

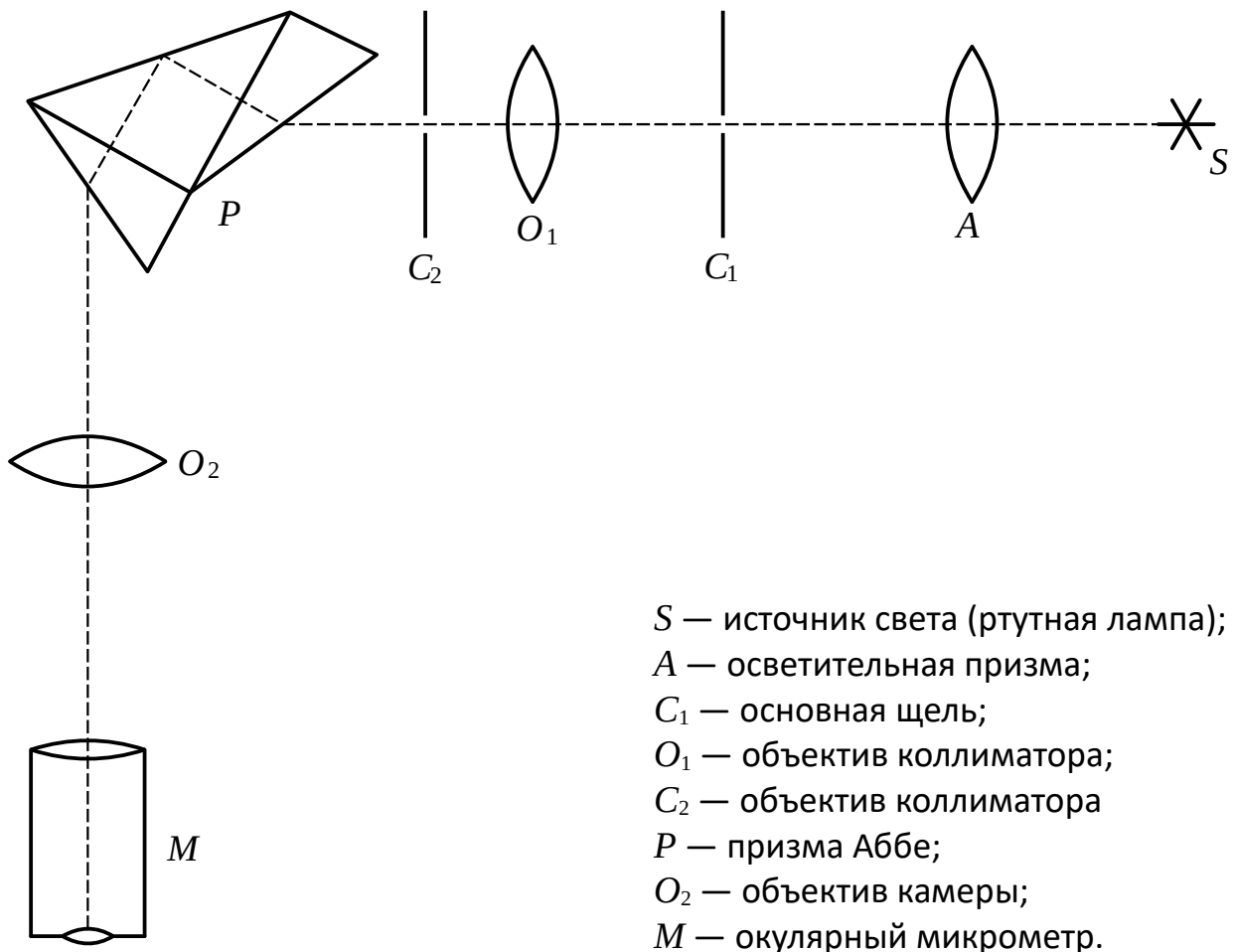
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №10

РАЗРЕШАЮЩАЯ СПОСОБНОСТЬ СПЕКТРАЛЬНОГО ПРИБОРА

Поляков Даниил, 19.Б23-фз

Цель работы: исследовать зависимость ширины изображения щели от ширины основной щели, определить нормальную ширину основной щели, исследовать зависимость изображения щели от ширины дополнительной щели, выполнить проверку критерия Рэлея для разрешающей способности.

