

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №49

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Поляков Даниил, Б07-ФЗ

Цель работы: определить моменты инерции тел, имеющих простейшую геометрическую форму, методом крутильных колебаний; убедиться в применимости теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Оборудование:

- Крутильный осциллятор;
- Металлический стержень;
- Два груза;
- Деревянный шар;
- Деревянный цилиндр;
- Деревянный диск;
- Металлический полый цилиндр;
- Подставка;
- Металлический диск с отверстиями;
- Секундомер;
- Линейка;
- Штангенциркуль;
- Электронные весы.

Расчётные формулы:

- Период собственных крутильных колебаний тела:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}$$

J – момент инерции относительно
оси кручения;
 D – модуль кручения спирали.

- Момент инерции колеблющегося тела:

$$J = D \frac{T^2}{4\pi^2}$$

T – период собственных крутильных
колебаний тела;
 D – модуль кручения спирали.

- Период колебаний стержня с грузами:

$$T^2 = \frac{8m\pi^2}{D} r^2 + T_0^2$$

m – масса каждого из грузов;
 r – расстояние от оси вращения до
центра масс грузов;
 D – модуль кручения спирали;
 T_0 – период колебаний стержня.

- Момент инерции тела на произвольном расстоянии от центра масс (теорема Гюйгенса-Штейнера):

$$J = J_c + md^2$$

J_c – момент инерции тела относительно его центра масс;
 m – масса тела;
 d – расстояние от оси центра масс до произвольной оси.

- Момент инерции диска:

$$J_d = \frac{m_d R_d^2}{2}$$

m_d – масса диска;
 R_d – радиус диска.

- Момент инерции сплошного цилиндра:

$$J_{\text{ц}} = \frac{m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2}{2}$$

$m_{\text{ц}}$ – масса цилиндра;
 $R_{\text{ц}}$ – радиус цилиндра.

- Момент инерции полого цилиндра:

$$J_{\text{пц}} = \frac{1}{2} m_{\text{пц}} (R_{\text{пц1}}^2 + R_{\text{пц2}}^2)$$

$m_{\text{пц}}$ – масса цилиндра;
 $R_{\text{пц1}}$ – внешний радиус цилиндра;
 $R_{\text{пц2}}$ – внутренний радиус цилиндра.

- Момент инерции сплошного шара:

$$J_{\text{ш}} = \frac{2}{5} m_{\text{ш}} R_{\text{ш}}^2$$

$m_{\text{ш}}$ – масса шара;
 $R_{\text{ш}}$ – радиус шара.

- Период колебаний осциллятора

$$T = \frac{t}{N}$$

t – время, в течение которого произошло N колебаний;

- Формулы для вычисления погрешностей:

- Абсолютная погрешность прямых измерений:

$$\Delta x = \sqrt{t^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} + \Delta x_B^2}$$

n – количество измерений;
 t – коэффициент Стьюдента;
 Δx_B – приборная погрешность.

- Абсолютная погрешность косвенных измерений:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2 + \dots}$$

Метод проведения измерений

1. Измерим массы грузов m_1 и m_2 на электронных весах. Закрепим стержень на оси установки и возбудим колебания. Измерим время t , за которое стержень совершает N колебаний. Повторим измерения 6 раз. Теперь установим два груза по обе стороны от стержня в прорези, которые ближе всего к центра стержня. Прорези располагаются через каждые 5 см на стержне, таким образом начальное расстояние от оси колебаний до грузов составляет 5 см. Измерим время t , за которое стержень с грузами совершает N колебаний. Повторим измерения 6 раз. Затем закрепим грузы в следующие прорези (т.е. сдвинем их на 5 см дальше от оси колебаний). Повторим ту же серию измерений. Повторим измерения для всех остальных положений грузов.
2. Измерим размеры и массу исследуемых тел. Затем измерим время, в течение которого совершается n колебаний, и повторим это измерение 6 раз, для следующих тел:
 - Деревянный шар;
 - Деревянный диск;
 - Сплошной деревянный цилиндр с подставкой;
 - Полый металлический цилиндр с подставкой;
 - Подставка отдельно.
3. Измерим массу металлического тонкого диска m на электронных весах. Закрепим диск на оси установки, проходящей через его центральное отверстие, и возбудим колебания. Измерим время t , за которое диск совершает N колебаний. Повторим измерения 6 раз. Отверстия в диске располагаются через каждые 2 см. Будем закреплять диск в этих отверстиях, таким образом меняя положение оси колебаний относительно центра масс диска. Повторим ту же серию измерений для всех положений диска d .

