# 1 Симметрии

02.02.2022, 09:34

Симметрия — преобразование координат, заданных на многообразии, обобщённые коорд. которой задают все положения системы.

## Примеры преобр. Т.П.:

0) $\varphi'(x') = \varphi(x)$

1) $A'_\mu(x') = \frac{\partial x_\mu}{\partial x'_\mu} A_\mu(x)$

- $\sum_\mu A'^\mu(x') \otimes B'_\mu(x) = \sum_\mu A_\mu(x) \otimes B^\mu(x)$
- $\delta^{\mu'}_{\lambda'} = \delta^\mu_\lambda$

I

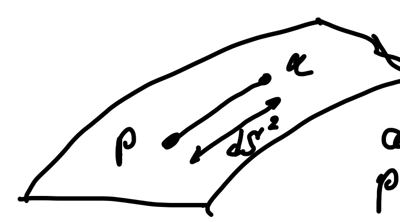
Литература:
- Дубровин; Новиков; Фоменко
  совр. геометрия

$x^{\mu'} = x^\mu(x')$ — общековариантные преобр.

## Вводим метрику:

- Рассмотрим метрику: 1) $g_{\mu\nu}(x) = g_{\nu\mu}(x)$

$d s^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$




a: $\{x^\mu\}$ — коорд.
p: $\{x^\mu + dx^\mu\}$ — коорд.

Для плоского: $g_{\mu\nu}(x) = g_{\mu\nu} = const$

$$\underbrace{g_{\mu\nu}}_{= const} = \frac{\partial x^p}{\partial x'^\mu} \cdot \frac{\partial x^q}{\partial x'^\nu} \underbrace{g_{pq}}_{= const} \Rightarrow \frac{\partial x^p}{\partial x'^\mu}, \frac{\partial x^q}{\partial x'^\nu} = const$$

← помимо каждая из скобок равна нулю

$\boxed{X^\nu = \Lambda^\nu_\mu X'^\mu}$ — линейное

↑ $GL(n)$

Рассматриваем фиксирован. индексов, где идёт отсутствие части индекс.

- $g_{\mu\nu} = \Lambda^p_\mu g_{pq} \Lambda^q_\nu$

- $G = diag[\underbrace{1, \dots, 1}_{t}, \underbrace{-1, \dots, -1}_{s}]$, где $G = \Lambda^T G \Lambda \to$ группа $O(t, s)$ - орт. матриц.

При выбранных обозначениях:

I: $\begin{cases} \Lambda^\mu{}_\nu = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\nu}; \quad x^{\mu'} = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \\ \Lambda^\mu{}_\nu \Lambda^\nu{}_\rho = \delta^\mu_\rho \end{cases}$

↑ доразобраться в порядке.

- Преобразования для обратной матрицы:
  - $g_{\mu\rho} g^{\nu\rho} = \delta_{\mu}^{\nu}$; (1)
  - Воспользуемся преобразованием:

$$g_{\mu\nu} = \Lambda_{\mu}{}^{\rho} g_{\rho\sigma} \Lambda_{\nu}{}^{\sigma} \quad (3)$$

$$\Lambda^{\mu}{}_{\rho} \cdot \Lambda_{\nu}{}^{\rho} = \delta^{\mu}_{\nu} \quad (2)$$

Подставляем в (3) (1) и (2):

$$\delta_{\mu}^{\nu} = g_{\mu\rho} \cdot g^{\nu\rho} = (g^{\nu\rho} \Lambda_{\mu}^{\rho} g_{\rho\sigma}) \Lambda_{\nu}^{\sigma} \quad (4)$$

Из (2) и (4) получаем: $g^{\nu\rho} \Lambda_{\mu}^{\rho} g_{\rho\sigma} = \Lambda^{\mu}_{\sigma}$ ← проверить.

