

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

ТОРСИОННЫЙ ОСЦИЛЛЯТОР.

СОБСТВЕННЫЕ И ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ЛИНЕЙНОГО ОСЦИЛЛЯТОРА

Поляков Даниил, Б07-ФЗ

Цель работы: экспериментальное изучение закономерностей собственных колебаний в линейной системе, установившихся вынужденных колебаний при синусоидальном внешнем воздействии и переходных процессов установления вынужденных колебаний путём измерения количественных характеристик таких колебаний.

Оборудование:



- Торсионный осциллятор с электромагнитом и электродвигателем;
- Источник тока;
- Амперметр;
- Mobile-CASSY.

Расчётные формулы:

- Линейное дифференциальное уравнение осциллятора:

$$\ddot{\varphi} + 2\gamma\dot{\varphi} + \omega_0^2\varphi = 0$$

φ – угол отклонения осциллятора от начального положения;

ω_0 – собственная циклическая частота колебаний осциллятора;

γ – постоянная затухания.

- Период собственных колебаний осциллятора:

$$T_0 = \frac{t_n - t_0}{n}$$

t_0 – момент прохождения осциллятором начального максимума;

t_n – момент прохождения осциллятором n -го максимума;

n – количество полных колебаний между максимумами.

- Собственная частота осциллятора:

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$$

T_0 – период собственных колебаний осциллятора.

- Добротность осциллятора:

$$Q = \frac{n\pi}{\ln(\varphi_0/\varphi_n)}$$

n – количество полных колебаний между максимумами;

φ_0 – максимальное отклонение осциллятора в начальный момент времени;

φ_n – максимальное отклонение осциллятора спустя n колебаний.

- Постоянная затухания:

$$\gamma = \frac{\omega_0}{2Q}$$

ω_0 – собственная частота осциллятора;

Q – добротность осциллятора.

- Зависимость амплитуды вынужденных колебаний осциллятора от их частоты:

$$a = \frac{\omega_0^2 \theta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2 \omega^2}}$$

θ_0 – размах колебаний шатуна (амплитуда возбуждения);

ω – частота вынужденных колебаний;

ω_0 – собственная частота осциллятора;

γ – постоянная затухания.

- Амплитуда вынужденных колебаний осциллятора (приближенная формула для частоты колебаний, сильно отличающейся от резонансной):

$$a \approx \frac{\theta_0}{|1 - \omega^2/\omega_0^2|}$$

θ_0 – размах колебаний шатуна (амплитуда возбуждения);

ω – частота вынужденных колебаний;

ω_0 – собственная частота осциллятора.

- Формулы для вычисления погрешностей:
 - Абсолютная погрешность косвенных измерений:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2 + \dots}$$

