

Санкт-Петербургский государственный университет

## **ЗАКОН БИО-САВАРА**

**Описание лабораторной работы № 33**

**ПРОБНАЯ ВЕРСИЯ**

Разработчики описания: А.Г. Антипов

С.В. Уварова

Санкт-Петербург

2014

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение .....	3
1. Закон Био-Савара. Теория .....	4
1.1. Формулировка закона .....	4
1.2. Следствия закона: расчеты для случаев токов простой геометрии .....	7
1.2.1 Прямой проводник .....	7
1.2.2 Кольцо .....	9
1.2.3 Катушка .....	10
1.2.4 Кольца Гельмгольца .....	12
2. Методика проведения эксперимента.....	14
2.1. Описание экспериментальной установки .....	14
2.2. Постановка эксперимента. Методика и техника измерений .....	18
2.2.1 Прямой проводник .....	18
2.2.2 Кольцо с током .....	19
2.2.3 Катушка переменной длины.....	19
2.2.4 Кольца Гельмгольца.....	19
3. Техника безопасности по работе с приборами.....	21
4. Порядок выполнения лабораторной работы .....	22
4.1 Прямой проводник .....	22
4.2 Кольцо с током .....	23
4.3 Катушка переменной длины.....	24
4.4 Кольца Гельмгольца.....	25
5. Обработка результатов эксперимента, требования к оформлению отчета .....	27
6. Контрольные вопросы.....	28
Список рекомендованной литературы и справочные данные .....	29

## Введение

Закон Био-Савара в магнитостатике играет столь же важную роль, как и закон Кулона в электростатике. Закон Кулона позволяет по заданному распределению зарядов найти электрическое поле в любой точке пространства и, следовательно, определить силу, действующую на заряд в этой точке пространства. Аналогично, закон Био-Савара дает возможность по распределению токов найти магнитное поле. Поскольку магнитное поле проявляет себя тем, что определенным образом действует на движущиеся заряды, то, как было отмечено Ампером, фактически закон Био-Савара описывает силовое взаимодействие электрических токов.

На практике закон Био-Савара используется, когда заранее известно распределение токов в пространстве. Тогда соответствующая формула дает явное выражение для вычисления поля в любой заданной точке в виде объемного интеграла. Для сложных конфигураций токов интеграл аналитически не берется и приходится прибегать к численным расчетам. Однако в простых, но важных с практической точки зрения случаях — прямой проводник, кольцо, катушка — первообразную можно найти и в результате получается довольно простая формула для вычисления поля.

Целью данной работы является экспериментальная проверка закона Био-Савара в ряде случаев, когда создаваемое токами поле достаточно легко описывается аналитически. Полученные навыки могут быть использованы при проверке теоретических гипотез других, ранее не известных законов, в том числе в совершенно иных областях физики. Кроме того, работа дает возможность овладеть методикой измерения магнитного поля с использованием датчиков на основе эффекта Холла.

# 1. Закон Био-Савара. Теория

## 1.1. Формулировка закона

В начале 1820г. было обнаружено магнитное действие электрического тока. В статье, опубликованной 21 июля 1820 г., датский физик Г. Эрстед показывает, что вблизи прямолинейного проводника, подключенного к гальванической батарее, намагниченная стрелка отклоняется в сторону, перпендикулярную как направлению тока, так и направлению кратчайшей прямой, соединяющей стрелку и проводник. Однако Эрстед не дает никаких количественных оценок наблюдаемого феномена.

Через несколько месяцев после опубликования статьи Эрстеда, попытку количественно описать обнаруженное им явление предприняли французские физики-экспериментаторы Ж.-Б. Био (Jean-Baptiste Biot) и Ф. Савар (Félix Savart). Они воспроизвели опыт, расположив прямолинейный проводник, однако, не горизонтально, как у Эрстеда, а вертикально. Это позволило воспользоваться для прецизионного измерения силы, действующей на намагниченную стрелку, методикой маятниковых колебаний, использованной ранее Ш. Кулоном при изучении взаимодействия заряженных тел. Действительно, стрелка, представляющая собой миниатюрный маятник, под действием магнитного поля колебалась в горизонтальной плоскости; по квадрату частоты колебаний можно было судить о величине силы. Эта сила, как справедливо полагали экспериментаторы, и может служить мерой напряженности того “магнетического флюида”, который окружал проводник с током. В ходе доклада Парижской Академии наук, состоявшегося 30 октября 1820г., Био сообщил, что, согласно их с Саваром эксперименту, напряженность “флюида” убывает обратно пропорционально расстоянию до проводника.

С результатами экспериментов Био и Савара ознакомился П.-С. Лаплас, выдающийся французский физик и математик. Он высказал идею о применимости к магнитному полю принципа суперпозиции — то, что результирующее поле системы токов можно рассматривать как векторную сумму полей отдельных

токов. Это позволяет свести проблему расчета поля, создаваемого контуром с током сложной геометрии, к задаче о поле “элементарного тока”, точечно локализованного в пространстве. Кроме того, Лаплас высказал предположение о том, что величина поля, порождаемого элементом тока, обратно пропорциональна квадрату расстояния до точки наблюдения. Та математическая формулировка закона, в которой он известен в настоящее время, в значительной части есть заслуга Лапласа. Поэтому во многих источниках встречается упоминание именно закона Био-Савара-Лапласа, а не Био-Савара.

Впоследствии Био, целенаправленно экспериментально исследовавшему закономерности взаимодействия элемента тока и магнитной стрелки, удалось подтвердить предположение Лапласа о квадратичном убывании поля с расстоянием. Также Био установил что поле пропорционально синусу угла между направлением тока и прямой, соединяющей элемент тока и точку наблюдения.

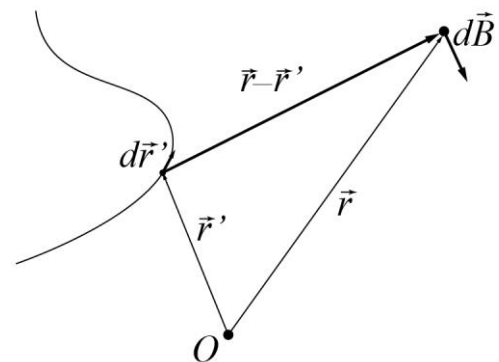


Рис. 1.1 Поле элемента тока

В современной дифференциальной формулировке закон Био-Савара выглядит следующим образом:

$$d\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I [d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')] }{4\pi |\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.1)$$

Приведенная выше формула описывает магнитное поле в точке  $\vec{r}$ , порождаемое элементом тока, находящимся в точке  $\vec{r}'$ . Через точку  $\vec{r}'$  протекает ток величиной  $I$ , его направление указывает вектор  $d\vec{r}'$  (см. рис. 1.1).  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$  — магнитная постоянная.

В формуле (1.1) содержится ряд утверждений, из которых, собственно, и состоит закон. Во-первых, предположенная Лапласом зависимость поля от расстояния между элементом тока и точкой наблюдения  $\vec{r}$ . Несмотря на то, что в знаменателе стоит третья степень расстояния  $|\vec{r} - \vec{r}'|$ , зависимость именно обратно квадратичная, поскольку в числителе модуль расстояния также содер-

жится в векторном произведении. Во-вторых, учитывается обнаруженная Био поправка на направление тока относительно прямой, соединяющей точки  $\vec{r}$  и  $\vec{r}'$ , — синус угла между  $d\vec{r}'$  и  $\vec{r} - \vec{r}'$  присутствует в векторном произведении. В-третьих, направление поля  $d\vec{B}$  соответствует тому, что наблюдал Эрстед, а именно, ортогонально векторам  $d\vec{r}'$  и  $\vec{r} - \vec{r}'$ . А вот другое важное утверждение — о пропорциональности поля силе тока — было сформулировано позже. В те времена, когда проводили опыты Био и Савар, четкого понимания того, что такое сила тока, не существовало, также не было средств ее измерения.

