Г.Е. Иванов

# ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ

## Часть 2

# Оглавление

# Предисловие

Настоящее учебное пособие написано на основе лекций, читаемых автором студентам второго курса Московского физико-технического института (государственного университета).

Содержание материала соответствует программе кафедры высшей математики МФТИ (ГУ).

Текст, заключенный между знаками $\triangleright$ и $\triangleleft$, не был прочитан в основное лекционное время; соответствующий материал не войдет в экзаменационные билеты.

Автор благодарен всем коллегам и студентам за полезные советы и обсуждение данного материала. Особую признательность автор выражает ассистенту кафедры высшей математики С.С. Николаенко за ценные замечания и предложения.

Глава 14

# КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

## § 1. Теорема Фубини

**Лемма 1.** *Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^n$ конечно измеримо. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ существует множество $A_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A \subset A_\varepsilon$ и $\mu(A_\varepsilon) < \mu(A) + \varepsilon$.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. По определению конечной измеримости существует клеточное множество $B \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $\mu^*(A\Delta B) < \frac{\varepsilon}{2}$. По определению верхней меры найдется множество $C \subset \mathbb{R}^n$, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A\Delta B \subset C$, $\mu(C) < \varepsilon$. Определим множество $A_\varepsilon = B \cup C$. Тогда множество $A_\varepsilon$ представимо в виде объединения счетного набора клеток. Заметим, что $A \subset B \cup (A\Delta B) \subset$ $\subset B \cup C = A_\varepsilon$. Так как $B \subset A \cup (A\Delta B) \subset A \cup C$, то $A_\varepsilon = B \cup C \subset A \cup C$, а значит, $\mu(A_\varepsilon) < \mu(A) + \varepsilon$. □

**Лемма 2.** *Пусть $\{X_k\}_{k=1}^{\infty}$ – счетный набор конечно измеримых вложенных множеств, $X_{k+1} \subset X_k \subset \mathbb{R}^n$ $\forall k \in \mathbb{N}$, $X = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} X_k$. Тогда*

$$\mu(X) = \lim_{k\to\infty} \mu(X_k). \tag{1}$$

**Доказательство.** Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество $C_k =$ $= X_k \setminus X_{k+1}$. Поскольку набор множеств $X, C_1, C_2, \ldots$ составляет измеримое разбиение множества $X_1$, то в силу счетной аддитивности меры Лебега имеем

$$\mu(X_1) = \mu(X) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(C_k),$$

то есть

$$\mu(X_1) = \mu(X) + \lim_{N\to\infty} \sum_{k=1}^{N-1} \mu(C_k). \tag{2}$$

Поскольку $X_{k+1} \subset X_k$, то $X_k = X_{k+1} \cup C_k$, причем $X_{k+1}$ и $C_k$ не пересекаются. Поэтому $\mu(X_k) = \mu(X_{k+1}) + \mu(C_k)$. Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{N-1} \mu(C_k) = \sum_{k=1}^{N-1} \Big(\mu(X_k) - \mu(X_{k+1})\Big) = \mu(X_1) - \mu(X_N).$$

Отсюда и из соотношения (2) получаем соотношение (1). $\square$

**Замечание.** Условие конечной измеримости множеств $X_k$ в лемме 2 нельзя заменить условием измеримости этих множеств. Действительно, рассмотрим множества $X_k = [k, +\infty)$ в $\mathbb{R}$. Тогда $X = \emptyset$, $\mu(X_k) = +\infty$, $\mu(X) = 0$ и соотношение (1) не выполнено.

**Лемма 3.** *Пусть для неотрицательной функции* $f : X \to [0, +\infty)$ *справедливо равенство* $\int\limits_X f(x)\,dx = 0$. *Тогда* $f(x) = 0$ *для почти всех* $x \in X$.

**Доказательство.** Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$X_k = \left\{x \in X:\ f(x) > \frac{1}{k}\right\}.$$

Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$0 = \int\limits_X f(x)\,dx = \int\limits_{X_k} f(x)\,dx + \int\limits_{X \setminus X_k} f(x)\,dx \geq \int\limits_{X_k} f(x)\,dx \geq \frac{\mu(X_k)}{k}.$$

Поэтому $\mu(X_k) = 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Так как для множества $\widehat{X} = \{x \in X:\ f(x) > 0\}$ справедливо равенство $\widehat{X} = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} X_k$, то в силу счетной аддитивности меры Лебега $\mu(\widehat{X}) = 0$. $\square$

Пусть функция $f$ определена почти всюду на множестве $X$. Рассмотрим любое продолжение $\widetilde{f} : X \to \mathbb{R}$ функции $f$ на множество $X$, т.е. $\widetilde{f}(x) = f(x)$ для почти всех $x \in X$. Тогда интеграл $\int\limits_X f(x)\,dx$ будем понимать как $\int\limits_X \widetilde{f}(x)\,dx$. Поскольку интеграл не зависит от значений функции на множестве нулевой меры, то значение $\int\limits_X f(x)\,dx$ не зависит от продолжения функции $f$ на множество $X$.

Рассмотрим арифметическое $n$-мерное пространство $\mathbb{R}^n_x$ и арифметическое $m$-мерное пространство $\mathbb{R}^m_y$, а также их декартово произведение $\mathbb{R}^{n+m}$, элементами которого являются пары $(x, y)$, где $x \in \in \mathbb{R}^n_x$, $y \in \mathbb{R}^m_y$. Для множеств $X \subset \mathbb{R}^n_x$, $Y \subset \mathbb{R}^m_y$, $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ через $\mu_x(X)$, $\mu_y(Y)$, $\mu(A)$ будем обозначать меры множеств $X, Y, A$ в пространствах $\mathbb{R}^n_x, \mathbb{R}^m_y, \mathbb{R}^{n+m}$ соответственно. Для множества $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и функции $f : A \to \mathbb{R}$ через $\int\limits_A f(x, y)\, dx\, dy$ будем обозначать интеграл Лебега функции $f$ по множеству $A$ (если этот интеграл существует).

Для множества $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ и точки $x \in \mathbb{R}^n_x$ через $A(x)$ обозначим сечение множества $A$:

$$A(x) = \{y \in \mathbb{R}^m_y : \ (x, y) \in A\}.$$

**Теорема 1.** *(О выражении меры множества через интеграл от меры сечений.) Пусть множество $A \subset \mathbb{R}^{n+m}$ конечно измеримо. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ множество $A(x)$ конечно измеримо в $\mathbb{R}^m_y$ и*

$$\mu(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\, dx. \tag{3}$$

**Доказательство.**

**Шаг 1.** Пусть $A$ – клетка в $\mathbb{R}^{n+m}$. Тогда $A = A_x \times A_y$, где $A_x$ и $A_y$ – клетки в $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^m_y$ соответственно, $\mu(A) = \mu_x(A_x) \cdot \mu_y(A_y)$. При этом

$$A(x) = \begin{cases} A_y, & x \in A_x, \\ \emptyset, & x \notin A_x. \end{cases}$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\, dx = \int\limits_{A_x} \mu_y(A_y)\, dx = \mu_x(A_x) \cdot \mu_y(A_y) = \mu(A),$$

то есть в этом случае множество $A(x)$ измеримо при всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство (3).

**Шаг 2.** Пусть множество $A$ можно представить как объединение счетного набора клеток. В этом случае $A$ можно представить в виде дизъюнктного объединения счетного числа клеток: $A = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \Pi_i$.

Тогда для любого $x \in \mathbb{R}^n_x$ имеем $A(x) = \bigsqcup\limits_{i=1}^{\infty} \Pi_i(x)$. В силу счетной аддитивности меры Лебега

$$\mu(A) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i), \qquad \mu_y(A(x)) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu_y(\Pi_i(x)) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n_x.$$

Функция $f(x) = \mu_y(A(x))$ измерима как предел конечных сумм измеримых функций $\mu_y(\Pi_i(x))$. Как показано на шаге 1,

$$\mu(\Pi_i) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(\Pi_i(x))\, dx \quad \forall i \in \mathbb{N}.$$

Поэтому в силу теоремы об интегрировании функционального ряда с неотрицательными членами

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \left( \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i(x)) \right) dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(\Pi_i(x))\, dx = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i) = \mu(A),$$

а значит, в этом случае множество $A(x)$ измеримо при всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство (3).

**Шаг 3.** Пусть $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, где каждое множество $A_k$ является объединением счетного числа клеток и $\mu(A_k) < +\infty$. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ определим множество $B_k = \bigcap\limits_{i=1}^{k} A_i$. Тогда $B_k$ является объединением счетного числа клеток, $B_{k+1} \subset B_k$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $A = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k$. Следовательно, для каждого $x \in \mathbb{R}^n_x$ имеем $A(x) = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} B_k(x)$. Как показано на шаге 2,

$$\mu(B_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B_k(x))\, dx \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поскольку $\mu(B_k) < +\infty$, то по лемме 2 §6 главы 8 при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ имеем $\mu_y(B_k(x)) < +\infty$. В силу леммы 2 справедливы соотношения

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k),$$

$$\mu_y(A(x)) = \lim_{k\to\infty} \mu_y(B_k(x)) \quad \text{при почти всех } x \in \mathbb{R}^n_x.$$

Следовательно,

$$\mu(A) = \lim_{k\to\infty} \mu(B_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B_k(x))\,dx \overset{*}{=}$$

$$\overset{*}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \lim_{k\to\infty} \mu_y(B_k(x))\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(A(x))\,dx.$$

Равенство $\overset{*}{=}$ следует из теоремы Лебега об ограниченной сходимости. Действительно, последовательность функций $f_k(x) = \mu_y(B_k(x))$ поточечно сходится к функции $\mu_y(A(x))$ и $0 \le \mu_y(B_k(x)) \le \mu_y(B_1(x))$ для любых $x \in \mathbb{R}^n_x$, $k \in \mathbb{N}$ причем функция $\mu_y(B_1(x))$ интегрируема на $\mathbb{R}^n_x$.

Таким образом, в этом случае множество $A(x)$ измеримо при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство (3).

**Шаг 4.** Пусть $\mu(A) = 0$. Покажем, что $\mu_y(A(x)) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$. По определению верхней меры для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется множество $A_k$, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A \subset A_k$ и $\mu(A_k) < \frac{1}{k}$. Рассмотрим множество $B = \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Так как $B \subset A_k$, то $\mu(B) \le \mu(A_k) < \frac{1}{k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $\mu(B) = 0$. Как показано на шаге 3, множество $B(x)$ измеримо при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B(x))\,dx = \mu(B) = 0.$$

Отсюда и из леммы 3 следует, что $\mu_y(B(x)) = 0$ для почти всех $x \in \in \mathbb{R}^n_x$. Так как $A \subset A_k$ при всех $k \in \mathbb{N}$, то $A \subset \bigcap\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k = B$. Поэтому $A(x) \subset B(x)$ для любого $x \in \mathbb{R}^n_x$. Следовательно, $\mu_y(A(x)) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$.

**Шаг 5.** Рассмотрим общий случай: множество $A$ конечно измеримо. В силу леммы 1 для каждого $k \in \mathbb{N}$ найдется множество $A_k \subset \subset \mathbb{R}^{n+m}$, представимое в виде объединения счетного набора клеток и такое, что $A \subset A_k$ и $\mu(A_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}$. Рассмотрим измеримые множества $B = \bigcap\limits_{k=1}^{\infty} A_k$ и $C = B \setminus A$. Так как $A \subset B \subset A_k$, то $\mu(A) \leq \leq \mu(B) \leq \mu(A_k) < \mu(A) + \frac{1}{k}$ и в силу произвольности $k \in \mathbb{N}$ получаем равенство $\mu(B) = \mu(A)$. Следовательно, $\mu(C) = \mu(B) - \mu(A) = 0$. Как показано на шаге 3, множество $B(x)$ измеримо при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и справедливо равенство

$$\mu(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_y(B(x))\, dx.$$

На шаге 4 показано, что $\mu_y(C(x)) = 0$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$. Поэтому для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ множество $A(x)$ измеримо и $\mu_y(A(x)) = = \mu_y(B(x))$. Следовательно, справедливо равенство (3). Из конечности интеграла в формуле (3) следует, что при почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ множество $A(x)$ конечно измеримо. $\square$

**Теорема 2.** (О геометрическом смысле интеграла.) *Пусть на измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана неотрицательная функция $f : X \to [0, +\infty]$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

(1) *функция $f$ интегрируема на множестве $X$;*

(2) *множество $F = \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in X,\ 0 \leq y \leq f(x)\}$ конечно измеримо в $\mathbb{R}^{n+1}$.*

*При этом, если выполнено условие (1) или условие (2), то*

$$\mu(F) = \int\limits_X f(x)\, dx. \tag{4}$$

**Доказательство.** В §10 главы 8 было доказано, что (1) $\Rightarrow$ (2). Докажем, что (2) $\Rightarrow$ (1). Заметим, что сечение множества $F$ имеет вид

$$F(x) = \begin{cases} [0, f(x)], & x \in X, \\ \emptyset, & x \notin X. \end{cases}$$

Из условия (2) по теореме 1 следует существование интеграла

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_y(F(x))\,dx = \mu(F).$$

Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \mu_y(F(x))\,dx = \int\limits_X \mu_y(F(x))\,dx = \int\limits_X f(x)\,dx,$$

то из условия (2) следует условие (1) и при выполнении любого из условий (1), (2) справедливо равенство (4). □

**Теорема 3.** (Фубини.) *Пусть $X$ и $Y$ – измеримые множества в $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^m_y$ соответственно. Пусть функция $f : X \times Y \to \mathbb{R}$ интегрируема. Тогда для почти всех $x \in X$ существует конечный интеграл $\int\limits_Y f(x,y)\,dy$ и справедлива формула Фубини*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

**Доказательство.** Рассмотрим случай, когда функция $f$ неотрицательна. По теореме о геометрическом смысле интеграла множество

$$A = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^{n+m+1} :\ (x,y) \in X \times Y,\ 0 \le z \le f(x,y)\}$$

измеримо в $\mathbb{R}^{n+m+1}$ и

$$\mu(A) = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy < +\infty.$$

По теореме 1 множество

$$A(x) = \{(y,z) \in \mathbb{R}^{m+1} :\ (x,y,z) \in A\}$$

конечно измеримо в $\mathbb{R}^{m+1}$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ и

$$\mu(A) = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} \mu_{(y,z)}(A(x))\,dx = \int\limits_X \mu_{(y,z)}(A(x))\,dx.$$

Поскольку при $x \in X$

$$A(x) = \{(y,z):\ y \in Y,\ 0 \le z \le f(x,y)\},$$

то снова применяя теорему о геометрическом смысле интеграла при тех $x \in X$, при которых множество $A(x)$ конечно измеримо, получаем

$$\mu_{(y,z)}(A(x)) = \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

В общем случае представим функцию $f(x,y) = f_+(x,y) - f_-(x,y)$. В силу доказанного выше

$$\int\limits_{X\times Y} f_\pm(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f_\pm(x,y)\,dy.$$

В силу линейности интеграла получаем формулу Фубини. $\square$

**Замечание.** Из теоремы Фубини следует, что если функция $f(x,y)$ интегрируема на прямоугольнике $[a,b]\times[c,d]$ и существуют повторные интегралы $\int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x,y)\,dy$ и $\int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x,y)\,dx$, то они равны кратному и, следовательно, равны между собой. Если же кратный интеграл не существует, то указанные повторные интегралы могут существовать, но быть различными. Например, для функции $f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ имеет место $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = -\pi/4$, но $\int\limits_0^1 dx \int\limits_0^1 f(x,y)\,dy = \pi/4$. Действительно, интегрируя по частям, получаем $\int\limits_0^1 \frac{dx}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2}\Big|_0^1 + 2\int\limits_0^1 \frac{x^2}{(x^2+y^2)^2}dx$, следовательно, $\int\limits_0^1 \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}dx = -\frac{x}{x^2+y^2}\Big|_{x=0}^{x=1} = -\frac{1}{1+y^2}$, поэтому $\int\limits_0^1 dy \int\limits_0^1 f(x,y)\,dx = -\int\limits_0^1 \frac{dy}{1+y^2} = -\pi/4$. Второй повторный интеграл вычисляется аналогично.

**Следствие.** *Пусть функция $f : A \to \mathbb{R}$ интегрируема на измеримом множестве $A \subset \mathbb{R}^{n+m} = \mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^m_y$. Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ функция $f(x,y)$ интегрируема по $y$ на сечении $A(x)$ и*

$$\int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\pi_x(A)} dx \int\limits_{A(x)} f(x,y)\,dy,$$

*где $\pi_x(A) := \{x \in \mathbb{R}^n_x |\ \exists y \in \mathbb{R}^m_y :\ (x,y) \in A\}$ – проекция множества $A$ на пространство $\mathbb{R}^n_x$.*

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$\tilde{f}(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in A, \\ 0, & (x,y) \in \mathbb{R}^{n+m} \setminus A. \end{cases}$$

Так как функция $\tilde{f}$ интегрируема на $A$ и на $\mathbb{R}^{n+m} \setminus A$, то $\tilde{f}$ интегрируема на $\mathbb{R}^{n+m}$. В силу теоремы Фубини для почти всех $x \in \mathbb{R}^n_x$ существует конечный интеграл $\int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy$ и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n_x} dx \int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy.$$

Отсюда и из равенств

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n+m}} \tilde{f}(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_A f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy = \int\limits_{A(x)} f(x,y)\,dy \qquad \forall x \in \pi_x(A),$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m_y} \tilde{f}(x,y)\,dy = 0 \qquad \forall x \notin \pi_x(A)$$

получаем доказываемое равенство. $\square$

## § 2. Разбиение единицы

**Определение.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$. *Носителем* функции $\varphi : X \to \mathbb{R}$ называется замкнутое множество

$$\operatorname{supp} \varphi := \overline{\{x \in X \ : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

**Лемма 1.** *Пусть заданы числа $\delta > 0$, $\varepsilon > \delta$ и точка $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Тогда существует гладкая функция $\beta : \mathbb{R}^n \to [0;1]$ такая, что $\operatorname{supp} \beta \subset \subset U_\varepsilon(x_0)$ и $\beta(x) = 1$ при $x \in U_\delta(x_0)$.*

**Доказательство.** Рассмотрим функцию

$$\eta(t) := \begin{cases} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Из правила Лопиталя следует, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\lim_{t \to +0} \frac{e^{-\frac{1}{t}}}{t^k} = 0. \tag{1}$$

Используя это соотношение при $k = 1$, получаем существование $\eta'(0) = 0$. Дифференцируя в других точках стандартным способом, получаем для любого $t \in \mathbb{R}$

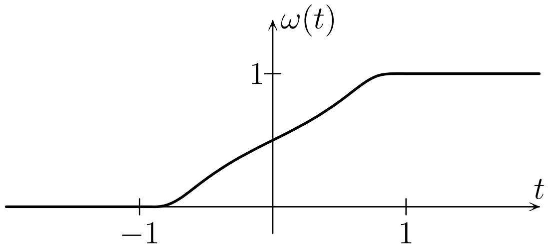
$$\eta'(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^2} e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases}$$

Используя соотношение (1), по индукции получаем, что для любого $k \in \mathbb{N}$ и для любого $x \in \mathbb{R}$ существует

$$\eta^{(k)}(t) = \begin{cases} P_{2k}\left(\frac{1}{t}\right) e^{-\frac{1}{t}}, & t > 0, \\ 0, & t \leq 0, \end{cases}$$

где $P_{2k}(\tau)$ – многочлен степени $2k$ относительно $\tau$. Следовательно, функция $\eta$ бесконечно дифференцируема. Отсюда следует бесконечная дифференцируемость функции

$$\omega(t) := \frac{\eta(1+t)}{\eta(1+t) + \eta(1-t)}.$$



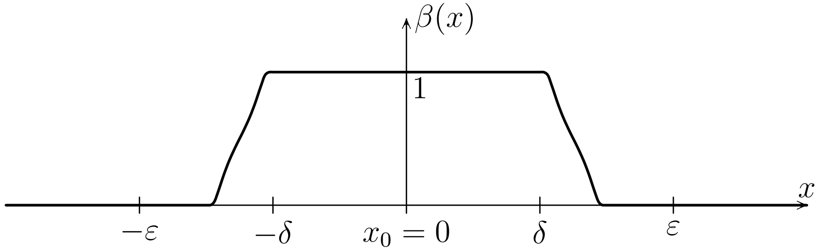

Заметим, что

$$\begin{aligned} \omega(t) = 0 &\quad \text{при} \quad t \le -1, \\ \omega(t) = 1 &\quad \text{при} \quad t \ge 1, \\ \omega(t) \in (0,1) &\quad \text{при} \quad t \in (-1,1). \end{aligned}$$

Отсюда следует, что «функция-шапочка» (bump function) $\beta : \mathbb{R}^n \to$ $\to [0,1]$, заданная формулой

$$\beta(x) := \omega\left(1 + \frac{4(\delta - |x - x_0|)}{\varepsilon - \delta}\right), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

удовлетворяет требуемым условиям.




□

**Определение.** Пусть $\{V_i\}_{i=1}^I$ – конечное покрытие множества $K \subset$ $\subset \mathbb{R}^n$. Набор функций $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$, $\varrho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, называется *разбиением единицы, подчиненным покрытию* $\{V_i\}_{i=1}^I$ *множества* $K$, если выполнены условия $\operatorname{supp} \varrho_i \subset V_i$ при всех $i \in \overline{1,I}$ и

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(x) = 1 \qquad \forall x \in K.$$

Если все функции $\varrho_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ этого набора являются гладкими, то разбиение единицы называется *гладким.*

**Теорема 1.** (О разбиении единицы.) *Для любого конечного открытого покрытия компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ существует гладкое разбиение единицы на $\mathbb{R}^n$, подчиненное этому покрытию.*

**Доказательство.** Пусть $\{V_i\}_{i=1}^I$ – конечное открытое покрытие компакта $K$. Для любой точки $x \in K$ выберем индекс $i = i(x) \in \overline{1, I}$ так, что $x \in V_i$ и число $\varepsilon(x) > 0$ так, что $U_{\varepsilon(x)}(x) \subset V_i$ (такое $\varepsilon(x) > 0$ существует, поскольку множество $V_i$ открыто). Положим $\delta(x) := \frac{\varepsilon(x)}{2}$. Тогда семейство открытых множеств $\{U_{\delta(x)}(x)\}_{x \in K}$ образует открытое покрытие компакта $K$. По критерию копактности Гейне–Бореля из этого покрытия можно выделить конечное подпокрытие, т.е. существует конечный набор точек $\{x_j\}_{j=1}^J$ компакта $K$ такой, что

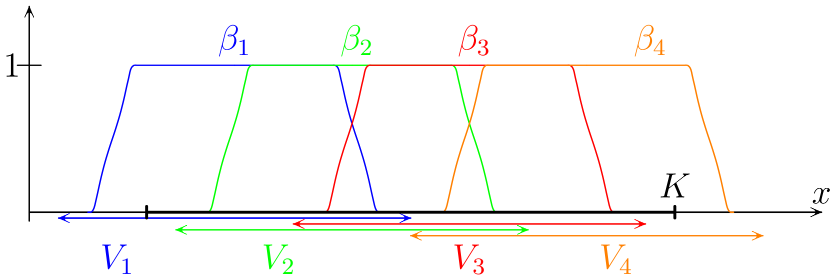
$$K \subset \bigcup_{j=1}^{J} U_{\delta(x_j)}(x_j). \tag{2}$$

В силу леммы 1 для каждого $j \in \overline{1, J}$ найдется гладкая функция $\beta_j : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ такая, что $\operatorname{supp} \beta_j \subset U_{\varepsilon(x_j)}(x_j)$ и $\beta_j(x) = 1$ при $x \in U_{\delta(x_j)}(x_j)$. Так как $\forall j \in \overline{1, J} \hookrightarrow \operatorname{supp} \beta_j \subset U_{\varepsilon(x_j)}(x_j) \subset V_{i(x_j)}$, то

$$\forall j \in \overline{1, J}\ \exists i \in \overline{1, I} : \ \operatorname{supp} \beta_j \subset V_i. \tag{3}$$

Из включения (2) следует, что

$$\forall x \in K\ \exists j \in \overline{1, J} : \ \beta_j(x) = 1. \tag{4}$$




Определим гладкие функции $\gamma_j : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, $j \in \overline{1, J}$:

$$
\begin{array}{rcl}
\gamma_1(x) & := & \beta_1(x), \\
\gamma_2(x) & := & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\beta_2(x), \\
\dots & \dots & \dots \\
\gamma_J(x) & := & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\dots\Big(1-\beta_{J-1}(x)\Big)\beta_J(x).
\end{array}
$$

Заметим, что для любого $x \in \mathbb{R}^n$

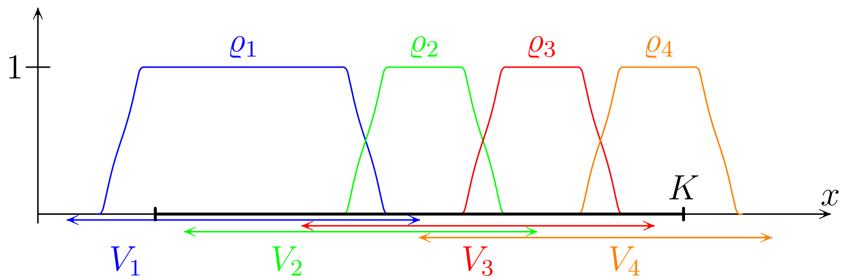
$$
\begin{array}{rcl}
1-\gamma_1(x)-\gamma_2(x) & = & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\Big(1-\beta_2(x)\Big), \\
1-\gamma_1(x)-\gamma_2(x)-\gamma_3(x) & = & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\Big(1-\beta_2(x)\Big)\Big(1-\beta_3(x)\Big), \\
\dots & \dots & \dots \\
1-\gamma_1(x)-\dots-\gamma_J(x) & = & \Big(1-\beta_1(x)\Big)\Big(1-\beta_2(x)\Big)\dots\Big(1-\beta_J(x)\Big).
\end{array}
$$

Поэтому в силу соотношения (4) имеем

$$
\sum_{j=1}^{J} \gamma_j(x) = 1 \quad \forall x \in K. \tag{5}
$$

Для каждого индекса $i \in \overline{1, I}$ через $S_i$ обозначим набор индексов $j \in \overline{1, J}$ таких, что $\operatorname{supp} \gamma_j \subset V_i$ и $\operatorname{supp} \gamma_j \not\subset V_k$ при всех $k \in \overline{1, i-1}$. Тогда $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Из соотношения (3) следует, что $\bigcup\limits_{i \in \overline{1,I}} S_i =$ $= \overline{1, J}$. Определим

$$
\varrho_i(x) := \sum_{j \in S_i} \gamma_j(x).
$$




Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(x) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j \in S_i} \gamma_j(x) = \sum_{j=1}^{J} \gamma_j(x) = 1 \qquad \forall x \in K,$$

где последнее равенство следует из равенства (5). При этом $\operatorname{supp} \varrho_i \subset \bigcup\limits_{j \in S_i} \operatorname{supp} \gamma_j \subset V_i$ при всех $i \in \overline{1, I}$. Следовательно, $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$ – искомое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{V_i\}_{i=1}^{I}$ компакта $K$. $\square$

Разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$ позволяет представить функцию $f : K \to \mathbb{R}$ в виде суммы функций $f_i(x) := f(x) \cdot \varrho_i(x)$ с носителями в некоторых «малых» окрестностях. Тем самым рассмотрение функции $f$ на «большом» множестве $K$ сводится к рассмотрению функций $f_i$ на «малых» множествах. Этот подход будет применен в следующем параграфе для доказательства теоремы о замене переменных в кратном интеграле и позднее для определения интеграла от дифференциальной формы по многообразию.

## § 3. Замена переменных в кратном интеграле

Напомним, что $C^k$-гладким диффеоморфизмом открытых множеств $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ называется взаимно однозначное отображение $\varphi$ из $X$ в $Y$ такое, что $\varphi$ и обратное к нему отображение $\varphi^{-1}$ являются $k$ раз непрерывно дифференцируемыми. $C^1$-гладкий диффеоморфизм называют *диффеоморфизмом* (без указания степени гладкости).

В данном параграфе будет доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** *(О замене переменных в кратном интеграле.) Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$ и $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Пусть функция $f : Y \to \mathbb{R}$ интегрируема. Тогда*

$$\int\limits_Y f(y)\, dy = \int\limits_X f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|\, dx \qquad (*)$$

Сначала докажем теорему 1 при дополнительных предположениях. Затем будем постепенно отказываться от этих дополнительных предположений.

**Лемма 1.** *Теорема 1 справедлива при дополнительных предположениях*

$(1^o)$ *функция $f$ непрерывна на $Y$;*

$(2^o)$ *ее носитель* $\operatorname{supp} f$ *компактен и лежит в* $Y$*;*

$(3^o)$ *диффеоморфизм* $\varphi$ *представим в виде в виде суперпозиции диффеоморфизмов* $g_1, ..., g_n$*, каждый из которых меняет только одну координату и линейного диффеоморфизма* $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$*, меняющего только порядок координат:* $\varphi = \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1$.

**Доказательство.** Обозначим $h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|$ при $x \in X$.

**Шаг 1.** Рассмотрим сначала одномерный случай ($n = 1$). В этом случае $h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|$. Так как множество $Y \subset \mathbb{R}^1_y$ открыто, то оно представимо в виде дизъюнктного объединения не более, чем счетного набора открытых числовых промежутков: $Y = \bigsqcup\limits_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda)$, где $\Lambda$ – не более, чем счетное множество индексов. В силу аддитивности интеграла Лебега достаточно доказать, что

$$\int\limits_{(a_\lambda, b_\lambda)} f(y)\, dy = \int\limits_{\varphi^{-1}((a_\lambda, b_\lambda))} h(x)\, dx \qquad \forall \lambda \in \Lambda. \tag{1}$$

Фиксируем произвольный индекс $\lambda \in \Lambda$. Так как множество $\operatorname{supp} f \subset \subset Y$ компактно, то множество $\operatorname{supp} f \cap (a_\lambda, b_\lambda)$ также компактно, а значит, найдется отрезок $[\alpha, \beta] \subset (a_\lambda, b_\lambda)$ такой, что $\operatorname{supp} f \cap \cap (a_\lambda, b_\lambda) \subset [\alpha, \beta]$. Так как $f(y) = 0$ при $y \in (a_\lambda, b_\lambda) \setminus [\alpha, \beta]$ и $h(x) = 0$ при $x \in \varphi^{-1}((a_\lambda, b_\lambda)) \setminus \varphi^{-1}([\alpha, \beta])$, то

$$\int\limits_{(a_\lambda, b_\lambda)} f(y)\, dy = \int\limits_{[\alpha, \beta]} f(y)\, dy,$$

$$\int\limits_{\varphi^{-1}((a_\lambda, b_\lambda))} h(x)\, dx = \int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha, \beta])} h(x)\, dx.$$

Поэтому для доказательства равенства (1) достаточно доказать равенство

$$\int\limits_{[\alpha, \beta]} f(y)\, dy = \int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha, \beta])} h(x)\, dx. \tag{2}$$

Поскольку $\varphi$ – диффеоморфизм, то функция $\varphi'(\cdot)$ непрерывна и не обращается в нуль на отрезке $\varphi^{-1}([\alpha, \beta])$. Здесь мы воспользовались теоремой о том, что непрерывная функция отрезок переводит в отрезок или в точку, причем в точку перевести не может, так как $\varphi$ –

диффеоморфизм. По теореме о промежуточном значении функция $\varphi'(\cdot)$ сохраняет знак на отрезке $\varphi^{-1}([\alpha,\beta])$. Если этот знак положителен, то $\varphi^{-1}([\alpha,\beta]) = [\varphi^{-1}(\alpha), \varphi^{-1}(\beta)]$, иначе, если этот знак отрицателен, то $\varphi^{-1}([\alpha,\beta]) = [\varphi^{-1}(\beta), \varphi^{-1}(\alpha)]$. В любом случае с учетом равенства $h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\varphi'(x)|$ получаем

$$\int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha,\beta])} h(x)\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}([\alpha,\beta])} f(\varphi(x))\cdot|\varphi'(x)|\,dx = \int\limits_{\varphi^{-1}(\alpha)}^{\varphi^{-1}(\beta)} f(\varphi(x))\cdot\varphi'(x)\,dx.$$

Отсюда по теореме о замене переменной в интеграле по отрезку получаем равенство (2) и завершаем доказательство в случае $n = 1$.

**Шаг 2.** Рассмотрим теперь случай $n > 1$ и будем предполагать, что диффеоморфизм $\varphi$ меняет только одну координату.

Пусть для определенности диффеоморфизм $\varphi$ меняет лишь первую координату. Представим вектор $x = (x^1, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ как $x = (x^1, z)$, где $z = (x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1}_z$. Так как диффеоморфизм $\varphi$ меняет лишь первую координату, то $\varphi(x^1, z) = (\varphi_1(x^1, z), z)$ и, следовательно, $\det \mathcal{D}\,\varphi(x^1, z) = (\varphi_1)'_{x^1}(x^1, z)$,

$$h(x^1, z) = f(\varphi_1(x^1, z), z) \cdot |(\varphi_1)'_{x^1}(x^1, z)|.$$

В силу следствия из теоремы Фубини

$$\int\limits_X h(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_z} dz \int\limits_{X(z)} h(x^1, z)\,dx^1,$$

$$\int\limits_Y f(y)\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}_z} dz \int\limits_{Y(z)} f(y^1, z)\,dy^1,$$

где $X(z) = \{x^1 \in \mathbb{R} :\ (x^1, z) \in X\}$,

$$Y(z) = \{y^1 \in \mathbb{R} :\ (y^1, z) \in Y\} = \{y^1 \in \mathbb{R} :\ (y^1, z) \in \varphi(X)\} = \varphi_1(X(z), z)$$

Поэтому для доказательства искомого равенства достаточно проверить, что для любого $z \in \mathbb{R}^{n-1}_z$

$$\int\limits_{\varphi_1(X(z),z)} f(y^1, z)\,dy^1 = \int\limits_{X(z)} f(\varphi_1(x^1, z), z) \cdot |(\varphi_1)'_{x^1}(x^1, z)|\,dx^1.$$

Таким образом, случай $n > 1$ сводится к одномерному, который рассмотрен на шаге 1.

**Шаг 3.** Рассмотрим общий случай: $\varphi = \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1$, где диффеоморфизмы $g_1, ..., g_n$ меняют только одну координату, $\alpha$ – линейный диффеоморфизм, меняющий только порядок координат. Если $n = 1$, то требуемое утверждение доказано на шаге 1. Поэтому предполагаем, что $n > 1$.

Обозначим $X_0 = X$, $X_j = g_j(X_{j-1})$, где $j = 1, 2, \ldots, n$. Тогда $Y = \varphi(X) = \alpha(X_n)$. Так как интеграл Лебега не меняется при перестановке координат, то

$$\int\limits_Y f(y)\,dy = \int\limits_{X_n} (f \circ \alpha)(x)\,dx.$$

Применяя $n$ раз утверждение, доказанное на шаге 2, получаем

$$\int\limits_{X_n} (f \circ \alpha)(x)\,dx = \int\limits_{X_{n-1}} (f \circ \alpha \circ g_n)(x) \cdot |\det \mathcal{D}\, g_n|\,dx = \ldots$$

$$\ldots = \int\limits_{X_0} (f \circ \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1)(x) \cdot |\det \mathcal{D}\, g_n| \cdots |\det \mathcal{D}\, g_1|\,dx =$$

$$= \int\limits_X f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\, \varphi(x)|\,dx.$$

$\square$

**Лемма 2.** *Теорема 1 справедлива при дополнительных предположениях* ($1^o$), ($2^o$).

**Доказательство.** По теореме о расщеплении отображений для любой точки $x \in X$ найдется такая ее окрестность $U(x) \subset X$, что сужение $\varphi$ на эту окрестность представимо в виде суперпозиции диффеоморфизмов $g_1, ..., g_n$, каждый из которых меняет только одну координату и линейного диффеоморфизма $\alpha : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, меняющего только порядок координат: $\varphi = \alpha \circ g_n \circ \ldots \circ g_1$. Согласно теореме 3 §5 главы 13 множество $\varphi(U(x))$ открыто. В силу компактности

$\operatorname{supp} f$ из открытого покрытия $\{\varphi(U(x))\}_{x\in X}$ этого компакта можно выделить его конечное подпокрытие $\{\varphi(U(x_i))\}_{i=1}^{I}$: $\operatorname{supp} f \subset \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} \varphi(U(x_i))$. По теореме о разбиении единицы существует гладкое разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$, подчиненное этому покрытию, т.е. $\varrho_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, $\operatorname{supp} \varrho_i \subset \varphi(U(x_i))$ при всех $i \in \overline{1,I}$ и

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(y) = 1 \quad \forall y \in \operatorname{supp} f.$$

Обозначим $f_i(y) := f(y)\cdot\varrho_i(y)$ для любого $y \in Y$. Тогда для любого $y \in Y$ справедливо равенство $f(y) = \sum\limits_{i=1}^{I} f_i(y)$. Зафиксируем произвольный индекс $i \in \overline{1,I}$ и покажем, что

$$\int\limits_{Y} f_i(y)\,dy = \int\limits_{X} f_i(\varphi(x))\cdot|\det\mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx. \tag{3}$$

Обозначим $h_i(x) := f_i(\varphi(x))\cdot|\det\mathcal{D}\,\varphi(x)|$. Поскольку $\operatorname{supp} f_i \subset \subset \varphi(U(x_i))$ и $\operatorname{supp} h_i \subset U(x_i)$, то

$$\int\limits_{Y} f_i(y)\,dy = \int\limits_{\varphi(U(x_i))} f_i(y)\,dy, \qquad \int\limits_{X} h_i(x)\,dx = \int\limits_{U(x_i)} h_i(x)\,dx.$$

Равенство

$$\int\limits_{\varphi(U(x_i))} f_i(y)\,dy = \int\limits_{U(x_i)} f_i(\varphi(x))\cdot|\det\mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx = \int\limits_{U(x_i)} h_i(x)\,dx$$

доказано в лемме 1. Отсюда следует равенство (3). Суммируя равенства (3) по всем $i \in \overline{1,I}$, получаем доказываемое равенство $(*)$. □

**Определение.** *Расстоянием от точки $x \in \mathbb{R}^n$ до множества $A \subset \subset \mathbb{R}^n$* называется

$$d_A(x) := \inf_{a\in A} |x-a|.$$

**Лемма 3.** *Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и любого множества $A \subset \mathbb{R}^n$ справедливо неравенство*

$$|d_A(x_1) - d_A(x_2)| \le |x_1 - x_2|.$$

**Доказательство.** Для любых $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ и $a \in A$ в силу неравенства треугольника имеем $|x_1 - a| \geq |x_2 - a| - |x_1 - x_2| \geq d_A(x_2) - |x_1 - x_2|$. Поэтому $d_A(x_1) \geq d_A(x_2) - |x_1 - x_2|$, т.е. $d_A(x_2) - d_A(x_1) \leq |x_1 - x_2|$. Аналогично, $d_A(x_1) - d_A(x_2) \leq |x_1 - x_2|$. $\square$

**Замечание.** Из леммы 3 следует непрерывность функции расстояния $d_A(x)$.

**Лемма 4.** *Теорема 1 справедлива при дополнительном предположении* ($1^o$).

Идея доказательства леммы 4 состоит в следующем. Приблизим непрерывную функцию $f : Y \to \mathbb{R}$ последовательностью непрерывных функций $f_k : Y \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих условию ($2^o$). Далее в силу леммы 2 получим равенство ($*$) для функций $f_k$ вместо $f$. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим равенство ($*$) для функции $f$.

**Доказательство. Шаг 1.** Пусть сначала $f(y) \geq 0$ при всех $y \in Y$.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множества

$$Y_k := \{y \in Y : \ |y| < k\}, \qquad Z_k := \mathbb{R}^n_y \setminus Y_k$$

и определим функцию

$$f_k(y) := f(y) \cdot \beta(k \cdot d_{Z_k}(y)),$$

где

$$\beta(t) := \begin{cases} 0, & t < \frac{1}{2}, \\ 2t - 1, & t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right], \\ 1, & t > 1. \end{cases}$$

В силу леммы 3 функция $d_{Z_k}(y)$ непрерывна. Отсюда и из непрерывности функций $f$ и $\beta$ следует непрерывность функции $f_k : \mathbb{R}^n_y \to \mathbb{R}$.

Покажем, что

$$\operatorname{supp} f_k \subset Y_k \quad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Фиксируем произвольные $k \in \mathbb{N}$ и $y_0 \in \operatorname{supp} f_k = \overline{\{y \in \mathbb{R}^n_y : \ f_k(y) \neq 0\}}$. Если $f_k(y) \neq 0$, то $\beta(k \cdot d_{Z_k}(y)) > 0$, а значит, $k \cdot d_{Z_k}(y) \geq \frac{1}{2}$. Следовательно, $y_0 \in \overline{\{y \in \mathbb{R}^n_y : \ d_{Z_k}(y) \geq \frac{1}{2k}\}}$. В силу непрерывности функции $d_{Z_k}(y)$ получаем $d_{Z_k}(y_0) \geq \frac{1}{2k} > 0$. Поэтому $y_0 \notin Z_k$, а значит, $y_0 \in Y_k$, что доказывает включение (4).

Из включения (4) следует, что множество $\operatorname{supp} f_k$ ограничено и содержится в $Y$. Отсюда и из замкнутости $\operatorname{supp} f_k$ следует, что $\operatorname{supp} f_k$ – компакт, лежащий в $Y$.

В силу леммы 2 имеем

$$\int\limits_Y f_k(y)\,dy = \int\limits_X h_k(x)\,dx, \tag{5}$$

где

$$h_k(x) = f_k(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|.$$

Заметим, что для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо включение $Y_k \subset \subset Y_{k+1}$, а значит, $Z_{k+1} \subset Z_k$. Следовательно, для любых $k \in \mathbb{N}$ и $y \in \mathbb{R}^n_y$ имеем:

$$0 \leq d_{Z_k}(y) \leq d_{Z_{k+1}}(y).$$

Поэтому с учетом нестрогого возрастания функции $\beta$

$$0 \leq f_k(y) \leq f_{k+1}(y) \leq f(y) \quad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall y \in \mathbb{R}^n_y. \tag{6}$$

Покажем, что

$$f(y) = \lim_{k\to\infty} f_k(y) \quad \forall y \in Y. \tag{7}$$

Фиксируем произвольную точку $y \in Y$. Так как множество $Y$ открыто, то найдется индекс $k \in \mathbb{N}$ такой, что $U_{1/k}(y) \subset Y$. Выберем индекс $k$ настолько большим, чтобы наряду с условием $U_{1/k}(y) \subset Y$ выполнялось неравенство $k > |y| + 1$. Тогда $U_{1/k}(y) \subset Y_k$. Следовательно, $\forall z \in Z_k \hookrightarrow \quad |y - z| \geq \frac{1}{k}$. Поэтому $d_{Z_k}(y) \geq \frac{1}{k}$, а значит, $f_k(y) = f(y)$. С учетом неравенств (6) получаем, что $f_j(y) = f(y)$ при всех $j \geq k$. Отсюда следует соотношение (7).

Из соотношения (7) следует также, что

$$\lim_{k\to\infty} h_k(x) = h(x) \quad \forall x \in X,$$

где

$$h(x) = f(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|.$$

Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенствах (5) и используя теорему Б. Леви, получаем доказываемое равенство

$$\int\limits_Y f(y)\,dy = \int\limits_X h(x)\,dx.$$

**Шаг 2.** Из непрерывности функции $f$ следует непрерывность ее положительной составляющей $f_+(y) = \max\{f(y), 0\}$ и отрицательной составляющую $f_-(y) = \max\{-f(y), 0\}$ функции $f$: $f(y) = f_+(y) - f_-(y)$. На шаге 1 равенство $(*)$ доказано для положительной и отрицательной составляющих функции $f$. В силу линейности интеграла отсюда следует искомое равенство $(*)$ для функции $f$.

$\triangleright$

**Определение.** *Индикаторной функцией множества* $A$ называется функция

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

**Лемма 5.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n_x$ и $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Пусть $A \subset X$ – компакт. Тогда*

$$\mu(\varphi(A)) = \int\limits_A |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\, dx. \tag{8}$$

**Доказательство.** Обозначим

$$f(y) = \mathbf{1}_{\varphi(A)}(y), \quad y \in Y,$$

$$h(x) = \mathbf{1}_A(x) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|, \quad x \in X.$$

Поскольку $\mu(\varphi(A)) = \int\limits_{\varphi(A)} dy = \int\limits_Y f(y)\, dy$, то доказываемое равенство (8) эквивалентно равенству

$$\int\limits_Y f(y)\, dy = \int\limits_X h(x)\, dx. \tag{9}$$

Идея доказательства леммы 5 состоит в том, чтобы приблизить разрывную функцию $f$ последовательностью непрерывных функций $f_k$, для которых равенство $(*)$ справедливо в силу леммы 4. Переходя к пределу в равенстве $(*)$ для $f_k$, получим равенство (9). Реализуем эту идею.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим непрерывную функцию

$$\gamma_k(x) = \max\{1 - k \cdot d_A(x), 0\}, \quad x \in X.$$

Заметим, что

$$\mathbf{1}_A(x) = \lim_{k\to\infty} \gamma_k(x) \quad \forall x \in X. \tag{10}$$

Действительно, фиксируем произвольную точку $x \in X$. Если $x \in A$, то $\gamma_k(x) = 1 = \mathbf{1}_A(x)$ при всех $k \in \mathbb{N}$, а значит, соотношение (10) выполнено. Пусть теперь $x \notin A$. Тогда в силу замкнутости множества $A$ имеем $d_A(x) > > 0$. Выберем $k_0 \in \mathbb{N}$ так, что $d_A(x) > \frac{1}{k_0}$. Тогда при всех $k \geq k_0$ получаем $\gamma_k(x) = 0 = \mathbf{1}_A(x)$, а значит, соотношение (10) снова выполнено.

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим функции

$$f_k(y) = \gamma_k(\varphi^{-1}(y)), \quad y \in Y,$$

$$h_k(x) = \gamma_k(x) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|, \quad x \in X.$$

В силу леммы 4 для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство

$$\int\limits_Y f_k(y)\,dy = \int\limits_X h_k(x)\,dx. \tag{11}$$

Из соотношения (10) следует, что

$$h(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x) \quad \forall x \in X$$

и

$$f(y) = \lim_{k\to\infty} f_k(y) \quad \forall y \in Y.$$

Согласно теореме Б. Леви получаем

$$\int\limits_X h(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X h_k(x)\,dx, \qquad \int\limits_Y f(y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_Y f_k(y)\,dy.$$

Переходя к пределу в равенстве (11), получаем равенство (9). □

**Определение.** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n$, $\delta > 0$. *$\delta$-окрестностью множества $A$* называется множество

$$U_\delta(A) = \{x \in \mathbb{R}^n :\ d_A(x) < \delta\}.$$

**Лемма 6.** (Свойства окрестности множества.)

(1). *Для любых $A \subset \mathbb{R}^n$ и $\delta > 0$ множество $U_\delta(A)$ открыто.*

(2). *Если $0 < \delta_1 < \delta_2$, то $\overline{U_{\delta_1}(A)} \subset U_{\delta_2}(A)$.*

(3). *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ открыто, множество $A \subset X$ – компакт. Тогда существует $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(A) \subset X$.*

**Доказательство.** (1). Открытость $U_\delta(A)$ следует из непрерывности функции $d_A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

(2). Пусть $0 < \delta_1 < \delta_2$, $x \in \overline{U_{\delta_1}(A)}$. Тогда в силу критерия точки прикосновения существует последовательность $\{x_k\} \subset U_{\delta_1}(A)$ такая, что

$x = \lim\limits_{k\to\infty} x_k$. Так как $d_A(x_k) < \delta_1$, то $d_A(x) \leq \delta_1 < \delta_2$. Следовательно, $x \in U_{\delta_2}(A)$.

(3). Предположим противное. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$ существует

$$y_k \in U_{\frac{1}{k}}(A) \setminus X. \tag{12}$$

Так как $d_A(y_k) < \frac{1}{k}$, то найдется точка $a_k \in A$ такая, что $|a_k - y_k| < \frac{1}{k}$. В силу компактности $A$ из $\{a_k\}$ можно выделить подпоследовательность $\{a_{k_j}\}$, сходящуюся к некоторому $a \in A$. Так как $a \in A \subset X$, то найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(a) \subset X$. С другой стороны, $|a - y_{k_j}| \leq |a - a_{k_j}| + |a_{k_j} - y_{k_j}| < |a - a_{k_j}| + \frac{1}{k_j} \to 0$ при $j \to \infty$. Поэтому найдется индекс $j$ такой, что $y_{k_j} \in U_{\delta_0}(a) \subset X$, что противоречит условию (12). $\square$

**Лемма 7.** *Пусть $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(S) < +\infty$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует не более, чем счетный набор кубов $\{Q_k\}$ такой, что множество $Q = \bigcup\limits_k Q_k$ удовлетворяет условиям*

$$S \subset Q \subset U_\varepsilon(S), \qquad \sum_k \mu(Q_k) < \mu^*(S) + \varepsilon.$$

**Доказательство.** Пусть сначала $S$ – клетка, т.е. $S = \omega_1 \times \ldots \times \omega_n$, где $\omega_i$ – ограниченный числовой промежуток (интервал, полуинтервал или отрезок) длины $|\omega_i|$. Фиксируем $\delta > 0$ и рассмотрим кубы с длиной ребра $\delta$, представимые как декартово произведение $n$ отрезков вида $[m\delta, (m + 1)\delta]$, где $m \in \mathbb{Z}$. Пусть $Q = \bigcup\limits_{k=1}^{K} Q_k$ – объединение всех таких кубов, пересекающихся с $S$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{K} \mu(Q_k) = \mu(Q) \leq (|\omega_1| + 2\delta) \cdot (|\omega_2| + 2\delta) \cdots (|\omega_n| + 2\delta),$$

$S \subset Q \subset U_{\varepsilon'}(S)$ при $\varepsilon' > \delta\sqrt{n}$. Выбирая достаточно малое число $\delta > 0$, а именно такое, что $(|\omega_1| + 2\delta) \cdot (|\omega_2| + 2\delta) \cdots (|\omega_n| + 2\delta) < |\omega_1| \cdot |\omega_2| \cdots |\omega_n| + \varepsilon = \mu^*(S) + \varepsilon$ и $\delta\sqrt{n} < \varepsilon$, получаем утверждение леммы для клетки $S$.

Пусть теперь $S \subset \mathbb{R}^n$, $\mu^*(S) < +\infty$, $\varepsilon > 0$. По определению верхней меры найдется счетный набор клеток $\Pi_i$ такой, что $S \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} \Pi_i$ и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \mu(\Pi_i) < \mu^*(S) + \frac{\varepsilon}{2}$. Фиксируем число $\delta > 0$. Как показано выше, каждую клетку $\Pi_i$ можно покрыть конечным набором кубов $\{Q_k^i\}_{k=1}^{K_i}$ с длиной ребра $\leq \delta$ так, что $\sum\limits_{k=1}^{K_i} \mu(Q_k^i) < \mu(\Pi_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$. При этом

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{K_i}\mu(Q_k^i) < \sum_{i=1}^{\infty}\left(\mu(\Pi_i) + \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}\right) < \mu^*(S) + \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \mu^*(S) + \varepsilon.$$

Исключая из набора $\{Q_k^i\}_{\substack{k\in\overline{1,K_i}\\ i\in\mathbb{N}}}$ кубы, не пересекающиеся с $S$, получим, что объединение $Q$ оставшихся кубов удовлетворяет включению $Q \subset \subset U_{\varepsilon'}(S)$ при $\varepsilon' > \delta\sqrt{n}$. Выбирая $\delta > 0$ из условия $\delta\sqrt{n} < \varepsilon$, завершаем доказательство. $\square$

**Лемма 8.** *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^n$ – открытые множества, $A \subset X$ – компакт, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Тогда существует число $C > 0$ такое, что для любого $S \subset A$ справедливо неравенство*

$$\mu^*(\varphi(S)) \le C\mu^*(S). \tag{13}$$

**Доказательство.** В силу пункта (3) леммы 6 существует число $\varepsilon_0 > > 0$ такое, что $U_{2\varepsilon_0}(A) \subset X$. Так как норма $\|\mathcal{D}\,\varphi(x)\|$ матрицы Якоби непрерывно зависит от $x$, то она ограничена на компакте $\overline{U_{\varepsilon_0}(A)} \subset X$. Поэтому

$$\sup_{x\in\overline{U_{\varepsilon_0}(A)}} \|\mathcal{D}\,\varphi(x)\| = C_1 < +\infty.$$

Пусть $q$ – куб в $\mathbb{R}^n$ с длиной ребра $a$, содержащийся в $\overline{U_{\varepsilon_0}(A)}$. Оценим $\mu^*(\varphi(q))$ сверху. Пусть $x_0$ – центр куба $q$. Тогда $\forall x \in q \hookrightarrow \ |x - x_0| \le \le \frac{a}{2}\sqrt{n}$. Согласно теореме Лагранжа о среднем для любого $x \in q$ справедливо неравенство $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \le C_1\frac{a}{2}\sqrt{n}$. Поэтому множество $\varphi(q)$ содержится в замкнутом кубе с центром в $\varphi(x_0)$ и длиной ребра $aC_1\sqrt{n}$. Следовательно,

$$\mu^*(\varphi(q)) \le a^n(C_1\sqrt{n})^n = C\mu(q),$$

где $C = (C_1\sqrt{n})^n$.

Зафиксируем произвольное множество $S \subset A$ и покажем справедливость неравенства (13). Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$. В силу леммы 7 существует не более, чем счетный набор кубов $\{Q_k\}$ такой, что множество $Q = \bigcup\limits_k Q_k$ удовлетворяет условиям

$$S \subset Q \subset U_\varepsilon(S), \qquad \sum_k \mu(Q_k) < \mu^*(S) + \varepsilon.$$

Как показано выше, для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\mu^*(\varphi(Q_k)) \le C\mu(Q_k)$. Поэтому в силу счетной полуаддитивности верхней меры

$$\mu^*(\varphi(S)) \le \sum_k \mu^*(\varphi(Q_k)) \le C\sum_k \mu(Q_k) \le C(\mu^*(S) + \varepsilon).$$

Переходя к пределу при $\varepsilon \to +0$, получаем неравенство (13). $\square$

**Лемма 9.** *Пусть* $X \subset \mathbb{R}^n_x$ *и* $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ *– открытые множества,* $\varphi : X \to Y$ *– диффеоморфизм. Пусть множество* $A \subset X$ *конечно измеримо. Тогда*

$$\mu(\varphi(A)) = \int\limits_A |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx.$$

**Доказательство.** Обозначим $h(x) = |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|$.

1) Пусть сначала множество $A$ ограничено и $\overline{A} \subset X$. Тогда $\overline{A}$ – компакт. Так как множество $A$ измеримо, то существует последовательность клеточных множеств $\{A_k\}$ такая, что $\mu^*(A_k \Delta A) \to 0$ при $k \to \infty$. Так как для клеточных множеств $A_k$ справедливы равенства $\mu^*(A_k \Delta \overline{A_k}) = 0$, то $\mu^*(\overline{A_k} \Delta A) \to 0$ при $k \to \infty$.

Рассмотрим компакты $B_k = \overline{A_k} \cap \overline{A}$. Так как $B_k \Delta A \subset \overline{A_k} \Delta A$, то $\mu^*(B_k \Delta A) \to 0$ при $k \to \infty$. В силу леммы 8 существует число $C > 0$ такое, что $\mu^*(\varphi(B_k \Delta A)) \leq C\mu^*(B_k \Delta A)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поэтому $|\mu(\varphi(B_k)) - \mu(\varphi(A))| \leq \mu^*\Big(\varphi(B_k)\Delta\varphi(A)\Big) = \mu^*(\varphi(B_k \Delta A)) \to 0$ при $k \to \infty$, т.е.

$$\mu(\varphi(A)) = \lim_{k\to\infty} \mu(\varphi(B_k)). \tag{14}$$

Поскольку

$$\left| \int\limits_{B_k} h(x)\,dx - \int\limits_A h(x)\,dx \right| \leq C_h \mu^*(B_k \Delta A) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

(где $C_h = \max\limits_{x \in \overline{A}} h(x)$), то

$$\int\limits_A h(x)\,dx = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{B_k} h(x)\,dx. \tag{15}$$

В силу леммы 5 имеем $\mu(\varphi(B_k)) = \int\limits_{B_k} h(x)\,dx$. Переходя в этом равенстве к пределу при $k \to \infty$ в силу соотношений (14), (15) получаем доказываемое равенство в рассматриваемом случае.

2) Пусть теперь множество $A \subset X$ конечно измеримо. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$X_k = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : d_{\mathbb{R}^n \setminus X}(x) \geq \frac{1}{k},\ |x| \leq k \right\}.$$

Заметим, что $X_k$ – компакт, $X_k \subset X_{k+1} \subset X$. Поэтому множества $A_k := A \cap X_k$ ограничены и $\overline{A_k} \subset X_k \subset X$. В силу первой части доказательства

$$\mu(\varphi(A_k)) = \int\limits_{A_k} h(x)\,dx.$$

Заметим, что $A_k \subset A_{k+1}$ и $A = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Используя непрерывность интеграла Лебега по множествам получаем

$$\mu(\varphi(A)) = \lim_{k\to\infty} \mu(\varphi(A_k)) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{A_k} h(x)\,dx = \int\limits_{A} h(x)\,dx.$$

$\square$

**Следствие.** (О геометрическом смысле модуля якобиана.) *Пусть $X \subset \subset \mathbb{R}^n_x$ и $Y \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $\varphi : X \to Y$ – диффеоморфизм. Пусть $x_0 \in X$ и $\{A_k\}$ – последовательность измеримых подмножеств $X$ таких, что $\mu(A_k) \neq 0$ и $\delta_k := \sup\limits_{x\in A_k} |x_0 - x| \to 0$ при $k \to \infty$. Тогда*

$$|\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)| = \lim_{k\to\infty} \frac{\mu(\varphi(A_k))}{\mu(A_k)}.$$

**Доказательство.** Обозначим $\varepsilon_k := \sup\limits_{x\in A_k} \Big|\det \mathcal{D}\,\varphi(x) - \det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)\Big|$. Поскольку $\delta_k \to 0$ и функция $\det \mathcal{D}\,\varphi(x)$ непрерывна, то $\varepsilon_k \to 0$. Интегрируя неравенство $\Big||\det \mathcal{D}\,\varphi(x)| - |\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)|\Big| \leq \varepsilon_k$ по множеству $A_k$, в силу леммы 9 получаем $\Big|\mu(\varphi(A_k)) - \mu(A_k)\cdot|\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)|\Big| \leq \varepsilon_k \cdot \mu(A_k)$. Поэтому

$$\left|\frac{\mu(\varphi(A_k))}{\mu(A_k)} - |\det \mathcal{D}\,\varphi(x_0)|\right| \leq \varepsilon_k \to 0.$$

$\square$

**Доказательство теоремы 1.**

Рассмотрим положительную составляющую $f_+(y) = \max\{f(y), 0\}$ и отрицательную составляющую $f_-(y) = \max\{-f(y), 0\}$ функции $f$: $f(y) = f_+(y) - f_-(y)$. Докажем требуемое равенство для положительной составляющей. Для отрицательной составляющей оно доказывается аналогично. В силу линейности интеграла отсюда следует искомое равенство. Итак, осталось доказать

$$\int\limits_{Y} f_+(y)\,dy = \int\limits_{X} f_+(\varphi(x))\cdot|\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx. \tag{16}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим счетно-ступенчатую функцию $f_k(y) = \frac{[2^k f_+(y)]}{2^k}$, где $[t]$ – целая часть числа $t$, т.е. $[t] \in \mathbb{Z}$, $[t] \in (t-1, t]$. Тогда $f_k(y) \leq f_{k+1}(y)$ и $f_+(y) = \lim\limits_{k\to\infty} f_k(y)$. Из леммы 9 в силу счетной аддитивности интеграла Лебега следует, что

$$\int\limits_Y f_k(y)\,dy = \int\limits_X f_k(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\,dx.$$

Отсюда по теореме Б. Леви получаем равенство (16). $\square\triangleleft$

**Пример 1.** Пусть в открытом круге $\Omega = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x^2+y^2 < r_0^2\}$ задана интегрируемая функция $f(x,y)$. Для вычисления интеграла $\int\limits_\Omega f(x,y)\,dx\,dy$ часто удобно ввести полярные координаты:

$$r \geq 0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \qquad x = r\,\cos\varphi, \quad y = r\,\sin\varphi.$$

Отображение $F(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}$ непрерывно дифференцируемо, и его якобиан

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\varphi)} = \det\begin{pmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix} = r.$$

Отображение $F : \mathbb{R}^2_{r\varphi} \to \mathbb{R}^2_{xy}$ не является взаимно однозначным, так как, например, точки $(r, 0)$ и $(r, 2\pi)$ переходят в одну и ту же точку. Чтобы удовлетворить требованиям взаимной однозначности, рассмотрим открытое множество

$$X = \{(r,\varphi) \ : \ r \in (0, r_0),\ \varphi \in (0, 2\pi)\},$$

которое при отображении $F$ переходит во множество

$$Y = \{(x,y) \ : \ (0 < x^2 + y^2 < r_0^2) \text{ и } (y \neq 0 \text{ при } x > 0)\}.$$

Сужение отображения $F$ на множество $X$ взаимно однозначно и непрерывно дифференцируемо. Якобиан отображения $F$ на множестве $X$ не обращается в ноль. Поэтому согласно теореме об обратном отображении $F$ является диффеоморфизмом из $X$ в $Y = F(X)$. В силу теоремы о замене переменных в кратном интеграле и следствия из теоремы Фубини справедливы равенства

$$\int\limits_{Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{X} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,r\,dr\,d\varphi =$$

$$= \int\limits_{0}^{r_0} r\,dr \int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

Поскольку круг $\Omega$ отличается от множества $Y$ на множество меры нуль, а интеграл по множеству меры нуль равен нулю, то

$$\int\limits_{\Omega} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{Y} f(x,y)\,dx\,dy.$$

Таким образом, вычисление интеграла по кругу $\Omega$ сводится к вычислению повторного интеграла:

$$\int\limits_{x^2+y^2<r_0^2} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_{0}^{r_0} r\,dr \int\limits_{0}^{2\pi} f(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,d\varphi.$$

**Пример 2.** Вычислить интеграл Пуассона $I := \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx.$

**Решение.** Используя формулу Фубини, имеем

$$I^2 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-y^2}\,dy = \int\limits_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy.$$

Переходя к полярным координатам (см. предыдущий пример), получаем

$$I^2 = \int\limits_{0}^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr \int\limits_{0}^{2\pi} d\varphi = -\pi \int\limits_{0}^{+\infty} de^{-r^2} = -\pi\; e^{-r^2}\Big|_{r=0}^{r\to+\infty} = \pi.$$

Поскольку $I \geq 0$, то $I = \sqrt{\pi}$. Итак,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}.$$

Глава 15

# ПОДМНОГООБРАЗИЯ ПРОСТРАНСТВА $\mathbb{R}^N$

## § 1. Криволинейные системы координат

**Определение.** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n_x$ и $B \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества, $f : A \to B$ – гладкий диффеоморфизм,

$$f(x) = \begin{pmatrix} y^1(x^1, \ldots, x^n) \\ \cdots \\ y^n(x^1, \ldots, x^n) \end{pmatrix} \qquad \forall x = (x^1, \ldots, x^n) \in A.$$

Тогда набор функций $(y^1, \ldots, y^n)$ называется *криволинейной системой координат на множестве* $A$. Набор чисел $(y^1(x), \ldots, y^n(x)) \in \in B$ называется *координатным набором* точки $x \in A$ в криволинейной системе координат $(y^1, \ldots, y^n)$.