Схема установки



Расчётные формулы

- Экспериментальное определение линейной ширины изображения щели:

$$a' = |z_{\text{пр}} - z_{\text{л}}| \quad \begin{array}{l} z_{\text{л}} \text{ — положение левого края спектральной линии;} \\ z_{\text{пр}} \text{ — положение правого края спектральной линии.} \end{array}$$

- Теоретическая зависимость ширины изображения от ширины основной щели при $a > a_{\text{н}}$:

$$a' = \frac{f_2}{f_1} a \quad \begin{array}{l} f_1 = 125 \text{ мм — фокусное расстояние объектива коллиматора;} \\ f_2 = 250 \text{ мм — фокусное расстояние объектива камеры;} \\ a \text{ — ширина основной щели.} \end{array}$$

- Нормальная ширина щели:

$$a_{\text{н}} = \frac{\lambda}{x} f_1 \quad \begin{array}{l} \lambda = 5460.8 \text{ Å — длина волны зелёной спектральной линии;} \\ f_1 = 125 \text{ мм — фокусное расстояние объектива коллиматора;} \\ x \text{ — ширина дополнительной щели.} \end{array}$$

- Теоретическая зависимость ширины изображения от ширины дополнительной щели при $x < x_{\text{н}}$:

$$a' = \frac{\lambda}{x} f_2 \quad \begin{array}{l} \lambda \text{ — длина волны зелёной линии;} \\ f_2 = 250 \text{ мм — фокусное расстояние объектива камеры;} \\ x \text{ — ширина дополнительной щели;} \\ x_{\text{н}} \text{ — ширина дополнительной щели, для которой} \\ \text{выбранная ширина основной щели является нормальной.} \end{array}$$

- Разрешающая способность прибора (критерий Рэлея):

$$R_{\lambda} = \frac{\langle \lambda \rangle}{\delta \lambda} \quad \begin{array}{l} \langle \lambda \rangle \text{ — средняя длина волны двух} \\ \text{разрешаемых спектральных линий;} \\ \delta \lambda \text{ — разность длин волн двух} \\ \text{разрешаемых спектральных линий;} \\ x_{\text{мин}} \text{ — минимальная ширина} \\ \text{дополнительной щели, при которой} \\ \text{линии различимы;} \\ f_2 = 250 \text{ мм — фокусное расстояние} \\ \text{объектива камеры;} \\ \delta z \text{ — линейное расстояние между} \\ \text{спектральными линиями.} \end{array}$$

$$R_x = \frac{x_{\text{мин}} \delta z}{f_2 \delta \lambda} = \frac{x_{\text{мин}}}{f_2} \left| \frac{z_2 - z_1}{\lambda_2 - \lambda_1} \right|$$

$$R_{\lambda} = R_x$$

- Формулы для вычисления погрешностей:

- Абсолютная погрешность прямых измерений:

$$\Delta_{\bar{x}} = \sqrt{t^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} + (\Delta_{x, \text{сист}})^2}$$

n — количество измерений;
 t — коэффициент Стьюдента;
 $\Delta_{x, \text{сист}}$ — систематическая погрешность.

