

Х. ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА: РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРИБОРА

Разрешающая способность по Релею

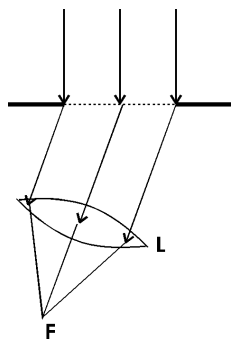


Рис. 49.

Разрешающей способностью или разрешающей силой спектрального прибора называется его способность разделять две близко расположенные спектральные линии. Эту способность можно характеризовать величиной $\delta\lambda$ — наименьшей разностью длин волн двух линий еще разделяемых прибором. В качестве численной характеристики разрешающей силы принимается безразмерная величина:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda},$$

где λ — средняя длина волны двух разрешаемых линий.

Разрешающая способность могла бы быть сколь угодно велика при соблюдении следующих условия:

1. если линии строго монохроматичны;
2. в приборе отсутствуют aberrация и дифракция (это означает, что можно пользоваться законами геометрической оптики);
3. щель может быть сделана бесконечно узкой.

Однако, в реальных условиях ни одно из перечисленных условий не соблюдается и в фокальной плоскости всякая спектральная линия является уширенным изображением щели с некоторым распределением освещенности внутри изображения.

Распределение освещенности в плоскости изображения щели внутри самой линии (зависящей от свойств источника и свойств самой линии), так и явлениями в самом приборе (шириной щели, дифракцией, aberrациями и т.п.).

Для выяснения роли дифракции будем считать, что распределение освещенности в фокальной плоскости прибора будет определяться только дифракцией на диспергирующем элементе и, что действующая диафрагма прибора прямоугольна (она обычно задается размерами призмы или решетки).

Рассмотрим параллельный пучок лучей, проходящий сквозь щель шириной x_0 и бесконечно-длинную в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа Рис. 49.

Уравнение колебания, исходящего от края щели, может быть в комплексном виде записано:

$$dS = ae^{i(\omega t + \gamma \frac{x}{\lambda})} dx$$

где $\gamma = 2\pi \sin \varphi$.

Суммарное колебание в фокальной плоскости линзы равно:

$$S = \int_0^{x_0} a e^{i(\omega t + \gamma \frac{x}{\lambda})} dx = \frac{a\lambda}{\gamma i} (e^{i(\omega t + \gamma \frac{x_0}{\lambda})} - e^{i(\omega t)})$$

$$\text{или } S = \frac{a\lambda}{\gamma i} (e^{i\gamma x_0/\lambda} - 1) e^{i\omega t}$$

Множитель $\xi = \frac{a\lambda}{\gamma i} (e^{i\gamma x_0/\lambda} - 1)$ представляет собой комплексную амплитуду колебания S . Интенсивность колебания S (равная квадрату вещественной части амплитуды) равна $I = \xi \xi^*$, где ξ^* — выражение, сопряженное с ξ . Таким образом,

$$I = \left(\frac{a\lambda}{\gamma}\right)^2 (e^{i\gamma x_0/\lambda} - 1)(e^{-i\gamma x_0/\lambda} - 1) = 2\left(\frac{a\lambda}{\gamma}\right)^2 \left(1 - \frac{1}{2}(e^{i\gamma x_0/\lambda} + e^{-i\gamma x_0/\lambda})\right)$$

$$I = 2\left(\frac{a\lambda}{\gamma}\right)^2 (1 - \cos \frac{\gamma x_0}{\lambda}) = 4\left(\frac{a\lambda}{\gamma}\right)^2 \sin^2 \frac{\gamma x_0}{2\lambda}$$

Подставляя вместо γ его значение $2\pi \sin \varphi$, умножая и деля найденное выражение на x_0^2 , получим

$$I = (ax)^2 \left(\frac{\sin(\pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda})}{\pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda}}\right)^2 \quad (79)$$

Обозначая $ax_0 = A$, $\pi \frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda} = U$ перепишем формулу 79 в виде:

$$I = A^2 \frac{\sin^2 U}{U^2} \quad (80)$$

выражение $\frac{\sin^2 U}{U^2}$ имеет:

1. максимум $I_{max} = 1$, при $U = 0$.
2. ряд эквидистантных минимумов $I_{min} = 0$ при $U = \pm k\pi$, $k = 1, 2, \dots$
3. вторичные максимумы при значении U_k , являющихся корнями уравнения $U = tgU$.

