

Санкт-Петербургский государственный университет
Saint-Petersburg State University

Кафедра теоретической и прикладной механики

ОТЧЕТ
По лабораторной работе 7
«Поперечные колебания круглой пластины»

По дисциплине
«Лабораторный практикум по теоретической механике»

Выполнили:

Баталов С. А.
Антонова М. Н.
Клюшин М. А.
Хайретдинова Д. Д.

Санкт-Петербург
2021

1. Описание установки

В этой лабораторной работе анализируются поперечные колебания круглой упругой пластины. Целью работы является экспериментальное определение собственных частот поперечных колебаний упругой пластины, наблюдение соответствующих собственных форм колебаний и сравнение экспериментально определенных собственных частот с их расчетными значениями. В процессе исследований формы колебаний определяются с помощью фигур Хладни.

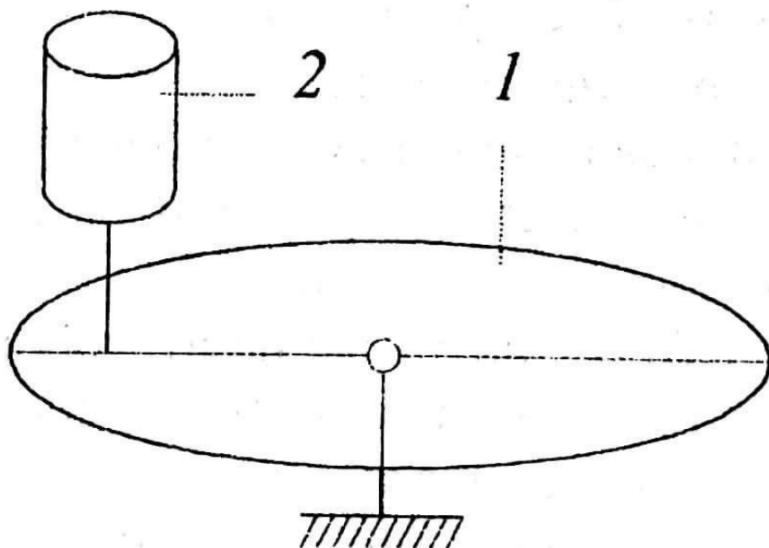


Рис. 1: Схема лабораторной установки.

Экспериментальная установка, показанная на рис. 1, представляет собой круглую упругую пластину 1, жестко закрепленную по краям центрального отверстия и свободную на внешнем крае. К пластине присоединена тяга электромагнита 2, питаемого переменным током звуковой частоты от генератора. Электромагнит предназначен для создания периодической возмущающей силы, прикладываемой к пластине, частота возмущающей силы равна частоте переменного тока.

2. Параметры установки

В следующей таблице представлены заранее известные параметры установки: плотность материала пластины – ρ , коэффициент Пуассона – σ , модуль упругости – E , толщина пластины – h , внешний радиус пластины – R , диаметр внутреннего отверстия – d .

Таблица 1: Известные параметры.

Номер	Величина	Значение	Размерность
1	ρ	2850	$\text{кг}/\text{м}^3$
2	σ	0,5	–
3	E	$7 \cdot 10^{10}$	Па
4	h	0,003	м
5	R	0,240	м
6	d	0,008	м

3. Теоретические исследования

Собственная форма колебаний однородной пластины подчиняется дифференциальному уравнению (1), записанному в полярных координатах (r, ϕ) .

$$\begin{aligned} \Delta(\Delta w(r, \phi)) - \frac{\rho h p^2}{D} w(r, \phi) &= 0, \quad \text{где} \\ \Delta &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}. \end{aligned} \quad (1)$$

Краевые условия, соответствующие свободному краю пластины, записываются в виде уравнений (2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \sigma \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial r} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + (2-\sigma) \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right) \right] &= 0 \end{aligned} \quad (2)$$

Уравнения условий жесткого закрепления по краям центрального отверстия принимают вид (3).