Коэффициент пропорциональности  $\mu_0 / 4\pi$ , участвующий в (1.1), определяется соотношением единиц измерения индукции поля, тока и расстояния. В системе единиц СИ он имеет именно то значение, которое указано в (1.1), в системе СГС — равен  $c^{-1}$ , где  $c$  — скорость света в вакууме.

Закон Био-Савара в дифференциальной форме (1.1) описывает вклад в поле, который дает отдельный элемент тока. Если нужно определить поле, порождаемое некоторым распределением тока в пространстве, то, в соответствии с принципом суперпозиции, требуется просуммировать (проинтегрировать) вклады каждого элемента тока:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{\gamma} \frac{[d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (1.2)$$

Данная формула описывает поле контура  $\gamma$ , через который протекает ток  $I$ .

Если ввести зависящую от координаты плотность тока

$$\vec{j}(\vec{r}') dV = I(\vec{r}') d\vec{r}'$$

и проинтегрировать (1.1) не по контуру, а по объему, получим

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{[\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')]}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV. \quad (1.3)$$

Выражение (1.3) есть интегральная формулировка закона Био-Савара, которая определяет поле объемного распределения тока, описываемого плотностью  $\vec{j}(\vec{r}')$ . Разумеется, (1.2) есть частный случай (1.3), если под  $\vec{j}$  понимать обобщенную функцию.

## 1.2. Следствия закона: расчеты для случаев токов простой геометрии

Как это часто бывает, теоретический закон формулируется настолько абстрактно, что выполнить его непосредственную экспериментальную проверку оказывается затруднительно, а зачастую — вообще невозможно. Закон Био-Савара относится к категории именно таких законов. Сформулированный в дифференциальной форме (1.1) он содержит в себе абстрактное понятие элемента тока, которое с трудом переводится на конкретный язык эксперимента. В интегральной форме (1.3) закон оказывается слишком общим и нуждается в редукции.

Обычно в таких ситуациях из закона выводится ряд следствий, которые можно проверить экспериментально. Если все следствия успешно прошли верификацию опытом, то и закон считают экспериментально подтвержденным.

### 1.2.1 Прямой проводник

В случае прямого проводника поле во всем пространстве выражается в элементарных алгебраических функциях. Рассмотрим бесконечно тонкий проводник длиной  $a + b$ , по которому течет ток  $I$ ; будем искать поле на расстоянии  $r$  от оси, на которой расположен отрезок с током (см. Рис. 1.2). Непосредственно из закона

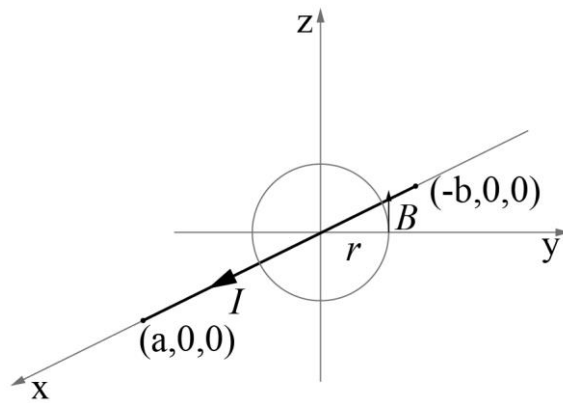


Рис. 1.2 Прямой проводник

Био-Савара вытекает, что присутствует лишь компонента индукции, касательная к окружности. А также то, что модуль поля не зависит от положения на окружности, а только от ее радиуса (последнее также очевидно из аксиальной симметрии системы). Иначе говоря, силовые линии магнитного поля представляют собой окружности, центры которых лежат на оси с током. Адаптируя интегральную формулу (1.2) к данному случаю, можно определить модуль индукции:

$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-b}^a \frac{r}{(x^2 + r^2)^{3/2}} dx = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{x}{r\sqrt{x^2 + r^2}} \Big|_{-b}^a = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \left( \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} + \frac{b}{\sqrt{b^2 + r^2}} \right). \quad (1.4)$$

Фактически формула (1.4) описывает поле во всем пространстве, окружающем прямой проводник с током.

Рассмотрим ситуацию, когда расстояние до точки измерения поля мало по сравнению с длиной проводника. Для простоты возьмем  $a = b$  и рассмотрим разложение индукции по степеням  $r/a$

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \frac{a}{\sqrt{a^2 + r^2}} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \left( 1 - \frac{1}{2} \left( \frac{r}{a} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{r}{a} \right)^4 + \dots \right). \quad (1.5)$$

В нулевом приближении — в случае бесконечно длинного проводника с током — получаем

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \quad (1.6)$$

Отметим, что первая поправка по  $r/a$  в (1.5) квадратична, а не линейна. Именно она дает количественную оценку — можно ли заменять реальный конечный проводник бесконечным, или нет.

Теперь предположим, что проводник представляет собой не бесконечно тонкую нить, а трубку радиуса  $\rho$  с тонкими стенками, вдоль которой, равномерно распределившись по поверхности, течет ток  $I$ . Рассматривая тонкую трубку как совокупность бесконечно тонких нитей — интегрируя формулу (1.4) по поверхности трубки, можно получить

$$\begin{aligned} B &= \frac{\mu_0}{2\pi} \int_{-\rho}^{\rho} \frac{1}{\sqrt{r^2 - 2ry + \rho^2}} \frac{(r-y)}{\sqrt{r^2 - 2ry + \rho^2}} \frac{I dy}{\pi \sqrt{\rho^2 - y^2}} = \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi^2 r} \left( \arcsin\left(\frac{y}{\rho}\right) - \arctan\left(\frac{2r\rho^2 - y(r^2 + \rho^2)}{(r^2 - \rho^2)\sqrt{(\rho^2 - y^2)}}\right) \right) \Big|_{-\rho}^{\rho} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \end{aligned}$$

Как мы видим, значение поля не зависит от радиуса трубки  $\rho$ . Этот результат весьма важен — он свидетельствует о том, что радиальное распределение тока в бесконечно длинном прямом проводнике не оказывает влияние на распределение поля вне проводника, играет роль лишь расстояние от оси симметрии системы. Проще говоря, не важно — какой проводник взят — толстый



или тонкий — и где течет ток — по поверхности или в глубине — для вычисления поля важно только расстояние до центра сечения проводника и величина совокупно протекающего по нему тока.

### 1.2.2 Кольцо

Распределение поля, формируемое тонким кольцом с током, описывается специальными функциями — эллиптическими интегралами. Однако на оси симметрии системы — прямой, перпендикулярной площади кольца и проходящей через его центр — поле описывается элементарными алгебраическими функциями.

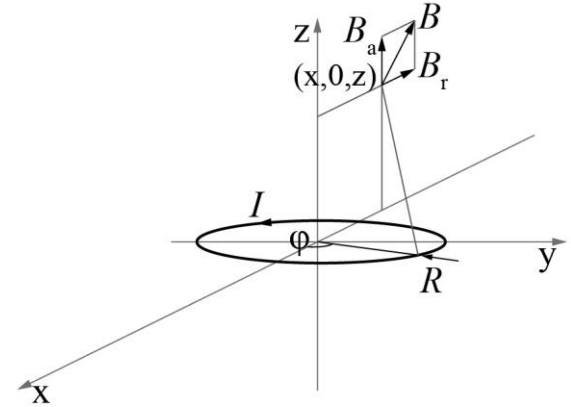


Рис. 1.3 Кольцо с током

Рассмотрим окружность радиуса  $R$ , по которой течет ток  $I$  см. Рис. 1.3. В силу аксиальной симметрии системы достаточно найти распределение поля в одной из плоскостей, проходящих через ось кольца. Чтобы определить значение радиальной и аксиальной компонент индукции в точке с координатами  $(x, 0, z)$ , возьмем удвоенное значение интеграла (1.2) по дуге  $\varphi = 0 \dots \pi$ :

$$\begin{aligned} B_r &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{z \cos(\varphi)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos(\varphi))^{3/2}} R d\varphi, \\ B_a &= \frac{\mu_0 I}{2\pi} \int_0^\pi \frac{R - x \cos(\varphi)}{(z^2 + R^2 + x^2 - 2Rx \cos(\varphi))^{3/2}} R d\varphi. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Значение компоненты, перпендикулярной плоскости  $xOz$ , равно нулю, т. к. интегралы по дугам  $\varphi = 0 \dots \pi$  и  $\varphi = \pi \dots 2\pi$  взаимно компенсируют друг друга. Интегралы (1.7) не берутся в элементарных функциях, но они сводятся к известным в математической физике специальным функциям — эллиптическим интегралам 2:

$$B_r = \frac{\mu_0 I z}{2\pi x \sqrt{z^2 + (R+x)^2}} \left( \frac{z^2 + x^2 + R^2}{z^2 + (R-x)^2} E(\eta) - K(\eta) \right), \quad (1.8)$$

$$B_a = \frac{\mu_0 I}{2\pi \sqrt{z^2 + (R+x)^2}} \left( K(\eta) - \frac{z^2 + x^2 - R^2}{z^2 + (R-x)^2} E(\eta) \right). \quad (1.9)$$

