

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2

ИЗУЧЕНИЕ УПРУГИХ СВОЙСТВ СПИРАЛЬНОЙ ПРУЖИНЫ И ТОНКОЙ ПЛАСТИНЫ

Поляков Даниил, Б07-ФЗ

Цель работы: исследование упругих свойств спиральной пружины и тонкой пластины, ознакомление с такими видами деформации, как растяжение и изгиб, а также с разными видами нагрузок (статическими и динамическими), расчёт характеристик систем (модуль сдвига, модуль Юнга).

Оборудование:

- Штангенциркуль с нониусом;
- Микрометр;
- Рулетка;
- Штативы с лапкой и указателями;
- Две пружины различного радиуса;
- Набор грузов 50 г;
- Металлическая пластина.

Расчётные формулы:

- Коэффициент жёсткости пружины:

$$k = \frac{mg}{\Delta l}$$

m – масса груза;
 g – ускорение свободного падения;
 Δl – удлинение пружины.

- Период колебаний груза на пружине:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

m – масса груза;
 k – коэффициент жёсткости пружины.

- Модуль сдвига материала проволоки:

$$G = \frac{4kR^3n}{r^4}$$

k – коэффициент жёсткости пружины;
 R – радиус пружины;
 n – число витков пружины;
 r – радиус проволоки.

- Величина прогиба пластины:

$$f = \frac{mgl^3}{2EI_x}$$

m – масса груза;
 g – ускорение свободного падения;
 l – длина рабочей части пластины;
 E – модуль Юнга;
 I_x – геометрический момент инерции.

- Геометрический момент инерции пластины:

$$I_x = \frac{bh^3}{12}$$

b – ширина пластины;
 h – толщина пластины.

- Формулы для вычисления погрешностей:

- Абсолютная погрешность прямых измерений:

$$\Delta x = \sqrt{t^2 \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)} + (\Delta x)_B^2}$$

где:

n – количество измерений;
 Δx_B – приборная погрешность;
 t – коэффициент Стьюдента.

- Абсолютная погрешность косвенных измерений:

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots) = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \Delta x_1\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \cdot \Delta x_2\right)^2 + \dots}$$

Метод измерения

1. Измерим параметры изучаемых пружин. Микрометром измерим диаметры проволок пружин d_1 и d_2 . Вручную сосчитаем число витков n_1 и n_2 . С помощью штангенциркуля измерим диаметры пружин D_1 и D_2 .
2. Измерим толщину пластины h микрометром и ее ширину b штангенциркулем.
3. Измерим удлинение пружин при подвешивании грузов. Подвесим пружину за стержень на штативе, на втором штативе закрепим 2 указателя. Одним указателем отметим положение нижнего края пружины без нагрузки, а вторым – положение нижнего края пружины после ее растягивания под действием груза. Расстояние между ними Δl_1 и Δl_2 измерим штангенциркулем (до 15 см, при значениях больше 15 см воспользуемся рулеткой).
4. Измерим периоды колебаний пружин с грузами T_1 и T_2 с помощью секундомера. Слегка растянем пружину, чтобы она начала колебаться. Измерим время, за которое пружина совершает 20 колебаний.
5. Измерим изгиб пластины f при различных l и m . Закрепим пластину в лапке (между дополнительными пластинками, во избежание деформации пластины в месте закрепления) таким образом, чтобы расстояние от края пластины, к которому подвешиваются грузы до лапки равнялось l (воспользуемся рулеткой). Закрепим два указателя на втором штативе. Одним указателем отметим положение края пластины без нагрузки, вторым – положение края пластины с грузами, которые с помощью ниток будем подвешивать за отверстие на пластине. Снимем расстояние между указателями f с помощью штангенциркуля.

Таблицы и обработка данных

Формулы для вычисления погрешностей указаны выше в пункте «Расчётные формулы». Во всех случаях коэффициент Стьюдента t при $n=4$, $\alpha=0.68$ равен 1.3.

Цена деления штангенциркуля равна 0.05 мм, микрометра – 0.01 мм, рулетки – 1 мм. Для этих приборов приборная погрешность равна половине цены деления.

Масса каждого груза равна 50.0 ± 0.2 г.

Коэффициенты наклона графиков (и их погрешности) каждой прямой зависимости найдём по методу наименьших квадратов.