- Абсолютная погрешность косвенных измерений:

$$\Delta_{f(x_1, x_2, \dots)} = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta_{x_2}\right)^2 + \dots}$$

- $\Delta_R = \sqrt{\left(\frac{\partial R}{\partial x_{\min}} \cdot \Delta_{x_{\min}}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z_1} \cdot \Delta_{z_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial z_2} \cdot \Delta_{z_2}\right)^2} = |R| \sqrt{\left(\frac{\Delta_{x_{\min}}}{x_{\min}}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{z_1}}{\delta z}\right)^2 + \left(\frac{\Delta_{z_2}}{\delta z}\right)^2}$

Порядок измерений

1. Включаем ртутную лампу. Получаем в окуляре изображение зелёной линии ртути. Фокусируем окуляр, добиваемся чёткой видимости визирной нити в окуляре.
2. Необходимо определить отсчёты шкал основной и дополнительной щелей, соответствующие их полному закрытию.
 - 2.1. Полностью раскрываем основную и дополнительную щели. Далее закрываем основную щель до тех пор, пока изображение зелёной линии полностью не исчезнет. В момент исчезновения изображения снимаем отсчёт со шкалы основной щели a_0 , соответствующий полному закрытию щели. Выполняем это измерение 5 раз.
 - 2.2. Аналогичным образом определяем нуль шкалы дополнительной щели. Полностью раскрываем основную щель и закрываем дополнительную щель до тех пор, пока изображение полностью не исчезнет. В момент исчезновения изображения снимаем отсчёт со шкалы основной щели x_0 , соответствующий полному закрытию щели. Выполняем это измерение 5 раз.

3. Измерим зависимость ширины изображения щели от ширины основной щели при фиксированной ширине дополнительной щели. Устанавливаем ширину дополнительной щели $x = 3$ мм (с учётом поправки x_0 на нулевое положение шкалы). Изменяя ширину основной щели a в пределах от 0 до 300 мкм с постепенным увеличением шага, измеряем соответствующие значения ширины зелёной линии в окуляре. Для этого наводим визирную нить на левый край линии и снимаем его положение $z_{\text{л}}$ со шкалы окулярного микрометра. Таким же образом измеряем положение правого края линии $z_{\text{пр}}$. Ширина линии a' находится как разность этих двух отсчётов и по сути является шириной изображения щели.
4. Измерим зависимость ширины изображения щели от ширины дополнительной щели при фиксированной ширине основной щели. Устанавливаем ширину основной щели примерно равной нормальной ширине щели при $x = 3$ мм: $a = 23$ мкм (с учётом поправки a_0 на нулевое положение шкалы). Изменяя ширину дополнительной щели x в пределах от 0 до 4 мм с постепенным увеличением шага, измеряем соответствующие значения ширины зелёной линии a' в окуляре методом, описанным в предыдущем пункте.
5. Проведём проверку критерия Рэлея для разрешающей способности. Оставляем ширину щели $a \approx 23$ мкм, которая является нормальной при $x = 3$ мм. Выводим в окуляр изображение жёлтого дублета ртути.
 - 5.1. Измерим минимальную ширину дополнительной щели, при которой линии ещё различимы. Постепенно закрываем дополнительную щель до тех пор, пока полностью не исчезнет граница между спектральными линиями. Снимаем соответствующий отсчёт шкалы дополнительной щели x_{min} . Выполняем это измерение 5 раз.
 - 5.2. Измерим линейное расстояние между спектральными линиями. Устанавливаем ширину дополнительной щели $x = 3$ мм. Наводим визирную нить на центр первой жёлтой линии и снимаем его положение z_1 со шкалы окулярного микрометра. Таким же образом измеряем положение второй жёлтой линии z_2 . Расстояние между линиями δz находится как разность этих двух отсчётов.

Результаты

Примечание: построение графиков и аппроксимация зависимостей выполнены с помощью ПО MATLAB. Погрешности прямых измерений и коэффициентов аппроксимации рассчитаны с доверительной вероятностью $P = 95\%$.