Образ $f(M)$ произвольного множества $M \subset A$ будем называть *множеством* $M$ *в криволинейной системе координат* $(y^1, \ldots, y^n)$.

**Замечание.** Исходная декартова система координат $(x^1, \ldots, x^n)$ является частным случаем криволинейной системы координат, поскольку соответствует тождественному диффеоморфизму $f(x) = = \mathrm{Id}(x) := x$.

**Пример 1.** (Полярная система координат.)

Рассмотрим отображение $F : \Pi_{\varphi_0} \to A_{\varphi_0}$

$$F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

где $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ – произвольное число;
$\Pi_{\varphi_0} = \{(r, \varphi) \in \mathbb{R}^2 :\ r > 0,\ \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)\}$,

$$A_{\varphi_0} := F(\Pi_{\varphi_0}) = \left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix} :\ r > 0,\ \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \right\}$$

– плоскость с разрезом по лучу $\left\{ \begin{pmatrix} r\cos\varphi_0 \\ r\sin\varphi_0 \end{pmatrix} :\ r \geq 0 \right\}$. Заметим, что $F \in C^\infty(\Pi_{\varphi_0}, A_{\varphi_0})$ и якобиан

$$\det \mathcal{D}\, F(r,\varphi) = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r > 0 \qquad \forall (r,\varphi) \in \Pi_{\varphi_0}.$$

Покажем, что отображение $F : \Pi_{\varphi_0} \to A_{\varphi_0}$ взаимно однозначно. Пусть $(r_1, \varphi_1) \in \Pi_{\varphi_0}$, $(r_2, \varphi_2) \in \Pi_{\varphi_0}$ и $F(r_1, \varphi_1) = F(r_2, \varphi_2)$, т.е.

$$\begin{cases} r_1 \cos\varphi_1 = r_2 \cos\varphi_2, \\ r_1 \sin\varphi_1 = r_2 \sin\varphi_2. \end{cases}$$

Тогда $r_1^2 = r_1^2(\cos^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_1) = r_2^2(\cos^2\varphi_2 + \sin^2\varphi_2) = r_2^2$. Отсюда и из неравенств $r_1 > 0$, $r_2 > 0$ следует, что $r_1 = r_2 > 0$. Поэтому $\cos\varphi_1 = \cos\varphi_2$, $\sin\varphi_1 = \sin\varphi_2$. Используя условия $\varphi_1, \varphi_2 \in (\varphi_0, \varphi_0 + + 2\pi)$, получаем равенство $\varphi_1 = \varphi_2$. Таким образом, отображение $F : \Pi_{\varphi_0} \to A_{\varphi_0}$ является гладким взаимно однозначным отображением с неравным нулю якобианом. В силу теоремы 2 §5 главы 13 отображение $F$ является $C^\infty$-гладким диффеоморфизмом. Поэтому гладкий диффеоморфизм $F^{-1} : A_{\varphi_0} \to \Pi_{\varphi_0}$ задает криволинейную систему координат $(r, \varphi)$, которая называется *полярной системой координат*.

**Теорема 1.** (О построении криволинейной системы координат, исходя из ее части.) *Пусть на $\delta$-окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданы гладкие функции $y^1, \ldots, y^k : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$, дифференциалы которых в точке $x_0$ линейно независимы. Тогда найдутся гладкие функции $y^{k+1}, \ldots, y^n : U_\delta(x_0) \to \mathbb{R}$ такие, что набор функций $y^1, \ldots, y^n$ составляет криволинейную систему координат на некоторой окрестности точки $x_0$. Иными словами, набор гладких функций $y^1, \ldots, y^k$ с линейно незавимыми дифференциалами можно достроить до криволинейной системы координат $y^1, \ldots, y^n$, частью которой являются функции $y^1, \ldots, y^k$.*

**Доказательство.** Рассмотрим отображение $g(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) \\ \cdots \\ y^k(x) \end{pmatrix}$.

Строками матрицы Якоби этого отображения

$$\mathcal{D}\, g = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \end{pmatrix}$$

являются коэффициентами в формулах $dy^i = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j} dx^j$, выражающих дифференциалы функций $y^i$ через дифференциалы независимых переменных $x^j$. Поскольку в точке $x_0$ дифференциалы $dy^1, \ldots, dy^k$ линейно независимы, то строки матрицы $\mathcal{D}\, g(x_0)$ линейно независимы. По теореме о ранге матрица $\mathcal{D}\, g(x_0)$ имеет $k$ линейно независимых столбцов. Без потери общности будем считать, что первые $k$ столбцов матрицы $\mathcal{D}\, g(x_0)$ линейно независимы (если это не так, то можно перенумеровать переменные $x^i$ так, чтобы это условие выполнялось).

Определим гладкие функции

$$y^{k+1}(x^1, \ldots, x^n) = x^{k+1}, \qquad y^n(x^1, \ldots, x^n) = x^n$$

и отображение $f(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) \\ \cdots \\ y^n(x) \end{pmatrix}$. Матрица Якоби этого отображения имеет вид

$$\mathcal{D}\, f = \begin{pmatrix} \frac{\partial y^1}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^k} & \frac{\partial y^1}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial y^1}{\partial x^n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y^k}{\partial x^1} & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^k} & \frac{\partial y^k}{\partial x^{k+1}} & \cdots & \cdots & \cdots & \frac{\partial y^k}{\partial x^n} \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Поскольку столбцы матрицы $\mathcal{D}\, f(x_0)$ линейно независимы, то $\det \mathcal{D}\, f(x_0) \neq 0$. По теореме об обратном отображении найдется такая окрестность $U(x_0)$ точки $x_0$, что сужение отображения $f$ на $U(x_0)$ является диффеоморфизмом. Таким образом, отображение $f$ является гладким диффеоморфизмом и набор его координатных функций $y^1, \ldots, y^n$ составляет криволинейную систему координат на $U(x_0)$. $\square$

$\triangleright$

**Теорема 2.** *Внутренность, замыкание и граница множества инвариантны относительно замены криволинейной системы координат.*

**Доказательство.** Пусть $A \subset \mathbb{R}^n_x$ и $B \subset \mathbb{R}^n_y$ – открытые множества. Пусть заданы гладкий диффеоморфизм $f : A \to B$, а также множество

$M \subset A$. Требуется доказать равенства

$$\operatorname{int} f(M) = f(\operatorname{int} M), \tag{1}$$

$$\overline{f(M)} = f(\overline{M}), \tag{2}$$

$$\partial f(M) = f(\partial M), \tag{3}$$

где $\overline{M}$ – замыкание множества $M$ в метрическом пространстве $A$ с метрикой $\mathbb{R}^n_x$; $\overline{f(M)}$ – замыкание множества $f(M)$ в метрическом пространстве $B$ с метрикой $\mathbb{R}^n_y$; $\partial M = \overline{M} \setminus \operatorname{int} M$, $\partial f(M) = \overline{f(M)} \setminus \operatorname{int} f(M)$. Поскольку множества $A$ и $B$ открыты, то внутренности $\operatorname{int} M$ и $\operatorname{int} f(M)$ в метрических пространствах $A$ и $B$ соответственно совпадают с внутренностями множеств $M$ и $f(M)$ в обычном смысле (т.е. в пространствах $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^n_y$ соответственно).

Пусть $x_0 \in \operatorname{int} M$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(x_0) \subset M$. В силу теоремы 2 §5 главы 13 множество $f(U_\delta(x_0))$ открыто. Поэтому $f(x_0) \in f(U_\delta(x_0)) = \operatorname{int} f(U_\delta(x_0)) \subset \operatorname{int} f(M)$. Таким образом, доказано включение

$$f(\operatorname{int} M) \subset \operatorname{int} f(M). \tag{4}$$

Применяя это включение к диффеоморфизму $f^{-1}$ и множеству $f(M)$, получаем $f^{-1}(\operatorname{int} f(M)) \subset \operatorname{int} f^{-1}(f(M)) = \operatorname{int} M$. Поэтому $\operatorname{int} f(M) = f\left(f^{-1}(\operatorname{int} f(M))\right) \subset f(\operatorname{int} M)$. Последнее включение вместе с включением (4) доказывает равенство (1).

Пусть теперь $x_0 \in \overline{M}$. Тогда найдется последовательность точек $x_k \in M$ такая, что $x_k \to x_0$ при $k \to \infty$. В силу непрерывности $f$ имеем $f(x_k) \to f(x_0)$. Поэтому $f(x_0) \in \overline{f(M)}$. Тем самым доказано включение $f(\overline{M}) \subset \overline{f(M)}$. Применяя это включение для диффеоморфизма $f^{-1}$ и множества $f(M)$, получаем обратное включение. Таким образом, равенство (2) доказано.

Поскольку отображение $f$ взаимно однозначно, то $f\left(\overline{M} \setminus \operatorname{int} M\right) = f(\overline{M}) \setminus f(\operatorname{int} M)$. Отсюда и из равенств (1), (2) получаем

$$f(\partial M) = f\left(\overline{M} \setminus \operatorname{int} M\right) = f(\overline{M}) \setminus f(\operatorname{int} M) =$$

$$= \overline{f(M)} \setminus \operatorname{int} f(M) = \partial f(M),$$

т.е. равенство (3) также доказано. $\square$

$\triangleleft$

## § 2. Гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$

Говоря неформально, множество $M \subset \mathbb{R}^N$ является гладким $n$-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$, если в достаточно малой окрестности каждой своей точки в некоторой криволинейной системе координат множество $M$ имеет вид $n$-мерного линейного подпространства

$$L^n = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \right\} \tag{1}$$

или полуподпространства

$$L^n_- = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad x^1 \leq 0 \right\}. \tag{2}$$

Дадим аккуратные определения.

**Определение.** Множество $M \subset \mathbb{R}^N_p$ будем называть *гладким $n$-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N_p$ в точке $P \in M$* и писать $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$, если существует гладкий диффеоморфизм $f : X \to U(P)$ из открытого множества $X \subset \mathbb{R}^N_x$ в окрестность $U(P) \subset \mathbb{R}^N_p$ точки $P$ такой, что

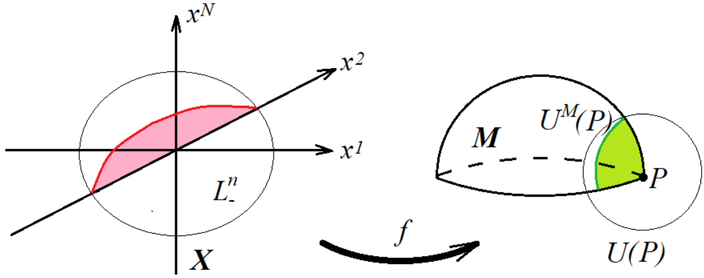
$$U^M = f(L^n \cap X) \tag{3}$$

или

$$U^M = f(L^n_- \cap X), \tag{4}$$

где $U^M := M \cap U(P)$.

При этом диффеоморфизм $f : X \to U(P)$ будем называть *каноническим диффеоморфизмом*, а диффеоморфизм $f^{-1} : U(P) \to X$ – *выпрямляющим диффеоморфизмом* для подмногообразия $M$ в точке $P$.




**Определение.** Множество $M \subset \mathbb{R}^N$ будем называть *гладким $n$-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$ (или $n$-мерным многообразием, гладко вложенным в $\mathbb{R}^N$)* и писать $M \in \mathfrak{M}^n_N$, если $M \in$ $\in \mathfrak{M}^n_N(P)$ для любой точки $P \in M$.

**Замечание.** Открытое множество $M \subset \mathbb{R}^n$ является $n$-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^n$, в качестве канонического диффеоморфизма можно взять тождественное отображение.

**Пример 1.** Нижняя полусфера

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} : \ p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 = 1, \ p_z \leq 0 \right\}$$

является гладким двумерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^3$.

В качестве криволинейной системы координат рассмотрим набор функций

$$x^1 = \theta, \quad x^2 = \varphi, \quad x^3 = \varrho - 1,$$

где $(\varrho, \theta, \varphi)$ – сферические координаты, связанные с прямоугольными декартовыми координатами $(p_x, p_y, p_z)$ следующим образом:

$$\begin{aligned} p_x &= \varrho \cos\theta \cos\varphi \\ p_y &= \varrho \cos\theta \sin\varphi \\ p_z &= \varrho \sin\theta, \end{aligned} \tag{5}$$

$\varrho \geq 0$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, $\varphi \in [0, 2\pi]$.

Тогда в координатах $(x^1, x^2, x^3)$ полусфера $M$ задается системой условий $x^3 = 0$ и $x^1 \leq 0$.

Поэтому в достаточно малой окрестности точки $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \in M$ при $p_z \in (-1, 0)$ полусфера $M$ имеет вид линейного подпространства

$$L^2 = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

В окрестности точки $P = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ 0 \end{pmatrix} \in M$ полусфера $M$ имеет вид полуподпространства

$$L^2_- = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad x^1 \leq 0 \right\}.$$

В окрестности точки $\widehat{P} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \in M$ набор функций $(x^1, x^2, x^3)$ не является криволинейной системой координат, так как отображение (5) не является взаимно-однозначным. Тем не менее, $M \in \mathfrak{M}^2_3(\widehat{P})$. В качестве криволинейной системы координат в окрестности этой точки можно взять, например, систему функций $(u, v, w)$, где

$$\begin{aligned} &u = p_x \\ &v = p_y \\ &w = p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 - 1. \end{aligned}$$

Тогда в окрестности точки $\widehat{P}$ полусфера $M$ имеет вид линейного подпространства, заданного уравнением $w = 0$.

**Теорема 1.** (О гладком подмногообразии, заданном системой уравнений.) *Пусть множество $U \subset \mathbb{R}^N$ открыто, а множество $M \subset \subset \mathbb{R}^N$ задано системой уравнений:*

$$M = \{p \in U : \; g(p) = \overline{0}_k\},$$

*где $g \in C^\infty(U, \mathbb{R}^k)$ и в точке $p_0 \in M$ ранг матрицы Якоби $\mathcal{D}\, g(p_0)$ равен $k$. Тогда $M \in \mathfrak{M}^{N-k}_N(p_0)$.*

**Доказательство.** Пусть $g(p) = \begin{pmatrix} g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$. В силу теоремы о построении криволинейной системы координат, исходя из ее части найдутся гладкие функции $x^1(p), \dots, x^{N-k}(p)$ такие, что набор функций $(g^1, \dots, g^k, x^1, \dots, x^{N-k})$ составляет криволинейную систему координат в окрестности $U(p_0) \subset U$ точки $p_0$. Тогда отображение $\varphi(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ x^{N-k}(p) \\ g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$ является гладким диффеоморфизмом из $U(p_0)$ в окрестность $U(x_0)$ точки $x_0 = \varphi(p_0)$.

Для завершения доказательства теоремы достаточно доказать, что

$$M \cap U(p_0) = \varphi^{-1}(L^{N-k} \cap U(x_0)).$$

Действительно, если $p \in M \cap U(p_0)$, то при $i \in \overline{1,k}$ имеем $g^i(p) = 0$ и, следовательно, $\varphi(p) \in L^{N-k} \cap U(x_0)$, а значит, $p \in \varphi^{-1}(L^{N-k} \cap U(x_0))$. Обратно, пусть $p \in \varphi^{-1}(L^{N-k} \cap U(x_0))$. Тогда точка $x = \varphi(p)$ удовлетворяет включению $x \in L^{N-k} \cap U(x_0)$. Так как $\varphi(p) = x \in L^{N-k}$, то для любого $i \in \overline{1,k}$ имеем $g^i(p) = 0$. Следовательно, $p \in M \cap U(p_0)$. Таким образом, $M \in \mathfrak{M}_N^{N-k}(p_0)$, отображение $\varphi^{-1}$ является каноническим, а отображение $\varphi$ – выпрямляющим диффеоморфизмом для $M$ в точке $p_0$. $\square$

**Пример 2.** Сфера в $\mathbb{R}^N$ радиуса $r > 0$ с центром в точке $p_0 = \begin{pmatrix} p_0^1 \\ \dots \\ p_0^N \end{pmatrix}$, т.е. множество

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} p^1 \\ \dots \\ p^N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N : \ (p^1 - p_0^1)^2 + \dots + (p^N - p_0^N)^2 = r^2 \right\}$$

является гладким подмногообразием размерности $(N-1)$. Это следует из теоремы 1, поскольку матрица Якоби функции

$$g(p) = (p^1 - p_0^1)^2 + \dots + (p^N - p_0^N)^2 - r^2$$

равна строке $2(p^1 - p_0^1, \dots, p^N - p_0^N)$, которая не обращается в ноль при $\begin{pmatrix} p^1 \\ \dots \\ p^N \end{pmatrix} \in M$.

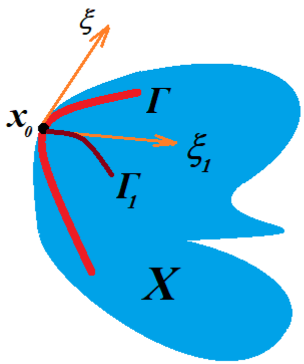
**Задача 1.** Пусть функция $g \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ удовлетворяет условию $\operatorname{grad} g(p) \neq \overline{0}$ для любого вектора $p \in \mathbb{R}^n$ такого, что $g(p) = 0$. Пусть множество $M = \{p \in \mathbb{R}^n : \ g(p) \le 0\}$ не пусто. Покажите, что $M \in$ $\in \mathfrak{M}_n^n$.

## § 3. Геометрический касательный вектор

В формулировке достаточных условий условного экстремума будет использоваться понятие касательного пространства.

**Определение.** Вектор $\xi \in \mathbb{R}^N$ называется *(геометрическим) касательным вектором* к множеству $X \subset \mathbb{R}^N$ в точке $x_0 \in X$, если существует непрерывная вектор-функция $r : [a, b] \to X$ такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a, b]$. (Здесь, как обычно, под $r'(a)$ понимается правая производная вектор-функции $r$ в точке $a$, а под $r'(b)$ – ее левая производная в точке $b$.)

Геометрически это означает существование кривой $\Gamma = \{r(t) : \ t \in$ $\in [a, b]\}$, лежащей в $X$, проходящей через точку $x_0$ и такой, что вектор $\xi$ является направляющим вектором касательной к кривой $\Gamma$ в точке $x_0$.




**Определение.** Множество всех (геометрических) касательных векторов к множеству $X$ в точке $x_0 \in X$ обозначается через $\widetilde{T}_{x_0}(X)$.

$\triangleright$

**Определение.** Множество $X \subset \mathbb{R}^N$ будем называть *конусом*, если для любого вектора $x \in X$ и для любого числа $\lambda > 0$ справедливо включение $\lambda x \in X$.

**Лемма 1.** *Для любого множества $X \subset \mathbb{R}^N$ и любой точки $x_0 \in X$ множество $\widetilde{T}_{x_0}(X)$ является конусом, симметричным относительно начала координат, т.е. если $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$, то $\lambda\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Пусть $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$, $\lambda \in \mathbb{R}$. Покажем, что

$$\lambda\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X). \tag{1}$$

Рассмотрим 3 случая: 1) $\lambda = 0$, 2) $\lambda > 0$, 3) $\lambda < 0$.

1) $\lambda = 0$. Рассмотрим кривую $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a, b]\}$, представляющую собой точку $x_0$: $r(t) = x_0$. Тогда $\Gamma \subset X$, $r(t_0) = x_0$ и $r'(t_0) = \overline{0}$. Следовательно, $\overline{0} \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$ и в случае $\lambda = 0$ включение (1) выполнено.

2) $\lambda > 0$. Так как $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$, то существует кривая $\Gamma = \{r(t) : \ t \in \in [a, b]\} \subset X$ такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a, b]$. Параметризуем кривую $\Gamma$ параметром $\tau = \frac{t}{\lambda}$. Тогда $\Gamma = \left\{\varrho(\tau) : \ \tau \in \left[\frac{a}{\lambda}, \frac{b}{\lambda}\right]\right\}$, где $\varrho(\tau) = r(\lambda\tau)$. Поэтому для $\tau_0 = \frac{t_0}{\lambda}$ имеем $\varrho(\tau_0) = r(t_0) = x_0$, $\varrho'(\tau_0) = = \lambda r'(\lambda\tau_0) = \lambda\xi$. Следовательно, в этом случае включение (1) опять выполнено.

3) $\lambda < 0$. Тогда, как показано в предыдущем пункте, $-\lambda\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$. Поэтому существует кривая $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a, b]\} \subset X$ такая, что $r(t_0) = = x_0$, $r'(t_0) = -\lambda\xi$ при некотором $t_0 \in [a, b]$. Введем параметр $\tau = -t$ и рассмотрим кривую $\Gamma^- = \{r(-\tau) : \ \tau \in [-b, -a]\}$, полученную из $\Gamma$ изменением ориентации. Тогда $\Gamma^- \subset X$ и для $\tau_0 = -t_0$ имеем $r(-\tau_0) = r(t_0) = = x_0$ и $\frac{d}{d\tau} r(-\tau)\big|_{\tau=\tau_0} = -r'(t_0) = \lambda\xi$. Поэтому в этом случае включение (1) снова выполнено. $\square$

$\triangleleft$

**Задача 1.** Покажите, что для множества

$$X = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \ xy = 0\}$$

множество касательных векторов в точке $(0, 0)$ совпадает с $X$ и, следовательно, не является линейным пространством.

**Определение.** Если множество $\widetilde{T}_{x_0}(X)$ является линейным пространством, оно называется *(геометрическим) касательным пространством* к множеству $X$ в точке $x_0 \in X$.

В следующей лемме сформулированы элементарные свойства множества касательных векторов.

**Лемма 2.** 1) *Если* $x_0 \in X_1 \subset X_2 \subset \mathbb{R}^N$, *то* $\widetilde{T}_{x_0}(X_1) \subset \widetilde{T}_{x_0}(X_2)$.

2) *Множество касательных векторов к множеству* $X \subset \mathbb{R}^N$ *в точке* $x_0 \in X$ *имеет локальный характер, т.е. зависит от вида множества* $X$ *лишь в сколь угодно малой окрестности точки* $x_0$.

*Иными словами, для любой окрестности* $U(x_0)$ *точки* $x_0 \in X$ *справедливо равенство*

$$\widetilde{T}_{x_0}(X) = \widetilde{T}_{x_0}(X \cap U(x_0)).$$

**Доказательство.** 1) Если $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X_1)$, то существует кривая $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$, лежащая в $X_1$ и такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a,b]$. Тогда $\Gamma$ лежит в $X_2$ и, следовательно, $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X_2)$.

2) Включение $\widetilde{T}_{x_0}(X \cap U(x_0)) \subset \widetilde{T}_{x_0}(X)$ следует из пункта (1). Докажем обратное включение. Пусть $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$. Тогда существует кривая $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$, лежащая в $X$ и такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a,b]$. В силу непрерывности функции $r(t)$ найдется отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$ такой, что $t_0 \in [\alpha,\beta]$ и $r(t) \in U(x_0)$ при всех $t \in [\alpha,\beta]$. Заменяя отрезок $[a,b]$ отрезком $[\alpha,\beta]$, получим кривую $\widetilde{\Gamma} = \{r(t) : \ t \in [\alpha,\beta]\}$, лежащую в $X \cap U(x_0)$. Поэтому $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X \cap U(x_0))$. $\square$

**Лемма 3.** *Множество геометрических касательных векторов к линейному подпространству* $L^n \subset \mathbb{R}^N$ *или полуподпространству* $L^n_- \subset \mathbb{R}^N$ *совпадает с* $L^n$:

$$\widetilde{T}_{x_0}(L^n) = L^n \qquad \forall x_0 \in L^n, \tag{2}$$

$$\widetilde{T}_{x_0}(L^n_-) = L^n \qquad \forall x_0 \in L^n_-. \tag{3}$$

**Доказательство.** Фиксируем произвольную точку $x_0 \in L^n_-$. Сначала докажем включение $\widetilde{T}_{x_0}(L^n_-) \subset L^n$. Фиксируем произвольный вектор $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L^n_-)$. По определению касательного вектора найдется вектор-функция $r : [a,b] \to L^n_-$ и число $t_0 \in [a,b]$ такие, что $r'(t_0) = \xi$. Пусть $r^i(t)$ и $\xi^i$ – компоненты векторов $r(t)$ и $\xi$ соответственно. Так как $r(t) \in L^n_- \subset L^n$, то согласно формуле (1) § 2 имеем $r^i(t) = 0$ при всех $i \in \{n+1, N\}$. Следовательно, $\xi^i = (r^i)'(t_0) = 0$ при всех $i \in \{n+1, N\}$, т.е. $\xi \in L^n$. Таким образом, доказано включение $\widetilde{T}_{x_0}(L^n_-) \subset L^n$.

Докажем обратное включение. Фиксируем произвольный вектор $\xi \in L^n$. Рассмотрим кривые (прямолинейные отрезки)

$$\Gamma^+ = \{r(t): \ t \in [0,1]\}, \qquad \Gamma^- = \{r(t): \ t \in [-1,0]\},$$

где $r(t) = x_0 + t\xi$. В зависимости от знака первой координаты вектора $\xi$ выполнено хотя бы одно из включений $\Gamma^+ \subset L^n_-$ или $\Gamma^- \subset L^n_-$. Так как $r(0) = x_0$ и $r'(0) = \xi$, то $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L^n_-)$. Итак, равенство (3) доказано. Равенство (2) доказывается аналогично. □

Обобщая понятие образа множества $A$ при отображении $f : X \to Y$ на случай $A \not\subset X$, образом $f(A)$ множества $A$ при отображении $f$ будем называть множество $f(A \cap X)$.

**Лемма 4.** *Пусть задан диффеоморфизм $y(x)$ из окрестности точки $x_0$ в окрестность точки $y_0 = y(x_0)$. Пусть $x_0 \in X \subset \mathbb{R}^N$. Тогда*

$$\widetilde{T}_{y_0}(y(X)) = \{\mathcal{D}\, y(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)\}. \tag{4}$$

**Доказательство.** Пусть $\xi \in \widetilde{T}_{x_0}(X)$. Тогда найдется непрерывная функция $r : [a,b] \to X$ такая, что $r(t_0) = x_0$, $r'(t_0) = \xi$ при некотором $t_0 \in [a,b]$. В силу непрерывности функции $r(t)$ найдется такой отрезок $[\alpha,\beta] \subset [a,b]$, что $t_0 \in [\alpha,\beta]$ и для любого $t \in [\alpha,\beta]$ точка $r(t)$ лежит в окрестности точки $x_0$, в которой определена функция $y(x)$. Тогда $g(t) = y(r(t))$ является непрерывной функцией из $[\alpha,\beta]$ в $y(X)$, $y(r(t_0)) = y(x_0) = y_0$ и по теореме о дифференцировании сложной функции $g'(t) = \mathcal{D}\, y(x_0) \cdot r'(t_0) = \mathcal{D}\, y(x_0) \cdot \xi$. Поэтому $\mathcal{D}\, y(x_0) \cdot \xi \in \widetilde{T}_{y_0}(y(X))$. Таким образом, доказано включение правой части равенства (4) в его левую часть. Повторяя эти же рассуждения для диффеоморфизма, обратного к исходному, получаем обратное включение. □

**Теорема 1.** (О структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$.) *Множество геометрических касательных векторов к гладкому $n$-мерному подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$ является $n$-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^N$.*

*Если $f$ – канонический диффеоморфизм для $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ в точке $P$, $x_0 = f^{-1}(P)$, то*

$$\widetilde{T}_P(M) = \{\mathcal{D}\, f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in L^n\}. \tag{5}$$

**Доказательство.** Пусть $f$ – канонический диффеоморфизм для $M \in \mathfrak{M}_N^n(P)$ в точке $P$, $x_0 = f^{-1}(P)$. По определению канонического диффеоморфизма справедливо одно из равенств

$$U^M = f(L^n \cap X) \quad \text{или} \quad U^M = f(L_-^n \cap X), \tag{6}$$

где $U^M = M \cap U(P)$, $U(P)$ – окрестность точки $P$, $X$ – окрестность точки $x_0$.

В силу леммы 3 имеем $\widetilde{T}_{x_0}(L^n) = \widetilde{T}_{x_0}(L_-^n) = L^n$. Поэтому согласно лемме 2

$$\widetilde{T}_{x_0}(L^n \cap X) = \widetilde{T}_{x_0}(L_-^n \cap X) = L^n.$$

Еще раз используя лемму 2, получаем

$$\widetilde{T}_P(M) = \widetilde{T}_P(M \cap U(P)) = \widetilde{T}_P(U^M).$$

Отсюда, из равенств (6) и из леммы 4 следует, что

$$\widetilde{T}_P(U^M) = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L^n \cap X)\} = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in L^n\}$$

или

$$\widetilde{T}_P(U^M) = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \widetilde{T}_{x_0}(L_-^n \cap X)\} = \{\mathcal{D} f(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in L^n\}.$$

Поэтому с учетом невырожденности матрицы $\mathcal{D} f(x_0)$ множество $\widetilde{T}_P(M)$ является $n$-мерным линейным подпространством пространства $\mathbb{R}^N$. □

**Теорема 2.** (О структуре множества геометрических касательных векторов к подмногообразию, заданному системой уравнений.) *Пусть вектор-функция $g : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^k$ является гладкой в окрестности точки $p_0 \in M$ и матрица $\mathcal{D} g(p_0)$ имеет полный ранг $k$. Тогда множество геометрических касательных векторов $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ к множеству*

$$M = \{p \in \mathbb{R}^N : \ g(p) = \overline{0}_k\}$$

*имеет вид*

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\xi \in \mathbb{R}^N : \ dg(p_0)[\xi] = \overline{0}_k\}.$$

**Доказательство.** Пусть $g(p) = \begin{pmatrix} g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$. Как показано в доказательстве теоремы о гладком подмногообразии, заданном системой уравнений, отображение вида $\varphi(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ x^{N-k}(p) \\ g^1(p) \\ \dots \\ g^k(p) \end{pmatrix}$ является выпрямляющим, а $\varphi^{-1}$ – каноническим диффеоморфизмом для $M \in \mathfrak{M}_N^{N-k}$ в точке $p_0$. Обозначим $x_0 = \varphi(p_0)$. Согласно теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$ имеем

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\mathcal{D}\,\varphi^{-1}(x_0) \cdot \widehat{\xi} :\ \widehat{\xi} \in L^{N-k}\}.$$

Поскольку $\mathcal{D}\,\varphi^{-1}(x_0) = (\mathcal{D}\,\varphi(p_0))^{-1}$, то, обозначая $\xi = \mathcal{D}\,\varphi^{-1}(x_0) \cdot \widehat{\xi}$, получаем

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\xi \in \mathbb{R}^N :\ \mathcal{D}\,\varphi(p_0) \cdot \xi \in L^{N-k}\} =$$
$$= \{\xi \in \mathbb{R}^N :\ d\varphi(p_0)[\xi] \in L^{N-k}\} =$$
$$= \{\xi \in \mathbb{R}^N :\ dg(p_0)[\xi] = \overline{0}_k\}.$$

$\square$

Глава 16

# ЭКСТРЕМУМЫ ФУНКЦИЙ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

## § 1. Безусловный экстремум

**Определение.** Пусть на множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана функция $f : X \to \mathbb{R}$. Точка $x_0 \in X$ называется точкой *строгого локального минимума (максимума)* функции $f$ на множестве $X$, если

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \bigcap X \hookrightarrow \ f(x_0) < (>) f(x).$$

Если здесь строгое неравенство заменить нестрогим, то получится определение *нестрогого локального минимума (максимума).* Точки минимума и максимума называются точками *экстремума.*

**Определение.** Пусть $x_0$ – точка локального экстремума функции $f$ на множестве $X$. Тогда если $x_0 \in \operatorname{int} X$, то $x_0$ называется точкой *безусловного локального экстремума* функции $f$; если $x_0 \in \partial X$, то $x_0$ называется точкой *условного локального экстремума* функции $f$.

**Лемма 1.** *$x_0$ – точка строгого безусловного локального минимума функции $f$ тогда и только тогда, когда*

$$\exists \delta > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x_0) < f(x).$$

**Доказательство.** Пусть $x_0$ – точка строго безусловного локального минимума функции $f$. Тогда $\exists \delta_1 > 0 : \forall x \in \overset{o}{U}_{\delta_1}(x_0) \bigcap X \hookrightarrow$ $\hookrightarrow \ f(x_0) < f(x)$. Поскольку $x_0 \in \operatorname{int} X$, то $\exists \delta_2 > 0 : U_{\delta_2}(x_0) \subset X$. Определим $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. Тогда $\forall x \in U_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x_0) < f(x)$. Обратное утверждение очевидно. $\square$

Утверждения, аналогичные лемме 1, справедливы и для максимума, и для нестрогих экстремумов. Иными словами, в определении безусловного экстремума множество $X$ указывать не нужно.

**Теорема 1.** *(Необходимое условие экстремума.) Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и дифференцируема в точке $x_0$. Если $x_0$ – точка безусловного локального экстремума функции $f$, то* $\operatorname{grad} f(x_0) = \overline{0}$.

**Доказательство.** Поскольку координаты вектора $\operatorname{grad} f(x_0) = \overline{0}$ равны частным производным $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)$, то достаточно доказать, что $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = 0 \ \forall i \in \overline{1,n}$. Зафиксируем произвольное $i \in \overline{1,n}$ и рассмотрим функцию одной переменной $\varphi(x^i) = f(x_0^1, \ldots, x_0^{i-1}, x^i, x_0^{i+1}, \ldots, x_0^n)$. Поскольку $x_0$ – точка локального экстремума функции $f$, то $x_0^i$ – точка локального экстремума функции $\varphi(x^i)$. В силу теоремы Ферма $\varphi'(x_0^i) = 0$. Следовательно, $\frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0) = \varphi'(x_0^i) = 0$. □

**Определение.** Если $\operatorname{grad} f(x_0) = \overline{0}$, то точка $x_0$ называется *стационарной точкой* функции $f$.

Из теоремы 1 следует, что точки экстремума функции являются ее стационарными точками. Обратное неверно. Например, для функции одной переменной $f(x) = x^3$ точка $x_0 = 0$ является стационарной точкой, но не является точкой экстремума.

Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ (т. е. частные производные функции $f$ до второго порядка включительно непрерывны в окрестности точки $x_0$). Тогда справедлива следующая формула Тейлора (глава 6, §11, теорема 2):

$$f(x) - f(x_0) = df(x_0)[\Delta x] + \frac{1}{2} d^2 f(x_0)[\Delta x] + o(|\Delta x|^2) \quad \text{при} \quad \Delta x \to \overline{0}.$$

Через $f'_x(x_0)$ обозначим строку частных производных первого порядка или, что то же самое, координатную строку вектора градиента:

$$f'_x(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x^1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial f}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix},$$

а через $f''_{xx}(x_0)$ – матрицу частных производных второго порядка:

$$f''_{xx}(x_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^1}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^1}(x_0) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^1 \partial x^n}(x_0) & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^n \partial x^n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Поскольку для дважды непрерывно дифференцируемой функции $f$ частные производные второго порядка не зависят от порядка дифференцирования, то $f''_{xx}(x_0)$ – симметрическая матрица.

Полагая $dx = \Delta x = x - x_0 = \begin{pmatrix} x^1 - x_0^1 \\ \cdots \\ x^n - x_0^n \end{pmatrix}$, $\quad \Delta f = f(x) - f(x_0)$, получаем равенства

$$df(x_0)[dx] = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x^i}(x_0)\, dx^i = f'_x(x_0)\, dx,$$

$$d^2 f(x_0)[dx] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(x_0)\, dx^i\, dx^j = (dx)^T\, f''_{xx}(x_0)\, dx. \tag{1}$$

Из формулы (1) следует, что второй дифференциал функции $f$ является квадратичной формой относительно вектора $dx$.

Напомним, что квадратичная форма $k(x) = x^T M\, x$ называется

1) положительно определенной, если $k(x) > 0 \quad \forall x \neq \overline{0}$;

2) отрицательно определенной, если $k(x) < 0 \quad \forall x \neq \overline{0}$;

3) знаконеопределенной, если $\exists x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n :\ k(x_1) > 0,\, k(x_2) < 0$.

Легко видеть, что квадратичная форма $k(x) = x^T M\, x$ отрицательно определена, если квадратичная форма $-k(x) = x^T\, (-M)\, x$ положительно определена. Для проверки положительной и отрицательной определенности квадратичной формы удобно использовать критерий Сильвестра. Доказательство того, что квадратичная форма знаконеопределена, проводят по определению.

**Лемма 2.** *Если квадратичная форма $k(x)$ положительно определена, то*

$$\exists \lambda > 0 : \forall x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow\ k(x) \geq \lambda |x|^2.$$

**Доказательство.** Поскольку функция $k(x) = x^T\, M\, x$ непрерывна, а единичная сфера $S = \{x \in \mathbb{R}^n \,:\, |x| = 1\}$ ограничена и замкнута, т. е. является компактом, то существует $\min\limits_{x \in S} k(x) = \lambda$. Из положительной определенности квадратичной формы $k(x)$ следует, что $\lambda > 0$. Из определения минимума получаем, что $\forall \widetilde{x} \in S \hookrightarrow\ k(\widetilde{x}) \geq \lambda$.

Если $x = \overline{0}$, то $k(x) = 0$, и неравенство $k(x) \geq \lambda |x|^2$ выполняется.

Если $x \neq \overline{0}$, то $\widetilde{x} = \frac{x}{|x|} \in S$, следовательно, $k(\widetilde{x}) \geq \lambda, \quad k(x) = x^T\, M\, x = |x|^2\, \widetilde{x}^T\, M\, \widetilde{x} = |x|^2\, k(\widetilde{x}) \geq \lambda |x|^2$. □

**Теорема 2.** *(Достаточные условия экстремума.) Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0$ и пусть $x_0$ – стационарная точка функции $f$. Обозначим $k(dx) = d^2 f(x_0)[dx]$. Тогда*

*1) если квадратичная форма $k(dx)$ положительно определена, то $x_0$ – точка строгого безусловного локального минимума функции $f$;*

*2) если квадратичная форма $k(dx)$ отрицательно определена, то $x_0$ – точка строгого безусловного локального максимума функции $f$;*

*3) если квадратичная форма $k(dx)$ знаконеопределена, то $x_0$ не является точкой безусловного локального экстремума функции $f$;*

*4) если квадратичная форма $k(dx)$ не является ни положительно, ни отрицательно определенной и не является знаконеопределенной, то $x_0$ может быть точкой локального экстремума, а может и не быть.*

**Доказательство.** Поскольку $x_0$ – стационарная точка функции $f$, то $df(x_0)[dx] = 0$, следовательно, по формуле Тейлора

$$\Delta f = \frac{1}{2} k(\Delta x) + o(|\Delta x|^2) \quad \text{при} \quad \Delta x \to \overline{0}. \tag{2}$$

1) Пусть квадратичная форма $k(dx)$ положительно определена. В силу леммы 2 $\quad \exists \lambda > 0 \,:\, \forall \Delta x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow\ k(\Delta x) \geq \lambda |\Delta x|^2$. Отсюда и из (2) следует, что $\Delta f \geq \frac{\lambda}{2} |\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2)$ при $\Delta x \to \overline{0}$. По определению $o$-малого $\lim\limits_{\Delta x \to \overline{0}} \frac{o(|\Delta x|^2)}{|\Delta x|^2} = 0$, поэтому

$$\lim_{\Delta x \to \overline{0}} \frac{\frac{\lambda}{2} |\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2)}{|\Delta x|^2} = \frac{\lambda}{2} > 0.$$

Следовательно,

$$\exists\delta > 0 \ : \ \forall \Delta x \in \overset{o}{U}_\delta(\overline{0}) \hookrightarrow \ \frac{\lambda}{2}|\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2) > 0,$$

поэтому $\forall x \in \overset{o}{U}_\delta(x_0) \hookrightarrow \ f(x) - f(x_0) = \Delta f \geq \frac{\lambda}{2}|\Delta x|^2 + o(|\Delta x|^2) > 0$, а значит, $x_0$ – точка строгого безусловного локального минимума.

Пункт (2) сводится к пункту (1) заменой функции $f(x)$ на $-f(x)$.

3) Пусть квадратичная форма $k(dx)$ знаконеопределена, т. е. $\exists \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}^n$: $k(\xi_1) > 0$, $k(\xi_2) < 0$. Применяя формулу (2) для $\Delta x = t\xi_1$, получим $f(x_0 + t\xi_1) - f(x_0) = \Delta f = \frac{1}{2}k(\Delta x) + o(|\Delta x|^2) = \frac{1}{2}k(t\xi_1) + o(t^2) = t^2\left(k(\xi_1) + \frac{o(t^2)}{t^2}\right)$ при $t \to 0$. Поэтому

$$\exists\delta_1 > 0 : \ \forall t \in (0, \delta_1) \hookrightarrow \ \Delta f = f(x_0 + t\xi_1) - f(x_0) > 0.$$

Аналогично,

$$\exists\delta_2 > 0 : \ \forall t \in (0, \delta_2) \hookrightarrow \ \Delta f = f(x_0 + t\xi_2) - f(x_0) < 0.$$

Поэтому $\forall \delta > 0 \quad \exists t_1 = \min\left\{\frac{\delta_1}{2}, \frac{\delta}{2|\xi_1|}\right\}$, $\exists t_2 = \min\left\{\frac{\delta_2}{2}, \frac{\delta}{2|\xi_2|}\right\}$ такие, что $x_1 = x_0 + t_1\xi_1 \in U_\delta(x_0)$, $\quad x_2 = x_0 + t_2\xi_2 \in U_\delta(x_0)$, $\quad f(x_1) - f(x_0) > 0$, $\quad f(x_2) - f(x_0) < 0$. Следовательно, точка $x_0$ не является ни точкой локального минимума, ни точкой локального максимума функции $f$.

4) Пусть $f(x)$ – функция одной переменной $x \in \mathbb{R}$. Тогда в случае $f''(x_0) = 0$ квадратичная форма $d^2 f(x_0)[dx] = f''(x_0)\,(dx)^2$ не является положительно определенной, отрицательно определенной, а также не является знаконеопределенной.

Для функции $f(x) = x^4$ имеем $f''(0) = 0$, а точка $x_0 = 0$ является точкой минимума.

Для функции $f(x) = x^3$: $f''(0) = 0$, а точка $x_0 = 0$ не является точкой экстремума. □

**Задача 1.** Пусть функция $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ дважды непрерывно дифференцируема и $\det f''_{xx}(x_0) < 0$. Может ли функция $f$ достигать локальный безусловный экстремум в точке $x_0$?

## § 2. Условный экстремум

Пусть в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ заданы скалярная целевая функция $f(x)$ и вектор-функция $g(x) = \begin{pmatrix} g^1(x) \\ \cdots \\ g^m(x) \end{pmatrix}$, задающая ограничения. Рассмотрим задачу отыскания экстремума целевой функции $f(x)$ на множестве

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : \ g(x) = \overline{0}_m\} : \tag{1}$$

*Исследовать на экструмум* $f(x)$ *по* $x \in \mathbb{R}^n$ *таким, что* $g(x) = \overline{0}_m$.
(2)

Далее будем всегда предполагать, что число ограничений $g^i(x) = 0$ меньше числа переменных $x^j$: $\quad m < n$.

**Определение.** *Функцией Лагранжа* для задачи (2) называется функция

$$L(x, \lambda) := f(x) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g^i(x), \tag{3}$$

где вектор $\lambda := \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \cdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}$ называется вектором *множителей Лагранжа.*

Давая неформальное описание метода множителей Лагранжа, Жозеф Луи Лагранж сформулировал принцип, состоящий в том, что для отыскания решения задачи (2) следует составить функцию (3) и действовать так, как будто мы исследуем эту функцию на безусловный экстремум. Далее мы сформулируем и докажем две теоремы – о необходимых и о достаточных условиях условного экстремума, которые соответствуют принципу Лагранжа и представляют собой инструмент для исследования экстремума в задаче (2).

**Теорема 1.** (Необходимые условия экстремума.) *Пусть* $x_0$ *– точка локального экстремума в задаче (2). Пусть функция* $f(x)$ *непрерывно дифференцируема, а вектор-функция* $g(x)$ *гладкая в окрестности точки* $x_0$*. Пусть матрица* $\mathcal{D}\, g(x_0)$ *имеет полный ранг* $m$*.*

*Тогда существует вектор множителей Лагранжа $\lambda \in \mathbb{R}^m$ такой, что точка $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ является стационарной точкой функции Лагранжа.*

**Теорема 2.** (Достаточные условия экстремума.) *Пусть $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda_0 \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа. Пусть функция $f(x)$ дважды непрерывно дифференцируема в окрестности точки $x_0$. Пусть вектор-функция $g(x)$ является гладкой в окрестности точки $x_0 \in \in \mathbb{R}^n$ и матрица $\mathcal{D}\, g(x_0)$ имеет полный ранг $m$. И пусть $k(dx) = = (dx)^T\, L''_{xx}(x_0, \lambda_0)\, dx$ – второй дифференциал функции Лагранжа по переменным $x$. Тогда*

*1) если квадратичная форма $k(dx)$ положительно определена на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$, т. е. $k(dx) > 0 \quad \forall dx \in \widetilde{T}_{x_0}(M) \backslash \{\,\overline{0}\,\}$, то $x_0$ – точка строгого локального минимума в задаче (2);*

*2) если квадратичная форма $k(dx)$ отрицательно определена на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$, т. е. $k(dx) < 0 \quad \forall dx \in \widetilde{T}_{x_0}(M) \backslash \{\,\overline{0}\,\}$, то $x_0$ – точка строгого локального максимума в задаче (2);*

*3) если квадратичная форма $k(dx)$ знаконеопределена на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$, т. е. существуют векторы $\xi_1, \xi_2 \in \widetilde{T}_{x_0}(M)$: $k(\xi_1) > 0$, $k(\xi_2) < 0$, то $x_0$ не является точкой локального экстремума в задаче (2);*

*4) если условия предыдущих пунктов не выполнены, то точка $x_0$ может быть точкой локального экстремума в задаче (2), а может и не быть ею.*

**Общие построения для доказательства теорем 1, 2.**

Обозначим $y^i(x) = g^i(x)$ при $i \in \overline{1, m}$. В силу теоремы о построении криволинейной системы координат, исходя из ее части найдутся гладкие функции $y^{m+1}(x), \ldots, y^n(x)$ такие, что набор функций $(y^1, \ldots, y^n)$ составляет криволинейную систему координат в окрестности точки $x_0$. Рассмотрим отображение $y(x) = \begin{pmatrix} y^1(x) \\ \ldots \\ y^n(x) \end{pmatrix}$, через $x(y)$ обозначим обратное к нему отображение. Через $\widetilde{f}(y)$ и $\widetilde{L}(y, \lambda)$ обозначим функцию $f$ и функцию Лагранжа $L$, выраженные через координаты $y$:

$$\widetilde{f}(y) := f(x(y)), \qquad \widetilde{L}(y, \lambda) := L(x(y), \lambda).$$

Подставляя в формулу (3) $x(y)$ вместо $x$, получаем

$$\widetilde{L}(y,\lambda) = f(x(y)) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i = \widetilde{f}(y) - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i y^i. \tag{4}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y,\lambda) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y) - \lambda_i \qquad \forall i \in \overline{1,m}, \tag{5}$$

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y,\lambda) = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y) \qquad \forall i \in \overline{m+1,n}. \tag{6}$$

Обозначим $y_0 := y(x_0)$.

Точка $x_0$ доставляет локальный минимум (максимум) функции $f(x)$ при условиях $g^i(x) = 0$, $i \in \overline{1,m}$ тогда и только тогда, когда точка $y_0$ доставляет локальный минимум (максимум) функции $\widetilde{f}(y)$ при условиях $y^1 = \ldots = y^m = 0$, т.е. точка $(y_0^{m+1}, \ldots, y_0^n)$ доставляет безусловный локальный минимум (максимум) функции $\widetilde{f}(0,\ldots,0,y^{m+1},\ldots,y^n)$.

**Доказательство теоремы 1.**

Пусть $x_0$ – точка локального экстремума в задаче (2). Тогда точка $(y_0^{m+1}, \ldots, y_0^n)$ – точка безусловного экстремума функции $\widetilde{f}(0,\ldots,0,y^{m+1},\ldots,y^n)$. Из теоремы о необходимом условии безусловного экстремума получаем, что

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y_0) = 0 \qquad \forall i \in \overline{m+1,n}. \tag{7}$$

Полагая $\lambda_i = \frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y_0)$ при $i \in \overline{1,m}$ и используя равенства (5)–(7), получаем

$$\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda) = 0 \qquad \forall i \in \overline{1,n}.$$

По теореме о дифференцировании сложной функции

$$\frac{\partial L}{\partial x^j}(x_0,\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda) \cdot \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0) = 0 \qquad \forall j \in \overline{1,n}.$$

Отсюда и из равенств

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda^i}(x_0, \lambda) = -g^i(x_0) = 0 \qquad \forall i \in \overline{1, m}$$

следует, что $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$.

$\square$

**Доказательство теоремы 2.**

Пусть $\begin{pmatrix} x_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа $L(x, \lambda)$. Тогда согласно теореме о дифференцировании сложной функции $\begin{pmatrix} y_0 \\ \lambda \end{pmatrix}$ – стационарная точка функции Лагранжа $\widetilde{L}(y, \lambda)$. Отсюда и из формулы (6) следует, что

$$\frac{\partial \widetilde{f}}{\partial y^i}(y_0) = 0 \qquad \forall i \in \overline{m+1, n},$$

то есть выполнены необходимые условия безусловного экстремума функции $\widetilde{f}(0, \ldots, 0, y^{m+1}, \ldots, y^n)$ в точке $(y_0^{m+1}, \ldots, y_0^n)$. Согласно теореме о достаточных условиях безусловного экстремума характер экстремума функции $\widetilde{f}(0, \ldots, 0, y^{m+1}, \ldots, y^n)$ в этой точке определяется характером знакоопределенности второго дифференциала этой функции, т.е. квадратичной формы

$$\sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{f}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0)\, dy^i\, dy^j .$$

Согласно равенству (4) эта квадратичная форма совпадает с квадратичной формой

$$\widetilde{m}(dy^{m+1}, \ldots, dy^n) := \sum_{i=m+1}^{n} \sum_{j=m+1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0, \lambda)\, dy^i\, dy^j . \tag{8}$$

Осталось доказать, что характер знакоопределенности квадратичной формы (8) на пространстве $\mathbb{R}^{n-m}$ совпадает с характером знакоопределенности квадратичной формы

$$k(dx) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0, \lambda)\, dx^i\, dx^j$$

на касательном пространстве $\widetilde{T}_{x_0}(M)$.

Дифференцируя равенство $L(x,\lambda) = \widetilde{L}(y(x),\lambda)$ при фиксированном $\lambda$, получаем

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial L}{\partial x^i}(x,\lambda)\,dx^i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y(x),\lambda)\ dy^i(x).$$

Еще раз дифференцируя полученное равенство в точке $(x_0,\lambda)$, имеем

$$k(dx) = \sum_{i=1}^{n} \quad \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 L}{\partial x^i \partial x^j}(x_0,\lambda)\,dx^i\,dx^j =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0,\lambda)\ dy^i(x_0)\ dy^j(x_0) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda)\ d^2 y^i(x).$$

Поскольку $(y_0,\lambda)$ – стацинарная точка функции $\widetilde{L}(y,\lambda)$, то $\frac{\partial \widetilde{L}}{\partial y^i}(y_0,\lambda) = 0$, а значит,

$$k(dx) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 \widetilde{L}}{\partial y^i \partial y^j}(y_0,\lambda)\ dy^i(x_0)\ dy^j(x_0), \tag{9}$$

где $dy^i(x_0) = dy^i(x_0)[dx] = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial y^i}{\partial x^j}(x_0)\ dx^j$.

Согласно теореме 2 вектор $dx$ лежит в касательном пространстве $\widetilde{T}_{x_0}(M)$ тогда и только тогда, когда $dg(x_0)[dx] = \overline{0}_m$, то есть $dy^i(x_0)[dx] = 0$ для любого $i \in \overline{1,m}$. Отсюда и из равенства (9) следует, что характер знакоопределенности квадратичной формы $k(dx)$ на $\widetilde{T}_{x_0}(M)$ совпадает с характером знакоопределенности квадратичной формы (8). $\square$

**Пример 1.** Достигается ли в точке $(0,0)$ локальный экстремум в задаче

$$\text{на экстремум } f(x,y) = 3y - 2x \text{ по } (x,y)\in\mathbb{R}^2: \quad y+e^{2y}=x+e^{x}? \tag{10}$$

**Решение.** Поскольку уравнение $x+e^x = y+e^{2y}$ неразрешимо относительно $x$ или $y$, то воспользуемся методом множителей Лагранжа. Функция Лагранжа имеет вид $L(x,y,\lambda) = 3y - 2x - \lambda(y + e^{2y} - - x - e^x)$. Найдем стационарные точки функции Лагранжа:

$$\left\{\begin{array}{l} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{c} -2 + \lambda(1 + e^x) = 0, \\ 3 - \lambda(1 + 2e^{2y}) = 0, \\ y + e^{2y} - x - e^x = 0. \end{array}\right. \tag{11}$$

Получилась система из трех уравнений для определения стационарных точек функции Лагранжа. В данном примере рассматривается точка $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Подставляя $x = 0$, $y = 0$ в систему (11), получаем, что точка $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ является стационарной точкой функции Лагранжа. Согласно теореме 2, теперь нужно исследовать знакоопределенность второго дифференциала функции $L(x, y, \lambda) = 3y - 2x - (y + e^{2y} - x - e^x)$ на $\widetilde{T}_{x_0}$. Поскольку $d^2L(x, y, \lambda) = e^x(dx)^2 - 4e^{2y}(dy)^2$, то $d^2L(x_0, y_0, \lambda) = (dx)^2 - 4(dy)^2$. Найдем касательное подпространство:

$$\widetilde{T}_{x_0} = \left\{ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \ : \ d(x + e^x - y - e^{2y})\Big|_{(x,y)=(0,0)} = 0 \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \ : \ 2dx - 3dy = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{2}dy \\ dy \end{pmatrix} \ : \ dy \in \mathbb{R} \right\}.$$

Поэтому при $\begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix} \in \widetilde{T}_{x_0} \setminus \{\,\overline{0}\,\}$: $\quad d^2L(x_0, y_0, \lambda) = (\frac{3}{2}dy)^2 - 4(dy)^2 = -\frac{7}{4}(dy)^2 < 0$. Следовательно, квадратичная форма $d^2L(x_0, y_0, \lambda)$ отрицательно определена на $\widetilde{T}_{x_0}$. Поэтому $(0, 0)$ – точка локального максимума в задаче (10).

Глава 17

# МНОГООБРАЗИЯ

## § 1. Топологическое пространство

В предыдущем параграфе мы рассматривали подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$. В дальнейшем будет удобнее забыть об объемлющем пространстве $\mathbb{R}^N$ и рассматривать многообразие $M$ само по себе. Для того, чтобы дать общее (абстрактное) определение многообразия $M$ нужно использовать понятие топологического пространства.

**Определение.** *Топологическим пространством* $(X, \tau)$ называется пара, состоящая из множества $X$ и топологии $\tau$, т.е. семейства подмножеств множества $X$ таких, что

1) $\emptyset \in \tau$, $X \in \tau$;

2) если $X_\lambda \in \tau$ $\forall \lambda \in \Lambda$, то $\left(\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} X_\lambda\right) \in \tau$;

3) если $X_1, X_2 \in \tau$, то $X_1 \cap X_2 \in \tau$.

Множество $U \subset X$ называется *открытым* в топологическом пространстве $(X, \tau)$, если $U \in \tau$.

**Замечание.** Поскольку семейство открытых множеств в любом метрическом пространстве (в частности, в $\mathbb{R}^n$) удовлетворяет определению топологии, то любое метрическое пространство является топологическим пространством. Семейство всех открытых подмножеств метрического пространства $X$ с метрикой $\varrho$ называется *топологией в $X$, порожденной метрикой $\varrho$.*

**Определение.** *Окрестностью точки* $x \in X$ в топологическом пространстве $(X, \tau)$ называется любое открытое множество $U(x) \subset X$, содержащее точку $x$.

**Определение.** Пусть $(X, \tau)$ – топологическое пространство, $A \subset X$. *Внутренностью* $\operatorname{int} A$ множества $A$ называется множество точек $x \in X$, для которых существует окрестность $U(x) \subset A$. *Замыканием* $\overline{A}$ множества $A$ называется множество точек $x \in X$ таких, что $U(x) \cap A \neq \emptyset$ для любой окрестности $U(x)$ точки $x$.

**Определение.** Пусть $(X, \tau_X)$ – топологическое пространство, $A \subset \subset X$. Определим $\tau_A$ как семейство множеств $V$ вида $V = U \cap A$, где $U \in \tau_X$. Тогда $\tau_A$ называется топологией на множестве $A$, *индуцированной* топологией $\tau_X$.

**Лемма 1.** *Пусть $(X, \tau_X)$ – топологическое пространство, $A \subset X$, $\tau_A$ – топология на $A$, индуцированная топологией $\tau_X$. Тогда $(A, \tau_A)$ – топологическое пространство.*

**Доказательство.** 1) Так как $\emptyset \in \tau_X$, то $\emptyset = \emptyset \cap A \in \tau_A$. Поскольку $X \in \tau_X$, то $A = X \cap A \in \tau_A$.

2) Пусть $V_\lambda \in \tau_A \quad \forall \lambda \in \Lambda$. Тогда для любого $\lambda \in \Lambda$ найдется множество $U_\lambda \in \tau_X$ такое, что $V_\lambda = U_\lambda \cap A$. Поскольку $U := \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \in \tau_X$, то $\bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} V_\lambda = U \cap A \in \tau_A$.

3) Пусть $V_1, V_2 \in \tau_A$. Тогда найдутся множества $U_1, U_2 \in \tau_X$ такие, что $V_i = U_i \cap A$ при $i = 1, 2$. Поскольку $U_1 \cap U_2 \in \tau_X$, то $V_1 \cap \cap V_2 = U_1 \cap U_2 \cap A \in \tau_A$. $\square$

**Определение.** Топологическое пространство $(X, \tau)$ называется *хаусдорфовым*, если для любых двух различных точек $x, y \in X$ существуют их непересекающиеся окрестности.

**Определение.** Будем говорить, что элемент $x_0 \in X$ является пределом последовательности $\{x_k\}$ элементов топологического пространства $(X, \tau)$ и писать $x_k \xrightarrow{\tau} x_0$, если

$$\forall U(x_0)\ \exists N :\ \forall k \geq N \hookrightarrow\ x_k \in U(x_0),$$

где $U(x_0)$ – окрестность точки $x_0$.

**Замечание.** Если топологическое пространство $(X, \tau)$ хаусдорфово, то у последовательности $\{x_n\}$ элементов этого пространства не может быть двух различных пределов. Это доказывается так же, как и для числовой последовательности.

**Замечание.** Если топологическое пространство $(X, \tau)$ не является хаусдорфовым, последовательность $\{x_n\}$ может иметь несколько различных пределов в этом пространстве. Рассмотрим множество $X = \{a, b\}$, состоящее из двух различных элементов $a$ и $b$. Рассмотрим минимальную топологию $\tau = \{X, \emptyset\}$ на $X$. Окрестностью точки $a$ (и, аналогично, точки $b$) является только множество $X$. Поэтому пространство $(X, \tau)$ не является хаусдорфовым. Любая последовательность $\{x_n\}$ в $X$ имеет два различных предела: $a$ и $b$.

**Лемма 2.** *Любое метрическое пространство (в частности, любое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$ с индуцированной топологией) является хаусдорфовым.*

**Доказательство.** Пусть $X$ – метрическое пространство с метрикой $\varrho$. Пусть точки $x_1, x_2 \in X$ различны. Определим $\varepsilon := \frac{\varrho(x_1,x_2)}{2}$. Тогда $\varepsilon > 0$ и множества $U_\varepsilon(x_i) = \{x \in X : \ \varrho(x, x_i) < \varepsilon\}$ являются непересекающимися окрестностями точек $x_i$. $\square$

**Определение.** *Базой* топологического пространства $(X, \tau)$ называется такое семейство $\mathcal{F}$ открытых подмножеств $X$, что каждое открытое подмножество $X$ является объединением некоторого набора элементов семейства $\mathcal{F}$.