Ускорение свободного падения g принято за 9.85 м/с^2 .

Параметры 1-ой пружины

№	d_1 , мм	n_1	D_1 , мм
1	0.88	73	20.45
2	0.90		20.40
3	0.90		20.45
4	0.90		20.45
5	1.03		20.25
Среднее	0.92	73	20.40
Δ	0.04	-	0.06

$$d_1 = 0.92 \pm 0.04 \text{ мм} \quad n_1 = 73 \quad D_1 = 20.40 \pm 0.06 \text{ мм}$$

$$r_1 = 0.46 \pm 0.02 \text{ мм} \quad R_1 = 10.20 \pm 0.03 \text{ мм}$$

Параметры 2-ой пружины

№	d_2 , мм	n_2	D_2 , мм
1	0.89	73	15.25
2	0.91		15.25
3	0.89		15.20
4	0.90		15.35
5	0.89		15.15
Среднее	0.90	73	15.24
Δ	0.01	-	0.05

$$d_2 = 0.90 \pm 0.01 \text{ мм} \quad n_2 = 73 \quad D_2 = 15.24 \pm 0.05 \text{ мм}$$

$$r_2 = 0.45 \pm 0.01 \text{ мм} \quad R_2 = 7.62 \pm 0.03 \text{ мм}$$

Параметры пластины

№	h , мм	b , мм
1	0.39	25.05
2	0.41	25.05
3	0.40	25.05
4	0.43	25.05
5	0.41	25.05
Среднее	0.41	25.05
Δ	0.01	0.03

$$h = 0.41 \pm 0.01 \text{ мм}$$

$$b = 25.05 \pm 0.03 \text{ мм}$$

Найдём геометрический момент инерции пластины:

$$\bar{I}_x = \frac{bh^3}{12} \approx 0.14 \text{ мм}^4$$

$$\Delta I_x = \sqrt{\left(\frac{\partial I_x}{\partial b} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{\partial I_x}{\partial h} \cdot \Delta h\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{h^3}{12} \cdot \Delta b\right)^2 + \left(\frac{bh^2}{4} \cdot \Delta h\right)^2} \approx 0.01 \text{ мм}^4$$

$$I_x = 0.14 \pm 0.01 \text{ мм}^4$$

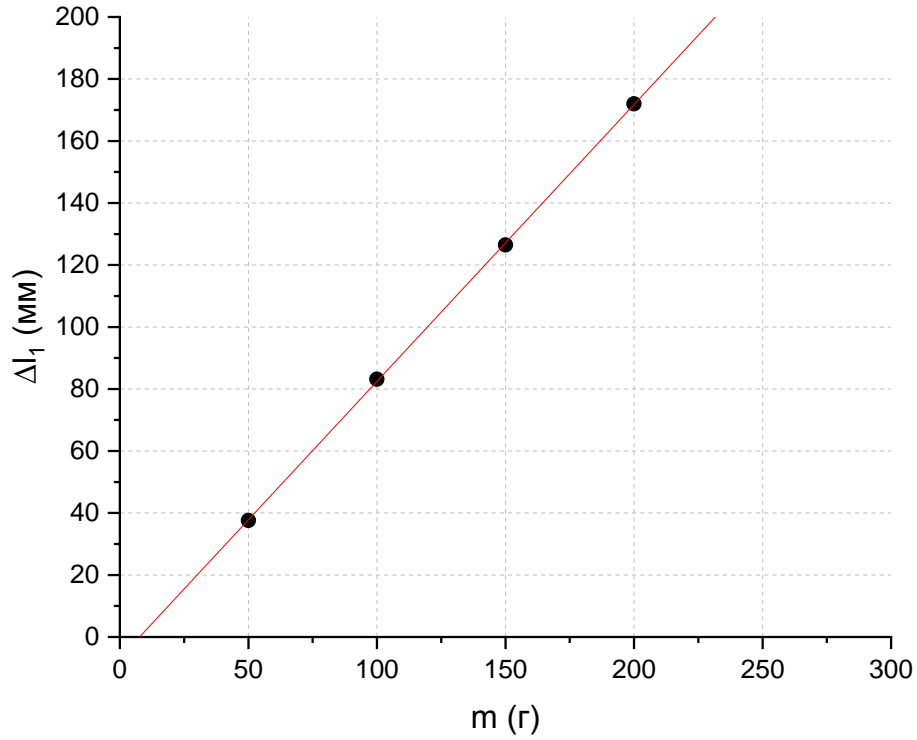
Определение коэффициента жёсткости пружины статическим методом

