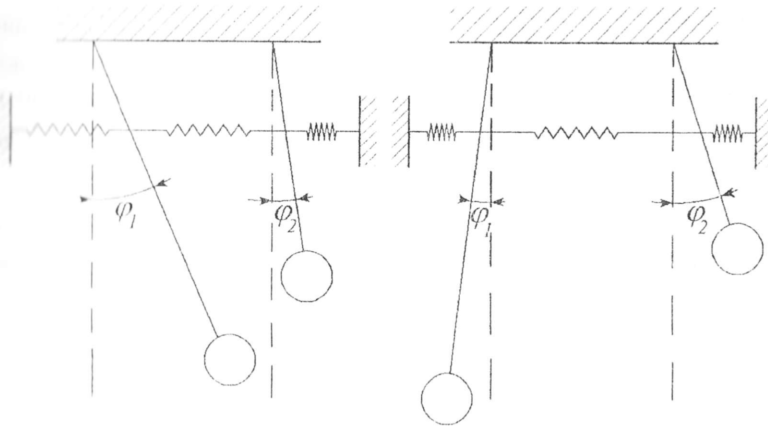
При определенных начальных условиях система может совершать одно из главных колебаний. При этом оба маятника будут колебаться с одной и той же частотой, соответствующей данному колебанию, находясь в одной фазе или в противофазе друг с другом, одновременно проходя положения равновесия и положения максимального отклонения.

Составим на основании формул (4.11) выражения для отношений амплитуд главных колебаний:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_1^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}} &= \frac{a_{12}}{a_{11} - k_1^2}, \\ \frac{\varphi_1^{(2)}}{\varphi_2^{(2)}} &= \frac{a_{12}}{a_{11} - k_2^2}. \end{aligned} \tag{4.12}$$

Принимая во внимание неравенство $k_1^2 < a_{11} < k_2^2$, выполнение которого будет показано ниже, имеем

$$\frac{\varphi_1^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}} > 0, \quad \frac{\varphi_1^{(2)}}{\varphi_2^{(2)}} < 0. \tag{4.13}$$



а *б*

Рис. 14

Это означает, что в первой форме главных колебаний (с меньшей собственной частотой k_1) оба маятника будут двигаться в одном направлении (рис. 14, *а*), так как φ_1 и φ_2 имеют одинаковые знаки; во второй форме – в противоположных направлениях (рис. 14, *б*). При этом в первом главном колебании бóльшие отклонения от положения равновесия имеет более длинный маятник, а во втором – более короткий. Действительно, пусть маятник *10* длиннее маятника *8* (см. рис. 13), т. е. $l_1 > l_2$. В этом случае

$$\left|\frac{\varphi_1^{(1)}}{\varphi_2^{(1)}}\right| > 1, \quad \left|\frac{\varphi_1^{(2)}}{\varphi_2^{(2)}}\right| < 1, \tag{4.14}$$

что следует из подстановки выражений (4.3) и (4.7) в формулу (4.12).

Перейдем к вопросу о влиянии наложения дополнительных связей на характер распределения собственных частот системы. Проанализируем на примере системы двух связанных маятников положение о том, что при наложении на систему новой связи собственные частоты полученной системы будут располагаться между собственными частотами первоначальной системы.

Наложим на рассматриваемую систему с собственными частотами k_1 и k_2 дополнительную связь, жестко закрепляя один из маятников, например *8*, не меняя при этом положения равновесия. Получим систему с одной степенью свободы, имеющую собственную частоту $\omega_1 = \sqrt{a_{11}}$. Частота ω_1 будет удовлетворять условию

$$k_1^2 < \omega_1^2 < k_2^2, \tag{4.15}$$

что следует из рассмотрения полученной на основании (4.5) функции

$$\Delta\left(k^2\right) = \left(a_{11} - k^2\right)\left(a_{22} - k^2\right) - a_{12}a_{21},$$

где

$$\Delta\left(k^2\right) < 0 \text{ для } k^2 = \omega_1^2 = a_{11},$$

$$\Delta\left(k^2\right) > 0 \text{ для } k^2 = \pm\infty,$$

$$\Delta\left(k_1^2\right) = \Delta\left(k_2^2\right) = 0.$$

Рассмотрим вопрос о перекачке энергии. В колебательных системах часто наблюдается явление перекачки энергии от одного вида колебаний к другому или от одного тела системы к другому. В первом случае происходит периодическое затухание колебания одного вида и возникновение вследствие этого колебания другого вида. Во втором случае возникают биения, проявляющиеся в периодическом затухании колебаний одного тела системы и усилении за счет этого колебаний другого тела.