**Лемма 3.** *Любое подмножество $X$ пространства $\mathbb{R}^n$ с индуцированной топологией является топологическим пространством со счетной базой.*

**Доказательство.** В качестве счетной базы на $X$ можно взять семейство множеств, полученных путем пересечения множества $X$ с открытыми шарами в $\mathbb{R}^n$ с рациональными радиусами и центрами в точках $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ с рациональными координатами $x_i$. $\square$

**Определение.** Пусть $(X, \tau_X)$ и $(Y, \tau_Y)$ – топологические пространства.

Отображение $f : X \to Y$ называется *непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой окрестности $U(f(x_0)) \in \tau_Y$ точки $f(x_0)$ найдется окрестность $U(x_0) \in \tau_X$ точки $x_0$ такая, что $f\Big(U(x_0)\Big) \subset U(f(x_0))$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *секвенциально непрерывным в точке* $x_0 \in X$, если для любой последовательности $\{x_k\}$ элементов $X$ из сходимости $x_k \xrightarrow{\tau_X} x_0$ следует сходимость $f(x_k) \xrightarrow{\tau_Y} f(x_0)$

Отображение $f : X \to Y$ называется *(секвенциально) непрерывным*, если оно (секвенциально) непрерывно в каждой точке $x_0 \in X$.

Отображение $f : X \to Y$ называется *гомеоморфизмом*, если оно взаимно однозначно, непрерывно и обратное к нему отбражение $f^{-1} : Y \to X$ непрерывно.

**Замечание.** Легко видеть, что из непрерывности отображения $f$ следует его секвенциальная непрерывность. Обратное в общем случае неверно. В случае, если топология $\tau_X$ имеет счетную базу, непрерывность отображения $f : X \to Y$ эквивалентна его секвенциальной непрерывности.

Далее в определении многообразия будет требоваться, что оно является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой. При этих требованиях справедливы привычные нам свойства пределов и непрерывных отображений.

**Лемма 4.** *Пусть $(X, \tau_X)$ и $(Y, \tau_Y)$ – топологические пространства, отображение $f : X \to Y$ непрерывно. Тогда для любого открытого множества $A \in \tau_Y$ его прообраз $f^{-1}(A) := \{x \in X : \ f(x) \in A\}$ является открытым в топологии $\tau_X$.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольную точку $x \in f^{-1}(A)$. Так как $f(x) \in A$, то множество $A$ является окрестностью точки $f(x)$. По определению непрерывности отображения $f$ найдется окрестность $U(x) \in \tau_X$ точки $x$ такая, что $f(U(x)) \subset A$, а значит, $U(x) \subset \subset f^{-1}(A)$. Поэтому $f^{-1}(A) = \bigcup\limits_{x \in f^{-1}(A)} U(x)$ и, следовательно, множество $f^{-1}(A)$ открыто как объединение открытых множеств $U(x)$. $\square$

**Определение.** Топологическое пространство $(X, \tau)$ называется *компактным*, если из любого открытого покрытия множества $X$ можно выделить его конечное подпокрытие.

Топологическое пространство $(X, \tau)$ называется *секвенциально компактным*, если из любой последовательности элементов $x_k \in X$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

Множество $A \subset X$ в топологическом пространстве $(X, \tau)$ называется (секвенциально) компактным или (секвенциальным) компактом, если топологическое пространство $A$ с топологией, индуцированной топологией $\tau$, является (секвенциально) компактным.

**Замечание.** Из компактности топологического пространства следует его секвенциальная компактность. Обратное в общем случае неверно. Для метрических пространств компактность эквивалентна секвенциальной компактности.

**Определение.** Множество $A$ в топологическом пространстве $(X, \tau_X)$ называется ***гомеоморфным*** множеству $B$ в топологическом пространстве $(Y, \tau_Y)$, если существует гомеоморфизм из $A$ в $B$.

**Замечание.** Если множество $A$ гомеоморфно множеству $B$, то множество $B$ гомеоморфно множеству $A$. Если $A$ гомеоморфно $B$, а $B$ гомеоморфно $C$, то $A$ гомеоморфно $C$. Это следует из того, что отображение, обратное к гомеоморфизму, является гомеоморфизмом и суперпозиция двух гомеоморфизмов также гомеоморфизм.

**Определение.** Свойство множеств, которое сохраняется при любом гомеоморфизме, называется *топологическим инвариантом.*

**Определение.** Топологическое пространство $X$ называется *линейно-связным,* если для любых его точек $P$ и $Q$ существует непрерывная функция $r : [0,1] \to X$ такая, что $r(0) = P$ и $r(1) = Q$.

**Замечание.** Компактность и линейная связность являются топологическими инвариантами, поскольку они сохраняются при любом непрерывном отображении.

$\triangleright$

**Лемма 5.** *1) Единичная сфера $S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$ не гомеоморфна пространству $\mathbb{R}^k$ при любом $k \in \mathbb{N}$.*

*2) Пусть $\overset{o}{S}{}^{n-1} = S^{n-1} \setminus \{P\}$ – единичная сфера с выколотой точкой $P \in S^{n-1}$. Множество $\overset{o}{S}{}^{n-1}$ гомеоморфно пространству $\mathbb{R}^{n-1}$.*

**Доказательство.** 1) Поскольку единичная сфера $S^{n-1}$ является компактом, пространство $\mathbb{R}^k$ компактом не является, а компактность – топологический инвариант, то множества $S^{n-1}$ и пространство $\mathbb{R}^k$ не гомеоморфны.

2) Без потери общности будем считать, что $P = (0, \dots, 0, 1)$. Рассмотрим отображение $\varphi : \overset{o}{S}{}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{1 - x_n} \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_{n-1} \end{pmatrix}, \qquad (x_1, \dots, x_n) \in \overset{o}{S}{}^{n-1},$$

задающее стереографическую проекцию, а также обратное отображение $\varphi^{-1} : \mathbb{R}^{n-1} \to \overset{o}{S}{}^{n-1}$

$$\varphi^{-1}(y_1,\dots,y_{n-1}) = \frac{1}{|y|^2+1}\begin{pmatrix} 2y_1 \\ \dots \\ 2y_{n-1} \\ |y|^2-1 \end{pmatrix}, \qquad y=(y_1,\dots,y_{n-1})\in\mathbb{R}^n.$$

Из непрерывности отображений $\varphi$ и $\varphi^{-1}$ следует, что $\varphi$ – гомеоморфизм. $\square\triangleleft$

**Пример 1.** Покажем, что полуинтервал $[a,b)$ не гомеоморфен интервалу $(c,d)$. Предположим противное: существует гомеоморфизм $f:[a,b)\to(c,d)$. Обозначим $y_0 := f(a)$. Тогда $y_0\in(c,d)$ и интервал $(a,b)$ гомеоморфен множеству $(c,y_0)\cup(y_0,d)$. Это противоречит тому, что линейная связность является топологическим инвариантом.

## § 2. Карта на топологическом пространстве и параметризация гладкого подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$

В дальнейшем для краткости в случае, если понятно о какой топологии идет речь, вместо «топологическое пространство $(X,\tau)$» будем писать «топологическое пространство $X$».

**Определение.** Множество $V$ называется *$n$-мерной допустимой областью параметров*, если $V$ – открытое подмножество одного из следующих трех топологических пространств: $\mathbb{R}^n$,

$$\mathbb{R}^n_- = \left\{\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n:\ x^1\le 0\right\} \quad \text{или} \quad \mathbb{R}^n_+ = \left\{\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n:\ x^1\ge 0\right\},$$

где топологии в $\mathbb{R}^n_-$ и $\mathbb{R}^n_+$ индуцированы топологией пространства $\mathbb{R}^n$.

**Пример 1.** Открытый круг $D=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1\right\}$ и полукруг $D_-=\left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2<1,\ x\le 0\right\}$ являются двумерными допустимыми областями параметров, т.к. они окрыты в в топологических пространствах $\mathbb{R}^2$ и $\mathbb{R}^2_-$ соответственно. Замкнутый круг $\overline{D} = \left\{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2:\ x^2+y^2\le 1\right\}$ не является допустимой областью параметров, т.к. он не является открытым подмножеством ни одного из топологических пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$, $\mathbb{R}^n_+$.

**Определение.** Пара $(\psi, U)$ называется $n$-мерной *картой* на топологическом пространстве $M$, если $U$ – открытое множество топологического пространства $M$, $\psi : V \to U$ – гомеоморфизм из $V$ в $U$, $V$ – $n$-мерная допустимая область параметров. При этом

а) гомеоморфизм $\psi$ называется *гомеоморфизмом карты* или *параметризацией карты* $(\psi, U)$,

б) множество $U$ называется *районом действия*, а

в) множество $V$ – *областью параметров* этой карты.

**Замечание.** Пусть для карты $(\psi, U)$ на топологическом пространстве $M$ область параметров $V := \psi^{-1}(U)$ является открытым подмножеством $\mathbb{R}^n_+$. Рассмотрим симметричное множеству $V$ множество

$$V_- := \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} -x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V \right\}$$

и отображение

$$\psi_- : V_- \to U, \quad \psi_-(x^1, x^2, \dots, x_n) = \psi(-x^1, x^2, \dots, x_n) \quad \forall \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V_-.$$

Тогда $V_-$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^n_-$ и районы действия карт $(\psi, U)$ и $(\psi_-, U)$ совпадают: $U = \psi(V) = \psi_-(V_-)$.

Имея в виду замену карты $(\psi, U)$ на карту $(\psi_-, U)$, можно рассматривать только карты, области параметров которых являются открытыми подмножествами $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$, исключая $\mathbb{R}^n_+$ из определения допустимой области параметров. Однако переход от карты $(\psi, U)$ к карте $(\psi_-, U)$, как мы увидим позже, изменяет ориентацию. При рассмотрении вопроса ориентации многообразия будет существенно, что допустимой областью параметров может быть открытое подмножество любого из трех топологических пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$, $\mathbb{R}^n_+$.

**Лемма 1.** *Пусть $f : X \to U(P)$ – канонический диффеоморфизм для $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ в точке $P \in M$, множество $X \subset \mathbb{R}^N$ открыто, $U(P)$ – окрестность точки $P$ в $\mathbb{R}^N$, $U^M = M \cap U(P)$. Тогда* а) *множество*

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in f^{-1}(U^M) \right\} \tag{1}$$

*является допустимой областью параметров;*

б) *отображение* $\psi : V \to U^M$, *заданное формулой*

$$\psi(x^1, \dots, x^n) = f(x^1, \dots, x^n, 0, \dots, 0), \qquad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in V, \tag{2}$$

*является гомеоморфизмом из* $V \subset \mathbb{R}^n$ *в* $U^M \subset \mathbb{R}^N$ *в смысле топологий пространств* $\mathbb{R}^n$ *и* $\mathbb{R}^N$.

в) *пара* $(\psi, U^M)$ *является картой на топологическом пространстве* $M$, *топология которого индуцирована топологией пространства* $\mathbb{R}^N$.

**Доказательство.** По определению канонического диффеоморфизма выполнено одно из равенств

$$f^{-1}(U^M) = L^n \cap X \tag{3}$$

или

$$f^{-1}(U^M) = L^n_- \cap X, \tag{4}$$

а) Если выполнено равенство (3), то

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n : \quad \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} \in X \right\}.$$

Если выполнено равенство (4), то

$$V=\left\{\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ \dots\\ \dots\\ x^n\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^n_-:\quad\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ x^n\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}\in X\right\}.$$

Так как функция $g(x^1,\dots,x^n)=\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ x^n\\ 0\\ \dots\\ 0\end{pmatrix}$ непрерывна, то согласно лемме 4 множество $V$ является открытым подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$.

б) Если выполнено равенство (3), то

$$\psi(V)=\left\{f(x^1,\dots,x^n,0,\dots,0):\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ x^n\end{pmatrix}\in V\right\}=$$

$$=\left\{f(x^1,\dots,x^N):\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ x^N\end{pmatrix}\in L^n\cap X\right\}=f(L^n\cap X)=U^M.$$

Если выполнено равенство (4), то

$$\psi(V)=\left\{f(x^1,\dots,x^n,0,\dots,0):\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ x^n\end{pmatrix}\in V\right\}=$$

$$=\left\{f(x^1,\dots,x^N):\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ x^N\end{pmatrix}\in L^n_-\cap X\right\}=f(L^n_-\cap X)=U^M.$$

Поэтому в любом случае $\psi(V)=U^M$.

Для любой точки $p\in U(P)$ через $x^i(p)$ обозначим координаты вектор-функции $f^{-1}(p)$: $\quad f^{-1}(p)=\begin{pmatrix}x^1(p)\\ \dots\\ x^N(p)\end{pmatrix}$. Пусть $\begin{pmatrix}x^1\\ \dots\\ x^n\end{pmatrix}\in V$, $\psi(x^1,\dots,x^n)=p$. Тогда $f(x^1,\dots,x^n,0,\dots,0)=p$, а значит,

$$\begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = f^{-1}(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ x^N(p) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, отображение $\psi : V \to U^M$ взаимно однозначно и $\psi^{-1}(p) = \begin{pmatrix} x^1(p) \\ \dots \\ x^n(p) \end{pmatrix}$. Так как координаты вектор-функции $\psi^{-1}(p)$ являются координатами непрерывной вектор-функции $f^{-1}(p)$, то отображение $\psi^{-1} : U^M \to V$ также непрерывно. Поэтому $\psi$ является гомеоморфизмом из $V$ в $U^M$.

Из пунктов (а), (б) и определения карты получаем пункт (в). $\square$

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$ и $f$ – канонический диффеоморфизм для $M$ в точке $P \in M$. Пусть для карты $(\psi, U^M)$ выполняется соотношение (2), где $V = \psi^{-1}(U^M)$. Тогда будем говорить, что *карта* $(\psi, U^M)$ *порождена каноническим диффеоморфизмом* $f$. Если для карты $(\psi, U^M)$ найдется окрестность $U^M_P \subset U^M$ точки $P$ (окрестность в смысле топологического пространства $M$) такая, что карта $(\psi, U^M_P)$ порождена каноническим диффеоморфизмом $f$ для $M$ в точке $P$, то будем говорить, что *карта* $(\psi, U^M)$ *в некоторой окрестности точки* $P$ *порождена каноническим диффеоморфизмом* $f$.

Ранее (§5 глава 13) были определены классы $C^k(X, Y)$ $k$ раз непрерывно дифференцируемых отображений из $X \subset \mathbb{R}^n$ в $Y \subset \mathbb{R}^m$ при условии, что множество $X$ открыто в $\mathbb{R}^n$. Распространим это определение на случай, когда $X$ – допустимая область параметров.

**Определение классов** $C^k(V, Y)$, где $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Пусть $V$ – допустимая область параметров, $Y$ – произвольное подмножество $\mathbb{R}^m$. Класс $C^0(V, Y) = C(V, Y)$ состоит из непрерывных отображений $f : V \to Y$. Класс $C^k(V, Y)$ при $k \in \mathbb{N}$ состоит из отображений $f : V \to Y$ таких, что их можно продолжить до $k$ раз непрерывно дифференцируемых отображений $\tilde{f} \in C^k(\tilde{V}, \mathbb{R}^m)$, где $\tilde{V}$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, $V \subset \tilde{V}$, $\tilde{f}(x) = f(x)$ при $x \in V$.

Класс $C^\infty(V,Y)$ определяется как пересечение классов $C^k(V,Y)$ по всем $k\in\mathbb{N}$. Отображения $f\in C^k(V,Y)$ будем называть $C^k$-гладкими.

**Замечание.** Пусть $M\in\mathfrak{M}^n_N(P)$ и карта $(\psi,U^M)$ порождена некоторым каноническим диффеоморфизмом $f$ для $M$ в точке $P$, $V = \psi^{-1}(U^M)$, $x_0=\psi^{-1}(P)$. Тогда

$$\psi\in C^\infty(V,\mathbb{R}^N),\qquad \operatorname{rg}\mathcal{D}\,\psi(x_0)=n. \tag{5}$$

Условие $\psi\in C^\infty(V,\mathbb{R}^N)$ следует из формулы (2) и гладкости диффеоморфизма $f$. Поскольку столбцы матрицы $\mathcal{D}\,\psi$ являются первыми $n$ столбцами невырожденной матрицы $\mathcal{D}\,f$, то $\operatorname{rg}\mathcal{D}\,\psi(x_0)=n$.

**Теорема 1.** (О гладком подмногообразии, заданном параметрически.) *Пусть $n$-мерная карта $(\psi,U^M)$ на топологическом пространстве $M\subset\mathbb{R}^N$ (топология на $M$ индуцирована топологией пространства $\mathbb{R}^N$) удовлетворяет условиям (5), где $x_0\in V := \psi^{-1}(U^M)$. Тогда $M\in\mathfrak{M}^n_N(P)$, где $P=\psi(x_0)$. При этом карта $(\psi,U^M)$ в некоторой окрестности точки $P$ порождена некоторым каноническим диффеоморфизмом $f$.*

**Доказательство.** Согласно замечанию, сделанному после определения карты, можно считать, что $V$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$.

В силу условия $\operatorname{rg}\mathcal{D}\,\psi(x_0)=n$ по теореме о ранге матрица $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$ имеет $n$ линейно независимых строк. Для определенности предполагаем, что первые $n$ строк этой матрицы линейно независимы. Пусть

$$\psi(x^1,\dots,x^n)=\begin{pmatrix}\psi^1(x^1,\dots,x^n)\\ \cdots\\ \psi^N(x^1,\dots,x^n)\end{pmatrix}.$$

Рассмотрим отображение

$$f(\overline{x})=\begin{pmatrix}\psi^1(x^1,\dots,x^n)\\ \cdots\\ \psi^n(x^1,\dots,x^n)\\ \psi^{n+1}(x^1,\dots,x^n)+x^{n+1}\\ \cdots\\ \psi^N(x^1,\dots,x^n)+x^N\end{pmatrix},\qquad \overline{x}=\begin{pmatrix}x^1\\ \cdots\\ \cdots\\ \cdots\\ x^N\end{pmatrix}.$$

Обозначим $\overline{x}_0 := \begin{pmatrix}x_0\\ \overline{0}_{N-n}\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^N$. Тогда $f(\overline{x}_0)=\psi(x_0)=P$. Матрица Якоби отображения $f$ имеет вид

$$
\mathcal{D}\, f = \begin{pmatrix}
\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\psi^1}{\partial x^n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial\psi^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\psi^n}{\partial x^n} & 0 & \dots & \dots & 0 \\
\frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\psi^{n+1}}{\partial x^n} & 1 & 0 & \dots & 0 \\
\dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial\psi^N}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial\psi^N}{\partial x^n} & 0 & \dots & 0 & 1
\end{pmatrix}
$$

Поэтому

$$
\det \mathcal{D}\, f(\overline{x}_0) = \det \begin{pmatrix}
\frac{\partial\psi^1}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial\psi^1}{\partial x^n}(x_0) \\
\dots & \dots & \dots \\
\frac{\partial\psi^n}{\partial x^1}(x_0) & \dots & \frac{\partial\psi^n}{\partial x^n}(x_0)
\end{pmatrix} \neq 0,
$$

где последнее неравенство следует из того, что строки последней матрицы – это первые $n$ строк матрицы $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$, которые линейно независимы.

Так как $\det \mathcal{D}\, f(\overline{x}_0) \neq 0$, то согласно теореме об обратном отображении сужение отображения $f$ на некоторую окрестность точки $\overline{x}_0$ является гладким диффеоморфизмом. Поэтому набор функций $(x^1, \dots, x^N) = f^{-1}$ является криволинейной системой координат в $U_\varepsilon(P)$ при некотором $\varepsilon > 0$. В этой системе координат множество $M$ в $U_\varepsilon(P)$ задается системой уравнений

$$
\begin{cases}
x^{n+1} = 0, \\
\dots \\
x^N = 0
\end{cases} \tag{6}
$$

Если точка $x_0$ лежит на границе (в смысле топологии пространства $\mathbb{R}^n$) допустимой области параметров $V \subset \mathbb{R}^n_-$, то к системе уравнений (6) нужно добавить неравенство $x^1 \leq 0$. Тогда в криволинейной системе координат $(x^1, \dots, x^N)$ в $U_\varepsilon(P)$ множество $M$ имеет вид подпространства $L^n$ или полуподпространства $L^n_-$. Следовательно, $M \in \mathfrak{M}^n_N(P)$.

Проведем детальное доказательство последнего утверждения.

Если $x_0$ – внутренняя точка множества $V$, то существует число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(x_0) \subset V$. Если $x_0$ лежит на границе множества $V \subset \mathbb{R}^n_-$, то найдется число $\delta_0 > 0$ такое, что $U_{\delta_0}(x_0) \cap \mathbb{R}^n_- \subset$ $\subset V$. Согласно определению классов $C^k(V, Y)$, выбирая достаточно малое $\delta_0 > 0$, можно считать, что $\psi \in C^\infty(U_{\delta_0}(x_0), \mathbb{R}^N)$. Тогда $f \in$ $\in C^\infty(U_{\delta_0}(\overline{x}_0), \mathbb{R}^N)$. Так как $\det \mathcal{D} f(\overline{x}_0) \neq 0$, то существует такое число $\delta \in (0, \delta_0]$, что сужение отображения $f$ на $U_\delta(\overline{x}_0)$ является гладким диффеоморфизмом из $U_\delta(\overline{x}_0)$ в окрестность $U(P) \subset \mathbb{R}^N$ точки $P$.

Поскольку множество $U^M$ открыто в топологическом пространстве $M$, то найдется такое число $\varepsilon_0 > 0$, что $U_{\varepsilon_0}(P) \cap M \subset U^M$ и $U_{\varepsilon_0}(P) \subset U(P)$. Используя непрерывность отображения $\psi^{-1}$, выберем число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ так, что $\psi^{-1}(U_\varepsilon(P) \cap M) \subset U_\delta(x_0)$. Полагая

$$X := \{\overline{x} \in U_\delta(\overline{x}_0) : \ f(\overline{x}) \in U_\varepsilon(P)\}, \tag{7}$$

получаем, что сужение отображения $f$ на открытое множество $X$ является гладким диффеоморфизмом из $X$ в $U_\varepsilon(P)$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что для множества $U_P^M := U_\varepsilon(P) \cap U^M = U_\varepsilon(P) \cap M$ справедливо одно из равенств

$$U_P^M = f(X \cap L^n) \tag{8}$$

или

$$U_P^M = f(X \cap L_-^n). \tag{9}$$

Рассмотрим случай, когда $x_0$ – внутренняя точка множества $V$. В этом случае $U_{\delta_0}(x_0) \subset V$. Фиксируем произвольную точку $\overline{x} \in X \cap L^n$. Тогда существует точка $x \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\overline{x} = \begin{pmatrix} x \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix}$. Поскольку $\overline{x} \in X \subset U_\delta(\overline{x}_0)$, то $x \in U_\delta(x_0) \subset V$. Из определения отображения $f$ следует равенство $f(\overline{x}) = \psi(x)$. Поэтому $f(\overline{x}) = \psi(x) \in \psi(V) =$ $= U^M$. Итак, $f(\overline{x}) \in U_\varepsilon(P) \cap U^M = U_P^M$, что доказывает включение $f(X \cap L^n) \subset U_P^M$.

Докажем обратное включение. Фиксируем произвольную точку $p \in U_P^M$. Поскольку $p \in U^M = \psi(V)$, то найдется точка $x \in V$ такая, что $p = \psi(x)$. При этом $x \in \psi^{-1}(U_\varepsilon(P) \cap M) \subset U_\delta(x_0)$. Полагая $\overline{x} :=$ $= \begin{pmatrix} x \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix}$, получаем $\overline{x} \in U_\delta(\overline{x}_0)$ и $f(\overline{x}) = \psi(x) = p \in U_\varepsilon(P)$. Отсюда и из равенства (7) следует включение $\overline{x} \in X \cap L^n$. Поэтому $p = f(\overline{x}) \in$ $\in f(X \cap L^n)$. Таким образом, в данном случае реализуется равенство (8).

В случае, когда $x_0$ – граничная точка множества $V$, проводя аналогичные рассуждения, с заменой $L^n$ на $L_-^n$ получаем равенство (9).

При этом при доказательстве включения $f(X \cap L^n_-) \subset U^M_P$ вместо $x \in U_\delta(x_0) \subset V$ следует написать $x \in U_\delta(x_0) \cap \mathbb{R}^n_- \subset V$.

Поскольку согласно определению отображения $f$ справедливо равенство $\psi(x^1, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0)$, то карта $(\psi, U^M_P)$ порождена каноническим диффеоморфизмом $f$ для $M$ в точке $P$. $\square$

**Замечание.** Условие полного ранга матрицы Якоби $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$ существенно в теореме 1, что показывает следующий пример.

**Пример 2.** Рассмотрим множество

$$M = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = |x|, \; x \in [-1, 1]\}.$$

Рассмотрим функцию

$$\beta(t) = \begin{cases} e^{1-\frac{1}{t}}, & t \in (0, 1], \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

Заметим, что $\beta \in C^\infty([0, 1], [0, 1])$ является гомеоморфизмом из $[0, 1]$ в $[0, 1]$ и $\beta^{(k)}(0) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Поэтому отображение $\psi : [-1, 1] \to M$, заданное формулой $\psi(t) = \begin{pmatrix} \beta(|t|) \cdot \operatorname{sign} t \\ \beta(|t|) \end{pmatrix}$, является гомеоморфизмом из $[-1, 1]$ в $M$, причем $\psi \in C^\infty([-1, 1], M)$, однако матрица Якоби $\mathcal{D}\,\psi(0)$ имеет ранг $0 < 1 = n$. Таким образом, все условия теоремы 1 кроме условия полного ранга матрицы Якоби $\mathcal{D}\,\psi(x_0)$ выполнены.

При этом $M$ не является гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^2$ в точке $P = (0, 0)$. Действительно, в противном случае по теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$ множество $\widetilde{T}_P(M)$ было бы линейным пространством. Однако

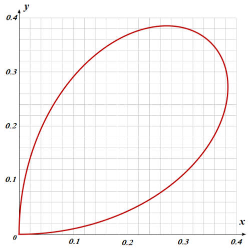
$$\widetilde{T}_P(M) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = x \quad \text{или} \quad y = -x\}$$

не является линейным пространством.

**Замечание.** Условие непрерывности отображения $\psi^{-1}$ (содержащееся в определении гомеоморфизма) существенно в теореме 1. Действительно, рассмотрим, например, множество $M = \psi([0, \frac{\pi}{2}))$, где отображение $\psi : [0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}^2$ задано формулой

$$\psi(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos^2 \varphi \cdot \sin \varphi \\ \sin^2 \varphi \cdot \cos \varphi \end{pmatrix}, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right).$$

Отображение $\psi : [0, \frac{\pi}{2}) \to M$ является гладким и взаимно однозначным, но не является гомеоморфизмом, т.к. обратное к нему отображение $\psi^{-1}$ не непрерывно в точке $P = (0, 0)$. Остальные условия теоремы 1 выполнены. Множество $M$ не является гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^2$ в точке $P$, что доказывается так же, как и в предыдущем примере.




**Следствие теоремы 1.**

Для множества $M \subset \mathbb{R}^N$ и точки $P \in M$ следующие условия эквивалентны:

(а) существует $n$-мерная карта $(\psi, U^M)$ на топологическом пространстве $M$, для которой справедливы соотношения

$$\psi \in C^\infty(V, \mathbb{R}^N), \qquad \operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x_0) = n,$$

где $V = \psi^{-1}(U^M)$, $x_0 = \psi^{-1}(P)$;

(б) $M \in \mathfrak{M}_N^n(P)$.

**Доказательство.** Согласно теореме 1 из условия (а) следует условие (б). Обратно, пусть $M \in \mathfrak{M}_N^n(P)$. В силу леммы 1 существует карта $(\psi, U^M)$, порожденная каноническим диффеоморфизмом для $M$ в точке $P$. В силу соотношений (5) выполнено условие (а). $\square$

**Замечание.** Из теоремы 1 следует, что простая гладкая кривая $\Gamma = \{r(t) : t \in [a, b]\}$, параметризованная функцией $r \in C^\infty([a, b], \mathbb{R}^N)$ такой, что $r'(t) \neq \overline{0}$, является одномерным гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$.

## § 3. Гладкие многообразия

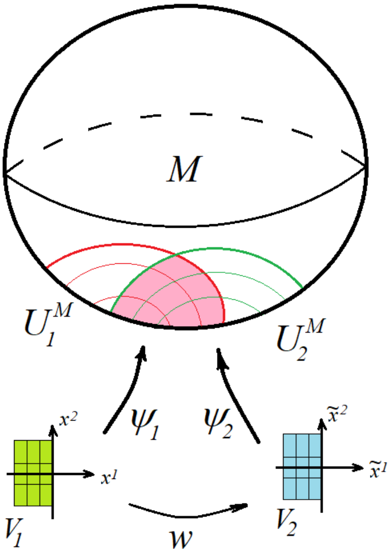
**Определение.** *Атласом* на топологическом пространстве $(M, \tau)$ называется набор $n$-мерных карт $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ на этом топологическом пространстве, районы действия которых покрывают множество $M$, т.е. $\quad M = \bigcup\limits_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda$.

**Определение.** *$n$-мерным (абстрактным) многообразием* называется хаусдорфово топологическое пространство $M$ со счетной базой, на котором существует атлас $n$-мерных карт.

**Лемма 1.** *Гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ удовлетворяет определению $n$-мерного (абстрактного) многообразия.*

**Доказательство.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N$. Согласно леммам 2, 3 § 1 множество $M$ с топологией, индуцированной топологией $\mathbb{R}^N$, является хаусдорфовым топологическим пространством со счетной базой. Согласно лемме 1 § 2 для любой точки $P \in M$ найдется карта $(\psi, U)$ на топологическом пространстве $M$, район действия которой содержит точку $P$. Семейство всех таких карт составляет атлас на $M$. $\square$

**Определение замены координат.** Пусть на топологическом пространстве $M$ заданы две карты $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$, районы действия которых имеют непустое пересечение $U := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Пусть $V_1 = \psi_1^{-1}(U)$, $V_2 = \psi_2^{-1}(U)$. Тогда отображение $w : V_1 \to V_2$, $w = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ называется *заменой координат* от карты $(\psi_1, U_1)$ к карте $(\psi_2, U_2)$, *отображением перехода* или *отображением склейки* этих карт.




**Замечание.** Множества $V_i$, фигурирующие в предыдущем определении, являются допустимыми областями параметров, т.е. открытыми подмножествами одного из топологических пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$

или $\mathbb{R}^n_+$. Действительно, обозначим $\widetilde{V}_i := \psi_i^{-1}(U_i)$, $i = 1, 2$. Гомеоморфизм карты $\psi_i : \widetilde{V}_i \to M$ является непрерывным отображением относительно топологий пространств $\widetilde{V}_i$ и $M$, где топология в $\widetilde{V}_i$ индуцирована топологией пространства $\mathbb{R}^n$. Поскольку множество $U$ открыто в топологическом пространстве $M$, то по лемме 4 § 1 множество $V_i = \psi_i^{-1}(U)$ открыто в топологическом пространстве $\widetilde{V}_i$. Согласно определению карты множество $\widetilde{V}_i$ открыто в топологическом пространстве $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$. Поэтому множество $V_i$ также является открытым подмножеством соответствующего топологического пространства.

**Определение.** Пусть $V_1$ и $V_2$ – допустимые области параметров. Отображение $f : V_1 \to V_2$ называется гладким диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно, $f \in C^\infty(V_1, V_2)$ и $f^{-1} \in C^\infty(V_2, V_1)$, где классы $C^\infty(V_1, V_2)$ и $C^\infty(V_2, V_1)$ определены в § 2.

**Определение.** Атлас на $n$-мерном многообразии $M$ называется *гладким атласом*, если для любых двух карт этого атласа, районы действия которых пересекаются, замена координат является гладким диффеоморфизмом.

Атлас на многообразии, состоящий из одной карты, считается гладким.

**Теорема 1.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N$. Тогда карты на топологическом пространстве $M$, порожденные каноническими диффеоморфизмами на $M$, составляют гладкий атлас.*

**Доказательство.** Согласно лемме 1 § 2 для любой точки $P \in \in M$ найдется карта $(\psi, U)$ на топологическом пространстве $M$, порожденная каноничеким диффеоморфизмом, район действия которой содержит точку $P$. Семейство всех таких карт составляет атлас на $M$. Покажем, что этот атлас гладкий.

Пусть карты $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$ на топологическом пространстве $M$ порождены каноническими диффеоморфизмами для $M$ и пусть $U := U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Покажем, что отображение перехода от карты $(\psi_1, U_1)$ к карте $(\psi_2, U_2)$ является гладким диффеоморфизмом. Фиксируем произвольную точку $P \in U$. По условию существуют канонические диффеоморфизмы $f_i : X_i \to U(P)$, порождающие карты

$(\psi_i, U_i)$, т.е.

$$\psi_i(x^1, \ldots, x^n) = f_i(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0), \quad i = 1, 2, \tag{1}$$

где $X_i$, $U(P)$ – открытые множества в $\mathbb{R}^N_x$ и $\mathbb{R}^N_p$ соответственно, $U = M \cap U(P)$. Обозначим $V_i := \psi_i^{-1}(U)$. Выразим отображение замены координат $w = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$, $\quad w : V_1 \to V_2$ через канонические диффеоморфизмы $f_1$ и $f_2$. Пусть $x \in V_1$, $y = w(x)$. Обозначим $p = \psi_1(x)$. Тогда $y = \psi_2^{-1}(p)$, т.е. $p = \psi_2(y)$. Отсюда и из (1) следует, что

$$p = f_1(x, \overline{0}_{N-n}) = f_2(y, \overline{0}_{N-n}) = f_2(w(x), \overline{0}_{N-n}).$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} w(x) \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix} = (f_2^{-1} \circ f_1)(x, \overline{0}_{N-n}) \qquad \forall x \in V_1, \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} w^{-1}(y) \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix} = (f_1^{-1} \circ f_2)(y, \overline{0}_{N-n}) \qquad \forall y \in V_2. \tag{3}$$

Поскольку $f_1$, $f_2$ – гладкие диффеоморфизмы, то отображения $f_2^{-1} \circ f_1$ и $f_1^{-1} \circ f_2$ являются $C^\infty$-гладкими. Отсюда и из формул (2), (3) следует, что отображение $w : V_1 \to V_2$ и обратное к нему $w^{-1} : V_2 \to V_1$ являются $C^\infty$-гладкими. Поэтому $w$ – гладкий диффеоморфизм. $\square$

**Определение.** Два гладких атласа на многообразии $M$ называются *эквивалентными*, если их объединение является гладким атласом на $M$. Семейство всех глаких атласов, эквивалентных заданному гладкому атласу на $M$ называется *гладкой структурой* на $M$.

**Замечание.** Легко видеть, что если атлас $\mathcal{A}_1$ эквивалентен атласу $\mathcal{A}_2$, а атлас $\mathcal{A}_2$ эквивалентен атласу $\mathcal{A}_3$, то атлас $\mathcal{A}_1$ эквивалентен атласу $\mathcal{A}_3$. Поэтому любые два атласа заданной гладкой структуры эквивалентны.

**Определение.** *Гладким $n$-мерным многообразием* называется пара $(M, \mathcal{D})$, состоящая из $n$-мерного многообразия $M$ и гладкой структуры $\mathcal{D}$ на $M$. Семейство всех гладких $n$-мерных многообразий будем обозначать через $\mathfrak{M}^n$. В тех случаях, когда рассматривается только одна гладкая структура на многоообразии $M$, будем писать «гладкое многообразие $M$» или «$M \in \mathfrak{M}^n$», подразумевая многообразие $M$ вместе с заданной на нем гладкой структурой.

**Замечание.** Из теоремы 1 следует, что для гладкого подмногообразия $M$ пространства $\mathbb{R}^N$ существует *естественная гладкая структура*, заданная атласом карт, порожденных каноническими диффеоморфизмами на $M$. Если не оговорено другое, то на $M \in \mathfrak{M}_N^n$ будем рассматривать именно эту гладкую структуру. В этом смысле любое гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ является глаким многообразием, т.е.

$$\mathfrak{M}_N^n \subset \mathfrak{M}^n.$$

**Замечание.** Из того, что множество $M \subset \mathbb{R}^N$ является гладким многообразием не следует, что $M$ – гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$. Рассматривая атлас на $M = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ |x| \end{pmatrix} : \ x \in \mathbb{R} \right\}$, состоящий из одной карты $(\psi, M)$, где $\psi(x) = \begin{pmatrix} x \\ |x| \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}$, получаем, что $M \in \mathfrak{M}^1$. Однако, как показано в примере 2 § 2, $M \notin \mathfrak{M}_2^1$.

**Пример 1.** Рассмотрим топологическое пространство $M = (-1, 1)$ с топологией, индуцированной топологией числовой прямой $\mathbb{R}$ и две карты $(\psi_1, M)$ и $(\psi_2, M)$, где $\psi_1(x) = x$, $\psi_2(x) = x^3$ при $x \in (-1, 1)$. Поскольку замена координат $(\psi_2^{-1} \circ \psi_1)(x) = x^{1/3}$ является негладким отображением, то атлас, состоящий из карты $(\psi_1, M)$ и атлас, состоящий из карты $(\psi_2, M)$, не эквивалентны. Поэтому атласы $\{(\psi_1, M)\}$ и $\{(\psi_2, M)\}$ задают два различных гладких многообразия $(M, \mathcal{D}_1)$ и $(M, \mathcal{D}_2)$.

**Определение.** *Картой на гладком многообразии* $(M, \mathcal{D})$ называется карта на топологическом пространстве $M$, совместимая с гладкой структурой $\mathcal{D}$, т.е. такая карта $(\psi, U)$ на $M$, добавление которой к атласу гладкой структуры $\mathcal{D}$ сохраняет гладкость атласа. При этом набор функций $(x^1, \ldots, x^n)$, равных координатам обратного гомеоморфизма $\psi^{-1} = (x^1, \ldots, x^n)$ называется *локальной системой координат (ЛСК)* этой карты.

**Теорема 2.** (О карте на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^n$.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}_N^n$ и $(\psi, U^M)$ – карта на топологическом пространстве $M$, $V = \psi^{-1}(U^M)$. Следующие условия эквивалентны:*

(а) $(\psi, U^M)$ *– карта на гладком многообразии $M$, т.е. эта карта совместима с естественной гладкой структурой на $M$;*

(б) $\psi \in C^\infty(V, \mathbb{R}^N)$ *и* $\operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x) = n \quad \forall x \in V$*;*

(в) *для любой точки* $P \in U^M$ *карта* $(\psi, U^M)$ *в некоторой окрестности точки* $P$ *порождена каноническим диффеоморфизмом.*

**Доказательство.** (а) $\Rightarrow$ (б). Пусть выполнено условие (а). Зафиксируем произвольную точку $x \in V$ и обозначим $p = \psi(x)$. Согласно теореме 1 существует карта $(\psi_1, U_1^M)$, порожденная каноническим диффеоморфизмом для $M$ такая, что $p \in U_1^M$. Обозначим $w := \psi_1^{-1} \circ \psi$. Тогда $\psi = \psi_1 \circ w$. Поскольку отображения $\psi_1$ и $w$ являются глакими, то отображение $\psi$ является гладким в окрестности точки $x$. Так как $\mathcal{D}\, w = \mathcal{D}\, \psi_1^{-1} \cdot \mathcal{D}\, \psi$, то $n = \operatorname{rg} \mathcal{D}\, w(x) \leq \operatorname{rg} \mathcal{D}\, \psi(x)$. Поэтому выполнено условие (б).

(б) $\Rightarrow$ (в) следует из теоремы о параметрическом способе задания гладкого подмногообразия.

(в) $\Rightarrow$ (а). Рассмотрим произвольную карту $(\psi_1, U_1^M)$, порожденную каноническим диффеоморфизмом для $M$ такую, что $U^M \cap U_1^M \neq \neq \emptyset$. Фиксируем произвольную точку $P \in U^M \cap U_1^M$. Согласно условию (в) найдется окрестность $U_P^M$ точки $P$ в топологическом пространстве $M$ такая, что $U_P^M \subset U^M \cap U_1^M$ и карта $(\psi, U_P^M)$ порождена каноническим диффеоморфизмом для $M$. В силу теоремы 1 отображение перехода от карты $(\psi, U_P^M)$ к карте $(\psi_1, U_1^M)$ является гладким. Поскольку точка $P \in U^M \cap U_1^M$ произвольна, то отображение перехода от карты $(\psi, U^M)$ к карте $(\psi_1, U_1^M)$ также является гладким. Аналогично, отображение обратного перехода является гладким. Поэтому отображение перехода от любой карты, порожденной каноническим диффеоморфизмом для $M$, к карте $(\psi, U^M)$ является гладким диффеоморфизмом. Следовательно, карта $(\psi, U^M)$ совместима с естественной гладкой структурой на $M$. $\square$

**Определение классов $C^k(M_1, M_2)$.** Пусть заданы два гладких многообразия $M_1$ и $M_2$, пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Через $C^k(M_1, M_2)$ обозначим класс $C^k$-*гладких* отображений $f : M_1 \to M_2$, т.е. таких отображений, что для любых двух карт $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$ на гладких многообразиях $M_1$ и $M_2$ соответственно, удовлетворяющих условию $f(U_1) \subset U_2$, отображение $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1$ является $C^k$-гладким отображением из $\psi_1^{-1}(U_1)$ в $\psi_2^{-1}(U_2)$ в смысле определения класса $C^k(V, Y)$, данного в § 2. При этом отображение $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1$ называется *координатным представлением* отображения $f$.

**Замечание.** Определение класса $C^k(M_1, M_2)$ не зависит от выбора карт на гладких многообразиях $M_1$ и $M_2$. Действительно, пусть на

$M_1$ заданы две карты $(\psi_1, U_1)$ и $(\tilde{\psi}_1, U_1)$ с общим районом действия $U_1$, а на $M_2$ заданы две карты $(\psi_2, U_2)$ и $(\tilde{\psi}_2, U_2)$ с общим районом действия $U_2$, причем $f(U_1) \subset U_2$. Тогда включение $\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1 \in$ $\in C^k\Big(\psi_1^{-1}(U_1), \psi_2^{-1}(U_2)\Big)$ эквивалентно включению $\tilde{\psi}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\psi}_1 \in$ $\in C^k\Big(\tilde{\psi}_1^{-1}(U_1), \tilde{\psi}_2^{-1}(U_2)\Big)$. Это следует из равенства

$$\tilde{\psi}_2^{-1} \circ f \circ \tilde{\psi}_1 = (\tilde{\psi}_2^{-1} \circ \psi_2) \circ (\psi_2^{-1} \circ f \circ \psi_1) \circ (\psi_1^{-1} \circ \tilde{\psi}_1)$$

и того факта, что согласно определению гладкого атласа замены координат $\tilde{\psi}_2^{-1} \circ \psi_2$ и $\psi_1^{-1} \circ \tilde{\psi}_1$ являются гладкими диффеоморфизмами.

**Замечание.** Данное определение классов $C^k(M_1, M_2)$ обобщает определение классов $C^k(V, Y)$, данное в § 2, поскольку в качестве гомеоморфизмов карт на открытых подмножествах пространств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$ можно брать тождественное отображение.

**Определение.** Пусть $M_1$ и $M_2$ – гладкие многообразия. Отображение $f : M_1 \to M_2$ называется гладким диффеоморфизмом, если оно взаимно однозначно, $f \in C^\infty(M_1, M_2)$ и $f^{-1} \in C^\infty(M_2, M_1)$. Гладкие многообразия $M_1$ и $M_2$ называются *диффеоморфными*, если между ними можно установить $C^1$-гладкий диффеоморфизм.

**Замечание.** Если $(\psi, U)$ – карта на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, то гомеоморфизм $\psi$ этой карты является гладким диффеоморфизмом. Действительно, пусть $V = \psi^{-1}(U)$ – область параметров этой карты. Тогда $V$ – гладкое многообразие с атласом из одной карты $(\mathrm{Id}, V)$ (где $\mathrm{Id}$ – тождественное отображение из $V$ в $V$. Поскольку отображения $\psi^{-1} \circ \psi \circ \mathrm{Id} = \mathrm{Id}$ и $(\mathrm{Id})^{-1} \circ \psi^{-1} \circ \psi = \mathrm{Id}$ являются $C^\infty$-гладкими отображениями, то $\psi$ – гладкий диффеоморфизм.

Согласно теореме 1 справедливо включение $\mathfrak{M}^n_N \subset \mathfrak{M}^n$. В связи с этим возникает обратный вопрос: верно ли, что любое гладкое многообразие $M$ совпадает с точностью до гладкого диффеоморфизма с некоторым подмногообразием пространства $\mathbb{R}^N$ при достаточно большом $N$. Ответ на этот вопрос дает следующая теорема, доказательство которой выходит за рамки нашего курса.

**Теорема 3.** (Теорема Уитни). *Пусть $M$ – гладкое $n$-мерное многообразие. Тогда $M$ диффеоморфно $n$-мерному гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^{2n}$.*

Определим декартово произведение двух гладких многообразий $M$ и $N$. Пусть $\{U_i\}$ и $\{V_j\}$ – счетные базы топологий на хаусдорфовых топологических пространствах $M$ и $N$ соответственно. Тогда $M \times N$ – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой $\{U_i \times V_j\}$. Пусть гладкие структуры на $M$ и $N$ заданы гладкими атласами $\mathcal{A} = \{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}$ и $\mathcal{B} = \{(\varphi_\omega, V_\omega)\}$. Пусть области параметров карт этих атласов $X_\lambda = \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ и $Y_\omega = \varphi_\omega^{-1}(V_\omega)$ являются открытыми подмножествами $\mathbb{R}^m$ и $\mathbb{R}^n$ соответственно. Через $(\psi_\lambda, \varphi_\omega)$ обозначим отображение из $X_\lambda \times Y_\omega$ в $U_\lambda \times V_\omega$, которое паре параметров $(x, y) \in X_\lambda \times Y_\omega$ ставит в соответствие пару $(\psi_\lambda(x), \varphi_\omega(y)) \in U_\lambda \times V_\omega$. Тогда набор карт $\Big\{\Big((\psi_\lambda, \varphi_\omega), U_\lambda \times V_\omega\Big)\Big\}$ составляет гладкий атлас на многообразии $M \times N$.

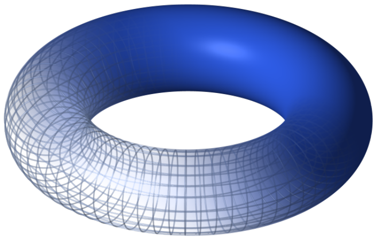
$\triangleright$

**Пример 2.** Рассмотрим тор

$$T = \{\tau(\varphi, \psi) : \ \varphi \in [0, 2\pi), \ \psi \in [0, 2\pi)\},$$

где

$$\tau(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} (1 + a\cos\psi)\cos\varphi \\ (1 + a\cos\psi)\sin\varphi \\ a\sin\psi \end{pmatrix}, \quad a \in (0, 1). \tag{4}$$



Покажем, что для любых $\varphi_0, \psi_0 \in \mathbb{R}$ сужение отображения $\tau$ на открытый прямоугольник $V = V_{\varphi_0,\psi_0} = (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi) \times (\psi_0, \psi_0 + 2\pi)$ является гомеоморфизмом из $V_{\varphi_0,\psi_0}$ в $T_{\varphi_0,\psi_0} := \tau(V_{\varphi_0,\psi_0})$. Непрерывность отображения $\tau$ следует непосредственно из формулы (4). Докажем обратимость отображения $\tau_{|_V}$ и непрерывность обратного к нему отображения. Как показано в примере 1 § 1 главы 15 отображение

$$F(r, \varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix},$$

является гомеоморфизмом (и даже диффеоморфизмом) из $\Pi_{\varphi_0} = \{(r,\varphi) \in \in \mathbb{R}^2 : \ r > 0, \ \varphi \in (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)\}$ в $A_{\varphi_0} := F(\Pi_{\varphi_0})$. Обозначая через $\hat{r}_{\varphi_0}$ и $\hat{\varphi}_{\varphi_0}$ координатные функции обратного отображения, получаем что функции $\hat{r}_{\varphi_0} : A_{\varphi_0} \to (0, +\infty)$ и $\hat{\varphi}_{\varphi_0} : A_{\varphi_0} \to (\varphi_0, \varphi_0 + 2\pi)$ непрерывны и

$$\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} r = \hat{r}_{\varphi_0}(x,y), \\ \varphi = \hat{\varphi}_{\varphi_0}(x,y) \end{cases} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A_{\varphi_0}.$$

Выразим через $\hat{r}_{\varphi_0}$ и $\hat{\varphi}_{\varphi_0}$ обратное отображение к $\tau_{|_V}$. Пусть

$$(\varphi, \psi) \in V_{\varphi_0,\psi_0}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tau(\varphi, \psi).$$

Тогда

$$F(1 + a\cos\psi, \varphi) = \begin{pmatrix} (1 + a\cos\psi)\cos\varphi \\ (1 + a\cos\psi)\sin\varphi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in A_{\varphi_0}$$

и, следовательно,

$$\varphi = \hat{\varphi}_{\varphi_0}(x,y), \qquad 1 + a\cos\psi = \hat{r}_{\varphi_0}(x,y).$$

Поэтому

$$F(a, \psi) = \begin{pmatrix} a\cos\psi \\ a\sin\psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}_{\varphi_0}(x,y) - 1 \\ z \end{pmatrix} \in A_{\psi_0},$$

а значит, $\psi = \hat{\varphi}_{\varphi_0}(\hat{r}_{\varphi_0}(x,y) - 1, z)$.

Итак, отображение $\left(\tau_{|_V}\right)^{-1}$ определено однозначно:

$$\left(\tau_{|_V}\right)^{-1}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \hat{\varphi}_{\varphi_0}(x,y) \\ \hat{\varphi}_{\varphi_0}(\hat{r}_{\varphi_0}(x,y) - 1, z) \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in T_{\varphi_0,\psi_0}$$

и непрерывно в силу непрерывности функций $\hat{r}_{\varphi_0}$ и $\hat{\varphi}_{\varphi_0}$. Отсюда следует, что отображение $\tau_{|_V}$ – гомеоморфизм из $V_{\varphi_0,\psi_0}$ в $T_{\varphi_0,\psi_0}$.

Фиксируем три различных числа $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \in [0, 2\pi)$ и еще три различных числа $\psi_1, \psi_2, \psi_3 \in [0, 2\pi)$. При $i \in \{1,2,3\}$ обозначим $V_i = V_{\varphi_i,\psi_i} = (\varphi_i, \varphi_i + 2\pi) \times (\psi_i, \psi_i + 2\pi)$, $U_i = \tau(V_i)$. Из сказанного выше следует, что $\tau_{|_{V_i}}$ – это гомеоморфизм из $V_i$ в $U_i$. Множества $U_i$ открыты в топологическом пространстве $T$ в силу леммы 4 § 1 как прообразы открытых множеств $V_i$ при непрерывных отображениях $\left(\tau_{|_{V_i}}\right)^{-1}$. Поэтому $\left(\tau_{|_{V_i}}, U_i\right)$ – карты на торе $T$.

Так как любая точка $P \in T$ имеет вид $P = \tau(\varphi, \psi)$, где $\varphi \in [0, 2\pi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$, то найдутся как минимум два таких различных индекса $i, j \in \in \{1, 2, 3\}$, что $\varphi \neq \varphi_i$ и $\varphi \neq \varphi_j$. Из этих индексов найдется хотя бы один (для определенности – индекс $i$) такой, что $\psi \neq \psi_i$. Тогда $P \in U_i$. Следовательно, $T = U_1 \cup U_2 \cup U_3$, а значит, набор этих трех карт составляет атлас на $T$.

Поскольку $\tau \in C^\infty(V_i, U_i)$ при $i \in \{1, 2, 3\}$ и матрица Якоби

$$\mathcal{D}\,\tau(\varphi, \psi) = \begin{pmatrix} -(1 + a\cos\psi)\sin\varphi & -a\sin\psi\cos\varphi \\ (1 + a\cos\psi)\cos\varphi & -a\sin\psi\sin\varphi \\ 0 & a\cos\psi \end{pmatrix}$$

имеет полный ранг (равный 2) во всех точках, то согласно теореме о параметрическом способе задания гладкого подмногообразия тор $T$ является двумерным гладким подмногообразием пространства $\mathbb{R}^3$.

Как показано в примере 2 § 2 главы 15 окружность $S^1 = \{(x, y) \in \in \mathbb{R}^2 : \ x^2 + y^2 = 1\}$ является гладким одномерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^2$. В качестве карт на гладком многообразии $S^1$ можно, например, рассматривать карты $(\varrho, W_i)$, где

$$\varrho(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix}, \quad W_i = \varrho(\Phi_i), \quad \Phi_i = (\varphi_i, \varphi_i + 2\pi).$$

Окружность $S^1$ можно покрыть районами действия двух таких карт.

Покажем, что тор $T$ диффеоморфен декартову произведению $S^1 \times S^1$. В качестве карт на гладком многообразии $S^1 \times S^1$ можно рассматривать карты $(\overline{\varrho}, \overline{W}_i)$, где

$$\overline{\varrho}(\varphi, \psi) = \Big(\varrho(\varphi), \varrho(\psi)\Big) \in S^1 \times S^1, \quad \overline{W}_i = \overline{\varrho}(V_i),$$

$$V_i = (\varphi_i, \varphi_i + 2\pi) \times (\psi_i, \psi_i + 2\pi). \tag{5}$$

Для любой точки $P \in T$ существует единственная пара чисел $\varphi \in \in [0, 2\pi)$, $\psi \in [0, 2\pi)$ такая, что $P = \tau(\varphi, \psi)$. Пусть отображение $f$ точке $P \in T$ сопоставляет пару точек $(\varrho(\varphi), \varrho(\psi)) \in S^1 \times S^1$. Покажем, что $f \in C^\infty(T, S^1 \times S^1)$. Фиксируем некоторую карту $(\tau, U_i)$ на торе $T$, где $i \in \{1, 2, 3\}$. Область параметров этой карты имеет вид (5). Тогда карта $(\overline{\varrho}, \overline{W}_i)$ на $S^1 \times S^1$ удовлетворяет равенству $f(U_i) = \overline{W}_i$. При этом отображение $\overline{\varrho}^{-1} \circ f \circ \tau$ является тождественным, т.к. переводит любую пару чисел $(\varphi, \psi) \in V_i$ в себя. Согласно определению классов $C^k(M_1, M_2)$ имеем $f \in C^\infty(T, S^1 \times S^1)$. Аналогично, $f^{-1} \in C^\infty(S^1 \times S^1, T)$. Таким образом, отображение $f$ является гладким диффеоморфизмом тора $T$ и декартова произведения $S^1 \times S^1$.

$\triangleleft$

## § 4. Касательный вектор к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$

**Теорема 1.** (О базисе в геометрическом касательном пространстве к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$.) *Пусть* $(\psi, U^M)$ – *карта на* $M \in \mathfrak{M}_N^n$, $P \in U^M$, $x_0 = \psi^{-1}(P)$. *Тогда*

*1) множество геометрических касательных векторов* $\widetilde{T}_P(M)$ *совпадает с образом пространства* $\mathbb{R}^n$ *при линейном отображении* $d\psi(x_0)$*:*

$$\widetilde{T}_P(M) = d\psi(x_0)[\mathbb{R}^n] = \{d\psi(x_0)[\xi] : \ \xi \in \mathbb{R}^n\}; \tag{1}$$

*2) набор векторов* $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^n}(x_0)$ *составляет базис в* $\widetilde{T}_P(M)$, *который будем называть* базисом в $\widetilde{T}_P(M)$, соответствующим ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$.

**Доказательство.** 1) Согласно теореме о карте на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^n$ карта $(\psi, U^M)$ в некоторой окрестности точки $P$ порождена некоторым каноническим диффеоморфизмом $f$, т.е. в окрестности точки $x_0$

$$\psi(x^1, \ldots, x^n) = f(x^1, \ldots, x^n, 0, \ldots, 0). \tag{2}$$

Обозначим $\overline{x}_0 = f^{-1}(P) = \begin{pmatrix} x_0 \\ \overline{0}_{N-n} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N$. Согласно теореме о структуре множества геометрических касательных векторов к гладкому подмногообразию пространства $\mathbb{R}^N$.

$$\widetilde{T}_P(M) = \{\mathcal{D} f(\overline{x}_0) \cdot \widehat{\xi} : \ \widehat{\xi} \in L_n\}.$$

Согласно формуле (1) § 2 главы 15 произвольный вектор $\widehat{\xi} \in L_n$ имеет вид $\widehat{\xi} = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \\ 0 \\ \ldots \\ 0 \end{pmatrix}$, где $\begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{pmatrix} = \xi$ – произвольный вектор из $\mathbb{R}^n$.

Из равенства (2) следует, что $\mathcal{D} f(\overline{x}_0) \cdot \widehat{\xi} = \mathcal{D}\psi(x_0) \cdot \xi$. Поэтому

$$\widetilde{T}_P(M) = \{\mathcal{D} f(\overline{x}_0) \cdot \widehat{\xi} : \ \widehat{\xi} \in L_n\} =$$

$$= \{\mathcal{D}\psi(x_0) \cdot \xi : \ \xi \in \mathbb{R}^n\} =$$

$$= \{d\psi(x_0)[\xi] : \ \xi \in \mathbb{R}^n\}.$$

2) Пусть $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \dots \\ \psi^N(x) \end{pmatrix}$, $\quad \xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Тогда

$$d\psi(x_0)[\xi] = \mathcal{D}\,\psi(x_0) \cdot \xi = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0)\xi^i, \tag{3}$$

где $\mathcal{D}\,\psi = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \psi^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial \psi^N}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial \psi^N}{\partial x^n} \end{pmatrix}$ – матрица Якоби отображения $\psi$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \psi^1}{\partial x^i} \\ \dots \\ \frac{\partial \psi^N}{\partial x^i} \end{pmatrix}$ – столбец этой матрицы.

Из равенств (1), (3) следует, что касательное пространство $\widetilde{T}_P(M)$ является линейной оболочкой векторов $\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}(x_0)$. Так как $\operatorname{rg} \mathcal{D}\,\psi(x_0) = n$, то векторы $\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}(x_0)$ линейно независимы. Поэтому размерность пространства $\widetilde{T}_P(M)$ равна $n$ и векторы $\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x_0), \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}(x_0)$ составляют базис в $\widetilde{T}_P(M)$. $\square$

Будем рассматривать выражения, которые являются суммами или разностями одночленов. Здесь под одночленом понимается произведение и/или частное величин без индексов и величин, снабженных индексами.

Примем *соглашение Эйнштейна*: если некоторый верхний индекс и некоторый нижний индекс одночлена обозначены одинаковой буквой, то подразумевается суммирование по всем допустимым значениям этого индекса. С учетом этого соглашения формула (3) принимает вид

$$d\psi(x_0)[\xi] = \mathcal{D}\,\psi(x_0) \cdot \xi = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0)\xi^i.$$

**Определение.** Набор чисел $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \dots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ называется *координатами геометрического касательного вектора* $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$, если $v = d\psi(x_0)[\xi]$, где $x_0 = \psi^{-1}(P)$, т.е.

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0)\xi^i. \tag{4}$$

Таким образом, координаты геометрического касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$ – это координаты вектора $v$ в базисе $\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$.

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $U^M(P)$ – окрестность точки $P \in$ $\in M$ в топологическом пространстве $M$. *Производной* функции $f \in$ $\in C^1(U^M(P), \mathbb{R})$ в точке $P$ *по геометрическому касательному вектору* $v \in \widetilde{T}_P(M)$ называется

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial (f \circ r)}{\partial t}(t_0), \tag{5}$$

где непрерывная функция $r : [a, b] \to U^M(P)$ и число $t_0 \in [a, b]$ удовлетворяют условиям

$$r(t_0) = P, \qquad r'(t_0) = v \tag{6}$$

(согласно определению геометрического касательного вектора такая функция существует.)

**Лемма 1.** *Пусть $U^M(P)$ – окрестность точки $P \in M$ в $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $(\xi^1, \dots, \xi^n)$ – координаты касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$. Тогда для любой функции $f \in C^1(U^M(P), \mathbb{R})$ имеем*

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\xi^i, \tag{7}$$

*где*

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(P) := \frac{\partial (f \circ \psi)(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=\psi^{-1}(P)}.$$

**Доказательство.** Пусть функция $r : [a, b] \to U^M(P)$ и число $t_0 \in [a, b]$ удовлетворяют условиям (6). Рассмотрим вектор-функцию $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix} = (\psi^{-1} \circ r)(t)$. Обозначим $x_0 = x(t_0)$. Тогда $r(t) =$ $= (\psi \circ x)(t)$. Дифференцируя это равенство в точке $t_0$, получаем $r'(t_0) = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i)'(t_0)$. Это означает, что числа $(x^i)'(t_0)$ являются координатами касательного вектора $r'(t_0) = v$, т.е. $(x^i)'(t_0) = \xi^i$ при всех $i \in \overline{1,n}$. Следовательно,

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial (f \circ r)}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial (f \circ \psi \circ \psi^{-1} \circ r)}{\partial t}(t_0) =$$

$$= \frac{\partial (f \circ \psi \circ x)}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial (f \circ \psi)}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i)'(t_0) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\xi^i.$$

$\square$

**Замечание.** Из леммы 1 следует корректность определения производной функции по касательному вектору, а именно, независимость $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ от конкретной функции $r : [a,b] \to U^M(P)$, удовлетворяющей условиям (6).

**Замечание.** Поскольку определение производной функции по касательному вектору, в отличие от формулы (7), не использует координаты, то $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ не зависит от ЛСК на $M$.

