

Санкт-Петербургский государственный университет
Saint-Petersburg State University

Кафедра теоретической и прикладной механики

ОТЧЕТ
По лабораторной работе 4
«Крутильные колебания вала с дисками»

По дисциплине
«Лабораторный практикум по теоретической механике»

Выполнили:

Баталов С. А.
Антонова М. Н.
Клюшин М. А.
Хайретдинова Д. Д.

Санкт-Петербург
2021

1. Описание установки

В данной работе рассматриваются колебания механической системы с тремя степенями свободы. Целью работы является экспериментальное определение частот и главных форм собственных колебаний системы, их теоретический расчет и последующее сравнение.

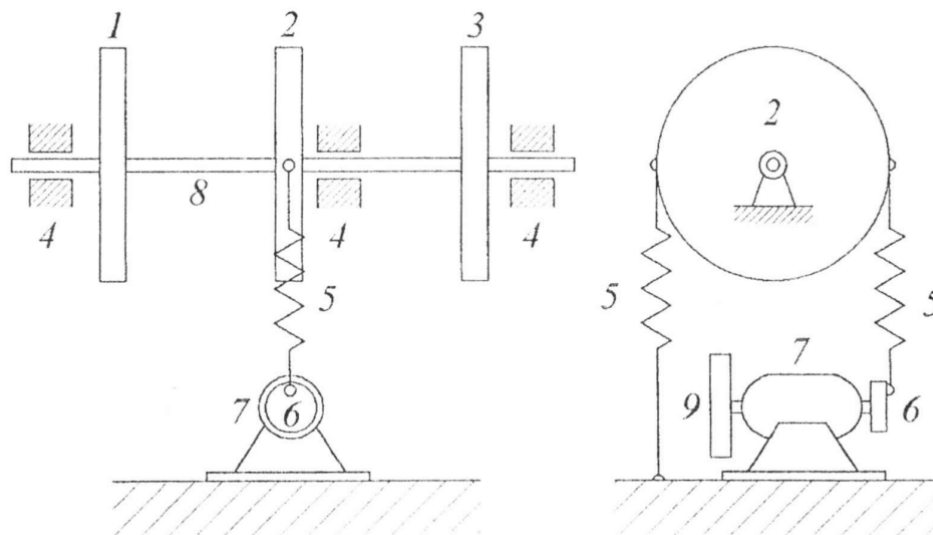


Рис. 1. Схема лабораторной установки.

На рис. 1 изображена схема лабораторной установки. Основной частью установки является упругий вал 8 с тремя жестко укрепленными на нем дисками 1, 2 и 3. Вал может вращаться в подшипниках 4, установленных на станине. К ободу среднего диска 2 прикреплены пружины 5, одна из которых связана со станиной, а другая – с эксцентриком 6, закрепленном на валу электродвигателя 7. На валу электродвигателя укреплены маховик 9 для стабилизации частоты вращения и диск оптоэлектронного тахометрического датчика. Сигнал с тахометрического датчика поступает на вход электронного цифрового тахометра, показания которого соответствуют частоте вращения вала в герцах.

2. Параметры установки

В следующей таблице представлены заранее известные величины: плотность материала дисков – ρ , модуль сдвига материала вала – G , жесткость пружины – $c_{\text{п}}$.

Таблица 1: Известные константы.

| Номер | Величина | Значение | Размерность |
|-------|----------------|----------------------|-------------------|
| 1 | ρ | $7,85 \cdot 10^3$ | кг/м ³ |
| 2 | G | $8,33 \cdot 10^{10}$ | Па |
| 3 | $c_{\text{п}}$ | 4900 | Н/м |

Для расчета частот и форм собственных колебаний системы потребуется измерить некоторые параметры установки. Данные измерений приведены в таблице 2. Здесь r_i – радиусы дисков, d_i – толщины дисков, l_i – расстояния между дисками, r – радиус упругого вала, e – расстояние от точки крепления пружины до центра эксцентрика.