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad w = 0 \quad (3)$$

Уравнение (1) будет выполнено для форм, удовлетворяющих следующим уравнениям:

$$\Delta w \pm k^2 w = 0, \quad \text{где} \quad k^4 = \frac{\rho h p^2}{D} \quad (4)$$

Здесь p – это соответствующая частота собственных колебаний. Решение уравнения (4) ищется методом разделения переменных в виде:

$$w(r, \phi) = R(r)\Phi(\phi) \quad (5)$$

Подставляя решение (5) в уравнение (4) и разделяя переменные, получим следующую систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + n^2 \Phi &= 0 \\ \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left(\pm k^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R &= 0 \end{aligned} \quad (6)$$

Общее решение системы (6) для целых значений n для круглой пластины с круглым отверстием в центре имеет вид:

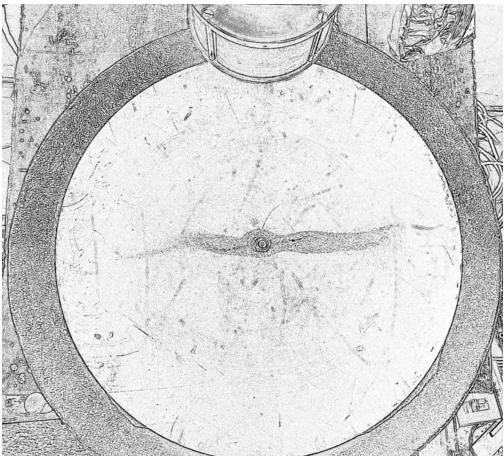
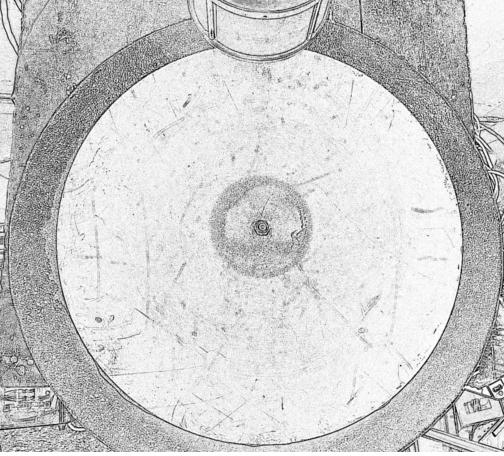
$$w(r, \phi) = \cos(n\phi) \cdot (J_n(kr) + \lambda I_n(kr) + \mu N_n(kr) + \nu K_n(kr)). \quad (7)$$

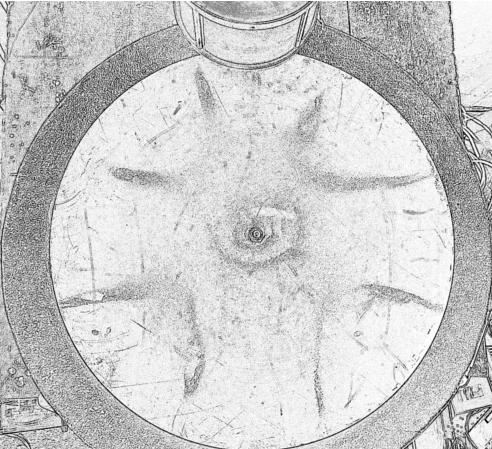
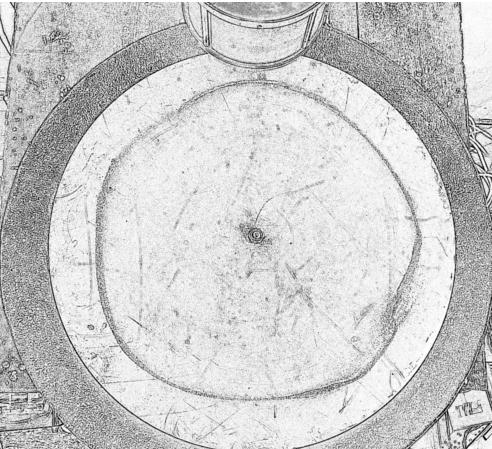
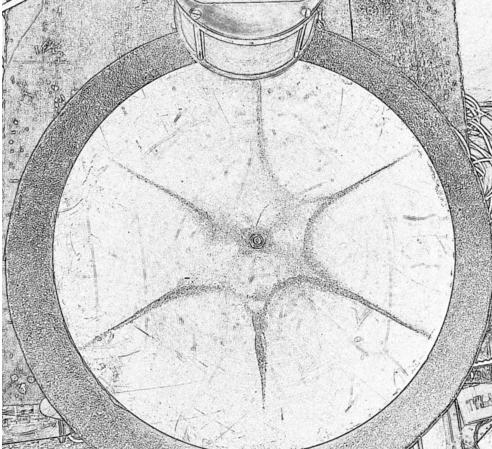
Здесь J_n – функция Бесселя порядка n , I_n – модифицированная функция Бесселя порядка n , N_n – функция Неймана порядка n , K_n – функция, выражющаяся через функцию Ганкеля порядка n .