**Замечание.** Производная $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ обладает свойством локальности, т.е. зависит от поведения функции $f$ лишь в сколь угодно малой окрестности точки $P$. Точнее, если функции $f_1$ и $f_2$ класса $C^1(U^M(P), \mathbb{R})$ совпадают в некоторой окрестности $U^M(P)$, то

$$\frac{\partial f_1}{\partial v}(P) = \frac{\partial f_2}{\partial v}(P) \qquad \forall v \in \widetilde{T}_P(M).$$

Это следует из того, что для любой непрерывной функции $r : [a,b] \to$ $\to U^M(P)$, удовлетворяющей условиям (6), значения функций $f_1 \circ r$ и $f_2 \circ r$ совпадают в некоторой окрестности точки $t_0$, а значит, $\frac{\partial (f_1 \circ r)}{\partial t}(t_0) = \frac{\partial (f_2 \circ r)}{\partial t}(t_0)$.

**Определение.** *Стандартным базисом в* $\mathbb{R}^n$ называется базис $(e_1, \ldots, e_n)$, где $e_i = \begin{pmatrix} \delta_i^1 \\ \ldots \\ \delta_i^n \end{pmatrix}$, $\delta_i^j$ – *символ Кронекера*:

$$\delta_j^i = \left\{ \begin{array}{ll} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{array} \right.$$

Покажем, что производная функции по касательному вектору соответствует определению производной функции по вектору, данному в § 3 главы 12 в случае, когда функция $f$ определена в окрестности точки $P \in \mathbb{R}^N$. Выберем достаточно малое число $\delta > 0$ так, что гладкая функция $f$ определена в $U_\delta(P)$ и рассмотрим подмногообразие $M = U_\delta(P) \in \mathfrak{M}_N^N$. В качестве гомеоморфизма карты рассмотрим тождественное отображение $\psi(x) = x$. Тогда $\widetilde{T}_P(M) = \mathbb{R}^N$; $\mathcal{D}\,\psi$ – единичная матрица; базис $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)$, соответствующий ЛСК $(x^1, \ldots, x^N)$ – это стандартный базис в $\mathbb{R}^N$, координаты $\xi^i$ любого вектора $v = (\xi^1, \ldots, \xi^N) \in \mathbb{R}^N$ являются координатами касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$. Поэтому согласно теореме 2 § 3 главы 12 производная функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ по касательному вектору $v \in \widetilde{T}_P(M)$

$$\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\xi^i = df(P)[v].$$

соответствует определению производной функции по вектору, данному в § 3 главы 12.

**Определение.** *Изоморфизмом* линейных пространств $X$ и $Y$ называется линейное взаимно однозначное отображение из $X$ в $Y$.

Линейные пространства $X$ и $Y$ называются *изоморфными* (пишут $X \cong Y$), если между ними можно установить изоморфизм.

**Замечание.** Изоморфизм двух линейных конечномерных пространств является гладким диффеоморфизмом.

**Определение касательного пространства $T_P(M)$ для подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$.** Пусть $P \in M \in \mathfrak{M}_N^n$. Обозначим

$$T_P(M) = \left\{ \frac{\partial}{\partial v} : \ v \in \widetilde{T}_P(M) \right\},$$

где $\frac{\partial}{\partial v}$ – оператор дифференцирования, который каждой функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ ставит в соответствие ее производную $\frac{\partial f}{\partial v}(P)$ по вектору $v \in \widetilde{T}_P(M)$.

Обозначим через $\varphi_P$ отображение из $\widetilde{T}_P(M)$ в $T_P(M)$, заданное формулой

$$\varphi_P(v) = \frac{\partial}{\partial v}, \qquad v \in \widetilde{T}_P(M).$$

**Теорема 2.** *Пусть $P \in M \in \mathfrak{M}_N^n$. Отображение $\varphi_P : \widetilde{T}_P(M) \to$ $\to T_P(M)$ является изоморфизмом линейных пространств $\widetilde{T}_P(M)$ и $T_P(M)$.*

**Доказательство.** Линейность отображения $\varphi_P$ следует из формулы (7), поскольку правая часть этой формулы линейна относительно координат $\xi$ касательного вектора $v$. Фиксируем карту $(\psi, U^M(P))$. Рассмотрим ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. В силу формулы (7) имеем $\frac{\partial x^i}{\partial v} = \xi^i$ при всех $i \in \overline{1, n}$. Таким образом, если для двух геометрических касательных векторов $v, u \in \widetilde{T}_P(M)$ справедливо равенство $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial u}$, то все координаты векторов $v$ и $v$ совпадают, а значит, $v = u$. Это означает, что отображение $\varphi_P : \widetilde{T}_P(M) \to T_P(M)$ взаимно однозначно. □

Теорема 2 показывает, что $T_P(M) \cong \widetilde{T}_P(M)$ и позволяет отождествить геометрический касательный вектор $v$ к подмногообразию $M \in \mathfrak{M}_N^n$ пространства $\mathbb{R}^N$ с оператором взятия производной по вектору $v$. Имея в виду это отождествление, в дальнейшем производную по вектору будем называть касательным вектором, а пространство $T_P(M)$, состоящее из операторов дифференцирования по векторам, будем называть касательным пространством. В отличие от определения геометрического касательного вектора как элемента объемлющего пространства $\mathbb{R}^N$, которое имееет смысл только для подмногообразий пространства $\mathbb{R}^N$, новое определение касательного вектора будет иметь смысл для любого гладкого многообразия.

**Лемма 2.** *Пусть $(\psi, U^M)$ – карта на $M \in \mathfrak{M}_N^n$, $P \in U^M$, $x_0 =$ $= \psi^{-1}(P)$, $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. Тогда*

(а) *базис $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}(x_0)\right)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$ при отображении $\varphi_P$ переходит в базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$;*

(б) *координаты любого геометрического касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в базисе $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}(x_0)\right)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$ совпадают с координатами вектора $\frac{\partial}{\partial v}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$.*

**Доказательство.** (а). Фиксируем произвольный индекс $i \in \overline{1, n}$

и рассмотрим геометрический касательный вектор $v \in \widetilde{T}_P(M)$ с координатами $\xi^j = \delta^j_i$. Согласно формуле (4) имеем $v = \frac{\partial \psi}{\partial x^j}(x_0)\delta^j_i = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0)$. Из формулы (7) следует, что для любой функции $f \in C^1(U^M, \mathbb{R})$ справедливо равенство $\frac{\partial f}{\partial v}(P) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(P)\delta^j_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)$, т.е. $\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Поэтому

$$\varphi_P\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0)\right) = \varphi_P(v) = \frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Таким образом, базисный вектор $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$ при отображении $\varphi_P$ переходит в вектор $\frac{\partial}{\partial x^i}$ пространства $T_P(M)$. Согласно теореме 2 отображение $\varphi_P$ является изморфизмом, а значит, переводит базис пространства $\widetilde{T}_P(M)$ в базис пространства $T_P(M)$. Следовательно, $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – базис пространства $T_P(M)$.

Пункт (б) следует из пункта (а) и линейности отображения $\varphi_P$.

□

## § 5. Касательный вектор к гладкому многообразию

Дадим общее определение касательного вектора к многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$, вообще говоря, не вложенному в линейное пространство.

**Определение.** *Касательным вектором* $\vec{v}$ к многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$ в точке $P \in M$ называется отображение $\vec{v} : C^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, которое каждой функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ ставит в соответствие число

$$\vec{v}(f) := \xi^i\, \frac{\partial f}{\partial x^i}(P), \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial x^i}(P) := \frac{\partial (f \circ \psi)(x)}{\partial x^i}\Big|_{x=\psi^{-1}(P)}, \tag{2}$$

$(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ – ЛСК, соответствующая карте $(\psi, U)$ на $M$, где $P \in U$. При этом число $\vec{v}(f)$ не зависит от карты, а набор чисел $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$, называемых *координатами вектора* $\vec{v}$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$, не зависит от функции $f$.

Множество всех касательных векторов к $M \in \mathfrak{M}^n$ в точке $P \in M$ называется *касательным пространством* $T_P(M)$. Значение $\vec{v}(f)$, определяемое формулой (1), называется *производной функции $f$ по вектору* $\vec{v}$.

**Замечание.** Сравнивая данное определение с определением пространства $T_P(M)$ для подмногообразия $M$ пространства $\mathbb{R}^N$ а формулу (1) с формулой (7) § 4, видим, что в случае $M \in \mathfrak{M}_N^n$ новое определение $T_P(M)$ совпадает с определением $T_P(M)$, данным в конце предыдущего параграфа.

Мы дали определение касательного вектора $\vec{v}$ с помощью ЛСК и при этом потребовали, чтобы его значение $\vec{v}(f)$ не зависело от ЛСК. Возникает вопрос о существовании касательных векторов, удовлетворяющих этим требованиям. В следующей теореме дан утвердительный ответ на этот вопрос и выяснена структура касательного пространства $T_P(M)$.

**Теорема 1.** *Пусть $P \in M \in \mathfrak{M}^n$.*

(а) *Для любой ЛСК в окрестности точки $P$ и любого набора чисел $(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ существует касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$ с координатами $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в этой ЛСК.*

(б) *Координаты $(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ следующим образом выражаются через его координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$:*

$$\tilde{\xi}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\, \xi^i, \quad j \in \overline{1, n}. \tag{3}$$

(в) *Множество $T_P(M)$ является $n$-мерным линейным пространством. Координаты касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ являются координатами вектора $\vec{v}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$, который будем называть* базисом в $T_P(M)$, соответствующем ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$.

**Доказательство.** Фиксируем ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ в окрестности точки $P$ и набор чисел $(\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$. Определим отображение $\vec{v} : C^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ формулой (1). Найдем координаты вектора $\vec{v}$ в произвольной ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ (в окрестности точки $P$) из условия, что значение $\vec{v}(f)$ не зависит от ЛСК:

$$\xi^i\, \frac{\partial f}{\partial x^i}(P) = \tilde{\xi}^j\, \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}(P). \tag{4}$$

Согласно правилам дифференцирования сложной функции для любой функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ имеем:

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} \qquad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{5}$$

Поэтому равенство (4) принимает вид

$$\xi^i\,\frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j} = \tilde{\xi}^j\,\frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^j}.$$

Последнее равенство справедливо для всех функций $f \in C^1(M,\mathbb{R})$ тогда и только тогда, когда справедливо соотношение (3). Таким образом, формула (1) определяет касательный вектор $\vec{v}$, значение которого не зависит от ЛСК, тогда и только тогда, когда координаты вектора $\vec{v}$ при изменении ЛСК меняются по закону (3). Это доказывает пункты (а) и (б).

Докажем пункт (в). Из формулы (1) следует, что любой касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$ является линейной комбинацией операций $\frac{\partial}{\partial x^i}$ дифференцирования по координатам $x^i$ данной ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$:

$$\vec{v} = \xi^i\,\frac{\partial}{\partial x^i}. \tag{6}$$

Операции $\frac{\partial}{\partial x^i}$ линейно независимы (это можно увидеть, посмотрев на результат их применения к функциям $f^j = x^j$). Поэтому касательные векторы $\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}$ составляют базис в $n$-мерном линейном пространстве $T_P(M)$. Согласно формуле (6) координаты вектора $\vec{v}$ в ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$ являются координатами вектора $\vec{v}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ линейного пространства $T_P(M)$. $\square$

**Замечание.** В терминах операций дифференцирования формулу (5) можно записать следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j} \qquad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{7}$$

Последняя формула представляет собой формулу замены базиса в касательном пространстве $T_P(M)$ при замене системы координат.

**Замечание.** Из формулы (7) и леммы леммы 2(б) § 4 следует, что формула замены базиса в $\widetilde{T}_P(M)$ для $M \in \mathfrak{M}^n_N$ имеет вид

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i} = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^j} \qquad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{8}$$

**Замечание.** Из леммы 2(б) § 4 и теоремы 1(б) этого параграфа следует, что для $M \in \mathfrak{M}^n_N$ координаты $(\tilde{\xi}^1, \ldots, \tilde{\xi}^n)$ геометрического касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ выражаются через его координаты $(\xi^1, \ldots, \xi^n)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ по формуле (3).

**Замечание.** Непосредственно из определения следует, что операция дифференцирования по касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M)$ обладает следующими свойствами:

(i) свойство линейности

$$\vec{v}(\alpha f + \beta g) = \alpha \vec{v}(f) + \beta \vec{v}(g) \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}, \quad \forall f, g \in C^1(M, \mathbb{R});$$

(ii) правило Лейбница

$$\vec{v}(fg) = f(P)\, \vec{v}(g) + g(P)\, \vec{v}(f) \qquad \forall f, g \in C^1(M, \mathbb{R}),$$

где функция $fg$ – это произведение функций $f$ и $g$, определяемое формулой $(fg)(p) = f(p)\, g(p)$ для любой точки $p \in M$.

Следующая теорема позволяет интерпретировать касательный вектор к многообразию как вектор скорости при движении по многообразию.

**Теорема 2.** *Пусть $P \in M \in \mathfrak{M}^n$.*

*1) Для каждого касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ существует функция $r \in C^\infty([a, b], M)$ такая, что $P = r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ и*

$$\vec{v}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ r)(t_0) \qquad \forall f \in C^1(M, \mathbb{R}). \tag{9}$$

*2) Обратно, для любой функции $r \in C^1([a, b], M)$ такой, что $P = r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$ существует касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$, удовлетворяющий соотношению (9).*

**Доказательство.** 1) Фиксируем карту $(\psi, U)$ на $M$, $P \in U$. Пусть задан касательный вектор $\vec{v} \in \mathrm{T}_P(M)$. Тогда заданы координаты $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ этого вектора в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. Обозначим $x_0 = \psi^{-1}(P)$. Поскольку область параметров $V = \psi^{-1}(U)$ – это открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$, то при достаточно малом $\delta > 0$ хотя бы один из отрезков $[x_0, x_0 + \delta\xi]$ или $[x_0, x_0 - \delta\xi]$ содержится во множестве $V$. Пусть для определенности

$[x_0, x_0 + \delta\xi] \subset V$. Определим функцию $r \in C^\infty([0, \delta], M)$ как суперпозицию гомеоморфизма карты и функции $x : [0, \delta] \to V$, $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) = x_0 + t\xi$, $t \in [0, \delta]$: $r = \psi \circ x$. Тогда при $t_0 = 0$ по формуле производной сложной функции для любой $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ имеем

$$\frac{d}{dt}(f \circ r)(t_0) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi \circ x)(t_0) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i} \, \frac{dx^i(t_0)}{dt} =$$

$$= \xi^i \, \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i} = \vec{v}(f),$$

т.е. справедливо соотношение (9).

2) Пусть задана функция $r \in C^1([a, b], M)$ такая, что $P = r(t_0)$, $t_0 \in [a, b]$. Отображение $\vec{v} : C^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, заданное формулой (9) не зависит от ЛСК, поскольку эта формула не содержит ЛСК. Покажем, что это отображение имеет вид (1). Пусть $(\psi, U)$ – карта на $M$, $P \in U$. Обозначим $x(t) = (x^1(t), \ldots, x^n(t)) = (\psi^{-1} \circ r)(t)$ – координатное представление функции $r$. Тогда согласно формуле (9) и формуле производной сложной функции имеем

$$\vec{v}(f) = \frac{d}{dt}(f \circ r)(t_0) = \frac{d}{dt}(f \circ \psi \circ x)(t_0) = \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i} \, \frac{dx^i(t_0)}{dt} =$$

$$= \xi^i \, \frac{\partial(f \circ \psi)}{\partial x^i},$$

где $\xi^i = \frac{dx^i(t_0)}{dt}$. Поэтому отображение $\vec{v} : C^1(M, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ имеет вид (1), т.е. является касательным вектором. $\square$

**Замечание.** Если функцию $r(t)$ из теоремы 2 интерпретировать как закон движения материальной точки по многообразию $M$, то для любой скалярной функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$, зависящей от положения материальной точки на многообразии $M$, значение $\vec{v}(f)$ имеет смысл скорости изменения физической величины $f$ для этой материальной точки в момент прохождения через точку $P$.

**Определение дифференциала функции, заданной на гладком многообразии.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $P \in M$, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Линейная функция $df(P) : T_P(M) \to \mathbb{R}$, которая каждому касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M)$ ставит в соответствие производную $\vec{v}(f)$ функции $f$ в точке $P$ по вектору $\vec{v}$, называется *дифференциалом* в точке $P$ функции $f$:

$$df(P)[\vec{v}\,] := \vec{v}(f).$$

Напомним некоторый материал из линейной алгебры. *Сопряженным пространством* к конечномерному линейному пространству $V$ называется линейное пространство $V^*$, состоящее из линейных функций $l : V \to \mathbb{R}$. Базис $(e_*^1, \ldots, e_*^n)$ пространства $V^*$ называется *взаимным* или *двойственным* базису $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ пространства $V$, если $e_*^i(\vec{e}_j) = \delta_j^i$ – символ Кронекера. Для полноты изложения выведем выражения для координат $l_i$ линейной функции $l \in V^*$ во взаимном базисе $(e_*^1, \ldots, e_*^n)$. По определению координат имеем

$$l = l_j \; e_*^j.$$

Поэтому

$$l(\vec{e}_i) = l_j \; e_*^j(\vec{e}_i) = l_j \delta_i^j = l_i. \tag{10}$$

**Определение.** *Кокасательным пространством* к $M \in \mathfrak{M}^n$ в точке $P \in M$ называется линейное $n$-мерное пространство $T_P^*(M)$, сопряженное к касательному пространству $T_P(M)$. Элемент кокасательного пространства $T_P^*(M)$ называется *ковектором.*

**Замечание.** Из определения дифференциала следует, что для любых $M \in \mathfrak{M}^n$, $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ значение дифференциала $df(P)$ в фиксированной точке $P \in M$ является ковектором: $df(P) \in T_P^*(M)$.

**Лемма 1.** *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ в окрестности точки $P \in M$. Тогда набор дифференциалов координатных функций $(dx^1(P), \ldots, dx^n(P))$ составляет базис в $T_P^*(M)$, взаимный базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ касательного пространства $T_P(M)$.*

**Доказательство.** Согласно определениям дифференциала и производной по касательному вектору имеем

$$dx^i(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \frac{\partial x^i}{\partial x^j}(P) = \delta_j^i \qquad \forall i, j \in \overline{1, n}.$$

$\square$

**Лемма 2.** *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ в окрестности точки $P \in M$. Дифференциал произвольной функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ следующим образом выражается через дифференциалы координатных функций $x^i$:*

$$df(P) = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\, dx^i(P). \tag{11}$$

**Доказательство.** Разложим произвольный касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$ по базису: $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. В силу определений дифференциала и производной по касательному вектору имеем

$$df(P)[\vec{v}] = \vec{v}(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(P).$$

Подставляя в эту формулу вместо функции $f$ координатную функцию $x^j$, получаем $dx^j(P)[\vec{v}] = \xi^j$ для любого $j \in \overline{1,n}$. Отсюда и из предыдущей формулы следует, что

$$df(P)[\vec{v}] = \frac{\partial f}{\partial x^i}(P)\ dx^i(P)[\vec{v}].$$

В силу произвольности касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ получаем доказываемое равенство. □

**Замечание.** Формула (11) напоминает хорошо нам известную формулу для дифференциала функции $f$ в старом смысле, который, чтобы не путать с новым определением, будем сейчас обозначать через $d_{\text{стар}} f$. Выясним связь между новым и старым определениями дифференциала функции $f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Поскольку ранее дифференциал рассматривался для функций, определенных на открытых подмножествах пространства $\mathbb{R}^n$, то будем предполагать, что $M$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$. Как известно, для любого вектора $\xi = (\xi^1, \ldots, \xi^n) \in \mathbb{R}^n$ справедлива формула

$$d_{\text{стар}} f(P)[\xi] = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}(P).$$

Сравнивая эту формулу с новым определением производной функции $f$ по касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M)$, видим, что

$$d_{\text{стар}} f(P)[\xi] = df(P)[\vec{v}] \quad \text{при} \quad \vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Таким образом, значение дифференциала (в новом смысле) функции $f$ в точке $P$ на касательном векторе $\vec{v}$ совпадает со значением дифференциала в старом смысле функции $f$ в точке $P$ на векторе $\xi$, который является координатным набором касательного вектора $\vec{v}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$. Ранее вместо $\xi$ мы использовали обозначение $dx$, которое согласно формуле (11) можно использовать и в новом смысле.

**Теорема 3.** *При замене ЛСК координаты линейной функции* $l \in$ $\in T_P^*(M)$ *меняются по закону*

$$\tilde{l}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\, l_i, \quad j \in \overline{1, n}, \tag{12}$$

*а базисные векторы* $dx^j$ *сопряженного пространства* $T_P^*(M)$ *– по закону*

$$d\tilde{x}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i} dx^i. \tag{13}$$

**Доказательство.** Используя равенства (7) и (10), получаем формулу (12):

$$\tilde{l}_j = l\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^j}\right) = l\left(\frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\,\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\, l\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^j}\, l_i.$$

Закон изменения дифференциалов (13) следует из формулы (11). $\square$

**Замечание.** Сравнивая формулу (3) с формулой (12), видим, что при замене ЛСК законы изменения координат вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ и ковектора $l \in T_P^*(M)$ различны. В параграфе § 2 главы 18 мы увидим, что это связано с тем, что касательный вектор и ковектор – это тензоры разных типов.

## § 6. Край гладкого многообразия

**Определение.** *Краем* $\partial V$ допустимой области параметров $V \subset \mathbb{R}^n$ называется множество всех точек $x \in V$, лежащих на границе множества $V$, где граница понимается в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

**Замечание.** Если $V$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$, то $\partial V = \emptyset$. Если $V$ – открытое подмножество топологического пространства $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$, то $\partial V = V \cap \partial\mathbb{R}^n_- = V \cap \partial\mathbb{R}^n_+$, где $\partial\mathbb{R}^n_- = \partial\mathbb{R}^n_+ =$ $= \{(0, x^2, \ldots, x^n) : \ (x^2, \ldots, x^n) \in \mathbb{R}^{n-1}\}$ – граница полупространств $\mathbb{R}^n_-$, $\mathbb{R}^n_+$ в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

**Замечание.** Поскольку граничные точки допустимого множества параметров $V$ могут не принадлежать множеству $V$, то край $V$, вообще говоря, не совпадает с границей множества $V$ в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

**Определение.** Точка $P \in U$ называется *краевой точкой карты* $(\psi, U)$ на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, если ее прообраз $\psi^{-1}(P)$ лежит на краю области параметров $V = \psi^{-1}(U)$ этой карты: $\psi^{-1}(P) \in \partial V$.

**Теорема 1.** (О независимости краевой точки от карты.) *Пусть* $(\psi_1, U_1)$ *и* $(\psi_2, U_2)$ *– две карты на гладком многообразии* $M$*. Если точка* $P \in U_1 \cap U_2$ *является краевой точкой карты* $(\psi_1, U_1)$*, то эта точка – краевая точка карты* $(\psi_2, U_2)$*.*

**Доказательство.** Предположим противное: $P$ – краевая точка карты $(\psi_1, U_1)$ и не является краевой точкой карты $(\psi_2, U_2)$. Обозначим $U = U_1 \cap U_2$, $V_i = \psi_i^{-1}(U)$, $x_i = \psi_i^{-1}(P)$, где $i = 1, 2$. Поскольку $P$ не является краевой точкой карты $(\psi_2, U_2)$, то точка $x_2 \in \psi_2^{-1}(U_2)$ не лежит на границе множества $\psi_2^{-1}(U_2)$ в смысле пространства $\mathbb{R}^n$, т.е. существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x_2) \subset \psi_2^{-1}(U_2)$. Так как множество $U$ открыто в топологическом пространстве $M$, $\psi_2(x_2) = P \in U$, а отображение $\psi_2$ непрерывно, то найдется число $\delta \in (0, \varepsilon)$ такое, что $\psi_2(U_\delta(x_2)) \subset U$. Поэтому $U_\delta(x_2) \subset \psi_2^{-1}(U) = V_2$. Следовательно, $x_2$ – внутренняя точка множества $V_2$ в смысле пространства $\mathbb{R}^n$.

По определению гладкого многообразия замена координат $w = \psi_1^{-1} \circ \psi_2$ является гладким диффеоморфизмом из $V_2$ в $V_1$. Согласно определению класса $C^k(V, Y)$, данному в § 2, отображение $w^{-1} : V_1 \to V_2$ можно продолжить до отображения $f \in C^\infty(\widetilde{V}_1, \mathbb{R}^n)$, где $\widetilde{V}_1$ – открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n$. При этом $f(x) = w^{-1}(x)$ при $x \in V_1$ и, следовательно, $f \circ w = w^{-1} \circ w = \mathrm{Id}$ – тождественное отображение из $V_2$ в $V_2$. Дифферецируя это равенство в точке $x_2$, получаем равенство для матриц Якоби отображений $f$ и $w$: $\mathcal{D} f(x_1) \cdot \mathcal{D} w(x_2) = E_n$. Поэтому якобиан отображения $w$ не обращается в ноль в точке $x_2$, а значит, и в некоторой окрестности $U(x_2) \subset V_2$. По теореме 3 §5 главы 13 эта окрестность перейдет в окрестность точки $x_1$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Так как $w(U(x_2)) \subset w(V_2) = V_1 \subset \psi_1^{-1}(U_1)$, то множество $\psi_1^{-1}(U_1)$ содержит некоторую окрестность точки $x_1$, понимаемую в смысле пространства $\mathbb{R}^n$. Таким образом, точка $x_1$ не лежит на границе области параметров карты $(\psi_1, U_1)$, что противоречит тому, что $P$ – краевая точка этой карты. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

**Определение.** *Краем* $\partial M$ гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется множество всех краевых точек карт $(\psi, U)$ на $M$.

**Замечание.** Из теоремы 1 следует, что если $M$ – гладкое многообразие, то множество краевых точек любой карты $(\psi, U)$ на $M$ совпадает с множеством
$$\partial U := U \cap \partial M$$
и не зависит от гомеоморфизма $\psi$ этой карты. Поэтому если $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на $M$, то край $M$ совпадает с объединением множеств краевых точек карт атласа и не зависит от гладкого атласа:
$$\partial M = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} \partial U_\lambda.$$

**Замечание.** Согласно определению краевой точки карты для любой карты $(\psi, U)$ на гладком многообразии $M$ имеем:
$$\partial U = \psi(\partial V),$$
где $\partial V$ – край области параметров $V = \psi^{-1}(U)$ этой карты.

**Теорема 2.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $\partial M \neq \emptyset$. Тогда $\partial M \in \mathfrak{M}^{n-1}$ и $\partial(\partial M) = \emptyset$, т.е. край гладкого $n$-мерного многообразия с непустым краем является гладким $(n-1)$-мерным многообразием без края.*

*Если $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на $M$, $V_\lambda = \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda$, то $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на $\partial M$.*

**Доказательство.** Поскольку $M$ – хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой, то множество $\partial M \subset M$ с топологией, индуцированной топологией пространства $M$, составляет, как легко проверить, хаусдорфово топологическое пространство со счетной базой.

Пусть $(\psi, U)$ – карта на $M$, $V = \psi^{-1}(U)$ – область параметров этой карты, $\partial V$ – ее край. Так как $V$ – открытое подмножество $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$, то множество $\partial V$ открыто в топологическом пространстве $\partial\mathbb{R}^n_- = \partial\mathbb{R}^n_+$ (изоморфном пространству $\mathbb{R}^{n-1}$) с топологией, индуцированной топологией пространства $\mathbb{R}^n$. Поэтому множество $\partial U$ открыто в топологическом пространстве $\partial M$ с топологией, индуцированной топологией пространства $M$. Сужение $\psi\big|_{\partial V}$ гомеоморфизма $\psi : V \to U$ на край $\partial V$ является гомеоморфизмом из $\partial V$ в $\partial U$.

Пусть $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ – гладкий атлас на $M$, $V_\lambda = \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ при всех $\lambda \in \Lambda$. Тогда для любой точки $P \in \partial M$ найдется индекс $\lambda \in \Lambda$ такой, что $P \in U_\lambda$, а значит, $P \in \partial U_\lambda$. Поэтому любая точка

$P \in \partial M$ имеет окрестность $\partial U_\lambda$, гомеоморфную открытому множеству в $\mathbb{R}^{n-1}$. Следовательно, $\partial M$ является $(n-1)$-мерным многообразием без края и $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ – атлас на $\partial M$. Замена координат от карты $\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)$ к карте $\left(\psi_{\tilde\lambda}\big|_{\partial V_{\tilde\lambda}},\ \partial U_{\tilde\lambda}\right)$ является гладким отображением как сужение гладкого отображения замены координат от карты $(\psi_\lambda, U_\lambda)$ к карте $(\psi_{\tilde\lambda}, U_{\tilde\lambda})$. Поэтому атлас $\left\{\left(\psi_\lambda\big|_{\partial V_\lambda},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda}$ является гладким и, следовательно, многообразие $\partial M$ является гладким. $\square$

**Задача 1.** Пусть $M$ – одномерное линейно-связное многообразие без края. Докажите, что $M$ гомеоморфно прямой $\mathbb{R}^1$ или окружности $S^1$.

## § 7. Ориентация гладкого многообразия

**Определение.** Две карты $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$ на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называются *согласованными (по ориентации)*, если

1) их районы действия не пересекаются (т.е. $U_1 \cap U_2 = \emptyset$) **или**

2) $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ и якобиан замены координат $w = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$ от карты $(\psi_1, U_1)$ к карте $(\psi_2, U_2)$ положителен на области определения этой замены координат.

**Определение.** *Ориентирующим* атласом многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется гладкий атлас, состоящий из попарно согласованных карт.

**Определение.** Многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ называется *ориентируемым*, если для него существует ориентирующий атлас. Иначе многообразие называется *неориентируемым*.

**Определение.** Два ориентирующих атласа многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называются *согласованными*, если их объединение является ориентирующим атласом (т.е. все карты одного и другого атласов попарно согласованы). *Ориентацией* многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется класс всех согласованных атласов, ориентирующих $M$. Многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ называется *ориентированным*, если задана его ориентация (т.е. задан ориентирующий атлас).

**Определение.** Карта $(\psi, U)$ на $M$ называются *согласованной* с ориентирующим атласом $\mathcal{A}$ многообразия $M$, если карта $(\psi, U)$ согласована со всеми картами атласа $\mathcal{A}$. При этом будем говорить, что карта $(\psi, U)$ и ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ *соответствуют ориентации* или *согласованы с ориентацией* гладкого многообразия $M$, а $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – правый базис в $T_P(M)$.

Напомним, что матрица $S = \begin{pmatrix} s_1^1 & \ldots & s_n^1 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ s_1^n & \ldots & s_n^n \end{pmatrix}$ называется *матрицей перехода* от базиса $(e_1, \ldots, e_n)$ линейного пространства $L$ к базису $(\tilde{e}_1, \ldots, \tilde{e}_n)$ этого пространства, если

$$\tilde{e}_i = s_i^j e_j \qquad \forall i \in \overline{1, n},$$

т.е. $i$-ый столбец матрицы $S$ является координатным столбцом базисного вектора $\tilde{e}_i$ нового базиса в старом базисе.

В соответствии с определением из линейной алгебры два базиса линейного пространства называются *одинаково ориентированными*, если определитель матрицы перехода от одного базиса к другому положителен. Иначе эти базисы называются *противоположно ориентированными*.

**Лемма 1.** *Пусть $(\psi, U)$ и $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ – две карты на $M \in \mathfrak{M}^n$, $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$. Пусть $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) = \tilde{\psi}^{-1}$ – ЛСК соответствующие этим картам. Карты $(\psi, U)$ и $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ согласованы тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in U \cap \widetilde{U}$ базисы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}\right)$ касательного пространства $T_P(M)$ одинаково ориентированны.*

**Доказательство.** Согласно формуле (7) § 5

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial}{\partial x^j} \qquad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Поэтому матрица перехода от базиса $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ к базису $\left(\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^n}\right)$ совпадает с матрицей Якоби замены координат $w = \psi^{-1} \circ \tilde{\psi}$. Карты $(\psi, U)$ и $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ согласованы тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in U \cap \widetilde{U}$ определитель этой матрицы положителен. $\square$

**Теорема 1.** *Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ линейно-связно и ориентируемо. Тогда существует ровно две его ориентации.* Эти ориентации будем называть *противоположными.*

**Доказательство.** Так как многообразие $M$ ориентируемо, то для $M$ существует ориентирующий атлас $\mathcal{A} = \{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$. Изменив на противоположный знак первой координаты $x^1$ ЛСК этих карт, получим ориентирующий атлас $\mathcal{A}^- = \{(\psi_\lambda^-, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$, несогласованный с атласом $\mathcal{A}$. Здесь мы используем тот факт, что при изменении знака первой координаты ЛСК допустимая область параметров переходит в допустимую область параметров. В частности, открытое подмножество топологического пространства $\mathbb{R}^n_+$ переходит открытое подмножество $\mathbb{R}^n_-$ и обратно. Таким образом, существуют по крайней мере две различные ориентации многообразия $M$, одна из которых – это класс всех атласов, согласованных с атласом $\mathcal{A}$, а другая – класс атласов, согласованных с атласом $\mathcal{A}^-$.

Покажем, что третьей ориентации многообразия $M$ не существует, т.е. любой атлас $\mathcal{B}$, ориентирующий многообразие $M$, согласован либо с атласом $\mathcal{A}$, либо с атласом $\mathcal{A}^-$. Итак, фиксируем атлас $\mathcal{B}$, ориентирующий многообразие $M$. Для любой точки $P \in M$ через $s(P)$ обозначим знак якобиана замены координат от карты $(\psi, U)$ атласа $\mathcal{A}$ к карте $(\varphi, V)$ атласа $\mathcal{B}$, где $P \in U \cap V$. Величина $s(P)$ не зависит от конкретной карты $(\psi, U)$ атласа $\mathcal{A}$ и конкретной карты $(\varphi, V)$ атласа $\mathcal{B}$, поскольку якобиан замены координат от одной карты к другой карте внутри одного ориентирующего атласа положителен, а якобиан суперпозиции отображений равен произведению якобианов этих отображений. Покажем, что $s(P)$ непрерывно зависит от точки $P$. Зафиксируем точку $P_0 \in M$. Тогда найдутся карты $(\psi, U) \in \mathcal{A}$ и $(\varphi, V) \in \mathcal{B}$ такие, что $P_0 \in U \cap V$. Поскольку якобиан замены координат от $(\psi, U)$ к $(\varphi, V)$ непрерывно зависит от точки и не обращается в нуль, то его знак $s(P)$ также непрерывно зависит от точки $P$ на множестве $U \cap V$, а значит, непрерывен в произвольной точке $P_0 \in M$. Если знак $s(P)$ меняется на линейно-связном множестве $M$, то по теореме о промежуточном значении для непрерывной функции найдется точка $P_* \in M$, где $s(P_*) = 0$, что невозможно, поскольку якобиан диффеоморфизма не обращается в нуль. Таким образом, либо $s(P) = 1$ для всех $P \in M$, либо $s(P) = -1$ для всех $P \in M$. В первом случае атлас $\mathcal{B}$ согласован с атласом $\mathcal{A}$, во втором – с атласом $\mathcal{A}^-$. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть* $\Gamma = \{r(t): \ t \in [a,b]\}$ *– простая гладкая кривая, параметризованная вектор-функцией* $r \in C^\infty([a,b],\mathbb{R}^N)$ *такой, что* $r'(t) \neq \overline{0}$ *при всех* $t \in [a,b]$. *Тогда* $\Gamma$ *– ориентируемое одномерное многообразие и имеет две ориентации: одна из этих ориентаций соответствует возрастанию параметра* $t$, *другая – убыванию параметра* $t$.

**Доказательство.** Рассмотрим на $\Gamma$ атлас из двух карт $\{(\psi_1,U_1),(\psi_2,U_2)\}$, где

$$\psi_1(x) = r(a+x), \quad x \in V_1 = [0, b-a), \qquad U_1 = \psi_1(V_1),$$

$$\psi_2(x) = r(b+x), \quad x \in V_2 = (a-b, 0], \qquad U_2 = \psi_2(V_2).$$

Производная (якобиан) перехода от карты $(\psi_1,U_1)$ к карте $(\psi_2,U_2)$ равна 1. Поэтому данный атлас является ориентирующим и соответствует возрастанию параметра $t$. Изменяя на противоположный знаки параметров этих карт, получим ориентирующий атлас, соответствующий убыванию параметра $t$. $\square$

$\triangleright$

**Определение.** Конечный набор карт $\{(\psi_i,U_i)\}_{i=1}^I$ гладкого атласа $\mathcal{A}$ на многообразии $M$ называется *цепочкой карт*, если район действия $U_i$ любой карты этой цепочки является линейно-связным множеством и районы действия любых двух карт этой цепочки с соседними номерами пересекаются:

$$U_i \cap U_{i+1} \neq \emptyset \qquad \forall i \in \overline{1, I-1}.$$

**Лемма 3.** *Пусть* $\mathcal{A}$ *– гладкий атлас на линейно-связном многообразии* $M$ *и район действия любой карты атласа* $\mathcal{A}$ *является линейно-связным множеством. Тогда любые две карты* $(\psi,U)$ *и* $(\widetilde{\psi},\widetilde{U})$ *атласа* $\mathcal{A}$ *можно соединить цепочкой карт этого атласа, т.е. существует такая цепочка карт атласа* $\mathcal{A}$, *в которой* $(\psi,U)$ *– первая карта, а* $(\widetilde{\psi},\widetilde{U})$ *– последняя карта цепочки.*

**Доказательство.** Фиксируем точки $P \in U$ и $Q \in \widetilde{U}$. Поскольку многообразие $M$ линейно-связно, то существует кривая $\Gamma = \{r(t): \ t \in [a,b]\} \subset$ $\subset M$, соединяющая точки $P$ и $Q$, т.е. $r(a) = P$, $r(b) = Q$. Определим число $\hat{t}$ как супремум таких $t \in [a,b]$, что существует цепочка карт $\{(\psi_i,U_i)\}_{i=1}^I$ атласа $\mathcal{A}$, соединяющая точки $P$ и $r(t)$, т.е. такая, что $P \in U_1$, $r(t) \in U_I$.

Так как $r(\hat{t}\,) \in \Gamma \subset M$, то найдется карта $(\psi^*,U^*)$ атласа $\mathcal{A}$ такая, что $r(\hat{t}\,) \in U^*$. Поскольку множество $U^*$ открыто, а отображение $r$ непрерывно, то найдется число $\varepsilon > 0$ такое, что $r(t) \in U^*$ при $t \in (\hat{t} - \varepsilon, \hat{t})$. По определению супремума найдется число $t^* \in (\hat{t}-\varepsilon, \hat{t}\,)$ такое, что точки $P$ и $r(t^*)$ можно соединить цепочкой карт атласа $\mathcal{A}$. Добавляя карту $(\psi^*, U^*)$ к этой цепочке, получаем цепочку карт, соединяющую точку $P$ с точкой $r(t^*)$. Если $\hat{t} < b$, то найдется $t_+ \in (\hat{t}, b)$: $r(t_+) \in U^*$. При этом точки $P$ и $r(t_+)$ можно соединить цепочкой карт атласа $\mathcal{A}$, что противоречит определению числа $\hat{t}$. Поэтому $\hat{t} = b$, а значит существует цепочка карт атласа $\mathcal{A}$, соединяющая точки $P$ и $Q$, а значит, и карты $(\psi, U)$ и $(\widetilde{\psi}, \widetilde{U})$. $\square$

**Определение.** Цепочка карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ называется *дезориентирующей*, если для любого индекса $i \in \overline{1, I-1}$ карты $(\psi_i, U_i)$ и $(\psi_{i+1}, U_{i+1})$ согласованы, а карты $(\psi_I, U_I)$ и $(\psi_1, U_1)$ не согласованы.

**Теорема 2.** *Гладкое многообразие $M$ ориентируемо тогда и только тогда, когда на нем не существует дезориентирующей цепочки карт.*

**Доказательство.** Докажем «$\Rightarrow$». Пусть многообразие $M$ ориентируемо, т.е. на $M$ существует ориентирующий атлас $\mathcal{A}$. Предположим, что $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ – дезориентирующая цепочка карт гладкого атласа $\mathcal{B}$.

Фиксируем произвольный индекс $i \in \overline{1, I}$ и покажем, что карта $(\psi_i, U_i)$ либо согласована с атласом $\mathcal{A}$, либо согласована с атласом $\mathcal{A}^-$ противоположной ориентации. Для любой точки $P \in U_i$ через $s(P)$ обозначим знак якобиана замены координат от карты $(\psi_i, U_i)$ к карте атласа $\mathcal{A}$, район действия которой содержит точку $P$. Рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, получаем, что величина $s(P)$ не зависит от конкретной карты атласа $\mathcal{A}$ и непрерывна относительно точки $P$. Поскольку множество $U_i$ линейно-связно и $s(P)$ не обращается в нуль, то $s(P)$ не меняет знак. В случае $s(P) = 1$ при $P \in U_i$ карта $(\psi_i, U_i)$ согласована с атласом $\mathcal{A}$. В случае $s(P) = -1$ при $P \in U_i$ карта $(\psi_i, U_i)$ согласована с атласом $\mathcal{A}^-$.

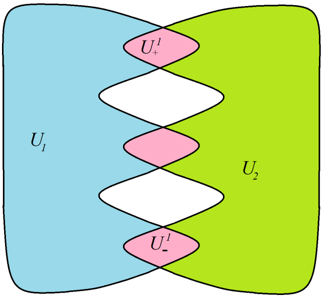
Пусть для определенности карта $(\psi_1, U_1)$ согласована с атласом $\mathcal{A}$. Поскольку якобиан замены координат $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ положителен, то карта $(\psi_2, U_2)$ согласована с атласом $\mathcal{A}$ и так далее. Получаем, что карта $(\psi_I, U_I)$ согласована с атласом $\mathcal{A}$. Поэтому карты $(\psi_I, U_I)$ и $(\psi_1, U_1)$ согласованы и цепочка $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ не является дезориентирующей.

Докажем «$\Leftarrow$». Пусть на $M$ не существует дезориентирующей цепочки. Так как $M$ – гладкое многообразие, то на $M$ существует гладкий атлас. Разбивая районы действия карт этого атласа на линейно-связные компоненты, получим гладкий атлас $\mathcal{A}$, район действия любой карты которого является линейно-связным множеством. Пусть $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$ – две карты этого атласа и $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$. Обозначим $\psi_2^-(x^1, \ldots, x^n) = \psi_2(-x^1, \ldots, x^n)$ при $(-x^1, \ldots, x^n) \in \psi_2^{-1}(U_2)$. Покажем, что карта $(\psi_1, U_1)$ согласована с картой $(\psi_2, U_2)$ или с картой $(\psi_2^-, U_2)$. Обозначим через $U_+$ множество всех точек $P \in U_1 \cap U_2$, где якобиан замены координат $\psi_2^{-1} \circ \psi_1$ положителен, а через $U_-$ множество всех точек $P \in U_1 \cap U_2$, где этот якобиан отрицателен. Предположим, что оба множества $U_+$ и $U_-$

не пусты. Пусть $U_+^1$ и $U_-^1$ – некоторые линейно-связные компоненты множеств $U_+$ и $U_-$ соответственно. Тогда цепочка карт

$$\{(\psi_1, U_1), (\psi_2, U_+^1), (\psi_2, U_2), (\psi_2, U_-^1)\}$$

является дезориентирующей, что противоречит условию. В случае, когда $U_- = \emptyset$ карта $(\psi_1, U_1)$ согласована с картой $(\psi_2, U_2)$, в случае $U_+ = \emptyset$ карта $(\psi_1, U_1)$ согласована с картой $(\psi_2^-, U_2)$.




Рассмотрим случай, когда многообразие $M$ линейно-связно. Фиксируем карту $(\psi_0, U_0)$ атласа $\mathcal{A}$. Для любой карты $(\psi, U)$ этого атласа по лемме 3 существует цепочка карт атласа $\mathcal{A}$, в которой $(\psi_0, U_0)$ – первая, а карта $(\psi, U)$ – последняя. Двигаясь по этой цепочке от карты $(\psi_0, U_0)$ к карте $(\psi, U)$ будем при необходимости менять знак одной из координат ЛСК следующей карты так, чтобы она была согласована с предыдущей (это можно сделать, как показано в предыдущем абзаце). Поскольку на $M$ нет дезориентирующей цепочки, то каждая карта данной цепочки будет согласована со всеми предыдущими картами этой цепочки. В таком случае будем говорить, что карта $(\psi, U)$ *согласована по цепочке* с картой $(\psi_0, U_0)$. Из отсутствия дезориентирующих цепочек следует, что если карта $(\psi, U)$ согласована с картой $(\psi_0, U_0)$ по одной цепочке, то эти карты согласованы и по любой другой цепочке. Атлас, полученный из атласа $\mathcal{A}$ путем описанного выше согласования каждой его карты с картой $(\psi_0, U_0)$, является ориентирующим атласом многообразия $M$.

В случае, когда многообразие $M$ не является линейно-связным, оно представимо в виде объединения своих линейно-связных компонент. Как показано выше, каждая линейно-связная компонента многообразия $M$ является ориентируемым многообразием. Поэтому многообразие $M$ ориентируемо. $\square$

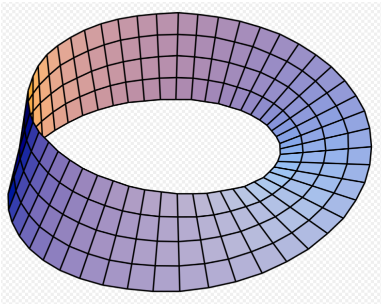
**Пример 1.** Множество

$$M = \{\psi(u,\varphi):\ u\in(-1,1),\ \varphi\in[0,2\pi)\},$$

где

$$\psi(u,\varphi) = \begin{pmatrix} x(u,\varphi) \\ y(u,\varphi) \\ z(u,\varphi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi \\ \left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi \\ \frac{u}{2}\sin\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix},$$

называется *листом (лентой) Мебиуса*.



Матрица Якоби вектор-функции $\psi(u,\varphi)$ имеет вид

$$\mathcal{D}\,\psi(u,\varphi) = \begin{pmatrix} x'_u & x'_\varphi \\ y'_u & y'_\varphi \\ z'_u & z'_\varphi \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\cos\varphi & -\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\sin\varphi - \frac{u}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\cos\varphi \\ \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\sin\varphi & \left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right)\cos\varphi - \frac{u}{4}\sin\frac{\varphi}{2}\sin\varphi \\ \frac{1}{2}\sin\frac{\varphi}{2} & \frac{u}{4}\cos\frac{\varphi}{2} \end{pmatrix}$$

Поскольку

$$\begin{vmatrix} x'_u & x'_\varphi \\ y'_u & y'_\varphi \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\left(1+\frac{u}{2}\cos\frac{\varphi}{2}\right) \neq 0 \quad \text{при } \varphi \neq \pi + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z},\ |u|<1,$$

а при $\varphi = \pi + 2\pi k$ имеем

$$\begin{vmatrix} y'_u & y'_\varphi \\ z'_u & z'_\varphi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \pm\frac{1}{2} & 0 \end{vmatrix} = \pm\frac{1}{2} \neq 0,$$

то ранг матрицы Якоби $\mathcal{D}\,\psi(u,\varphi)$ равен 2 при всех $\varphi\in\mathbb{R}$, $u\in(-1,1)$.

Для определения области, в которой отображение $\psi$ инъективно, решим уравнение

$$\psi(u_1, \varphi_1) = \psi(u_2, \varphi_2). \tag{1}$$

Обозначая $\varrho_i = 1 + \frac{u_i}{2}\cos\frac{\varphi_i}{2}$ при $i = 1, 2$, перепишем уравнение (1) в виде

$$\begin{cases} \varrho_1 \cos\varphi_1 = \varrho_2 \cos\varphi_2 \\ \varrho_1 \sin\varphi_1 = \varrho_2 \sin\varphi_2 \\ \frac{u_1}{2}\sin\frac{\varphi_1}{2} = \frac{u_2}{2}\sin\frac{\varphi_2}{2} \end{cases}$$

Из первых двух уравнений системы следует, что $\varrho_1 = \varrho_2$ и $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Из третьего уравнения системы следует, что если $\varphi_1 = \varphi_2 + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $u_1 = u_2$, а если $\varphi_1 = \varphi_2 + 2\pi + 4\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$, то $u_1 = -u_2$.

Таким образом, в области $\{(u, \varphi) : \ u \in (-1, 1), \varphi \in (a, b)\} = (-1, 1) \times \times (a, b)$, где $0 < b - a \leq 2\pi$, отображение $\psi$ инъективно. Рассмотрим, например, следующие три допустимые области параметров в $\mathbb{R}^2$:

$$V_1 = (-1, 1) \times \left(-\frac{2\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right), \quad V_2 = (-1, 1) \times \left(0, \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$V_3 = (-1, 1) \times \left(\frac{2\pi}{3}, 2\pi\right).$$

Определим отображение $\psi_i$ как сужение отображения $\psi$ на множество $V_i$. По аналогии с примером 2 § 3 легко доказать, что $\psi_i$ является гомеоморфизмом из $V_i$ в $U_i := \psi_i(V_i)$, $i = 1, 2, 3$. Поскольку $M = \bigcup\limits_{i=1}^{3} U_i$, то набор карт $\{(\varphi_i, U_i)\}_{i=1}^{3}$ составляет атлас на $M$. В силу теоремы о параметрическом способе задания гладкого подмногообразия множество $M$ является гладким двумерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^3$.

Найдем замены координат $w_{ij} = \psi_i^{-1} \circ \psi_j$. Согласно определению замены координат отображение $w_{ij}$ действует из множества $\psi_j^{-1}(U_i \cap U_j)$ во множество $\psi_i^{-1}(U_i \cap U_j)$. Поэтому

$$w_{21} : (-1, 1) \times \left(0, \frac{2\pi}{3}\right) \to (-1, 1) \times \left(0, \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$w_{32} : (-1, 1) \times \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right) \to (-1, 1) \times \left(\frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right),$$

$$w_{13} : (-1, 1) \times \left(\frac{4\pi}{3}, 2\pi\right) \to (-1, 1) \times \left(-\frac{2\pi}{3}, 0\right).$$

Используя полученные выше решения уравнения (1), находим замены координат:

$$w_{21}(u, \varphi) = (u, \varphi), \quad w_{32}(u, \varphi) = (u, \varphi), \quad w_{13}(u, \varphi) = (-u, \varphi + 2\pi).$$

Видим, что якобианы замен координат $w_{21}$ и $w_{32}$ положительны, а якобиан замены координат $w_{13}$ отрицателен. Таким образом, цепочка карт

$\{(\psi_1, U_1), (\psi_2, U_2), (\psi_3, U_3)\}$ является дезориентирующей. Согласно теореме 2 лист Мебиуса является неориентируемым многообразием.

Рассмотрим способ ориентации $(N-1)$-мерного гладкого подмногообразия пространства $\mathbb{R}^N$, использующий нормаль к подмногообразию.

Будем рассматривать $\mathbb{R}^N$ как многообразие, ориентированное стандартной декартовой системой координат $(x^1, \ldots, x^N)$.

**Определение.** Вектор $\vartheta \in \mathbb{R}^N$ называется *единичным вектором нормали* к многообразию $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ в точке $P \in M$, если $|\vartheta| = 1$ и скалярное произведение $(\vartheta, u)$ равно нулю для любого касательного вектора $u \in \in \widetilde{T}_P(M)$.

Так как $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$, то размерность касательного подпространства $\widetilde{T}_P(M)$ равна $N-1$. Следовательно, размерность его ортогонального дополнения

$$\widetilde{T}_P(M)^{\perp} := \{\vartheta \in \mathbb{R}^N : \ (\vartheta, u) = 0 \ \forall u \in \widetilde{T}_P(M)\}$$

равна 1. Таким образом, для любой точки $P \in M$ существуют ровно два единичных вектора $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^{\perp}$, отличающихся знаком.

**Определение.** Будем говорить, что единичный вектор нормали $\vartheta \in \in \widetilde{T}_P(M)^{\perp}$ и карта $(\psi, U)$ на $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ *согласованы*, если $P \in U$ и для $x_0 = \psi^{-1}(P)$

$$\left(\vartheta, \tfrac{\partial \psi}{\partial x^1}(x_0), \ldots, \tfrac{\partial \psi}{\partial x^{N-1}}(x_0)\right) \text{ – правый базис в } \mathbb{R}^N. \tag{2}$$

**Лемма 4.** *Пусть единичный вектор нормали $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^{\perp}$ согласован с одной картой $(\psi, U)$, соответствующей ориентации $M$. Тогда вектор $\vartheta$ согласован с любой картой $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$, соответствующей ориентации $M$ и такой, что $P \in \tilde{U}$.*

**Доказательство.** Фиксируем карту $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$, соответствующую ориентации $M$ и такую, что $P \in \tilde{U}$. Рассмотрим базисы $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ и $\left(\frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^{N-1}}\right)$ в $\widetilde{T}_P(M)$, соответствующие ЛСК $\psi^{-1}$ и $\tilde{\psi}^{-1}$. Поскольку карты $(\psi, U)$ и $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$ ориентированы согласованно, то в силу леммы 1 эти базисы ориентированы одинаково. Поэтому $\left(\vartheta, \frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ и $\left(\vartheta, \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^{N-1}}\right)$ – одинаково ориентированные базисы в $\mathbb{R}^N$. Таким образом, согласно условию (2) вектор нормали $\vartheta$ согласован с картой $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$. $\square$

**Определение.** Будем говорить, что единичный вектор нормали $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^{\perp}$ *согласован с ориентацией многообразия* $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$, если $\vartheta$ согласован с любой картой $(\psi, U)$ на $M$, соответствующей ориентации $M$ и такой, что $P \in U$.

**Лемма 5.** *Для любой точки $P \in M$ ориентированного многообразия $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ существует единственный единичный вектор нормали $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^{\perp}$, согласованый с ориентацией $M$.*

**Доказательство.** Фиксируем карту $(\psi, U)$ на $M$, соответствующую ориентации $M$ и такую, что $P \in U$. Пусть $\vartheta$ – один из двух единичных векторов нормали к $M$ в точке $P$. Если $\vartheta$ не согласован с картой $(\psi, U)$, то изменим знак вектора $\vartheta$. Получим единичный вектор нормали $\vartheta \in \widetilde{T}_P(M)^{\perp}$, согласованный с картой $(\psi, U)$. В силу леммы 4 вектор $\vartheta$ согласован с ориентацией $M$. Такой вектор $\vartheta$ единственен, т.к. единичных векторов нормалей к $M$ в точке $P$ всего два: $\vartheta$ и $-\vartheta$, причем вектор $-\vartheta$ не согласован с картой $(\psi, U)$. □

**Теорема 3.** *Подмногообразие $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ пространства $\mathbb{R}^N$ является ориентируемым тогда и только тогда, когда существует непрерывная на $M$ функция $\vartheta : M \to \mathbb{R}^N$, значение которой $\vartheta(P)$ в каждой точке $P \in M$ является единичным вектором нормали к $M$ в точке $P$.*

**Доказательство.** Докажем «$\Rightarrow$». Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}_N^{N-1}$ ориентируемо. Согласно лемме 5 для любой точки $P \in M$ существует единственный единичный вектор нормали $\vartheta(P) \in \widetilde{T}_P(M)^{\perp}$, согласованый с ориентацией $M$. Покажем, что функция $\vartheta : M \to \mathbb{R}^N$ непрерывна. Фиксируем точку $P_0 \in M$ и последовательность точек $P_k \in M$ таких, что $P_k \to P_0$ при $k \to \infty$. Поскольку последовательность $\{\vartheta(P_k)\}$ ограничена, то из нее можно выделить подпоследовательность $\{\vartheta(P_{k_j})\}$, сходящуюся к некоторому вектору $\hat{\vartheta} \in \mathbb{R}^N$. Покажем, что $\hat{\vartheta} = \vartheta(P_0)$.

Фиксируем карту $(\psi, U)$ на $M$, соответствующую ориентации $M$ и такую, что $P_0 \in U$. Этой карте соответствует базис $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ в $\widetilde{T}_P(M)$. Поскольку векторы $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P))$ непрерывно зависят от точки $P$, то, переходя к пределу при $j \to \infty$ в равенствах $\left(\vartheta(P_{k_j}), \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P_{k_j}))\right) = 0$, получаем равенства $\left(\hat{\vartheta}, \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P_0))\right) = 0$ при всех $i \in \overline{1, N-1}$, т.е. $\hat{\vartheta} \in \widetilde{T}_{P_0}(M)^{\perp}$. Переходя к пределу при $j \to \infty$ в равенстве $|\vartheta(P_{k_j})| = 1$, получаем равенство $|\hat{\vartheta}| = 1$.

Условие (2) эквивалентно неравенству $\det\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P)\right) > 0$, где $\det(e_1, \ldots, e_N)$ – определитель матрицы, столбцами которой являются координаты векторов $(e_1, \ldots, e_N)$ в $\mathbb{R}^N$. Поскольку определитель матрицы непрерывно зависит от элементов матрицы, то, переходя к пределу при $j \to \infty$ в неравенстве $\det\left(\vartheta(P_{k_j}), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P_{k_j}), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P_{k_j})\right) > 0$, получаем неравенство $\det\left(\hat{\vartheta}, \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P_0), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P_0)\right) \geq 0$. Следовательно, $\hat{\vartheta} = \vartheta(P_0)$.

Таким образом, вектор $\vartheta(P_0)$ является единственным частичным пределом последовательности $\{\vartheta(P_k)\}$. Отсюда следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} \vartheta(P_k) = \vartheta(P_0)$. Поэтому функция $\vartheta : M \to \mathbb{R}^N$ непрерывна в произвольной точке $P_0 \in M$.

Докажем «$\Leftarrow$». Пусть существует непрерывная функция $\vartheta : M \to \mathbb{R}^N$, значение которой $\vartheta(P)$ в каждой точке $P \in M$ является единичным вектором нормали к $M$ в точке $P$. Согласно определению гладкого многообразия для каждой точки $P \in M$ найдется карта $(\psi, U) = (\psi_P, U_P)$ такая, что $P \in U$. Можно считать, что множество $U$ линейно-связно (иначе в качестве $U$ возьмем линейно-связную его компоненту, содержащую $P$). Если базис $\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P)), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P))\right)$ не является правым базисом в $\mathbb{R}^N$, то изменим знак первой координаты этой ЛСК. Тогда изменится знак $\frac{\partial\psi}{\partial x^1}$, а остальные $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ не изменятся. Поэтому для каждой точки $P_0 \in M$ найдется такая покрывающая ее карта $(\psi, U) = (\psi_{P_0}, U_{P_0})$, что $\left(\vartheta(P_0), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P_0)), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P_0))\right)$ – правый базис в $\mathbb{R}^N$. В силу непрерывности $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(\psi^{-1}(P))$ и $\vartheta(P)$, а также линейной связности $U = U_{P_0}$ получаем, что $\det\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P)), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P))\right) > 0$, т.е. $\left(\vartheta(P), \frac{\partial\psi}{\partial x^1}(\psi^{-1}(P)), \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}(\psi^{-1}(P))\right)$ – правый базис в $\mathbb{R}^N$ для любой точки $P \in U_{P_0}$.

Покажем, что атлас $\mathcal{A} = \{(\psi_P, U_P)\}_{P\in M}$ является ориентирующим для $M$. Рассмотрим любые две карты $(\psi, U)$ и $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ этого атласа такие, что $U \cap \widetilde{U} \neq \emptyset$. Тогда в любой точке $P \in U \cap \widetilde{U}$ наборы векторов $\left(\vartheta, \frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ и $\left(\vartheta, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^{N-1}}\right)$ являются одинаково ориентированными (правыми) базисами в $\mathbb{R}^N$. Поэтому $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial\psi}{\partial x^{N-1}}\right)$ и $\left(\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^1}, \ldots, \frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial \tilde{x}^{N-1}}\right)$ – одинаково ориентированные базисы в $\widetilde{T}_P(M)$. В силу леммы 1 карты $(\psi, U)$ и $(\tilde{\psi}, \widetilde{U})$ согласованы. Следовательно, $\mathcal{A}$ – ориентирующий атлас. $\square$

**Пример 2.** Сфера $M = \{P \in \mathbb{R}^N : |P| = r\}$ является ориентируемым многообразием. Это следует, например, из теоремы 3, поскольку функция $\vartheta(P) = \frac{P}{r}$ является непрерывной на $M$ и ее значение является единичным вектором нормали к $M$ в точке $P$.

$\triangleleft$

# § 8. Согласование ориентаций многообразия и его края

**Лемма 1.** *Открытый шар* $U_\varepsilon(c) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - c| < \varepsilon\}$ *диффеоморфен пространству* $\mathbb{R}^n$.

**Доказательство.** Рассмотрим единичный шар

$$B^n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}.$$

Поскольку линейное отображение $g(x) = c + \varepsilon \cdot x$ является диффеоморфизмом из $B^n$ в $U_\varepsilon(c)$, то достаточно построить диффеоморфизм $\varphi : B^n \to \mathbb{R}^n$. Таким диффеоморфизмом являтся, например, отображение

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{1 - |x|^2}}, \qquad x \in B^n,$$

которое, как видно из формулы, является $C^\infty$-гладким и имеет $C^\infty$-гладкое обратное отображение

$$\varphi^{-1}(y) = \frac{y}{\sqrt{1 + |y|^2}}, \qquad y \in \mathbb{R}^n.$$

Поэтому $\varphi$ – $C^\infty$-гладкий диффеоморфизм. □

**Лемма 2.** *Для любого гладкого многообразия* $M \in \mathfrak{M}^n$ *существует такой гладкий атлас, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с пространством* $\mathbb{R}^n$ *или с полупространством* $\mathbb{R}^n_-$.

**Доказательство.** Фиксируем гладкий атлас $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda \in \Lambda}$ на $M$. Для любого $\lambda \in \Lambda$ множество $V_\lambda := \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda)$ является допустимой областью параметров, т.е. открытым подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$ с топологией, индуцированной топологией $\mathbb{R}^n$. Поэтому для любой точки $x \in V_\lambda$ существует ее окрестность $V_\lambda(x) \subset V_\lambda$ такая, что $V_\lambda(x)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке $x$ или полушар (точнее – пересечение открытого шара с замкнутым полупространством $\mathbb{R}^n_-$, на границе которого лежит точка $x$ – центр шара). Согласно лемме 1 открытый шар диффеоморфен пространству $\mathbb{R}^n$. Аналогично, указанный выше полушар диффеоморфен полупространству $\mathbb{R}^n_-$. В любом случае существует диффеоморфизм $f_{\lambda,x}$, переводящий $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$ в $V_\lambda(x)$.