Таблицы и обработка данных

Погрешность длин, измеренных штангенциркулем, равна 0.05 мм (приборная погрешность, равная половине цены деления (0.025 мм) + погрешность отсчёта (0.025 мм)). Погрешность длин, измеренных большим штангенциркулем, равна 0.1 мм (приборная погрешность, равная половине цены деления (0.05 мм) + погрешность отсчёта (0.05 мм)). Погрешность длин, измеренных линейкой, равна 1 мм (приборная погрешность, равная половине цены деления (0.5 мм) + погрешность отсчёта (0.5 мм)).

Погрешность массы, измеренной весами, равна 0.03 г (указано на весах).

Приборная погрешность секундомера равна половине цены деления: $\Delta t_B = 0.05$ с.

При каждом нахождении промежутка времени проводилось 6 измерений. Абсолютная погрешность находилась по формуле для погрешности прямых измерений, указанной в разделе «Расчётные формулы». Коэффициент Стьюдента при данном количестве равен 1.2.

Коэффициенты наклона графиков и их точки пересечения с осями (и их погрешности) каждой прямой зависимости найдём по методу наименьших квадратов.

1. Исследование крутильных колебаний тонкого стержня с грузами.

Определение модуля кручения D .

Масса грузов, измеренная с помощью весов: $m_1 = m_2 = m = 236.06 \pm 0.03$ г.

Период колебаний стержня без грузов:

N	$t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$T_0, \text{с}$	$T_0^2, \text{с}^2$
5	11.8	11.82	0.05	2.363 ± 0.011	5.59 ± 0.05
	11.8				
	11.8				
	11.8				
	11.8				
	11.9				

Периоды колебаний стержня с грузами:

$r, \text{см}$	N	$t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$r^2, \text{см}^2$	$T^2, \text{с}^2$
5	5	13.4	13.43	0.07	2.687±0.014	25	7.22±0.08
		13.5					
		13.4					
		13.4					
		13.6					
		13.3					
10	5	17.2	17.25	0.06	3.450±0.011	100	11.90±0.08
		17.2					
		17.2					
		17.3					
		17.3					
		17.3					
15	5	22.2	22.22	0.05	4.443±0.011	225	19.74±0.10
		22.2					
		22.3					
		22.2					
		22.2					
		22.2					
20	5	27.7	27.75	0.06	5.550±0.011	400	30.80±0.13
		27.8					
		27.8					
		27.7					
		27.7					
		27.8					
25	5	33.4	33.55	0.08	6.710±0.016	625	45.0±0.2
		33.5					
		33.7					
		33.7					
		33.5					
		33.5					
30	5	39.5	39.55	0.06	7.910±0.011	900	62.57±0.18
		39.5					
		39.5					
		39.6					
		39.6					
		39.6					

Формулы, по которым вычислялись погрешности:

$$\Delta t = \sqrt{1.2^2 \frac{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t})^2}{n(n-1)} + \Delta t_B^2}$$