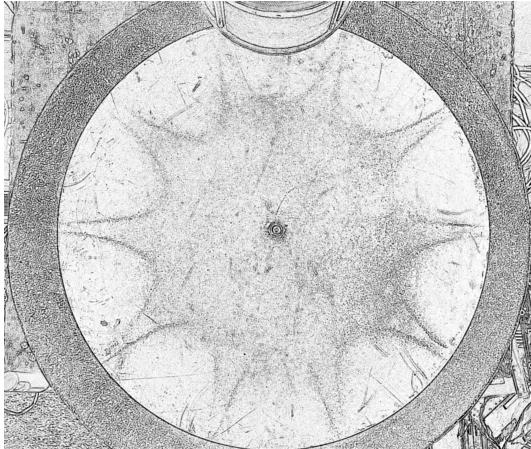
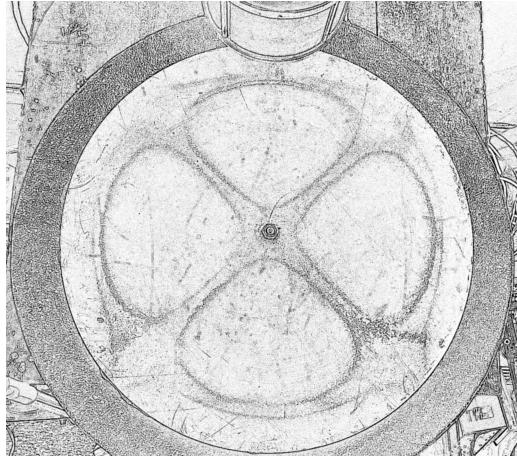
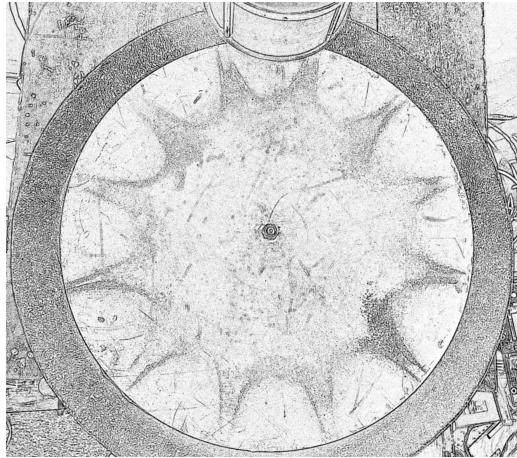
4. Результаты экспериментов