Таблица 2: Результаты измерений параметров установки.

| Номер | Величина | Значение | Погрешность | Размерность |
|-------|----------|----------|-------------|-------------|
| 1 | r_1 | 0,150 | 0,0005 | м |
| 2 | r_2 | 0,150 | 0,0005 | м |
| 3 | r_3 | 0,150 | 0,0005 | м |
| 4 | d_1 | 0,025 | 0,0005 | м |
| 5 | d_2 | 0,020 | 0,0005 | м |
| 6 | d_3 | 0,025 | 0,0005 | м |
| 7 | l_1 | 0,445 | 0,0005 | м |
| 8 | l_2 | 0,616 | 0,0005 | м |
| 9 | r | 0,005 | 0,00005 | м |
| 10 | e | 0,021 | 0,0005 | м |

3. Теоретические исследования

Для начала произведем вспомогательные вычисления и рассчитаем моменты инерции дисков. Для этого воспользуемся формулой (1).

$$I_i = \frac{1}{2}m_i r_i^2 = \frac{1}{2}\rho\pi r_i^4 d_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1)$$

Далее определим жесткость на скручивание участков вала. Воспользуемся формулой (2). Здесь $I_p = \frac{1}{2}\pi r^4$ – полярный момент инерции поперечного сечения вала.

$$c_k = \frac{GI_p}{l_k} = \frac{G\pi r^4}{2l_k}, \quad k = 1, 2. \quad (2)$$

Для дальнейшей работы составляется система уравнений Лагранжа второго рода для данной задачи и упрощается. В итоге приходим к уравнению (3), решениями которого являются квадраты искомых частот ω_i собственных колебаний системы.

$$a_0 y^3 + a_1 y^2 + a_2 y + a_3 = 0, \quad y = \omega^2. \quad (3)$$

Здесь

$$\begin{aligned} a_0 &= I_1 I_2 I_3, \quad a_1 = -c_2 I_1 I_2 - c_3 I_1 I_3 - c_1 I_2 I_3, \\ a_2 &= c_2(c_3 - c_2)I_1 + c_1 c_2 I_2 + c_1(c_3 - c_1)I_3, \\ a_3 &= -c_1 c_2(c_3 - c_1 - c_2), \quad c_3 = c_1 + c_2 + 2c_{\pi} r_2^2. \end{aligned}$$

Для поиска главных форм собственных колебаний воспользуемся формулами (4) и (5). Найти значения амплитуд $\Phi_i(\omega)$ колебаний дисков можно с помощью выражения (5). Отношение амплитуд при резонансе можно рассчитать по формуле (6).

$$\Delta(\omega) = \begin{vmatrix} c_1 - \omega^2 I_1 & -c_1 & 0 \\ -c_1 & c_3 - \omega^2 I_2 & -c_2 \\ 0 & -c_2 & c_2 - \omega^2 I_3 \end{vmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ r_2 c_{\pi} e \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Далее используется обозначение $\Delta_i(\omega)$ – определитель, полученный из определителя $\Delta(\omega)$ заменой i -го столбца столбцом свободных членов b .

$$\Phi_i(\omega) = \frac{\Delta_i(\omega)}{\Delta(\omega)}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (5)$$

$$\frac{\Phi_1(\omega_k)}{\Phi_2(\omega_k)} = \frac{\Delta_1(\omega_k)}{\Delta_2(\omega_k)}, \quad \frac{\Phi_2(\omega_k)}{\Phi_3(\omega_k)} = \frac{\Delta_2(\omega_k)}{\Delta_3(\omega_k)}, \quad k = 1, 2, 3. \quad (6)$$

4. Результаты расчетов

Все вычисления производились в системе *СИ* с использованием пакета вычислительных инструментов *Mathlab*. Программа для проведения расчетов находится в файле «*script_4.m*», входные данные располагаются в файле «*input_data.csv*». Далее представлены таблицы с результатами вычислений.

Таблица 3: Расчет вспомогательных величин.

| Номер | Величина | Значение | Размерность |
|-------|----------|----------|---------------------|
| 1 | I_1 | 0,1560 | кг · м ² |
| 2 | I_2 | 0,1248 | кг · м ² |
| 3 | I_3 | 0,1560 | кг · м ² |
| 4 | c_1 | 183,7743 | Н · м |
| 5 | c_2 | 132,7590 | Н · м |
| 6 | c_3 | 537,0334 | Н · м |

Таблица 4: Расчет коэффициентов уравнения (3).

| Номер | Величина | Значение |
|-------|----------|---------------|
| 1 | a_0 | 0,0030 |
| 2 | a_1 | -19,2468 |
| 3 | a_2 | 21553,4703 |
| 4 | a_3 | -5379695,0995 |

В таблице 5 представлены окончательные результаты теоретических расчетов. Иллюстрация главных форм собственных колебаний представлена на рис. 2.

