

Aufgabe 2:

(a) i. $E \leq Q$

Seien v, u Kodierungen für zwei Turingmaschinen.

Definition von $M_{u,v}$

- 1: **input** $x \in \{0, 1\}^*$
 - 2: Simuliere M_u auf Eingabe x
 - 3: Simuliere M_v auf Eingabe x
 - 4: Falls beide akzeptieren: **reject**
 - 5: Falls beide nicht akzeptieren: **reject**
 - 6: Sonst: **accept**
-

Definiere $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* \# \{0, 1\}^*$ mittels $f(w) := v \# w$

Zu zeigen: $w \in E \iff f(w) \in Q$ für $w \in \{0, 1\}^*$

Zu \Rightarrow : Sei $w \in E$. Dann hält M_w auf keiner Eingabe. Also hält $M_{u,v}$ auf keinem $x \in \{0, 1\}^*$. Dann halten M_u und M_v entweder beide auf jedem x oder beide halten auf keinem. Also gilt $x \in T(M_u) \cap T(M_v)$ oder $x \notin T(M_u) \cap T(M_v)$ für jedes $x \in \{0, 1\}^*$. Es ist somit $T(M_u) = T(M_v)$, also $f(w) \in Q$ für jedes $x \in \{0, 1\}^*$.

Zu \Leftarrow : Sei $w \notin E$. Dann hält M_w auf mindestens einer Eingabe. Also $M_{u,v}$ für alle Eingaben. Dann akzeptiert jeweils nur eine der Turingmaschinen M_u und M_v für die Eingabe x . Es gilt also entweder $x \in T(M_u)$ und $x \notin T(M_v)$ oder anders herum. Also $T(M_u) \neq T(M_v)$ und somit $f(w) \notin Q$.

ii. $H_0 \leq U$ Sei $f(w)$ die Kodierung einer Turingmaschine $M_{f(w)}$.

Definition von $M_{f(w)}$

- 1: **input** $x \in \{0, 1\}^*$
 - 2: Simuliere M_w auf leerer Eingabe.
 - 3: **accept**
-

Definiere $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mittels $f(w) := w'$?

Zu zeigen: $w \in H_0 \iff f(w) \in U$ für $w \in \{0, 1\}^*$

Zu \Rightarrow : Sei $w \in H_0$. Dann hält M_w auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf jedem $x \in \{0, 1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \Sigma^*$, also $f(w) \in U$

Zu \Leftarrow : Sei $w \notin H_0$. Dann hält M_w nicht auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf keinem $x \in \{0, 1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \emptyset$, also $f(w) \notin U$

iii. $U \leq Q$

Seien v, u Kodierungen für zwei Turingmaschinen.

Definition von $M_{u,v}$

- 1: **input** $x \in \{0, 1\}^*$
 - 2: Simuliere M_u auf Eingabe x
 - 3: Simuliere M_v auf Eingabe x
 - 4: Falls beide akzeptieren: **accept**
 - 5: Falls beide nicht akzeptieren: **accept**
 - 6: Sonst: **reject**
-

Definiere $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^* \# \{0, 1\}^*$ mittels $f(w) := v \# w$

Zu zeigen: $w \in U \iff f(w) \in Q$ für $w \in \{0, 1\}^*$

Zu \Rightarrow : Sei $w \in E$. Dann hält M_w auf jeder Eingabe. Also hält $M_{u,v}$ auf jedem $x \in \{0, 1\}^*$. Dann halten M_u und M_v entweder beide auf jedem x oder beide halten auf keinem. Also gilt $x \in T(M_u) \cap T(M_v)$ oder $x \notin T(M_u) \cap T(M_v)$ für jedes $x \in \{0, 1\}^*$. Es ist somit $T(M_u) = T(M_v)$, also $f(w) \in Q$ für jedes $x \in \{0, 1\}^*$.

Zu \Leftarrow : Sei $w \notin E$. Dann hält M_w auf mindestens einer Eingabe nicht. Also $M_{u,w}$ für mindestens eine Eingabe nicht (?). Dann akzeptiert jeweils nur eine der Turingmaschinen M_u und M_v für die Eingabe x . Es gilt also entweder $x \in T(M_u)$ und $x \notin T(M_v)$ oder anders herum. Also $T(M_u) \neq T(M_v)$ und somit $f(w) \notin Q$.

iv. $I \leq U$

Sei $f(w)$ die Kodierung einer Turingmaschine $M_{f(w)}$.

Definition von $M_{f(w)}$

- 1: **input** $x \in \{0, 1\}^*$
 - 2: Simuliere M_w auf Eingabe x .
 - 3: **accept**
-

Definiere $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$ mittels $f(w) := w'$?

Zu zeigen: $w \in H_0 \iff f(w) \in U$ für $w \in \{0, 1\}^*$

Zu \Rightarrow : Sei $w \in I$. Dann hält M_w auf unendlich vielen Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf jedem $x \in \{0, 1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \Sigma^*$, also $f(w) \in U$

Zu \Leftarrow : Sei $w \notin I$. Dann hält M_w nicht auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf keinem $x \in \{0, 1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \emptyset$, also $f(w) \notin U$

(b) H_0 ist semi-entscheidbar, aber nicht co-semi-entscheidbar. E ist unentscheidbar

Aufgabe 4:

- (a) Sei $F := (\exists w(1 + w = m)) \wedge (\exists w'(m + w' + 1 = n)) \wedge (\forall v(\exists k(v * k = m) \wedge \exists k(v * k = n)) \rightarrow v \leq 1)$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ wird

$$\begin{aligned} F(m, n) &\iff m \text{ liegt zwischen } 1 \text{ und } n - 1 \text{ und jede Zahl, die } m \text{ und } n \text{ teilt, ist maximal } 1 \\ &\iff 1 \leq m < n \wedge \text{ggT}(m, n) = 1 \\ &\iff f(n) = m \end{aligned}$$

- (b)