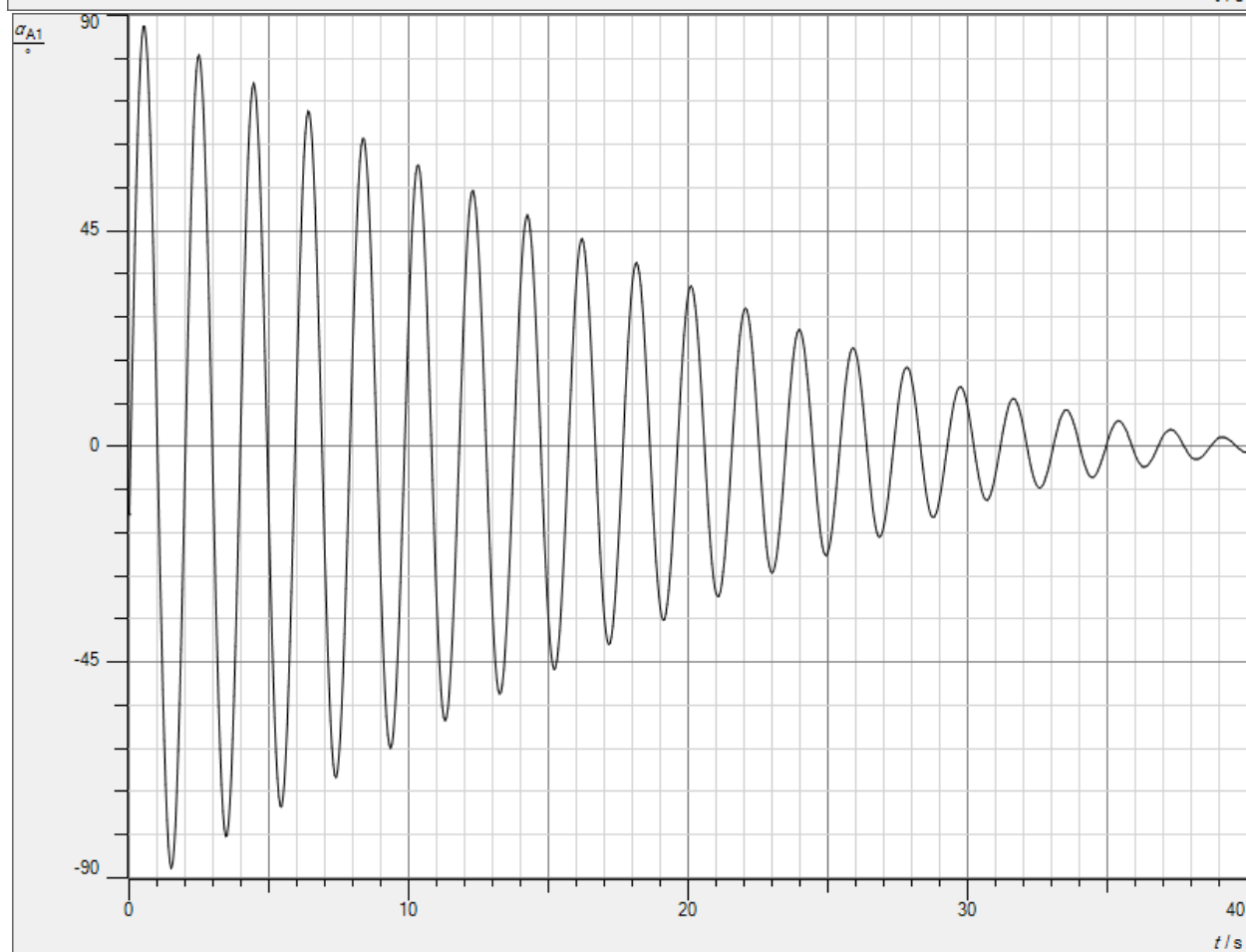
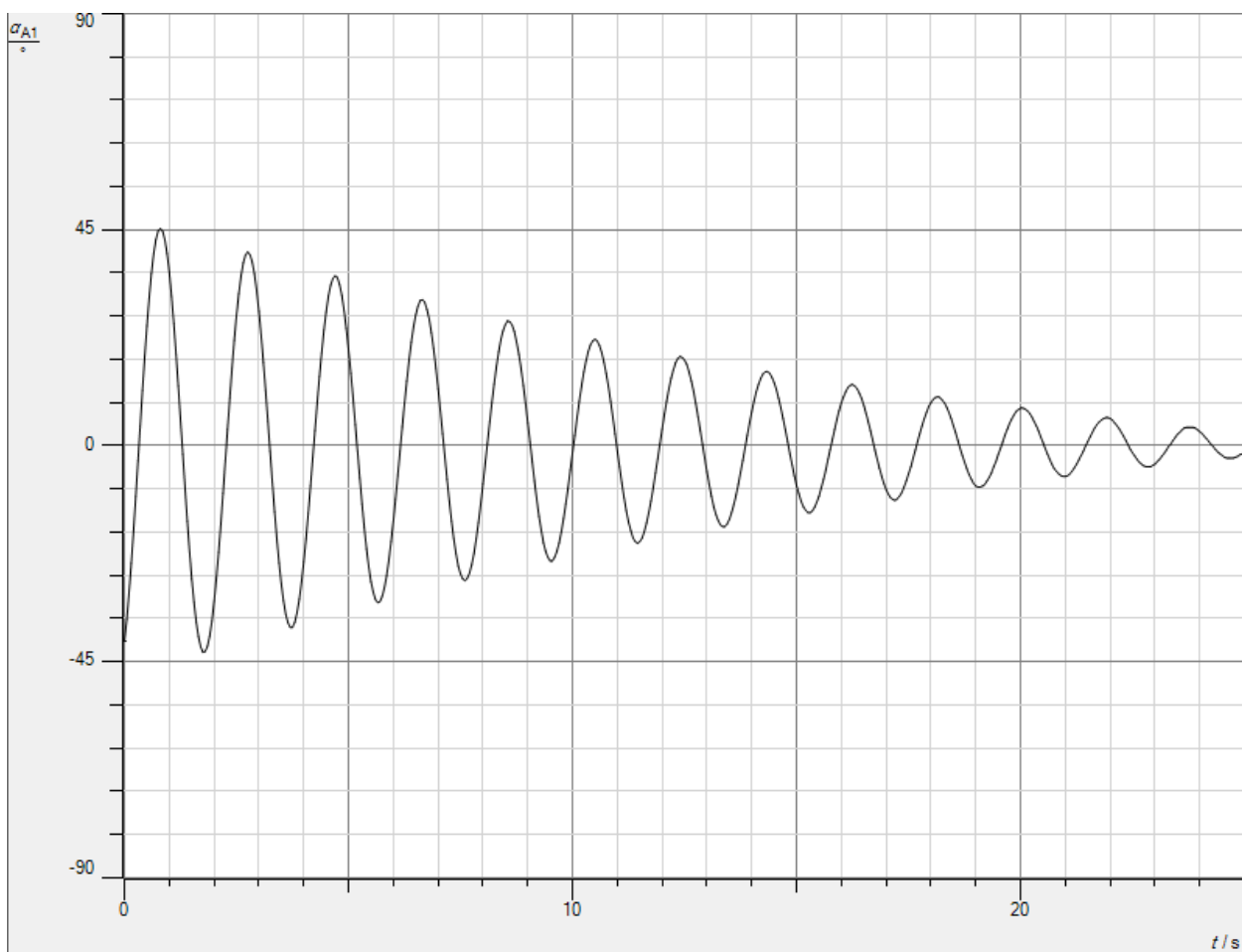
Метод проведения измерений