## Краткие выводы:

# 3. Группа Лоренца

$$g_{\mu\nu} = diag(1;-1) = \eta_{\mu\nu} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a & c\\ b & d\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}a & b\\ -c & -d\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a^2-c^2 & ab-cd\\ ab-cd & b^2-d^2\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2-c^2=1\\ b^2-d^2=1\\ ab=cd \quad (\Rightarrow b=\frac{c}{a}d)\end{cases}$$

$a=\varepsilon_1 ch(\eta)$, $c=\varepsilon_1\varepsilon_2 sh(\eta)$ — получаем такие решения системы.

$$g_{\mu\nu} = diag(+1;+1) = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2+c^2=1\\ b^2+d^2=1\\ ab=-cd\end{cases}$$

$a=\varepsilon_1 \cos\theta$, $c=\varepsilon_1\varepsilon_2 \sin\theta$ — получаем такие решения системы.

$$\eta = \Lambda^T \eta \Lambda$$

$$\Lambda = \begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$$

Варианты на $\Lambda$:

| | ++ | +− | −+ | −− |
|---|---|---|---|---|
| $\Lambda$ | $\begin{bmatrix}ch & sh\\ sh & ch\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}ch & sh\\ -sh & -ch\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-ch & sh\\ -sh & ch\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-ch & sh\\ sh & -ch\end{bmatrix}$ |
| $\det\Lambda$ | 1 | −1 | −1 | 1 |
| $\eta=0$ | $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ | $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ |
| | Id | T | P | TP |

гиперболические ф-и применяем к $\eta$

$$\Lambda = \begin{bmatrix}\varepsilon_1 ch\eta & sh\eta\\ \varepsilon_1\varepsilon_2 sh\eta & \varepsilon_2 ch\eta\end{bmatrix}$$

преобразование времени и коорд.

## Конспект:

Типы преобраз:

- $SO(2)$
- $SO(1,3)$

Далее рассмотрим преобразования:

$$\Lambda = \begin{bmatrix} ch\,\eta & sh\,\eta \\ sh\,\eta & ch\,\eta \end{bmatrix} \qquad x^{\mu} = \begin{bmatrix} t \\ x \end{bmatrix}$$

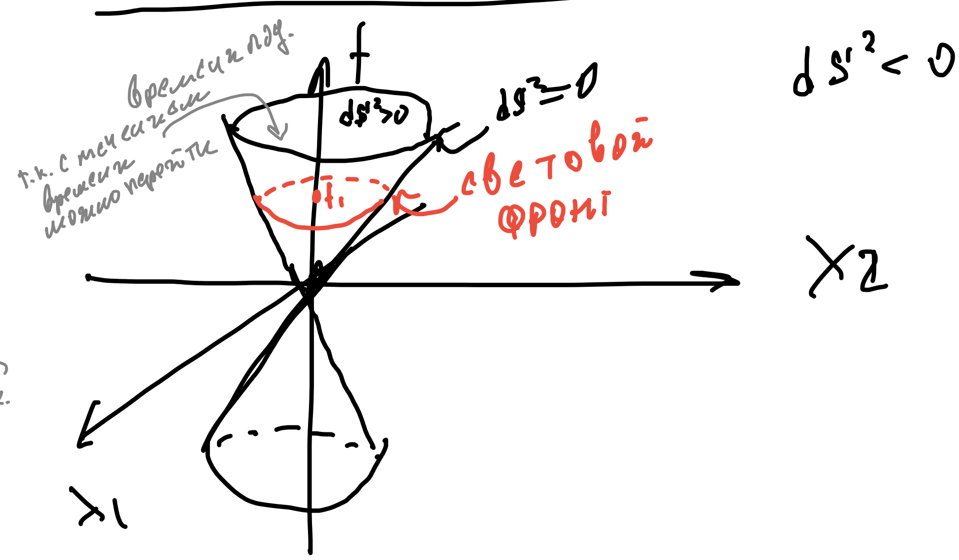
$$ch\,\eta = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$$sh\,\eta = \frac{v/c}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

$v$ — скорость

$\eta$ — быстрота

## 4. Интервал.




пр-но подобное, т.к. нужно перех. через пр-во.

Уточнить подобность вр/пр-в в Ландавшице.