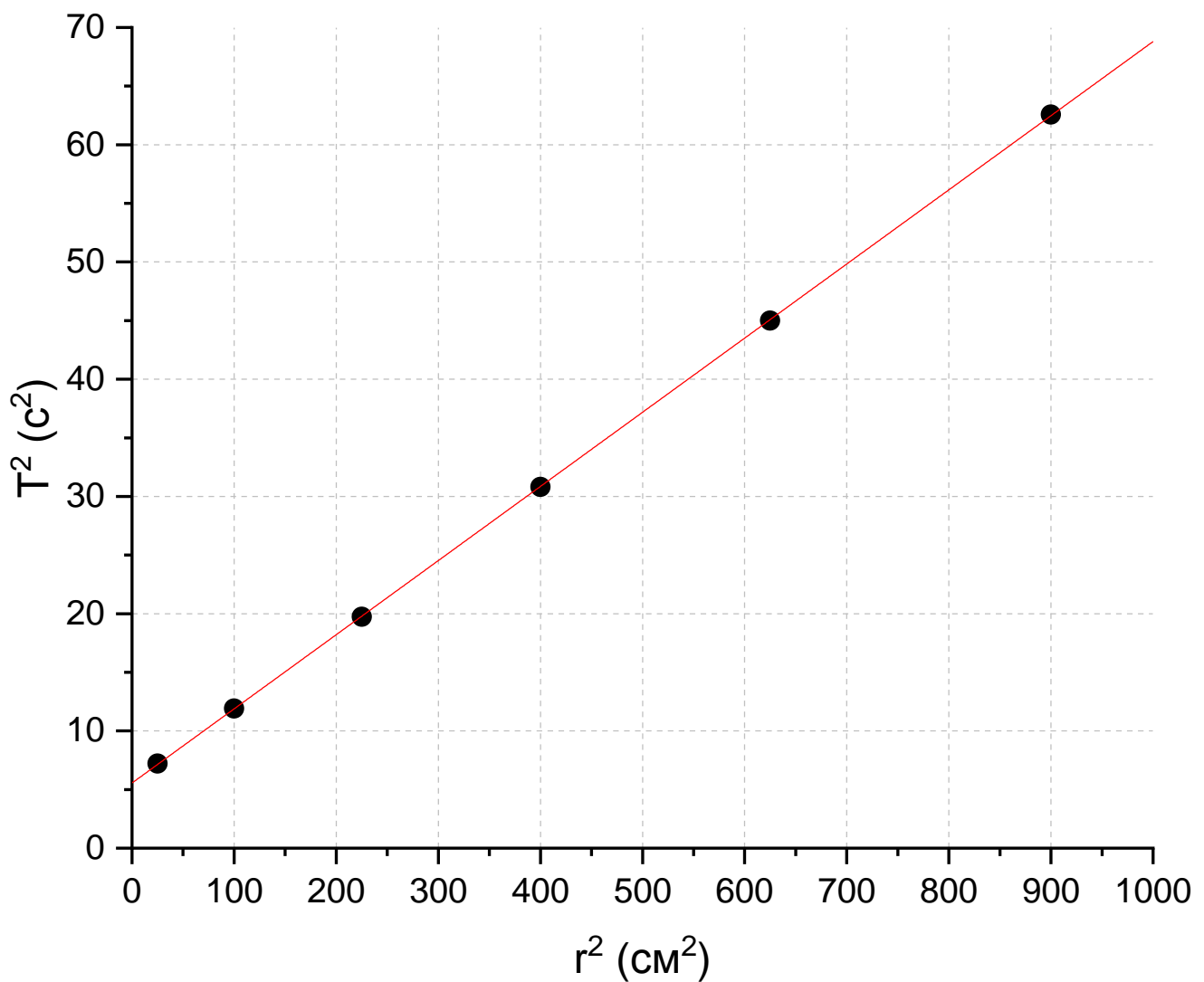
$$\Delta T = \frac{\Delta t}{N}$$

$$\Delta T^2 = \frac{\partial T^2}{\partial T} \cdot \Delta T = 2T \cdot \Delta T$$