Здесь  $K(\eta)$  – полный эллиптический интеграл 1-го рода,  $E(\eta)$  – 2-го рода, а параметр

$$\eta = 2\sqrt{\frac{Rx}{z^2 + (R+x)^2}}$$

характеризует величину удаления точки от центральной оси. Картина силовых линий, описывающая распределение магнитного поля вокруг кольца с током, показана на Рис. 1.4. Касательная к линиям определяет направление, а их плотность — величину поля.

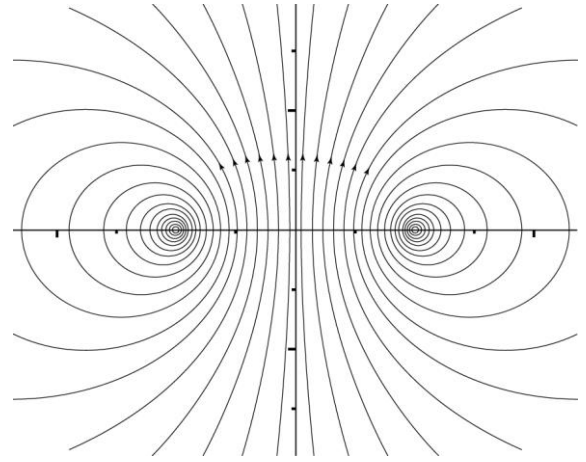


Рис. 1.4 Силовые линии магнитного поля вокруг кольца с током в сечении плоскостью, проходящей через ось симметрии

Если рассматриваемая точка лежит на оси симметрии  $x = 0$  ( $\eta = 0$ ), то

$$E(0) = K(0) = \pi/2,$$

отсюда

$$B_a = \frac{\mu_0 I R^2}{2(z^2 + R^2)^{3/2}}, \quad (1.10)$$

а радиальная компонента поля  $B_r$ , как и следовало ожидать, обращается в нуль. Разумеется, формула (1.10) может быть получена подстановкой  $x = 0$  непосредственно в (1.7).

В центре кольца величина индукции равна  $\mu_0 I / (2R)$ , при больших по модулю  $z$  на оси симметрии убывает как  $|z|^{-3}$ .

### 1.2.3 Катушка

Рассмотрим катушку длиной  $L$ , с внутренним и внешним радиусами намотки  $R_1$  и  $R_2$  (см. Рис. 1.5). Через катушку протекает ток  $I$ , количество витков в ней равно  $N$ . Будем считать, что шаг намотки катушки мал по сравнению с ее средним радиусом. Тогда, в соответствии с принципом су-

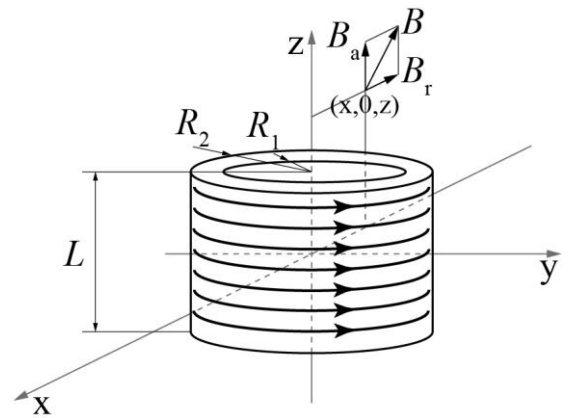


Рис. 1.5 Катушка

перпозиции, искомое поле можно рассматривать как совокупность полей отдельных колец, плоскости которых перпендикулярны оси катушки:

$$\vec{B}(x, z) = \int_{-L/2}^{L/2} \int_{R_1}^{R_2} \vec{B}_R(x, z | R, z') dR dz', \quad (1.11)$$

где  $\vec{B}_R(x, z | R, z') dR dz'$  — поле, формируемое находящимся в плоскости  $z = z'$  кольцом радиуса  $R$ , по которому течет ток, равный  $\frac{IN}{(R_2 - R_1)L} dR dz'$ . Подставляя в (1.11) формулы (1.8), (1.9) для аксиальной  $B_a$  и радиальной  $B_r$  компонент индукции поля кольца, можно получить распределения соответствующих компонент поля, создаваемого катушкой.

Достаточно просто получить выражение для вычисления поля на оси симметрии ( $x = 0$ ). Радиальная компонента поля  $B_r$  на оси, очевидно, равна нулю. Чтобы найти единственную ненулевую — аксиальную компоненту вектора индукции, подставим в (1.11) формулу (1.10), в результате получим

$$B_a = \frac{\mu_0 IN}{2(R_2 - R_1)} \left( \ln \left( \frac{R_2 + \sqrt{(z + L/2)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(z + L/2)^2 + R_1^2}} \right) \left( \frac{z}{L} + \frac{1}{2} \right) - \ln \left( \frac{R_2 + \sqrt{(z - L/2)^2 + R_2^2}}{R_1 + \sqrt{(z - L/2)^2 + R_1^2}} \right) \left( \frac{z}{L} - \frac{1}{2} \right) \right) \quad (1.12)$$

В центре катушки ( $z = 0$ ) поле достигает максимума и равно

$$B_a = \frac{\mu_0 IN}{2(R_2 - R_1)} \ln \left( \frac{2R_2 + \sqrt{L^2 + 4R_2^2}}{2R_1 + \sqrt{L^2 + 4R_1^2}} \right),$$

на большом удалении ( $z \rightarrow \pm\infty$ ) убывает обратно пропорционально кубу расстояния:

$$B_a \sim \frac{\mu_0 IN (R_2^2 + R_1 R_2 + R_1^2)}{6|z|^3}.$$

Если намотка катушки достаточно тонкая, чтобы ее внешний радиус можно было считать равным внутреннему, то в пределе  $R_1 \rightarrow R, R_2 \rightarrow R$  из (1.12) получаем

$$B_a = \mu_0 IN \left( \frac{1}{\sqrt{(2z + L)^2 + 4R^2}} \left( \frac{z}{L} + \frac{1}{2} \right) - \frac{1}{\sqrt{(2z - L)^2 + 4R^2}} \left( \frac{z}{L} - \frac{1}{2} \right) \right). \quad (1.13)$$

В центре такой катушки поле равно

$$B_a = \frac{\mu_0 IN}{\sqrt{L^2 + 4R^2}}.$$

### 1.2.4 Кольца Гельмгольца

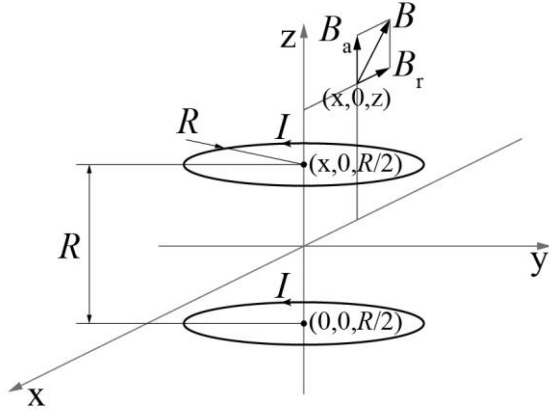


Рис. 1.6 Кольца Гельмгольца

Для создания локально однородного магнитного поля часто используется система из двух одинаковых колец, расположенных соосно на расстоянии их радиусов (см. Рис. 1.6). Действительно, функция (1.10), описывающая изменение поля, генерируемого одним кольцом, на оси симметрии, имеет перегиб на расстоянии полурадиуса от центра кольца.

