Малые колебания в окр-ти п.р.

- Консерв. сист.
- n степ. своб.
- имеет полож. равнов.
- $\Pi = \Pi(q)$ – аналитична в полож. равновесия.

  - $\Pi = \Pi_0 + \Pi_1 + \Pi_2 + \dots$
  - $\exists \Pi = \Pi_2 + \dots > 0$, тогда полож. равнов уст. (1)
  - $\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0$
  - $T = \frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}(q_1, \dots, q_n)\dot q_i \dot q_k$,

    где $a_{ik}(q_1, \dots, q_k) = a_{ik}(0, \dots, 0) + \dots$

    $T = \frac{1}{2}\sum_{k,i=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k + \dots$ (2)'

$S^T A S$

- $T = \sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k$ ← в силу малости колебаний мы можем это выбрать

  $\Pi = \sum_{i,k}^{n} c_{ik} q_i q_k$ (3)

$S^T C S$

$L = T - \Pi \Rightarrow \sum_{i,k=1}^{n}(a_{ik}\ddot q_k + c_{ik} q_k) = 0, \ i = \overline{1,n}$ (4)

Тогда переписывая через матрицы соотв. квадр. форм получим: $\boxed{A\ddot{\bar q} + C\bar q = 0}$

Конспект:

Нормальные (ортог.) колебания

Приведем полученные ур-я к диаг. виду и рассматриваем проек.

Т.к. Кин. энергия опр. положительна, то приведём к диаг. баз.

$k_A(\bar{q}) = (A\bar{q}, \bar{q})$ | Выберем: $\bar{\Theta} = \left\| \begin{matrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{matrix} \right\|$: $\bar{q} = U\bar{\Theta}$

$k_c(\bar{q}) = (C\bar{q}, \bar{q})$

где: $(A\dot{\bar{q}}, \dot{\bar{q}}) = \sum_{j=1}^{n} \dot{\Theta}_j^2$

$(C\bar{q}, \bar{q}) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \Theta_j^2$ (8)

В новых коорд:

$T = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \dot{\Theta}_i^2$

$П = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} k_i \Theta_j^2$

$\bar{q} = \sum_{i,k=1}^{n} \Theta_j \bar{u}_j$ (9) собственн. матрицы

$(A\bar{u}_i, \bar{U}_j) = \begin{cases} 1, & \text{если } i=j \\ 0, & \text{если } i \neq j \end{cases}$ (10)

Итого: $\boxed{\ddot{\Theta}_i + \lambda_i \Theta_i = 0}$ (11)

(13): $\Theta_i = C_j \sin(\omega_i t + \alpha_i)$

колебания происх. как n незав. гарм. осцилляторов.

$\bar{q} = \sum_{i=1}^{n} c_i \bar{u}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$ (14)

$\exists\ \bar{q} = c_i \bar{u}_i \sin(\omega_i t + \alpha_i)$ амплитудные векторы.

Уравнение частот (вековое ур-е): $\|C - \lambda A\|\bar{u} = 0$,

$\det\|C - \lambda A\| = 0$

Конспект:

Колебания системы под действием внешних периодических сил.

Рассмотрим работу сил на в.п.:

почему число координат равно числу

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \delta q_i = \sum_{j=1}^{n} \Theta_j \delta \theta_j$$

$$\overline{\Theta} = \begin{Vmatrix} \Theta_1 \\ \vdots \\ \Theta_n \end{Vmatrix}$$

$$q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \theta_j$$

$$\delta q_i = \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \delta \theta_j$$

$$\delta A = \sum_{i=1}^{n} Q_i \sum_{j=1}^{n} u_{ij} \delta \theta_j = \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\left(\sum_{i=1}^{n} u_{ij} Q_i \right)}_{\Theta_j} \delta \theta_j ,$$

т.е.:

$$\ddot{\theta}_j + \omega_j^2 \theta_j = \Theta_j(t) \qquad (1)$$

- $\exists\ \Theta_j$ имеет период $\frac{2\pi}{\Omega}$, где Ω - частота внешней силы.
- $\exists\ \Theta_j(t) = \sum_{k=0}^{\infty} A_{jk} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk}) \quad (2)$

↑ рассмотрено четырьмя Θ

- $\exists\ \theta_j = C_j \sin(\omega_j t + \alpha_j) + \theta_j^*(t)$
- $\exists\ \theta_j^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A_{jk}}{\omega_j^2 - k^2\Omega^2} \sin(k\Omega t + \alpha_{jk})$,

тогда:

$$\bar{q} = \underbrace{\sum_{j=1}^{n} C_j \bar{v}_j \sin(\omega_j t + \alpha_j)}_{\text{собст.}} + \underbrace{\sum_{j=1}^{n} \theta_j^*(t) \bar{u}_j}_{\text{вынужд.}}$$

