Johannes Heugel (3660353)
Julia Waedt (3654521)

Aufgabe 2:

(a) i. $E \leq Q$ Seien v, u Kodierungen für zwei Turingmaschinen.

Definition von $M_{u,v}$
1: **input** $x \in \{0,1\}^*$
2: Simuliere M_u auf Eingabe x
3: Simuliere M_v auf Eingabe x
4: Falls beide akzeptieren: **reject**
5: Falls beide nicht akzeptieren: **reject**
6: Sonst: **accept**

Definiere $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*\#\{0,1\}^*$ mittels $f(w) := v\#w$

Zu zeigen: $w \in E \iff f(w) \in Q$ für $w \in \{0,1\}^*$

Zu $\Rightarrow$: Sei $w \in E$. Dann hält M_w auf keiner Eingabe. Also hält $M_{u,v}$ auf keinem $x \in \{0,1\}^*$. Dann halten M_u und M_v entweder beide auf jedem x oder beide halten auf keinem. Also gilt $x \in T(M_u) \cap T(M_v)$ oder $x \notin T(M_u) \cap T(M_v)$ für jedes $x \in \{0,1\}^*$. Es ist somit $T(M_u) = T(M_v)$, also $f(w) \in Q$ für jedes $x \in \{0,1\}^*$.

Zu $\Leftarrow$: Sei $w \notin E$. Dann hält M_w auf mindestens einer Eingabe. Also $M_{u,w}$ für alle Eingaben. Dann akzeptiert jeweils nur eine der Turingmaschinen M_u und M_v für die Eingabe x. Es gilt also entweder $x \in T(M_u)$ und $x \notin T(M_v)$ oder anders herum. Also $T(M_u) \neq T(M_v)$ und somit $f(w) \notin Q$.

ii. $H_0 \leq U$ Sei $f(w)$ die Kodierung einer Turingmaschine $M_{f(w)}$.

Definition von $M_{f(w)}$
1: **input** $x \in \{0,1\}^*$
2: Simuliere M_w auf leerer Eingabe.
3: **accept**

Definiere $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mittels $f(w) := w^{'}$?

Zu zeigen: $w \in H_0 \iff f(w) \in U$ für $w \in \{0,1\}^*$
Zu $\Rightarrow$: Sei $w \in H_0$. Dann hält M_w auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf jedem $x \in \{0,1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \Sigma^*$, also $f(w) \in U$

Zu $\Leftarrow$: Sei $w \notin H_0$. Dann hält M_w nicht auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf keinem $x \in \{0,1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \emptyset$, also $f(w) \notin U$

iii. $U \leq Q$