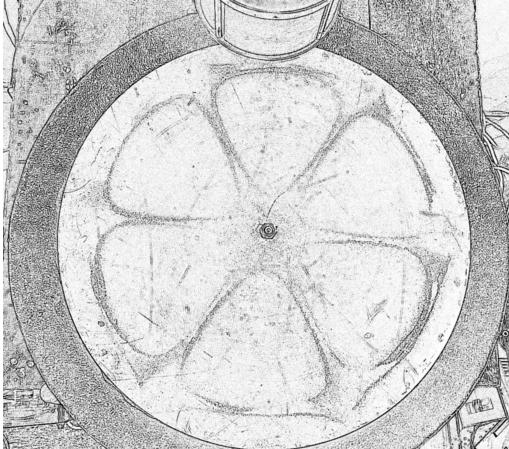
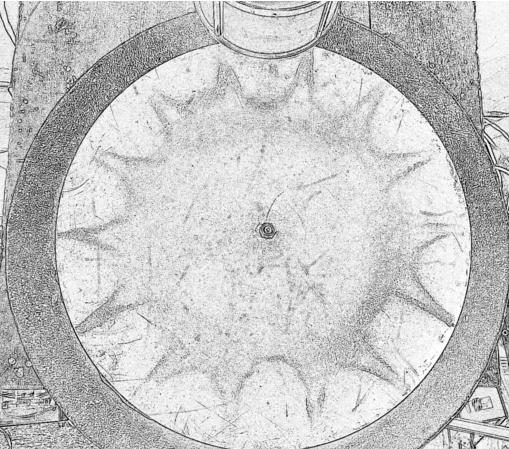
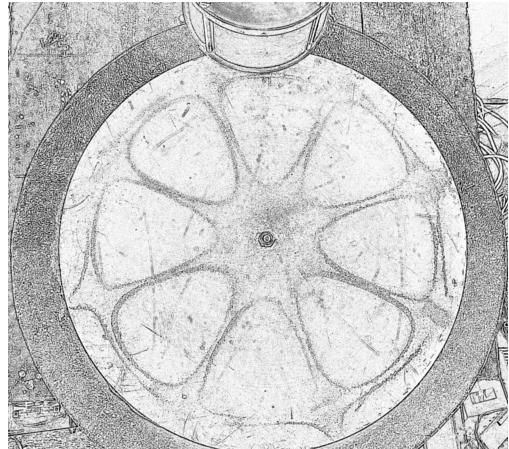
В следующей таблице представлены результаты экспериментов, то есть фигуры Хладни, которые иллюстрируют различные формы собственных колебаний пластины, и соответствующие им частоты.

Таблица 2: Экспериментальные данные.

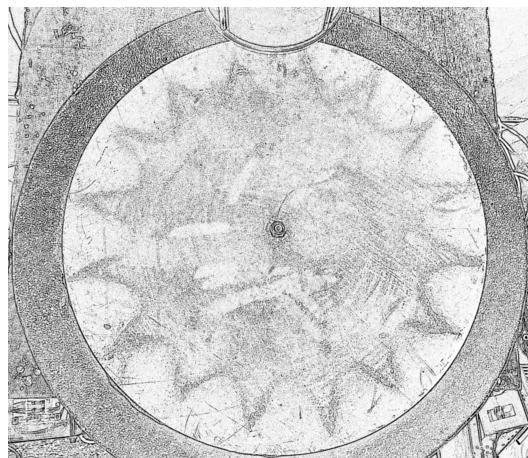
Номер	Форма колебаний	Частота колебаний, Гц
1		26
2		46

