Aufgabe 2:

(a) i. $E \leq Q$

Seien v, u Kodierungen für zwei Turingmaschinen.

Definition von $M_{u,v}$
input $x \in \{0,1\}^*$
Simuliere M_u auf Eingabe x
Simuliere M_v auf Eingabe x
Falls beide akzeptieren: **reject**
Falls beide nicht akzeptieren: **reject**
Sonst: **accept**

Definiere $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^* \# \{0,1\}^*$ mittels $f(w) := v\#w$

Zu zeigen: $w \in E \iff f(w) \in Q$ für $w \in \{0,1\}^*$

Zu $\Rightarrow$: Sei $w \in E$. Dann hält M_w auf keiner Eingabe. Also hält $M_{u,v}$ auf keinem $x \in \{0,1\}^*$. Dann halten M_u und M_v entweder beide auf jedem x oder beide halten auf keinem. Also gilt $x \in T(M_u) \cap T(M_v)$ oder $x \notin T(M_u) \cap T(M_v)$ für jedes $x \in \{0,1\}^*$. Es ist somit $T(M_u) = T(M_v)$, also $f(w) \in Q$ für jedes $x \in \{0,1\}^*$.

Zu $\Leftarrow$: Sei $w \notin E$. Dann hält M_w auf mindestens einer Eingabe. Also $M_{u,w}$ für alle Eingaben. Dann akzeptiert jeweils nur eine der Turingmaschinen M_u und M_v für die Eingabe x. Es gilt also entweder $x \in T(M_u)$ und $x \notin T(M_v)$ oder anders herum. Also $T(M_u) \neq T(M_v)$ und somit $f(w) \notin Q$.

ii. $H_0 \leq U$ Sei $f(w)$ die Kodierung einer Turingmaschine $M_{f(w)}$.

Definition von $M_{f(w)}$
input $x \in \{0,1\}^*$
Simuliere M_w auf leerer Eingabe.
accept

Definiere $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ mittels $f(w) := w'$?

Zu zeigen: $w \in H_0 \iff f(w) \in U$ für $w \in \{0,1\}^*$
Zu $\Rightarrow$: Sei $w \in H_0$. Dann hält M_w auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf jedem $x \in \{0,1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \Sigma^*$, also $f(w) \in U$

Zu $\Leftarrow$: Sei $w \notin H_0$. Dann hält M_w nicht auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf keinem $x \in \{0,1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \emptyset$, also $f(w) \notin U$

iii. $U \leq Q$
Seien v, u Kodierungen für zwei Turingmaschinen.

Definition von $M_{u,v}$
input $x \in \{0,1\}^*$
Simuliere M_u auf Eingabe x
Simuliere M_v auf Eingabe x
Falls beide akzeptieren: **accept**
Falls beide nicht akzeptieren: **accept**
Sonst: **reject**

Definiere $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*\#\{0,1\}^*$ mittels $f(w) := v\#w$

Zu zeigen: $w \in U \iff f(w) \in Q$ für $w \in \{0,1\}^*$

Zu $\Rightarrow$: Sei $w \in E$. Dann hält M_w auf jeder Eingabe. Also hält $M_{u,v}$ auf jedem $x \in \{0,1\}^*$. Dann halten M_u und M_v entweder beide auf jedem x oder beide halten auf keinem. Also gilt $x \in T(M_u) \cap T(M_v)$ oder $x \notin T(M_u) \cap T(M_v)$ für jedes $x \in \{0,1\}^*$. Es ist somit $T(M_u) = T(M_v)$, also $f(w) \in Q$ für jedes $x \in \{0,1\}^*$.

Zu $\Leftarrow$: Sei $w \notin E$. Dann hält M_w auf mindestens einer Eingabe nicht. Also $M_{u,w}$ für mindestens eine Eingabe nicht (?). Dann akzeptiert jeweils nur eine der Turingmaschinen M_u und M_v für die Eingabe x. Es gilt also entweder $x \in T(M_u)$ und $x \notin T(M_v)$ oder anders herum. Also $T(M_u) \neq T(M_v)$ und somit $f(w) \notin Q$.

iv. $I \leq U$
Sei $f(w)$ die Kodierung einer Turingmaschine $M_{f(w)}$.

Definition von $M_{f(w)}$
input $x \in \{0,1\}^*$
Simuliere M_w auf Eingabe x.
accept

Definiere $f : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*, x \longmapsto f(w)$

Zu zeigen: $w \in H_0 \iff f(w) \in U$ für $w \in \{0,1\}^*$
Zu $\Rightarrow$: Sei $w \in I$. Dann hält M_w auf unendlich vielen Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf jedem $x \in \{0,1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \Sigma^*$, also $f(w) \in U$

Zu $\Leftarrow$: Sei $w \notin I$. Dann hält M_w nicht auf leerer Eingabe. Also hält $M_{f(w)}$ auf keinem $x \in \{0,1\}^*$. Somit ist $T(M_{f(w)}) = \emptyset$, also $f(w) \notin U$

(b) H_0 ist semi-entscheidbar, aber nicht co-semi-entscheidbar. E ist co-semi-entscheidbar, aber nicht semientscheidbar. wegen i) ist Q somit auch nicht semientscheidbar. Dadurch ist auch I nicht semientscheidbar.

Aufgabe 4:

(a) Sei $F := (\exists w(1+w = m)) \wedge (\exists w^{'}(m+w^{'}+1 = n)) \wedge (\forall v(\exists k(v*k = m) \wedge \exists k(v*k = n)) \to v \leq 1)$

Für $m, n \in \mathbb{N}$ wird

$$\begin{aligned}
F(m,n) &\iff m \,\text{liegt zwischen}\, 1 \,\text{und}\, n-1 \text{und jede Zahl, die}\, m \,\text{und}\, n \,\text{teilt, ist maximal}\, 1 \\
&\iff 1 \leq m < n \wedge ggT(m,n) = 1 \\
&\iff f(n) = m
\end{aligned}$$

(b)