Построим график зависимости $T^2(r^2)$. Теоретическая зависимость выражается формулой:

$$T^2 = \alpha r^2 + b = \frac{8m\pi^2}{D} r^2 + T_0^2 \Rightarrow \alpha = \frac{8m\pi^2}{D} \Rightarrow D = \frac{8m\pi^2}{\alpha}$$

$$b = T_0^2 \Rightarrow T_0 = \sqrt{b}$$



Экспериментальная зависимость $T^2(r^2)$ получилась линейной. Таким образом, теоретическая формула, приведённая выше, верна. Из графика найдём модуль кручения D и период колебаний стержня без грузов T_0 :

$$\begin{aligned}\alpha &= 0.06324 \pm 0.00011 \frac{\text{с}^2}{\text{см}^2} \\ \bar{D} &= \frac{8m\pi^2}{\alpha} \approx 0.02947 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \\ \Delta D &= \sqrt{\left(\frac{\partial D}{\partial m} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial D}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{8\pi^2}{\alpha} \cdot \Delta m\right)^2 + \left(\frac{8m\pi^2}{\alpha^2} \cdot \Delta \alpha\right)^2} \approx 0.00005 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \\ D &= 0.02947 \pm 0.00005 \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{с}^2} \\ b &= 5.56 \pm 0.05 \text{ с}^2 \\ \bar{T}_0 &= \sqrt{b} \approx 2.358 \text{ с} \\ \Delta T_0 &= \left| \frac{\partial T_0}{\partial b} \cdot \Delta b \right| = \frac{\Delta b}{2\sqrt{b}} \approx 0.012 \text{ с} \\ T_0 &= 2.358 \pm 0.012 \text{ с}\end{aligned}$$

Полученные двумя способами периоды колебаний стержня без грузов T_0 совпали в пределах погрешности.

2. Определение момента инерции различных твёрдых тел методом крутильных колебаний.

Измерим размеры и массу исследуемых тел и определим теоретические значения их моментов инерции. Затем измерим периоды их колебаний. Сплошной и полый цилиндр в данных опытах приходится ставить на подставку. Значит, необходимо отдельно измерить её период колебаний, чтобы найти её момент инерции и далее вычитать его для нахождения моментов инерции цилиндров.

Подставка

N	t, c	\bar{t}, c	$\Delta t, c$	T_{Π}, c	$J_{\Pi}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
10	5.4	5.40	0.05	0.540 ± 0.005	$(0.218 \pm 0.004) \cdot 10^{-3}$
	5.4				
	5.4				
	5.4				
	5.4				
	5.4				

$$\bar{J}_{\Pi} = D \frac{T_{\Pi}^2}{4\pi^2} \approx 0.2177 \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\Delta J_{\Pi} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\Pi}}{\partial T_{\Pi}} \cdot \Delta T_{\Pi}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{T_{\Pi}^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(D \frac{T_{\Pi}}{2\pi^2} \cdot \Delta T_{\Pi}\right)^2} \approx 0.004 \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_{\Pi} = (0.218 \pm 0.004) \cdot 10^{-3} \text{кг} \cdot \text{м}^2$$

Деревянный шар

$m_{\text{ш}}, \text{Г}$	$d_{\text{ш}}, \text{ММ}$	$R_{\text{ш}}, \text{ММ}$	$J_{\text{ш теор}}, \text{КГ} \cdot \text{М}^2$	N	$t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$T_{\text{ш}}, \text{с}$	$J_{\text{ш экс}}, \text{КГ} \cdot \text{М}^2$
931.07 ± 0.03	143.1 ± 0.1	71.55 ± 0.05	(1.907 ± 0.003) $\cdot 10^{-3}$	5	8.0	8.02	0.05	1.603 ± 0.011	(1.92 ± 0.03) $\cdot 10^{-3}$
					8.1				
					8.0				
					8.0				
					8.0				
					8.0				

