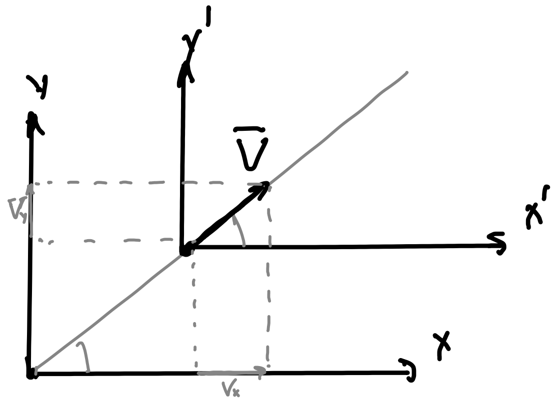

№1

$\bar r_{\parallel} = (\bar r\cdot\bar V)\,\bar V/V^2$

$\bar r_{\perp} = \bar r - \bar r_{\parallel}$

- Записать матр. преобр. Лоренца от K к K'
- Опр. положение осей (x', y') в сист. K в момент $t=0$

- Если скорость направлена вдоль координаты, то преобразование координат описывается так:

$$\begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta\gamma \\ \beta\gamma & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t' \\ x' \end{pmatrix} \quad (1)$$

$$E^2 = p^2c^2 + m^2c^4$$

$$\gamma^2 - \beta^2\gamma^2 = 1 \quad (2)$$

$$\gamma^2 = \frac{1}{1-\beta^2}$$

$$\begin{cases} r'_{\parallel} = \gamma\left(r_x - \frac{v}{c}t\right) \\ t' = \gamma\left(t - \frac{1}{c^2}(v, r_{\parallel})\right) \end{cases} \quad (3)$$

$$\bar r - \frac{(r v)}{v^2}\bar v = \bar r' - \gamma\left(\frac{(r v)}{v^2} v - vt\right) \quad (4)$$

Итого: выражаем из (4) проекции на оси и получаем:

$$\begin{cases} r' = r + (\gamma-1)\frac{(\bar r\bar v)}{v^2} v - \gamma\bar v t \\ x' = x + (\gamma-1)\frac{r_x v_x + r_y v_y}{v^2} v_x - \gamma v_x t \end{cases}$$

После преобразований получим преобразование матриц:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + (\gamma-1)\left(\frac{v_x}{v}\right)^2 & (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & -\gamma v_x/c \\ (\gamma-1)\frac{v_x v_y}{v^2} & 1 + (\gamma-1)\left(\frac{v_y}{v}\right)^2 & -\gamma v_y/c \\ -\gamma\frac{v_x}{c} & -\gamma\frac{v_y}{c^2} & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ t \end{pmatrix}}_{\text{Ответ}}$$

№2

а) $\delta_\lambda^\beta \delta_\beta^\gamma \delta_\alpha^\lambda = \delta_\lambda^\gamma \delta_\alpha^\lambda = \delta_\alpha^\gamma$ скал. произв., зад. римановой метрикой

б) • $\varepsilon_{ijk} e^{mnk} = \sqrt{\det G}\, E^{ijk} \sqrt{\det G^{-1}}\, E_{mnk} = E^{ijk} E_{mnk} =$

соответствующая тензору Леви – Чивиты [illegible]

$$= \delta^{ij}_{mn} = \begin{vmatrix} \delta^i_m & \delta^i_n \\ \delta^j_m & \delta^j_n \end{vmatrix} = \delta^i_m \delta^j_n - \delta^i_n \delta^j_m$$

• $\varepsilon^{ijk} e_{jkl} = \delta^i_k \delta^j_j - \delta^i_j \delta^j_m = 2\delta^i_l$

• $\varepsilon_{ijk} \varepsilon^{ijk} = 2 \cdot \delta^i_i = 6$

в) $$\varepsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \varepsilon^{\mu\nu\kappa\lambda} = \left[e^{iklm} e_{prst} = - \begin{vmatrix} \delta^i_p & \delta^i_r & \delta^i_s & \delta^i_t \\ \delta^k_p & \delta^k_r & \delta^k_s & \delta^k_t \\ \delta^l_p & \delta^l_r & \delta^l_s & \delta^l_t \\ \delta^m_p & \delta^m_r & \delta^m_s & \delta^m_t \end{vmatrix} \right] = -2(\delta^\kappa_\rho \delta^\lambda_\sigma - \delta^\kappa_\sigma \delta^\lambda_\rho)$$

• Проверка: $\bar c = [\bar a, \bar b] \Leftrightarrow c_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$

Пусть a_i, b_i, c_i – соотв. коорд., тогда:

$$[\bar a, \bar b] = \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sqrt{\det G} \begin{vmatrix} g^{1i} e_i & g^{2j} e_j & g^{3k} e_k \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \sqrt{\det G^{-1}} \begin{vmatrix} \bar e_1 & \bar e_2 & \bar e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \sqrt{\det G}\, E^{mnp} g_{mi} g_{nj} g_{pk} a^i b^j \bar e^k = \sqrt{\det G^{-1}}\, E^{mnp} a_m b_n \bar e_p \qquad (1)$$

Из соотношения (1) также получаем выражение для координат векторного произведения:

$$\bar c = [\bar a \times \bar b] = \sqrt{\det G}\, E_{ijk} a^i b^j \bar e^k = \varepsilon_{ijk} a^i b^j \bar e^k,$$

тогда: $c_i = \varepsilon_{ijk} a^j b^k$

• Заметим, что δ^ν_μ и ε_{ijk} инвариантны относительно замены координат, т.е. относительно преобр. замены коорд.