Для любых $\lambda \in \Lambda$, $x \in V_\lambda$ через $\psi_{\lambda,x}$ обозначим сужение отображения $\psi_\lambda$ на множество $V_\lambda(x)$: $\psi_{\lambda,x} := \psi_\lambda\big|_{V_\lambda(x)}$, а через $U_{\lambda,x}$ – образ множества $V_\lambda(x)$ при отображении $\psi_\lambda$: $U_{\lambda,x} := \psi_\lambda(V_\lambda(x)) = \psi_{\lambda,x}(V_\lambda(x))$.

Так как $V_\lambda = \bigcup\limits_{x\in V_\lambda} V_\lambda(x)$, то $U_\lambda = \psi_\lambda(V_\lambda) = \bigcup\limits_{x\in V_\lambda} \psi_\lambda(V_\lambda(x)) = \bigcup\limits_{x\in V_\lambda} U_{\lambda,x}$. Поэтому набор карт

$$\Big\{(\psi_{\lambda,x}, U_{\lambda,x})\Big\}_{\substack{x\in V_\lambda\\ \lambda\in\Lambda}}$$

составляет гладкий атлас на $M$. Поскольку отображение $\psi_{\lambda,x}\circ f_{\lambda,x}$ является гомеоморфизмом из $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$ в $U_{\lambda,x}$, то набор карт

$$\Big\{(\psi_{\lambda,x}\circ f_{\lambda,x},\ U_{\lambda,x})\Big\}_{\substack{x\in V_\lambda\\ \lambda\in\Lambda}}$$

составляет искомый атлас. □

**Лемма 3.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$ – ориентированное многообразие, $n \geq 2$. Тогда на $M$ существует такой атлас заданной ориентации, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ или с полупространством $\mathbb{R}^n_-$.*

**Доказательство.** В силу леммы 2 существует такой гладкий атлас $\mathcal{A}$ на $M$, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$. Если карта $(\psi, U)$ этого атласа не соответствует заданной ориентации $M$, то, изменив знак второй координаты $x^2$ ЛСК этой карты, получим карту, соответствующую ориентации $M$. Поскольку область параметров этой карты совпадает с $\mathbb{R}^n$ или $\mathbb{R}^n_-$, то при изменении знака $x^2$ эта область не изменится. Выполняя эти действия для всех карт атласа $\mathcal{A}$, получим искомый атлас. □

Используя атлас, существование которого установлено в лемме 3, следующая теорема определяет ориентацию края $\partial M$ многообразия $M$, согласованную с ориентацией $M$.

**Теорема 1.** (О построении ориентирующего атласа для края многообразия на основе ориентирующего атласа исходного многообразия.) *Пусть ориентация многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$, $n \geq 2$ задана ориентирующим атласом $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1}$, области параметров карт которого имеют вид*

$$\psi_\lambda^{-1}(U_\lambda) = \begin{cases} \mathbb{R}^n, & \lambda \in \Lambda_0, \\ \mathbb{R}^n_-, & \lambda \in \Lambda_1. \end{cases} \tag{1}$$

*Тогда* $\left\{\left(\psi_{\lambda}\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ *– ориентирующий атлас на* $\partial M$*.*

**Доказательство.** Так как $\partial\mathbb{R}^n = \emptyset$, то $\partial U_\lambda = \emptyset$ при $\lambda \in \Lambda_0$. Поэтому согласно теореме 2 § 6, $\left\{\left(\psi_{\lambda}\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_\lambda\right)\right\}_{\lambda\in\Lambda_1}$ – гладкий атлас на $\partial M$. Покажем, что любые две карты этого атласа согласованы. Фиксируем два произвольных индекса $\lambda, \tilde\lambda \in \Lambda_1$. Поскольку карты $(\psi_\lambda, U_\lambda)$ и $(\psi_{\tilde\lambda}, U_{\tilde\lambda})$ согласованы, то якобиан замены координат $w = \psi_{\tilde\lambda}^{-1} \circ \psi_\lambda$ положителен на своей области определения $V := = \psi_\lambda^{-1}(U_\lambda \cap U_{\tilde\lambda})$. Поскольку множество $U_\lambda \cap U_{\tilde\lambda}$ открыто в топологическом пространстве $M$, то его прообраз $V$ при непрерывном отображении $\psi_\lambda$ является открытым подмножеством топологического пространства $\mathbb{R}^n_-$. Это доказывается аналогично доказательству леммы 4 § 1. Следовательно, множество $V$ является допустимой областью параметров. При этом $\partial V = V \cap \partial\mathbb{R}^n_-$ – край $V$. Отображение замены координат от карты $\left(\psi_{\lambda}\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_\lambda\right)$ к карте $\left(\psi_{\tilde\lambda}\big|_{\partial\mathbb{R}^n_-},\ \partial U_{\tilde\lambda}\right)$ является сужением отображения $w$ на $\partial V$. Требуется доказать, что якобиан этого сужения $w\big|_{\partial V}$ положителен на $\partial V$.

Пусть $w(x) = \begin{pmatrix} w^1(x) \\ \dots \\ w^n(x) \end{pmatrix}$ при $x \in V$. Фиксируем произвольную точку $x_0 = (x_0^1, \dots, x_0^n) \in \partial V$. Так как $\partial V \subset \partial\mathbb{R}^n_-$, то $x_0^1 = 0$.

По теореме о независимости краевой точки от карты получаем, что $w(\partial V) \subset \partial\mathbb{R}^n_-$. Следовательно, $w^1(0, x^2, \dots, x^n) = 0$ при $(x^2, \dots, x^n)$ достаточно близких к $(x_0^2, \dots, x_0^n)$, а значит, $\frac{\partial w^1}{\partial x^i}(x_0) = = 0$ при всех $i \in \overline{2, n}$.

Поскольку $w(V) \subset \mathbb{R}^n_-$, то $w^1(x^1, x_0^2, \dots, x_0^n) \leq 0 = = w^1(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^n)$ при всех $x^1 \leq 0$, достаточно близких к $0$, а значит, $\frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) \geq 0$.

Используя обозначение

$$\frac{\partial(w^1, \dots, w^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} := \det \begin{pmatrix} \frac{\partial w^1}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial w^1}{\partial x^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial w^n}{\partial x^1} & \dots & \frac{\partial w^n}{\partial x^n} \end{pmatrix},$$

получаем

$$\det \mathcal{D}\, w(x_0) = \frac{\partial(w^1, \ldots, w^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}(x_0) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial w^n}{\partial x^1}(x_0) & \frac{\partial w^n}{\partial x^2}(x_0) & \ldots & \frac{\partial w^n}{\partial x^n}(x_0) \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) \cdot \frac{\partial(w^2, \ldots, w^n)}{\partial(x^2, \ldots, x^n)}(x_0).$$

Так как $\det \mathcal{D}\, w(x_0) > 0$, $\frac{\partial w^1}{\partial x^1}(x_0) \geq 0$, то $\frac{\partial(w^2,\ldots,w^n)}{\partial(x^2,\ldots,x^n)}(x_0) > 0$. Поскольку $\frac{\partial(w^2,\ldots,w^n)}{\partial(x^2,\ldots,x^n)}$ – это якобиан сужения $w_{|_{\partial V}}$, доказательство теоремы завершено. $\square$

**Определение.** Ориентацию $\partial M$, заданную атласом, указанным в теореме 1, будем называть *согласованной с ориентацией* $M$.

**Определение.** Пусть $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^n$ – ориентированные многообразия. Будем говорить, что диффеоморфизм $\varphi$ из $M_1$ в $M_2$ *переносит ориентацию* $M_1$ *на ориентацию* $M_2$, если для любой карты $(\psi, U)$ на $M_1$, соответствующей ориентации $M_1$, карта $(\varphi \circ \psi, \varphi(U))$ на $M_2$ соответствует ориентации $M_2$.

**Лемма 4.** *Пусть $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^n$ – ориентированные многообразия, $n \geq 2$. Пусть гладкий диффеоморфизм $\varphi$ из $M_1$ в $M_2$ переносит ориентацию $M_1$ на ориентацию $M_2$. Пусть ориентация $\partial M_1$ согласована с ориентацией $M_1$, а сужение $\varphi_{|_{\partial M_1}}$ диффеоморфизма $\varphi$ переносит ориентацию $\partial M_1$ на ориентацию $\partial M_2$. Тогда ориентация $\partial M_2$ согласована с ориентацией $M_2$.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольную точку $Q \in \partial M_2$. Обозначим $P := \varphi^{-1}(Q)$. Тогда $P \in \partial M_1$. По лемме 3 существует карта $(\psi_1, U_1)$ на $M_1$, согласованная с ориентацией $M_1$ и такая, что $P \in U_1$, $\psi_1^{-1}(U_1) = \partial \mathbb{R}^n_-$.

Обозначим $\psi_2 := \varphi \circ \psi_1$, $U_2 := \varphi(U_1)$. Поскольку диффеоморфизм $\varphi$ переносит ориентацию $M_1$ на ориентацию $M_2$, то карта $(\psi_2, U_2)$ согласована с ориентацией $M_2$. При этом $\psi_2^{-1}(U_2) = \partial \mathbb{R}^n_-$. Поэтому карта $\left(\psi_{2_{|_{\partial \mathbb{R}^n_-}}},\ \partial U_2\right)$ соответствует ориентации $\partial M_2$, согласованной с ориентацией $M_2$. Поскольку ${\psi_2}_{|_{\partial\mathbb{R}^n_-}} = \varphi_{|_{\partial M_1}} \circ {\psi_1}_{|_{\partial\mathbb{R}^n_-}}$, $\quad \partial U_2 = \varphi(\partial U_1)$, то сужение $\varphi_{|_{\partial M_1}}$ переносит ориентацию $\partial M_1$ на ориентацию $\partial M_2$, согласованную с ориентацией $M_2$. $\square$

**Замечание.** Лемма 4 позволяет проверять согласованность ориентаций многообразия и его края. Пусть $\{(\psi_\lambda, U_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda_0\cup\Lambda_1}$ – ориентирующий атлас на $M \in \mathfrak{M}^n$, области параметров карт которого имеют вид (1). Для того, чтобы проверить, что край $\partial M$ ориентирован положительно относительно ориентации многообразия $M$ достаточно правильно согласовать ориентации $\mathbb{R}^n_-$ и $\partial\mathbb{R}^n_-$ и следить за тем, чтобы отображение ${\psi_\lambda}_{|_{\partial\mathbb{R}^n_-}}$ при $\lambda \in \Lambda_1$ переносило ориентацию $\partial\mathbb{R}^n_-$ на ориентацию $\partial M$. Правильное согласование ориентаций $\mathbb{R}^n_-$ и $\partial\mathbb{R}^n_-$ означает, что если ориентация $\mathbb{R}^n_-$ задана стандартной декартовой системой координат $(x^1,\dots,x^n)$, то ориентация $\partial\mathbb{R}^n_-$ задана системой координат $(x^2,\dots,x^n)$.

$\triangleright$

Теорема 1 позволяет согласовать ориентации гладкого многообразия и его края в случае, когда размерность многообразия больше 1. Рассмотрим одномерный случай отдельно. Пусть $M$ – одномерное гладкое ориентированное многообразие. Фиксируем точку $P \in \partial M$. В силу леммы 2 § 3 существует карта $(\psi, U)$ на $M$, область параметров которой совпадает с $\mathbb{R}^1_- = (-\infty, 0]$ и $\psi^{-1}(P) = 0$. Этими условиями ориентация карты $(\psi, U)$ определена однозначно. При этом карта $(\psi, U)$ может соответствовать или не соответствовать ориентации многообразия $M$. Эти соображения приводят к следующему определению.

**Определение.** *Ориентацией края $\partial M$ ориентированного многообразия $M \in \mathfrak{M}^1$, согласованной с ориентацией $M$,* называется функция $s : \partial M \to \{-1, +1\}$, которая точке $P \in \partial M$ ставит в соответствие число $s(P) = +1$, если точку $P$ можно покрыть районом действия карты $(\psi, U)$, согласованной с ориентацией $M$, область параметров которой $\psi^{-1}(U)$ совпадает с $(-\infty, 0]$. Иначе $s(P) = -1$.

**Пример 1.** Пусть $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$ – простая кривая в $\mathbb{R}^N$, соединяющая точки $P$ и $Q$, т.е. $r(a) = P$, $r(b) = Q$, $r \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^N)$ и $r'(t) \neq \overline{0}$ при $t \in [a,b]$. Согласно лемме 2 § 7 многообразие $\Gamma$ ориентируемо. Край $\Gamma$ состоит из двух точек: начала $P$ и конца $Q$ кривой $\Gamma$: $\partial\Gamma = \{P, Q\}$. При этом ориентация $\partial\Gamma$, согласованная с ориентацией $\Gamma$ в направлении возрастания параметра $t$ – это функция $s : \partial\Gamma \to \{-1, +1\}$, заданная равенствами $s(P) = -1$, $s(Q) = 1$.

$\triangleleft$

**Задача 1.** Докажите, что если граница области $G \subset \mathbb{R}^2$ является простой замкнутой гладкой кривой $\Gamma$, а $M = \overline{G}$ – замыкание области $G$ в $\mathbb{R}^2_{xy}$, то $M$ – гладкое двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$, причем $\Gamma$ – край многообразия $M$.

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_n$. Вектор $\vartheta \in \mathbb{R}^n$ называется *единичным вектором внешней по отношению к* $M$ *нормали* к $\partial M$ в точке $P \in \partial M$, если

1) $|\vartheta| = 1$,

2) скалярное произведение $(\vartheta, u)$ равно нулю для любого касательного вектора $u \in \widetilde{T}_P(\partial M)$ и

3) при всех достаточно малых $t > 0$ точка $P + t\vartheta$ не лежит в $M$.

**Лемма 5.** *Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^n_n$ ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$. Пусть $\vartheta(P)$ – единичный вектор нормали к $\partial M$ в точке $P \in \partial M$, согласованный с ориентацией $\partial M$. Ориентация края $\partial M$ согласована с ориентацией $M$ тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in \partial M$ вектор $\vartheta(P)$ является внешней по отношению к $M$ нормалью к $\partial M$.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольную точку $P \in \partial M$. Согласно лемме 3 найдется карта $(\psi, U)$ на $M$, согласованная с ориентацией $M$ и такая, что $P \in U$ и $\psi^{-1}(U) = \mathbb{R}^n_-$. Обозначим $x_0 = \psi^{-1}(P)$. Тогда $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)$ – правый базис в $\widetilde{T}_P(M) = \mathbb{R}^n$, т.е. $\det \mathcal{D}\,\psi(x_0) > 0$. Пусть ориентация края $\partial M$ согласована с ориентацией $M$. Тогда карта $\left(\psi\big|_{\partial \mathbb{R}^n_-},\ \partial U\right)$ согласована с ориентацией края $\partial M$. По определению согласованности вектора нормали $\vartheta = \vartheta(P)$ с картой получаем, что $\left(\vartheta, \frac{\partial \psi}{\partial x^2}, \dots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)$ – правый базис в $\mathbb{R}^n$. Рассмотрим вектор $b = \mathcal{D}\,\psi^{-1}\vartheta$. Тогда $\vartheta = \mathcal{D}\,\psi \cdot b$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^2} = \mathcal{D}\,\psi \cdot e_2$, $\dots$, $\frac{\partial \psi}{\partial x^n} = \mathcal{D}\,\psi \cdot e_n$, где $(e_1, \dots, e_n)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$. Поэтому $(b, e_2, \dots, e_n)$ – правый базис в $\mathbb{R}^n$, т.е. $b_1 > 0$, где $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$. Поскольку $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_-, U)$, то по определению классов $C^k(V, Y)$ можно считать, что вектор функция $\psi$ определена и является гладкой в некоторой окрестности точки $x_0$. Поскольку

$\det \mathcal{D}\,\psi(x_0) \neq 0$, то по теореме об обратном отображении сужение $\psi$ на некоторую окрестность точки $x_0$ является гладким диффеоморфизмом. Заметим, что

$$\psi^{-1}(P + t\vartheta) = \psi^{-1}(P) + t\mathcal{D}\,\psi^{-1}(P)\vartheta + o(t) = x_0 + tb + o(t), \quad t \to +0.$$

Отсюда и из соотношений $x_0 \in \partial\mathbb{R}^n_-$ и $b_1 > 0$ следует, что существует число $t_0 > 0$ такое, что $\psi^{-1}(P + t\vartheta) \notin \mathbb{R}^n_-$ при $t \in (0, t_0)$. Следовательно, $P + t\vartheta \notin \psi(\mathbb{R}^n_-) = U$ при $t \in (0, t_0)$. Поскольку $U$ – открытое подмножество топологического пространства $M$, то при достаточно малых $t > 0$ получаем $P + t\vartheta \notin M$, т.е. $\vartheta = \vartheta(P)$ – внешняя по отношению к $M$ нормаль к $\partial M$.

Если изменить ориентацию края $\partial M$, то направление вектора $\vartheta(P)$, согласованного с ориентацией $\partial M$, изменится на противоположное и вектор $\vartheta(P)$ станет вннутренней по отношению к $M$ нормалью к $\partial M$. $\square$

**Определение .** Пусть $M$ – гладкое двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$. Будем говорить, что при движении вдоль края $\partial M$ в направлении его ориентации многообразие $M$ *остается слева*, если для любой точки $P \in \partial M$ пара векторов $(\vartheta, \tau)$ является правой в $\mathbb{R}^2_{xy}$, где $\vartheta$ – вектор единичной внешней по отношению к $M$ нормали к $\partial M$ в точке $P$, $\tau$ – вектор касательной к $\partial M$, соответствующий ориентации $\partial M$.

**Замечание .** Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^2_2$ ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^2_{xy}$. Из леммы 5 следует, что ориентация края $\partial M$ согласована с ориентацией $M$ тогда и только тогда, когда при движении вдоль края $\partial M$ в направлении его ориентации многообразие $M$ остается слева.

Рассмотрим практический метод согласования ориентаций гладкого двумерного многообразия (гладкой поверхности) $S \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$ и ее края $\partial S$.

Фиксируем произвольную точку $P \in \partial S$ и карту $(\psi, U)$ на $S$, соответствующую ориентации $S$. Пусть $(\alpha, \beta) = \psi^{-1}$ – соответствующая ЛСК. Тогда область параметров $V := \psi^{-1}(U)$ лежит в плоскости $\mathbb{R}^2_{\alpha\beta}$. Пусть $\xi$ – вектор внешней по отношению к $V$ номали к кривой $\partial V$; $x_0 := \psi^{-1}(P)$. Поскольку $x_0 - t\xi \in V$, то $\psi(x_0 - t\xi) \in \psi(V) = S$

при достаточно малых $t > 0$. Поэтому вектор

$$\eta := \frac{d}{dt}\psi(x_0 - t\xi)_{|t=0}$$

является вектором касательной плоскости $\widetilde{T}_P(S)$, направленным «в сторону» поверхности $S$.

Так как пара векторов $\psi'_\alpha(x_0)$, $\psi'_\beta(x_0)$ составляет базис пространства $\widetilde{T}_P(S)$, соответствующий ориентации $S$, то вектор $\vartheta := \frac{[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]}{|[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]|}$ является вектором единичной нормали к $S$ в точке $P$, согласованным с картой $(\psi, U)$, а значит, и с ориентацией $S$. Пусть $\tau$ – единичный вектор касательной к кривой $\partial S$ в точке $P$, направленный в соответствии с ориентацией кривой $\partial S$.

Справедливо следующее правило «правой руки»: *ориентация края $\partial S$ согласована с ориентацией поверхности $S$ тогда и только тогда, когда для любой точки $P \in \partial S$ тройка векторов $\tau, \eta, \vartheta$ является правой тройкой в пространстве $\mathbb{R}^3_{xyz}$*. В силу леммы 3 это утверждение достаточно проверить для карты $(\psi, U)$ такой, что $V = \psi^{-1}(U) = \mathbb{R}^2_- = \{(\alpha, \beta) : \ \alpha \le 0, \beta \in \mathbb{R}\}$. В этом случае $\partial V = \{(0, \beta) : \ \beta \in \mathbb{R}\}$, $\partial S = \psi(\partial V) = \{\psi(0, \beta) : \beta \in \mathbb{R}\}$, $\tau = \psi'_\beta$, $\xi = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\eta = -\psi'_\alpha$, $\vartheta := \frac{[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]}{|[\psi'_\alpha, \psi'_\beta]|}$. Ориентации многообразий $V$ и $\partial V$, заданные стандартными системами координат в $\mathbb{R}^2$ и в $\mathbb{R}$, согласованы. Отображение $\psi$ переносит ориентацию $V$ на ориентацию $S$, а ориентацию $\partial V$ – на ориентацию $\partial S$. Поэтому ориентации $S$ и $\partial S$ также согласованы. Поскольку тройка векторов $\vartheta, \tau, \eta$ является правой, то правило «правой руки» выполняется.

Менее строго правило «правой руки» можно сформулировать следующим образом: *край $\partial S$ ориентирован согласовано с ориентацией поверхности $S$ тогда и только тогда, когда при обходе края $\partial S$ в направлении его ориентации поверхность $S$ остается слева, если смотреть с той стороны, в которую направлен вектор нормали к поверхности $S$, согласованный с ориентацией поверхности $S$.*

Глава 18

# ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ФОРМЫ

## § 1. Тензоры как полилинейные функции

В этом параграфе через $V$ будем обозначать некоторое конечномерное линейное пространство, а через $V^*$ – сопряженное к $V$ пространство, состоящее из линейных функций (ковекторов) $l : V \to \mathbb{R}$ (или $l : V \to \mathbb{C}$ в случае комплексных чисел).

**Определение.** *Тензором $T$ типа $(p, q)$ на пространстве $V$* называется полилинейная функция

$$T : \underbrace{V^* \times \ldots \times V^*}_{p} \times \underbrace{V \times \ldots \times V}_{q} \to \mathbb{R}.$$

Значение этой полилинейной функции на ковекторах $l^1, \ldots, l^p \in V^*$ и векторах $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$ будем записывать в виде $T[l^1, \ldots, l^p, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$. *Полилинейность* этой функции означает ее линейность по каждому ковектору $l^1, \ldots, l^p$ и каждому вектору $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q$ при фиксированных значениях остальных ее аргументов.

**Определение.** Пусть $(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$ – базис в $V$, пусть $(e_*^1, \ldots, e_*^n)$ – взаимный базис в $V^*$. Тогда числа

$$T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} = T[e_*^{i_1}, \ldots, e_*^{i_p}, \vec{e}_{j_1}, \ldots, \vec{e}_{j_q}]$$

называются *компонентами* или *координатами тензора $T$* в этих базисах.

**Замечание.** Значение тензора $T$ выражается через его компоненты по формуле

$$T[l^1, \ldots, l^p, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = T^{i_1 \ldots i_p}_{j_1 \ldots j_q} \; l^1_{i_1} \ldots l^p_{i_p} \; \xi_1^{j_1} \ldots \xi_q^{j_q}, \tag{1}$$

где $(l^i_1, \ldots, l^i_n)$ – координаты ковектора $l^i$, $(\xi^1_j, \ldots, \xi^n_j)$ – координаты вектора $\vec{v}_j$, суммирование производится по всем наборам индексов $i_1, \ldots, i_p, j_1, \ldots, j_q \in \overline{1, n}$. Это следует из полилинейности тензора.

**Определение.** Пусть $S$ и $T$ – тензоры типа $(p,q)$ на пространстве $V$, $\alpha$ и $\beta$ – числа. Линейной комбинацией $\alpha S+\beta T$ называется тензор типа $(p,q)$ на $V$, определяемый для любых $l^1,\dots,l^p \in V^*$ и $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q \in V$ естественным образом:

$$(\alpha S+\beta T)[l^1,\dots,l^p,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q]=$$

$$=\alpha S[l^1,\dots,l^p,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q]+\beta T[l^1,\dots,l^p,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q].$$

Таким образом, множество тензоров типа $(p,q)$ на пространстве $V$ образует линейное пространство.

**Определение.** *Тензорным произведением* тензора $S$ типа $(p,q)$ и тензора $T$ типа $(r,s)$ называется тензор $S\otimes T$ типа $(p+r,q+s)$, значение которого для любых $l^1,\dots,l^{p+r} \in V^*$ и $\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{q+s} \in V$ определяется формулой

$$(S\otimes T)[l^1,\dots,l^{p+r},\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_{q+s}]=$$

$$=S[l^1,\dots,l^p,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q]\cdot T[l^{p+1},\dots,l^{p+r},\vec{v}_{q+1},\dots,\vec{v}_{q+s}].$$

**Замечание.** Тензорное произведение, вообще говоря, не коммутативно. Например, $e_*^1\otimes e_*^2 \neq e_*^2\otimes e_*^1$, т.к.

$$\Big(e_*^1\otimes e_*^2\Big)[\vec{e}_1,\vec{e}_2]=1\neq 0=\Big(e_*^2\otimes e_*^1\Big)[\vec{e}_1,\vec{e}_2].$$

**Соглашение об отождествлении конечномерного линейного пространства и его второго сопряженного.** Любому вектору $\vec{v}\in V$ сопоставим линейную функцию $\vec{v}^{**}: V^*\to\mathbb{R}$, определяемую формулой

$$\vec{v}^{**}(l)=l(v)\quad \forall l\in V^*.$$

Тогда $\vec{v}^{**}$ – элемент пространства $V^{**}$, сопряженного к $V^*$. При этом отображение $v\to\vec{v}^{**}$ из $V$ в $V^{**}$ является изоморфизмом линейных пространств. Имея в виду этот изоморфизм, будем отождествлять $\vec{v}^{**}$ и $\vec{v}$, а значит, будем отождествлять пространство $V$ и его второе сопряженное $V^{**}$.

**Теорема 1.** *Пусть $(\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ – базис в пространстве $V$, $(e_*^1,\dots,e_*^n)$ – взаимный базис в $V^*$. Тогда тензор $T$ на $V$ следующим образом выражается через свои компоненты в этих базисах:*

$$T = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}\ \vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e_*^{j_1} \otimes \dots \otimes e_*^{j_q},$$

*где суммирование производится по всем наборам индексов* $i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q \in \overline{1, n}$.

**Доказательство.** По определению тензорного произведения

$$\Big(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e_*^{j_1} \otimes \dots \otimes e_*^{j_q}\Big)[l^1, \dots, l^p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q] =$$

$$= \vec{e}_{i_1}(l^1) \dots \vec{e}_{i_p}(l^p) \cdot e_*^{j_1}(\vec{v}_1) \dots e_*^{j_q}(\vec{v}_q).$$

Разложим векторы $\vec{v}_m$ и ковекторы $l^m$ по базисам пространств $V$ и $V^*$ соответственно:

$$\vec{v}_m = \xi^k_m \vec{e}_k, \qquad l^m = l^m_k e_*^k.$$

Тогда $e_*^j(\vec{v}_m) = e_*^j(\xi^k_m \vec{e}_k) = \xi^k_m e_*^j(\vec{e}_k) = \xi^k_m \delta^j_k = \xi^j_m$, где равенство $e_*^j(\vec{e}_k) = \delta^j_k$ следует из определения взаимного базиса.

В силу соглашения об отождествлении пространств $V$ и $V^{**}$ имеем $\vec{e}_i(e_*^k) = e_*^k(\vec{e}_i) = \delta^k_i$. Поэтому

$$\vec{e}_i(l^m) = \vec{e}_i(l^m_k e_*^k) = l^m_k \vec{e}_i(e_*^k) = l^m_k \delta^k_i = l^m_i.$$

Следовательно,

$$\Big(\vec{e}_{i_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{i_p} \otimes e_*^{j_1} \otimes \dots \otimes e_*^{j_q}\Big)[l^1, \dots, l^p, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q] =$$

$$= l^1_{i_1} \dots l^p_{i_p}\ \xi^{j_1}_1 \dots \xi^{j_q}_q.$$

Отсюда и из равенства (1) вытекает доказываемая формула. □

## § 2. Тензорные поля

**Определение.** *Векторным полем* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется отображение $\vec{v}$, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие касательный вектор $\vec{v}(P) \in T_P(M)$. *Ковекторным полем* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется отображение $l$, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие ковектор $l(P) \in T_P^*(M)$. *Скалярным полем* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется функция $f : M \to$ $\to \mathbb{R}$.

**Определение.** *Тензорным полем* $t$ типа $(s, q)$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется отображение, которое каждой точке $P \in M$ ставит в соответствие тензор $t(P)$ типа $(s, q)$, заданный на касательном пространстве $T_P(M)$

$$t(P) : \underbrace{T_P^*(M) \times \ldots \times T_P^*(M)}_{s} \times \underbrace{T_P(M) \times \ldots \times T_P(M)}_{q} \to \mathbb{R}.$$

Значение этой полилинейной функции на ковекторах $l^1, \ldots, l^s \in T_P^*(M)$ и векторах $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in T_P(M)$ будем записывать в виде $t(P)[l^1, \ldots, l^s, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$.

**Замечание.** Согласно определению ковекторного поля оно является тензорным полем типа $(0, 1)$. Согласно определению векторного поля и соглашению об отождествлении $T_P(M)$ и $T_P^{**}(M)$ векторное поле является тензорным полем типа $(1, 0)$. Скалярное поле является тензорным полем типа $(0, 0)$.

**Определение.** Пусть $t$ – тензорное поле типа $(s, q)$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Числа

$$t_{i_1 \ldots i_q}^{j_1 \ldots j_s}(P) = t(P)\left[dx^{j_1}, \ldots, dx^{j_s}, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_q}}\right]$$

называются *компонентами тензорного поля* $t$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$.

**Определение.** Пусть $k \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$. Если для каждой карты $(\psi, U)$ на $M \in \mathfrak{M}^n$ компоненты тензорного поля $t$ являются функциями класса $C^k(U, \mathbb{R})$, то тензорное поле называется $C^k$*-гладким.*

**Замечание.** Значение тензорного поля $t$ однозначно выражается через его компоненты по формуле

$$t(P)[l^1, \ldots, l^s, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = t_{i_1 \ldots i_q}^{j_1 \ldots j_s}(P)\; l_{j_1}^1 \ldots l_{j_s}^s\; \xi_1^{i_1} \ldots \xi_q^{i_q}, \qquad (1)$$

где $(l_1^j, \ldots, l_n^j)$ – координаты ковектора $l^j$, т.е. $l^j = \sum\limits_{i=1}^{n} l_i^j dx^i$,

$(\xi_i^1, \ldots, \xi_i^n)$ – координаты вектора $\vec{v}_i$, т.е. $\vec{v}_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_i^j \frac{\partial}{\partial x^j}$,

все индексы суммирования $i_1, \ldots, i_q, j_1, \ldots, j_s$ пробегают $\overline{1, n}$.

**Теорема 1.** *Компоненты тензорного поля $t$ при замене ЛСК изменяются по* тензорному закону

$$\tilde{t}^{\,j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q} = \frac{\partial \tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial \tilde{x}^{i'_q}}\, t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}, \tag{2}$$

*где все индексы суммирования $i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_s$ пробегают $\overline{1,n}$.*

**Доказательство.** Согласно формулам (7), (13) § 5 имеем

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i'}} = \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}} \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad\qquad d\tilde{x}^{j'} = \frac{\partial \tilde{x}^{j'}}{\partial x^j} dx^j.$$

Следовательно, используя полилинейность функции $t(P)$, получаем

$$\tilde{t}^{\,j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}(P) = t(P)\left[d\tilde{x}^{j'_1}, \dots, d\tilde{x}^{j'_s}, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i'_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^{i'_q}}\right] =$$

$$= t(P)\left[\frac{\partial \tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} dx^{j_1}, \dots, \frac{\partial \tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}} dx^{j_s}, \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{i'_1}} \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial x^{i_q}}{\partial \tilde{x}^{i'_q}} \frac{\partial}{\partial x^{i_q}}\right] =$$

$$= \frac{\partial \tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial \tilde{x}^{i'_q}}\, t(P)\left[dx^{j_1}, \dots, dx^{j_s}, \frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{i_q}}\right] =$$

$$= \frac{\partial \tilde{x}^{j'_1}}{\partial x^{j_1}} \dots \frac{\partial \tilde{x}^{j'_s}}{\partial x^{j_s}} \frac{\partial x^{i_1}}{\partial \tilde{x}^{i'_1}} \dots \frac{\partial x^{i_q}}{\partial \tilde{x}^{i'_q}}\, t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P). \qquad \square$$

▷

**Теорема 2.** *Пусть для каждой ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ на многообразии $M \in$ $\in \mathfrak{M}^n$ и для каждого набора индексов $i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_s \in \overline{1,n}$ заданы функции $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)$, $P \in M$. Следующие условия эквивалентны:*

*1) существует тензорное поле $t$ типа $(s, q)$ на многообразии $M$ такое, что в каждой ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ компоненты тензорного поля $t$ равны функциям $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)$;*

*2) функции $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)$ при замене ЛСК меняются по тензорному закону (2).*

**Доказательство.** В силу правила изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК из условия 1) следует условие 2). Докажем, что из условия 2) следует условие 1). Зафиксируем некоторую ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ в окрестности точки $P \in M$. Определим значение тензорного поля $t$ в точке

$P$ формулой

$$t(P)[l^1,\dots,l^s,\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_q] = t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)\, l^1_{j_1}\dots l^s_{j_s}\ \xi^{i_1}_1\dots\xi^{i_q}_q,$$

где $(l^j_1,\dots,l^j_n)$ – координаты ковектора $l^j$, $(\xi^1_i,\dots,\xi^n_i)$ – координаты вектора $\vec{v}_i$. Из условия 2) и правила изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК следует, что для любой ЛСК $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ функции $\tilde{t}^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}(P)$ являются компонентами тензорного поля $t$ в этой ЛСК, т.е. выполнено условие 1). $\square$

**Замечание.** Имея в виду теорему 2, тензорное поле на многообразии $M$ иногда определяют как набор скалярных полей $t^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}(P)$, соответствующий каждой ЛСК на $M$ и изменяющийся при замене ЛСК по тензорному закону (2).

**Замечание.** Пусть $M\in\mathfrak{M}^n$, $f\in C^\infty(M,\mathbb{R})$. Выясним, является ли набор функций $t_{ij}(P)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(P)$ компонентами некоторого тензорного поля на $M$. Найдем закон преобразования функций $t_{ij}(P)$ при замене ЛСК. В силу теоремы о дифференцировании сложной функции (см. формулу (5) § 5) справедлива формула

$$\frac{\partial f}{\partial\tilde{x}^{j'}} = \frac{\partial f}{\partial x^j}\ \frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^{j'}}.$$

Дифференцируя еще раз, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\tilde{x}^{i'}\partial\tilde{x}^{j'}} = \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i'}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^j}\right)\ \frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^{j'}} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\ \frac{\partial}{\partial\tilde{x}^{i'}}\left(\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^{j'}}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}\ \frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^{j'}} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial\tilde{x}^{i'}\partial\tilde{x}^{j'}}.$$

Таким образом, набор функций $t_{ij}(P)=\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(P)$ при замене ЛСК меняется по закону

$$\tilde{t}_{i'j'} = \frac{\partial x^i}{\partial\tilde{x}^{i'}}\,\frac{\partial x^j}{\partial\tilde{x}^{j'}}t_{ij} + \frac{\partial f}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial\tilde{x}^{i'}\partial\tilde{x}^{j'}},$$

который не совпадает с тензорным законом (2) по причине наличия слагаемых $\frac{\partial f}{\partial x^j}\,\frac{\partial^2 x^j}{\partial\tilde{x}^{i'}\partial\tilde{x}^{j'}}$. В частном случае, если замена координат линейна, то $\frac{\partial^2 x^j}{\partial\tilde{x}^{i'}\partial\tilde{x}^{j'}}=0$ и изменение функций $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i\partial x^j}(P)$ происходит по тензорному закону.

$\triangleleft$

**Определение.** *Суммой двух тензорных полей* $t$ *и* $\tau$ одинакового типа $(s,q)$ на многообразии $M$ называется тензорное поле $t+\tau$ типа $(s,q)$, значение которого в каждой точке $P\in M$ равно сумме значений $t(P)$ и $\tau(P)$: $\quad(t+\tau)(P)=t(P)+\tau(P)$.

**Определение.** *Произведением тензорного поля* $t$ типа $(s, q)$ на скалярное поле $\alpha$ на многообразии $M$ называется тензорное поле $\alpha t$ типа $(s, q)$, значение которого в каждой точке $P \in M$ равно произведению значений $t(P)$ и $\alpha(P)$: $\quad (\alpha t)(P) = \alpha(P) \cdot t(P)$.

**Замечание.** Множество тензорных полей фиксированного типа $(s, q)$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ образует линейное пространство. Это следует из приведенных выше определений.

**Определение.** *Тензорным произведением* тензорного поля $t$ и тензорного поля $\tau$ называется тензорное поле $t \otimes \tau$ типа $(s + r, q + s)$, значение которого в любой точке $P$ многообразия $M$ равно тензорному произведению тензоров $t(P)$ и $\tau(P)$:

$$(t \otimes \tau)(P) = t(P) \otimes \tau(P).$$

Непосредственно из теоремы 1 § 1 получаем следующую теорему.

**Теорема 3.** *Любое тензорное поле* $t$ *типа* $(s, q)$ *следующим образом выражается через свои компоненты:*

$$t(P) = t^{j_1 \dots j_s}_{i_1 \dots i_q}(P) \frac{\partial}{\partial x^{j_1}} \otimes \dots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{j_s}} \otimes dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_q}.$$

## § 3. Внешние формы

Как и в параграфе § 1 через $V$ будем обозначать некоторое конечномерное линейное пространство, а через $V^*$ – сопряженное к нему пространство.

**Определение.** *Внешней $q$-формой* на пространстве $V$ называется кососимметрический тензор типа $(0, q)$, т.е. тензор $T$ типа $(0, q)$ такой, что его значение $T[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q]$ меняет знак при перестановке $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_j$, где $1 \le i < j \le q$. Множество всех внешних $q$-форм на пространстве $V$ будем обозначать через $\Lambda^q(V)$.

В частности, $\Lambda^0(V) = \mathbb{R}$ (или $\Lambda^0(V) = \mathbb{C}$ в случае комплексных чисел); $\Lambda^1(V) = V^*$. Внешняя 2-форма – это тензор $T$ типа $(0, 2)$ такой, что

$$T[\vec{v}_2, \vec{v}_1] = -T[\vec{v}_1, \vec{v}_2] \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in V.$$

Рассмотрим операцию альтернирования тензоров типа $(0, q)$, через которую затем введем операцию внешнего произведения внешних форм. Операция альтернирования определяется с использованием перестановок.

**Определение.** *Перестановкой* чисел $\overline{1,q}$ называется взаимно-однозначная функция $\sigma : \overline{1,q} \to \overline{1,q}$. Перестановка $\sigma : \overline{1,q} \to \overline{1,q}$ называется *транспозицией*, если она меняет местами два различных элемента из $\overline{1,q}$, а остальные не меняет. Известно, что любая перестановка может быть представлена в виде суперпозиции конечного числа транспозиций, причем четность этого числа не зависит от способа такого представления. Число

$$\operatorname{sign}(\sigma) = \begin{cases} 1, & \sigma \text{ представима в виде четного числа транспозиций,} \\ -1, & \sigma \text{ представима в виде нечетного числа транспозиций.} \end{cases}$$

называется *знаком перестановки* $\sigma$.

*Перестановкой набора элементов* $(i_1, \ldots, i_q)$ называется набор $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(q)})$, где $\sigma$ – перестановка чисел $\overline{1,q}$.

Напомним, что число перестановок $q$ чисел равно $q!$.

**Определение.** *Альтернированием* тензора $T$ типа $(0,q)$ на пространстве $V$ называется тензор $\operatorname{Alt} T$, значение которого для любых $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in V$ задается формулой

$$(\operatorname{Alt} T)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\; T\big[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)}\big]\,,$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma : \overline{1,q} \to$ $\to \overline{1,q}$.

**Лемма 1.** *Пусть $T$ – тензор типа $(0,q)$ на пространстве $V$. Тогда*

*1)* $\operatorname{Alt} T \in \Lambda^q(V)$*;*

*2) если $T \in \Lambda^q(V)$, то* $\operatorname{Alt} T = T$*;*

*3) если тензор $T$ симметричен относительно $\vec{v}_i, \vec{v}_j$, т.е. значение $T[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$ не меняется при перестановке $\vec{v}_i$ и $\vec{v}_j$, $i \neq j$, то* $\operatorname{Alt} T = 0$.

$\rhd$

**Доказательство.** 1) Пусть $\alpha : \overline{1,q} \to \overline{1,q}$ – транспозиция. Тогда $\operatorname{sign}(\alpha) = -1$. Следовательно,

$$(\operatorname{Alt} T)\big[\vec{v}_{\alpha(1)}, \ldots, \vec{v}_{\alpha(q)}\big] = \frac{1}{q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\; T\big[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma\circ\alpha(q)}\big]\,,$$

где $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$. Тогда $\beta = \sigma \circ \alpha$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$. При этом $\operatorname{sign}(\beta) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\alpha) = -\operatorname{sign}(\sigma)$.

Поэтому

$$(\mathrm{Alt}\,T)\big[\vec v_{\alpha(1)},\ldots,\vec v_{\alpha(q)}\big]=-\frac{1}{q!}\sum_{\beta}\mathrm{sign}(\beta)\;T\big[\vec v_{\beta(1)},\ldots,\vec v_{\beta(q)}\big]=$$

$$=-(\mathrm{Alt}\,T)[\vec v_1,\ldots,\vec v_q].$$

То есть, тензор $\mathrm{Alt}\,T$ кососимметричен.

2) Пусть теперь $T\in\Lambda^q(T)$, т.е. $T$ – кососимметричный тензор типа $(0,q)$. Тогда $T\big[\vec v_{\sigma(1)},\ldots,\vec v_{\sigma(q)}\big]=\mathrm{sign}(\sigma)\;T[\vec v_1,\ldots,\vec v_q]$. Следовательно,

$$(\mathrm{Alt}\,T)[\vec v_1,\ldots,\vec v_q]=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma}T[\vec v_1,\ldots,\vec v_q]=T[\vec v_1,\ldots,\vec v_q],$$

то есть $\mathrm{Alt}\,T=T$.

3) Пусть перестановка $\alpha:\overline{1,q}\to\overline{1,q}$ меняет местами индексы $i$ и $j$ и не меняет остальные индексы. Если $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$, то $\beta=\alpha\circ\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$. При этом $\sigma=\alpha\circ\beta$ и

$$T\big[\vec v_{\sigma(1)},\ldots,\vec v_{\sigma(q)}\big]=T\big[\vec v_{\alpha\circ\beta(1)},\ldots,\vec v_{\alpha\circ\beta(q)}\big]=T\big[\vec v_{\beta(1)},\ldots,\vec v_{\beta(q)}\big]\,,$$

где последнее равенство следует из симметричности $T$ относительно транспозиции $\alpha$. Поэтому

$$(\mathrm{Alt}\,T)[\vec v_1,\ldots,\vec v_q]=\frac{1}{q!}\sum_{\sigma}\mathrm{sign}(\sigma)\;T\big[\vec v_{\sigma(1)},\ldots,\vec v_{\sigma(q)}\big]=$$

$$=-\frac{1}{q!}\sum_{\beta}\mathrm{sign}(\beta)\;T\big[\vec v_{\beta(1)},\ldots,\vec v_{\beta(q)}\big]=-(\mathrm{Alt}\,T)[\vec v_1,\ldots,\vec v_q].$$

Следовательно, $(\mathrm{Alt}\,T)[\vec v_1,\ldots,\vec v_q]=0$. $\square\triangleleft$

**Лемма 2.** *Пусть* $P$ *– тензор типа* $(0,p)$, $Q$ *– тензор типа* $(0,q)$. *Тогда*

$$\mathrm{Alt}(P\otimes Q)=\mathrm{Alt}((\mathrm{Alt}\,P)\otimes Q)=\mathrm{Alt}(P\otimes(\mathrm{Alt}\,Q)).$$

$\triangleright$ **Доказательство.** Для каждой перестановки $\alpha:\overline{1,p}\to\overline{1,p}$ рассмотрим перестановку $\alpha':\overline{1,p+q}\to\overline{1,p+q}$ такую, что

$$\alpha'(i)=\begin{cases}\alpha(i), & i\in\overline{1,p},\\ i, & i\in\overline{p+1,p+q}\end{cases}\tag{1}$$

Тогда

$$\Big((\mathrm{Alt}\,P)\otimes Q\Big)[\vec v_1,\ldots,\vec v_{p+q}]=$$

$$= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha} \operatorname{sign}(\alpha)\ (P\otimes Q)[\vec{v}_{\alpha(1)},\ldots,\vec{v}_{\alpha(p)},\vec{v}_{p+1},\ldots,\vec{v}_{p+q}] =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha'} \operatorname{sign}(\alpha')\ (P\otimes Q)[\vec{v}_{\alpha'(1)},\ldots,\vec{v}_{\alpha'(p+q)}],$$

где $\alpha$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p}$, а $\alpha'$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$ вида (1). Следовательно,

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P)\otimes Q)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{p+q}] =$$
$$= \frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\frac{1}{p!}\sum_{\alpha'} \operatorname{sign}(\alpha')\ (P\otimes Q)[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(1)},\ldots,\vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(p+q)}],$$

где $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$. Меняя порядок суммирования, получаем

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P)\otimes Q)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{p+q}] =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha'}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\operatorname{sign}(\alpha')\ (P\otimes Q)[\vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(1)},\ldots,\vec{v}_{\sigma\circ\alpha'(p+q)}].$$

Если $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$, то при фиксированной перестановке $\alpha'$ перестановка $\beta=\sigma\circ\alpha'$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,p+q}$, при этом $\operatorname{sign}(\beta)=\operatorname{sign}(\sigma)\cdot\operatorname{sign}(\alpha')$. Поэтому

$$\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P)\otimes Q)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{p+q}] =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha'}\frac{1}{(p+q)!}\sum_{\beta} \operatorname{sign}(\beta)\ (P\otimes Q)[\vec{v}_{\beta(1)},\ldots,\vec{v}_{\beta(p+q)}] =$$
$$= \frac{1}{p!}\sum_{\alpha'}\Big(\operatorname{Alt}(P\otimes Q)\Big)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{p+q}] = \Big(\operatorname{Alt}(P\otimes Q)\Big)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_{p+q}].$$

Последнее равенство следует из того, что количество перестановок $\alpha'$ вида (1) равно $p!$. Таким образом, равенство $\operatorname{Alt}((\operatorname{Alt} P)\otimes Q)=\operatorname{Alt}(P\otimes Q)$ доказано. Равенство $\operatorname{Alt}(P\otimes(\operatorname{Alt} Q))=\operatorname{Alt}(P\otimes Q)$ доказывается аналогично. $\square$

$\triangleleft$

**Определение.** *Внешним произведением* внешних форм $P\in\Lambda^p(V)$ и $Q\in\Lambda^q(V)$ называется следующая внешняя $(p+q)$-форма:

$$P\wedge Q = \frac{(p+q)!}{p!\,q!}\operatorname{Alt}(P\otimes Q).$$

**Замечание.** Поскольку операция альтернирования тензоров линейна, а операция тензорного произведения линейна по каждому сомножителю, то операция внешнего произведения линейна по каждому сомножителю, а значит, справедливо правило дистрибутивности.

**Лемма 3.** *Для любых внешних форм $P \in \Lambda^p(V)$, $Q \in \Lambda^q(V)$, $R \in$ $\in \Lambda^r(V)$ справедливо правило ассоциативности*

$$(P \wedge Q) \wedge R = P \wedge (Q \wedge R).$$

$\triangleright$

**Доказательство.** Согласно определению внешнего произведения

$$(P \wedge Q) \wedge R = \frac{(p+q+r)!}{(p+q)!\, r!} \cdot \frac{(p+q)!}{p!\, q!} \operatorname{Alt}(\operatorname{Alt}(P \otimes Q) \otimes R).$$

Используя лемму 2, получаем

$$(P \wedge Q) \wedge R = \frac{(p+q+r)!}{p!\, q!\, r!} \operatorname{Alt}(P \otimes Q \otimes R).$$

Аналогично,

$$P \wedge (Q \wedge R) = \frac{(p+q+r)!}{p!\, q!\, r!} \operatorname{Alt}(P \otimes Q \otimes R).$$

$\square$

$\triangleleft$

**Лемма 4.** *Для любых внешних форм $P \in \Lambda^p(V)$, $Q \in \Lambda^q(V)$ справедливо равенство*

$$Q \wedge P = (-1)^{pq}\ P \wedge Q.$$

$\triangleright$

**Доказательство.** По определению операций внешнего произведения и альтернирования имеем

$$(Q \wedge P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ Q[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(q)}]\ P[\vec{v}_{\sigma(q+1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(p+q)}],$$

где $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1, p+q}$. Рассмотрим перестановку $\alpha$ чисел $\overline{1, p+q}$:

$$\alpha(i) = \begin{cases} i+q, & i \in \overline{1,p}, \\ i-p, & i \in \overline{p+1, p+q}. \end{cases}$$

Заметим, что $\operatorname{sign}(\alpha) = (-1)^{pq}$. Используя перестановку $\alpha$, перепишем предыдущую формулу в виде

$$(Q \wedge P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\,q!} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ P[\vec v_{\sigma\circ\alpha(1)}, \ldots, \vec v_{\sigma\circ\alpha(p)}]\ Q[\vec v_{\sigma\circ\alpha(p+1)}, \ldots, \vec v_{\sigma\circ\alpha(p+q)}].$$

Если $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1, p+q}$, то $\beta := \sigma \circ \alpha$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1, p+q}$. При этом $\operatorname{sign}(\beta) = \operatorname{sign}(\sigma) \cdot \operatorname{sign}(\alpha) = (-$ $-1)^{pq} \operatorname{sign}(\sigma)$. Следовательно,

$$(Q \wedge P)[\vec v_1, \ldots, \vec v_{p+q}] =$$

$$= \frac{(-1)^{pq}}{p!\,q!} \sum_{\beta} \operatorname{sign}(\beta)\ P[\vec v_{\beta(1)}, \ldots, \vec v_{\beta(p)}]\ Q[\vec v_{\beta(p+1)}, \ldots, \vec v_{\beta(p+q)}] =$$

$$= (-1)^{pq} \cdot (P \wedge Q)[\vec v_1, \ldots, \vec v_{p+q}].$$

$\square$

$\triangleleft$

**Замечание.** Для любой внешней формы $Q \in \Lambda^q(V)$ при нечетном $q$ справедливо равенство

$$Q \wedge Q = 0. \qquad (2)$$

Это следует из леммы 4.

**Задача 1.** Приведите пример внешней формы $Q \in \Lambda^2(V)$, для которой $Q \wedge Q \neq 0$.

**Теорема 1.** *Пусть $(\vec e_1, \ldots, \vec e_n)$ – базис в пространстве $V$, $(e_*^1, \ldots, e_*^n)$ – взаимный базис в $V^*$. Тогда для любой внешней формы $T \in \Lambda^q(V)$ справедливо следующее представление через ее компоненты:*

$$T = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} T_{j_1 \ldots j_q} e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_q}, \qquad (3)$$

*где в отличие от соглашения Эйнштейна суммирование производится по всем наборам индексов $(j_1, \ldots, j_q)$ таким, что $1 \le j_1 <$ $< \ldots < j_q \le n$.*

$\triangleright$

**Доказательство.** Покажем индукцией по $q$, что

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_q} = q!\ \operatorname{Alt}(e_*^{j_1} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_q}). \qquad (4)$$

При $q = 2$ равенство (4) следует непосредственно из определения внешнего произведения. Пусть равенство (4) справедливо для $q = k - 1$. По определению внешнего произведения

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_k} = \frac{k!}{(k-1)!}\,\mathrm{Alt}(e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_{k-1}} \otimes e_*^{j_k}).$$

Используя предположение индукции, получаем

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_k} = k!\ \ \mathrm{Alt}(\mathrm{Alt}(e_*^{j_1} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{k-1}}) \otimes e_*^{j_k}).$$

Отсюда в силу леммы 2 получаем равенство (4) для $q = k$. Таким образом, равенство (4) доказано.

Из равенства (4) и определения операции альтернирования следует равенство

$$e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_k} = \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)\ e_*^{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{\sigma(q)}},$$

где суммирование производится по всем перестановкам чисел $\overline{1,q}$. Обозначим правую часть формулы (3) через $T'$:

$$T' := \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} T_{j_1 \ldots j_q} e_*^{j_1} \wedge \ldots \wedge e_*^{j_q}.$$

Требуется доказать равенство $T' = T$. Подставляя в предыдущую формулу, получаем

$$T' = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} T_{j_1 \ldots j_q} \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)\ e_*^{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{\sigma(q)}}.$$

В силу кососимметричности тензора $T$ имеем $T_{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(q)}} = \mathrm{sign}(\sigma) T_{j_1 \ldots j_q}$. Поэтому

$$T' = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \sum_{\sigma} T_{j_{\sigma(1)} \cdots j_{\sigma(q)}}\ e_*^{j_{\sigma(1)}} \otimes \ldots \otimes e_*^{j_{\sigma(q)}}.$$

Если наборы индексов $(j_1, \ldots, j_q)$ пробегают все такие наборы, что $1 \leq$ $\leq j_1 < \ldots < j_q \leq n$, а $\sigma$ пробегает все перестановки чисел $\overline{1,q}$, то наборы $(i_1, \ldots, i_q) = (j_{\sigma(1)}, \ldots, j_{\sigma(q)})$ пробегают все возможные наборы различных $i_s \in \overline{1,n}$. Следовательно,

$$T' = \sum_{i_1, \ldots, i_q} T_{i_1 \ldots i_q}\ e_*^{i_1} \otimes \ldots \otimes e_*^{i_q}, \tag{5}$$

где суммирование производится по всем наборам различных индексов $i_s \in$ $\in \overline{1,n}$. В случае, если в наборе $(i_1, \ldots, i_q)$ есть совпадающие индексы, то $T_{i_1 \ldots i_q} = 0$ в силу кососимметричности тензора $T$. Поэтому формула (5) останется справедливой, если суммирование производить по всем (не обязательно различным) наборам индексов $i_s \in \overline{1,n}$. Отсюда и из теоремы 1 § 1 получаем равенство $T' = T$. $\square$

**Следствие.** *1) Если $T \in \Lambda^q(V)$ и $q > \dim V$ ($\dim V$ – размерность пространства $V$), то $T = 0$.*

*2) Если $T \in \Lambda^n(V)$ и $n = \dim V$, то сумма (3) состоит из одного слагаемого:*

$$T = T_{1\ldots n}\, e_*^1 \wedge \ldots \wedge e_*^n,$$

*где по $n$ суммирование не производится.*

$\triangleleft$

## § 4. Дифференциальные формы

**Определение.** *Дифференциальной формой* степени $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется тензорное поле на многообразии $M$, значение которого в каждой точке $P \in M$ является внешней $q$-формой на касательном пространстве $T_P(M)$. Дифференциальная форма $\omega$ называется $C^k$-гладкой дифференциальной формой при $k \in \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$, если тензорное поле $\omega$ является $C^k$-гладким. Множество $C^k$-гладких дифференциальных форм $\omega$ степени $q$ на многообразии $M$ будем обозначать через $\Omega_k^q(M)$. Множество $\Omega^q(M) := \Omega_\infty^q(M)$ будем называть множеством *гладких* дифференциальных форм.

**Замечание.** Поскольку при $k_1 < k_2$ справедливо включение $C^{k_2}(M, \mathbb{R}) \subset C^{k_1}(M, \mathbb{R})$, то $\Omega_{k_2}^q(M) \subset \Omega_{k_1}^q(M)$.

**Замечание.** В частности, $\Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ – множество гладких скалярных полей на многообразии $M$; $\Omega^1(M)$ – множество гладких ковекторных полей на $M$. Например, если $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$, то дифференциал $df$ является гладким ковекторным полем, а значит, – дифференциальной формой степени 1. Далее мы увидим, что не всякая дифференциальная форма степени 1 является дифференциалом некоторой функции на $M$.

**Определение.** *Внешним произведением* дифференциальных форм $\alpha \in \Omega_k^p(M)$ и $\beta \in \Omega_k^q(M)$ называется дифференциальная форма $\alpha \wedge \beta \in \Omega_k^{p+q}(M)$, значение которой в каждой точке $P \in M$ равно внешнему произведению внешних форм $\alpha(P)$ и $\beta(P)$:

$$(\alpha \wedge \beta)(P) = \alpha(P) \wedge \beta(P).$$

**Теорема 1.** *Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^q(M)$ следующим образом представима через свои компоненты $\omega_{j_1\ldots j_q}$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$:*

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} \omega_{j_1 \ldots j_q}\ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}. \tag{1}$$

**Доказательство.** Согласно лемме 1 § 5 набор дифференциалов $(dx^1(P), \ldots, dx^n(P))$ составляет базис в сопряженном пространстве $T_P^*(M)$, взаимный базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ касательного пространства $T_P(M)$. Применяя теорему 1 § 3, для любой точки $P \in M$, в окрестности которой $(x^1, \ldots, x^n)$ является ЛСК, получаем

$$\omega(P) = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} \omega_{j_1 \ldots j_q}(P)\ dx^{j_1}(P) \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}(P).$$

$\square$

**Определение.** Каждое слагаемое суммы (1) называется *мономом.*

**Следствие.** *1) Если $\omega \in \Omega_0^q(M)$, $M \in \mathfrak{M}^n$ и $q > n$, то $\omega = 0$.*

*2) Если $\omega \in \Omega_0^q(M)$, $M \in \mathfrak{M}^n$ и $q = n$, то дифференциальная форма $\omega$ состоит из одного монома:*

$$\omega = \omega_{1 \ldots n}\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $k \ge 1$ и пусть дифференциальная форма $\omega \in \Omega_k^q(M)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ имеет вид

$$\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} \omega_{j_1 \ldots j_q}\ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

*Внешним дифференциалом* дифференциальной формы $\omega$ называется дифференциальная форма $d\omega \in \Omega_{k-1}^{q+1}(M)$, определяемая равенством

$$d\omega = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} d\omega_{j_1 \ldots j_q} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q},$$

где $d\omega_{j_1 \ldots j_q}(P)$ – дифференциал соответствующей компоненты $\omega_{j_1 \ldots j_q}$ тензорного поля $\omega$ в точке $P \in M$.

**Замечание.** Если $q = 0$, то дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ является $C^1$-гладким скалярным полем (непрерывно дифференцируемой функцией) на многообразии $M$. Тогда внешний дифференциал $d\omega$ дифференциальной формы $\omega$ совпадает с дифференциалом функции $\omega$.

Поскольку определение внешнего дифференциала дано с использованием системы координат, то для обоснования корректности этого определения требуется доказать следующую теорему.

**Теорема 2.** *Внешний дифференциал $d\omega$ дифференциальной формы $\omega \in \Omega_1^q(M)$ не зависит от ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$.*

**Доказательство.** Если $q = 0$, то $d\omega[\vec{v}] = \vec{v}(\omega)$ не зависит от ЛСК.

Рассмотрим случай $q = 1$.

Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ – две ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ в окрестности точки $P \in M$. Пусть $\omega_j$ и $\tilde{\omega}_i$ – компоненты дифференциальной формы $\omega$ в этих ЛСК, т.е.

$$\omega = \omega_j dx^j = \tilde{\omega}_i d\tilde{x}^i.$$

Требуется доказать, что

$$d\omega_j \wedge dx^j = d\tilde{\omega}_i \wedge d\tilde{x}^i. \tag{2}$$

Согласно правилу изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК эти компоненты связаны равенством

$$\tilde{\omega}_i = \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\, \omega_j.$$

Поэтому

$$d\tilde{\omega}_i = \omega_j\, d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} + \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\, d\omega_j,$$

а значит,

$$d\tilde{\omega}_i \wedge d\tilde{x}^i = \omega_j\, d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \wedge d\tilde{x}^i + \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\, d\omega_j \wedge d\tilde{x}^i$$

Поскольку $\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i}\, d\tilde{x}^i = dx^j$, то

$$d\tilde{\omega}_i \wedge d\tilde{x}^i = \omega_j\, d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \wedge d\tilde{x}^i + d\omega_j \wedge dx^j.$$

Таким образом, для доказательства равенства (2) достаточно проверить, что для любого $j \in \overline{1, n}$ справедливо равенство

$$A^j := d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} \wedge d\tilde{x}^i = 0. \tag{3}$$

Так как $d\frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^i} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^k$, то

$$A^j = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^i} d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^i.$$

Переобозначая индексы суммирования $i \leftrightarrow k$, получаем

$$A^j = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k} d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^k.$$

Поскольку $\frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^i \partial \tilde{x}^k} = \frac{\partial^2 x^j}{\partial \tilde{x}^k \partial \tilde{x}^i}$ и $d\tilde{x}^i \wedge d\tilde{x}^k = -d\tilde{x}^k \wedge d\tilde{x}^i$, то $A^j = -A^j$. Следовательно, $A^j = 0$, т.е. равенство (3) справедливо. Таким образом, в случае $q = 1$ теорема 2 доказана.

Случай $q > 1$ рассматривается аналогично. $\square$

**Замечание.** Из определения внешнего дифференциала и линейности дифференциала скалярного поля следует линейность внешнего дифференциала формы.