Конспект:

Пусть система склерономна:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} a_{ik}(q_1,\dots,q_n)\dot q_i \dot q_k \qquad (1)$$

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot q_i}-\frac{\partial T}{\partial q_i}=Q_i(q,\dot q) \qquad (2)$$

В положении равновесия: $q_1=\dots=q_n=0$, тогда:

$$T=\frac{1}{2}\sum_{i,k=1}^{n} a_{ik}\dot q_i \dot q_k \qquad (3)$$

$$Q_i=\underbrace{Q_i(0,\dots,0)}_{Q_0=0}+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q_i}{\partial q_k}dq_k\right)+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial Q}{\partial \dot q_k}\right)d\dot q_k+\dots$$

Тогда введём обобщ. силу через след. обозначения:

$$Q_i=-\sum_{k=1}^{n}(c_{ik}q_k+b_{ik}\dot q_k) \qquad (4)$$

где малые порядка и выше их геом. смысл.

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}\ddot q_k+b_{ik}\dot q_k+c_{ik}q_k)=0}\quad, i\in\overline{1,n} \qquad (5)$$

Обозначая $A=\|a_{ik}\|_{i,k=1}^{n}$; $B=\|b_{ik}\|$; $C=\|c_{ik}\|$; $\bar q=\begin{pmatrix}q_1\\ \vdots\\ q_n\end{pmatrix}$, тогда:

$$A\ddot{\bar q}+B\dot{\bar q}+C\bar q=0, \qquad (6)$$

будем считать: $\bar q=\bar u\, e^{\varkappa t}$

$$\|A\varkappa^2+B\varkappa+C\|\bar u=0 \qquad (7)$$

Для наличия нетрив. решения: $\det\|A\varkappa^2+B\varkappa+C\|=0$, $\qquad (8)$

$$\bar q_i=\bar u_i e^{\varkappa_i t}$$

$$\bar q=\sum_{j=1}^{2n} c_j \bar u_j e^{\varkappa_j t} \qquad (9)$$

Коммент:

• Пусть действует внешняя сила.

Пусть сила действует только по первой коорд.:

$$A\ddot{\bar q} + B\dot{\bar q} + C\bar q = \bar Q(t) \qquad (10)$$

$Q_2 \equiv Q_3 \equiv 0;\ Q_1 \not\equiv 0$, тогда: $\tilde Q_1 = \alpha e^{i\omega t}$

$Q_1 = \operatorname{Im} \tilde Q_1$

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{1k}\ddot q_k + b_{1k}\dot q_k + c_{1k} q) = \alpha e^{i\omega t} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} (a_{jk}\ddot q_k + b_{jk}\dot q_k + c_{jk} q) = 0, \quad \text{где } j \in \overline{2,n} \end{cases}$$

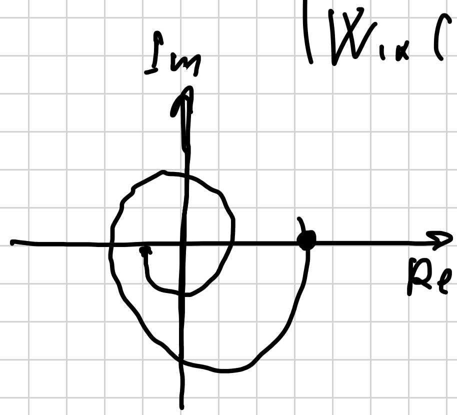
Решение: $\bar q = \sum\limits_{l=1}^{2n} c_l \bar v_l e^{\lambda_l t} + \bar q^*$; $\bar q^* = \operatorname{Im} \tilde{\bar q}^*$

$\bar q^* = \left\| \begin{matrix} \tilde q_1^* \\ \dots \\ \tilde q_n^* \end{matrix} \right\|$; $\tilde q_k^* = \tilde\beta_k e^{i\omega t}$;

$$\begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} [a_{1k}(i\omega)^2 + b_{1k}(i\omega) + c_{1k}]\,\tilde\beta_k = \alpha \\ \sum\limits_{k=1}^{n} [a_{jk}(i\omega)^2 + b_{jk}(i\omega) + c_{jk}]\,\tilde\beta_k = 0 \end{cases}$$

$$\tilde\beta_k = \underbrace{W_{1k}(i\omega)}_{\text{АФХ}}\,\alpha = \frac{\Delta_{1k}(i\omega)}{\Delta(i\omega)}$$

$|W_{1k}(i\omega)| = R_{1k}(\omega)$; $W_{1k}(i\omega) = R_{1k}(\omega) e^{i\varphi_{1k}(\omega)}$



$q_k^* = \alpha R_{1k}(\omega)\sin(\omega t + \varphi_{1k}(\omega))$