Это означает, что если поместить второе кольцо соосно на расстоянии радиуса от первого — на середине между кольцами — обратится в нуль не только первая производная по аксиальной координате, но и вторая — будет создано поле высокой степени однородности.

Поле на оси симметрии системы, изображенной на Рис. 1.6, согласно формуле (1.10) и принципу суперпозиции, описывается выражением

$$B_a = \frac{\mu_0 IR^2}{2} \left( \frac{1}{\left( (z - R/2)^2 + R^2 \right)^{3/2}} + \frac{1}{\left( (z + R/2)^2 + R^2 \right)^{3/2}} \right). \quad (1.14)$$

Нетрудно убедиться в том, что дифференциал  $d^2 B_a$  обращается в нуль при  $z = 0$ . Третья производная также равна нулю, как и все нечетные производные в силу симметрии системы относительно плоскости  $z = 0$ , поэтому первая ненулевая производная — только 4-го порядка.

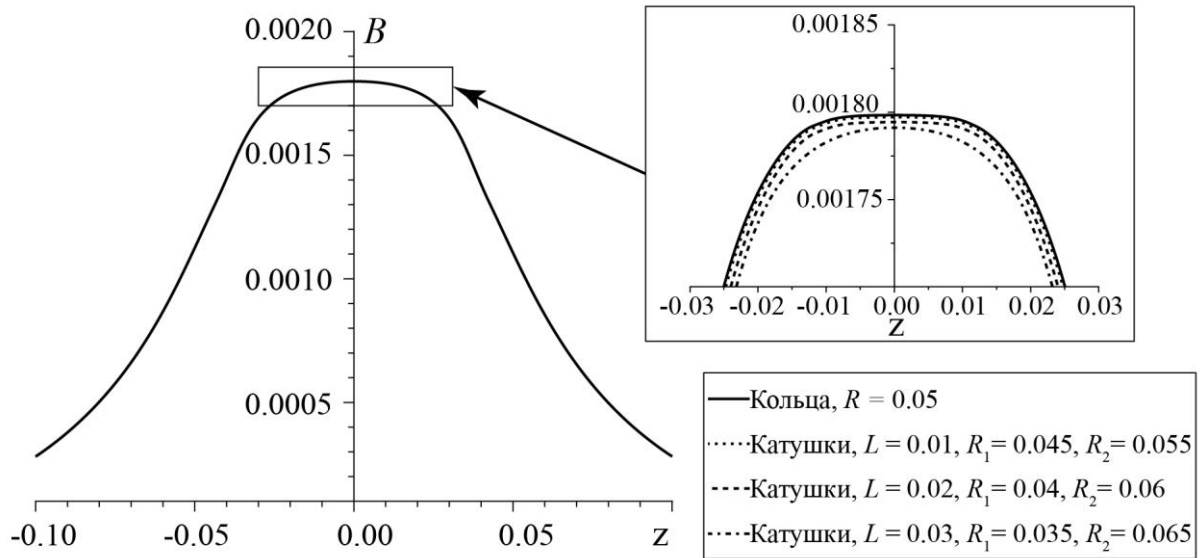


Рис. 1.7 Распределение аксиальной компоненты индукции на оси симметрии системы колец и катушек Гельмгольца

В реальных приложениях, чтобы обеспечить достаточный уровень поля, кольца часто заменяют многовитковыми катушками, длина которых, тем не менее, мала по сравнению с радиусом. В таких случаях более точное описание распределения поля на оси симметрии дает полученная из (1.12) формула

$$B_a = \frac{\mu_0 IN}{4(R_2 - R_1)} \times$$

$$\times \left( \ln \left( \frac{2R_2 + \sqrt{(2z - R + L)^2 + 4R_2^2}}{2R_1 + \sqrt{(2z - R + L)^2 + 4R_1^2}} \right) \frac{2z - R + L}{L} - \ln \left( \frac{2R_2 + \sqrt{(2z - R - L)^2 + 4R_2^2}}{2R_1 + \sqrt{(2z - R - L)^2 + 4R_1^2}} \right) \frac{2z - R - L}{L} + \right.$$

$$\left. + \ln \left( \frac{2R_2 + \sqrt{(2z + R + L)^2 + 4R_2^2}}{2R_1 + \sqrt{(2z + R + L)^2 + 4R_1^2}} \right) \frac{2z + R + L}{L} - \ln \left( \frac{2R_2 + \sqrt{(2z + R - L)^2 + 4R_2^2}}{2R_1 + \sqrt{(2z + R - L)^2 + 4R_1^2}} \right) \frac{2z + R - L}{L} \right) \quad (1.15)$$

(здесь  $R = (R_1 + R_2)/2$  — средний радиус катушки). Однако принципиального влияния на картину распределения поля в окрестности  $z = 0$  эта замена не оказывает — см. результаты расчета колец Гельмгольца диаметром 10 см и катушек такого же размера, но с различной толщиной намотки на Рис. 1.7.

## 2. Методика проведения эксперимента

### 2.1. Описание экспериментальной установки

Функциональная схема экспериментальной установки приведена на рис. 2.1.

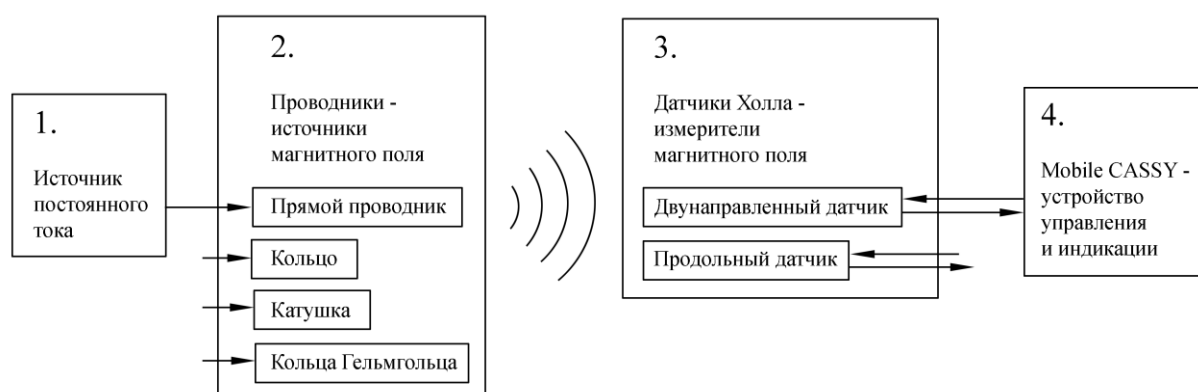


Рис. 2.1 Функциональная схема экспериментальной установки

Питание осуществляется источником постоянного тока (рис. 2.1, 1). Величины выдаваемого источником напряжения и тока контролируются независимо друг от друга при помощи двух регуляторов на лицевой панели. Максимально возможные значения напряжения и тока определяются активным сопротивлением нагрузки, однако полная выходная мощность не превышает 240 Вт. Прибор оснащен двумя индикаторами, показывающими величину выдаваемого напряжения и тока.

К блоку питания подключаются проводники различных геометрических форм (рис. 2.1, 2), служащие источниками магнитного поля. Всего доступны несколько типов проводников:

- прямой проводник в виде круглой стальной спицы диаметром 4 мм и длиной 40 см;
- три проводника из алюминиевой проволоки в форме колец радиусом 2, 4 и 6 см;
- катушка из толстой медной проволоки, покрытой изолирующим лаком.