Известно, что сложение двух гармонических колебаний с одинаковыми частотами дает гармоническое колебание той же час-

ты. Колебание, полученное в результате сложения двух гармонических колебаний разных частот, уже не будет гармоническим. Действительно, складывая два колебания

$$x_1 = A_1 \sin\left(k_1 t + \alpha_1\right) \text{ и } x_2 = A_2 \sin\left(k_2 t + \alpha_2\right),$$

получаем

$$x = x_1 + x_2 = A(t)\sin\left[kt + \beta(t)\right], \tag{4.16}$$

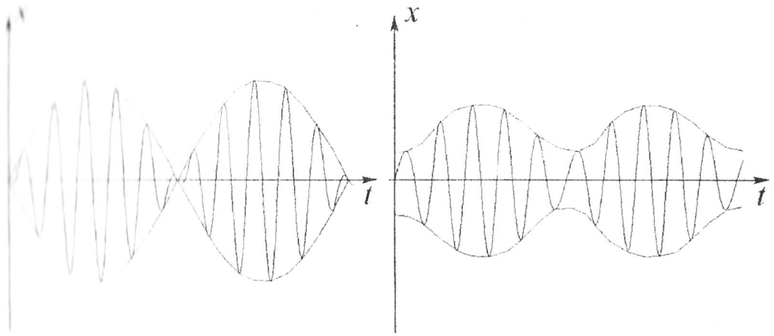
где $k = (k_1 + k_2)/2$, а амплитуда $A(t)$ и фаза $\beta(t)$ определяются по формулам

$$A(t) = \sqrt{\left(A_1 + A_2\right)^2 - 4A_1A_2\sin^2\left(\frac{k_1 - k_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)}, \tag{4.17}$$

$$\beta(t) = \operatorname{arctg}\left[\frac{A_1 - A_2}{A_1 + A_2}\operatorname{tg}\left(\frac{k_1 - k_2}{2}t + \frac{\alpha_1 - \alpha_2}{2}\right)\right]. \tag{4.18}$$

Из формулы (4.17) следует, что величина амплитуды изменяется в пределах от $A_1 + A_2$ до $\left|A_1 - A_2\right|$. Период изменения амплитуды равен $T_а = \dfrac{4\pi}{k_1 - k_2}$.

Если частоты k_1 и k_2 достаточно близки друг к другу, то движение, определяемое формулой (4.16), можно приближенно рассматривать как гармоническое колебание с амплитудой и фазой, медленно меняющимися со временем (рис. 15).



а *б*

Рис. 15

Такие колебания называются биениями. Период биений равен половине периода изменения амплитуды биений и определяется по формуле

$$T_б = \frac{2\pi}{k_1 - k_2}. \tag{4.19}$$

При равенстве амплитуд складываемых колебаний ($A_1 = A_2$) амплитуда биений будет изменяться от $2A_1$ до нуля (рис. 15, *а*).

Из рассмотрения общего решения (4.10) следует, что каждый из маятников может совершать биения. В процессе биений за время, равное половине периода $T_б$, маятники обмениваются энергией. Амплитуда биений зависит от начальных условий движения, частота биений не зависит от них.

Порядок проведения эксперимента

Вычислить значения собственных частот и найти главные формы колебаний системы, пользуясь измеренными значениями жесткостей пружин, геометрическими параметрами и значением массы маятников $m = 370$ г. Жесткости пружин можно измерить следующим образом: подвесить к пружине груз известной массы и измерить период колебаний полученной системы секундомером. Зная ее период колебаний и массу груза, можно определить жесткость.

Подбором начальных условий движения добиться колебаний по первой и второй формам и измерить соответствующие значения собственных частот колебаний системы. Произвести этот опыт для двух случаев, отличающихся жесткостью пружины, соединяющей маятники между собой.

Закрепив один из маятников, измерить собственную частоту колебательной системы и убедиться, что она лежит между двумя собственными частотами первоначальной системы. Измерение частот производится методом измерения периодов колебаний с помощью секундомера.

Подать сигнал с оптоэлектронного датчика отклонения маятника на вход платы сбора данных. Подбором начальных условий воспроизвести колебания маятников в режиме биений. Записать

осциллограмму колебаний маятников в течение примерно десяти периодов биений в файл.

Выполнить над записанной осциллограммой дискретное преобразование Фурье и построить спектр колебаний. Определить собственные частоты колебаний маятников по спектру их колебаний. Спектрограмму удобно строить, пользуясь любым из распространенных математических пакетов (Mathematica, MathCad, Maple, MatLab и др.). Обычно в современных версиях математических пакетов имеются средства для выполнения дискретного преобразования Фурье над массивами данных, кроме того, они очень удобны для построения графиков.