1. Исследуем свободные колебания осциллятора. Отклоним осциллятор на некоторый угол φ_0 , отпустим и запустим измерение зависимости отклонения осциллятора от времени до тех пор, пока осциллятор не остановится. По графику определим собственный период колебаний осциллятора T_0 , а по предельным отклонениям найдём добротность Q . Проведём такие же измерения для других φ_0 .
2. Исследуем затухающие колебания осциллятора. Будем отклонять осциллятор на некоторый примерно одинаковый угол φ_0 при протекающем через электромагнит токе. Проведём те же измерения при различных значениях силы тока I .
3. Исследуем критическое затухание колебаний осциллятора. Выберем высокое значение силы тока и измерим динамику отклонения осциллятора.
4. Перейдём к исследованию вынужденных колебаний. Выберем такую силу тока, чтобы добротность находилась в интервале от 15 до 25. Найдём её аналогично п.1.
5. Найдём амплитуду колебаний шатуна. Для этого установим низкую частоту оборота электродвигателя. По максимуму и минимуму полученного графика определим предельные отклонения осциллятора влево (θ_1) и вправо (θ_2).
6. Исследуем вынужденные колебания на высокой частоте. Установим высокую частоту оборота электродвигателя. По времени совершения 10 колебаний найдём период и частоту колебаний осциллятора.
7. Исследуем явление резонанса. Подберём такую частоту оборота электродвигателя, при которой амплитуда колебаний осциллятора максимальна. Из графика найдём максимальное значение амплитуды.
8. Составим амплитудно-частотную характеристику осциллятора. Будем изменять частоту вращения электродвигателя и снимать соответствующий период колебаний осциллятора из графика. Соберём достаточное количество точек. Затем изменим силу тока в электромагните и найдём новое значение добротности Q . Повторим такие же измерения при новом затухании.

Таблицы и обработка данных

Погрешность нахождения моментов времени равна половине цены деления: $\Delta t = 0.025$ с. Погрешность нахождения углов отклонения осциллятора равна половине цены деления: $\Delta \varphi = 0.05^\circ$.

Колебания осциллятора при минимальном затухании (при отсутствии тока).



$\varphi_0, ^\circ$	$\varphi_n, ^\circ$	n	t_0, c	t_n, c	T_0, c	$\langle T_0 \rangle, \text{c}$	$\langle \omega_0 \rangle, \text{c}^{-1}$	Q	$\langle Q \rangle$
45.3	7.9	10	0.80	20.00	1.920±0.004	1.9344 ±0.0013	3.248 ±0.002	17.99±0.07	21.24 ±0.06
54.9	12.6	10	0.90	20.25	1.935±0.004			21.35±0.06	
65.2	6.6	15	0.60	29.55	1.930±0.002			20.57±0.07	
74.9	8.8	15	0.75	29.80	1.937±0.002			22.01±0.06	
87.7	12.6	15	0.50	29.75	1.950±0.002			24.29±0.05	

$$\Delta T_0(t_0, t_n) = \sqrt{\left(\frac{\partial T_0}{\partial t_0} \cdot \Delta t_0\right)^2 + \left(\frac{\partial T_0}{\partial t_n} \cdot \Delta t_n\right)^2} = \frac{\sqrt{(\Delta t_0)^2 + (\Delta t_n)^2}}{n}$$

$$\Delta \langle T_0 \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \langle T_0 \rangle}{\partial T_{0i}} \cdot \Delta T_{0i}\right)^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\Delta T_{0i})^2}}{N} \approx 0.0013 \text{ c}$$

$$\Delta \omega_0(T_0) = \left| \frac{\partial \omega_0}{\partial T_0} \cdot \Delta T_0 \right| = \frac{2\pi}{T_0^2} \cdot \Delta T_0 \approx 0.002 \text{ c}^{-1}$$