		3	150
		4	260
		5	285

		405
7		435
8		562

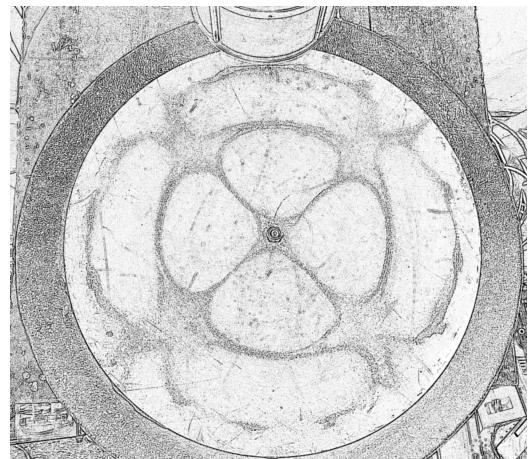
9		640
10		760
11		890

12



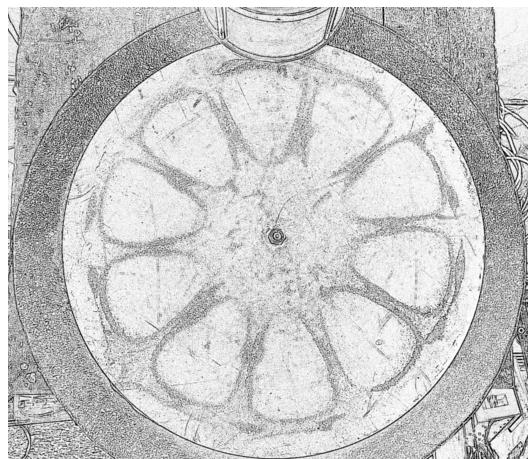
985

13



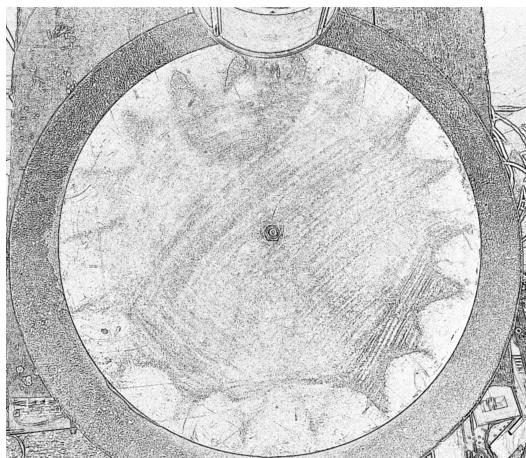
1050

14



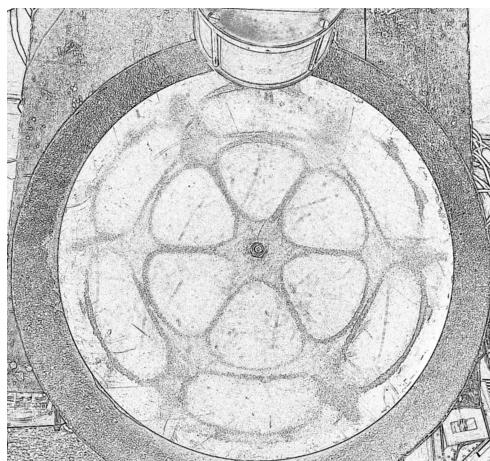
1175

15



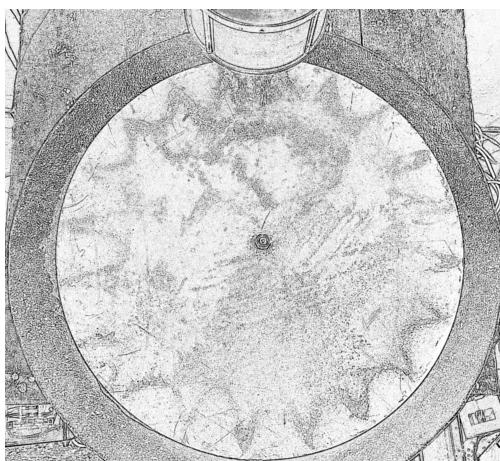
1225

16



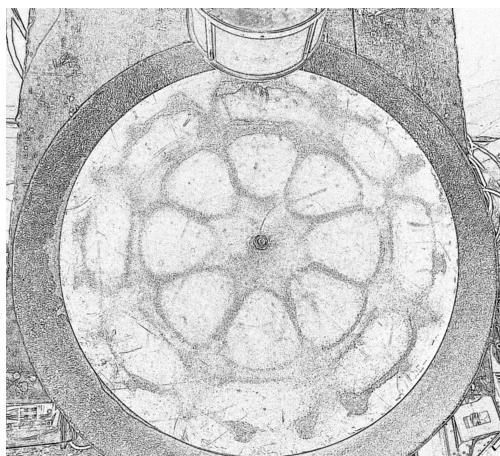
1360

17



1500

18



1730