Δl_1 , мм	Δl_2 , мм	m , г
37.60	17.05	50
83.15	35.60	100
126.45	53.00	150
172	70.75	200
-	89.35	250

Построим графики зависимости $\Delta l(m)$. Зависимость выражается формулой:

$$\Delta l = \alpha m = \frac{mg}{k} \Rightarrow \alpha = \frac{g}{k} \Rightarrow k = \frac{g}{\alpha}$$

Пружина №1



$$\alpha = 0.893 \pm 0.006 \frac{\text{мм}}{\text{г}}$$

$$\bar{k}_1 = \frac{g}{\alpha} \approx 11.03 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$\Delta k_1 = \left| \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \right| = \frac{g}{\alpha^2} \cdot \Delta \alpha \approx 0.07 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$k_1 = 11.03 \pm 0.07 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

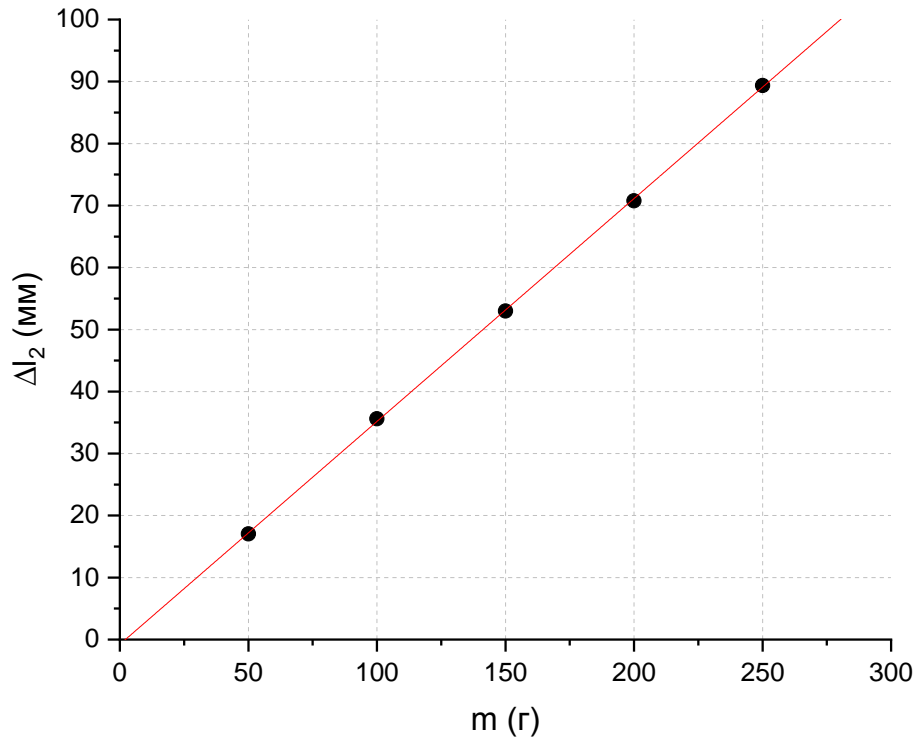
$$\bar{G}_1 = \frac{4k_1 R_1^3 n_1}{r_1^4} \approx 76 \text{ ГПа}$$

$$\Delta G_1 = \sqrt{\left(\frac{\partial G_1}{\partial k_1} \cdot \Delta k_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial R_1} \cdot \Delta R_1 \right)^2 + \left(\frac{\partial G_1}{\partial r_1} \cdot \Delta r_1 \right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{4R_1^3 n_1}{r_1^4} \cdot \Delta k_1 \right)^2 + \left(\frac{12k_1 R_1^2 n_1}{r_1^4} \cdot \Delta R_1 \right)^2 + \left(\frac{16k_1 R_1^3 n_1}{r_1^5} \cdot \Delta r_1 \right)^2} \approx 13 \text{ ГПа}$$