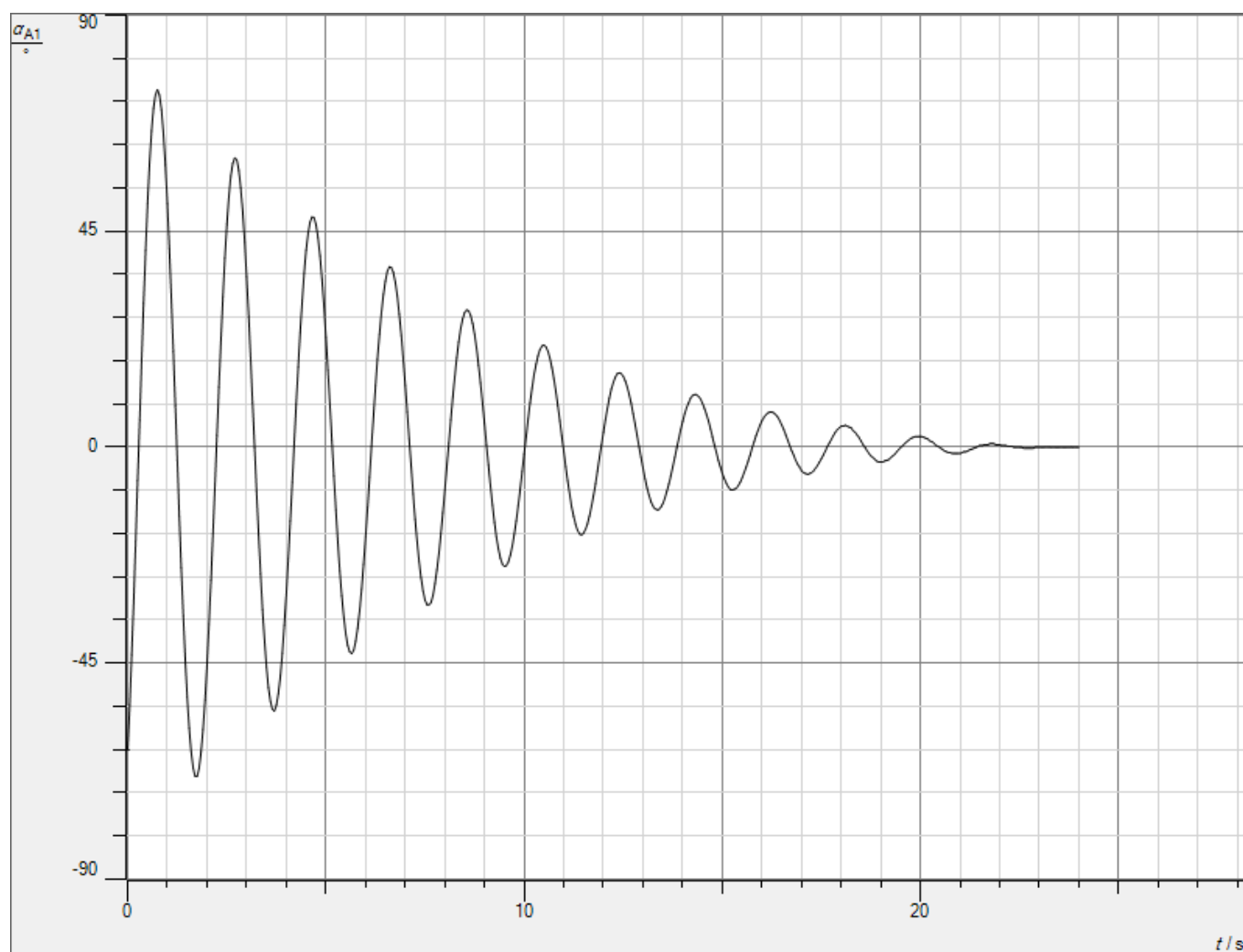
$$\begin{aligned} \Delta Q(\varphi_0, \varphi_n) &= \sqrt{\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi_0} \cdot \Delta \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi_n} \cdot \Delta \varphi_n\right)^2} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\pi n}{\varphi_0 \cdot \ln^2\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_n}\right)} \cdot \Delta \varphi_0\right)^2 + \left(\frac{\pi n}{\varphi_n \cdot \ln^2\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_n}\right)} \cdot \Delta \varphi_n\right)^2} = \\ &= \frac{\pi n}{\ln^2\left(\frac{\varphi_0}{\varphi_n}\right)} \sqrt{\left(\frac{\Delta \varphi_0}{\varphi_0}\right)^2 + \left(\frac{\Delta \varphi_n}{\varphi_n}\right)^2} \end{aligned}$$

$$\Delta \langle Q \rangle = \sqrt{\sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial \langle Q \rangle}{\partial Q_i} \cdot \Delta Q_i\right)^2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\Delta Q_i)^2}}{N} \approx 0.06$$

Разница между полученными периодами колебаний при разной амплитуде незначительная. Можно сделать заключение о линейности осциллятора.

Затухающие колебания осциллятора (при протекающем токе).

График колебаний осциллятора при силе тока, равной 0.3 А:



I, A	$\varphi_0, ^\circ$	$\varphi_n, ^\circ$	n	t_0, c	t_n, c	T_1, c	$\langle T_1 \rangle, c$	Q
0.1	87.9	25.2	10	0.60	20.15	1.955 ± 0.004	1.941 ± 0.003	25.15 ± 0.04
0.2	79.2	9.5	10	0.75	20.15	1.940 ± 0.004		14.81 ± 0.04
0.3	74.5	11.0	7	0.75	14.30	1.936 ± 0.005		11.50 ± 0.03
0.4	70.2	11.0	5	0.70	10.40	1.940 ± 0.007		8.47 ± 0.02
0.5	73.0	8.8	4	0.75	8.50	1.938 ± 0.009		5.94 ± 0.02