**Теорема 3.** (Правило Лейбница для внешнего дифференциала.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. Для любых дифференциальных форм $\alpha \in \Omega_1^s(M)$ и $\beta \in \Omega_1^q(M)$ справедливо правило Лейбница:*

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge d\beta.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 1 имеют место следующие представления дифференциальных форм:

$$\alpha = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_s \le n} \alpha_{i_1 \ldots i_s}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s},$$

$$\beta = \sum_{1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n} \beta_{j_1 \ldots j_q}\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Поскольку операция внешнего дифференцирования линейна, а операция внешнего произведения линейна по каждому аргументу, то достаточно рассмотреть случай, когда каждая из приведенных выше сумм состоит лишь из одного слагаемого:

$$\alpha = a\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}, \qquad \beta = b\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q},$$

где $a, b \in C^1(M, \mathbb{R})$. Тогда

$$\alpha \wedge \beta = ab\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$$

и, следовательно, по определению внешнего дифференциала

$$d(\alpha \wedge \beta) = d(ab) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Используя правило Лейбница для скалярных полей (которое следует из леммы 2 § 5 главы 17), получаем

$$d(ab) = da \cdot b + a \cdot db.$$

Поэтому

$$d(\alpha \wedge \beta) = A + B,$$

где

$$\begin{gathered} A = da \cdot b\ \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} = \\ = \Big(da \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}\Big) \wedge \Big(b\ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}\Big) = \\ = d\alpha \wedge \beta, \\ B = a \cdot db\ \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q} = \\ = (-1)^s \Big(a \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}\Big) \Big(db \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}\Big) = \\ = (-1)^s \alpha \wedge d\beta. \end{gathered}$$

Таким образом, $d(\alpha \wedge \beta) = A + B = d\alpha \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge d\beta$. $\square$

**Лемма 1.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. Внешний дифференциал второго порядка $d^2\omega = d(d\omega)$ любой дифференциальной формы $\omega \in \Omega_2^q(M)$ равен нулю:*

$$d^2\omega = 0.$$

**Доказательство.** Согласно теореме 1 справедливо представление дифференциальной формы $\omega$ через ее коэффициенты

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \ldots < j_q \leq n} \omega_{j_1 \ldots j_q}\ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

В силу линейности дифференциала достаточно получить доказываему формулу для одного монома

$$\omega = f\ dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q},$$

где $f = \omega_{j_1 \ldots j_q}$ – гладкое скалярное поле на $M$. Тогда по определению внешнего дифференциала

$$d\omega = df \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Поскольку согласно определению внешнего дифференциала имеем $d^2 x^j = 0$ для любого $j \in \overline{1, n}$, то в силу правила Лейбница имеем

$$d^2\omega = d^2 f \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Для завершения доказательства достаточно показать, что любое $C^2$-гладкое скалярное поле $f$ удовлетворяет равенству $d^2 f = 0$. Так как

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^i}\, dx^i$$

(где индекс суммирования $i$ пробегает $\overline{1, n}$), то в силу определения внешнего дифференциала

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}\, dx^j \wedge dx^i.$$

Согласно теореме о независимости смешанных производных от порядка дифференцирования $\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i}$. С другой стороны, по лемме 4 § 3 имеем $dx^i \wedge dx^j = -dx^j \wedge dx^i$. Поэтому при изменении порядка суммирования величина $d^2 f$ изменит знак, но, с другой стороны, не должна измениться. Следовательно, $d^2 f = 0$. $\square$

## § 5. Перенос касательных векторов и дифференциальных форм

**Определение.** Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$, $P \in M_1$. *Прямым переносом (pushforward)* касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M_1)$ при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ называется отображение $\varphi_*(\vec{v}\,) : C^1(M_2, \mathbb{R}) \to \to \mathbb{R}$, определяемое формулой

$$\varphi_*(\vec{v}\,)(f) := \vec{v}(f \circ \varphi) \qquad \forall f \in C^1(M_2, \mathbb{R}).$$

**Замечание.** Из формулы производной сложной функции следует, что для любого касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M_1)$ отображение $\varphi_*(\vec{v}\,) : C^1(M_2, \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ удовлетворяет определению касательного вектора, точнее $\varphi_*(\vec{v}\,) \in T_Q(M_2)$, где $Q = \varphi(P)$.

**Замечание.** Прямой перенос касательных векторов $\varphi_*$ при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ является линейным отображением из $T_P(M_1)$ в $T_Q(M_2)$. Действительно, для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$, $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M_1)$, $f \in C^1(M_2, \mathbb{R})$ имеем

$$\varphi_*(\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2)(f) = (\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2)(f \circ \varphi) = (\alpha_1\varphi_*(\vec{v}_1) + \alpha_2\varphi_*(\vec{v}_2))\,(f).$$

**Теорема 1.** *Пусть $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$ – карты на многообразиях $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$ и $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$ соответственно, пусть $(x^1, \dots, x^{n_1}) = \psi_1^{-1}$ и $(y^1, \dots, y^{n_2}) = \psi_2^{-1}$ – соответствующие ЛСК. Пусть $\varphi \in C^1(U_1, U_2)$, $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1)(x)$ – координатное представление отображения $\varphi$. Пусть $P \in U_1$, $Q = \varphi(P)$. Тогда результат прямого переноса базисного касательного вектора $\frac{\partial}{\partial x^i}$ при отображении $\varphi$ определяется формулой*

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right) = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\,\frac{\partial}{\partial y^j} \qquad \forall i \in \overline{1, n_1},$$

*где индекс суммирования $j$ пробегает $\overline{1, n_2}$.*

**Доказательство.** Так как $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1)(x)$, то $(\varphi \circ \psi_1)(x) = (\psi_2 \circ y)(x)$ при $x \in \psi_1^{-1}(U_1)$. Поэтому для любой функции $f \in C^1(M_2, \mathbb{R})$ имеем

$$\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)(f) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \varphi \circ \psi_1) = \frac{\partial}{\partial x^i}(f \circ \psi_2 \circ y) =$$

$$= \frac{\partial}{\partial y^j}(f \circ \psi_2)\,\frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^j}(f).$$

где первое равенство следует из определения прямого переноса касательного вектора, второе и пятое равенства – из формулы (2) § 5, четвертое – из формулы производной сложной функции.

**Определение.** Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$. *Дифференциалом отображения* $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ в точке $P \in M_1$ называется отображение $\varphi_*$, которое каждому касательному вектору $\vec{v} \in T_P(M_1)$ ставит в соответствие его прямой перенос $\varphi_*(\vec{v}\,) \in T_Q(M_2)$, где $Q = \varphi(P)$: $d\varphi(P)[\vec{v}\,] = \varphi_*(\vec{v}\,)$. Дифференциал отображения $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ также называется *касательным отображением.*

**Замечание.** Данное определение обобщает определение дифференциала скалярной функции $f \in C^1(M,\mathbb{R})$, если касательное пространство $T_Q(\mathbb{R})$ отождествить с $\mathbb{R}$, а базисный вектор $\frac{\partial}{\partial x}$ в $T_Q(\mathbb{R})$ отождествить с базисным вектором 1 в $\mathbb{R}$.

**Замечание.** Из теоремы 1 следует, что в ее обозначениях матрицей линейного отображения $d\varphi(P) : T_P(M_1) \to T_Q(M_2)$ является матрица Якоби $\mathcal{D}\,y(x_0)$ координатного представления $y(x)$ отображения $\varphi$ в точке $x_0 = \psi_1^{-1}(P)$, если в качестве базисов в пространствах $T_P(M_1)$ и $T_Q(M_2)$ выбраны базисы $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{n_1}}\right)$ и $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial y^{n_2}}\right)$ соответственно. Этот результат обобщает известный факт для отображений из $\mathbb{R}^{n_1}$ в $\mathbb{R}^{n_2}$.

**Определение.** Пусть заданы многообразия $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$. *Обратным переносом (pullback)* дифференциальной формы $\omega \in \Omega_k^q(M_2)$ при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ называется дифференциальная форма $\varphi^*\omega$, определяемая формулой

$$(\varphi^*\omega)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega(\varphi(P))[\varphi_*(\vec{v}_1), \ldots, \varphi_*(\vec{v}_q)]$$
$$\forall P \in M_1, \qquad \forall \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in T_P(M_1),$$

где $\varphi_*(\vec{v}_i)$ – прямой перенос касательного вектора $\vec{v}_i$.

Из линейности отображения прямого переноса касательных векторов следует полилинейность функции $(\varphi^*\omega)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$ относительно касательных векторов $\vec{v}_i$. Из кососимметричности тензора $\omega(\varphi(P))[u_1, \ldots, u_q]$ следует кососимметричность тензора $(\varphi^*\omega)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q]$.

Сделаем следующие 3 замечания, вытекающие непосредственно из определения обратного переноса дифференциальных форм.

**Замечание.** Обратный перенос дифференциальных форм $\varphi^*$ при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ является линейным отображением:

$$\varphi^*(\lambda_1\omega_1+\lambda_2\omega_2) = \lambda_1\varphi^*\omega_1+\lambda_2\varphi^*\omega_2 \qquad \forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}, \quad \forall \omega_1, \omega_2 \in \Omega^q(M_2).$$

**Замечание.** Если $\omega \in \Omega_k^0(M)$, т.е. $\omega$ – скалярное поле на многообразии $M$, то обратный перенос дифференциальной формы $\varphi^*$ при отображении $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ – это суперпозиция поля $\omega$ и отображения $\varphi$:

$$\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi. \tag{1}$$

**Лемма 1.** *Пусть* $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$, $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$, $\alpha \in$ $\in \Omega^p(M_2)$, $\beta \in \Omega^q(M_2)$. *Тогда*

$$\varphi^*(\alpha \wedge \beta) = \varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta).$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольную точку $P \in M_1$ и обозначим $Q = \varphi(P)$. В силу определений внешнего произведения дифференциальных форм и операции альтернирования для любых векторов $\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q} \in T_Q(M_2)$ в точке $Q$ имеем

$$(\alpha \wedge \beta)[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q}] = \frac{(p+q)!}{p!\, q!}\ \mathrm{Alt}(\alpha \otimes \beta)[\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)\ (\alpha \otimes \beta)[\vec{u}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{u}_{\sigma(p+q)}],$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma : \overline{1, p+q} \to$ $\to \overline{1, p+q}$.

Поэтому для любых векторов $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q} \in T_P(M_1)$ в точке $P$ имеем

$$(\varphi^*(\alpha \wedge \beta))[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}] = (\alpha \wedge \beta)[\varphi_* \vec{v}_1, \ldots, \varphi_* \vec{v}_{p+q}] =$$

$$= \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)\ (\alpha \otimes \beta)[\varphi_* \vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \varphi_* \vec{v}_{\sigma(p+q)}] =$$

$$= \frac{1}{p!\, q!} \sum_{\sigma} \mathrm{sign}(\sigma)\ (\varphi^*(\alpha) \otimes \varphi^*(\beta))[\vec{v}_{\sigma(1)}, \ldots, \vec{v}_{\sigma(p+q)}] =$$

$$= \Big(\varphi^*(\alpha) \wedge \varphi^*(\beta)\Big)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{p+q}].$$

$\square$

**Теорема 2.** *Пусть ЛСК* $(x^1, \ldots, x^{n_1}) = \psi_1^{-1}$ *определена картой* $(\psi_1, U_1)$ *на* $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$; *ЛСК* $(y^1, \ldots, y^{n_2}) = \psi_2^{-1}$ *определена картой* $(\psi_2, U_2)$ *на* $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$. *Пусть* $\varphi \in C^1(U_1, U_2)$. *Тогда выражение обратного переноса дифференциальной формы* $dy^j$ *через* $dx^k$ *получается формальным дифференцированием координатного представления* $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1)(x)$ *отображения* $\varphi$:

$$\varphi^*(dy^j) = \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k \qquad \forall j \in \overline{1, n_2},$$

*где индекс суммирования* $k$ *пробегает* $\overline{1, n_1}$.

**Доказательство.** В силу теоремы 1 и линейности тензора $dy^j$ имеем для любого $i \in \overline{1, n_1}$

$$\varphi^*(dy^j)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = dy^j\left[\varphi_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] =$$

$$= dy^j\left[\frac{\partial y^k}{\partial x^i}\ \frac{\partial}{\partial y^k}\right] = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\ dy^j\left[\frac{\partial}{\partial y^k}\right].$$

Поскольку согласно лемме 1 § 5 $(dy^1, \dots, dy^{n_2})$ – взаимный базис к базису $\left(\frac{\partial}{\partial y^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y^{n_2}}\right)$, то $dy^j\left[\frac{\partial}{\partial y^k}\right] = \delta_k^j$ – символ Кронекера. Следовательно,

$$\varphi^*(dy^j)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \frac{\partial y^k}{\partial x^i}\ \delta_k^j = \frac{\partial y^j}{\partial x^i}.$$

Поэтому для любого $i \in \overline{1, n_1}$

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \frac{\partial y^j}{\partial x^k}\delta_i^k = \frac{\partial y^j}{\partial x^i} = \varphi^*(dy^j)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right].$$

Поскольку любой вектор $\vec{v} \in T_P(M_1)$ можно разложить по базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^{n_1}}\right)$, то

$$\frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k[\vec{v}\,] = \varphi^*(dy^j)[\vec{v}\,].$$

$\square$

**Замечание.** Пусть заданы многообразия $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$, $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$, $\omega \in \Omega_k^q(M_2)$, $\varphi \in C^{k+1}(M_1, M_2)$. Тогда согласно теореме 2 обратный перенос $\varphi^*\omega$ является $C^k$-гладкой дифференциальной формой степени $q$ на $M_1$: $\quad \omega \in \Omega_k^q(M_1)$.

Напомним, что определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^n & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

можно вычислять по формуле полного разложения

$$\det A = \sum_\sigma \operatorname{sign}(\sigma)\ a^1_{\sigma(1)} a^2_{\sigma(2)} \dots a^n_{\sigma(n)},$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma$ чисел $\overline{1,n}$.

Пусть задана дифференцируемая вектор-функция $y(x) = (y^1(x),\dots,y^n(x))$, где $x = (x^1,\dots,x^n)$. Тогда якобиан $\det \mathcal{D}\, y(x)$ будем также обозначать через $\frac{\partial(y^1,\dots,y^n)}{\partial(x^1,\dots,x^n)}$. В силу формулы полного разложения определителя имеем

$$\frac{\partial(y^1,\dots,y^n)}{\partial(x^1,\dots,x^n)} = \det \mathcal{D}\, y(x) = \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma)\ \frac{\partial y^1}{\partial x^{\sigma(1)}}\ \cdots\ \frac{\partial y^n}{\partial x^{\sigma(n)}}, \qquad (2)$$

где суммирование производится по всем перестановкам $\sigma$ чисел $\overline{1,n}$.

**Теорема 3.** (О координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы.) *Пусть* $(\psi_1, U_1)$ *и* $(\psi_2, U_2)$ *– карты на многообразиях* $M_1 \in \mathfrak{M}^{n_1}$ *и* $M_2 \in \mathfrak{M}^{n_2}$ *соответственно. Пусть* $\varphi \in C^1(U_1, U_2)$, $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ \varphi \circ \psi_1)(x)$ *– координатное представление отображения* $\varphi$*. Тогда для любого набора индексов* $j_1,\dots,j_q \in \overline{1,n_2}$

$$\varphi^*\Big(dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}\Big) = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_q \le n_1} \frac{\partial(y^{j_1},\dots,y^{j_q})}{\partial(x^{i_1},\dots,x^{i_q})}\ dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 2 для любого $j \in \overline{1,n_2}$

$$\varphi^*(dy^j) = \sum_{k=1}^{n_1} \frac{\partial y^j}{\partial x^k} dx^k.$$

Обозначим

$$\omega = dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

Тогда в силу леммы 1

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dy^{j_q}) =$$

$$= \left(\sum_{k_1=1}^{n_1} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{k_1}} dx^{k_1}\right) \wedge \ldots \wedge \left(\sum_{k_q=1}^{n_1} \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{k_q}} dx^{k_q}\right) =$$

$$= \sum_{k_1,\dots,k_q} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{k_q}}\ dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q},$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $k_1, \ldots, k_q \in \overline{1, n_1}$. Из кососимметричности дифференциальной формы следует, что если в наборе $(k_1, \ldots, k_q)$ есть совпадающие индексы, то $dx^{k_1} \wedge \ldots \wedge dx^{k_q} = 0$. Поэтому можно считать, что суммирование производится по всем наборам попарно несовпадающих индексов $k_1, \ldots, k_q \in \overline{1, n_1}$. Поскольку любой набор попарно несовпадающих индексов $(k_1, \ldots, k_q)$ является перестановкой набора $(i_1, \ldots, i_q)$, где $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1$, то набор $(k_1, \ldots, k_q)$ можно представить как набор $(i_{\sigma(1)}, \ldots, i_{\sigma(q)})$, где $1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1$, $\sigma$ – перестановка чисел $\overline{1, q}$. Таким образом,

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1} \sum_{\sigma} \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_{\sigma(q)}}} \, dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{\sigma(q)}}.$$

Из леммы 4 § 3 следует, что

$$dx^{i_{\sigma(1)}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{\sigma(q)}} = \operatorname{sign}(\sigma) \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Поэтому

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1} \sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_{\sigma(q)}}} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

В силу равенства (2) получаем

$$\sum_{\sigma} \operatorname{sign}(\sigma) \frac{\partial y^{j_1}}{\partial x^{i_{\sigma(1)}}} \cdots \frac{\partial y^{j_q}}{\partial x^{i_{\sigma(q)}}} = \frac{\partial(y^{j_1}, \ldots, y^{j_q})}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_q})}.$$

Следовательно,

$$\varphi^*\omega = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_q \leq n_1} \frac{\partial(y^{j_1}, \ldots, y^{j_q})}{\partial(x^{i_1}, \ldots, x^{i_q})} \, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

$\square$

**Замечание.** Если в условиях теоремы 3 имеем $q = n_1 = n_2 = n$ и дифференциальная форма $\omega \in \Omega^n_k(M_2)$ имеет вид

$$\omega = a(y) \, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n,$$

то

$$\varphi^*\omega = a(y(x)) \, \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} \, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

**Лемма 2.** *Пусть заданы многообразия* $M_i \in \mathfrak{M}^{n_i}$, $i = 1, 2, 3$ *и отображения* $\varphi \in C^1(M_1, M_2)$ *и* $\psi \in C^1(M_2, M_3)$. *Тогда*

(1). $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$ *и*

(2). $(\psi \circ \varphi)^* = \varphi^* \circ \psi^*$.

**Доказательство.** (1). Используя определение прямого переноса касательных векторов для любого вектора $\vec{v} \in T_P(M_1)$ и любой функции $f \in C^1(M_3, \mathbb{R})$ получаем

$$(\psi \circ \varphi)_*(\vec{v}\,)(f) = \vec{v}(f \circ \psi \circ \varphi) = \varphi_*(\vec{v}\,)(f \circ \psi) = \psi_*(\varphi_*(\vec{v}\,))(f),$$

то есть $(\psi \circ \varphi)_* = \psi_* \circ \varphi_*$.

(2). Фиксируем произвольную дифференциальную форму $\omega \in \in \Omega_k^q(M_3)$. Тогда по определению обратного переноса дифференциальной формы для любых $P \in M_1$, $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q \in T_P(M_1)$ имеем

$$\Big((\psi \circ \varphi)^* \omega\Big)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega(\psi(\varphi(P)))[(\psi \circ \varphi)_*(\vec{v}_1), \ldots, (\psi \circ \varphi)_*(\vec{v}_q)].$$

Используя пункт (1), получаем

$$\Big((\psi \circ \varphi)^* \omega\Big)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_q] = \omega(\psi(\varphi(P)))[\psi_*(\varphi_*(\vec{v}_1)), \ldots, \psi_*(\varphi_*(\vec{v}_q))] =$$

$$= \alpha(\varphi(P))[\varphi_*(\vec{v}_1), \ldots, \varphi_*(\vec{v}_q)],$$

где

$$\alpha(Q)[u_1, \ldots, u_q] := \omega(\psi(Q))[\psi_*(u_1), \ldots, \psi_*(u_q)] = (\psi^* \omega)(Q)[u_1, \ldots, u_q].$$

Следовательно, $\alpha = \psi^* \omega$,

$$(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* \alpha = \varphi^*(\psi^* \omega) = (\varphi^* \circ \psi^*) \omega.$$

В силу произвольности $\omega \in \Omega_k^q(M_3)$ получаем доказываемое равенство. $\square$

**Теорема 4.** *Пусть* $M_1 \in \mathfrak{M}^n$, $M_2 \in \mathfrak{M}^k$, $\varphi \in C^2(M_1, M_2)$, $\omega \in \in \Omega_1^q(M_2)$. *Тогда*

$$d\varphi^* \omega = \varphi^* d\omega, \tag{3}$$

*т.е. операции внешнего дифференцирования и обратного переноса дифференциальной формы перестановочны.*

**Доказательство.** Рассмотрим сначала случай, когда $\omega \in \in \Omega_1^0(M_2)$, т.е. дифференциальная форма $\omega$ является скалярной функцией. В этом случае согласно равенству (1) имеем $\varphi^*\omega = \omega \circ \varphi$. Тогда в силу определения дифференциала отображения и леммы 2(1) получаем

$$d\varphi^*\omega = d(\omega \circ \varphi) = (\omega \circ \varphi)_* = \omega_* \circ \varphi_* = (d\omega) \circ \varphi_* = \varphi^* d\omega. \tag{4}$$

Пусть теперь $\omega \in \Omega_1^q(M_2)$, $q \geq 1$. В силу линейности внешнего дифференциала и обратного переноса дифференциальной формы равенство (3) достаточно доказать для одного монома

$$\omega = a(y)\, dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q} = a \wedge dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q},$$

где $a \in C^1(M_2, \mathbb{R})$, т.е. $a \in \Omega_1^0(M_2)$. Используя лемму 1, получаем

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(a) \wedge \varphi^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dy^{j_q}).$$

Используя доказанную формулу (4) для $\omega = y^j$, имеем $\varphi^*(dy^j) = = d\varphi^*(y^j)$. Следовательно,

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(a) \wedge d(\varphi^* y^{j_1}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^* y^{j_q}).$$

Применяя правило Лейбница для внешнего дифференциала и равенство $d^2 = 0$ имеем

$$d\varphi^*\omega = d\varphi^*(a) \wedge d(\varphi^* y^{j_1}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^* y^{j_q}),$$

$$d\omega = da \wedge dy^{j_1} \wedge \ldots \wedge dy^{j_q}.$$

Поэтому

$$\varphi^*(d\omega) = \varphi^*(da) \wedge \varphi^*(dy^{j_1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dy^{j_q}) =$$

$$= d\varphi^*(a) \wedge d(\varphi^* y^{j_1}) \wedge \ldots \wedge d(\varphi^* y^{j_q}) = d\varphi^*\omega.$$

$\square$

## § 6. Дифференциальные формы на подмногообразии

**Определение.** Подмножество $M_1 \subset M$ гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ называется *гладким подмногообразием* размерности $k$ (без собственного края), если для любой точки $P \in M_1$ существует ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ на $M$ такая, что в некоторой окрестности точки $P$ множество $M_1$ определяется системой уравнений $x^{k+1} = x^{k+2} = \dots = x^n = 0$. Эта ЛСК называется *канонической ЛСК* для пары $(M, M_1)$.

**Замечание.** Гладкое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ без края, определенное в § 2 главы 15, является частным случаем подмногообразия.

**Лемма 1.** *Край $\partial M$ гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ является $(n-1)$-мерным подмногообразием многообразия $M$.*

**Доказательство.** Фиксируем любую точку $P \in \partial M$. Пусть $(\psi, U)$ – карта на $M$ и $P \in U$. Согласно определению края допустимой области параметров край $\partial V$ допустимой области параметров $V := \psi^{-1}(U)$ имеет вид $\partial V = \{(x^1, \dots, x^n) \in V : \ x^1 = 0\}$. Поэтому в окрестности $U$ точки $P$ множество $\partial M$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$ определяется уравнением $x^1 = 0$. При этом ЛСК $(x^n, \dots, x^1)$ является канонической для пары $(M, M_1)$. $\square$

**Замечание.** Гладкое $k$-мерное подмногообразие $M_1$ гладкого многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ само является гладким многообразием. При этом топология $M_1$ индуцирована топологией $M$. Если $(x^1, \dots, x^n)$ – каноническая ЛСК для пары $(M, M_1)$, то $(x^1, \dots, x^k)$ – ЛСК на $M_1$. Атлас карт на $M_1$, соответствующих таким ЛСК, является гладким атласом на $M_1$.

**Замечание.** Если $M_1$ – гладкое подмногообразие многообразия $M$, то многообразие $M_1$ может иметь краевые точки, лежащие на краю $M$, но не может иметь «собственных» краевых точек, не лежащих на краю $M$.

**Замечание.** Если $M_1$ – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$, то в каждой точке $P \in M_1$ касательное пространство $T_P(M_1)$ является линейным подпространством касательного пространства $T_P(M)$. Для того, чтобы убедиться в этом достаточно перейти в каноническую ЛСК для пары $(M, M_1)$.

**Определение.** Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^k$ – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть задано тензорное поле $t$ типа $(0, q)$ на многообразии $M$. *Сужением тензорного поля $t$* на подмногообразие $M_1$

называется тензорное поле $t_{|_{M_1}}$ типа $(0,q)$ на многообразии $M_1$, заданное формулой

$$t_{|_{M_1}}(P)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q] = t(P)[\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q] \qquad \forall \vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q \in T_P(M_1).$$

**Лемма 2.** *Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^k$ – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть $(x_1,\ldots,x_n)$ – каноническая ЛСК для пары $(M, M_1)$. Пусть дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^q(M)$ следующим образом выражается через свои компоненты в ЛСК $(x_1,\ldots,x_n)$:*

$$\omega = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le n} \omega_{j_1\ldots j_q}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.$$

*Тогда сужение $\omega$ на $M_1$ имеет вид*

$$\omega_{|_{M_1}} = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le k} \omega_{j_1\ldots j_q}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}.$$

В отличие от выражения для $\omega$, где суммирование производится по всем упорядоченным наборам индексов $j_1,\ldots,j_q$, не превосходящих $n$, в выражении для $\omega_{|_{M_1}}$ суммирование производится по всем упорядоченным наборам индексов $j_1,\ldots,j_q$, не превосходящих $k$.

**Доказательство.** По теореме 1 § 4 дифференциальная форма $\alpha = \omega_{|_{M_1}}$ может быть записана через свои компоненты $\alpha_{j_1\ldots j_q}$ в ЛСК $(x_1,\ldots,x_k)$ на $M_1$:

$$\alpha = \sum_{1\le j_1<\ldots<j_q\le k} \alpha_{j_1\ldots j_q}\, dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_q}. \tag{1}$$

Используя определение компонент тензора и определение сужения тензорного поля, получаем при $j_s \in \overline{1,k}$

$$\alpha_{j_1\ldots j_q} = \alpha\left[\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_q}}\right] = \omega\left[\frac{\partial}{\partial x^{j_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{j_q}}\right] = \omega_{j_1\ldots j_q}.$$

Подставляя эти компоненты в равенство (1), получаем доказываемое равенство. □

**Пример 1.** Пусть на многообразии $M = \mathbb{R}^3_{xyz}$ задана дифференциальная форма степени 1

$$\omega = (y+z)dx + (z+x)dy + (x+y)dz.$$

Тогда сужением $\omega$ на подмногообразие $M_1 = \{(x,y,1):\ (x,y) \in \mathbb{R}^2_{xy}\}$ будет

$$\omega_{|_{M_1}} = (y+1)dx + (x+1)dy.$$

**Лемма 3.** *Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^k$ – гладкое подмногообразие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть отображение $\varphi : M_1 \to M$ является стандартным вложением $M_1$ в $M$, т.е. $\varphi(P) = P\ \forall P \in M_1$. Тогда обратный перенос $\varphi^*\omega$ любой дифференциальной формы $\omega \in \Omega^q_0(M)$ является сужением $\omega$ на $M_1$:*

$$\varphi^*\omega = \omega_{|_{M_1}}.$$

**Доказательство.** По определению обратного переноса и сужения дифференциальных форм $\varphi^*\omega$ и $\omega_{|_{M_1}}$ являются дифференциальными формами на $M_1$. Поскольку $\varphi_*(\vec{v}) = \vec{v}$ для любого $\vec{v} \in T_P(M_1)$, то для любых $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q \in T_P(M_1)$ имеем

$$\varphi^*\omega[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q] = \omega[\varphi_*(\vec{v}_1), \dots, \varphi_*(\vec{v}_q)] = \omega[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q] = \omega_{|_{M_1}}[\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_q].$$

□

## § 7. Разбиение единицы на многообразии

**Определение.** *Носителем* функции $\beta : M \to \mathbb{R}$, заданной на многообразии $M$ называется множество

$$\operatorname{supp} \beta = \overline{\{P \in M :\ \beta(P) \neq 0\}},$$

где замыкание понимается в смысле топологического пространства $M$.

**Определение.** Топологическое пространство $(X, \tau)$ называется *компактным*, если из любого открытого покрытия $X$ (т.е. покрытия $X$ открытыми множествами) можно выделить конечное подпокрытие. Множество $A \subset X$ называется *компактным* или *компактом*, если топологическое пространство $A$ с топологией, индуцированной топологией $\tau$, является компактным. Многообразие называется *компактным*, если соответствующее топологическое пространство является компактным.

**Лемма 1.** *Пусть* $(\psi, U)$ *– карта на многообразии* $M \in \mathfrak{M}^n$, $P \in U$. *Тогда существует окрестность* $\widetilde{U} \subset U$ *точки* $P$ *и гладкая функция* $\beta \in C^\infty(M, [0,1])$ *такие, что* $\operatorname{supp} \beta \subset U$ *и* $\beta(P') = 1$ *при* $P' \in \widetilde{U}$.

**Доказательство.** По определению карты множество $V := = \psi^{-1}(U)$ является допустимой областью параметров, т.е. открытым подмножеством топологического пространства $H$, где $H$ – это одно из множеств $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}^n_-$ или $\mathbb{R}^n_+$. Обозначим $x_0 := \psi^{-1}(P)$. Тогда существует число $\varepsilon > 0$ такое, что $U_\varepsilon(x_0) \cap H \subset V$, где $U_\varepsilon(x_0)$ – открытый шар в $\mathbb{R}^n$ с центром $x_0$ и радиусом $\varepsilon$. Положим

$$\delta := \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \widetilde{V}_\delta := U_\delta(x_0) \cap H.$$

Согласно лемме 1 § 2 главы 17 существует функция $\widetilde{\beta} \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0,1])$ такая, что $\operatorname{supp} \widetilde{\beta} \subset U_\varepsilon(x_0)$ и $\widetilde{\beta}(x) = 1$ при $x \in U_\delta(x_0)$. Полагая

$$\widetilde{U} := \psi(\widetilde{V}_\delta), \qquad \beta(P') := \begin{cases} \widetilde{\beta} \circ \psi^{-1}(P'), & P' \in U, \\ 0, & P' \notin U, \end{cases}$$

получаем утверждение леммы. □

**Теорема 1.** (О разбиении единицы на многообразии.) *Пусть* $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ *– конечный набор карт на многообразии* $M \in \mathfrak{M}^n$, *районы действия которых покрывают компакт* $K \subset M$. *Тогда на* $M$ *существует гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, т.е. набор гладких функций* $\varrho_i : M \to [0,1]$, $i \in \overline{1, I}$ *такой, что* $\operatorname{supp} \varrho_i \subset U_i$ *при всех* $i \in \overline{1, I}$ *и*

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(P) = 1 \qquad \forall P \in K.$$

**Доказательство.** Для любой точки $P \in K$ выберем индекс $i(P) \in \overline{1, I}$ так, что $P \in U_{i(P)}$. В силу леммы 1 найдутся окрестность $\widetilde{U}(P) \subset U_{i(P)}$ точки $P$ и функция $\beta_P \in C^\infty(M, [0,1])$ такие, что $\operatorname{supp} \beta_P \subset U_{i(P)}$ и $\beta_P(P') = 1 \quad \forall P' \in \widetilde{U}(P)$. Выделим из открытого покрытия $\{\widetilde{U}(P)\}_{P \in K}$ компакта $K$ конечное подпокрытие $\{\widetilde{U}(P_j)\}_{j=1}^J$. Тогда

$$\forall j \in \overline{1, J} \ \exists i \in \overline{1, I} : \ \operatorname{supp} \beta_{P_j} \subset U_i \tag{1}$$

и

$$\forall P' \in K \ \exists j \in \overline{1,J}: \ \beta_{P_j}(P') = 1 \tag{2}$$

Определим гладкие функции $\gamma_j : M \to [0,1]$, $j \in \overline{1,J}$:

$$\begin{array}{rcl} \gamma_1(P) & := & \beta_{P_1}(P), \\ \gamma_2(P) & := & \Big(1 - \beta_{P_1}(P)\Big)\beta_{P_2}(P), \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_J(P) & := & \Big(1 - \beta_{P_1}(P)\Big)\dots\Big(1 - \beta_{P_{J-1}}(P)\Big)\beta_{P_J}(P), \quad P \in M. \end{array}$$

Тогда $\operatorname{supp} \gamma_j \subset \operatorname{supp} \beta_{P_j}$. Заметим, что для любой точки $P \in M$

$$\begin{array}{rcl} 1 - \gamma_1(P) - \gamma_2(P) & = & \Big(1 - \beta_{P_1}(P)\Big)\Big(1 - \beta_{P_2}(P)\Big), \\ \dots & \dots & \dots \\ 1 - \gamma_1(P) - \dots - \gamma_J(P) & = & \Big(1 - \beta_{P_1}(P)\Big)\dots\Big(1 - \beta_{P_J}(P)\Big). \end{array}$$

Поэтому в силу соотношения (2) имеем

$$\sum_{j=1}^{J} \gamma_j(P) = 1 \quad \forall P \in K. \tag{3}$$

Для каждого индекса $i \in \overline{1,I}$ через $S_i$ обозначим набор индексов $j \in \in \overline{1,J}$ таких, что $\operatorname{supp} \gamma_j \subset U_i$ и $\operatorname{supp} \gamma_j \not\subset U_k$ при всех $k \in \overline{1,i-1}$. Тогда $S_i \cap S_j = \emptyset$ при $i \neq j$. Из соотношений (1) и $\operatorname{supp} \gamma_j \subset \operatorname{supp} \beta_{P_j}$ следует, что $\bigcup\limits_{i \in \overline{1,I}} S_i = \overline{1,J}$. Определим

$$\varrho_i(P) := \sum_{j \in S_i} \gamma_j(P).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^{I} \varrho_i(P) = \sum_{i=1}^{I} \sum_{j \in S_i} \gamma_j(P) = \sum_{j=1}^{J} \gamma_j(P) = 1 \qquad \forall P \in K,$$

где последнее равенство следует из равенства (3). При этом $\operatorname{supp} \varrho_i \subset \bigcup\limits_{j \in S_i} \operatorname{supp} \gamma_j \subset U_i$ при всех $i \in \overline{1,I}$. Следовательно, $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$ – искомое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^{I}$ компакта $K$. $\square$

## § 8. Интеграл от дифференциальной формы по многообразию

**Определение.** *Носителем* дифференциальной формы $\omega \in \Omega_k^q(M)$ называется замыкание множества точек, в которых $\omega$ не равна нулю:

$$\operatorname{supp}\omega = \overline{\{P \in M: \ \omega(P) \neq 0\}},$$

где замыкание понимается как замыкание в топологическом пространстве $M$.

**Определение.** Дифференциальная форма $\omega \in \Omega_k^q(M)$ называется *финитной*, если ее носитель $\operatorname{supp}\omega$ является компактом.

**Замечание.** Если $M$ – компактное многообразие, то любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega_k^q(M)$ является финитной, поскольку замкнутое подмножество компактного топологического пространства является компактом.

Далее определим интеграл от финитной непрерывной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_0^n(M)$ по гладкому многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$. При этом степень формы $\omega$ должна совпадать с размерностью многообразия $M$. В этом случае согласно следствию из теоремы 1 § 4 дифференциальная форма $\omega$ имеет вид

$$\omega = a(x)\ dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{1}$$

Сначала определим интеграл от диффереציальной формы по многообразию, которое является допустимой областью параметров, т.е. является открытым подмножеством пространства $\mathbb{R}^n$ или открытым подмножеством полупространства $\mathbb{R}^n_-$.

**Определение 1.** Пусть многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ является допустимой областью параметров и ориентация $M$ соответствует стандартной декартовой системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть финитная дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^n(M)$ имеет вид (1). Тогда *интегралом* $\int\limits_M \omega$ называется интеграл (Лебега) функции $a(x)$ по множеству $M$:

$$\int\limits_M \omega := \int\limits_M a(x)\, dx = \int\limits_{\operatorname{supp}\omega} a(x)\, dx$$

Если ориентация $M$ противоположна, то

$$\int\limits_M \omega := -\int\limits_M a(x)\,dx.$$

Этот интеграл существует как интеграл непрерывной функции $a(x)$ по компакту $\operatorname{supp}\omega \subset \mathbb{R}^n$.

Дадим определение интеграла от дифференциальной формы, носитель которой содержится в районе действия одной карты.

**Определение 2.** Пусть $(\psi, U)$ – карта на $n$-мерном многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, соответствующая ориентации многообразия $M$. Пусть $\omega \in \in \Omega_0^n(M)$ – финитная дифференциальная форма степени $n$ с носителем $\operatorname{supp}\omega \subset U$. Тогда *интегралом* $\int\limits_M \omega$ называется интеграл (в смысле определения 1) от обратного переноса $\psi^*\omega$ дифференциальной формы по допустимой области параметров $\psi^{-1}(U)$, ориентация которой соответствует ориентации стандартной декартовой системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$:

$$\int\limits_M \omega := \int\limits_{\psi^{-1}(U)} \psi^*\omega.$$

Корректность этого определения, т.е. независимость $\int\limits_M \omega$ от гомеоморфизма карты на $M$, вытекает из следующей леммы.

**Лемма 1.** *Пусть $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$ – две согласованные (в смысле ориентации) карты на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть $\omega \in \Omega_0^n(M)$, $\operatorname{supp}\omega \subset U_1 \cap U_2$. Тогда*

$$\int\limits_{\psi_1^{-1}(U_1)} \psi_1^*\omega = \int\limits_{\psi_2^{-1}(U_2)} \psi_2^*\omega.$$

**Доказательство.** Обозначим $U := U_1 \bigcap U_2$, $V = \psi_1^{-1}(U)$, $\alpha = = \psi_2^*\omega$, $\varphi = \psi_2^{-1} \circ \psi_1$. Тогда $\psi_2^{-1}(U) = \varphi(V)$, $\psi_1 = \psi_2 \circ \varphi$. В силу леммы 2(2) § 5 имеем $\psi_1^* = \varphi^* \circ \psi_2^*$, а значит, $\psi_1^*\omega = \varphi^*\alpha$. Поскольку

$$\int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^*\omega = \int\limits_{\psi_i^{-1}(U)} \psi_i^*\omega,$$

то требуется доказать равенство

$$\int_V \varphi^*\alpha = \int_{\varphi(V)} \alpha. \tag{2}$$

Так как $\omega \in \Omega_0^n(M)$ и $\operatorname{supp}\omega \subset U_2$, то $\alpha \in \Omega_0^n(\psi_2^{-1}(U_2))$ и, следовательно, дифференциальная форма $\alpha$ в ЛСК $(y^1, \ldots, y^n) = \psi_2^{-1}$ имеет вид

$$\alpha = a(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

В силу теоремы о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы

$$\varphi^*\alpha = a(\varphi(x)) \cdot \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n =$$

$$= a(\varphi(x)) \cdot \det \mathcal{D}\,\varphi(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Поскольку карты $(\psi_1, U_1)$ и $(\psi_2, U_2)$ согласованы, то $\det \mathcal{D}\,\varphi(x) > 0$, а значит,

$$\varphi^*\alpha = a(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Поэтому согласно определению 1 формула (2) принимает вид

$$\int_V a(\varphi(x)) \cdot |\det \mathcal{D}\,\varphi(x)|\, dx = \int_{\varphi(V)} a(y)\, dy.$$

Последняя формула следует из теоремы о замене переменных в кратном интеграле. □

**Замечание.** Если многообразие $M$ удовлетворяет условиям определения 1, то интегралы $\int\limits_M \omega$ в смысле определения 1 и в смысле определения 2 совпадают. Это следует из леммы 1 и того факта, что в этом случае в качестве ЛСК на $M$ можно взять стандартную декартову систему координат в $\mathbb{R}^n$.

Дадим теперь общее определение интеграла от дифференциальной формы по гладкому многообразию.

**Определение 3.** Пусть $\omega \in \Omega_0^n(M)$ – финитная дифференциальная форма степени $n$ на $n$-мерном ориентированном многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ – конечный набор карт, согласованных с ориентацией $M$, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp}\omega$. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Тогда

$$\int\limits_M \omega := \sum_{i=1}^I \int\limits_M \varrho_i\, \omega, \tag{3}$$

где интегралы в правой части равенства (3) понимаются в смысле определения 2 (это возможно, поскольку $\operatorname{supp}\varrho_i\,\omega \subset \operatorname{supp}\varrho_i \subset U_i$).

Корректность этого определения вытекает из следующей теоремы.

**Теорема 1.** *Интеграл от финитной дифференциальной формы $\omega \in \in \Omega_0^n(M)$ по ориентированному многообразию $M \in \mathfrak{M}^n$ существует и не зависит ни от набора карт $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$, ни от разбиения единицы.*

**Доказательство.** Существование интеграла следует из теоремы о разбиении единицы на многообразии и существования интегралов в правой части равенства (3). Докажем независимость интеграла от набора карт и от разбиения единицы. Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ и $\{(\widetilde{\psi}_j, \widetilde{U}_j)\}_{j=1}^J$ – два набора карт, согласованных с ориентацией $M$, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp}\omega$. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$ и $\{\widetilde{\varrho}_j\}_{j=1}^J$ – разбиения единицы, подчиненные этим покрытиям. Требуется доказать равенство

$$\sum_{i=1}^I \int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^*(\varrho_i\omega) = \sum_{j=1}^J \int\limits_{\widetilde{\psi}_j^{-1}(\widetilde{U}_j)} \widetilde{\psi}_j^*(\widetilde{\varrho}_j\omega). \tag{4}$$

Для любых $i \in \overline{1, I}$, $j \in \overline{1, J}$ обозначим $\varrho_{ij} = \varrho_i\widetilde{\varrho}_j$. Так как $\operatorname{supp}(\varrho_{ij}\omega) \subset U_i \cap \widetilde{U}_j$, то согласно лемме 1

$$\int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^*(\varrho_{ij}\omega) = \int\limits_{\widetilde{\psi}_j^{-1}(\widetilde{U}_j)} \widetilde{\psi}_j^*(\varrho_{ij}\omega).$$

Суммируя эти равенства по всем $i \in \overline{1, I}$ и $j \in \overline{1, J}$, используя линейность обратного переноса дифференциальных форм, линейность кратного интеграла и равенства $\sum_{j=1}^{J} \varrho_{ij} = \varrho_i$, $\sum_{i=1}^{I} \varrho_{ij} = \varrho_j$, получаем равенство (4). $\square$

**Замечание.** Если дифференциальная форма $\omega$ и многообразие $M$ удовлетворяют условиям определения 2, то интегралы $\int\limits_M \omega$ в смысле определения 2 и в смысле определения 3 совпадают. Это следует из теоремы 1 и того факта, что в случае $\operatorname{supp} \omega \subset U$ в качестве набора карт, районы действия которых покрывают $\operatorname{supp} \omega$, можно взять одну карту $(\psi, \omega)$.

## § 9. Свойства интеграла от дифференциальной формы

**Замечание.** Из линейности кратного интеграла и линейности обратного переноса дифференциальных форм следует свойство линейности интеграла от дифференциальных форм.

**Замечание.** Согласно определению при изменении ориентации многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ интеграл $\int\limits_M \omega$ меняет знак.

**Лемма 1.** (Свойство аддитивности интеграла по множествам интегрирования.) *Пусть ориентированное многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ является дизъюнктным объединением многообразий $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}^n$, ориентация которых соответствует ориентации $M$. Пусть $\omega \in \Omega_0^n(M)$ – финитная непрерывная дифференциальная форма. Тогда*

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_{M_1} \omega + \int\limits_{M_2} \omega.$$

**Доказательство.** Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^{I}$ – конечный набор карт, согласованных с ориентацией $M$, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp} \omega$. Для всех $i \in \overline{1, I}$, $j \in \overline{1, 2}$ определим $U_{ij} := U_i \cap M_j$, $V_{ij} := \psi_i^{-1}(U_{ij})$, $\psi_{ij} := \psi_i\big|_{V_{ij}}$. Если $U_{ij} \neq \emptyset$, то $(\psi_{ij}, U_{ij})$ – карта на $M_j$. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^{I}$ компакта $\operatorname{supp} \omega$. Тогда

$$\int\limits_M \varrho_i\omega = \int\limits_{U_i} \varrho_i\omega = \int\limits_{V_i} \psi_i^*(\varrho_i\omega). \tag{1}$$

Поскольку допустимая область параметров $V_i$ является дизъюнктным объединением допустимых областей параметров $V_{i1}$ и $V_{i2}$, то в силу аддитивности интеграла Лебега имеем

$$\int\limits_{V_i} \psi_i^*(\varrho_i\omega) = \int\limits_{V_{i1}} \psi_i^*(\varrho_i\omega) + \int\limits_{V_{i2}} \psi_i^*(\varrho_i\omega) = \int\limits_{V_{i1}} \psi_{i1}^*(\varrho_i\omega) + \int\limits_{V_{i2}} \psi_{i2}^*(\varrho_i\omega).$$

Отсюда и из равенства (1) следует, что

$$\int\limits_M \varrho_i\omega = \int\limits_{M_1} \varrho_i\omega + \int\limits_{M_2} \varrho_i\omega.$$

Суммируя эти равенства по всем $i \in \overline{1, I}$ в силу линейности интеграла получаем доказываемое равенство. $\square$

**Теорема 1.** (О замене переменных в интеграле от дифференциальной формы.) *Пусть диффеоморфизм $\varphi : M_1 \to M_2$ из ориентированного многообразия $M_1 \in \mathfrak{M}^n$ в ориентированное многообразие $M_2 \in \mathfrak{M}^n$ переносит ориентацию $M_1$ на ориентацию $M_2$. Тогда для любой финитной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_0^n(M_2)$ справедливо равенство*

$$\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{M_1} \varphi^*\omega. \tag{2}$$

**Доказательство.** Общее определение интеграла дифференциальной формы с помощью разбиения единицы сводит общий случай к случаю, когда $\operatorname{supp} \varphi^*\omega$ содержится в районе действия $U$ одной карты $(\psi, U)$ на $M_1$. При этом $\operatorname{supp} \omega$ содержится в районе действия $\varphi(U)$ соответствующей карты $(\varphi \circ \psi, \varphi(U))$ на $M_2$. В этом случае

$$\int\limits_{M_1} \varphi^*\omega = \int\limits_U \varphi^*\omega = \int\limits_{\psi^{-1}(U)} \psi^*\varphi^*\omega,$$

$$\int\limits_{M_2} \omega = \int\limits_{\varphi(U)} \omega = \int\limits_{(\varphi\circ\psi)^{-1}(\varphi(U))} (\varphi \circ \psi)^*\omega = \int\limits_{\psi^{-1}(U)} \psi^*\varphi^*\omega = \int\limits_{M_1} \varphi^*\omega.$$

$\square$

**Замечание.** Согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы если $q = n_1 = n_2 = n$, $y(x)$ – координатное представление отображения $\varphi$ и дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^n(M_2)$ имеет вид

$$\omega = f(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n,$$

то

$$\varphi^*\omega = f(y(x))\, \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

В этом случае формула (2) принимает вид

$$\int\limits_{M_2} f(y)\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n = \int\limits_{M_1} f(y(x))\, \frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$$

и совпадает с формулой замены переменных в кратном интеграле. Поскольку диффеоморфизм $\varphi$ переносит ориентацию $M_1$ на ориентацию $M_2$, то $\frac{\partial(y^1, \ldots, y^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)} > 0$ и модуль якобиана раскрывается со знаком плюс.

Следующая лемма показывает, что определение 1 интеграла от дифференциальной формы остается справедливым не только в случае, когда $M$ является допустимой областью параметров, но и в случае, когда $M$ является гладким $n$-мерным подмногообразием пространства $\mathbb{R}^n$.

**Лемма 2.** *Пусть $n$-мерное подмногообразие $M \in \mathfrak{M}_n^n$ пространства $\mathbb{R}^n$ ориентировано стандартной декартовой системой координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n$. Пусть финитная дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^n(M)$ имеет вид*

$$\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{3}$$

*Тогда интеграл дифференциальной формы $\omega$ следующим образом выражается через кратный интеграл функции $a(x)$:*

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_M a(x)\, dx.$$

**Доказательство.** С помощью разбиения единицы общий случай сводится к случаю, когда $\operatorname{supp}\omega$ содержится в районе действия одной карты $(\psi, U)$ на $M$. Обозначим $V = \psi^{-1}(U)$. Пусть $V \subset \mathbb{R}^n_y$, $(y^1, \dots, y^n)$ – стандартная декартова система координат в $\mathbb{R}^n_y$. Тогда вектор функция $\psi(y) = \begin{pmatrix} x^1(y) \\ \dots \\ x^n(y) \end{pmatrix}$ является координатным представлением отображения $\psi : V \to U$ в ЛСК $(y^1, \dots, y^n)$ на $V$ и $(x^1, \dots, x^n)$ на $U$.

Из равенства (3) и теоремы о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы следует, что

$$\psi^*\omega = a(\psi(y))\, \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}\, dy^1 \wedge \ldots \wedge dy^n.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\omega \subset U$, то согласно определению 2 интеграла от дифференциальной формы имеем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_U \omega = \int\limits_V \psi^*\omega.$$

Применяя определение 1 интеграла от дифференциальной формы, получаем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_V a(\psi(y))\, \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(y^1, \dots, y^n)}\, dy.$$

Так как карта $(\psi, U)$ согласованна с ориентацией $M$, то $\frac{\partial(x^1,\dots,x^n)}{\partial(y^1,\dots,y^n)} > 0$. Применяя теорему о замене переменных в кратном интеграле, получаем

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_U a(x)\, dx = \int\limits_M a(x)\, dx,$$

где последнее равенство вытекает из включения $\operatorname{supp} a \subset U$. $\square$

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. *Интегралом* финитной дифференциальной формы $\omega \in \Omega^q_0(M)$ *по ориентированному подмногообразию* $M_1 \in \mathfrak{M}^q$ многообразия $M$ называется интеграл по $M_1$ от сужения $\omega_{|_{M_1}}$:

$$\int\limits_{M_1} \omega := \int\limits_{M_1} \omega_{|_{M_1}}.$$

**Замечание.** Согласно лемме 3 § 5 сужение дифференциальной формы $\omega \in \Omega_0^q(M)$ на подмногообразие $M_1$ совпадает с обратным переносом $\omega$ при отображении вложения $\varphi : M_1 \to M$, где $\varphi(P) = P$ при всех $P \in M_1$. Следовательно,

$$\int\limits_{M_1} \omega = \int\limits_{M_1} \varphi^* \omega. \tag{4}$$

**Криволинейный интеграл второго рода.** Пусть $\Gamma = \{r(t) : t \in [a,b]\}$ – простая кривая в $\mathbb{R}^n$, $r \in C^\infty([a,b], \mathbb{R}^n)$ и $r'(t) \neq \overline{0} \quad \forall t \in \in [a,b]$. Как показано в примере 1 § 7, многообразие $\Gamma \in \mathfrak{M}_n^1$ ориентировано в направлении возрастания параметра $t$. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^n$, содержащей кривую $\Gamma$, задана дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^1(G)$ (т.е. непрерывное ковекторное поле). Поскольку множество $\operatorname{supp} \omega$ компактно как замкнутое подмножество компакта $\Gamma \subset \subset \mathbb{R}^n$, то дифференциальная форма $\omega$ финитна.

**Определение.** Интеграл $\int\limits_\Gamma \omega$ называется *криволинейным интегралом второго рода.*

**Пример 1.** Получим формулу, выражающую криволинейный интеграл второго рода через интеграл функции по отрезку. Согласно формуле (4) имеем

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma \varphi^* \omega,$$

где $\varphi : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ – отображение вложения: $\varphi(P) = P \; \forall P \in \Gamma$. Рассмотрим гладкий диффеоморфизм $\psi : [a,b] \to \Gamma$ из $[a,b] \in \mathfrak{M}_1^1$ в $\Gamma \in \mathfrak{M}_n^1$, заданный формулой $\psi(t) = r(t)$ при всех $t \in [a,b]$. Тогда отображение $r : [a,b] \to \mathbb{R}^n$ можно записать в виде $r = \varphi \circ \psi$. В силу теоремы о замене переменных в интеграле от дифференциальной формы имеем

$$\int\limits_\Gamma \omega = \int\limits_\Gamma \varphi^* \omega = \int\limits_{[a,b]} \psi^*(\varphi^* \omega) = \int\limits_{[a,b]} (\varphi \circ \psi)^* \omega = \int\limits_{[a,b]} r^* \omega. \tag{5}$$

Пусть в стандартной декартовой системе координат пространства $\mathbb{R}^n$ дифференциальная форма $\omega$ имеет вид

$$\omega = \omega_i \, dx^i, \tag{6}$$

где индекс суммирования $i$ пробегает $\overline{1,n}$. Обозначим компоненты вектор-функции $r(t)$, параметризующей кривую $\Gamma$ через $x^i(t)$: $r(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$. Согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы имеем

$$r^*(dx^i) = \frac{dx^i}{dt} \, dt.$$

Поэтому $r^*\omega = \omega_i \frac{dx^i}{dt} dt$ и, используя равенства (5) и лемму 2, получаем формулу, выражающую криволинейный интеграл второго рода через интеграл функции по отрезку

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \left( \omega_i \frac{dx^i}{dt} \right) dt. \tag{7}$$

**Поверхностный интеграл второго рода.** Пусть $S$ – ориентированное гладкое двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть в области $G \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$, содержащей подмногообразие $S$, задана финитная дифференциальная форма $\omega \in \Omega^2_0(G)$.

**Определение.** Подмногообразие $S \in \mathfrak{M}^2_3$ называется *поверхностью*, а интеграл $\int\limits_S \omega$ называется *поверхностным интегралом второго рода.*

**Пример 2.** Пусть многообразие $D \in \mathfrak{M}^2_2$ ориентировано и диффеоморфизм $\psi : D \to S$ переносит ориентацию многообразия $D$ на ориентацию $S$. Получим формулу, выражающую поверхностный интеграл второго рода $\int\limits_S \omega$ через кратный интеграл по множеству $D$.

Пусть

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D.$$

Пусть $\omega = P\,dy\wedge dz + Q\,dz\wedge dx + R\,dx\wedge dy$, где коэффициенты $P, Q, R$ являются функциями, непрерывно завиящими от $(x, y, z)$.

Согласно формуле (4) имеем

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S \varphi^*\omega,$$

где $\varphi : S \to \mathbb{R}^3_{xyz}$ – отображение вложения: $\varphi(p) = p\ \forall p \in S$. В силу теоремы о замене переменных в интеграле от дифференциальной формы имеем

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_S \varphi^*\omega = \int\limits_D \psi^*(\varphi^*\omega) = \int\limits_D \Psi^*\omega, \tag{8}$$

где $\Psi := \varphi \circ \psi$ действует из $D$ в $\mathbb{R}^3_{xyz}$.

Согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы имеем

$$\Psi^*(dy \wedge dz) = \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv, \qquad \Psi^*(dz \wedge dx) = \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv,$$

$$\Psi^*(dx \wedge dy) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\,du \wedge dv.$$

Поэтому

$$\Psi^*\omega = \left(P\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + Q\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + R\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right) du \wedge dv =$$

$$= \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv.$$

Отсюда и из равенств (8) получаем следующую формулу, выражающую поверхностный интеграл второго рода через кратный интеграл:

$$\int\limits_M \omega = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du\,dv, \tag{9}$$

где последнее равенство следует из леммы 2.

$\triangleright$

Для единообразия записи формулы Стокса, которую мы докажем в следующем параграфе, введем понятия компактного нульмерного многообразия.

**Определение.** *Компактным нульмерным многообразием* называется конечный набор точек $M = \{P_i\}_{i=1}^{I}$. Если задана функция $s : M \to \{-1, +1\}$, то компактное нульмерное многообразие $M$ называется *ориентированным. Интегралом* функции (т.е. дифференциальной формы степени 0) $\omega : M \to \mathbb{R}$ по $M$ называется

$$\int\limits_M \omega := \sum_{i=1}^{I} s(P_i)\omega(P_i).$$

$\triangleleft$

## § 10. Теорема Стокса

**Теорема 1.** (Теорема Стокса.) *Для любой финитной дифференциальной формы $\omega \in \Omega_1^{n-1}(M)$ на ориентированном гладком $n$-мерном многообразии $M$, ориентация края которого согласована с ориентацией $M$, справедлива* формула Стокса

$$\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_M d\omega. \tag{1}$$

**Доказательство** теоремы при $n \geq 2$ проведем за два шага. На шаге 1 докажем формулу Стокса в случаях $M = \mathbb{R}^n_-$ и $M = \mathbb{R}^n$, на шаге 2 общий случай сведем к этим случаям. Затем рассмотрим случай $n = 1$.

**Пусть** $n \geq 2$**.**

**Шаг 1.** Поскольку степень дифференциальной формы $\omega$ равна $(n-1)$, то согласно теореме 1 § 4 дифференциальная форма $\omega$ имеет вид

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

В силу линейности интеграла и дифференциала формулу Стокса достаточно доказать для монома

$$\omega = a(x)\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n. \tag{2}$$

В этом случае по определению внешнего дифференциала

$$d\omega = da(x) \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Подставляя в эту формулу выражение $da = \sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial a}{\partial x^j}\, dx^j$, получаем $d\omega = \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^{i-1} \wedge dx^{i+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$, остальные слагаемые суммы равны нулю. Таким образом,

$$d\omega = (-1)^{i-1} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

**Случай $M = \mathbb{R}^n_-$.** Будем считать, что ориентация многообразия $M = \mathbb{R}^n_-$ соответствует системе координат $(x^1, \ldots, x^n)$. Тогда согласованная с ориентацией $M$ ориентация края $\partial M = \partial \mathbb{R}^n_-$ будет соответствовать системе координат $(x^2, \ldots, x^n)$. Согласно определению 1 интеграла от дифференциальной формы интеграл от дифференциальной формы равен интегралу Лебега:

$$\int\limits_M d\omega = (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx.$$

Если $i = 1$, то по теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^n \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^2 \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1.$$

В силу финитности дифференциальной формы $\omega$ (а значит, и функции $a$) найдется такое достаточно большое число $R > 0$, что $a(x) = 0$ при $|x| \geq R$. Используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1 = \int\limits_{-R}^{0} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx^1 = a\Big|_{x^1=-R}^{x^1=0} = a(0, x^2, \ldots, x^n).$$

Следовательно,

$$\int\limits_M d\omega = \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^1}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^n \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^3 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} a(0, x^2, \ldots, x^n)\, dx^2 =$$

$$= \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} a(x)\, dx^2 \wedge \ldots \wedge dx^n = \int\limits_{\partial M} \omega,$$

где предпоследнее равенство следует из теоремы Фубини, определения 1 интеграла от дифференциальной формы и определения согласованной ориентации многообразия и его края. Таким образом, в случае $M = \mathbb{R}^n_-$ при $i = 1$ формула Стокса для дифференциальной формы (2) справедлива.

Докажем теперь формулу Стокса в случае $M = \mathbb{R}^n_-$ для дифференциальной формы (2) при $i > 1$. В этом случае согласно теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^n \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^{i+1} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} dx^{i-1} \ldots \int\limits_{-\infty}^{0} dx^1 \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i.$$

Снова выбирая $R > 0$ так, что $a(x) = 0$ при $|x| \geq R$, получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i = \int\limits_{-R}^{R} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i = a\Big|_{x^i=-R}^{x^i=R} = 0.$$

Поэтому в данном случае

$$\int\limits_M d\omega = (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n_-} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx = 0. \tag{3}$$

Для вычисления $\int\limits_{\partial M} \omega = \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega$ рассмотрим отображение вложения $\varphi : \partial \mathbb{R}^n_- \to \mathbb{R}^n_-$, т. е. $\varphi(x) = x\ \forall x \in \partial \mathbb{R}^n_-$. Тогда по определению интеграла по подмногообразию и в силу леммы 3 § 5 имеем

$$\int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega = \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \omega_{|\partial \mathbb{R}^n_-} = \int\limits_{\partial \mathbb{R}^n_-} \varphi^* \omega.$$

Из равенства (2) и леммы 1 § 5 следует, что

$$\varphi^*\omega = \varphi^*(a) \wedge \varphi^*(dx^1) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^{i-1}) \wedge \varphi^*(dx^{i+1}) \wedge \ldots \wedge \varphi^*(dx^n).$$

Так как $(x^2, \ldots, x^n)$ – ЛСК на $\partial\mathbb{R}^n_-$ и $\frac{\partial x^1}{\partial x^i} = 0$ при $i > 1$, то согласно теореме 2 § 5 $\varphi^*(dx^1) = \sum\limits_{i=2}^{n} \frac{\partial x^1}{\partial x^i} dx^i = 0$. Следовательно, $\varphi^*\omega = 0$, а значит, в данном случае

$$\int\limits_{\partial M} \omega = 0,$$

что вместе с равенством (3) доказывает формулу Стокса в этом случае.

**Случай $M = \mathbb{R}^n$.** Поскольку в данном случае $\partial M = \emptyset$, то

$$\int\limits_{\partial M} \omega = 0.$$

Аналогично предыдущему случаю из равенства $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx^i = 0$ по теореме Фубини следует, что

$$\int\limits_{M} d\omega = (-1)^{i-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial a}{\partial x^i}\, dx = 0.$$

Поэтому формула Стокса справедлива и в этом случае.