$$G_1 = 76 \pm 13 \text{ ГПа}$$

Пружина №2



$$\alpha = 0.360 \pm 0.002 \frac{\text{мм}}{\text{г}}$$

$$\overline{k_2} = \frac{g}{\alpha} \approx 27.36 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$\Delta k_2 = \left| \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \right| = \frac{g}{\alpha^2} \cdot \Delta \alpha \approx 0.15 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$k_2 = 27.36 \pm 0.15 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$\bar{G}_2 = \frac{4k_2 R_2^3 n_2}{r_2^4} \approx 86 \text{ ГПа}$$

$$\Delta G_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial G_2}{\partial k_2} \cdot \Delta k_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial R_2} \cdot \Delta R_2 \right)^2 + \left(\frac{\partial G_2}{\partial r_2} \cdot \Delta r_2 \right)^2} =$$

$$\sqrt{\left(\frac{4R_2^3 n_2}{r_2^4} \cdot \Delta k_2 \right)^2 + \left(\frac{12k_2 R_2^2 n_2}{r_2^4} \cdot \Delta R_2 \right)^2 + \left(\frac{16k_2 R_2^3 n_2}{r_2^5} \cdot \Delta r_2 \right)^2} \approx 7.7 \text{ ГПа}$$

$$G_2 = 86 \pm 8 \text{ ГПа}$$

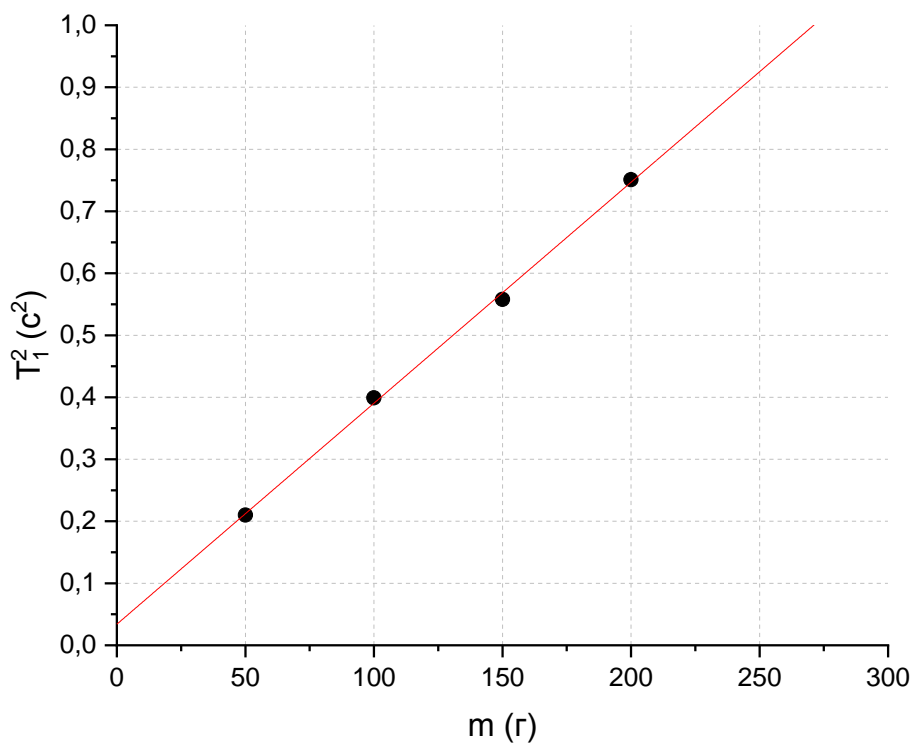
Определение коэффициента жёсткости пружины динамическим методом

Приборная погрешность секундомера принята за 0.05 с (половина цены деления).
При построении графиков зависимости $T_1^2(m)$ зависимость выражается формулой:

$$T_1^2 = \alpha m = 4\pi^2 \frac{m}{k} \Rightarrow \alpha = \frac{4\pi^2}{k} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2}{\alpha}$$