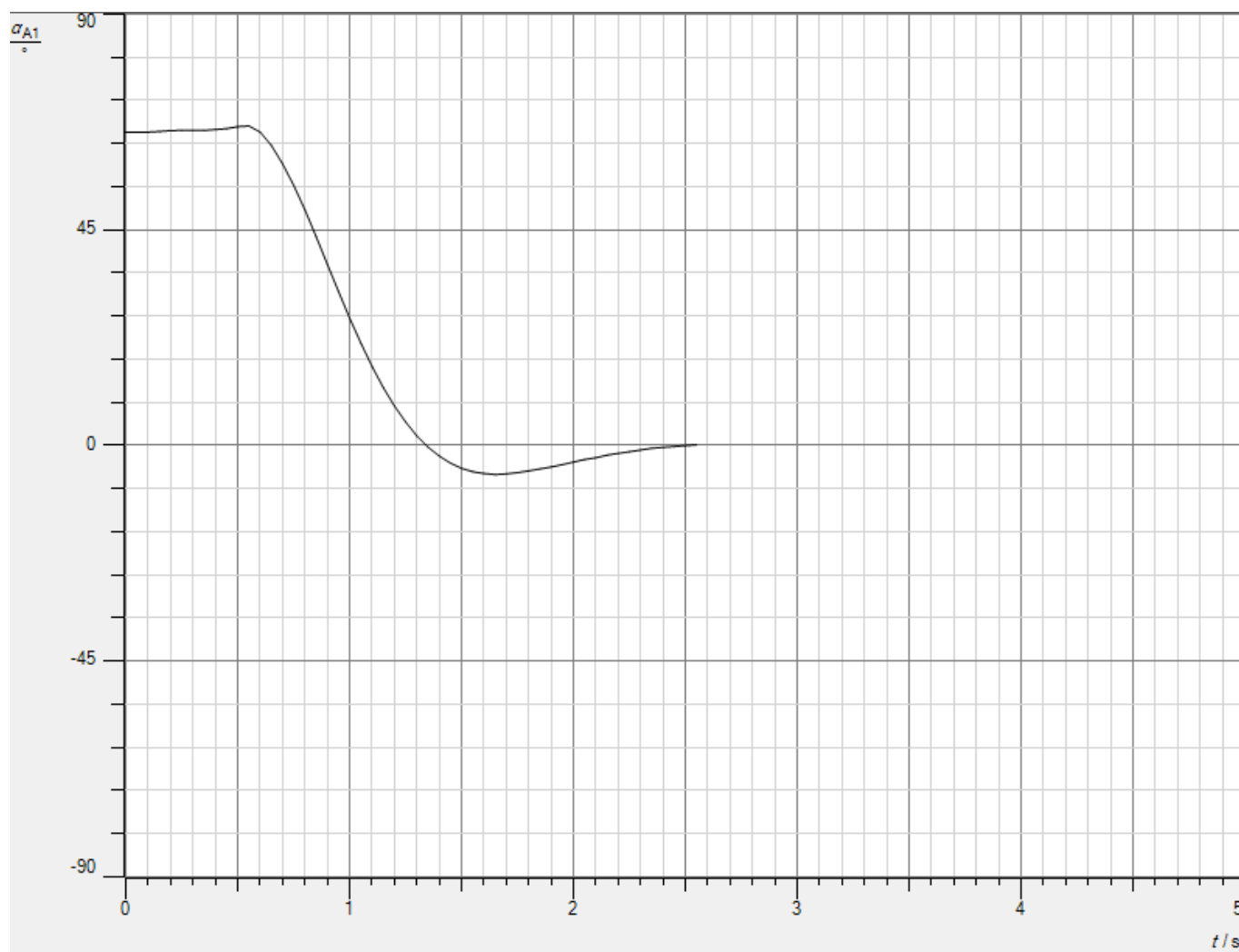
Все погрешности вычислялись по тем же формулам. Полученный период затухающих колебаний T_1 практически не отличается от периода собственных колебаний T_0 .

Сравнение максимальных отклонений осциллятора при токе 0.1 А:

$\varphi_n, ^\circ$	87.9	80.6	73.4	66.3	59.5	52.8	46.9	41.3	35.6	30.3
$\varphi_n / \varphi_{n-1}$	-	0.917	0.911	0.903	0.897	0.887	0.888	0.881	0.862	0.851

Видно, что разница между последовательными максимумами увеличивается при уменьшении амплитуды. Можно предположить, что это связано с наличием сил трения, которые постоянны и не зависят от скорости движения осциллятора, а значит проявляют себя более значительно при уменьшении амплитуды.

Критическое затухание колебаний осциллятора.