1. Определение нулевых отсчётов шкал щелей

Приборную погрешность шкал оценим как половину цены деления:

$$\Delta_{a, \text{сист}} = 0.5 \text{ мкм}$$

$$\Delta_{x, \text{сист}} = 0.005 \text{ мм}$$

Таблица 1. *Отсчёты шкал основной и дополнительной щели, соответствующие их полному закрытию*

№	a_0 , МКМ	x_0 , ММ
1	117	22.68
2	116	22.66
3	117	22.59
4	118	22.62
5	118	22.58
Среднее	117.2	22.63
Δ	1.2	0.05

Ко всем далее перечисленным в работе значениям a и x применены указанные поправки, т. е. вместо фактически снятых значений указаны результаты вычитания из них нулевого отсчёта.

2. Исследование зависимости ширины изображения от ширины основной щели

Таблица 2. Зависимость ширины изображения от ширины основной щели при ширине дополнительной щели 3 мм

a , МКМ	$Z_{л}$, МКМ	$Z_{пр}$, МКМ	a' , МКМ	a , МКМ	$Z_{л}$, МКМ	$Z_{пр}$, МКМ	a' , МКМ
3	405	480	75	63	350	520	170
5	420	500	80	68	330	535	205
7	435	510	75	73	330	540	210
9	425	520	95	78	335	550	215
11	425	515	90	83	330	550	220
13	425	515	90	93	320	575	255
15	420	520	100	103	320	580	260
17	430	515	85	113	310	600	290
19	425	505	80	123	300	600	300
21	420	520	100	133	285	610	325
23	415	510	95	143	270	620	350
25	410	510	100	153	270	625	355
27	420	515	95	163	255	640	385
29	410	520	110	173	245	665	420
31	415	525	110	183	240	670	430
33	410	520	110	203	250	720	470
38	425	540	115	223	240	755	515
43	420	540	120	243	210	760	550
48	400	560	160	263	170	770	600
53	405	550	145	283	150	790	640
58	350	520	170	—			