$$\overline{J_{\text{ш теор}}} = \frac{2}{5} m_{\text{ш}} R_{\text{ш}}^2 \approx 1.9066 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\Delta J_{\text{ш теор}} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{ш теор}}}{\partial m_{\text{ш}}} \cdot \Delta m_{\text{ш}} \right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ш теор}}}{\partial R_{\text{ш}}} \cdot \Delta R_{\text{ш}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{2}{5} R_{\text{ш}}^2 \cdot \Delta m_{\text{ш}} \right)^2 + \left(\frac{4}{5} m_{\text{ш}} R_{\text{ш}} \cdot \Delta R_{\text{ш}} \right)^2} \approx 0.003 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$J_{\text{ш теор}} = (1.907 \pm 0.003) \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\overline{J_{\text{ш экс}}} = D \frac{T_{\text{ш}}^2}{4\pi^2} \approx 1.919 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\Delta J_{\text{ш экс}} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{ш экс}}}{\partial D} \cdot \Delta D \right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ш экс}}}{\partial T_{\text{ш}}} \cdot \Delta T_{\text{ш}} \right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{T_{\text{ш}}^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D \right)^2 + \left(D \frac{T_{\text{ш}}}{2\pi^2} \cdot \Delta T_{\text{ш}} \right)^2} \approx 0.03 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$J_{\text{ш экс}} = (1.92 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

Деревянный диск

$m_d, \text{г}$	$R_d, \text{мм}$	$J_{d_{\text{теор}}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$	N	$t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$T_d, \text{с}$	$J_{d_{\text{экс}}}, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
311.82 ±0.03	110 ±1	(1.89 ± 0.03) · 10 ⁻³	5	8.0	8.03	0.05	1.607 ±0.011	(1.93 ± 0.03) · 10 ⁻³
				8.1				
				8.0				
				8.1				
				8.0				
				8.0				

$$\overline{J_{d_{\text{теор}}}} = \frac{m_d R_d^2}{2} \approx 1.8865 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\Delta J_{d_{\text{теор}}} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{d_{\text{теор}}}}{\partial m_d} \cdot \Delta m_d\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{d_{\text{теор}}}}{\partial R_d} \cdot \Delta R_d\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{R_d^2}{2} \cdot \Delta m_d\right)^2 + (m_d R_d \cdot \Delta R_d)^2} \approx 0.03 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_{d_{\text{теор}}} = (1.89 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\overline{J_{d_{\text{экс}}}} = D \frac{T_d^2}{4\pi^2} \approx 1.927 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\Delta J_{d_{\text{экс}}} = \sqrt{\left(\frac{\partial J_{d_{\text{экс}}}}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{d_{\text{экс}}}}{\partial T_d} \cdot \Delta T_d\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{T_d^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(D \frac{T_d}{2\pi^2} \cdot \Delta T_d\right)^2} \approx 0.03 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_{d_{\text{экс}}} = (1.93 \pm 0.03) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Сплошной деревянный цилиндр

$m_{\text{ц}}, \text{Г}$	$d_{\text{ц}}, \text{ММ}$	$R_{\text{ц}}, \text{ММ}$	$J_{\text{ц теор}}, \text{КГ} \cdot \text{М}^2$	N	$t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$T_{\text{ц+п}}, \text{с}$	$J_{\text{ц экс}}, \text{КГ} \cdot \text{М}^2$
369.68 ± 0.03	89.35 ± 0.05	44.68 ± 0.02	(0.3689 ± 0.0004) $\cdot 10^{-3}$	10	8.9	8.83	0.06	0.883 ± 0.006	(0.365 ± 0.009) $\cdot 10^{-3}$
					8.7				
					8.9				
					8.9				
					8.8				
					8.8				

$$\overline{J_{\text{ц теор}}} = \frac{m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2}{2} \approx 0.3689 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{ц теор}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{ц теор}}}{\partial m_{\text{ц}}} \cdot \Delta m_{\text{ц}}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ц теор}}}{\partial R_{\text{ц}}} \cdot \Delta R_{\text{ц}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{R_{\text{ц}}^2}{2} \cdot \Delta m_{\text{ц}}\right)^2 + (m_{\text{ц}} R_{\text{ц}} \cdot \Delta R_{\text{ц}})^2} \approx 0.0004 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2 \end{aligned}$$