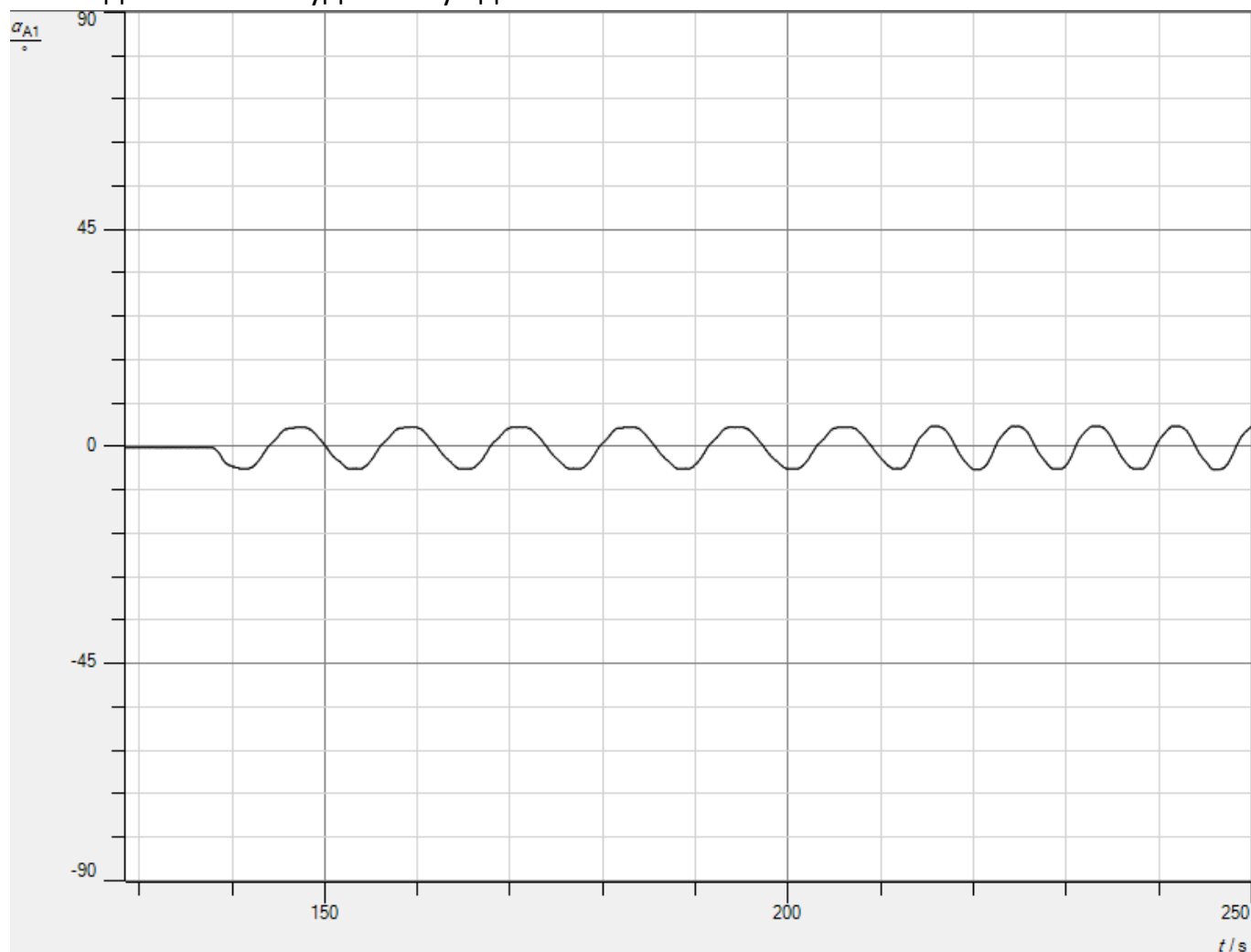
Наблюдаем, что осциллятор по инерции перескочил положение равновесия, а затем асимптотически стремился к положению равновесия.

Вынужденные колебания.

Нахождение добротности (в интервале 15-25), используемой при последующих измерениях:

$\varphi_0, ^\circ$	$\varphi_n, ^\circ$	n	Q
92.2	50.2	4	20.67 ± 0.04

Нахождение амплитуды возбуждения:



$\theta_1, ^\circ$	$\theta_2, ^\circ$	$\theta_0, ^\circ$
3.9	3.7	3.8

Здесь θ_1 – максимальное отклонение шатуна влево, θ_2 – максимальное отклонение шатуна вправо, $\theta_0 = \frac{\theta_1 + \theta_2}{2}$.

При низкой частоте вращения якоря колебания ротора происходят практически в одинаковой фазе с колебаниями шатуна, а их амплитуда почти совпадает с размахом колебаний шатуна.

Вынужденные колебания на высокой частоте:

n	$\langle \varphi \rangle, ^\circ$	t_n, c	T_2, c	ω, c^{-1}
10	0.59	6.90	0.690 ± 0.004	9.11 ± 0.05

Вычислим теоретическое значение амплитуды вынужденных колебаний и сравним его с полученным экспериментально:

$$a \approx \frac{\theta_0}{\left|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right|} \approx 0.55^\circ$$

Теоретическое значение амплитуды близко к экспериментальному.

Теперь добьёмся резонанса, подбирая различные значения частоты вращения якоря, добиваясь максимальной амплитуды колебания осциллятора. Наблюдаем отклонение колебаний ротора на четверть периода от колебаний шатуна.

Экспериментально достигнутая амплитуда колебаний равна 77.7° . Сравним это значение с теоретическим, рассчитываемым по приближенной формуле $a_{max} = Q \cdot \theta_0 \approx 78.55 \pm 0.15$. Экспериментально и теоретически полученные значения близки друг к другу.

Нахождение амплитудно-частотной характеристики.