Пружина №1

n	$m, \text{ г}$	$t_1, \text{ с}$	$\langle t_1 \rangle, \text{ с}$	$\Delta t_1, \text{ с}$	$T_1, \text{ с}$	$\Delta T_1, \text{ с}$	$T_1^2, \text{ с}^2$	$\Delta T_1^2, \text{ с}^2$
20	50	9.3	9.2	0.1	0.46	0.01	0.21	0.01
		9.1						
		9.3						
	100	12.3	12.4	0.1	0.622	0.006	0.399	0.008
		12.4						
		12.6						
	150	15.0	14.9	0.1	0.747	0.005	0.558	0.007
		14.8						
		15.0						
	200	17.4	17.3	0.1	0.867	0.003	0.751	0.006
		17.3						
		17.3						



$$\bar{\alpha} = 0.00356 \pm 0.00009 \frac{c^2}{\Gamma} = 3.56 \pm 0.09 \frac{c^2}{\text{кг}}$$

$$\bar{k}_1 = \frac{4\pi^2}{\alpha} \approx 11.08 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$\Delta k_1 = \left| \frac{\partial k_1}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \right| = \frac{4\pi^2}{\alpha^2} \cdot \Delta \alpha \approx 0.28 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

$$k_1 = 11.1 \pm 0.3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$$

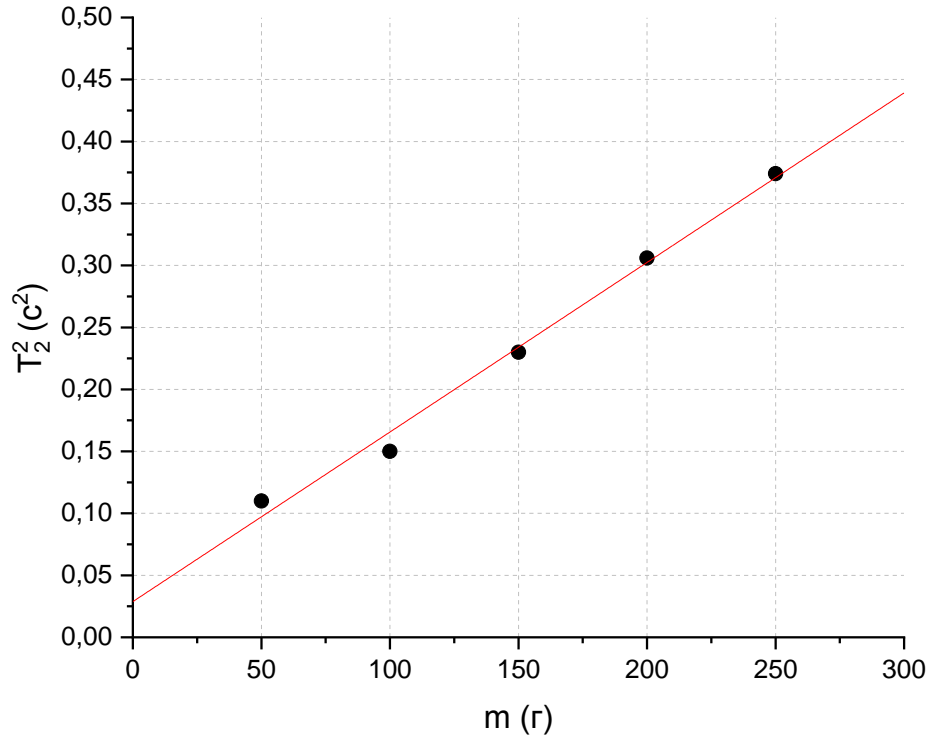
$$\bar{G}_1 \approx 77 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

$$\Delta G_1 \approx 14 \cdot 10^9 \text{ Па}$$

$$G_1 = 77 \pm 14 \text{ ГПа}$$

Пружина №2

n	$m, \text{ г}$	$t_2, \text{ с}$	$\langle t_2 \rangle, \text{ с}$	$\Delta t_2, \text{ с}$	$T_2, \text{ с}$	$\Delta T_2, \text{ с}$	$T_2^2, \text{ с}^2$	$\Delta T_2^2, \text{ с}^2$
20	50	6.5	6.6	0.1	0.33	0.01	0.11	0.01
		6.7						
		6.5						
	100	7.9	7.8	0.1	0.39	0.01	0.15	0.01
		7.6						
		7.9						
	150	9.7	9.6	0.1	0.48	0.01	0.23	0.01
		9.6						
		9.6						
	200	11.1	11.1	0.1	0.553	0.003	0.306	0.004
		11.0						
		11.1						
	250	12.3	12.2	0.1	0.612	0.005	0.374	0.006
		12.1						
		12.3						



$$\bar{\alpha} = 0.00137 \pm 0.00008 \frac{c^2}{\Gamma} = 1.368 \pm 0.077 \frac{c^2}{\text{кг}}$$