Проволока 30 витками намотана на круглое пластиковое основание, ра-

диус намотки равен 82 мм, длина катушки регулируется зажимными клеммами и может меняться в диапазоне от 6 до 40 см;

- кольца Гельмгольца, состоящие из двух одинаковых катушек. Количество витков в каждой катушке 320 шт; внутренний радиус намотки 62 мм, внешний — 72 мм, длина равна 18 мм.



Рис. 2.2 Датчики:  
а — продольный,  
с одним элементом  
Холла; б — двуна-  
правленный,  
с двумя элементами  
Холла

Для измерения магнитного поля предназначены датчики (рис. 2.1, 3), выполненные в виде узких линеек длиной 12 и 35 см соответственно (рис. 2.2). На концах линеек находятся активные зоны датчиков (элементы Холла) — именно в этих точках производятся измерения поля. Активная зона более длинного датчика находится непосредственно на торце линейки (рис. 2.2, 1) и способна измерять величину продольной, параллельной направлению линейки, компоненты поля. Более короткий датчик является двунаправленным — на нем расположена пара по-разному ориентированных элементов Холла. Первый элемент (рис. 2.2, 2) находится на расстоянии 2 мм от торца линейки и измеряет поперечную, перпендикулярную плоскости линейки, компоненту поля. Вторым элементом (рис. 2.3, 3), расположенный в 32 мм от конца линейки фиксирует продольную компоненту.

Посредством специального интерфейсного кабеля датчики подключаются к устройству управления и индикации Mobile CASSY (рис. 2.1, 4). Устройство, внешний вид которого показан на рис. 2.3, осуществляет питание элементов Холла датчиков и при помощи того же интерфейсного кабеля снимает выдаваемое элементами напряжение. Выходное напряжение элементов Холла можно считать пропорциональным величине определенной компоненты индукции магнитного поля (какая именно компонента измеряется — задается ориентацией элемента в пространстве). Поэтому по значению выходного напряжения

можно судить о величине поля в активной зоне датчика. Посредством встроенного в Mobile CASSY АЦП сигнал, поступающий от элементов Холла, оцифровывается и умножается на коэффициент пропорциональности, определяемый конструкцией элемента; в результате на экране прибора появляется значение индукции, измеряемое в миллитеслах (mT).

Погрешность измерительного комплекса, включающего в себя элемент Холла, аналоговый канал передачи данных и АЦП можно оценить в 0,1 мТл.

Кроме собственно индикации значений поля, Mobile CASSY имеет еще две важные функции. Во-первых, элемент Холла обладает той особенностью, что значение выдаваемого им напряжения при отсутствии поля отлично от нуля и довольно сильно зависит от условий — температуры и пр. Поэтому перед проведением измерения (или серии измерений) необходимо выполнить установку нуля, в противном случае измеренные значения поля будут систематически сдвинуты на некоторое фиксированное значение. Mobile CASSY позволяет установить нуль — для этого нужно последовательно выбрать в меню управления пункты Properties > Compensate Offset. Также установка нуля способна устранить влияние земного магнитного поля на ход измерений.

Вторая важная функция актуальна при работе с двунаправленным датчиком. Модуль Mobile CASSY способен одновременно работать только с одним элементом Холла. Поэтому имеется возможность переключаться между элементами, измеряющими продольную и поперечную компоненты поля. Для работы с соответствующей компонентой нужно выбрать в меню управления Main Menu > Quantities > Ba (продольная) или Bt (поперечная).



Рис. 2.3 Устройство управления и индикации Mobile CASSY



Также Mobile CASSY позволяет сохранять в памяти несколько измеренных значений, причем записывать их как по команде пользователя, так и в автоматическом режиме — с определенным шагом по времени.

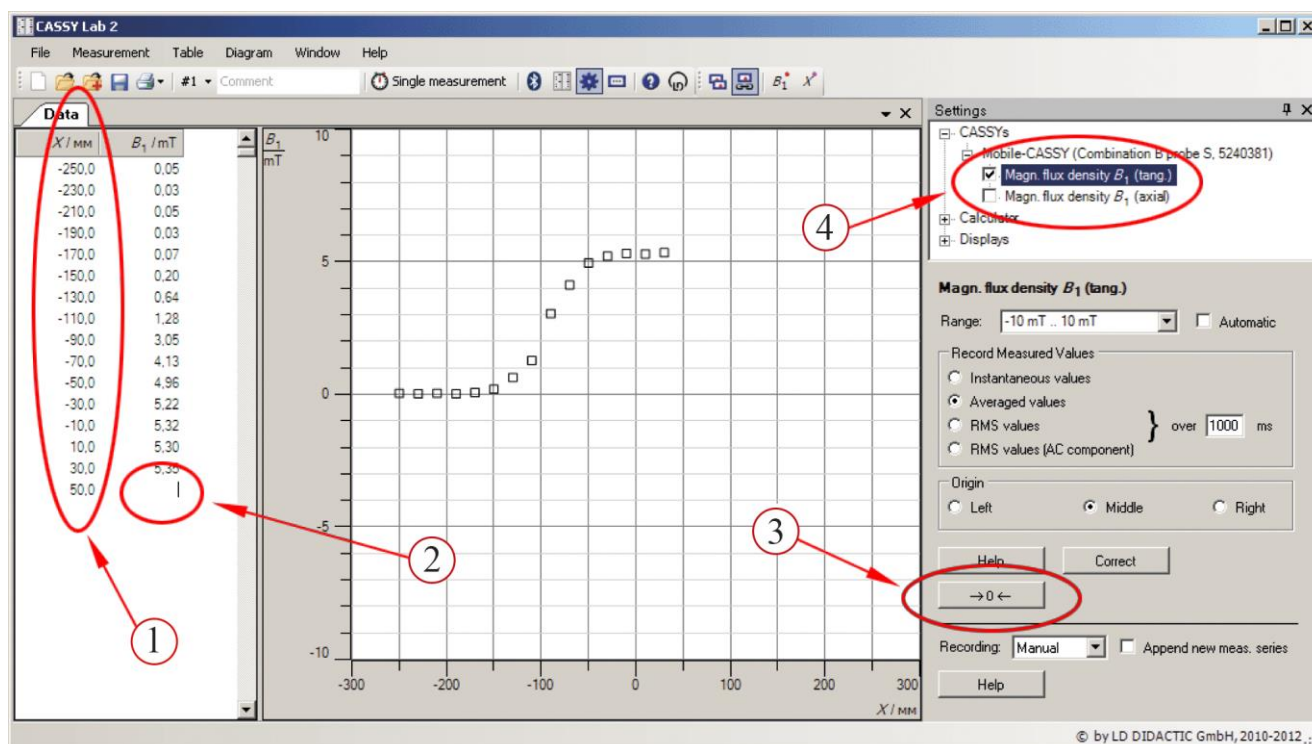


Рис. 2.4 Интерфейс программы CASSY Lab

Устройство Mobile CASSY посредством USB кабеля можно подключить к персональному компьютеру, что позволяет делегировать последнему функции индикации и управления. На компьютере должно быть установлено специальное программное обеспечение LD Didactic CASSY Lab. Если открыть в CASSY Lab соответствующий проект, то в колонке  $X$  в таблице слева (рис. 2.4, 1) нужно вручную указывать значения координат на рассматриваемой оси. Чтобы занести данные измерений поля в определенную ячейку в колонке  $B$  (рис. 2.4, 2) следует поместить в нее курсор и нажать кнопку F9. Длительность измерения по умолчанию составляет 1 сек. В течение этого времени оцифровывается 10 значений поля (через каждые 0.1 сек) и в качестве результата измерения берется их среднее. Длительность измерения можно изменить, указав величину в миллисекундах на панели “Settings” (рис. 2.4, 3). Полученные данные отображаются в центре экрана в виде точечного графика  $B(X)$ ; при необходимости график масштабируется по горизонтальной и вертикальной

осям. Установка нуля в CASSY Lab производится нажатием кнопки “ $\rightarrow 0 \leftarrow$ ” на панели “Settings” (рис. 2.4, 4). Выбор используемого элемента Холла, в случае, если подключен двунаправленный датчик, можно осуществить на той же панели (рис. 2.4, 5).