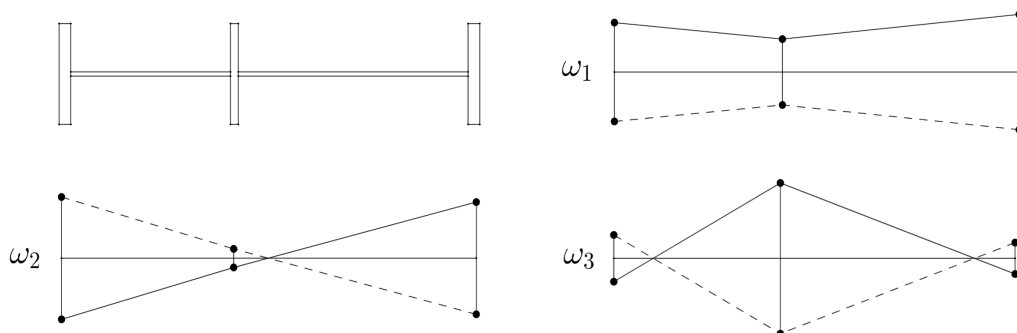


Рис. 2. Схема главных форм колебаний.

Таблица 5: Собственные частоты и формы колебаний системы.

| Номер | Величина | Значение | Размерность |
|-------|--------------------|----------|-------------|
| 1 | ω_1 | 18,8936 | 1/с |
| 2 | ω_2 | 31,5569 | 1/с |
| 3 | ω_3 | 70,5473 | 1/с |
| 4 | $\Phi_1(\omega_1)$ | 0,5844 | — |
| 5 | $\Phi_2(\omega_1)$ | 0,4073 | — |
| 6 | $\Phi_3(\omega_1)$ | 0,7017 | — |
| 7 | $\Phi_1(\omega_2)$ | -0,7368 | — |
| 8 | $\Phi_2(\omega_2)$ | -0,1137 | — |
| 9 | $\Phi_3(\omega_2)$ | 0,6664 | — |
| 10 | $\Phi_1(\omega_3)$ | -0,2904 | — |
| 11 | $\Phi_2(\omega_3)$ | 0,9371 | — |
| 12 | $\Phi_3(\omega_3)$ | -0,1932 | — |

5. Результаты экспериментов

Далее представлены значения величин полученных в ходе эксперимента. Все замеры производились три раза. Теоретические расчеты и экспериментальные результаты представлены в таблице 6.

Таблица 6: Экспериментальные значения частот собственных колебаний системы.

| Величина | Теория | Эксперимент | | | | Размерность |
|------------|--------|-------------|-------|-------|---------|-------------|
| | | №1 | №2 | №3 | Среднее | |
| ω_1 | 18,90 | 18,22 | 18,85 | 16,96 | 18,01 | 1/с |
| ω_2 | 31,47 | 32,04 | 32,67 | 32,00 | 32,24 | 1/с |
| ω_3 | 71,22 | 70,99 | 70,37 | 71,00 | 70,79 | 1/с |

Далее представлены нормированные векторы главных форм собственных колебаний системы, соответствующие разным частотам.

$$\Phi(\omega_1) = \begin{pmatrix} 0,5844 \\ 0,4073 \\ 0,7017 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\omega_2) = \begin{pmatrix} -0,7368 \\ -0,1137 \\ 0,6664 \end{pmatrix}, \quad \Phi(\omega_3) = \begin{pmatrix} -0,2904 \\ 0,9371 \\ -0,1932 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Данные таблицы 6 позволяют заключить, что теоретический расчет оказался довольно точным и хорошо приблизил действительные характеристики установки. Также важно отметить, что теоретические значения векторов главных форм соответствуют распределениям амплитуд колебаний дисков, наблюдаемым в ходе работы установки.

В результате проделанной работы были получены частоты и главные формы собственных колебаний системы, состоящей из трех дисков, закрепленных на упругом валу рис. 1. Все теоретические и практические результаты представлены выше.