$$\bar{k}_2 = \frac{4\pi^2}{\alpha} \approx 28.86 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

$$\Delta k_2 = \left| \frac{\partial k_2}{\partial \alpha} \cdot \Delta \alpha \right| = \frac{4\pi^2}{\alpha^2} \cdot \Delta \alpha \approx 1.6 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

$$k_2 = 28.9 \pm 1.6 \frac{\text{Н}}{\text{М}}$$

$$\bar{G}_2 \approx 91 \cdot 10^9 \text{ ГПа}$$

$$\Delta G_2 \approx 9.6 \cdot 10^9 \text{ ГПа}$$

$$G_2 = 91 \pm 10 \text{ ГПа}$$

Анализ результатов

	Пружина №1 $D_1 = 20.40 \pm 0.06$ мм	Пружина №2 $D_2 = 15.24 \pm 0.05$ мм
Статический метод	$k_1 = 11.03 \pm 0.07 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$k_2 = 27.36 \pm 0.15 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$
	$G_1 = 76 \pm 13$ ГПа	$G_2 = 86 \pm 8$ ГПа
Динамический метод	$k_1 = 11.1 \pm 0.3 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$	$k_2 = 28.9 \pm 1.6 \frac{\text{Н}}{\text{м}}$
	$G_1 = 77 \pm 14$ ГПа	$G_2 = 91 \pm 10$ ГПа

Результаты, полученные статическим методом, оказались точнее.

Материал, толщина проволоки и количество витков одинаковы для обеих пружин. Можно наблюдать обратную кубическую зависимость коэффициента жёсткости пружин от их диаметра, т.е. $k \sim D^{-3}$.