Это уравнение получается из условия: $\frac{d}{dU} \left(\frac{\sin U}{U}\right) = 0$

$$\text{или } \left(\frac{\cos U}{U} - \frac{\sin U}{U^2}\right) = \frac{\sin U}{U} (ctgU - \frac{1}{U}) = 0$$

откуда, либо $\frac{\sin U}{U} = 0$, что ведет к условию минимумов, либо $U = tgU$.

Корни этого последнего уравнения могут быть найдены графически, как точки пересечения прямой $x = U$ с тангенсоидой $x = tgU$. Эти корни лежат между двумя соседними минимумами, располагаясь при возрастании U все ближе и ближе к середине между ними. Два первых максимума получаются при $U = \pm 4.92 \frac{\pi}{2}$ и $U = \pm 2.86 \frac{\pi}{2}$ и имеют значения 0.0165 и 0.0472. При больших k приближенно $U_k = \pm(2k+1)\frac{\pi}{2}$, где k большие числа натурального ряда. Численное значение этих максимумов, при больших k , приблизительно равно $\frac{4}{(2k+1)^2 \pi^2}$. Подставляя в (1) вместо U его значение $\frac{x_0 \sin \varphi}{\lambda} \pi$ имеем:

1. главный максимум расположен при $\varphi = 0$.
2. минимумы расположены при φ , удовлетворяющих условию $\sin \varphi = \pm k \frac{\lambda}{x_0}$ при малых φ .

$$\varphi = \pm k \frac{\lambda}{x_0}$$

Графически расположение максимумов и минимумов представлено на Рис. 50.

Ближайшие к главному максимуму минимумы расположены при $\varphi = \pm \frac{\lambda}{x_0}$.

По Релею условие разрешения двух дифракционных картин заключается в том, чтобы главный максимум одной из них попадал на ближайший к главному максимуму минимум другой. Рис. 51.

В этом случае, при равной интенсивности обоих главных максимумов, ордината точки пересечения контура равна

$$\frac{\sin^2 \frac{\pi}{2}}{(\frac{\pi}{2})^2} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^2 \approx 0.4$$

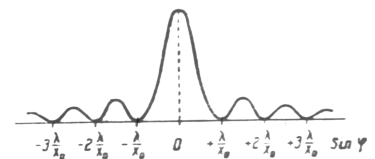


Рис. 50.

Следовательно ордината провала между максимумами равна 0.8 от наибольшей ординаты. Отсюда по Релею два луча разрешены только в том случае, если угол между ними $\delta D \geq \frac{\lambda}{x_0}$, где λ — средняя длина волны рассматриваемых лучей; x_0 — поперечное сечение пучка света, прошедшего диафрагму.

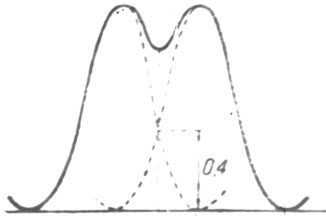


Рис. 51.

Пользуясь соотношением Релея, получим выражение для разрешающей способности:

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = x_0 \frac{\delta D}{\delta\lambda} \quad (81)$$

где x_0 — ширина действующего отверстия прибора;

δD — угловое расстояние между разрешенными спектральными линиями.

Вычисление разрешающей способности по Релею может быть легко произведено для призмы, дифракционной решетки, эшелона Майкельсона.

Однако и в том случае, когда функция распределения освещенности не изображается кривой, типа представленной на Рис. 51, так же удобно в качестве меры разрешения выбрать интервал, на котором две линии равной

интенсивности дают такую суммарную кривую освещенности, что глубина провала между максимумами будет равна 0.2 от ординаты максимума.