При проведении экспериментов, за исключением случая катушки с регулируемой длиной намотки, для закрепления проводников и датчиков следует пользоваться лабораторной скамьей с нанесенной на нее шкалой для измерения расстояний. Это позволяет контролировать взаимное пространственное расположение источников поля и активных зон датчиков.

Изображения собранных экспериментальных установок, в которых использованы различные сочетания проводников и датчиков, показаны ниже, в разделе 4, на рис. 4.1-4.

## **2.2. Постановка эксперимента. Методика и техника измерений**

При пропускании постоянного электрического тока через проводники вокруг них формируется магнитное поле, описываемое вектором индукции  $\vec{B}$ . Величина вектора, а именно — три его пространственные компоненты, определяется законом Био-Савара (1.1–1.3). так же, мы располагаем датчиками, способными измерять компоненты индукции в любой точке пространства.

Это позволяет подвергнуть закон Био-Савара экспериментальной проверке. Нужно выделить те области пространства, где закон описывает распределение поля достаточно простым способом, и сравнить данные измерений с теоретическими выкладками. Какие именно области пространства выбрать — определяется геометрической конфигурацией токов, создающих магнитное поле.

### **2.2.1 Прямой проводник**

Как показывают расчеты, приведенные в 1.2.1, распределение поля вокруг бесконечного прямого проводника описывается единственным параметром — расстоянием от проводника до точки измерения поля. Поэтому логично изучать распределение поля на оси, перпендикулярной направлению проводника. Распределение модуля индукции поля на этой оси описывается форму-

лой (1.6), сам вектор индукции направлен перпендикулярно как к оси, так и к направлению проводника.

Мы располагаем не абстрактным проводником бесконечной длины и бесконечно малой толщины, а вполне конкретным с конечными геометрическими размерами. Однако расчеты, проведенные по формуле (1.5), показывают, что поправка, вносимая конечностью длины проводника, мала по сравнению с точностью прибора, измеряющего поле. Кроме того, как продемонстрировано в 1.2.1, толщина круглого проводника не имеет никакого значения, существенно лишь расстояние до его центра. Толщина проводника лишь не дает возможность измерить поле слишком близко от центра проводника. Вышеприведенные соображения показывают, что замена бесконечного проводника на конечный вполне корректна.

### **2.2.2 Кольцо с током**

Результаты, полученные в 1.2.2, свидетельствуют о том, что распределение поля наиболее просто описывается на оси симметрии кольца — формулой (1.10). Поэтому стоит проводить измерения поля именно на прямой, перпендикулярной плоскости кольца и проходящей через его центр. На этой прямой отлична от нуля только одна — продольная (относительно оси симметрии) компонента поля  $B_a$ .

### **2.2.3 Катушка переменной длины**

Если пренебречь тем, что витки не вполне замкнуты и их плоскость не совсем перпендикулярна основной оси, катушку можно считать набором колец с током. Отсюда возникает предположение, что наиболее простое описание поле катушки имеет на оси симметрии. Действительно, как показано в 1.2.3, поле там определяется достаточно простой формулой (1.13). Поэтому для экспериментальной верификации стоит выбирать именно ось симметрии катушки.

### **2.2.4 Кольца Гельмгольца**

Еще одна система с аксиальной симметрией. Рассматривая распределение

поля на оси симметрии, теоретически описываемое формулой (1.14), следует особое внимание обратить на однородность поля в зазоре между катушками, которая должна наблюдаться и в результате измерений. В (1.14) под значением тока, протекающего по кольцу, понимается совокупный ток по всем виткам используемой вместо кольца катушки, под радиусом  $R$  — ее средний радиус. Более точное описание распределения поля на оси симметрии дает формула (1.14), учитывающая геометрические размеры катушек. Однако при имеющейся точности измерения поля вряд ли можно почувствовать разницу в описаниях, даваемых (1.14) и (1.15).

### **3. Техника безопасности по работе с приборами**

При длительном пропускании электрического тока через проводники они могут нагреваться до температур, способных вызвать ожог при соприкосновении. Если требуется осуществить какую-либо манипуляцию с проводниками, выключите ток и подождите, пока они не остынут до безопасной температуры.

## 4. Порядок выполнения лабораторной работы

### 4.1 Прямой проводник

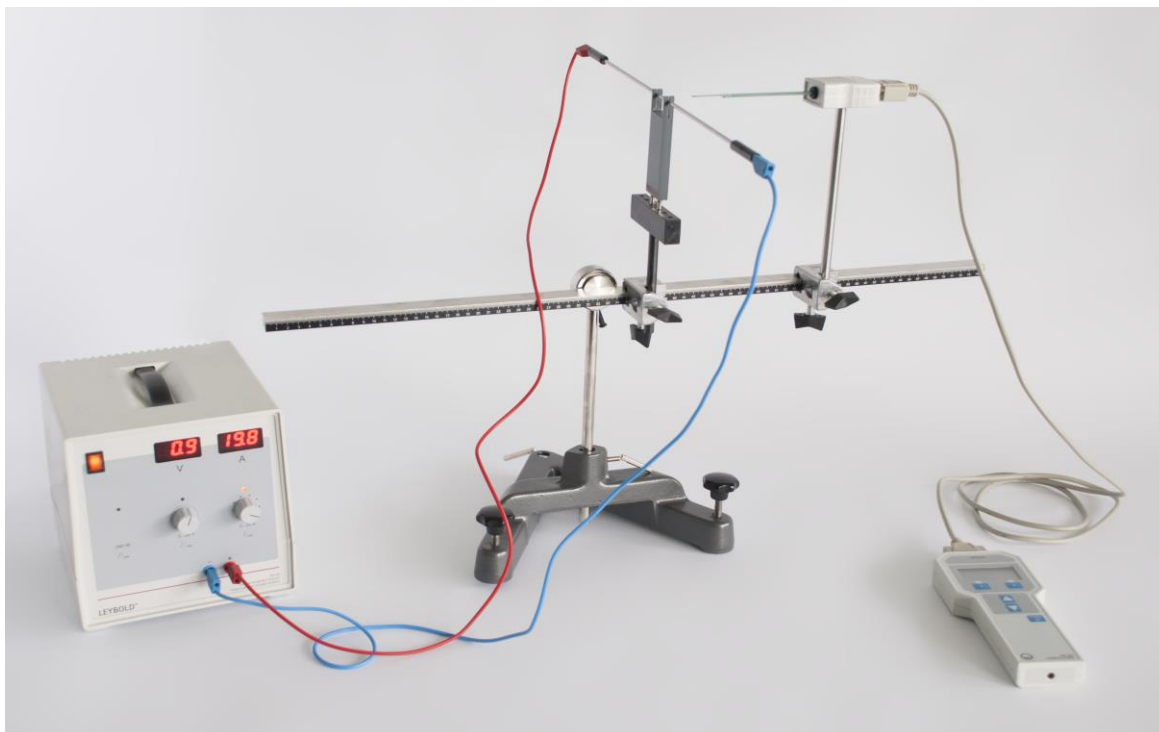


Рис. 4.1 Вид экспериментальной установки для изучения поля прямого проводника

1. Собрать установку, задействовав прямой проводник и двунаправленный датчик, как показано на рис. 4.1.
2. Включить Mobile CASSY и выбрать работу с элементом Холла, измеряющим поперечную компоненту поля.
3. Выполнить установку нуля.
4. Включить источник питания и задать величину тока в проводнике, выбрав ее из диапазона  $15 \div 20$  А.
5. Подвести датчик к проводнику так, чтобы торец линейки датчика касался проводника, а центральная ось проводника и грань линейки, где закреплен реагирующий на поперечную компоненту элемент Холла, находились в одной плоскости. Выполнить измерения поля в данной точке. Для этого необходимо в течение порядка 10 сек наблюдать изменяющиеся значения на экране Mobile CASSY, зафиксировать максимальное и минимальное из наблюдавшихся значений и взять среднее из этих двух чисел. Данное изме-

рение соответствует расстоянию до центральной оси проводника, равному 4 мм (2 мм составляет радиус проводника и 2 мм – расстояние от торца до активной зоны датчика).