$$J_{\text{ц теор}} = (0.3689 \pm 0.0004) \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\overline{J_{\text{ц+п экс}}} = D \frac{T_{\text{ц+п}}^2}{4\pi^2} \approx 0.5825 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{ц+п экс}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{ц+п экс}}}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ц+п экс}}}{\partial T_{\text{ц+п}}} \cdot \Delta T_{\text{ц+п}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{T_{\text{ц+п}}^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(D \frac{T_{\text{ц+п}}}{2\pi^2} \cdot \Delta T_{\text{ц+п}}\right)^2} \approx 0.009 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2 \end{aligned}$$

$$J_{\text{ц+п экс}} = (0.583 \pm 0.009) \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\overline{J_{\text{ц экс}}} = \overline{J_{\text{ц+п экс}}} - \bar{J}_{\text{п}} \approx 0.3648 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{ц экс}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{ц экс}}}{\partial J_{\text{ц+п экс}}} \cdot \Delta J_{\text{ц+п экс}}\right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{ц экс}}}{\partial J_{\text{п}}} \cdot \Delta J_{\text{п}}\right)^2} = \\ &= \sqrt{(\Delta J_{\text{ц+п экс}})^2 + (\Delta J_{\text{п}})^2} \approx 0.009 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2 \end{aligned}$$

$$J_{\text{ц экс}} = (0.365 \pm 0.009) \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

Полый металлический цилиндр

$m_{\text{пц}}, \text{Г}$	$d_{\text{пц1}}, \text{ММ}$	$R_{\text{пц1}}, \text{ММ}$	$d_{\text{пц2}}, \text{ММ}$	$R_{\text{пц2}}, \text{ММ}$	$J_{\text{пцтеор}}, \text{КГ} \cdot \text{М}^2$
400.49 ± 0.03	90.05 ± 0.05	45.02 ± 0.02	87.95 ± 0.05	43.98 ± 0.02	$(0.7932 \pm 0.0006) \cdot 10^{-3}$

N	$t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$T_{\text{пц+п}}, \text{с}$	$J_{\text{пцэкс}}, \text{КГ} \cdot \text{М}^2$
10	11.4	11.50	0.07	1.150 ± 0.007	$(0.770 \pm 0.012) \cdot 10^{-3}$
	11.5				
	11.6				
	11.4				
	11.6				
	11.5				

$$\overline{J_{\text{пцтеор}}} = \frac{1}{2} m_{\text{пц}} (R_{\text{пц1}}^2 + R_{\text{пц2}}^2) \approx 0.7932 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{пцтеор}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{пцтеор}}}{\partial m_{\text{пц}}} \cdot \Delta m_{\text{пц}} \right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{пцтеор}}}{\partial R_{\text{пц1}}} \cdot \Delta R_{\text{пц1}} \right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{пцтеор}}}{\partial R_{\text{пц2}}} \cdot \Delta R_{\text{пц2}} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{1}{2} (R_{\text{пц1}}^2 + R_{\text{пц2}}^2) \cdot \Delta m_{\text{пц}} \right)^2 + (m_{\text{пц}} R_{\text{пц1}} \cdot \Delta R_{\text{пц1}})^2 + (m_{\text{пц}} R_{\text{пц2}} \cdot \Delta R_{\text{пц2}})^2} \approx \\ &\approx 0.0006 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2 \end{aligned}$$

$$J_{\text{пцтеор}} = (0.7932 \pm 0.0006) \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\overline{J_{\text{пц+пэкс}}} = D \frac{T_{\text{пц+п}}^2}{4\pi^2} \approx 0.9873 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{пц+пэкс}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{пц+пэкс}}}{\partial D} \cdot \Delta D \right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{пц+пэкс}}}{\partial T_{\text{пц}}} \cdot \Delta T_{\text{пц}} \right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{T_{\text{пц+п}}^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D \right)^2 + \left(D \frac{T_{\text{пц+п}}}{2\pi^2} \cdot \Delta T_{\text{пц+п}} \right)^2} \approx 0.012 \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2 \end{aligned}$$

