Арнольд диффуры (мехмат конспект)

- Эпсилонь

Зависимость от параметра и Н.У.

Дифференц. от параметра: $\begin{cases} y' = f(x, y, \mu) \\ y(x_0, \mu) = y_0 \end{cases}$

Условия дифф-ти от параметра (непр. диф-ть):

1) $\exists\ f \in C(G \times I_\mu)$, $I_\mu = [\mu_1, \mu_2]$

2) $\exists\ \exists f'_y; f'_\mu \in C(G \times I_\mu)$

Тогда решение сущ. и ед. и реш. явл. эл-ь ф-ей по x и μ:

1) $y = \varphi(x, \mu)$; $\varphi \in C^1(I_x \times I_\mu)$

2) $\exists\ \varphi''_{x\mu} = \varphi''_{\mu x}$

3) $z := \frac{\partial \varphi}{\partial \mu} \Rightarrow z$ удовлетворяет ур-ю в вариациях.

$$z'_x = \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot z$$

Пример

$\begin{cases} y' = y + m(x + y^2) \\ y(0) = 1 \end{cases}$

Найти $\left.\frac{\partial y}{\partial m}\right|_{m=0}$.

$(y'_x)'_m = y'_m + (x + y^2) + 2my\,y'_m$

$z'_x = z + (x + y^2) + 2myz$

$z'_x(x, m) = z(x, m) + x + y^2(x, m) + 2my(x, z)z$

$z'_x(x, 0) = z(x, 0) + (x + y(x, 0)^2) + 0$

$y' = y \Rightarrow y = Ce^x$; $C = 1$

$z'_x = z + x + e^{2x}$

$z = Ce^{x} - x + 1 + e^{2x}$

Т.к. $Y'_m = 0 \big|_{m=0}$, то:

$z(0) = 0$, и $Y'_m(0,m) = 1'_m = 0$

$z = e^{2x} - x - 1$

№1065 $\frac{\partial Y}{\partial m}\Big|_{m=0}$ где $\begin{cases} Y' = 2x + my^2 \\ y(0) = m-1 \end{cases}$

$z'_x = \frac{\partial f}{\partial \mu} + \frac{\partial f}{\partial y}\cdot z$, где $z = \varphi'_\mu = \frac{\partial Y}{\partial m}$

• $z'_x(x,m) = y^2 + 2myz$ | $Y'(x,0) = 2x$

$z'_x(x,0) = y^2(x,0)$ | $Y(x,0) = x^2 + C$

$y(0,0) = -1 \Rightarrow y(x,0) = x^2 - 1$,

тогда: $z'_x(x,0) = (x^2-1)^2 = x^4 - 2x^2 + 1$ | $z(0,m) = 1$

$z(x,0) = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + C_1$, $C_1 = 1$ | $z(0,0) = 1$

$$z = \frac{x^5}{5} - \frac{2x^3}{3} + x + 1 \quad //$$

№3 $\begin{cases} Y' = 4mx - Y^2 \\ Y(1) = 1 \end{cases}$ **I** $y(x,0)$ - ? $\frac{\partial Y}{\partial m}(x,0)$ - ?

Ищем ответ в виде ф-лы Тейлора

$Y = Y(x,m)$

$Y(x,m) = Y_0(x) + Y_1(x)\cdot m + Y_2(x)m^2 + Y_3(x)m^3 + \ldots$

• $Y_0'(x) + Y_1'(x)m + \ldots = 4m(x) - (Y_0^2(x) + 2Y_0Y_1m + \ldots)$

I.1 $\begin{cases} Y_0'(x) = -Y_0^2(x) \\ y_1'(x) = 4x - 2Y_0Y_1 \end{cases}$ — ур-е в вариациях на y_0 и y_1

$I \to I_1, I_2$

Тогда: $\begin{cases} Y_0(1) = 1 \\ Y_1(1) = 0, \end{cases}$ **I.2**

• $-\frac{dY}{Y^2} = dx$

$\frac{1}{Y} = x + C \Rightarrow C = 0$, т.е. $Y_0(x) = \frac{1}{x}$

• $Y_1'(x) = 4x - \frac{2}{x}Y_1(x)$ | $\Rightarrow Y_1(x) = x^2 - \frac{1}{x^2}$

$y_1 = \frac{C}{x^2}$, $Y_1(1) = 0$ $\Rightarrow C = -1$

№ 4 Найти $\frac{\partial \varphi}{\partial a}\Big|_{a=1}$; $\frac{\partial \varphi}{\partial b}\Big|_{b=0}$ $\varphi(x, a, b)$ — реш.

$$\begin{cases} y'' = y + 3\sin y & (1) \\ y(0) = a; \ y'(0) = b & (2)\ (3) \end{cases}$$

Реш:

• $y = y_0(x) + y_1(x)a + y_2(x)b + \ldots$ (*)

Подставим (*) в (1): $y_0''(x) + y_1''(x)\cdot a + y_2''(x)\cdot b + \ldots = y_0(x) + y_1(x)\cdot a + y_2(x)\cdot b +$

$+ 3(y_0(x) + y_1(x)a + y_2(x)b + \ldots) + \underbrace{\ldots}_{\text{члены порядка } \geq 3}$

№5 $\left.\dfrac{\partial \varphi(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}$ – ? где $\begin{cases} y' = 2y + x^2y^2 - y^3 \\ y(0) = y_0 \end{cases}$