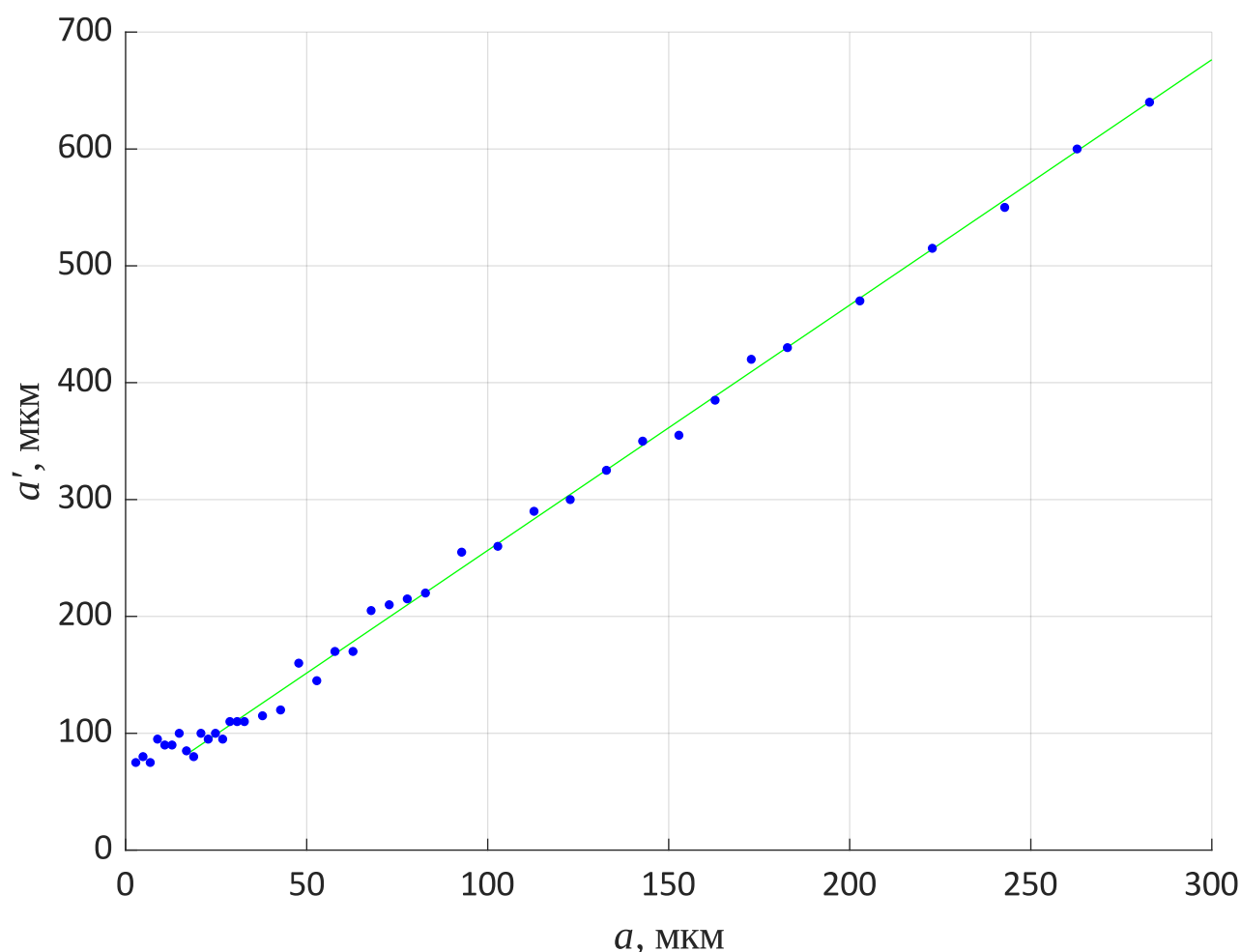


График 1. *Зависимость ширины изображения от ширины основной щели при ширине дополнительной щели 3 мм*

Полученный график в основном является линейным, но вблизи его начала имеются искажения. Теоретически, график должен состоять из двух частей. Вблизи нуля, до пересечения т. н. «нормальной» ширины щели a_n , ширина изображения должна не зависеть от ширины щели; вместо этого на этом участке ширина изображения не увеличивается, а увеличивается только его интенсивность. Получается, что теоретически в начале графика должна наблюдаться горизонтальная прямая, однако на полученном графике на этом участке очень сильный разброс точек, связанный как с недостаточной ценой деления окулярного микрометра (10 мкм), так и со сложностью определения границ спектральной линии из-за малой интенсивности. По этой причине рекомендуется наблюдать спектр при нормальной ширине щели. При удалении от начала координат экспериментальный график приобретает линейность.

Для проверки теоретической зависимости ширины изображения от ширины щели необходимо выделить участок графика после нормальной ширины щели a_n и аппроксимировать его. Аппроксимировать следует зависимостью вида $y = Ax + B$, со свободным членом B , т. к. не исключена возможность неверного определения нулевого значения шкалы. Определим нормальную ширину щели следующим образом. Сначала выполняем аппроксимацию по всем экспериментальным точкам. Затем удаляем одну точку, ближайшую к нулю, и проводим аппроксимацию по оставшимся точкам. Затем удаляем следующую точку и снова проводим аппроксимацию. Выполняем эту операцию до тех пор, пока не дойдём до $a = 50$ мкм. Потом смотрим, аппроксимация по каким точкам даёт наименьшую погрешность коэффициентов A и B .

В результате получаем минимум погрешностей при отбрасывании первых 7-ми точек. Результат аппроксимации:

$$A = 2.10 \pm 0.04$$

$$B = 47 \pm 5 \text{ мкм}$$

Аппроксимирующая прямая нанесена на изображённый выше график, начиная с 8-ой точки. 8-ая точка выделена в таблице **2** жирным шрифтом. Таким образом, грубо оценим нормальную ширину щели, считая, что она примерно равна a в 8-ой точке:

$$a_n (\text{эксп.}) \approx 17 \text{ мкм}$$

Расчётное значение нормальной ширины щели:

$$a_n (\text{расч.}) = 23 \text{ мкм}$$

Экспериментальное и расчётное значения a_n приемлемо близки друг к другу.