Следует, однако, иметь в виду, что если две линии удовлетворяют условию Релея, то это еще не означает, что они будут реально разрешены прибором. В том случае, когда интенсивности этих линий сильно отличаются друг от друга они могут сливаться в одну даже тогда, когда расстояние между ними больше $\delta\lambda$.

В некоторых случаях, линии, находящиеся на расстоянии меньшем $\delta\lambda$ могут оказаться разрешенными. Для этого нужно только, чтобы точность измерения интенсивностей превышала 20 %. Например, при фотоэлектрических методах измерения, эта точность может быть доведена до 1%; следовательно, минимум, глубина которого превышает 1%, может быть обнаружен, и две линии, интенсивности которых равны, могут быть разрешены, если расстояние между их максимумами значительно меньше определенной по Релею величины.

Существенно знать, когда вычисление разрешающей силы по Релею может дать правильную оценку реальной разрешающей силы прибора. Для этого необходимо сделать оценку тех допущений, при которых делаются вычисления.

Определим x_0 , в том случае, когда оно задается размерами призмы Рис. 53

$$x_0 = AB \sqrt{1 - \sin^2 i}$$

Для минимума отклонения: $\sin i = \mu \sin \frac{A}{2}$, μ - показатель преломления.

$$x_0 = AB \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}$$

Выразим AB через величину основания призмы $BC = t$.

$$AB = \frac{BF}{\sin \frac{A}{2}} \text{ или } AB = \frac{t}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

$$x_0 = \frac{t \sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}}{2 \sin \frac{A}{2}}$$

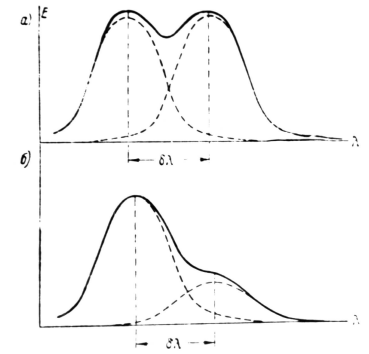


Рис. 52.

Сравним это с условием минимума отклонения

$$\frac{2 \sin \frac{A}{2}}{\sqrt{1 - \mu^2 \sin^2 \frac{A}{2}}} = \frac{\delta D}{\delta\mu}$$

$$\text{т.е. } x_0 = \frac{t \delta\mu}{\delta D_{\min}} \text{ или просто}$$

$$x_0 = t \frac{\delta\mu}{\delta D} \quad (83)$$

$$\text{тогда } \frac{\lambda}{\delta\lambda} = x_0 \frac{\delta D}{\delta\lambda} = t \frac{\delta\mu}{\delta D} \frac{\delta D}{\delta\lambda}$$

т.е.

$$R = \frac{\lambda}{\delta\lambda} = t \frac{\delta\mu}{\delta\lambda} \quad (84)$$

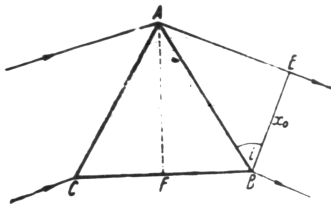


Рис. 53.

Величина $\frac{d\mu}{d\lambda}$ представляет собою дисперсию вещества, из которого сделана призма.

Для того, чтобы две линии, для которых $\delta\mu$ различается на $d\mu$ могли быть разрешены, основание призмы должно равняться:

$$t = \frac{\lambda}{\delta\mu} \quad (85)$$

Разрешающая сила призмы из данного материала зависит только от размеров основания, но не от преломляющего угла (в то время, как дисперсия зависит от преломляющего угла).

Все призмы, построенные на одном и том же основании и из одинакового материала имеют одинаковую разрешающую силу.

При данной угловой дисперсии $\frac{dD}{d\lambda}$ разрешающая сила, по формуле 81, тем больше, чем больше сечение (апертура) пучка:

Если пучок заполняет не всю призму, но проходит так, что пути крайних лучей в призме равны t_1 и t_2 , то это равносильно тому, как если бы пучок проходил призму ACE Рис. 54 с основанием $CE = t_1 - t_2$ и плоскопараллельную пластинку $ABDE$.