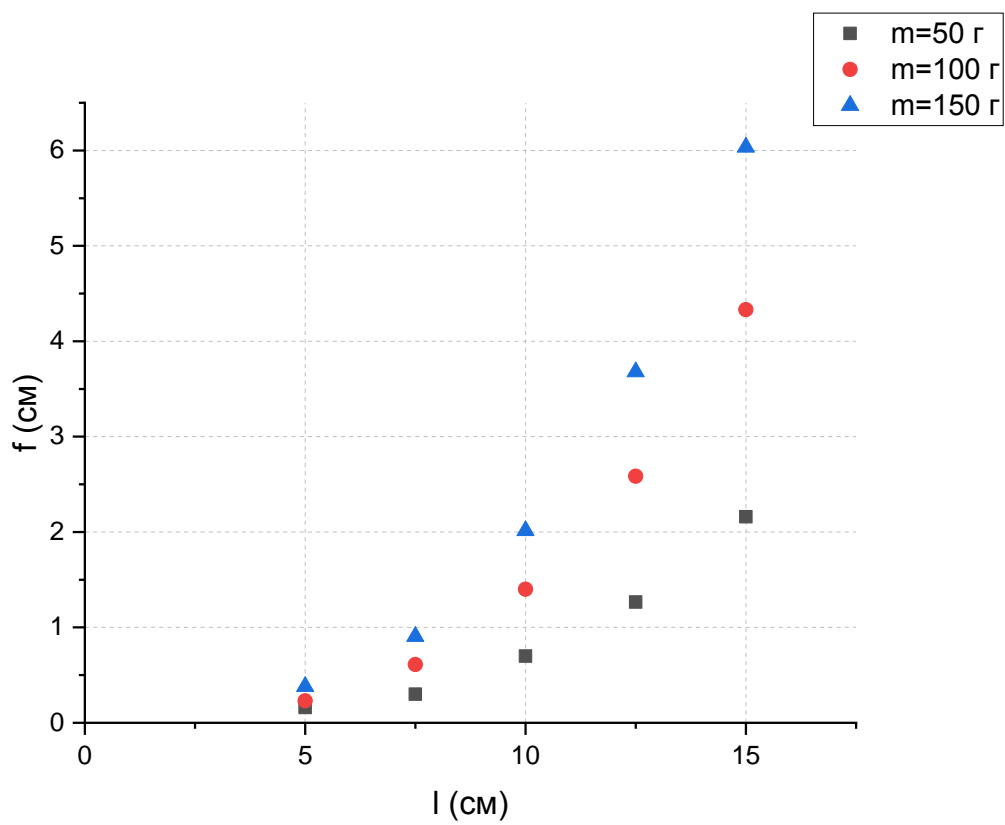
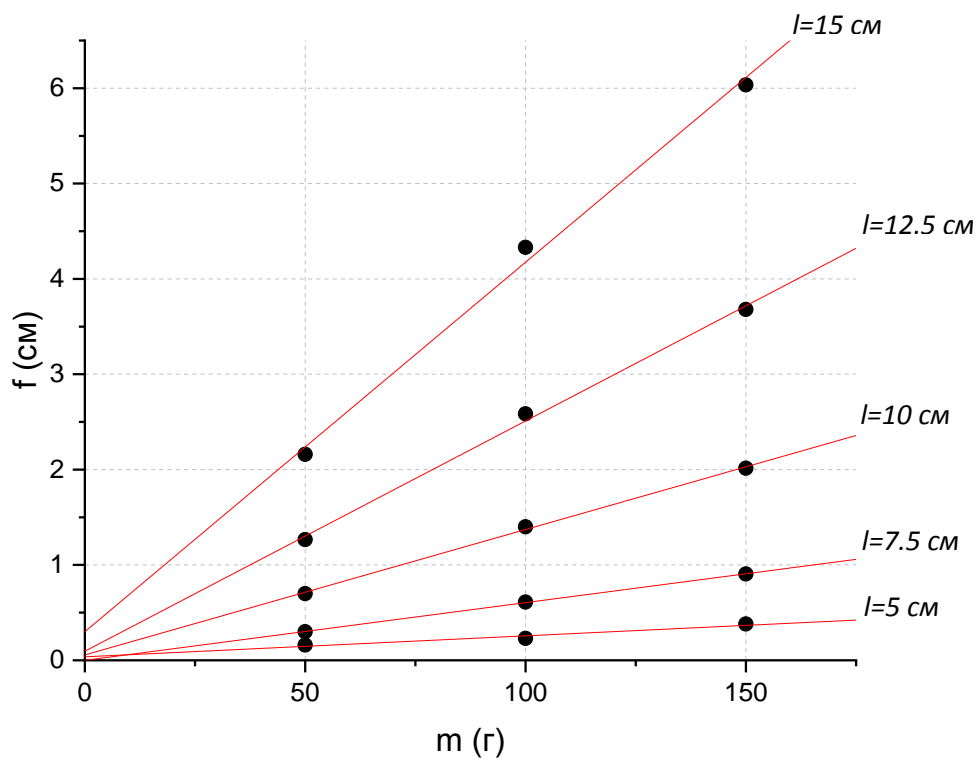
Аппроксимирующие прямые на графиках $l(m)$ проходят ниже начала координат потому, что пружины обладают собственной массой, а при измерениях не учитывалось начальное растяжение пружины под её собственным весом. Аппроксимирующие прямые на графиках $T^2(m)$ проходят выше начала координат потому, что пружина обладает собственной массой, и соответственно будет быстро колебаться и при отсутствии грузов.

Полученный модуль сдвига примерно соответствует модулю сдвига стали (табличное значение равно 79.3 ГПа).

Изучение деформации изгиба тонкой пластины

Таблица результатов зависимости $f(m, l)$, см

$\begin{matrix} m, \text{ г} \\ l, \text{ см} \end{matrix}$	50	100	150
5.0	0.160	0.230	0.380
7.5	0.300	0.610	0.905
10.0	0.700	1.400	2.015
12.5	1.265	2.585	3.680
15.0	2.160	4.330	6.035



Так как теоретически f зависит от куба l , изобразим зависимость $f(l^3)$ и найдём коэффициент наклона прямой.