6. Перемещая датчик вдоль лабораторной скамьи, выполнить серию измерений поля для различных расстояний до центральной оси проводника. Шаг изменения расстояния — 1 мм, по мере удаления от проводника его можно увеличить до 3–5 мм. Измерения стоит проводить до тех пор, пока величина поля не станет сравнимой с величиной погрешности (то есть приблизительно до расстояния 20–25 мм). При проведении серии измерений необходимо поддерживать постоянную величину тока в проводнике, а также следить за тем, чтобы центральная ось проводника и верхняя грань линейки, где находится активная зона датчика, оставались в одной плоскости.

## 4.2 Кольцо с током

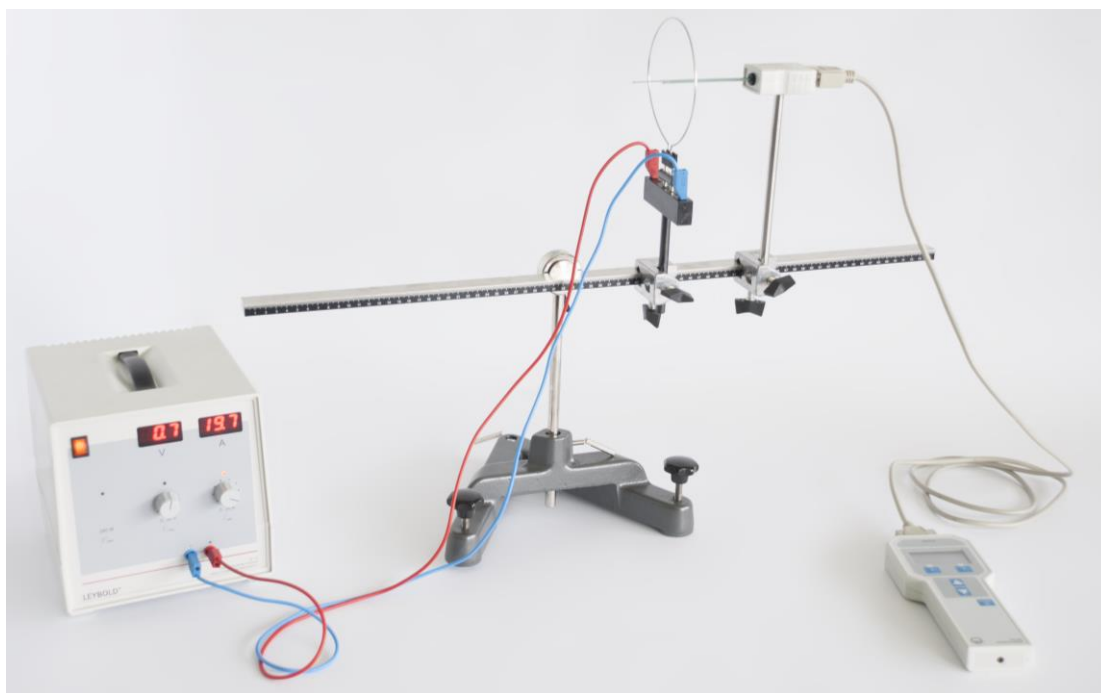


Рис. 4.2. Вид экспериментальной установки для изучения поля кольца с током

1. Выбрать одно из колец и собрать установку, как показано на рис. 4.2. Выбор датчика в данном случае не принципиален, поскольку оба имеющихся датчика способны измерять продольную компоненту поля. Элемент Холла датчика, реагирующий на продольную компоненту, должен находиться на оси симметрии кольца.

2. Включить Mobile CASSY, если задействован двунаправленный датчик, выбрать элемент Холла, измеряющим продольную компоненту поля.
3. Выполнить установку нуля.
4. Включить источник питания и задать величину тока в проводнике, выбрав ее из диапазона  $15 \div 20$  А.
5. Провести серию измерений продольной составляющей поля, перемещая датчик вдоль по лабораторной скамье. Если принять за ноль точку пересечения кольца с осью симметрии, то перемещения датчика должны соответствовать координате от  $-5$  до  $+5$  см с шагом  $0.5$  см.

### 4.3 Катушка переменной длины

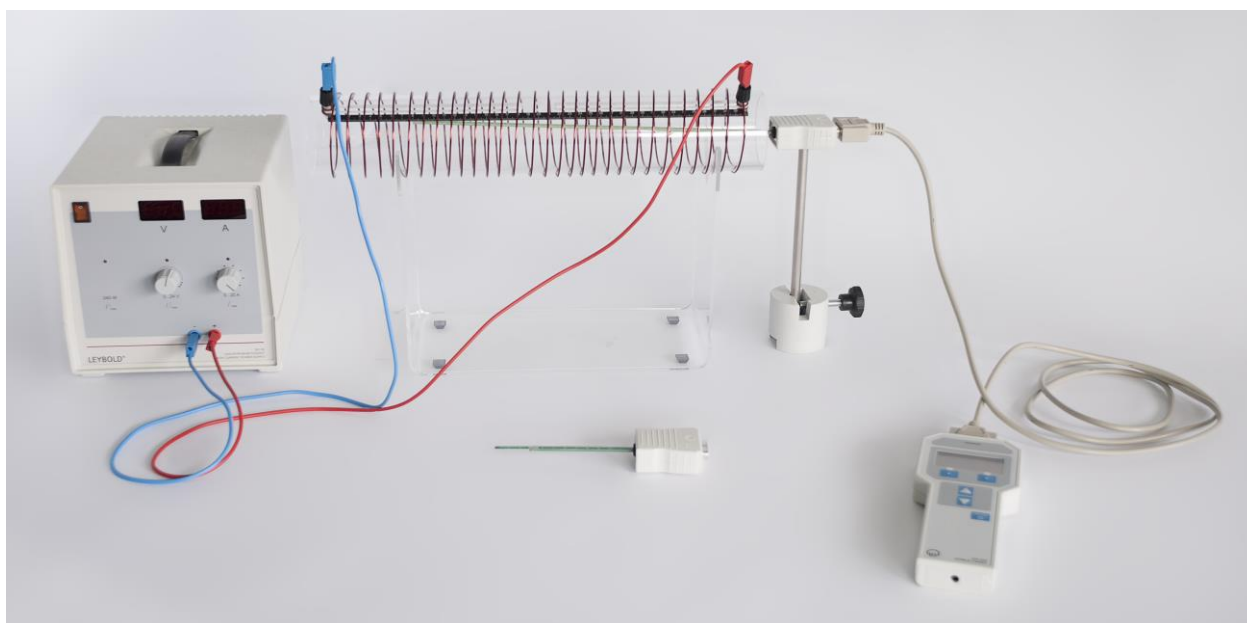


Рис. 4.3. Вид экспериментальной установки для изучения поля катушки

1. Собрать установку, задействовав катушку и длинный датчик, измеряющий продольную составляющую поля, как показано на рис. 4.3. Линейка датчика должна находиться на оси симметрии катушки.
2. Включить Mobile CASSY и выполнить установку нуля.
3. Включить источник питания и задать величину тока в проводнике, выбрав ее из диапазона  $15 \div 20$  А.
4. Зажимными клеммами на краях катушки установить длину намотки равной  $40$  см. Витки катушки должны быть по возможности равномерно распределены по ее длине.