Отсюда, в этом случае, разрешающая сила равна:

$$\frac{\lambda}{\delta\lambda} = (t_1 - t_2) \frac{d\mu}{d\lambda}$$

Все полученные выше формулы выведены в предположении падения на призму строго параллельного пучка света, т.е. в предположении бесконечно узкой щели и идеальных объективов.

При конечной ширине щели разрешающая способность будет падать. Попробуем сопоставить ширину щели с шириной дифракционной картины, зависящей от действующего отверстия. За меру этой последней примем половину расстояния между первыми дифракционными минимумами. Тогда угловая ширина спектральной линии будет определяться величиной:

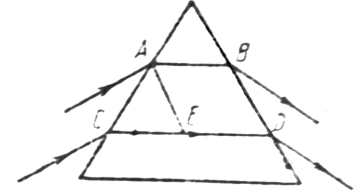


Рис. 54.

$$\varphi = \frac{\lambda}{x_0}$$

Если предположить, что спектр расположен перпендикулярно оптической оси камеры, то линейная ширина спектральной линии будет равна:

$$s = f_2 \varphi = \frac{\lambda}{x_0} f_2$$

где f_2 — фокусное расстояние объектива камеры.

Пусть a — ширина щели спектрального прибора, тогда ширина геометрического изображения щели будет:

$$a' = a \frac{f_2}{f_1}$$

где f_1 — фокусное расстояние объектива коллиматора.

Естественно, что эта ширина геометрического изображения будет увеличивать общую ширину спектральной линии. Чтобы такое увеличение существенным образом не искажало распределения интенсивности в дифракционной картине, необходимо, чтобы $a' \leq s$.

при $a' = s$ имеем: $\frac{\lambda}{x_0} f_2 = a \frac{f_2}{f_1}$, откуда $a = \lambda \frac{f_1}{x_0} = a_n$.

Такую ширину щели принято называть нормальной.

Иначе это равенство можно переписать так:

$$a_n = \frac{\lambda}{\phi}$$

где $\phi = \frac{x_0}{f_1}$ — есть угол, под которым из щели видно действующее отверстие прибора.

Таким образом, если мы возьмем нормальную ширину щели, то ее изображение будет соответствовать ширине дифракционной картины спектральной линии, однако такая ширина будет несколько (на 20%) снижать разрешающую способность прибора. Для полного выявления разрешающей способности следует брать еще более узкие щели, что приведет к сильному снижению интенсивности. поэтому обычно принимается, что для проверки разрешающей способности достаточно брать нормальную ширину щели.

Как влияет ширина щели на разрешающую способность прибора, показано на. 55 (кривая R). Здесь по оси абсцисс отложена ширина щели в единицах "нормальной ширины", по оси ординат отложена величина разрешающей способности, которая, при щели $a = 0$ принята за 1.00.

Мы видим, что при нормальной ширине щели ($\frac{a}{a_n} = 1.0$) разрешающая способность составляет примерно 77% максимального значения.

На этом же графике приведена зависимость интенсивности спектральной линии от ширины щели, откуда видно, что яркость линейчатого спектра не зависит о ширины щели, пока ширина больше "нормальной", и начинает падать с уменьшением ширины щели, когда она одного порядка или меньше "нормальной". В случае сплошного спектра дело обстоит иначе, там яркость прямо пропорциональна ширине щели и обратно пропорциональна дисперсии (см. например С.Э.Фриш "Техника спектроскопии").

Релеевская разрешающая сила является верхним пределом разрешения спектральных приборов, достигаемым, например, в длиннофокусных автоколлимационных спектрографах, а также в больших дифракционных спектрографах.

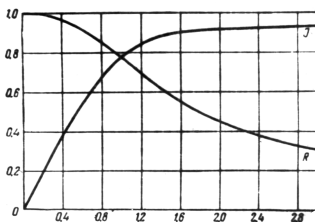


Рис. 55.