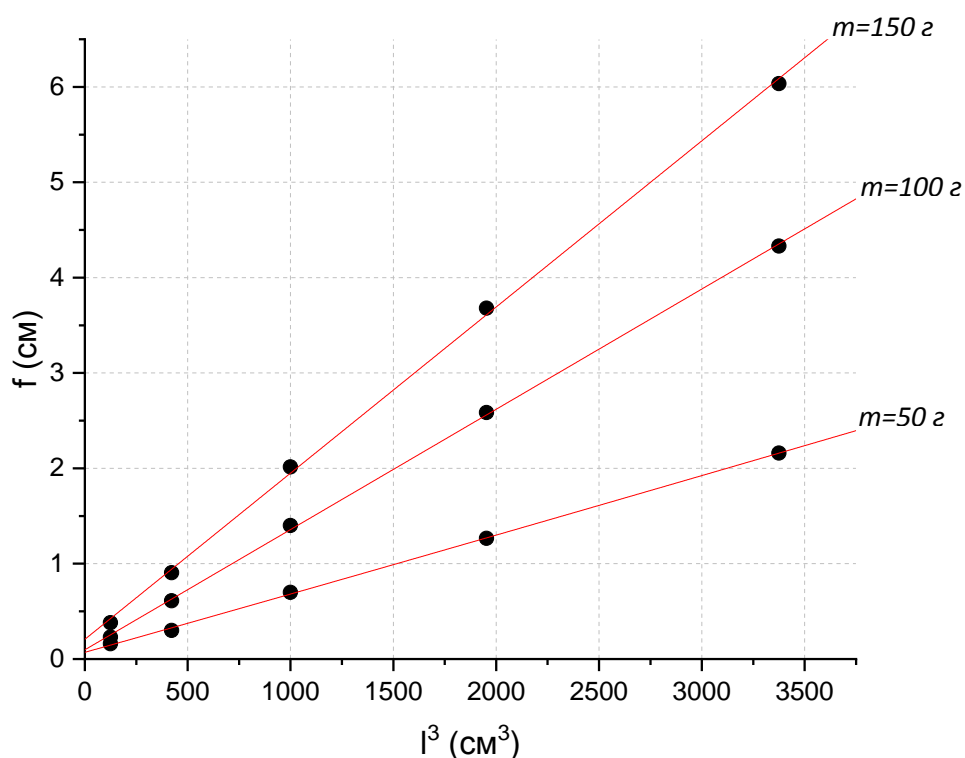


Таблица результатов зависимости $\frac{f}{l}(m, l)$

$\begin{matrix} m, \text{ г} \\ l, \text{ см} \end{matrix}$	50	100	150
5.0	0.032	0.046	0.076
7.5	0.040	0.081	0.121
10.0	0.07	0.14	0.202
12.5	0.101	0.207	0.294
15.0	0.144	0.289	0.402

В наших измерениях наибольший прогиб относительно длины пластины составил 40.2%. Для данной точки формула для величины прогиба пластины будет иметь погрешность в 5.3%.

Модуль Юнга будем находить из графиков $f(m)$:

$$f = am = \frac{mgl^3}{2EI_x} \Rightarrow a = \frac{gl^3}{2EI_x} \Rightarrow E = \frac{gl^3}{2al_x}$$

$$\Delta E = \sqrt{\left(\frac{\partial E}{\partial l} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial a} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{\partial E}{\partial I_x} \cdot \Delta I_x\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\left(\frac{3gl^2}{2aI_x} \cdot \Delta l\right)^2 + \left(\frac{gl^3}{2a^2I_x} \cdot \Delta a\right)^2 + \left(\frac{gl^3}{2aI_x^2} \cdot \Delta I_x\right)^2}$$

За погрешность / взята половина цены деления рулетки (0.5 мм).

$l, \text{ см}$	$a, \frac{\text{м}}{\text{кг}}$	$E \cdot 10^{10}, \text{ Па}$
5.0	0.022 ± 0.005	20 ± 5
7.5	0.0605 ± 0.0009	25 ± 2
10.0	0.132 ± 0.005	27 ± 2
12.5	0.242 ± 0.013	28 ± 3
15.0	0.39 ± 0.03	30 ± 3

$$\bar{E} \approx 26 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

$$\Delta E \approx 3 \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

$$E = (26 \pm 3) \cdot 10^{10} \text{ Па}$$

Анализ результатов

Аппроксимирующие прямые зависимостей $f(m)$ и $f(l^3)$ проходят выше начала координат, что связано с тем, что пластины обладают собственной массой, и, соответственно, имеют малую величину начального изгиба, причём чем больше длина рабочей части пластины, тем выше график относительно начала координат. Из графика $f(m)$ также видно, что при увеличении длины рабочей части пластины точки хуже описывают прямую, т.е. $\frac{f}{l}$ становится достаточно велико, и далее приближённая формула не работает.

Полученное значение модуля Юнга пластины примерно соответствует модулю Юнга стали (табличное значение равно 190—210 ГПа).