$$J_{\text{пц+пэкс}} = (0.987 \pm 0.012) \cdot 10^{-3} \text{КГ} \cdot \text{М}^2$$

$$\overline{J_{\text{пц}_{\text{экс}}}} = \overline{J_{\text{пц}+\text{п}_{\text{экс}}}} - \overline{J_{\text{п}}} \approx 0.7696 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$\begin{aligned} \Delta J_{\text{пц}_{\text{экс}}} &= \sqrt{\left(\frac{\partial J_{\text{пц}_{\text{экс}}}}{\partial J_{\text{пц}+\text{п}_{\text{экс}}}} \cdot \Delta J_{\text{пц}+\text{п}_{\text{экс}}} \right)^2 + \left(\frac{\partial J_{\text{пц}_{\text{экс}}}}{\partial J_{\text{п}}} \cdot \Delta J_{\text{п}} \right)^2} = \\ &= \sqrt{(\Delta J_{\text{пц}+\text{п}_{\text{экс}}})^2 + (\Delta J_{\text{п}})^2} \approx 0.012 \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \\ J_{\text{пц}_{\text{экс}}} &= (0.770 \pm 0.012) \cdot 10^{-3} \text{ кг} \cdot \text{м}^2 \end{aligned}$$

Обсуждение результатов

Теоретическое (найденное через параметры тела) значение момента инерции совпадает в пределах погрешности с экспериментальным (найденным динамическим способом) значением момента инерции для шара, диска, сплошного цилиндра. Теоретический и экспериментальный моменты инерции для полого цилиндра не вошли в пределы погрешности, но тем не менее достаточно близки. Наибольший вклад в погрешность вносит сложность измерения некоторых размеров тел.

Таким образом, верность теоретических формул для моментов инерции тел доказана.

3. Экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса-Штейнера.

Масса исследуемого диска, измеренная с помощью весов: $m = 685.18 \pm 0.03 \text{ г}$.

$d, \text{см}$	N	$t, \text{с}$	$\bar{t}, \text{с}$	$\Delta t, \text{с}$	$T, \text{с}$	$d^2, \text{см}^2$	$J, \text{кг} \cdot \text{м}^2$
0	5	21.6	21.55	0.06	4.310 ± 0.011	0	0.01387 ± 0.00008
		21.6					
		21.6					
		21.5					
		21.5					
		21.5					
2	5	21.8	21.63	0.08	4.327 ± 0.016	4	0.01398 ± 0.00010
		21.5					
		21.6					
		21.5					
		21.7					
		21.7					
4	5	22.2	22.32	0.07	4.463 ± 0.014	16	0.01487 ± 0.00010
		22.5					
		22.3					
		22.3					
		22.3					
		22.3					

6	5	22.9	22.97	0.07	4.593 ±0.014	36	0.01575 ±0.00010
		23.0					
		23.1					
		22.8					
		23.0					
		23.0					
8	5	24.8	24.85	0.08	4.970 ±0.016	64	0.01844 ±0.00012
		24.8					
		24.7					
		25.0					
		24.8					
		25.0					
10	5	27.3	27.40	0.10	5.480 ±0.019	100	0.02242 ±0.00016
		27.7					
		27.4					
		27.4					
		27.4					
		27.2					
12	5	28.7	28.87	0.09	5.773 ±0.018	144	0.02488 ±0.00016
		28.8					
		28.8					
		28.8					
		29.1					
		29.0					
14	5	31.6	31.52	0.18	6.30 ±0.04	196	0.0297 ±0.0003
		32.0					
		31.8					
		31.1					
		31.4					
		31.2					
16	5	33.8	34.15	0.13	6.83 ±0.03	256	0.0348 ±0.0003
		34.4					
		34.0					
		34.3					
		34.0					
		34.4					