Из значений фокусов f_1 и f_2 теоретическое значение коэффициента A равно 2. Экспериментально полученное значение очень близко к теоретическому.

Значение коэффициента B получилось значительным, из чего следует, что нулевой отсчёт шкалы щели был определён неверно. Выполнив аппроксимацию по тем же точкам, но по исходным данным (без вычета из них нулевого отсчёта), находим новый нулевой отсчёт шкалы:

$$A = 2.10 \pm 0.04$$

$$B = -200 \pm 8 \text{ мкм}$$

$$a_0 = -B/A = 95 \pm 4 \text{ мкм}$$

Это значение нулевого отсчёта следует считать более корректным, т. к. предыдущий метод его нахождения включал в себя необходимость ручного наблюдения за исчезновением света в окуляре, что является источником большой систематической погрешности из-за наличия как фонового освещения, так и физиологических особенностей наблюдателя. Далее в работе в качестве нулевого отсчёта всё равно используется старое значение, т. к. ниже этого значения невозможно было наблюдать спектральные линии, и, соответственно, проводить какие-либо измерения.

3. Исследование зависимости ширины изображения от ширины дополнительной щели

Таблица 3. Зависимость ширины изображения от ширины дополнительной щели при ширине основной щели 23 мкм

x , мм	$Z_{л}$, МКМ	$Z_{пр}$, МКМ	a' , МКМ	x , мм	$Z_{л}$, МКМ	$Z_{пр}$, МКМ	a' , МКМ
0.2	860	2220	1360	1.6	380	545	165
0.3	50	980	930	1.8	385	535	150
0.4	140	820	680	2.0	390	520	130
0.5	230	720	490	2.2	395	520	125
0.6	250	680	430	2.4	390	510	120
0.7	290	660	370	2.6	400	510	110
0.8	310	630	320	2.8	405	500	95
0.9	320	610	290	3.0	400	500	100
1.0	330	590	260	3.5	405	485	80
1.2	340	580	240	4.0	400	480	80
1.4	350	550	200	—			

При дальнейшем увеличении ширины дополнительной щели ширина изображения остаётся постоянной.