Реальная разрешающая сила может быть ограничена минимальной шириной щели, которую допускает ее конструкция, зерном фотопластинки и дефектами оптики. Как правило, ширина щели и зерно фотопластинки одинаково ограничивают разрешающую способность. Если предположить, что минимальное расстояние между еще разрешаемыми линиями определяется зерном фотопластинки и равно $dl = 0.001\text{ см}$, можно найти практическую разрешающую силу прибора R_{pr} , зная его линейную дисперсию.

$$R_{pr} = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = 10^3 \lambda \frac{dl}{d\lambda} \quad (86)$$

Обычно в современных спектральных приборах оптика достаточно хороша и не уменьшает разрешающей способности ниже указанной величины. Если разрешающая сила лимитируется уравнением 86, а не дифракционными явлениями, разрешение можно повысить увеличением дисперсии прибора.

Задачей работы является знакомство с влиянием явлений дифракции на качество изображения спектра и определение разрешающей силы прибора.

Объектом изучения служит монохроматор МС-2, перед призмой которого поставлена дополнительная щель, дающая возможность изменять апертуру падающего на призму пучка.

Вместо окуляра используется окулярный микрометр, с помощью которого можно измерять ширину дифракционной картины спектральной линии.

Оптическая схема прибора дана на Рис. 56, его внешний вид на Рис. 58 и 59.

A — осветительная призма,

C_1 — щель,

C_2 — вспомогательная щель,

O_1 — объектив коллиматора,

O_2 — объектив камеры,

p — призма постоянного отклонения Аббе,

μ — окулярный микрометр.

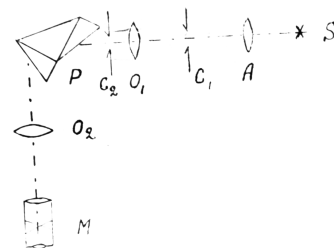


Рис. 56.

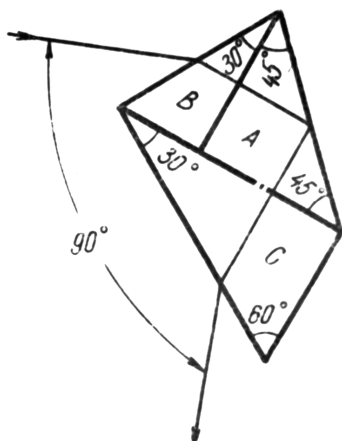


Рис. 57.

Призма постоянного отклонения (призма Аббе) устроена так, что луч, идущий в условиях наименьшего отклонения, выходит из призмы всегда перпендикулярно к падающему лучу. Устройство этой призмы легко понять из Рис. 57, на котором призма Аббе условно разделена на три призмы, средняя из которых A , является призмой полного внутреннего отражения, поворачивающей луч на 90 градусов, B и C — тридцатиградусные преломляющие призмы.

Здесь (1) — осветительная линза, которая закреплена на рейке с помощью винта (2). Всю рейку можно снять, отпустив винт (3). Ширина раскрытия щели измеряется по барабанчику (5). В насадку (4), при фокусировке, встраивается окуляр Гаусса. С помощью барабана (6) поворачивается призма (11), т.е. в центр поля зрения выводится та или другая спектральная линия. Окулярный микрометр (8) закрепляется на рейке винтом (9). Винтовой окулярный микрометр позволяет производить линейные измерения в поле зрения. На подвижной рейке нанесены перекрестие и две риски. Перекрестие служит для наводки на объект, а риски для отсчета.

На неподвижной шкале нанесены деления через 1 мм. Увеличение окуляра равно $10\times$. Цена деления барабана 0.01 мм.

По микрометрическому винту (7) измеряется ширина раскрытия дополнительной щели. Цена деления барабана на этом винте равна 0.01 мм. В стойку (12), при фокусировке коллиматора вставляется зеркало. Барабанчик (14)

служит для перемещения объектива камеры (13).