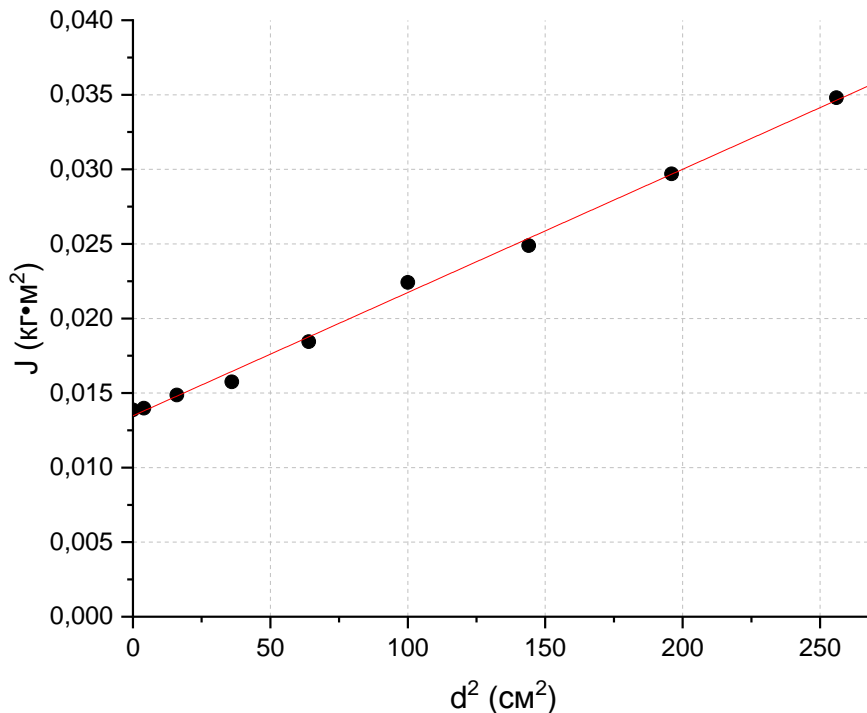
Момент инерции и его погрешность вычислялись по следующим формулам:

$$\bar{J} = D \frac{T^2}{4\pi^2}$$

$$\Delta J = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial D} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} \cdot \Delta T\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{T^2}{4\pi^2} \cdot \Delta D\right)^2 + \left(D \frac{T}{2\pi^2} \cdot \Delta T\right)^2}$$

Построим график зависимости $J(d^2)$. Теоретическая зависимость выражается формулой:

$$J = \alpha d^2 + b = m d^2 + J_c \Rightarrow \alpha = m; b = J_c$$



Экспериментальная зависимость $J(d^2)$ получилась линейной. Из графика найдём массу диска m и момент инерции диска относительно оси через его центр масс J_c :

$$\alpha = (8.27 \pm 0.18) \cdot 10^{-5} \frac{\text{кг} \cdot \text{м}^2}{\text{см}^2} = 827 \pm 18 \text{ г}$$

$$m = 827 \pm 18 \text{ г}$$

$$b = (1.34 \pm 0.02) \cdot 10^{-2} \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

$$J_c = 0.0134 \pm 0.0002 \text{ кг} \cdot \text{м}^2$$

Полученный из графика момент инерции J_c очень близок к измеренному значению. А вот масса диска m оказалась больше измеренной. Это может быть связано с наличием сил трения в осцилляторе и сопротивлением воздуха, которое диск испытывает из-за своих размеров.

В целом, зависимость получилась линейной, что подтверждает теорему Гюйгенса-Штейнера.

Выводы

- Подтверждена формула, выражающая зависимость периода вращательных колебаний от момента инерции и модуля кручения системы;
- Подтверждена аддитивность момента инерции;
- Подтверждены формулы моментов инерции для шара, диска, полого и сплошного цилиндров;
- Подтверждена теорема Гюйгенса-Штейнера.