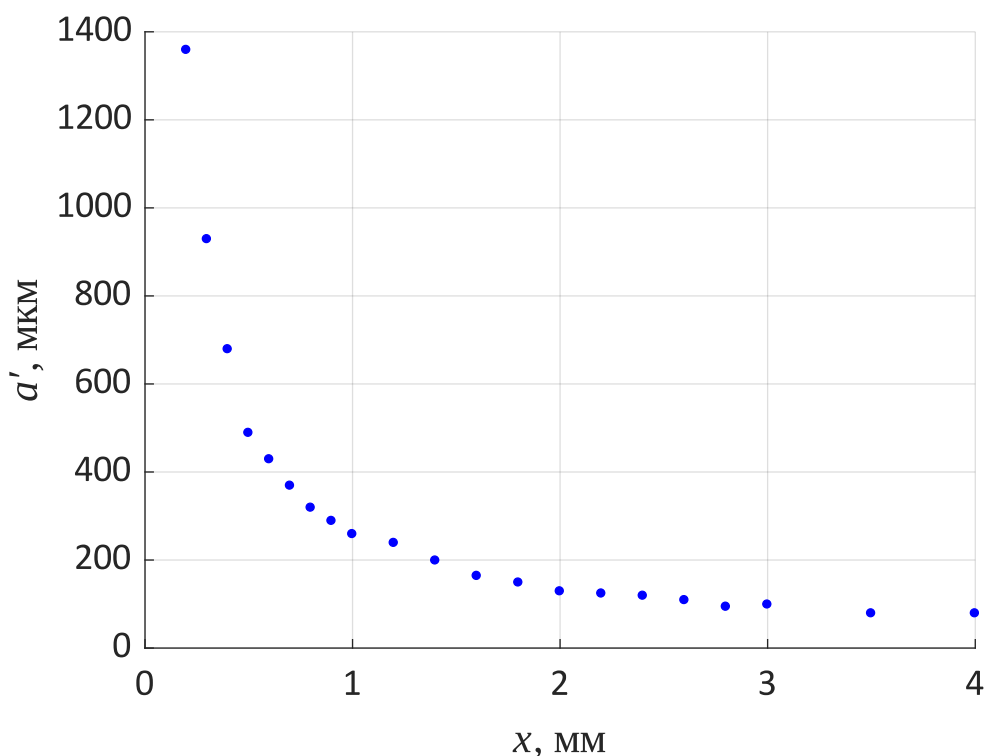


График 2. Зависимость ширины изображения от ширины дополнительной щели при ширине основной щели 23 мкм

График представляет собой обратную пропорциональность, что согласуется с теорией. Чтобы убедиться в этом, изобразим график зависимости $a'(x^{-1})$.