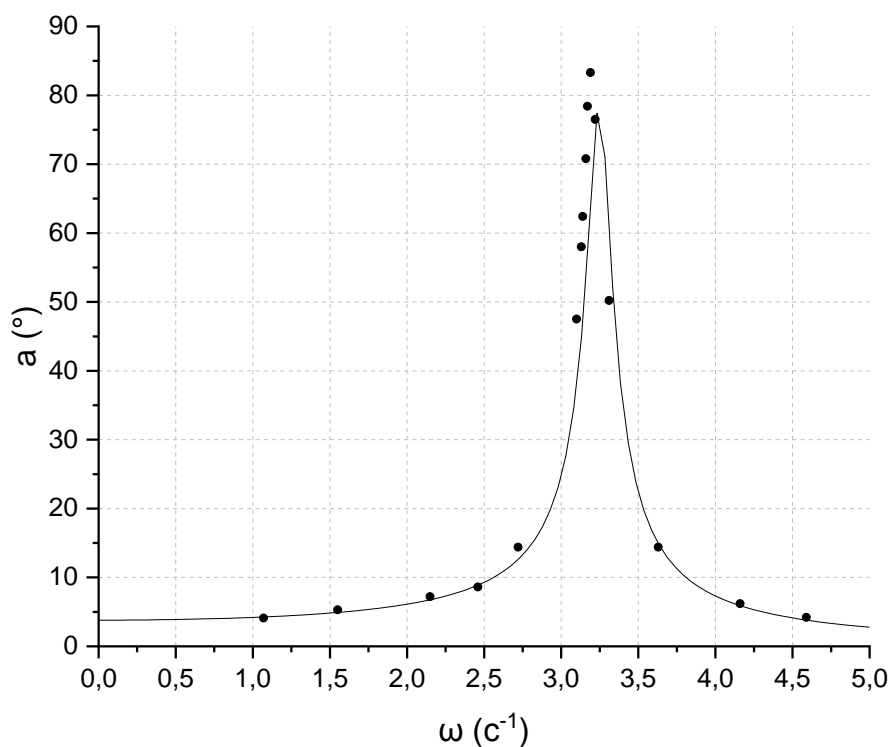
Добротность $Q_1 = 20.67 \pm 0.04$; постоянная затухания $\gamma_1 = \frac{\omega_0}{2Q} = 0.0786 \pm 0.0002 \text{ с}^{-1}$.

$a_1, ^\circ$	$T_1, \text{с}$	$\omega_1, \text{с}^{-1}$
4.1	5.89	1.07
5.3	4.06	1.55
7.2	2.92	2.15
8.6	2.55	2.46
14.4	2.31	2.72
47.5	2.03	3.10
58.0	2.01	3.13
62.4	2.00	3.14
70.8	1.99	3.16
78.4	1.98	3.17
83.3	1.97	3.19
76.5	1.95	3.22
50.2	1.90	3.31
14.4	1.73	3.63
6.2	1.51	4.16
4.2	1.37	4.59

Теоретическая зависимость $a_1(\omega_1)$ выражается следующим образом:

$$a_1(\omega_1) = \frac{\omega_0^2 \theta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_1^2)^2 + 4\gamma_1^2 \omega_1^2}} = \frac{40.09}{\sqrt{(10.55 - \omega_1^2)^2 + 0.0247\omega_1^2}}$$

Изобразим график теоретической зависимости $a_1(\omega_1)$ и экспериментальные точки:



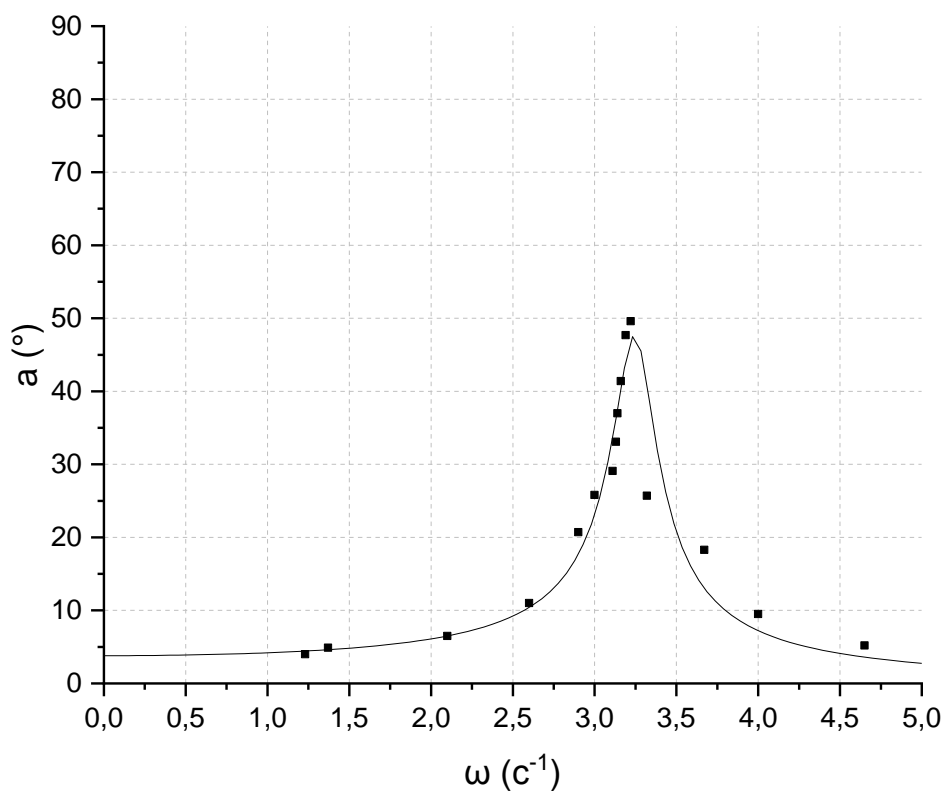
Добротность $Q_2 = 12.53 \pm 0.06$; постоянная затухания $\gamma_2 = \frac{\omega_0}{2Q} = 0.1296 \pm 0.0006 \text{ с}^{-1}$.