5. Провести серию измерений продольной составляющей магнитного поля, перемещая датчик так, чтобы линейка датчика оставалась на оси симметрии катушки. Если принять за ноль значение сдвига линейки датчика относительно оси, когда точка измерений поля находится в центре катушки, то диапазон сдвига должен быть от  $-30$  см до  $+30$  см с шагом 2 см. Если активная зона датчика находится вблизи центра катушки, шаг может быть увеличен до 5 см. При необходимости датчик можно приблизить к катушке с другой стороны, развернув его на  $180^\circ$ , но в таком случае нужно учитывать изменение знака измеряемого поля. Также рекомендуется при изменении ориентации датчиков заново выполнить установку нуля, источник питания во время этой процедуры должен быть выключен.
6. Повторить п. 5 для случаев, когда длина катушки равна 10, 20, 30 см. При проведении измерений важно поддерживать постоянный уровень тока в катушке, при необходимости корректируя его величину регуляторами на панели управления блока питания.

#### 4.4 Кольца Гельмгольца

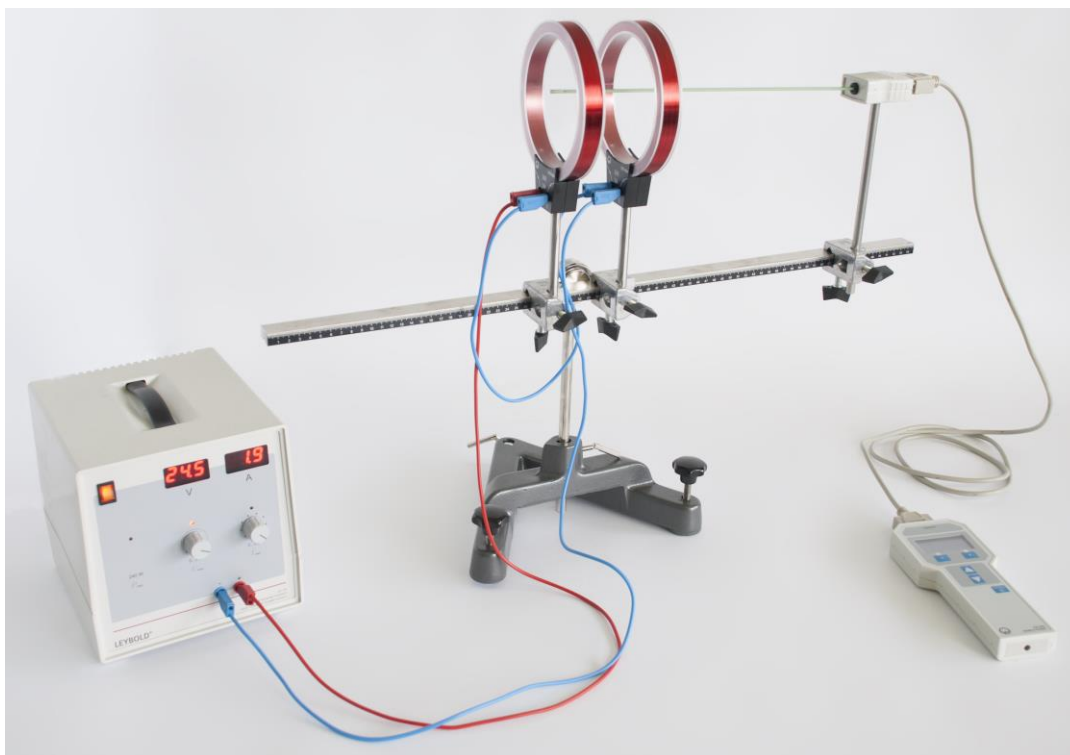


Рис. 4.4. Вид экспериментальной установки для изучения поля колец Гельмгольца

1. Собрать установку, задействовав пару одинаковых катушек малой длины, расположенных соосно на расстоянии радиуса друг от друга, а также длинный датчик, измеряющий продольную составляющую поля (см. рис. 4.4). Линейка датчика должна находиться на общей оси симметрии катушек. Катушки должны быть подсоединены к источнику питания последовательно так, чтобы направления тока в обеих катушках относительно оси симметрии совпадали.
2. Включить Mobile CASSY и выполнить установку нуля.
3. Включить источник питания и установить величину тока в проводнике равной 1,6 А.
4. Провести серию измерений продольной составляющей магнитного поля, перемещая датчик вдоль лабораторной скамьи так, чтобы линейка датчика оставалась на оси симметрии катушек. Если принять за ноль значение сдвига линейки датчика относительно оси, когда точка измерений поля находится в центре между катушками, то диапазон сдвига должен быть от  $-12$  см до  $+12$  см с шагом 1 см.
5. Повторить п.4 для случаев, когда ток в катушке равен 1,2 А и 0,8 А.

## 5. Обработка результатов эксперимента, требования к оформлению отчета

Полученные в ходе выполнения пп. 4.1.5–6, 4.2.5, 4.3.5–6, 4.4.4–5 данные должны быть представлены в виде таблиц следующего вида:

Координата $X$ , мм	$B_{\min}$ , мТл	$B_{\max}$ , мТл	$B$ , мТл

Под координатой  $X$  в случае пп. 4.2.5, 4.3.5–6, 4.3.4–5 следует понимать координату на оси симметрии системы; в случае пп. 4.1.5–6 — расстояние до центральной оси проводника. В колонки значений  $B_{\min}$ ,  $B_{\max}$  заносятся показания Mobile CASSY, а именно — минимальные и максимальные значения индукции, наблюдавшейся в течение ~10 сек. Значения последней колонки вычисляются как

$$B = \frac{B_{\min} + B_{\max}}{2}.$$

Если при замерах поля был задействован компьютер с CASSY Lab, можно ограничиться заполнением сразу колонки  $B$ , поскольку в этом случае осреднение проводится непосредственно в ходе измерения.

Экспериментально полученная зависимость  $B(X)$  должна быть изображена в виде точек на плоскости. На том же графике необходимо построить зависимость, предсказываемую теорией, а именно функции (1.6), (1.10), (1.13), (1.14) для пп. 4.1.5–6, 4.2.5, 4.3.5–6, 4.4.4–5 соответственно.

В процессе выполнения пп. 4.3, 4.4 должны быть проведены несколько серий измерений, их результаты целесообразно показывать на одном и том же графике.

## 6. Контрольные вопросы

1. В ходе эксперимента бесконечный прямой проводник был заменен конечным. Оцените ошибку, вызванную такой заменой.
2. Предположим, что по бесконечному прямому проводнику круглого сечения однородно течет ток. Радиус проводника увеличили в  $N$  раз, плотность тока не меняется. Как изменилось магнитное поле вне проводника? Внутри него?
3. Получите закон убывания поля при удалении от бесконечно тонкого прямого проводника с током из уравнения Максвелла — теоремы о циркуляции магнитного поля  $\oint_{\gamma} \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I$ .
4. Получите закон Ампера о взаимодействии двух бесконечно длинных проводников (сила взаимодействия пропорциональна величинам текущих в проводниках токов и обратно пропорциональна расстоянию между проводниками), используя закон Био-Савара.
5. Как зависит магнитное поле от координаты на прямой, проходящей через центр кольца с током, на большом удалении от кольца? Рассмотреть случай прямой, перпендикулярной плоскости кольца, прямой, лежащей в плоскости кольца, произвольной прямой.
6. Опишите поле внутри бесконечно длинной катушки, используя закон Био–Савара.
7. Получите тот же результат, что и в п.6, но из теоремы о циркуляции магнитного поля.
8. Опишите поле, создаваемое кольцами Гельмгольца на оси симметрии на большом удалении.
9. То же самое, что в п.8, но если кольца Гельмгольца ошибочно включили так, что токи текут в противоположных направлениях относительно оси симметрии.
10. Что такое эффект Холла? Как работают датчики, использующие этот эффект?

## **Список рекомендованной литературы и справочные данные**

1. Сивухин Д. В. *Общий курс физики*. Изд. 2-е, испр.. М.: Наука, 1983. Т. III. Электричество.
2. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике (для научных работников и инженеров)*. М.: Наука, 1978.
3. Кобус А., Тушинский Я. *Датчики Холла и магниторезисторы*. М.: Энергия, 1971.