Объектив коллиматора и камеры имеют одинаковые диаметры, равные 30 мм. Фокусное расстояние объектива коллиматора равно 125 мм, объектива камеры — 250 мм, окулярного микрометра 25 мм.

Порядок выполнения работы и практические указания

Прежде всего необходимо хорошо сфокусировать спектроскоп в данной области спектра (сначала на зеленую линию ртути). Для фокусировки коллиматора: предлагается использовать автоколлимационный ход лучей. Перед щелью спектроскопа ставится окуляр Гаусса. Хорошо осветить прибор с помощью окуляра Гаусса (заполнение прибора светом проверяется при широко открытых щелях, ставят за призмой зеркало и находят такой поворот призмы, при котором из входной щели выходит нужная спектральная линия.

Коллиматор будет сфокусирован, когда изображение спектральной линии совпадает с плоскостью щели, что легко проверить по отсутствию параллакса (т.е. при перемещении глаза вправо и влево относительно щели, наблюдаемая спектральная линия не должна смещаться относительно щели).

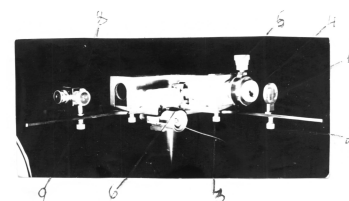


Рис. 58.

После того, как коллиматор сфокусирован, сняв зеркало, надо сфокусировать спектроскоп в целом, т.е. добиться чтобы в окулярный микрометр хорошо была видна визирная нить и нужная спектральная линия (качество фокусировки опять проверяется по отсутствию параллакса).

Помните, что при фокусировке вспомогательная щель должна быть полностью открыта.

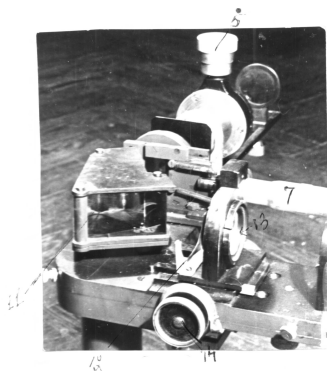


Рис. 59.

Выполнив фокусировку, следует получить достаточно широкую и четкую дифракционную картину от зеленой линии ртути ($\lambda = 5461$ Ангстрем), подобрав с помощью вспомогательной щели соответствующую апертуру падающего на призму пучка, и измерив расстояние между главными минимумами т.е. ширину дифракционной картины. Пользуясь последней величиной, можно сосчитать ширину дифракционной картины для желтого света (взять $\lambda = 5780$ Ангстрем). Измерив угловое расстояние между линиями желтого дуплета ртути, когда линии еще разрешаются, легко убедиться, что критерий Релея выполняется.

$\lambda = 5780$ Ангстрем, $\lambda_1 = 5790.66$ Ангстрем, $\lambda_2 = 5769.60$ Ангстрем.

Далее предлагается сосчитать разрешающую силу данного прибора в желтой и синей областях спектра, считая что:

1. она ограничивается минимальной шириной входной щели;
2. диаметром объектива коллиматора.

Дисперсию можно определить самим, при помощи окулярного микрометра. Сравните эти результаты с величинами той разрешающей способности, которую вы имели при проверке соотношения Релея.

Требования, предъявляемые к отчету

1. Дать схему хода лучей в установке при фокусировке коллиматора и схему, объясняющую появление дифракционной картины.
2. Представить результаты измерений с оценкой их погрешности.
3. Сосчитать разрешающую способность прибора в желтой и синей областях спектра, считая, что действующее отверстие прибора определяется диаметром объективов.

Литература

1. В.К.Прокофьев, "Фотографические методы количественного спектрального анализа металлов и сплавов", М-Л, 1951.
2. А.С.Торопец, "Монохроматоры", А, 1955, 18, 22, 23.
3. С.Э.Фриш, "Техника спектроскопии", Л, 1936, 6.
4. Р.Сойер, "Экспериментальная спектроскопия", И.Л, 1936.
5. Дичберн, "Физическая оптика", Наука, М, 1955.