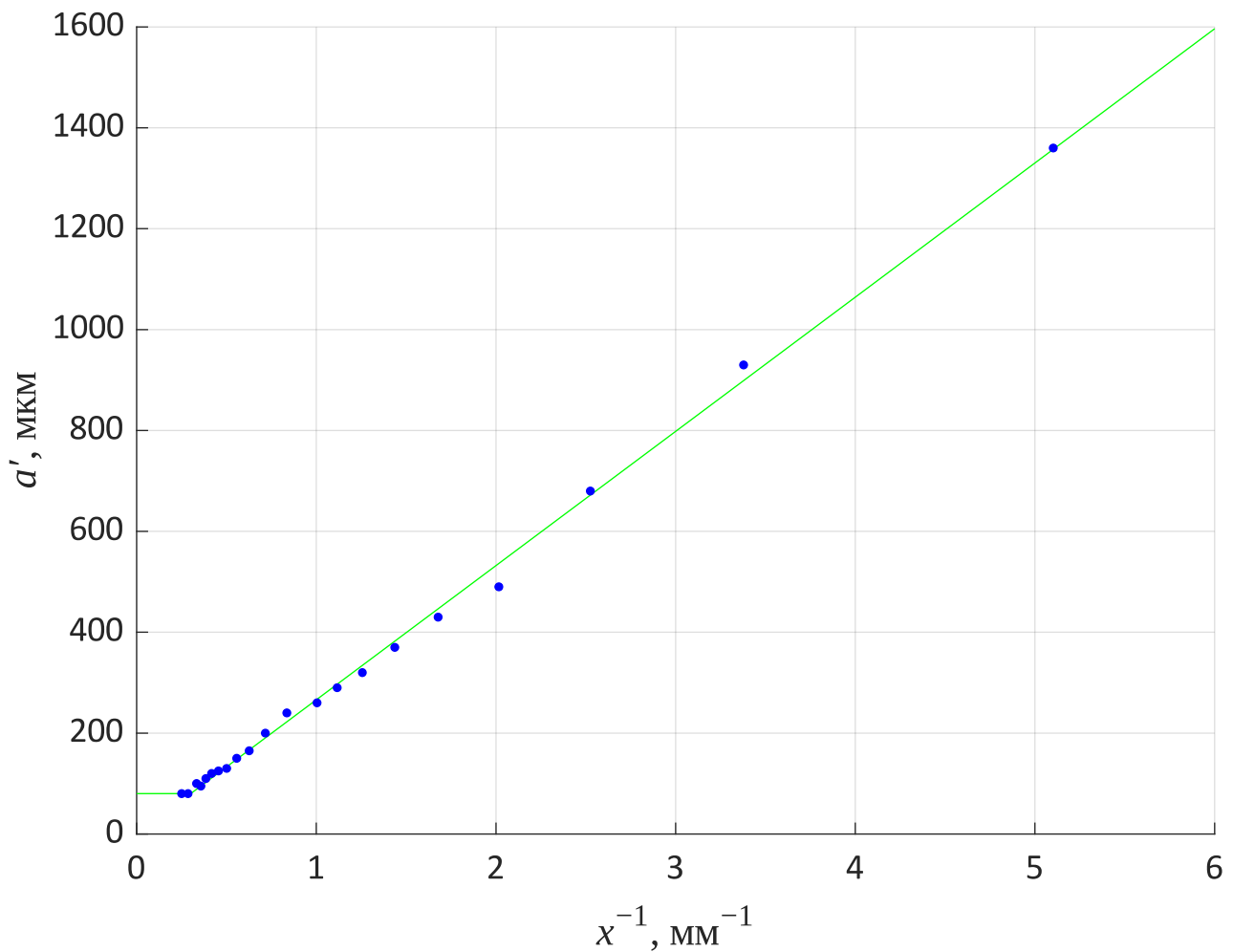


График 3. Зависимость ширины изображения от обратной ширины дополнительной щели при ширине основной щели 23 мкм

Полученный график состоит из двух частей. При $x^{-1} > x_n^{-1}$ (и, соответственно, $x < x_n$) график имеет линейный вид (здесь x_n — ширина дополнительной щели, для которой выбранная ширина основной щели ($a = 23$ мкм) является нормальной). В случае, когда $x^{-1} < x_n^{-1}$ ($x > x_n$), ширина изображения остаётся постоянной независимо от x , т. е. дифракционный эффект отсутствует и весь свет от основной щели беспрепятственно проходит через дополнительную щель. Дополнительных измерений на этом участке не проводилось, т. к. изображение не меняло своего вида.

4. Проверка критерия Рэля для разрешающей способности

Указанные в таблице далее значения x получены вычитанием из фактически измеренных значений нулевого отсчёта x_0 . Тогда их систематическую погрешность не стоит принимать лишь за половину цены деления, а следует учесть и погрешность нулевого отсчёта:

$$\Delta_{x_{\min}, \text{сист}} = \sqrt{(\Delta_{x, \text{сист}})^2 + \Delta_{x_0}^2} = 0.05 \text{ мм}$$

Приборную погрешность микрометра оценим как половину цены деления:

$$\Delta_{z, \text{сист}} = 5 \text{ мкм}$$

Таблица 4. Минимальная ширина дополнительной щели, при которой линии жёлтого дублета различимы, и положения их центров

№	x_{\min} , мм	z_1 , мкм	z_2 , мкм
1	1.04	400	530
2	1.05	400	540
3	0.99	395	525
4	1.01	390	540
5	0.99	395	535
Среднее	1.01	396	534
Δ	0.06	7	10

Длины волн жёлтого дублета ртути равны 5769.6 Å и 5790.7 Å. Чтобы эти линии были различимы, разрешающая способность прибора должна быть не менее:

$$R_{\lambda} = 274$$

С другой стороны, расчёт разрешающей способности по измеренным данным даёт:

$$R_x = 260 \pm 30$$

Полученные значения R , вычисленные разными способами, равны в пределах погрешности. Выходит, что соотношение Рэлея для разрешающей способности справедливо.

Выводы

При работе со спектральными приборами имеет место явление дифракции. В связи с этим вводится понятие «нормальной» ширины щели. В случае, когда ширина щели больше нормальной пучок света подчиняется законам геометрической оптики и ширина изображения прямо пропорциональна ширине щели. В случае, когда ширина щели меньше нормальной, ширина изображения остаётся постоянной, а изменяется только его интенсивность.

Важной характеристикой спектрального прибора является его разрешающая способность. В ходе работы была успешно выполнена проверка соотношения Рэлея, связывающего длины волн различаемых спектральных линий и параметры прибора.