• $d^4x = c\, dt\, dx\, dy\, dz$ – инвариантен при поворотах, преобр. Лоренца и конф – доделать.

№3

1) $\operatorname{rot}\operatorname{rot}\bar{A} = [\nabla \times [\nabla \times a]] = \bar{\nabla}\cdot(\nabla\cdot a) - \bar{a}\,(\bar{\nabla}\cdot\bar{\nabla}) = \operatorname{grad}\operatorname{div}\bar{a} - \Delta\bar{a}$

2) $\operatorname{rot}[\bar{a},\bar{b}] = \bar{a}\operatorname{div}\bar{b} - \bar{b}\operatorname{div}\bar{a} - (\bar{a}\cdot\bar{\nabla})\bar{b} + (\bar{b}\cdot\bar{\nabla})\bar{a}$

3) $\operatorname{rot}(f\cdot\bar{A}) = \operatorname{grad}\cdot\operatorname{div} f\bar{A} - \Delta f\bar{A} = \operatorname{grad}\cdot(\bar{\nabla}\cdot(f\cdot A)) - (\Delta f)\cdot\bar{A} - f\Delta\bar{A} =$

$= [\operatorname{grad} f \times \bar{A}] + f\operatorname{rot}\bar{A}$

4) Аналогично:

$$\operatorname{div}(f\bar{A}) = (\operatorname{grad} f\cdot\bar{A}) + f\operatorname{div}\bar{A}$$

5) $\operatorname{div}[\bar{a},\bar{b}] = [\text{подставляем (2)}] = \bar{b}\operatorname{rot}\bar{a} - \bar{a}\cdot\operatorname{rot}\bar{b}$

6) $\operatorname{grad}(\bar{a}\cdot\bar{b}) = [\bar{a}\times\operatorname{rot}\bar{b}] + [\bar{b}\times\operatorname{rot}\bar{a}] + (\bar{a}\cdot\bar{\nabla})\bar{b} + (\bar{b}\cdot\bar{\nabla})\bar{a}$

Вычислить: a) $\operatorname{rot}(\bar{k}\, e^{i\bar{k}\bar{r}}) = \operatorname{rot}(\bar{k}\cdot e^{ik_m r_n \delta^{mn}}) =$

$\bar{k} = k_i \bar{e}^i$
$\bar{r} = r_j \bar{e}^j$

$$= [\operatorname{grad}(e^{i\bar{k}\bar{r}}) \times \bar{k}] + e^{i\bar{k}\cdot\bar{r}}\cdot\operatorname{rot}\bar{k} =$$

$$= [\eta^{mn}\bar{e}_m \partial_n (e^{i\bar{k}\bar{r}}) \times \bar{k}] + e^{i\bar{k}\bar{r}}\operatorname{rot} k = \qquad (2)$$

$\parallel A$

$$A = \eta^{mn}\bar{e}_m \frac{\partial(e^{ik_p r_l \bar{e}^p \bar{e}^l})}{\partial e_n} \times \bar{k} = \eta^{mn}\bar{e}_m \cdot \frac{\partial(k_p r_l \bar{e}^p \bar{e}^l)}{\partial e_n}\cdot$$

$$\cdot e^{i\bar{k}\bar{r}} \times \bar{k} = \eta^{mn}\bar{e}_m \cdot k_p \left(\bar{e}^p \cdot \frac{\partial r_l \bar{e}^l}{\partial e_n}\right) \cdot e^{i\bar{k}\bar{r}} \times \bar{k} =$$

$$= \eta^{mn}\bar{e}_m \cdot k_p\, \delta^{pl} \cdot \frac{\partial r_l}{\partial e_n} \cdot e^{i\bar{k}\bar{r}} \times k \qquad (*)$$

Подставляя (*) в (2)

получаем ответ

$\bullet\ \operatorname{grad}(\bar{k}\cdot\bar{r}) = \operatorname{grad}(k_i r_j \underbrace{\bar{e}^i\bar{e}^j}_{\delta^{ij}}) = k_i \delta^{ij} \frac{\partial r_j}{\partial e_k}\bar{e}^k$

δ) $\operatorname{grad}\frac{1}{r} = \left[\varphi = \frac{1}{r}\right] = \eta^{mn}\,\bar{e}_m\,\partial_n\varphi = \eta^{mn}\,\bar{e}_m\,\partial_n\left(\frac{1}{r}\right) = \bar{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)$