$a_2, ^\circ$	$T_2, \text{с}$	$\omega_2, \text{с}^{-1}$
4.0	5.10	1.23
4.9	4.57	1.37
6.5	2.99	2.10
11.0	2.42	2.60
20.7	2.17	2.90
25.8	2.10	3.00
29.1	2.02	3.11
33.1	2.01	3.13
37.0	2.00	3.14
41.4	1.99	3.16
47.7	1.97	3.19
49.6	1.95	3.22
25.7	1.89	3.32
18.3	1.71	3.67
9.5	1.57	4.00
5.2	1.35	4.65

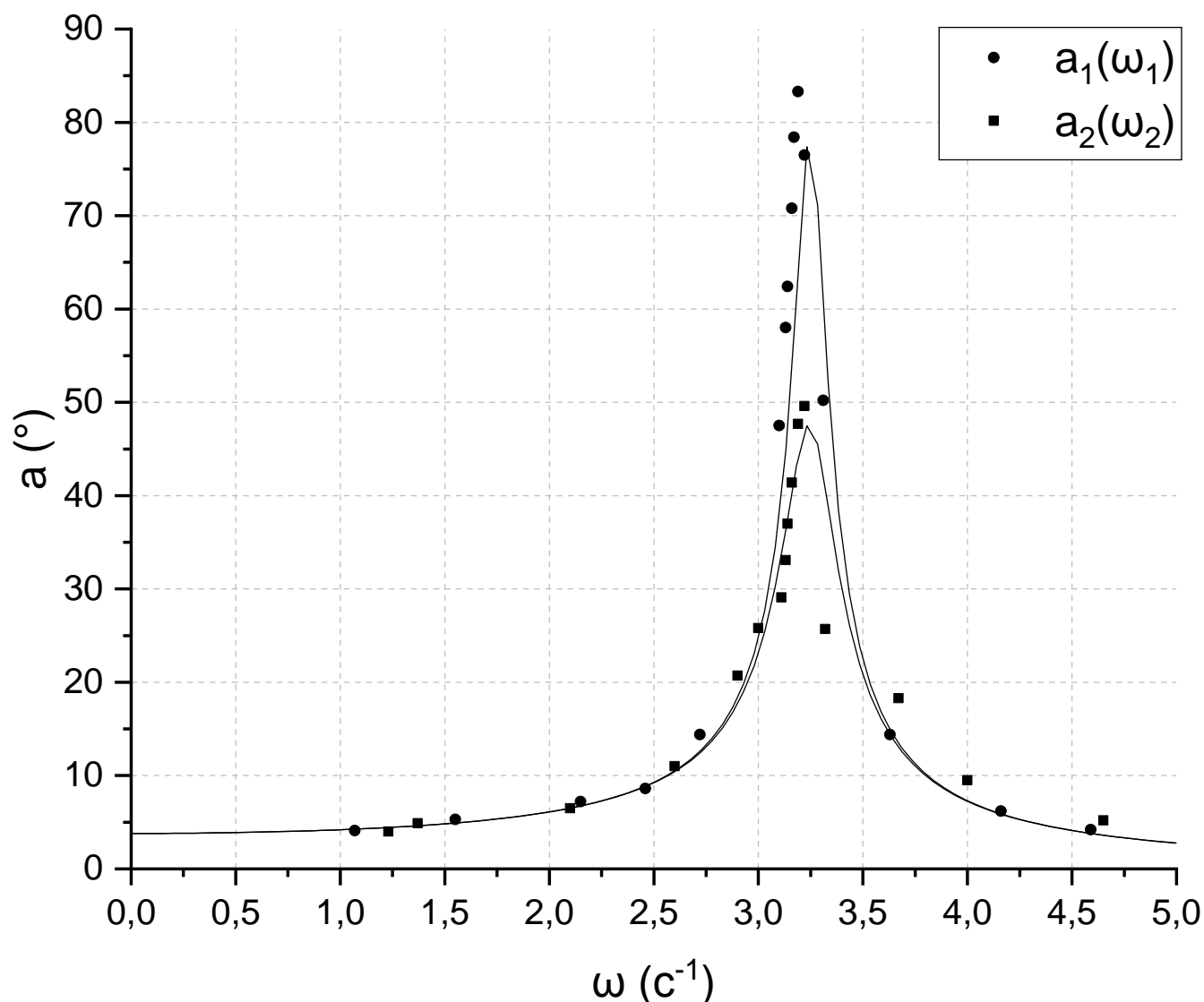
Теоретическая зависимость $a_2(\omega_2)$ выражается следующим образом:

$$a_2(\omega_2) = \frac{\omega_0^2 \theta_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_2^2)^2 + 4\gamma_2^2 \omega_2^2}} = \frac{40.09}{\sqrt{(10.55 - \omega_2^2)^2 + 0.0672 \omega_2^2}}$$

Изобразим график теоретической зависимости $a_2(\omega_2)$ и экспериментальные точки:



Изобразим графики теоретических зависимостей $a_1(\omega_1)$ и $a_2(\omega_2)$ вместе с экспериментальными точками на общей плоскости:



Из графиков видно, что при увеличении постоянной затухания максимальная амплитуда колебаний уменьшается. Полученные экспериментальные точки примерно соответствуют теоретическим графикам.

Выводы

- Колебания осциллятора затухают по геометрическому закону.
- Амплитуда колебаний осциллятора максимальна при совпадении частоты возбуждения с собственной частотой осциллятора.
- При увеличении тормозящей силы (и, соответственно, постоянной затухания) уменьшается максимальная амплитуда колебаний осциллятора.