№ 9

Число допустимых чисел без дополнительных условий:

$$C_6^9 = 84$$

Если в наборе присутствует цифра 7, то обязательно присутствует либо 6, либо 8.

Посчитаем наборы, где есть 7, но нет 6 и 8. Тогда помимо 7 {1, 2, 3, 4, 5, 9}

$$C_5^6 = 6$$

$$84 - 6 = 78$$

Ответ: 78

№2.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{27}$$

$A = 3I + N$, где $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $N^2 = 0$.

Используем формулу бинома:

$$A^{27} = (3I + N)^{27} = \sum_{k=0}^{27} C_k^{27} (3I)^{27-k} N^k$$

Так как при $N^k = 0$, при $k \geq 0$, поэтому остается $k = 0$, $k = 1$:

$$A^{27} = C_0^{27} (3I)^{27} N^0 + C_1^{27} (3I)^{26} N^1 =$$

$$= 3^{27} I + 27 \cdot 3^{36} N$$

$$A^{27} = 3^{27} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 27 \cdot 3^{26} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 3^{27} & 27 \cdot 3^{26} \\ 0 & 3^{27} \end{pmatrix}$$

Ответ: $A^{27} = \begin{pmatrix} 3^{27} & 27 \cdot 3^{26} \\ 0 & 3^{22} \end{pmatrix}$

№3

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sin\frac{1}{x} + 3\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

При $x \to 0$, $e^{-\frac{1}{|x|}} \to 0$. $3 + \sin\frac{1}{x}$ – ограничена (между 2 и 4), тогда $f(x) \to 0$. Значит f непрерывна в 0.

$$f'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}\left(3 + \sin\frac{1}{x}\right)}{x}$$

Пусть $t = \frac{1}{|x|}$, тогда $|x| = \frac{1}{t}$. $x \to 0 \Rightarrow t \to +\infty$

При $x > 0$: $x = \frac{1}{t}$, тогда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}(3 + \sin t)}{\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty} t e^{-t}(3 + \sin t)$$

$t e^{-t}$, огран. $\Rightarrow$ предел 0

при $x < 0$: $x = -\frac{1}{t}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t}(3 + \sin(-t))}{-\frac{1}{t}} = \lim_{t\to\infty} (-t)e^{-t}(3 - \sin t) \to 0$$

Значит $f'(0) = 0$

Ответ: f дифференцируема в 0 и $f'(0) = 0$

№4

$$F(t) = \int_0^1 x^2 |x-t| \, dx$$

<u>При $t \le 0$:</u> для $x \in [0,1]$ $|x-t| = x-t$

$$F(t) = \int_0^1 x^2 (x-t) \, dx = \int_0^1 (x^3 - tx^2) \, dx =$$

$$= \int_0^1 x^3 \, dx - t \int_0^1 x^2 \, dx = \frac{1}{4} - \frac{t}{3}$$

<u>При $t \ge 1$:</u>

тогда $|x-t| = t-x$ для $x \in [0,1]$

$$F(t) = \int_0^1 x^2 (t-x) \, dx = t \int_0^1 x^2 \, dx - \int_0^1 x^3 \, dx =$$

$$= \frac{t}{3} - \frac{1}{4}$$

При $0 < t < 1$:

$$F(t) = \int_0^t x^2 (t-x) \, dx + \int_t^1 x^2 (x-t) \, dx$$

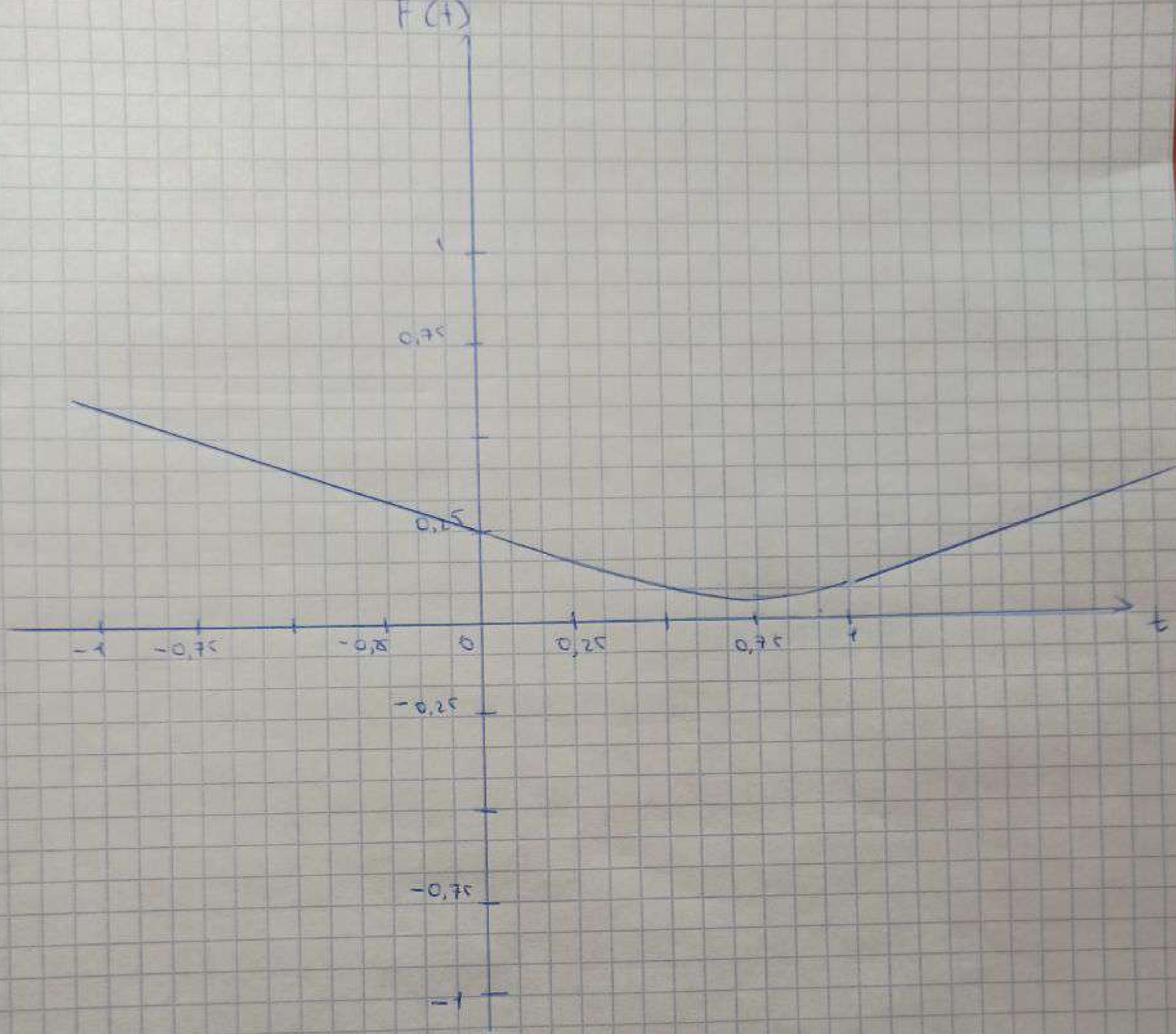
$$\int_0^t (tx^2 - x^3) \, dx = \frac{t^4}{3} - \frac{t^4}{4} = \frac{t^4}{12}$$

$$\int_t^1 (x^3 - tx^2) \, dx = \left(\frac{1}{4} - \frac{t}{3}\right) - \left(\frac{t^4}{4} - \frac{t^4}{3}\right) =$$

$$= \frac{1}{4} - \frac{t}{3} + \frac{t^4}{12}$$

$$F(t) = \frac{1}{4} - \frac{t}{3} + \frac{t^4}{12} + \frac{t^4}{12} = \frac{1}{4} - \frac{t}{3} + \frac{t^4}{6}$$

$$F(t) = \begin{cases} \frac{1}{4} - \frac{t}{3}, & t \le 0 \\ \frac{1}{4} - \frac{t}{3} + \frac{t^4}{6}, & 0 < t < 1 \\ \frac{t}{3} - \frac{1}{4}, & t \ge 1 \end{cases}$$



F (t)
1
0,75
0,25
-0,25
-0,75
-1
-1
-0,75
-0,5
0
0,25
0,75
1
t