**Шаг 2.** Согласно лемме 3 § 7 существует атлас $\mathcal{A}$, соответствующий ориентации $M$ и такой, что область параметров каждой карты атласа $\mathcal{A}$ совпадает с пространством $\mathbb{R}^n$ или с полупространством $\mathbb{R}^n_-$. В силу компактности $\operatorname{supp}\omega$ существует конечный набор $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^{I}$ карт атласа $\mathcal{A}$ такой, что $\operatorname{supp}\omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} U_i$. По теореме о существовании разбиения единицы на многообразии найдется разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^{I}$, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^{I}$ компакта $\operatorname{supp}\omega$. Обозначим $\omega_i = \varrho_i\omega$. Тогда $\omega = \sum\limits_{i=1}^{I} \omega_i$ и в силу линейности интеграла и дифференциала достаточно доказать, что для любого $i \in \overline{1, I}$ справедлива формула

$$\int\limits_{\partial M} \omega_i = \int\limits_{M} d\omega_i.$$

Поскольку $\operatorname{supp}\omega_i \subset U_i$, то эта формула принимает вид

$$\int\limits_{\partial U_i} \omega_i = \int\limits_{U_i} d\omega_i.$$

Используя определение 2 интеграла от дифференциальной формы, перепишем последнее равенство в виде

$$\int\limits_{\psi_i^{-1}(\partial U_i)} \psi_i^*\omega_i = \int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^* d\omega_i.$$

Положим $\alpha_i = \psi_i^*\omega_i$ и $V_i = \psi_i^{-1}(U_i)$. В силу теоремы 4 § 5 справедливо равенство $\psi_i^* d\omega_i = d\psi_i^*\omega_i$. По определению краевой точки карты имеем $\partial V_i = \psi_i^{-1}(\partial U_i)$. Таким, образом доказываемая формула принимает вид

$$\int\limits_{\partial V_i} \alpha_i = \int\limits_{V_i} d\alpha_i.$$

Поскольку область параметров $V_i$ совпадает с $\mathbb{R}^n$ или с $\mathbb{R}^n_-$, то последнее равенство доказано на шаге 1. □

▷

**Пусть** $n = 1$**.**

Согласно лемме 2 § 3 существует такой гладкий (не обязательно ориентирующий) атлас $\mathcal{A}$ на $M$, что область параметров каждой карты этого атласа совпадает с $\mathbb{R}^1$ или $\mathbb{R}^1_-$. В силу компактности $\operatorname{supp}\omega$ существует конечный набор $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ карт атласа $\mathcal{A}$ такой, что $\operatorname{supp}\omega \subset \bigcup\limits_{i=1}^{I} U_i$. По теореме о существовании разбиения единицы на многообразии найдется разбиение единицы $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$, подчиненное покрытию $\{U_i\}_{i=1}^I$ компакта $\operatorname{supp}\omega$. Обозначим $\omega_i = \varrho_i\omega$, $\alpha_i = \psi_i^*\omega_i$.

Поскольку край области параметров $\mathbb{R}^1_- = (-\infty, 0]$ состоит из одной точки 0, то край $\partial U_i = \psi(\mathbb{R}^1_-)$ состоит из одной точки $P_i = \psi_i(0)$. Согласно определению ориентации края одномерного многообразия, согласованной с ориентацией самого многообразия получаем, что согласованная ориентация $\partial M$ задается функцией $s : \partial M \to \{-1, +1\}$, где $s(P_i) = 1$, если карта $(\psi_i, U_i)$ согласована с ориентацией $M$, иначе $s(P_i) = -1$. Согласно определению интеграла от нульмерного компактного многообразия получаем

$$\int\limits_{\partial M} \omega_i = s(P_i)\omega_i(P_i).$$

С другой стороны,
$$\int\limits_M d\omega_i = s(P_i)\int\limits_{U_i} d\omega_i,$$
$$\int\limits_{U_i} d\omega_i = \int\limits_{\psi_i^{-1}(U_i)} \psi_i^* d\omega_i = \int\limits_{(-\infty,0]} d\alpha_i = \alpha_i(0) = \omega_i(P_i),$$
где предпоследнее неравенство следует из формулы Ньютона–Лейбница. Таким образом,
$$\int\limits_{\partial M} \omega_i = s(P_i)\omega_i(P_i) = \int\limits_M d\omega_i.$$
Суммируя эти равенства по $i \in \overline{1,I}$, получаем формулу Стокса при $n = 1$. □

◁

**Замечание.** Используя свойство аддитивности интеграла по множествам интегрирования, формулу Стокса можно обобщить на «кусочно гладкие» многообразия.

## § 11. Частные случаи формулы Стокса

### Формула Грина

Пусть $M \in \mathfrak{M}_2^2$ – гладкое компактное двумерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^2_{xy}$, ориентированное стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^2_{xy}$, дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^1(M)$ имеет вид
$$\omega = P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy,$$
где $P$ и $Q$ – гладкие функции на $M$. Тогда по определению внешнего дифференциала
$$d\omega = dP\wedge dx + dQ\wedge dy =$$
$$= (P'_x dx + P'_y dy)\wedge dx + (Q'_x dx + Q'_y dy)\wedge dy = (Q'_x - P'_y) dx\wedge dy.$$
В этом случае формула Стокса принимает вид
$$\int\limits_{\partial M} P\,dx + Q\,dy = \int\limits_M \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy.$$

Из леммы 5 § 8 главы 17 следует, что ориентации $\partial M$ и $M$ должны быть согласованы таким образом, что если многообразие $M$ ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^2_{xy}$, то при движении вдоль $\partial M$ в направлении ориентации $\partial M$ многообразие $M$ остается слева. Эта формула называется *формулой Грина.*

### Формула Гаусса–Остроградского

Пусть $G \in \mathfrak{M}^3_3$ – гладкое компактное трехмерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$, ориентированное стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Любую дифференциальную форму $\omega \in \in \Omega^2_1(G)$ можно записать в виде

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy,$$

где $P$, $Q$ и $R$ – это $C^1$-гладкие функции на $G$. Вычисляя внешний дифференциал, получаем

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Тогда формула Стокса принимает вид

$$\int\limits_{\partial G} P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy = \int\limits_{G} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Согласно лемме 5 § 8 главы 17 ориентации $\partial G$ и $G$ должны быть согласованы таким образом, что если многообразие $G$ ориентировано стандартной декартовой системой координат в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, то нормаль к $\partial G$, согласованная с ориентацией $\partial G$, должна быть внешней по отношению к $G$. Эта формула называется *формулой Гаусса–Остроградского.*

### Формула Стокса в узком смысле

Пусть $U$ – открытое множество в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, содержащее гладкое компактное двумерное ориентированное многообразие $S \in \mathfrak{M}^2_3$. Любую дифференциальную форму $\omega \in \Omega^1_1(U)$ можно записать в виде

$$\omega = P\, dx + Q\, dy + R\, dz,$$

где $P, Q, R \in C^1(U, \mathbb{R})$. Вычисляя внешний дифференциал, получаем

$$d\omega = (R'_y - Q'_z)dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)dx \wedge dy.$$

Формула Стокса для финитной дифференциальной формы $\omega$ принимает вид

$$\int\limits_{\partial S} P\,dx + Q\,dy + R\,dz =$$
$$= \int\limits_{S} (R'_y - Q'_z)dy \wedge dz + (P'_z - R'_x)dz \wedge dx + (Q'_x - P'_y)dx \wedge dy,$$

где ориентация края $\partial S$ согласована с ориентацией $S$ по правилу «правой руки». Эта формула называется *формулой Стокса в узком смысле.*

## § 12. Точные и замкнутые дифференциальные формы

**Определение.** Дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^q(M)$ называется *точной* на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, если существует такая дифференциальная форма $\varphi \in \Omega_1^{q-1}(M)$, что $\omega = d\varphi$. При этом дифференциальная форма $\varphi$ называется *обобщенным потенциалом* дифференциальной формы $\omega$.

В случае $q = 1$ точная форма $\omega \in \Omega_0^q(M)$ называется также *потенциальным ковекторным полем*, а функция $\varphi \in \Omega_1^0(M) = C^1(M, \mathbb{R})$ называется *скалярным потенциалом* ковекторного поля $\omega$.

**Теорема 1.** (Условия независимости криволинейного интеграла от пути интегрирования.) *Пусть в области $U \subset \mathbb{R}^n$ задана дифференциальная форма $\omega \in \Omega_0^1(U)$ (т.е. непрерывное ковекторное поле). Следующие условия эквивалентны:*

(1) *Интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$ не зависит от пути интегрирования $\Gamma \subset U$, т.е. для любых двух кусочно гладких кривых*[1] $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$, *имеющих общее начало и общий конец, справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Gamma_1} \omega = \int\limits_{\Gamma_2} \omega.$$

[1] Интеграл по кусочно гладкой кривой определеяется как сумма интегралов по гладким кускам.

(2) *Для любой замкнутой кусочно гладкой кривой* $\Gamma \subset U$ *справедливо равенство*
$$\int\limits_{\Gamma} \omega = 0.$$

(3) *Дифференциальная форма* $\omega$ *точна, т.е. имеет скалярный потенциал в области* $U$.

**Доказательство.** (3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\omega = \sum\limits_{i=1}^{n} \omega_i dx^i = d\varphi$ и пусть кривая $\Gamma = \{r(t): \ t \in [a,b]\}$ задана гладкой параметризацией $r(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \dots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$. Тогда согласно формуле (7) § 9

$$\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_{a}^{b} \left( \sum_{i=1}^{n} \omega_i \frac{dx^i}{dt} \right) dt = \int\limits_{a}^{b} \frac{d}{dt} \varphi(r(t))\, dt = \varphi(r(b)) - \varphi(r(a)).$$

Таким образом, в случае, если $\omega$ – точная дифференциальная форма, то интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$ по гладкой кривой равен разности потенциалов в концевых точках кривой. Суммируя эти равенства по гладким кускам, получаем этот же результат для кусочно гладкой кривой. При этом, если кривая замкнута, то концевые точки у нее совпадают и, следовательно, $\int\limits_{\Gamma} \omega = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Пусть кусочно гладкие кривые $\Gamma_1, \Gamma_2 \subset U$ имеют общее начало и общий конец. Обозначим через $\Gamma_2^-$ кривую, полученную изменением ориентации кривой $\Gamma_2$, а через $\Gamma$ – замкнутую кривую, составленную из кривых $\Gamma_1$ и $\Gamma_2^-$. Тогда

$$\int\limits_{\Gamma_1} \omega - \int\limits_{\Gamma_2} \omega = \int\limits_{\Gamma_1} \omega + \int\limits_{\Gamma_2^-} \omega = \int\limits_{\Gamma} \omega = 0.$$

(1) $\Rightarrow$ (3). Фиксируем произвольную точку $P_0 \in U$. Для любой точки $P \in U$ определим $\varphi(P)$ как интеграл $\int\limits_{\Gamma} \omega$ по кусочно гладкой кривой $\Gamma \subset U$, началом которой является точка $P_0$, а концом – точка $P$. Такая кривая существует, т.к. область является линейно-связным множеством. В силу условия (1) значение $\varphi(P)$ не зависит от выбора кривой $\Gamma$.

Пусть заданы произвольные точки $P_1, P_2 \in U$. Пусть $\Gamma$ – произвольная кусочно гладкая кривая с началом в $P_1$ и концом в $P_2$, $\Gamma_1$ – произвольная кусочно гладкая кривая с началом в $P_0$ и концом в $P_1$, $\Gamma_2$ составлена из кривых $\Gamma_1$ и $\Gamma$. Тогда

$$\varphi(P_2) - \varphi(P_1) = \int\limits_{\Gamma_2} \omega - \int\limits_{\Gamma_1} \omega = \int\limits_{\Gamma} \omega. \tag{1}$$

Зафиксируем произвольную точку $P \in U$ и покажем, что $\omega(P) = d\varphi(P)$. Поскольку область $U$ – открытое множество, то существует окрестность $U_{2\delta}(P) \subset U$. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – стандартный базис в $\mathbb{R}^n$, рассматривая отрезок $\Gamma_i = [P, P + \delta e_i] \subset U$ в силу формулы (1) получаем

$$\varphi(P + \delta e_i) - \varphi(P) = \int\limits_{\Gamma_i} \omega = \int\limits_0^\delta \omega_i(P + te_i)\, dt = \omega_i(P)\delta + o(\delta), \quad \delta \to 0.$$

Поэтому

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(P) = \lim_{\delta \to 0} \frac{\varphi(P + \delta e_i) - \varphi(P)}{\delta} = \omega_i(P).$$

Следовательно,

$$d\varphi(P) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(P)\, dx^i = \sum_{i=1}^n \omega_i(P)\, dx^i = \omega(P).$$

$\square$

**Замечание.** Условие потенциальности (или точности) дифференциальной формы является важным для многих физических приложений. Проверить это условие бывает не очень просто. Далее сформулируем необходимое легко проверяемое условие точности дифференциальной формы и рассмотрим дополнительные свойства многообразия, при которых это необходимое условие является и достаточным.

**Определение.** Дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ называется *замкнутой* на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, если $d\omega = 0$ на $M$.

**Лемма 1.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$. Условие замкнутости дифференциальной формы $\omega \in \Omega_1^q(M)$ необходимо, но не достаточно для ее точности.*

**Доказательство.** Если дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ точна, т.е. $\omega = d\varphi$, то $\varphi \in \Omega_2^{q-1}(M)$ и по лемме 1 § 4 имеем $d\omega = d^2\varphi = 0$. Поэтому условие замкнутости дифференциальной формы необходимо для ее точности. Покажем, что оно недостаточно. Рассмотим дифференциальную форму

$$\omega = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

на гладком двумерном подмногообразии $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ пространства $\mathbb{R}^2$. Прямые вычисления показывают, что $d\omega = 0$ на $M$, однако, например, для замкнутой кривой $\Gamma = \{(\cos\varphi, \sin\varphi) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$ имеем $\int\limits_{\Gamma} \omega = \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = 2\pi \neq 0$. Поэтому согласно теореме 1 дифференциальная форма $\omega$ не является точной на $M$. $\square$

## § 13. Лемма Пуанкаре

**Лемма 1.** (О цепном равенстве.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, пусть отображения $\pi_0, \pi_1 : M \to M \times [0,1]$ заданы формулами*

$$\pi_0(x) = (x, 0), \quad \pi_1(x) = (x, 1) \quad \forall x \in M.$$

*Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение $J_q : \Omega_1^q(M \times [0,1]) \to \Omega_1^{q-1}(M)$, удовлетворяющее* цепному равенству

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = \pi_1^*\beta - \pi_0^*\beta \qquad \forall \beta \in \Omega_1^q(M \times [0,1]).$$

**Доказательство.** Пусть $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на $M$, $t \in [0,1]$. Тогда $(x^1, \ldots, x^n, t)$ – ЛСК на многообразии $M \times [0,1]$. Любая дифференциальная форма $\beta \in \Omega_1^q(M \times [0,1])$ является суммой конечного числа слагаемых вида

$$b(x,t)\,dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} \tag{1}$$

или

$$b(x,t)\,dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}. \tag{2}$$

Для дифференциальных форм $\beta$ вида (1) положим $J_q(\beta) = 0$, для дифференциальных форм вида (2) определим

$$J_q\Big(b(x,t)\,dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}\Big) := \left(\int\limits_0^1 b(x,t)\,dt\right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}.$$

Для дифференциальных форм, представимых как сумма конечного числа слагаемых $\beta_i$ вида (1) или (2), определим $J_q\left(\sum\limits_i \beta_i\right) = \sum\limits_i J_q(\beta_i)$. Тогда $J_q$ является линейным отображением из $\Omega_1^q(M \times [0,1])$ в $\Omega_1^{q-1}(M)$.

Если дифференциальная форма $\beta$ имеет вид (2)

$$\beta = b(x,t)\,dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}},$$

то $\pi_1^*\beta = \pi_0^*\beta = 0$,

$$d\beta = \sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}}\, dx^{i_0} \wedge dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}} =$$

$$= -\sum_{i_0=1}^{n} \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}}\, dt \wedge dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}$$

и, следовательно,

$$J_{q+1}(d\beta) = -\sum_{i_0=1}^{n} \left(\int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}} dt\right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}}.$$

С другой стороны, дифференцируя интеграл Лебега по параметру, получаем $\frac{\partial}{\partial x^i} \int\limits_0^1 b(x,t)\,dt = \int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial x^i}\,dt$. Поэтому

$$dJ_q(\beta) = \left(d\int\limits_0^1 b(x,t)\,dt\right) \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}} =$$

$$= \sum_{i_0=1}^{n} \left( \int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial x^{i_0}} dt \right) dx^{i_0} \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_{q-1}} = -J_{q+1}(d\beta).$$

Таким образом, для дифференциальной формы $\beta$ вида (2) цепное равенство справедливо.

Пусть теперь дифференциальная форма $\beta$ имеет вид (1):

$$\beta = b(x,t)\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Тогда $J_q(\beta) = 0$, а значит, $dJ_q(\beta) = 0$,

$$d\beta = \frac{\partial b}{\partial t}\, dt \wedge dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} + \text{слагаемые без } dt.$$

Следовательно,

$$J_{q+1}(d\beta) = \left( \int\limits_0^1 \frac{\partial b}{\partial t}\, dt \right) dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}.$$

Используя формулу Ньютона–Лейбница, получаем

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = J_{q+1}(d\beta) =$$

$$= (b(x,1) - b(x,0))\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q} = \pi_1^*\beta - \pi_0^*\beta.$$

Таким образом, для дифференциальной формы $\beta$ вида (1) цепное равенство также справедливо. В силу линейности отображений $J$, $d$, $\pi_0^*$, $\pi_1^*$ и представимости любой дифференциальной формы $\beta \in \Omega_1^q(M \times [0,1])$ в виде суммы конечного числа слагаемых вида (1) и (2) получаем цепное равенство для любой такой дифференциальной формы. □

**Определение.** Многообразие $M$ называется *стягиваемым в точку* $x_0 \in M$, если существует отображение $h \in C^1(M \times [0,1], M)$ такое, что

$$h(x,0) = x_0, \quad h(x,1) = x \quad \forall x \in M. \tag{3}$$

**Определение.** Множество $A$ в линейном пространтсве называется *выпуклым*, если для любых двух точек $x_0, x_1 \in A$ отрезок $[x_0, x_1] :=$ $= \{(1-t)x_0 + tx_1 :\ t \in [0,1]\}$ содержится в $A$.

**Лемма 2.** *Если подмногообразие $M$ пространства $\mathbb{R}^N$ выпукло, то оно стягиваемо.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольную точку $x_0 \in M$ и определим отображение $h : M \times [0,1] \to M$: $\quad h(x,t) = (1-t)x_0 + tx$. Тогда $h \in C^\infty(M \times [0,1], M)$ и справедливы равенства (3). $\square$

**Замечание.** Стягиваемое подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ может не быть выпуклым множеством. Например, множество $M = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x < 0$ или $y < 0\}$.

**Теорема 1.** *(Лемма Пуанкаре.) Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$ – стягиваемое многообразие, $q \in \mathbb{N}$. Дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ точна на $M$ тогда и только тогда, когда $\omega$ замкнута на $M$.*

**Доказательство.** Согласно лемме 1 § 12 из потенциальности $\omega$ следует замкнутость $\omega$. Пусть $\omega$ – замкнутая дифференциальная форма на $M$. Докажем, что $\omega$ точна. Поскольку многообразие $M$ стягиваемо, то существует отображение $h \in C^1(M \times [0,1], M)$, удовлетворяющее равенствам (3). Рассмотрим дифференциальную форму $\beta = h^*\omega \in \Omega_1^q(M \times [0,1])$. Согласно теореме 4 § 5 имеем $d\beta = h^* d\omega = 0$. В силу леммы о цепном равенстве существует линейное отображение $J_q : \Omega_1^q(M \times [0,1]) \to \Omega_1^{q-1}(M)$, удовлетворяющее цепному равенству

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = \pi_1^*\beta - \pi_0^*\beta.$$

Поскольку $d\beta = 0$, $\beta = h^*\omega$, то

$$dJ_q(\beta) = \pi_1^*(h^*\omega) - \pi_0^*(h^*\omega) = (h \circ \pi_1)^*\omega - (h \circ \pi_0)^*\omega,$$

где последнее равенство следует из леммы 2(2) § 5. Поскольку

$$(h \circ \pi_1)(x) = h(x,1) = x, \quad (h \circ \pi_0)(x) = h(x,0) = x_0 \quad \forall x \in M,$$

то $h \circ \pi_1 = Id$, $h \circ \pi_0 = \mathrm{const}$. Следовательно, $(h \circ \pi_1)^*\omega = \omega$, $(h \circ \pi_0)^*\omega = 0$. Таким образом, $dJ_q(\beta) = \omega$, т.е. дифференциальная форма $\omega$ точна. $\square$

**Замечание.** Поскольку любая точка $P$ на гладком многообразии $M$ имеет стягиваемую окрестность, то в силу леммы Пуанкаре любая замкнутая дифференциальная форма $\omega \in \Omega_1^q(M)$ локально точна, т.е. точна в некоторой окрестности точки $P$. Как показано в лемме 1 § 12, эта дифференциальная форма может не быть точной на всем $M$.

$\triangleright$

# § 14. Гомотопическая эквивалентность

**Определение.** Пусть заданы многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$. Два непрерывных отображения $f_0 : M \to N$ и $f_1 : M \to N$ называются *гомотопными*, если существует непрерывное отображение (называемое *гомотопией*) $h : M \times [0,1] \to N$ такое, что

$$h(x,0) = f_0(x), \quad h(x,1) = f_1(x) \quad \forall x \in M. \tag{1}$$

Если непрерывные отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гомотопны, будем писать $f_0 \sim f_1$.

**Задача 1.** Проверьте, что $\sim$ является отношением эквивалентности на множестве непрерывных отображений из $M \in \mathfrak{M}^n$ в $N \in \mathfrak{M}^p$.

**Определение.** Многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$ называются *гомотопически эквивалентными*, если существует пара непрерывных отображений $f : M \to N$ и $g : N \to M$ такая, что отображение $f \circ g$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_N : N \to N$, а отображение $g \circ f$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_M : M \to M$.

**Задача 2.** Проверьте, что гомотопическая эквивалентность многообразий является отношением эквивалентности.

**Замечание.** Если многообразия $M$ и $N$ гомеоморфны, то они гомотопически эквивалентны. Это следует непосредственно из определений. Обратное неверно. Например, отрезок $[0,1]$ топологически эквивалентен, но не гомеоморфен точке.

**Определение.** Свойство многообразий, которое совпадает у гомотопически эквивалентных многообразий, называется *гомотопическим инвариантом.*

К гомотопическим инвариантам относятся, например, стягиваемость и линейная связность.

**Замечание.** Поскольку гомеоморфные многообразия гомотопически эквивалентны, то любой гомотопический инвариант является топологическим инвариантом. Обратное неверно. Например, размерность многообразия является топологическим инвариантом, но не является гомотопическим инвариантом.

**Замечание.** Непосредственно из определений следует, что многообразие $M$ является стягиваемым тогда и только тогда, когда $M$ *гомотопически тривиально*, т.е. гомотопически эквивалентно точке.

**Гипотеза Пуанкаре.** *$n$-мерное многообразие $M$ гомотопически эквивалентно $n$-мерной сфере $S^n$ тогда и только тогда, когда $M$ гомеоморфно $S^n$.*

В случаях $n = 1, 2$ гипотеза Пуанкаре была доказана самим Пуанкаре (эти случаи и породили гипотезу, окончательная формулировка которой появилась в 1904г.). В случае $n \geq 5$ гипотеза Пуанкаре была доказана в 1960-70гг. С.Смейлом и Дж.Столлинсом. В случае $n = 4$ гипотеза Пуанкаре была доказана в 1982г. М.Фридманом. Доказательство в самом сложном случае $n = 3$ было получено Г.Перельманом в 2002г.

**Определение.** Множество всех классов эквивалентности для заданного отношения эквивалентности $\sim$ на множестве $X$, называется *фактормножеством* и обозначается $X/\sim$.

**Пример 1.** Пусть $L$ – линейное пространство над полем $F$ (например, $F = \mathbb{R}$ – поле действительных чисел или $F = \mathbb{C}$ – поле комплексных чисел). Пусть $L_1$ – линейное подпространство $L$. Для элементов $x, y \in$ $\in L$ будем писать $x \sim y$, если $x - y \in L_1$. Проверьте, что $\sim$ является отношением эквивалентности на $L$. На фактормножестве $L/L_1 := L/\sim$ введем операции сложения элементов и умножения элемента на число из $F$:

$$[x] + [y] := [x + y] \qquad \forall x, y \in L,$$
$$\lambda[x] := [\lambda x] \qquad \forall x \in L, \quad \lambda \in F.$$

Проверьте, что эти операции определены корректно, т.е. $[x] + [y]$ и $\lambda[x]$ не зависят от конкретных представителей $x$ и $y$ классов $[x]$ и $[y]$. Проверьте, что фактормножество $L/L_1$ с введенными операциями является линейным пространством, т.е. эти операции удовлетворяют аксиомам линейного пространства.

Следующая лемма во многих случаях позволяет установить взаимно однозначное соответствие между фактормножеством и другим множеством.

**Лемма 1.** *Пусть $X$, $Y$ – произвольные множества, $f : X \to Y$ – функция. Для элементов $x, x' \in X$ будем писать $x \sim x'$, если $f(x) = f(x')$. Тогда $\sim$ является отношением эквивалентности на $X$. Пусть отображение $F : (X/\sim) \to f(X)$ определяется равенством $F([x]) = f(x)$ при всех $x \in X$. Тогда $F$ является взаимно однозначным соответствием между фактормножеством $X/\sim$ и множеством $f(X)$.*

*Если дополнительно $f : X \to Y$ – линейное отображение линейных пространств $X$ и $Y$, то $F$ – изоморфизм линейных пространств $X/\sim$ и $\operatorname{Im} f := f(X)$.*

**Доказательство.** Непосредственно из определений получаем, что $\sim$ является отношением эквивалентности на $X$. Заметим, что отображение $F : (X/\sim) \to f(X)$ определено корректно, т.к. $F([x])$ зависит лишь от класса эквивалентности $[x]$, а не от его конкретного представителя $x \in X$. Фиксируем произвольный элемент $y \in f(X)$. Тогда найдется элемент $x \in \in X$ такой, что $f(x) = y$. Следовательно, $F([x]) = y$. Если $F([x']) = y$ для некоторого $x' \in X$, то $f(x) = f(x')$, а значит, $[x'] = [x]$.

Если дополнительно $f : X \to Y$ – линейное отображение линейных пространств $X$ и $Y$, то отображение $F$ линейно и, следовательно, является изоморфизмом линейных пространств. □

## § 15. Когомологии де Рама

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $q \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Через $d_q^M$ обозначим отображение из $\Omega^q(M)$ в $\Omega^{q+1}(M)$, которое каждой дифференциальной форме $\omega \in \Omega^q(M)$ сопоставляет ее внешний дифференциал $d\omega \in \Omega^{q+1}(M)$. Тогда *ядро* $\operatorname{Ker} d_q^M$ линейного отображения $d_q^M$ совпадает с пространством замкнутых форм $\omega \in \Omega^q(M)$, а *образ* $\operatorname{Im} d_{q-1}^M$ линейного отображения $d_{q-1}^M$ совпадает с пространством точных форм $\omega \in \Omega^q(M)$, т.е. таких, что существует дифференциальная форма $\varphi \in \Omega^{q-1}(M)$ такая, что $\omega = d\varphi$.

Факторпространство $\operatorname{Ker} d_q^M / \operatorname{Im} d_{q-1}^M$ называется *группой $q$-мерных когомологий де Рама* и обозначается $H_{DR}^q(M)$:

$$H_{DR}^q(M) := \operatorname{Ker} d_q^M / \operatorname{Im} d_{q-1}^M.$$

При $q = 0$ естественно считать, что $\operatorname{Im} d_{q-1}^M = 0$ и поэтому полагают $H_{DR}^0(M) := \operatorname{Ker} d_0^M$.

Если две замкнутые дифференциальные формы $\omega_1, \omega_2 \in \operatorname{Ker} d_q^M$ отличаются на точную форму, т.е. $\omega_1 - \omega_2 \in \operatorname{Im} d_{q-1}^M$, то дифференциальные формы $\omega_1$ и $\omega_2$ называются *когомологичными*. Элемент факторпространства $H_{DR}^q(M)$, т.е. класс когомологичных форм называется *когомологическим классом.*

**Замечание.** Если $M \in \mathfrak{M}^n$, $q > n$, то $H_{DR}^q(M) = 0$. Это следует из того, что $\Omega^q(M) = 0$ и, следовательно, $\operatorname{Ker} d_q^M = 0$.

**Лемма 1.** *Если многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ линейно-связно, то $H_{DR}^0(M) \cong \mathbb{R}$.*

**Доказательство.** Пусть $\omega \in \operatorname{Ker} d_0^M$, т.е. $\omega \in \Omega^0(M) = C^\infty(M, \mathbb{R})$ и $d\omega = 0$. В силу теоремы Лагранжа о среднем функция $\omega$ постоянна в районе действия любой карты на $M$. Отсюда в силу линейной связности $M$ получаем постоянство $\omega$ на $M$. Таким образом, пространство $H^0_{DR}(M) = \operatorname{Ker} d^M_0$ состоит из постоянных вещественнозначных функций, а значит, изоморфно множеству $\mathbb{R}$. $\square$

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$. *Обратным переносом когомологических классов* при отображении $f \in \mathbb{C}^\infty(M, N)$ называется отображение $f^* : H^q_{DR}(N) \to H^q_{DR}(M)$, которое каждому классу форм, когомологичных дифференциальной форме $\omega \in \operatorname{Ker} d^N_q$ ставит в соответствие класс форм, когомологичных обратному переносу $f^*\omega$ дифференциальной формы $\omega$:

$$f^*[\omega] := [f^*\omega] \quad \forall \omega \in \operatorname{Ker} d^N_q .$$

Проверим корректность этого определения. Во-первых нужно проверить, что

$$f^*\omega \in \operatorname{Ker} d^M_q \quad \forall \omega \in \operatorname{Ker} d^N_q . \tag{1}$$

Условие (1) выполнено, т.к. если $d\omega = 0$, то согласно теореме 4 § 5 имеем $df^*\omega = f^*d\omega = f^*0 = 0$.

Во-вторых нужно проверить, что когомологический класс $[f^*\omega] \in H^q_{DR}(M)$ зависит только от когомологического класса $[\omega] \in H^q_{DR}(N)$, а не от его конкретного представителя $\omega \in \operatorname{Ker} d^N_q$. Пусть $\omega \in \operatorname{Ker} d^N_q$, $\omega_1 \in [\omega]$, т.е. $\omega_1 - \omega \in \operatorname{Im} d^N_{q-1}$. Это означает, что $\omega_1 - \omega = d\varphi$ для некоторой дифференциальной формы $\varphi \in \Omega^{q-1}(N)$. Тогда согласно теореме 4 § 5 получаем

$$f^*\omega_1 - f^*\omega = f^*d\varphi = d\ f^*\varphi \in \operatorname{Im} d^M_{q-1},$$

а значит, $[f^*\omega_1] = [f^*\omega]$.

Примем без доказательства следующую лемму.

**Лемма 2.** *Если $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$, $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ и отображения $f_0, f_1 \in C^k(M, N)$ гомотопны, то существует гомотопия $h \in C^k(M \times [0,1], N)$, удовлетворяющая равенствам* (1).

**Теорема 1.** (О цепной гомотопии.) *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$, отображения $f_0, f_1 \in C^\infty(M, N)$ гомотопны. Тогда для любого $q \in \mathbb{N}$ существует такое линейное отображение $H_q : \Omega^q(N) \to \Omega^{q-1}(M)$, что*

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = H_{q+1}(d\omega) + dH_q(\omega) \qquad \forall q \in \mathbb{N} \quad \forall \omega \in \Omega^q_1(N).$$

**Доказательство.** Так как отображения $f_0, f_1 : M \to N$ гомотопны, то согласно лемме 2 существует гладкая гомотопия $h \in C^\infty(M \times [0,1], N)$, удовлетворяющая равенствам (1), т.е. $f_0 = h \circ \pi_0$, $f_1 = h \circ \pi_1$, где

$$\pi_0(x) = (x, 0), \quad \pi_1(x) = (x, 1) \quad \forall x \in M.$$

В силу леммы о цепном равенстве для любого $q \in \mathbb{N}$ существует линейное отображение $J_q : \Omega_1^q(M \times [0,1]) \to \Omega_1^{q-1}(M)$, удовлетворяющее цепному равенству

$$J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = \pi_1^*\beta - \pi_0^*\beta \qquad \forall \beta \in \Omega_1^q(M \times [0,1]). \tag{2}$$

Заметим, что отображение $J_q$, построенное в лемме о цепном равенстве, гладкую дифференциальную форму переводит в гладкую, т.е. является отображением из $\Omega^q(M \times [0,1])$ в $\Omega^{q-1}(M)$.

Для любого $q \in \mathbb{N}$ определим $H_q := J_q \circ h^*$. Тогда $H_q$ является линейным отображением из $\Omega^q(N)$ в $\Omega^{q-1}(M)$. Пусть $\omega \in \Omega^q(N)$. Обозначим $\beta := h^*\omega$. Согласно теореме 4 § 5 имеем $d\beta = h^*d\omega$. Применяя равенство (2) для $\beta \in \Omega^q(M \times [0,1])$, получаем

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = (h \circ \pi_1)^*\omega - (h \circ \pi_0)^*\omega = (\pi_1^* \circ h^*)\omega - (\pi_0^* \circ h^*)\omega =$$

$$\overset{(2)}{=} J_{q+1}(d\beta) + dJ_q(\beta) = J_{q+1}(h^*d\omega) + dJ_q(h^*\omega) = H_{q+1}(d\omega) + dH_q(\omega).$$

$\square$

**Лемма 3.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $N \in \mathfrak{M}^p$, $f_0, f_1 \in \mathbb{C}^\infty(M,N)$, $q \in \mathbb{N}$, $f_0^*, f_1^* : H_{DR}^q(N) \to H_{DR}^q(M)$ – соответствующие обратные переносы когомологичных классов. Если отображения $f_0$ и $f_1$ гомотопны, то $f_0^* = f_1^*$.*

**Доказательство.** По теореме о цепной гомотопии существует линейное отображение $H_q : \Omega^q(N) \to \Omega^{q-1}(M)$ такое, что

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = H_{q+1}(d\omega) + dH_q(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega^q(N).$$

Следовательно, для любой замкнутой формы $\omega \in \operatorname{Ker} d_q^N$ имеем

$$f_1^*\omega - f_0^*\omega = dH_q(\omega) \in \operatorname{Im} d_{q-1}^M,$$

а значит, $f_1^*[\omega] = f_0^*[\omega]$. $\square$

Примем без доказательства следующую лемму, которая в определении гомотопической эквивалентности позволяет вместо непрерывных отображений рассматривать гладкие отображения.

**Лемма 4.** *Если гладкие многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$ гомотопически эквивалентны, то существует пара гладких отображений $f \in C^\infty(M,N)$ и $g \in C^\infty(N,M)$ такая, что отображение $f \circ g$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_N : N \to N$, а отображение $g \circ f$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_M : M \to M$.*

**Теорема 2.** *Если многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и $N \in \mathfrak{M}^p$ гомотопически эквивалентны, то группы когомологий этих многообразий изоморфны:*

$$H^q_{DR}(M) \cong H^q_{DR}(N) \qquad \forall q \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.** Пусть $f \in C^\infty(M, N)$ и $g \in C^\infty(N, M)$ – отображения, о которых говорится в лемме 4. Согласно лемме 3 отображения $(f \circ g)^* : H^q_{DR}(M) \to H^q_{DR}(M)$ и $(g \circ f)^* : H^q_{DR}(N) \to H^q_{DR}(N)$ в точности являются тождественными отображениями когомологичных классов. Поскольку $(f \circ g)^* = g^* \circ f^*$, $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$, то отображения $f^* : H^q_{DR}(N) \to H^q_{DR}(M)$ и $g^* : H^q_{DR}(M) \to H^q_{DR}(N)$ взаимно обратные. Отсюда и из линейности обратных переносов следует, что $f^*$ – изоморфизм линейных пространств $H^q_{DR}(N)$ и $H^q_{DR}(M)$. $\square$

**Следствие 1.** *Если многообразие $M \in \mathfrak{M}^n$ стягиваемо и $q \in \mathbb{N}$, то $H^q_{DR}(M) = 0$.*

**Доказательство.** Так как многообразие $M$ гомотопически эквивалентно точке $P$ и $q > 0 = \dim P$, то по теореме 2 имеем $H^q_{DR}(M) = H^q_{DR}(P) = 0$. $\square$

Следствие 1, как и эквивалентная ей теорема 1 § 13 называются леммой Пуанкаре.

**Определение.** Многообразие $M$ называется *односвязным*, если оно линейно-связно и любую замкнутую кривую $\Gamma = \{r(t) : \ t \in S^1\} \subset M$ можно *непрерывно стянуть в точку по $M$*, т.е. любое непрерывное отображение $r : S^1 \to M$ гомотопно некоторому постоянному отображению $r_0 : S^1 \to \{x_0\}$, где $x_0 \in M$.

**Лемма 5.** *Если многообразие $M$ стягиваемо, то оно односвязно.*

**Доказательство.** Пусть многообразие $M$ стягиваемо. Тогда существует гомотопия $h : M \times [0, 1] \to M$ тождественного отображения $Id : M \to M$ и постоянного отображения $r_0 : M \to \{x_0\}$. Пусть задано непрерывное отображение $r : S^1 \to M$. Тогда отображение $\tilde{h} : S^1 \times [0, 1] \to M$, заданное формулой

$$\tilde{h}(y, t) = h(r(y), t), \quad y \in S^1, \ t \in [0, 1],$$

является гомотопией отображения $r$ и постоянного отображения $r_0 : S^1 \to \{x_0\}$. Поэтому $M$ односвязно. $\square$

**Замечание.** Односвязное многообразие может не быть стягиваемым. Например, $M = \mathbb{R}^3 \setminus \{\bar{0}\}$.

**Теорема 3.** *Пусть $G$ – односвязная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда $H^1_{DR}(G) = 0$, т.е. если дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(G)$ замкнута, то $\omega$ – потенциальное ковекторное поле в $G$.*

**Доказательство.** Пусть дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(G)$ замкнута. Покажем, что ковекторное поле $\omega$ потенциально в $G$. Согласно теореме 1 § 12 достаточно доказать, что для любой замкнутой кривой $\gamma \subset \subset G$ справедливо равенство

$$\int\limits_{\gamma} \omega = 0. \tag{3}$$

Используя теорему о замене переменных в интеграле от дифференциальной формы, получаем

$$\int\limits_{\gamma} \omega = \int\limits_{S^1} r^*\omega.$$

Поскольку область $G$ односвязна, то отображение $r : S^1 \to G$ гомотопно некоторому постоянному отображению $r_0 : S^1 \to \{x_0\}$, где $x_0 \in G$. В силу леммы 3 имеем $[r^*\omega] = [r_0^*\omega]$. Так как отображение $r_0$ постоянно, а степень дифференциальной формы равна 1, то $r_0^*\omega = 0$. Поэтому дифференциальная форма $r^*\omega \in \Omega^1(S^1)$ когомологична нулевой, т.е. точна на $S^1$. Следовательно, $\int\limits_{S^1} r^*\omega = 0$, а значит, справедливо равенство (3). $\square$

**Пример 1.** Найти (с точностью до изоморфизма) $H^1_{DR}\Big(\mathbb{R}^2 \setminus \{\,\bar{0}\,\}\Big)$.

**Решение.** Покажем, что область $G := \mathbb{R}^2 \setminus \{\,\bar{0}\,\}$ гомотопически эквивалентна окружности $S^1$. Рассмотрим отображения

$$f : G \to S^1, \qquad f(x) = \frac{x}{|x|}, \quad x \in G$$

и

$$g : S^1 \to G, \qquad g(y) = y, \quad y \in S^1.$$

Тогда $f \circ g = \mathrm{Id}_{S^1}$, $g \circ f = f$. Поскольку отображение

$$h : G \times [0,1] \to G, \qquad h(x,t) = \left(\frac{t}{|x|} + 1 - t\right) x, \quad x \in G,\ t \in [0,1]$$

является гладким и $h(x,0) = x$, $h(x,1) = f(x)$ для любого $x \in G$, то отображение $g \circ f = f$ гомотопно тождественному отображению $\mathrm{Id}_G$. Поэтому область $G$ гомотопически эквивалентна окружности $S^1$.

В силу теоремы 2 имеем $H^1_{DR}(G) \cong H^1_{DR}(S^1)$.

Пусть $\omega \in \Omega^1(S^1)$. В качестве координаты на окружности $S^1$ будем использовать полярный угол $\varphi \in \mathbb{R}$. Тогда $\omega$ имеет вид $\omega = a(\varphi)\,d\varphi$, где $a \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$ и $a(\varphi + 2\pi) = a(\varphi)$ для любого $\varphi \in \mathbb{R}$, поскольку углам $\varphi$ и $\varphi + 2\pi$ соответствует одна и та же точка окружности $S^1$. Заметим, что $d\omega = 0$, т.е. любая дифференциальная форма $\omega \in \Omega^1(S^1)$ замкнута. Форма $\omega = a(\varphi)\,d\varphi$ точна тогда и только тогда, когда $a(\varphi)\,d\varphi = dF(\varphi)$ для некоторой $2\pi$-периодической функции $F \in C^\infty(\mathbb{R},\mathbb{R})$. Отсюда получаем, что $F(\varphi) = \int\limits_0^\varphi a(t)\,dt$ и форма $\omega = a(\varphi)\,d\varphi$ точна тогда и только тогда, когда $\int\limits_0^{2\pi} a(t)\,dt = 0$, т.е. $\int\limits_{S^1} \omega = 0$. Рассмотрим линейное отображение $I : \Omega^1(S^1) \to$ $\to \mathbb{R}$, заданное равенством

$$I(\omega) := \int\limits_{S^1} \omega, \quad \omega \in \Omega^1(S^1).$$

Таким образом, дифференциальные формы $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^1(S^1) = \operatorname{Ker} d_1^{S^1}$ когомологичны тогда и только тогда, когда $I(\omega_1) = I(\omega_2)$. В силу леммы 1 § 14 факторпространство $H^1_{DR}(S^1) = \operatorname{Ker} d_1^{S^1} / \operatorname{Im} d_0^{S^1}$ изоморфно образу $\operatorname{Im} I$. Поскольку $\operatorname{Im} I \subset \mathbb{R}$ и $\operatorname{Im} I \neq 0$, т.к., например, для $\omega = d\varphi$ имеем $I(\omega) \neq 0$, то $\operatorname{Im} I = \mathbb{R}$. Итак,

$$H^1_{DR}(G) \cong H^1_{DR}(S^1) \cong \mathbb{R}.$$

**Задача 1.** Пусть $G = \mathbb{R}^3 \setminus \{\,\overline{0}\,\}$. При каких $q \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $H^q_{DR}(G) = 0$?

$\lhd$

Глава 19

# РИМАНОВЫ МНОГООБРАЗИЯ

## § 1. Риманова метрика

**Определение.** *Римановой метрикой* или (ковариантным) *метрическим тензором* на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется гладкое тензорное поле $g$ типа $(0, 2)$, обладающее свойствами

симметричности:

$$g(P)[\vec{v}_2, \vec{v}_1] = g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M) \quad \forall P \in M$$

и положительной определенности:

$$g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,] > 0 \qquad \forall \vec{v} \in T_P(M) \setminus \{\vec{0}\,\} \quad \forall P \in M.$$

Пара $(M, g)$, состоящая из многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и римановой метрики $g$ на $M$, называется *римановым многообразием.*

**Замечание.** С учетом того, что тензор – это полилинейная функция, риманова метрика $g(P)$ удовлетворяет аксиомам скалярного произведения на касательном пространстве $T_P(M)$.

**Определение.** *Скалярным произведением* двух векторных полей $\vec{a}$ и $\vec{b}$, заданных на римановом многообразии $(M, g)$, называется скалярное поле $(\vec{a}, \vec{b}\,)$ на $M$, значение которого в каждой точке $P \in M$ равно $g(P)[\vec{a}(P), \vec{b}(P)]$.

**Определение.** *Длиной* касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ называется число $|\vec{v}| = \sqrt{g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,]}$. Угол $\varphi \in [0, \pi]$ называется *углом между касательными векторами* $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in T_P(M) \setminus \{\vec{0}\}$, если

$$\cos\varphi = \frac{g(P)[\vec{v_1}, \vec{v_2}]}{|\vec{v_1}| \cdot |\vec{v_2}|}.$$

**Замечание.** Значение метрического тензора выражается через его компоненты

$$g_{ij}(P) := g(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right]$$

в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$ следующим образом:

$$g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = g_{ij}(P)\, \xi_1^i\, \xi_2^j, \tag{1}$$

где $\xi_k := \begin{pmatrix} \xi_k^1 \\ \ldots \\ \xi_k^n \end{pmatrix}$ – координатный столбец касательного вектора $\vec{v}_k$ в этом базисе, и в соответствии с соглашением Эйнштейна индексы суммирования $i, j$ пробегают $\overline{1, n}$.

**Определение.** *Матрицей Грама на римановом многообразии* $(M, g)$ в точке $P \in M$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ называется матрица Грама скалярного произведения в $T_P(M)$, заданного метрическим тензором, т.е. матрица

$$G = G(P) = \begin{pmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix},$$

составленная из компонент метрического тензора $g_{ij}(P)$.

Из формулы (1) следует, что значение метрического тензора следующим образом выражается через матрицу Грама и координатные столбцы касательных векторов $\vec{v}_k$:

$$g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] = \xi_1^T\, G(P)\, \xi_2.$$

В соответствии с теоремой 3 § 2 главы 18 метрический тензор следующим образом выражается через свои компоненты:

$$g(P) = g_{ij}(P)\, dx^i \otimes dx^j.$$

**Пример 1.** Евклидово пространство $\mathbb{R}^n$ является римановым многообразием. При этом касательное пространство $T_P(\mathbb{R}^n)$ обычно отождествляют с пространством $\mathbb{R}^n$, а базис $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ в $T_P(\mathbb{R}^n)$ – со стандартным базисом в $\mathbb{R}^n$. Компоненты метрического тензора в этом базисе равны символам Кронекера:

$$g_{ij}(P) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Используя стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^N$, определим индуцированную метрику на гладком подмногообразии пространства $\mathbb{R}^N$.

Пусть $(\psi, U^M)$ – карта на $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $P \in U^M$, $(x_1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$.

**Определение.** *Индуцированной метрикой* на $M \in \mathfrak{M}^n_N$ называется метрический тензор $g$ на $M$, следующим образом определяемый через скалярное произведение $(v_1, v_2)$ в $\mathbb{R}^N$:

$$g(P)[\vec{v}_1, \vec{v}_2] := (v_1, v_2) \qquad \forall \vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M),$$

где $v_1, v_2 \in \widetilde{T}_P(M) \subset \mathbb{R}^N$ – векторы касательного пространства $\widetilde{T}_P(M)$, соответствующие векторам $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in T_P(M)$, т.е. координатный столбец $\xi_k = \begin{pmatrix} \xi^1_k \\ \ldots \\ \xi^n_k \end{pmatrix}$ вектора $\vec{v}_k = \xi^i_k \frac{\partial}{\partial x^i}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ пространства $T_P(M)$ совпадает с координатным столбцом вектора $v_k = \xi^i_k \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ в базисе $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\right)$ пространства $\widetilde{T}_P(M)$.

Легко видеть, что индуцированная метрика симметрична и положительно определена. Таким образом, индуцированная метрика на подмногообразии $M \in \mathfrak{M}^n_N$ действительно является римановой метрикой на $M$.

Проводя аналогию с обратным переносом дифференциальной формы, можно сказать, что индуцированная метрика – это результат обратного переноса скалярного произведения в $\mathbb{R}^N$ при отображении $\psi$.

По определению дифференциала отображения имеем

$$d\psi(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right] = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(P).$$

Следовательно, компоненты тензора индуцированной метрики равны

$$g_{ij}(P) = g(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right] =$$

$$= \left(d\psi(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\right], d\psi(P)\left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right]\right) = \left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}, \frac{\partial \psi}{\partial x^j}\right).$$

Если гомеоморфизм карты имеет вид $\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \ldots \\ \psi^N(x) \end{pmatrix}$, то

$$g_{ij}(P) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial \psi^k}{\partial x^i}(x)\ \frac{\partial \psi^k}{\partial x^j}(x), \qquad x = \psi^{-1}(P).$$

Поэтому матрица Грама индуцированной метрики следующим образом определяется через матрицу Якоби гомеоморфизма карты:

$$G(P) = (\mathcal{D}\,\psi(x))^T\,\mathcal{D}\,\psi(x)\big|_{x=\psi^{-1}(P)}. \tag{2}$$

Поскольку криволинейную систему координат можно рассматривать как гомеоморфизм карты, то формула (2) также справедлива для матрицы Грама стандартной евклидовой метрики в $\mathbb{R}^N$, выраженной в криволинейных координатах $(x^1, \ldots, x^N) = \psi^{-1}$.

Вычислим матрицы Грама некоторых часто используемых метрик.

1. Полярная система координат на плоскости.

$$\psi(r,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби имеет вид

$$\mathcal{D}\,\psi = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (2) матрица Грама евклидовой метрики в полярной системе координат равна

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & r^2 \end{pmatrix}.$$

2. Сферическая система координат в трехмерном пространстве.

$$\psi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\varphi \\ r\cos\theta\sin\varphi \\ r\sin\theta \end{pmatrix}.$$

Матрица Якоби имеет вид

$$\mathcal{D}\,\psi = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (2) матрица Грама евклидовой метрики в сферической системе координат равна

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2\cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

3. <u>Сферические координаты на двумерной сфере радиуса $R$.</u>

$$\psi(\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta\sin\varphi \\ R\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{D}\,\psi = \begin{pmatrix} -R\sin\theta\cos\varphi & -R\cos\theta\sin\varphi \\ -R\sin\theta\sin\varphi & R\cos\theta\cos\varphi \\ R\cos\theta & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу формулы (2) матрица Грама индуцированной метрики на сфере равна

$$G = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\cos^2\theta \end{pmatrix}.$$

**Определение.** В случае, когда $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, квадратичная форма

$$I(v) := \xi^T G(P)\,\xi = g_{ij}(P)\xi^i\xi^j$$

называется *первой квадратичной формой (гипер)поверхности* $M$. Здесь $\xi$ – координатный столбец касательного вектора $v \in \widetilde{T}_P(M)$: $v = \xi^i\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$.

Поскольку первая квадратичная форма $I(v)$ является значением тензора, то она не зависит от ЛСК на поверхности $M$.

## § 2. Кривизна поверхности

Пусть $(\psi, U^M(p_0))$ – карта на многообразии (гиперповерхности) $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, согласованная с ориентацией $M$. Пусть $\vartheta \in \mathbb{R}^{n+1}$ – единичный вектор нормали к $M$ в точке $p_0 \in M \setminus \partial M$, согласованный с ориентацией $M$, т.е. $(\vartheta, e_1, \ldots, e_n)$ – правый базис в $\mathbb{R}^{n+1}$, где $e_i = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ – векторы базиса в $\widetilde{T}_{p_0}(M)$, соответствующего ЛСК $(x^1,\ldots,x^n) = \psi^{-1}$.

Обозначим $x_0 := \psi^{-1}(p_0)$. Заметим, что расстояние от точки $\psi(x)$ на многообразии $M$ до касательной гиперплоскости

$$p_0 + \widetilde{T}_{p_0}(M) = \{p \in \mathbb{R}^{n+1} : \ (p - p_0, \vartheta) = 0\}$$

равно скалярному произведению $(\psi(x) - \psi(x_0), \vartheta)$. Величина этого скалярного произведения показывает, насколько гиперповерхность $M$ отличается от касательной гиперплоскости.

В силу формулы Тейлора имеем

$$\psi(x) - \psi(x_0) = \frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i - x_0^i) +$$
$$+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0) \cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o(|x - x_0|^2), \quad x \to x_0.$$

Согласно соглашению Эйнштейна индексы суммирвания $i, j$ пробегают $\overline{1, n}$. Поскольку $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^i}(x_0), \vartheta\right) = 0$, то при $x \to x_0$

$$\Big(\psi(x) - \psi(x_0), \vartheta\Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \cdot (x^i - x_0^i)(x^j - x_0^j) + o(|x - x_0|^2).$$

**Определение.** Квадратичная форма

$$II(v) := \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \ \xi^i \xi^j$$

называется *второй квадратичной формой* (гипер)поверхности $M$. Здесь $\xi$ – координатный столбец касательного вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M)$: $v = \xi^i \frac{\partial\psi}{\partial x^i}$.

В отличие от первой квадратичной формы, которая определяет внутреннюю геометрию поверхности $M$, вторая квадратичная форма определяет внешнюю геометрию $M$ в объемлющем пространстве $\mathbb{R}^{n+1}$.

**Лемма 1.** *Вторая квадратичная форма поверхности не зависит от ЛСК на этой поверхности.*

**Доказательство.** Пусть на поверхности $M$ в окрестности точки $p_0$ заданы две ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) = \tilde{\psi}^{-1}$. Тогда согласно формуле (8) § 5 главы 17

$$\frac{\partial\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^j} = \frac{\partial\psi}{\partial x^m}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j} = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^m}\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j} + \frac{\partial\psi}{\partial x^m}\frac{\partial^2 x^m}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}.$$

Поскольку $\left(\frac{\partial\psi}{\partial x^m}, \vartheta\right) = 0$, то

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}, \vartheta\right) = \left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial x^k\partial x^m}, \vartheta\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}.$$

Согласно теореме 1 § 5 главы 17 имеем $\xi^k = \tilde{\xi}^i\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}$. Поэтому

$$\left(\frac{\partial^2\tilde{\psi}}{\partial\tilde{x}^i\partial\tilde{x}^j}, \vartheta\right)\ \tilde{\xi}^i\tilde{\xi}^j = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^m}, \vartheta\right)\frac{\partial x^k}{\partial\tilde{x}^i}\frac{\partial x^m}{\partial\tilde{x}^j}\ \tilde{\xi}^i\tilde{\xi}^j =$$

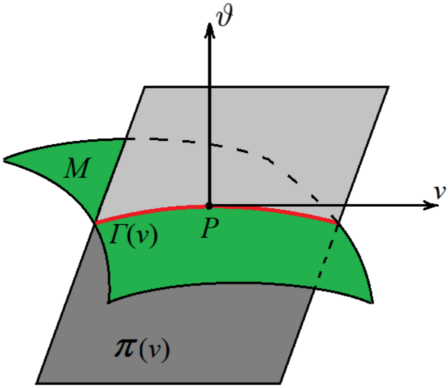
$$= \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^k\partial x^m}, \vartheta\right)\xi^k\xi^m.$$

□

**Определение.** *Нормальным сечением* поверхности $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$ в точке $p_0 \in M$ вдоль вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$, называется множество $\Gamma(v) := M \cap \pi(v)$, где

$$\pi(v) := \{p_0 + tv + \tau\vartheta : (t, \tau) \in \mathbb{R}^2\}$$

– плоскость в $\mathbb{R}^{n+1}$, проходящая через точку $p_0$ и параллельная касательному вектору $v$ и нормальному вектору $\vartheta$.




**Лемма 2.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, $n \geq 2$. Для любого касательного вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$ нормальное сечение $\Gamma(v)$ поверхности $M$ в точке $p_0 \in M \setminus \partial M$ в некоторой окрестности точки $p_0$ представляет собой гладкую кривую.*

**Доказательство.** Фиксируем $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$. По определению гладкого подмногообразия пространства $\mathbb{R}^{n+1}_p$ существует криволинейная система координат $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ в окрестности $U(p_0)$ точки $p_0$, в которой множество $M$ имеет вид $n$-мерного подпространства, т.е. задается уравнением $x^{n+1}(p) = 0$. Здесь мы учитываем, что точка $p_0$ не является краевой точкой многообразия $M$ и поэтому случай, когда $M$ имеет вид полуподпространства, не рассматриваем. Обозначим $x_0 = (x^1(p_0), \ldots, x^{n+1}(p_0))$, $g(p) = x^{n+1}(p)$. Тогда

$$M \cap U(p_0) = \{p \in U(p_0) : \ g(p) = 0\}.$$

Поэтому в окрестности $U(p_0)$ нормальное сечение $\Gamma(v)$ состоит из векторов вида $p_0 + tv + \tau\vartheta$, удовлетворяющих уравнению $g(p_0 + tv + \tau\vartheta) = 0$. Обозначим $h(t,\tau) = g(p_0 + tv + \tau\vartheta)$ и решим уравнение $h(t,\tau) = 0$ относительно $\tau$.

Заметим, что $h(0,0) = g(p_0) = 0$, $\frac{\partial h}{\partial \tau}(0,0) = \frac{\partial g}{\partial p^i}(p_0)\vartheta^i = (\operatorname{grad} g(p_0), \vartheta)$.

Поскольку $(x^1, \ldots, x^{n+1})$ – криволинейная система координат, то якобиан вектор-функции с компонентами $x^i(p)$ не равен нулю. Следовательно, $\operatorname{grad} g(p_0) \neq \overline{0}$. Согласно теореме 2 § 2 главы 16

$$\widetilde{T}_{p_0}(M) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ dg(p_0)[\xi] = 0\},$$

то есть геометрическое касательное пространство $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ задается уравнением $(\operatorname{grad} g(p_0), \xi) = 0$. Поэтому вектор $\operatorname{grad} g(p_0)$ ортогонален касательной гиперплоскости, а значит, коллинеарен вектору нормали $\vartheta$, т.е. найдется число $\lambda \in \mathbb{R}$ такое, что $\operatorname{grad} g(p_0) = \lambda\vartheta$. Поскольку $\operatorname{grad} g(p_0) \neq \overline{0}$, то $\lambda \neq 0$.

Следовательно, $\frac{\partial h}{\partial \tau}(0,0) = (\operatorname{grad} g(p_0), \vartheta) = \lambda(\vartheta, \vartheta) = \lambda \neq 0$. По теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(t_0, \tau_0) = (0,0)$ уравнение $h(t,\tau) = 0$ имеет единственное решение $\tau = \tau(t)$, причем $\tau(t)$ – гладкая функция.

Поэтому в некоторой окрестности точки $p_0$ нормальное сечение $\Gamma(v)$ состоит из векторов вида $r(t) = p_0 + tv + \tau(t)\vartheta$. При этом $r'(t) = v + \tau'(t)\vartheta \neq \overline{0}$, поскольку векторы $v$ и $\vartheta$ ортогональны. Таким образом, в некоторой окрестности точки $p_0$ нормальное сечение $\Gamma(v)$ представляет собой гладкую кривую. $\square$

Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_{n+1}$, $p_0 \in M \setminus \partial M$, $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$. Пусть $r(s)$ – натуральная параметризация нормального сечения $\Gamma(v) = M \cap \pi(v)$, $r(s_0) = p_0$. Так как нормальное сечение $\Gamma(v)$ лежит в плоскости $\pi(v)$, то вектор $r''(s)$ параллелен этой плоскости. Дифференцируя тождество $(r'(s), r'(s)) = 1$, получаем перпендикулярность векторов $r''(s)$ и $r'(s)$, последний из которых коллинеарен касательному вектору $v$. Отсюда следует, что вектор $r''(s_0)$ коллинеарен вектору нормали $\vartheta$:

$$r''(s_0) \parallel \vartheta.$$

Ранее мы определяли кривизну кривой, заданной в натуральной параметризации $r(s)$, как $|r''(s_0)|$. Определим кривизну нормального сечения с учетом знака.

**Определение.** Число $k(v)$ называется *кривизной нормального сечения* $\Gamma(v)$, если для его натуральной параметризации $r(s)$ справедливо равенство

$$r''(s_0) = k(v)\vartheta, \tag{1}$$

где $r(s_0) = p_0$, $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M) \setminus \{\overline{0}\}$.

Таким образом, $k(v) = \pm|r''(s_0)|$. Знак кривизны нормального сечения зависит от ориентации поверхности $M$, определяемой направлением вектора нормали $\vartheta$.

**Теорема 1.** *Кривизна нормального сечения* $\Gamma(v)$ *в точке* $p_0$ *равна частному второй и первой квадратичных форм поверхности* $M$*:*

$$k(v) = \frac{I\!I(v)}{I(v)}. \tag{2}$$

**Доказательство.** Пусть нормальное сечение $\Gamma(v)$ имеет натуральную параметризацию $r(s)$, причем $r(s_0) = p_0$. Из формулы (1) следует, что $k(v) = (r''(s_0), \vartheta)$. Обозначим $x(s) := \psi^{-1}(r(s))$. Пусть $x(s) = \begin{pmatrix} x^1(s) \\ \dots \\ x^n(s) \end{pmatrix}$. Тогда $r(s) = \psi(x(s))$. Дифференцируя это равенство, получаем

$$r'(s) = \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x(s)) \cdot (x^i)'(s), \tag{3}$$

$$r''(s) = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x(s)) \cdot (x^i)'(s) \cdot (x^j)'(s) + \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x(s)) \cdot (x^i)''(s).$$

Поскольку $\left(\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0), \vartheta\right) = 0$, то

$$k(v) = (r''(s_0), \vartheta) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \cdot (x^i)'(s_0) \cdot (x^j)'(s_0). \tag{4}$$

Так как $r'(s_0) \parallel v$, $|r'(s_0)| = 1$, $v \neq \overline{0}$, то существует число $\lambda$ такое, что $r'(s_0) = \lambda v$, $|\lambda| = \frac{1}{|v|}$. Используя равенство (3) и определение координат касательного вектора $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M)$, приходим к равенствам

$$\frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0) \cdot (x^i)'(s_0) = r'(s_0) = \lambda v = \lambda \xi^i \ \frac{\partial \psi}{\partial x^i}(x_0).$$

Отсюда в силу линейной независимости векторов $\frac{\partial \psi}{\partial x^i}$ получаем равенства $(x^i)'(s_0) = \lambda \xi^i$. Таким образом,

$$k(v) = \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^i \partial x^j}(x_0), \vartheta\right) \cdot \lambda^2 \xi^i \xi^j = \lambda^2 \ I\!I(v) = \frac{I\!I(v)}{|v|^2} = \frac{I\!I(v)}{I(v)}.$$

$\square$

Согласно доказанной в курсе линейной алгебры теореме об одновременном приведении двух квадратичных форм к каноническому виду (с учетом положительной определенности первой квадратичной формы) в $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ существует ортонормированный (в смысле индуцированной метрики) базис $(e_1, \ldots, e_n)$ такой, что в этом базисе первая квадратичная форма имеет канонический вид, а вторая квадратичная форма – диагональный вид:

$$I(v) = \sum_{i=1}^{n} (\xi^i)^2, \qquad II(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (\xi^i)^2, \tag{5}$$

где $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i e_i$.

При этом векторы $e_i$ называются *главными направлениями* поверхности $M$ в точке $p_0$.

Как известно из линейной алгебры, числа $\lambda_i$ определяются из уравнения

$$\det (Q - \lambda G) = 0,$$

где $G$ – матрица первой квадратичной формы $I(v)$, $Q$ – матрица второй квадратичной формы $II(v)$ в исходном базисе касательного пространства $\widetilde{T}_{p_0}(M)$. Координатные столбцы $\eta_i$ главных направлений $e_i$ в исходном базисе касательного пространства $\widetilde{T}_{p_0}(M)$ определяются равенствами

$$G^{-1} Q \eta_i = \lambda_i \eta_i, \qquad \eta_i^T G \eta_i = 1 \qquad \forall i \in \overline{1, n}.$$

Обозначим через $\varphi_i$ угол (в смысле индуцированной метрики) между касательным вектором $v \in \widetilde{T}_{p_0}(M)$ и главным направлением $e_i$:

$$\cos \varphi_i = \frac{g(p_0)[v, e_i]}{|v| \cdot |e_i|} = \frac{(v, e_i)}{|v| \cdot |e_i|}.$$

Поскольку $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \xi^i e_i$, $g(p_0)[e_i, e_j] = \delta_{ij}$, $|v| = \sqrt{I(v)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}$, $|e_i| = 1$, то

$$\cos \varphi_i = \frac{\xi^i}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (\xi^i)^2}}.$$

Используя равенства (5), формулу (2) можно переписать в виде

$$k(v) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \cos^2 \varphi_i.$$

Последняя формула называется *формулой Эйлера кривизны нормального сечения.*

В случае двумерной поверхности $M \in \mathfrak{M}^2_3$ числа $\lambda_1$ и $\lambda_2$ называются *главными кривизнами*, $\lambda_1 + \lambda_2$ – *средней кривизной*, $\lambda_1 \cdot \lambda_2$ – *гауссовой кривизной* поверхности $M$ в точке $p_0$.

## § 3. Риманов объем

Выразим объем паралеллепипеда

$$\Pi(e_1, \dots, e_n) := \left\{ t_1 e_1 + \dots + t_n e_n : \ t_i \in [0,1] \ \forall i \in \overline{1,n} \ \right\}, \qquad (1)$$

построенного на векторах $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ через матрицу Грама

$$G = \begin{pmatrix} (e_1, e_1) & \dots & (e_1, e_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ (e_n, e_1) & \dots & (e_n, e_n) \end{pmatrix}$$

системы векторов $e_1, \dots, e_n$. Поскольку паралеллепипед $\Pi(e_1, \dots, e_n)$ является образом единичного куба $K = \underbrace{[0,1] \times \dots \times [0,1]}_{n \text{ раз}}$ при линейном отображении

$$F(t_1, \dots, t_n) = t_1 e_1 + \dots + t_n e_n,$$

то по теореме о замене переменных в кратном интеграле мера в $\mathbb{R}^n$ множества $\Pi(e_1, \dots, e_n)$ равна

$$\mu_n(\Pi(e_1, \dots, e_n)) = \int\limits_K |\det \mathcal{D}\, F(t_1, \dots, t_n)| \, dt. \qquad (2)$$

Пусть векторы $e_i \in \mathbb{R}^n$ имеют вид $e_i = \begin{pmatrix} e_i^1 \\ \dots \\ e_i^n \end{pmatrix}$. Тогда

$$\mathcal{D}\, F = \begin{pmatrix} e_1^1 & \dots & e_n^1 \\ \dots & \dots & \dots \\ e_1^n & \dots & e_n^n \end{pmatrix}.$$

Так как $(e_i, e_j) = \sum\limits_{k=1}^{n} e_i^k \, e_j^k$, то $G = (\mathcal{D}\, F)^T \cdot \mathcal{D}\, F$. Следовательно, $\det G = |\det \mathcal{D}\, F|^2$, а значит, $|\det \mathcal{D}\, F| = \sqrt{\det G}$. Поэтому в силу формулы (2) и поскольку $\mu_n(K) = 1$ получаем

$$\mu_n(\Pi(e_1, \ldots, e_n)) = \sqrt{\det G}. \tag{3}$$

Если $e_1, \ldots, e_n \in \mathbb{R}^N$ при $N > n$, то паралеллепипед (1) будем называть *$n$-мерным паралеллепипедом в пространстве* $\mathbb{R}^N$, а величину (3) – его *$n$-мерным объемом.*

Пусть $(\psi, U^M)$ – карта на $M \in \mathfrak{M}_N^n$, $P \in U^M$. Пусть $V := = \psi^{-1}(U^M)$ – область параметров этой карты, $x_0 = \psi^{-1}(P)$. Обозначим $K^\delta := [0, \delta]^n = [0, \delta] \times \ldots \times [0, \delta]$. Пусть число $\delta > 0$ столь мало, что куб $x_0 + K^\delta$ содержится в $V$. Поскольку

$$\psi(x) - \psi(x_0) = d\psi(x_0)[x - x_0] + \bar{o}(|x - x_0|), \quad x \to x_0,$$

то образ $\psi(x_0 + K^\delta)$ куба $x_0 + K^\delta$ достаточно близок к его образу $d\psi(x_0)[K^\delta]$ при линейном отображении $d\psi(x_0)$, сдвинутому на вектор $P = \psi(x_0)$. Поскольку $d\psi(x_0)[K^\delta]$ – это $n$-мерный паралеллепипед, построенный на векторах $\frac{\partial \psi}{\partial x^1}\delta, \ldots, \frac{\partial \psi}{\partial x^n}\delta$, то согласно формуле (3) его $n$-мерный объем равен

$$\mu_n(d\psi(x_0)[K^\delta]) = \sqrt{\det G(P)}\ \delta^n = \sqrt{\det G(P)}\ \mu_n(K^\delta), \tag{4}$$

где $G(P) = (\mathcal{D}\psi(x_0))^T \mathcal{D}\psi(x_0)$ – матрица Грама индуцированной метрики.

Приблизим область параметров $V$ дизъюнктным объединением кубов $K_i^\delta := x_i + K^\delta$, лежащих в области параметров $V$; образы $\psi(K_i^\delta)$ этих кубов приблизим $n$-мерными паралеллепипедами $\psi(x_i) + d\psi(x_i)[K^\delta]$. Согласно формуле (4) $n$-мерный объем паралеллепипеда $\psi(x_i) + d\psi(x_i)[K^\delta]$ равен $\sqrt{\det G(P_i)}\ \mu_n(K_i^\delta)$, где $P_i = \psi(x_i)$. Поэтому суммарный $n$-мерный объем этих паралеллепипедов

$$\sum_{i=1}^{I} \mu_n\left(d\psi(x_i)[K^\delta]\right) = \sum_{i=1}^{I} \sqrt{\det G(P_i)}\ \mu_n(K_i^\delta)$$

при $\delta \to +0$ стремится к интегралу $\int\limits_V \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Эти соображения мотивируют следующее определение.

**Определение.** Пусть $(M, g)$ – риманово многообразие, $(x^1, \ldots, x^n)$ – ЛСК на $M$, $G$ – матрица Грама скалярного произведения в $T_P(M)$, заданного римановой метрикой $g$. Выражение

$$\mathrm{Vol}_g := \sqrt{\det G}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n \tag{5}$$

называется *формой риманова объема* для риманова многообразия $(M, g)$.

Для ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на ориентированном многообразии $M \in \in \mathfrak{M}^n$ определим $\mathrm{sign}(x^1, \ldots, x^n) = 1$, если ориентация ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ соответствует ориентации $M$ и $\mathrm{sign}(x^1, \ldots, x^n) = -1$, если эти ориентации различны.

**Определение.** Выражение

$$\epsilon := \mathrm{sign}(x^1, \ldots, x^n) \cdot \mathrm{Vol}_g \tag{6}$$

называется *тензором Леви-Чивиты.*

**Теорема 1.** *Пусть $(M, g)$ – ориентированное риманово многообразие. Тензор Леви-Чивиты является дифференциальной формой: $\epsilon \in \in \Omega^n(M)$, где $n$ – размерность многообразия $M$.*

**Доказательство.** Покажем, что при замене ЛСК на $M$ значение $\epsilon$ не меняется. Поскольку метрический тензор $g$ является тензорным полем типа $(0, 2)$, то его компоненты $\widetilde{g}_{ij}$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ следующим образом выражаются через его компоненты $g_{ij}$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$:

$$\widetilde{g}_{i'j'} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial x^i}{\partial \tilde{x}^{i'}}\; \frac{\partial x^j}{\partial \tilde{x}^{j'}}\; g_{ij}.$$

Так как компоненты метрического тензора являются элементами матрицы Грама, то определитель матрицы Грама $\widetilde{G}$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ выражается через определитель матрицы Грама $G$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ по формуле

$$\det \widetilde{G} = \det G \cdot \left( \frac{\partial(x^1, \ldots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)} \right)^2 .$$

Поскольку $d\tilde{x}^{i'} = \frac{\partial \tilde{x}^{i'}}{\partial x^i} dx^i$, то $d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n = \frac{\partial(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)}{\partial(x^1, \ldots, x^n)}\; dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$. Следовательно, значение $\epsilon$ в ЛСК $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$

$$\epsilon = \mathrm{sign}(\tilde{x}^1, \ldots \tilde{x}^n) \cdot \sqrt{\det \widetilde{G}}\; d\tilde{x}^1 \wedge \ldots \wedge d\tilde{x}^n =$$

$$= \operatorname{sign}(\tilde{x}^1, \dots \tilde{x}^n) \cdot \sqrt{\det G} \left| \frac{\partial(x^1, \dots, x^n)}{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)} \right| \cdot \frac{\partial(\tilde{x}^1, \dots, \tilde{x}^n)}{\partial(x^1, \dots, x^n)} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n =$$

$$= \operatorname{sign}(x^1, \dots, x^n) \cdot \sqrt{\det G} \, dx^1 \wedge \dots \wedge dx^n$$

совпадает со значением $\epsilon$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$.

Отсюда и из формул (5), (6) следует, что $\epsilon$ – полилинейная кососимметричная функция на $T_P(M) \times \dots \times T_P(M)$, т.е. является дифференциальной формой. $\square$

**Определение.** Компоненты тензора Леви-Чивиты называются *символами Леви-Чивиты* $\epsilon_{i_1 \dots i_n}$:

$$\epsilon = \epsilon_{i_1 \dots i_n} dx^{i_1} \otimes \dots \otimes dx^{i_n}, \tag{7}$$

где суммирование производится по всем наборам индексов $i_1, \dots, i_n \in \overline{1, n}$.

Получим явные выражения для символов Леви-Чивиты. Пусть ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ соответствует ориентации многообразия $M$. Сравнивая выражения (5), (6) и (7), в силу теоремы 1 § 4 главы 18 получаем

$$\epsilon_{1 \dots n} = \sqrt{\det G}.$$

Отсюда и из антисимметричности тензора Леви-Чивиты следует, что если ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ соответствует ориентации многообразия $M$, то

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n) \sqrt{\det G}, \tag{8}$$

где

$$\operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (i_1, \dots, i_n) \text{ получается из набора } (1, \dots, n) \text{ в результате четного числа транспозиций;} \\ -1, & \text{если набор } (i_1, \dots, i_n) \text{ получается из набора } (1, \dots, n) \text{ в результате нечетного числа транспозиций;} \\ 0, & \text{если набор } (i_1, \dots, i_n) \text{ не является перестановкой набора } (1, \dots, n). \end{cases}$$

Согласно формуле (6) при изменении ориентации многообразия $M$ тензор Леви-Чивиты меняет знак. Поэтому в случае, когда ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ не соответствует ориентации многообразия $M$

справедлива формула

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = -\operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n)\sqrt{\det G}.$$

**Замечание.** Если $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – правый *ортонормированный базис* пространства $T_P(M)$, т.е. ориентация ЛСК $(x^1, \dots, x^n)$ соответствует ориентации многообразия $M$ и матрица Грама $G(P)$ является единичной, то справедливо равенство

$$\epsilon_{i_1 \dots i_n} = \operatorname{sign}(i_1, \dots, i_n). \tag{9}$$

**Определение.** Пусть $G$ – матрица Грама на римановом многообразии $(M, g)$ в ЛСК $(x^1, \dots, x^n) = \psi^{-1}$, соответствующей карте $(\psi, U)$. Пусть $f \in C(M, \mathbb{R})$, $\operatorname{supp} f \subset U$. *Интегралом первого рода* функции $f$ по риманову многообразию называется интеграл Лебега функции $h := f \cdot \sqrt{\det G}$ по множеству параметров $\psi^{-1}(U)$:

$$\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g := \int\limits_{\psi^{-1}(U)} f \cdot \sqrt{\det G}\, dx. \tag{10}$$

В общем случае интеграл первого рода функции $f \in C(M, \mathbb{R})$ с компактным носителем по риманову многообразию $(M, g)$ определяется через разбиение единицы. Пусть $\{(\psi_i, U_i)\}_{i=1}^I$ – конечный набор карт, районы действия которых покрывают компакт $\operatorname{supp} f$. Пусть $\{\varrho_i\}_{i=1}^I$ – гладкое разбиение единицы, подчиненное этому покрытию. Тогда

$$\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g := \sum_{i=1}^I \int\limits_M \varrho_i f \cdot \mathrm{Vol}_g,$$

где интегралы в правой части равенства определены формулой (10), поскольку $\operatorname{supp}(\varrho_i f) \subset U_i$.

**Замечание.** Непосредственно из данного определения следует, что интеграл первого рода не зависит от ориентации многообразия $M$.

**Замечание.** Формула (10) соответствует определению интеграла от дифференциальной формы $\omega = f \cdot \epsilon$ за исключением того, что интеграл в формуле (10) не зависит от ориентации многообразия $M$, а интеграл от дифференциальной формы меняет знак при изменении ориентации $M$. Действительно, по определению 2 интеграла от дифференциальной формы в случае $\operatorname{supp} f \subset U$ имеем

$$\int_M \omega = \int_{\psi^{-1}(U)} \psi^* \omega.$$

Рассматривая карту $(\psi, U)$ на $U$ и карту $(\mathrm{Id}, V)$ на $V := \psi^{-1}(U)$, получаем, что координатное представление диффеоморфизма $\psi : V \to$ $\to U$ в этих картах $\psi^{-1} \circ \psi \circ \mathrm{Id}$ является тождественным отображением. Поэтому согласно теореме о координатном представлении обратного переноса дифференциальной формы обратный перенос дифференциальной формы $\omega = f \cdot \epsilon = f \cdot \operatorname{sign}(x^1, \ldots, x^n) \cdot \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ имеет вид

$$\psi^* \omega = f \cdot \operatorname{sign}(x^1, \ldots, x^n) \cdot \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

Если карта $(\psi, U)$ соответствует ориентации многообразия $M$, то $\operatorname{sign}(x^1, \ldots, x^n) = 1$ и согласно определению 1 интеграла от дифференциальной формы интеграл $\int\limits_V f \cdot \sqrt{\det G}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n$ совпадает с кратным интегралом $\int\limits_V f \cdot \sqrt{\det G}\, dx$, что соответствует формуле (10).

Если изменить ориентацию многообразия $M$ на противоположную, то интеграл $\int\limits_M \omega$ поменяет знак, в то время, как интеграл первого рода $\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g$ не изменится.

**Определение.** При $f = 1$ интеграл первого рода $\int\limits_M f \cdot \mathrm{Vol}_g = \int\limits_M \mathrm{Vol}_g$ называется *римановым объемом* риманова многообразия $(M, g)$. В случае, если $M$ – двумерное гладкое многообразие, то риманов объем многообразия $M$ называется *площадью поверхности* $M$.

**Замечание.** Если $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a, b]\}$ – гладкое одномерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$ с индуцированной метрикой, то риманов объем $\Gamma$ совпадает с длиной кривой $\Gamma$.

**Замечание.** Если $M$ – открытое множество в $\mathbb{R}^N$ с индуцированной метрикой, то риманов объем $M$ совпадает с мерой множества $M$.

**Пример 1.** Пусть $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a, b]\}$ – гладкое одномерное подмногообразие пространства $\mathbb{R}^N$. Тогда индуцированная метрика на

$\Gamma$ имеет вид $g = (r'(t), r'(t))\, dt^2$. Форма риманова объема равна $ds := = \mathrm{Vol}_g = |r'(t)|\, dt$. Интеграл первого рода непрерывной функции $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ по $\Gamma$ равен

$$\int\limits_{\Gamma} f\, ds = \int\limits_{[a,b]} f(r(t)) \cdot |r'(t)|\, dt.$$

**Пример 2.** Пусть $M$ – гладкое двумерное ориентированное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть $(\psi, U)$ – карта на $M$, согласованная с ориентацией $M$, $D = \psi^{-1}(U)$ – допустимая область параметров в $\mathbb{R}^2_{uv}$, пусть ориентация $D$ соответствует системе координат $(u, v)$. Тогда матрица Грама индуцированной метрики $g$ имеет вид

$$G = \begin{pmatrix} (\psi'_u, \psi'_u) & (\psi'_u, \psi'_v) \\ (\psi'_v, \psi'_u) & (\psi'_v, \psi'_v) \end{pmatrix}.$$

Следовательно, $\det G = |\psi'_u|^2 \cdot |\psi'_v|^2 - (\psi'_u, \psi'_v)^2 = |[\psi'_u, \psi'_v]|^2$. Форма риманова объема равна $dS := \mathrm{Vol}_g = |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv$. Интеграл первого рода непрерывной функции $f : M \to \mathbb{R}$ по $M$ равен

$$\int\limits_{M} f\, dS = \int\limits_{M} f \cdot \mathrm{Vol}_g = \int\limits_{D} f(\psi(u, v)) \cdot |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv. \tag{11}$$

В частности, полагая $f = 1$, получаем формулу для площади поверхности $M$:

$$\int\limits_{M} dS = \int\limits_{D} |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv.$$

**Задача 1.** Пусть $V$ – открытое множество в $\mathbb{R}^n_x$, подмногообразие $M$ пространства $\mathbb{R}^{n+1}$ является графиком гладкой функции $f : V \to \mathbb{R}$ и ориентация $M$ соответствует ориентации стандартной декартовой системы координат $(x^1, \ldots, x^n)$ в $\mathbb{R}^n_x$. Покажите, что форма риманова объема для многообразия $M$ с индуцированной метрикой $g$ имеет вид:

$$\mathrm{Vol}_g = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x^1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial f}{\partial x^n}\right)^2}\, dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^n.$$

## § 4. Свертки тензоров, опускание и поднятие индексов

**Определение.** Пусть $T$ – тензор типа $(p,q)$ на линейном $n$-мерном пространстве $V$. *Сверткой тензора* $T$ по паре индексов $(s,r)$, где $s\in\overline{1,p}$, $r\in\overline{1,q}$ называется тензор $S$ типа $(p-1,q-1)$, компоненты которого в базисе $(e_1,\ldots,e_n)$ пространства $V$ определяются формулой

$$S^{i_1\ldots i_{s-1}i_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{r-1}j_{r+1}\ldots j_q}:=T^{i_1\ldots i_{s-1}ki_{s+1}\ldots i_p}_{j_1\ldots j_{r-1}kj_{r+1}\ldots j_q},$$

где в соответствии с соглашением Эйнштейна индекс суммирования $k$ пробегает $\overline{1,n}$.

В частности, для тензора типа $(1,1)$ свертка равна сумме диагональных элементов матрицы компонент этого тензора и называется *следом тензора.*

**Определение.** *Сверткой тензорного поля* $T$ типа $(p,q)$, заданного на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$, называется тензорное поле типа $(p-1,q-1)$, значение которого в каждой точке $P\in M$ равно соответствующей свертке тензора $T(P)$.

Поскольку свертка тензора, а значит, и тензорного поля определена через его компоненты, то требуется проверить корректность данного определения, т.е. доказать следующую лемму.

**Лемма 1.** *Свертка тензорного поля типа* $(p,q)$ *является тензорным полем типа* $(p-1,q-1)$.

**Доказательство.** Пусть $M\in\mathfrak{M}^n$ и в окрестности точки $P\in M$ на $M$ заданы ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$ и $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$. Пусть $T$ – тензорное поле на $M$ типа $(p,q)$. Для упрощения обозначений будем рассматривать свертку тензоного поля $T$ по паре последних индексов $(p,q)$. Свертка по другой паре индексов рассматривается аналогично. Обозначим через $S^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}}$ результат свертки $T$ в ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$, а через $\tilde{S}^{i'_1\ldots i'_{p-1}}_{j'_1\ldots j'_{q-1}}$ результат свертки $T$ в ЛСК $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$. Тогда

$$S^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}}=T^{i_1\ldots i_{p-1}k}_{j_1\ldots j_{q-1}k},$$

$$\tilde{S}^{i'_1\ldots i'_{p-1}}_{j'_1\ldots j'_{q-1}}=\tilde{T}^{i'_1\ldots i'_{p-1}k}_{j'_1\ldots j'_{q-1}k},$$

где $T^{i_1\ldots i_{p-1}i_p}_{j_1\ldots j_{q-1}j_q}$ и $\tilde{T}^{i'_1\ldots i'_{p-1}i'_p}_{j'_1\ldots j'_{q-1}j'_q}$ – компоненты тензорного поля $T$ в ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$ и $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$ соответственно.

По правилу изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК

$$\tilde{T}^{i'_1\ldots i'_p}_{j'_1\ldots j'_q} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_p}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_q}}{\partial\tilde{x}^{j'_q}}.$$

Поэтому

$$\tilde{S}^{i'_1\ldots i'_{p-1}}_{j'_1\ldots j'_{q-1}} = T^{i_1\ldots i_p}_{j_1\ldots j_q}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}\frac{\partial\tilde{x}^{k}}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_{q-1}}}{\partial\tilde{x}^{j'_{q-1}}}\frac{\partial x^{j_q}}{\partial\tilde{x}^{k}}.$$

Поскольку $\frac{\partial\tilde{x}^k}{\partial x^{i_p}}\frac{\partial x^{j_q}}{\partial\tilde{x}^k} = \delta^{j_q}_{i_p}$, то

$$\tilde{S}^{i'_1\ldots i'_{p-1}}_{j'_1\ldots j'_{q-1}} = T^{i_1\ldots i_{p-1}k}_{j_1\ldots j_{q-1}k}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_{q-1}}}{\partial\tilde{x}^{j'_{q-1}}} =$$

$$= S^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}}\frac{\partial\tilde{x}^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\cdots\frac{\partial\tilde{x}^{i'_{p-1}}}{\partial x^{i_{p-1}}}\frac{\partial x^{j_1}}{\partial\tilde{x}^{j'_1}}\cdots\frac{\partial x^{j_{q-1}}}{\partial\tilde{x}^{j'_{q-1}}}.$$

Таким образом, функции $S^{i_1\ldots i_{p-1}}_{j_1\ldots j_{q-1}}(P)$ при замене ЛСК меняются по тензорному закону. Согласно теореме 2 § 2 главы 18 это означает, что свертка тензорного поля является тензорным полем. □

**Определение.** *Сверткой тензоров (или тензорных полей)* $T_1,\ldots,T_k$ называется свертка тензорного произведения $T_1\otimes\ldots\otimes T_k$.

**Пример 1.** Пусть $(e^1_*,\ldots,e^n_*)$ – базис пространства $V^*$, взаимный базису $(e_1,\ldots,e_n)$ пространства $V$. Разложим ковектор (линейную функцию) $l\in V^*$ и вектор $\vec{v}\in V$ по этим базисам:

$$l = l_i e^i_*,\qquad \vec{v} = \xi^i e_i.$$

Тогда значение ковектора $l$ на векторе $\vec{v}$ выражается формулой

$$l(\vec{v}\,) = l_i\xi^i$$

и является сверткой ковектора $l$ и вектора $\vec{v}$.

**Определение.** Пусть на линейном $n$-мерном пространстве $V$ задана билинейная форма $g$ (т.е. тензор типа $(0,2)$). Операция, которая каждому тензору $T$ типа $(p,q)$ ставит в соответствие тензор типа $(p-1,q+1)$, равный свертке тензоров $T$ и $g$, называется *операцией опускания индекса*.

Например, при опускании первого индекса тензора $T$ получается тензор $S$, компоненты которого выражаются через компоненты тензоров $T$ и $g$ формулой

$$S^{i_2\dots i_p}_{i_1 j_1\dots j_q} = T^{k i_2\dots i_p}_{j_1\dots j_q} g_{i_1 k},$$

где индекс суммирования $k$ пробегает $\overline{1,n}$.

Если матрица билинейной формы $g$ невырождена, то существует тензор $h$ типа $(2,0)$, компоненты которого составляют обратную матрицу к матрицы билинейной формы $g$, т.е.

$$g_{ij}h^{jk} = g_{ji}h^{kj} = \delta^k_i \qquad \forall i,k \in \overline{1,n}, \tag{1}$$

где $\delta^i_k$ – символы Кронекера. Тогда свертка тензоров $S$ и $h$ называется *операцией поднятия индекса* тензора $S$. Например, при поднятии первого индекса тензора $S$ типа $(p-1,q+1)$ получается тензор $T$ типа $(p,q)$, компоненты которого равны

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = S^{i_2\dots i_p}_{k j_1\dots j_q} h^{i_1 k}.$$

**Задача 1.** Покажите, что если выполнены соотношения (1), то операции поднятия и опускания индекса являются взаимно обратными.

**Определение.** *Контравариантным метрическим тензором* на римановом многообразии $(M,g)$, где $M \in \mathfrak{M}^n$, называется тензорное поле $g_{\text{contr}}$ типа $(2,0)$, компоненты которого $g^{ij}(P)$ являются компонентами матрицы, обратной к матрице, составленной из компонент $g_{ij}(P)$ ковариантного метрического тензора $g$.

Согласно данному определению справедливы равенства

$$g^{ij}(P)\,g_{jk}(P) = \delta^i_k \qquad \forall i,k \in \overline{1,n},$$

индекс суммирования $j$ пробегает $\overline{1,n}$.

**Лемма 2.** *Контравариантный метрический тензор на римановом многообразии* $(M,g)$ *действительно является тензорным полем типа* $(2,0)$.

**Доказательство.** Пусть $(x^1,\dots,x^n)$ и $(\tilde{x}^1,\dots,\tilde{x}^n)$ – две ЛСК на $M$. Пусть $g_{ij}$ и $\tilde{g}_{ij}$ – компоненты метрического тензора $g$ в этих ЛСК, а $g^{ij}$ и $\tilde{g}^{ij}$ – компоненты контравариантного метрического тензора

$g_{\text{contr}}$ в этих ЛСК. В соответствии с законом изменения компонент тензорного поля типа $(2,0)$ имеем

$$\tilde{g}_{ij} = g_{km} \frac{\partial x^k}{\partial \tilde{x}^i} \frac{\partial x^m}{\partial \tilde{x}^j} \tag{2}$$

Рассмотрим матрицы

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & \dots & g_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ g_{n1} & \dots & g_{nn} \end{pmatrix}, \qquad \tilde{G} = \begin{pmatrix} \tilde{g}_{11} & \dots & \tilde{g}_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \tilde{g}_{n1} & \dots & \tilde{g}_{nn} \end{pmatrix},$$

$$S = \begin{pmatrix} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^1} & \dots & \frac{\partial x^n}{\partial \tilde{x}^n} \end{pmatrix}.$$

В матричных обозначениях формула (2) принимает вид

$$\tilde{G} = S^T G S.$$

Следовательно,

$$\tilde{G}^{-1} = S^{-1} G^{-1} (S^{-1})^T.$$

Последняя формула означает, что

$$\tilde{g}^{ij} = g^{km} \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^m}.$$

Таким образом, компоненты контравариантного метрического тензора меняются по закону изменения компонент тензорного поля типа $(2,0)$. □

На римановом многообразии $(M,g)$ из тензорного поля типа $(p,q)$, то в результате опускания некоторого верхнего индекса при помощи метрического тензора $g$ получается тензорное поле типа $(p-1,q+1)$, а в результате поднятия нижнего индекса при помощи контравариантного метрического тензора $g_{\text{contr}}$ получается тензорное поле типа $(p+1,q-1)$.

**Определение.** Пусть $\vec{a}$ – векторное поле на римановом многообразии $(M,g)$. Обозначим через $\vec{a}^{\downarrow}$ дифференциальную форму степени

1 (ковекторное поле), полученную путем опускания индекса векторного поля $\vec{a}$ при помощи метрического тензора $g$. Компоненты $a_j$ ковекторного поля $\vec{a}^{\downarrow}$ в базисе $(dx^1, \ldots, dx^n)$ кокасательного пространства $T_P^*(M)$ называются ***ковариантными компонентами векторного поля*** $\vec{a}$. Они выражаются через контравариантные компоненты $a^i$ векторного поля $\vec{a}$ (т.е. координаты $\vec{a}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ касательного пространства $T_P(M)$) формулой

$$a_j = g_{ij} a^i.$$

**Определение.** Пусть $\omega \in \Omega^1(M)$ – ковекторное поле на римановом многообразии $(M, g)$. Обозначим через $\omega_{\uparrow}$ векторное поле, полученное путем поднятия индекса ковекторного поля $\omega$ при помощи контравариантного метрического тензора $g_{\mathrm{contr}}$. Компоненты $\omega^j$ векторного поля $\omega_{\uparrow}$ в базисе $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ выражаются через компоненты $\omega_i$ ковекторного поля $\omega$ в базисе $(dx^1, \ldots, dx^n)$ формулой

$$\omega^j = g^{ij} \omega_i.$$

**Замечание.** Из определения контравариантного метрического тензора следует, что операции опускания и поднятия индекса взаимно обратны, т.е. для любого векторного поля $\vec{a}$ и любого ковекторного поля $\omega$ на римановом многообразии $(M, g)$ справедливы равенства

$$(\vec{a}^{\downarrow})_{\uparrow} = \vec{a}, \qquad (\omega_{\uparrow})^{\downarrow} = \omega.$$

Отсюда и из линейности операций опускания и поднятия индекса следует, что эти операции задают изоморфизм между пространствами векторных и ковекторных полей на римановом многообразии $(M, g)$.

**Определение.** Пусть $(\Gamma, g)$ – ориентированное риманово многообразие размерности 1. ***Интегралом второго рода*** векторного поля $\vec{a}$ по $\Gamma$ называется интеграл $\int\limits_{\Gamma} \vec{a}^{\downarrow}$ от дифференциальной формы $\vec{a}^{\downarrow} \in$ $\in \Omega^1(\Gamma)$.

**Замечание.** Пусть $(M, g)$ – риманово многообразие и пусть ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на $M$ такова, что $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – ортонормированный базис в $T_P(M)$. Тогда операция поднятия индекса переводит базисные векторы $\frac{\partial}{\partial x^i}$ пространства $T_P(M)$ в базисные векторы $dx^i$ пространства $T_P^*(M)$.

## § 5. Градиент, дивергенция и ротор в $\mathbb{R}^3$

Пусть $U$ – область (открытое линейно-связное множество) в $\mathbb{R}^3$. Будем рассматривать $U$ как риманово многообразие с индуцированной метрикой $g$. В качестве ЛСК на многообразии $U \in \mathfrak{M}^3_3$ будем рассматривать стандартную декартову систему координат $(x^1, x^2, x^3) = (x, y, z)$ в $\mathbb{R}^3$.

Тогда матрица Грама на римановом многообразии $(U, g)$ является единичной матрицей и ее элементы $g_{ij}$ совпадают с символами Кронекера: $g_{ij} = \delta_{ij}$.

При этом коваринтные компоненты любого векторного поля $\vec{a} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ совпадают с его контравариантными компонентами:

$$a_i = g_{ij} a^j = \delta_{ij} a^j = a^i.$$

В частности, совпадают ковариантные и контраваринатные компоненты векторного поля радиус-векторов $\vec{r} = x^i \frac{\partial}{\partial x^i}$: $\quad x_i = x^i$.

Согласно формуле (9) § 3 символы Леви-Чивиты имеют вид:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (i,j,k) \text{ получается из набора } (1,2,3) \text{ в результате циклической перестановки;} \\ -1, & \text{если набор } (i,j,k) \text{ получается из набора } (1,2,3) \text{ в результате нециклической перестановки;} \\ 0, & \text{если набор } (i,j,k) \text{ не является перестановкой набора } (1,2,3). \end{cases}$$

Имея в виду изоморфизм касательного пространства $T_P(U)$ и геометрического касательного пространства $\widetilde{T}_P(U) = \mathbb{R}^3$, будем отождествлять векторное поле $\vec{a} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ и вектор-функцию $\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$. Наряду со *скалярным произведением векторных полей* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = g[\vec{a}, \vec{b}] = a^i g_{ij} b^j = a^i \delta_{ij} b^j = a^i b_i = a_i b^i$$

определим *смешанное произведение векторных полей* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ и $\vec{c} = \begin{pmatrix} c^1 \\ c^2 \\ c^3 \end{pmatrix}$:

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \epsilon_{ijk} a^i b^j c^k \tag{1}$$

и *векторное произведение векторных полей* $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$ и $\vec{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix}$ как векторное поле $[\vec{a} \times \vec{b}]$, ковариантные компоненты которого определяются формулами

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = \epsilon_{ijk} a^j b^k. \tag{2}$$

**Замечание.** Данные определения смешанного и векторного произведений соответствуют стандартным определениям этих понятий в $\mathbb{R}^3$. Действительно, рассмотрим стандартный базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ в $\mathbb{R}^3$, где $\vec{e}_i = \begin{pmatrix} \delta_i^1 \\ \delta_i^2 \\ \delta_i^3 \end{pmatrix}$. Поскольку этот базис является правым ортонормированным базисом, то смешанное произведение $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ равно 1. Отсюда и из свойства кососимметричности смешанного произведения следует, что

$$(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}_k) = \epsilon_{ijk} \quad \forall i, j, k \in \{1, 2, 3\}.$$

Используя свойство линейности смешанного произведения по каждому вектору и равенства $\vec{a} = a^i \vec{e}_i$, $\vec{b} = b^i \vec{e}_i$, $\vec{c} = c^i \vec{e}_i$, получаем равенство (1).

Поскольку $(\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{c}, [\vec{a} \times \vec{b}])$, то, подставляя в эту формулу $\vec{c} = \vec{e}_i$, получаем

$$(\vec{e}_i, \vec{a}, \vec{b}) = (\vec{e}_i, [\vec{a} \times \vec{b}]) = \delta_i^j [\vec{a} \times \vec{b}]_j = [\vec{a} \times \vec{b}]_i.$$

Отсюда и из формулы (1) следует, что

$$[\vec{a} \times \vec{b}]_i = (\vec{e}_i, \vec{a}, \vec{b}) = \epsilon_{ljk} \delta_i^l a^j b^k = \epsilon_{ijk} a^j b^k,$$

т.е. равенство (2).

**Определение.** *Градиентом* $C^1$-гладкого скалярного поля $\varphi$ в области $U$ называется векторное поле, ковариантные компоненты которого определяются формулами

$$(\operatorname{grad}\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \qquad i \in \{1,2,3\}.$$

**Определение.** *Дивергенцией* $C^1$-гладкого векторного поля $\vec{a}$ в области $U$ называется скалярное поле

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i},$$

где в соответствии с соглашением Эйнштейна подразумевается суммирование по $i \in \{1,2,3\}$.

**Определение.** *Ротором (вихрем)* $C^1$-гладкого векторного поля $\vec{a}$ в области $U$ называется векторное поле $\operatorname{rot}\vec{a}$, ковариантные компоненты которого определяются формулами

$$(\operatorname{rot}\vec{a}\,)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial a^k}{\partial x_j}, \qquad i \in \{1,2,3\},$$

где в соответствии с соглашением Эйнштейна подразумевается суммирование по $j,k \in \{1,2,3\}$.

Иными словами, ротором векторного поля $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ является векторное поле

$$\operatorname{rot}\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

**Лемма 1.** *Пусть заданы $C^1$-гладкие скалярные поля $\varphi$, $\psi$ и векторное поле $\vec{a}$ в области $U$. Тогда*

(1). $\operatorname{grad}(\varphi\psi) = \varphi\operatorname{grad}\psi + \psi\operatorname{grad}\varphi$;

(2). $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a}\,)$;

(3). $\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}\,) = \varphi\operatorname{rot}\vec{a} + [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}\,]$.

**Доказательство.** Используя правило Лейбница для производной произведения двух скалярных функций, получаем:

(1). $(\operatorname{grad}(\varphi\psi))_i = \frac{\partial(\varphi\psi)}{\partial x^i} = \varphi\frac{\partial\psi}{\partial x^i} + \psi\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$;

(2). $\operatorname{div}(\varphi\vec{a}) = \frac{\partial(\varphi a^i)}{\partial x^i} = \varphi\frac{\partial a^i}{\partial x^i} + a^i\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \varphi\operatorname{div}\vec{a} + (\operatorname{grad}\varphi, \vec{a})$;

(3). $(\operatorname{rot}(\varphi\vec{a}))_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial(\varphi a^k)}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\varphi\frac{\partial a^k}{\partial x_j} + \epsilon_{ijk}\frac{\partial\varphi}{\partial x_j}a^k = \varphi(\operatorname{rot}\vec{a})_i +$ $+ [\operatorname{grad}\varphi \times \vec{a}]_i$. □

**Лемма 2.** *Пусть заданы $C^2$-гладкие скалярное поле $\varphi$ и векторное поле $\vec{a}$ в области $U$. Тогда*

(1). $\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \overline{0}$*;*

(2). $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0$*;*

(3). $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \Delta\varphi$*, где* $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ – оператор Лапласа.

**Доказательство.** (1). $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\operatorname{grad}\varphi)^k =$ $= \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} = -\epsilon_{ikj}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_k\partial x_j}$, где последнее равенство справедливо в силу косимметричности символов Леви-Чивиты и независимости частных производных от порядка дифференцирования. Переобозначая индексы суммирования $j \leftrightarrow k$, получаем $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i =$ $= -\epsilon_{ijk}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_j\partial x_k} = -(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i$. Следовательно, $(\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi)_i = 0$ для любого $i \in \{1, 2, 3\}$.

(2). $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = \frac{\partial}{\partial x_i}(\operatorname{rot}\vec{a})_i = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\epsilon_{ijk}\frac{\partial a^j}{\partial x_k}\right) = \epsilon_{ijk}\frac{\partial^2 a^j}{\partial x_i\partial x_k}$. Повторяя рассуждения предыдущего пункта, приходим к равенству $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} =$ $= 0$.

(3). $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = \frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i} = \sum\limits_{i=1}^{3}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi$. □

**Лемма 3.**

$$(1).\quad \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} = \begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} \qquad \forall i,j,k,l,m,n \in \{1,2,3\};$$

$$(2).\quad \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl} \qquad \forall i,j,l,m \in \{1,2,3\};$$

$$(3).\quad \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk} = 2\delta_{il} \qquad \forall i,j \in \{1,2,3\};$$

$$(4).\quad \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk} = 6.$$

**Доказательство.** (1). Заметим, что определитель произвольной матрицы $3 \times 3$ следующим образом выражается через символ Леви-Чивиты

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \varepsilon^{pqr} a_p b_q c_r,$$

где $\varepsilon^{pqr} = \varepsilon_{pqr}$. Поскольку при перестановке двух строк определитель матрицы меняет знак, то для любой матрицы $3\times 3$ и для любых индексов $i, j, k \in \{1,2,3\}$ справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}.$$

Поэтому

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_j & b_j & c_j \\ a_k & b_k & c_k \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{pqr} a_p b_q c_r.$$

Подставляя в эту формулу $a_s = \delta_{sl}$, $b_s = \delta_{sm}$, $c_s = \delta_{sn}$, где $s \in \in \{1,2,3\}$, получаем

$$\begin{vmatrix} \delta_{il} & \delta_{im} & \delta_{in} \\ \delta_{jl} & \delta_{jm} & \delta_{jn} \\ \delta_{kl} & \delta_{km} & \delta_{kn} \end{vmatrix} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon^{pqr}\delta_{pl}\delta_{qm}\delta_{rn} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn}.$$

(2). Согласно пункту (1) имеем

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmn} \quad = \quad & \delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kn} + \delta_{im}\delta_{jn}\delta_{kl} + \delta_{in}\delta_{jl}\delta_{km} - \\ & -\delta_{il}\delta_{jn}\delta_{km} - \delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kn} - \delta_{in}\delta_{jm}\delta_{kl}. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lmk} &= \sum_{k=1}^{3}\Big(\delta_{il}\delta_{jm}\delta_{kk}+\delta_{im}\delta_{jk}\delta_{kl}+\delta_{ik}\delta_{jl}\delta_{km}-\\ &\quad -\delta_{il}\delta_{jk}\delta_{km}-\delta_{im}\delta_{jl}\delta_{kk}-\delta_{ik}\delta_{jm}\delta_{kl}\Big)=\\ &= 3\delta_{il}\delta_{jm}+\delta_{im}\delta_{jl}+\delta_{im}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jm}-3\delta_{im}\delta_{jl}-\delta_{il}\delta_{jm}=\\ &= \delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}.\end{aligned}$$

(3). Используя пункт (2), получаем

$$\sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ljk}=\sum_{j=1}^{3}\Big(\delta_{il}\delta_{jj}-\delta_{ij}\delta_{jl}\Big)=2\delta_{il}.$$

(4). Используя пункт (3), получаем $\sum\limits_{i=1}^{3}\sum\limits_{j=1}^{3}\sum\limits_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ijk}=2\sum\limits_{i=1}^{3}\delta_{ii}=$ $=6.$ □

**Пример 1.** Пусть $\vec{r}=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ – векторное поле радиус-вектора, $\vec{\omega}=\begin{pmatrix}\omega^1\\\omega^2\\\omega^3\end{pmatrix}$ – постоянный вектор. Найти $\operatorname{rot}[\vec{\omega}\times\vec{r}]$.

**Решение.** Так как $[\vec{\omega}\times\vec{r}]_s=\epsilon_{slm}\omega^l x^m$, то для любого $i\in\{1,2,3\}$ имеем

$$(\operatorname{rot}[\vec{\omega}\times\vec{r}])_i=\epsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{\omega}\times\vec{r}]^k=\epsilon_{ijk}\delta^{sk}\frac{\partial}{\partial x_j}[\vec{\omega}\times\vec{r}]_s=$$

$$=\epsilon_{ijk}\delta^{sk}\epsilon_{slm}\omega^l\frac{\partial x^m}{\partial x_j}=\epsilon_{ijk}\epsilon_{lms}\delta^{sk}\delta^{mj}\omega^l=\left(\sum_{k=1}^{3}\sum_{j=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{ljk}\right)\omega^l.$$

Применяя пункт (3) леммы 3, получаем

$$(\operatorname{rot}[\vec{\omega}\times\vec{r}])_i=2\delta_{il}\omega^l=2\omega_i\quad\forall i\in\{1,2,3\}.$$

Поэтому $\operatorname{rot}[\vec{\omega}\times\vec{r}]=2\vec{\omega}$. □

**Замечание.** Пример 1 показывает, что ротор поля скоростей $\vec{v}=$ $=[\vec{\omega}\times\vec{r}]$ тела, вращающегося с постоянной угловой скоростью $\vec{\omega}$, равен $2\vec{\omega}$ в каждой точке этого тела.

**Пример 2.** Доказать тождество для $C^2$-гладкого векторного поля $\vec{a}$:

$$\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta\vec{a}.$$

**Решение.** Так как ковариантные компоненты векторного поля $\vec{b} = \operatorname{rot}\vec{a}$ определяются формулами $b_l = \epsilon_{lmn}\frac{\partial a^n}{\partial x_m}$, то

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})_i = (\operatorname{rot}\vec{b})_i = \epsilon_{ijk}\frac{\partial b^k}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\frac{\partial b_l}{\partial x_j} = \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\epsilon_{lmn}\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m} =$$

$$= \epsilon_{ijk}\delta^{kl}\epsilon_{mnl}\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m} = \left(\sum_{k=1}^{3}\epsilon_{ijk}\epsilon_{mnk}\right)\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m}.$$

Согласно пункту (2) леммы 3 получаем

$$(\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{a})_i = (\delta_{im}\delta_{jn} - \delta_{in}\delta_{jm})\frac{\partial^2 a^n}{\partial x_j \partial x_m} = \frac{\partial^2 a_j}{\partial x_j \partial x^i} - \delta_{jm}\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_m} =$$

$$= \frac{\partial}{\partial x^i}\ \frac{\partial a_j}{\partial x_j} - \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j^2} = \frac{\partial}{\partial x^i}\operatorname{div}\vec{a} - \Delta a_i = (\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{a})_i - (\Delta\vec{a})_i.$$

$\square$

**Определение.** Оператором $\nabla$ (набла) называется следующий векторный оператор

$$\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x^1} \\ \frac{\partial}{\partial x^2} \\ \frac{\partial}{\partial x^3} \end{pmatrix}.$$

Далее мы увидим, что градиент, дивергенцию, ротор и производную по вектору можно выразить, используя векторные операции с оператором $\nabla$.

**Определение.** (Операции с вектором $\nabla$.) Пусть в области $G$ заданы $C^1$-гладкие скалярное поле $\varphi$ и векторное поле $\vec{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$.

Определим

- произведение вектора $\nabla$ на скаляр $\varphi$: $(\nabla\varphi)_i = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$;
- скалярное произведение векторов $\nabla$ и $\vec{a}$: $(\nabla, \vec{a}\,) = \frac{\partial a^i}{\partial x^i}$;
- векторное произведение векторов $\nabla$ и $\vec{a}$: $[\nabla \times \vec{a}\,]_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a^k}{\partial x_j}$,

где $(\nabla\varphi)_i$ и $[\nabla \times \vec{a}\,]_i$ – ковариантные компоненты векторов $\nabla\varphi$ и $[\nabla \times \vec{a}\,]$ соответственно.

**Замечание.** Данные выше определения могут быть получены формальной подстановкой компонет $\frac{\partial}{\partial x^i}$ вектора $\nabla$ вместо ковариантных компонент $b_i$ вектора $\vec{b} \in \mathbb{R}^3$ в известные формулы

$$(\vec{b}\varphi)_i = b_i\varphi, \qquad (\vec{b}, \vec{a}\,) = b_i a^i, \qquad [\vec{b} \times \vec{a}\,]_i = \varepsilon_{ijk} b^j a^k$$

за исключением того, что компоненты вектора $\nabla$ нельзя переставлять с другими сомножителями. Последнее обстоятельство связано с тем, что оператор $\nabla$ и его компоненты действуют на функции, стоящие от них справа и не действуют на функции, стоящие от них слева (здесь имеются в виду функции, которые входят как сомножители в произведение, содержащее оператор $\nabla$ или его компоненты).

Сравнивая определения градиента, дивергенции и ротора с определением операций с вектором $\nabla$, получаем

$$\nabla\varphi = \operatorname{grad}\varphi, \qquad (\nabla, \vec{a}\,) = \operatorname{div}\vec{a}, \qquad [\nabla \times \vec{a}\,] = \operatorname{rot}\vec{a}.$$

## § 6. Поток векторного поля через поверхность

**Определение.** Пусть $S$ – компактное гладкое двумерное ориентированное подмногообразие евклидова пространства $\mathbb{R}^3_{xyz}$. Пусть для любой точки $p \in S$ вектор $\vec{\vartheta}(p)$ является единичным вектором нормали к $S$ в точке $p$, согласованным с ориентацией $S$. Пусть $dS = \mathrm{Vol}_g$ – форма риманова объема, индуцированной метрики на $S$. Пусть вектор-функция $\vec{a} : S \to \mathbb{R}^3_{xyz}$ непрерывна. Интеграл первого рода скалярного произведения $(\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)$

$$\int\limits_S (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS$$

называется *потоком* векторного поля $\vec{a}$ через поверхность $S \in \mathfrak{M}^2_3$.

**Теорема 1.** *Пусть в обозначениях предыдущего определения* $\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$. *Тогда поток* $\int\limits_S (\vec{a}, \vec{\vartheta})\, dS$ *равен интегралу по* $S$ *от дифференциальной формы* $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$:

$$\int\limits_S (\vec{a}, \vec{\vartheta})\, dS = \int\limits_S \omega. \tag{1}$$

**Доказательство.** В силу теоремы о разбиении единицы на многообразии достаточно рассмотреть случай, когда носитель $\operatorname{supp} \omega$ содержится в районе действия одной карты $(\psi, U)$ на $S$: $\operatorname{supp} \omega \subset U$. Пусть $D = \psi^{-1}(U) \subset \mathbb{R}^2_{uv}$,

$$\psi(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}, \qquad (u,v) \in D.$$

Будем считать, что карта $(\psi, U)$ согласована с ориентацией $S$. Тогда $\vec{\vartheta} = \frac{[\psi'_u, \psi'_v]}{|[\psi'_u, \psi'_v]|}$.

В силу формулы (9) § 9 главы 18

$$\int\limits_S \omega = \int\limits_D \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix} du \wedge dv =$$

$$= \int\limits_D (\vec{a}, [\psi'_u, \psi'_v])\, du \wedge dv = \int\limits_D (\vec{a}, \vec{\vartheta}) \cdot |[\psi'_u, \psi'_v]|\, du \wedge dv.$$

Используя равенство (11) § 3, получаем равенство (1). □

**Теорема 2.** (Теорема Гаусса–Остроградского.) *Пусть* $G \in \mathfrak{M}^3_3$ *– гладкое компактное трехмерное подмногообразие пространства* $\mathbb{R}^3_{xyz}$, *ориентированное стандартной декартовой системой координат в* $\mathbb{R}^3_{xyz}$. *Пусть в области* $U \subset \mathbb{R}^3_{xyz}$, *содержащей* $G$, *задано* $C^1$-*гладкое векторное поле* $\vec{a}$. *Тогда поток векторного поля* $\vec{a}$ *через поверхность* $\partial G$, *ориентированную полем внешних по отношению к* $G$ *единичных нормалей* $\vec{\vartheta}$ *совпадает с интегралом скалярного поля* $\operatorname{div} \vec{a}$ *по многообразию* $G$:

$$\int\limits_{\partial G} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS = \int\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a}\, dV,$$

*где* $dV = dx \wedge dy \wedge dz$ *– форма объема в* $\mathbb{R}^3_{xyz}$.

**Доказательство.** Обозначим компоненты векторного поля $\vec{a}$ через $P, Q, R$: $\quad \vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$. Применяя формулу Стокса к дифференциальной форме

$$\omega = P\, dy \wedge dz + Q\, dz \wedge dx + R\, dx \wedge dy,$$

получаем формулу

$$\int\limits_{\partial G} \omega = \int\limits_{G} d\omega = \int\limits_{G} \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \int\limits_{G} \operatorname{div} \vec{a}\, dV.$$

Отсюда и из теоремы 1 вытекает доказываемое равенство. □

**Теорема 3.** (Теорема Стокса в узком смысле.) *Пусть $U$ – область в $\mathbb{R}^3_{xyz}$, содержащяя гладкое компактное двумерное ориентированное многообразие $S \in \mathfrak{M}^2_3$. Пусть в области $U$ задано $C^1$-гладкое векторное поле $\vec{a}$. Пусть ориентация края $\partial S$ согласована с ориентацией $S$ по правилу «правой руки». Тогда интеграл второго рода векторного поля $\vec{a}$ по краю $\partial S$ равен потоку векторного поля* $\operatorname{rot} \vec{a}$ *через поверхность $S$:*

$$\int\limits_{\partial S} \vec{a}^{\downarrow} = \int\limits_{S} (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS.$$

**Доказательство.** Пусть $\vec{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix}$. Поскольку внешний дифференциал дифференциальной формы $\omega = \vec{a}^{\downarrow} = P\, dx + Q\, dy + R\, dz$ равен

$$d\omega = b^1\, dy \wedge dz + b^2\, dz \wedge dx + b^3\, dx \wedge dy,$$

где $\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a}$, то в силу формулы Стокса и теоремы 1 имеем

$$\int\limits_{\partial S} \vec{a}^{\downarrow} = \int\limits_{\partial S} \omega = \int\limits_{S} d\omega = \int\limits_{S} b^1\, dy \wedge dz + b^2\, dz \wedge dx + b^3\, dx \wedge dy =$$

$$= \int\limits_{S} (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS.$$

□

## § 7. Геометрический смысл дивергенции и ротора

**Теорема 1.** (Геометрическое определение дивергенции.) *Пусть в окрестности $U(p_0)$ точки $p_0 \in \mathbb{R}^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{a} : U(p_0) \to \mathbb{R}^3$. Тогда*

$$\operatorname{div} \vec{a}(p_0) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\mu_\delta} \int\limits_{S_\delta} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS,$$

*где $S_\delta$ – сфера радиуса $\delta$ с центром в точке $p_0$, $\vec{\vartheta} = \vec{\vartheta}(p)$ – единичный вектор внешней нормали к сфере $S_\delta$ в точке $p \in S_\delta$, $\mu_\delta = \mu(U_\delta(p_0)) = \frac{4}{3}\pi\delta^3$ – объем шара $U_\delta(p_0)$, $dS$ – форма риманова объема на $S_\delta$.*

**Доказательство.** Выберем достаточно малое число $\delta > 0$ так, чтобы $U_\delta(p_0) \subset U(p_0)$. В силу теоремы Гаусса–Остроградского имеем

$$\int\limits_{U_\delta(p_0)} \operatorname{div} \vec{a}\; dx \wedge dy \wedge dz = \int\limits_{S_\delta} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS, \tag{1}$$

где последнее равенство следует из теоремы 1 § 3.

Поскольку вектор-функция $\vec{a}$ непрерывно дифференцируема, то

$$\varepsilon(\delta) := \sup_{p \in U_\delta(p_0)} |\operatorname{div} \vec{a}(p) - \operatorname{div} \vec{a}(p_0)| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно,

$$\left| \int\limits_{U_\delta(p_0)} \operatorname{div} \vec{a}(p)\; dx \wedge dy \wedge dz - \mu_\delta \cdot \operatorname{div} \vec{a}(p_0) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{U_\delta(p_0)} (\operatorname{div} \vec{a}(p) - \operatorname{div} \vec{a}(p_0))\; dx \wedge dy \wedge dz \right| \leq$$

$$\leq \int\limits_{U_\delta(p_0)} \varepsilon(\delta)\, dx \wedge dy \wedge dz = \mu_\delta \cdot \varepsilon(\delta).$$

Используя равенство (1), получаем

$$\left| \frac{1}{\mu_\delta} \int\limits_{S_\delta} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS - \operatorname{div} \vec{a}(p_0) \right| \leq \varepsilon(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

$\square$

**Теорема 2.** (Геометрическое определение ротора.) *Пусть в окрестности $U(p_0)$ точки $p_0 \in \mathbb{R}^3$ задана непрерывно дифференцируемая вектор-функция $\vec{a} : U(p_0) \to \mathbb{R}^3$. Тогда для любого единичного вектора $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$*

$$(\operatorname{rot} \vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,) = \lim_{\delta \to +0} \frac{1}{\pi \delta^2} \int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow},$$

*где $S_\delta$ – круг радиуса $\delta$ с центром в точке $p_0$, лежащий в плоскости, перпендикулярной вектору $\vec{\vartheta}$, $\partial S_\delta$ – край круга $S_\delta$, ориентированный согласованно с направлением вектора $\vec{\vartheta}$ по правилу «правой руки».*

**Доказательство.** Выберем достаточно малое число $\delta > 0$ так, чтобы $U_\delta(p_0) \subset U(p_0)$. В силу формулы Стокса в узком смысле

$$\int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow} = \int\limits_{S_\delta} (\operatorname{rot} \vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\, dS, \tag{2}$$

где последнее равенство следует из теоремы 1 § 3.

Поскольку вектор-функция $\vec{a}$ непрерывно дифференцируема, то

$$\varepsilon(\delta) := \sup_{p \in U_\delta(p_0)} |(\operatorname{rot} \vec{a}(p), \vec{\vartheta}\,) - (\operatorname{rot} \vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

Следовательно,

$$\left| \int\limits_{S_\delta} (\operatorname{rot} \vec{a}(p), \vec{\vartheta}\,)\, dS - \int\limits_{S_\delta} (\operatorname{rot} \vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)\, dS \right| \leq \int\limits_{S_\delta} \varepsilon(\delta)\, dS = \pi \delta^2 \varepsilon(\delta),$$

то есть, согласно равенству (2)

$$\left|\int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow} - \pi\delta^2 \cdot (\operatorname{rot}\vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)\right| \leq \pi\delta^2\varepsilon(\delta).$$

Поэтому

$$\left|\frac{1}{\pi\delta^2}\int\limits_{\partial S_\delta} \vec{a}^{\downarrow} - (\operatorname{rot}\vec{a}(p_0), \vec{\vartheta}\,)\right| \leq \varepsilon(\delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to +0.$$

□

## § 8. Скалярный и векторный потенциалы векторного поля

В этом параграфе $U$ – область в $\mathbb{R}^3_{xyz}$.

**Определение.** Скалярное поле $\varphi$ называется *скалярным потенциалом* векторного поля $\vec{a}$ в области $U$, если в области $U$ справедливо равенство

$$\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi.$$

Как обычно, имея в виду изоморфизм касательного пространства $T_P(U)$ и геометрического касательного пространства $\widetilde{T}_P(U) = \mathbb{R}^3$, будем отождествлять векторное поле $\vec{a} = a^i\frac{\partial}{\partial x^i}$ и вектор-функцию $\begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \\ a^3 \end{pmatrix}$.

**Замечание.** Скалярное поле $\varphi$ является скалярным потенциалом векторного поля $\vec{a}$ в области $U$ тогда и только тогда, когда $\varphi$ является скалярным потенциалом ковекторного поля $\vec{a}^{\downarrow}$, т.е. $\vec{a}^{\downarrow} = d\varphi$ в области $U$. Это следует из того, что согласно определению градиента равенство $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$ эквивалентно равенству $\vec{a} = \begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix}$, которое в свою очередь эквивалентно равенству

$$\vec{a}^{\downarrow} = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}dz,$$

т.е. $\vec{a}^{\downarrow} = d\varphi$.

**Определение.** Векторное поле $\vec{a}$ называется *безвихревым* в области $U$, если $\operatorname{rot}\vec{a} = \overline{0}$ в $U$.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы $C^1$-гладкое векторное поле $\vec{a}$ имело скалярный потенциал в области $U$ необходимо, а в случае стягиваемости области $U$ и достаточно, чтобы поле $\vec{a}$ было безвихревым в области $U$.*

**Доказательство.** Необходимость. Пусть векторное поле $\vec{a}$ имеет скалярный потенциал $\varphi$ в области $U$, т.е. $\vec{a} = \operatorname{grad}\varphi$. Тогда согласно лемме 2 § 5 в области $U$ имеем $\operatorname{rot}\vec{a} = \operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi = \overline{0}$.

Достаточность. Пусть $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ – безвихревое векторное поле в стягиваемой области $U$. Тогда внешний дифференциал дифференциальной формы $\omega = \vec{a}^{\downarrow} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz$ равен

$$d\omega = b^1\,dy \wedge dz + b^2\,dz \wedge dx + b^3\,dx \wedge dy,$$

где $\begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ b^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}\vec{a} = \overline{0}$. Поэтому дифференциальная форма $\omega$ замкнута в области $U$. В силу леммы Пуанкаре $\omega$ точна в $U$, т.е. ковекторное поле $\omega = \vec{a}^{\downarrow}$ имеет скалярный потенциал в $U$, а значит, векторное поле $\vec{a}$ имеет скалярный потенциал в области $U$. $\square$

**Замечание.** В общем случае из безвихревости векторного поля $\vec{a}$ в области $U$ не следует существование скалярного потенциала поля $\vec{a}$ в $U$. Действительно, рассмотрим *магнитное поле прямого провода с током*, расположенного на оси $Oz$:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{y}{x^2+y^2} \\ \frac{x}{x^2+y^2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Прямые вычисления показывают, что $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$ в области $U = \mathbb{R}^3_{xyz} \setminus \{(0,0,z): \ z \in \mathbb{R}\}$, т.е. дифференциальная форма

$$\vec{a}^{\downarrow} = \frac{x\,dy - y\,dx}{x^2 + y^2}$$

замкнута в области $U$. Рассмотрим замкнутую кривую $S^1 = \{(\cos t, \sin t, 0) : \ t \in [0, 2\pi)\} \subset U$. Используя формулу вычисления криволинейного интеграла, получаем

$$\int\limits_{S^1} \omega = \int\limits_0^{2\pi} dt = 2\pi \neq 0.$$

Поэтому согласно теореме 1 § 12 дифференциальная форма $\omega$ не является точной в области $U$, т.е. векторное поле $\vec{a}$ не имеет скалярного потенциала в $U$.

**Определение.** Векторное поле $\vec{b}$ называется *векторным потенциалом* векторного поля $\vec{a}$ в области $U$, если в области $U$ справедливо равенство

$$\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}.$$

**Определение.** Векторное поле $\vec{a}$ называется *бездивергентным* в области $U$, если $\operatorname{div} \vec{a} = \overline{0}$ в $U$.

**Теорема 2.** *Для того, чтобы $C^1$-гладкое векторное поле $\vec{a}$ имело векторный потенциал в области $U$ необходимо, а в случае стягиваемости области $U$ и достаточно, чтобы поле $\vec{a}$ было бездивергентным в области $U$.*

**Доказательство.** Необходимость. Пусть векторное поле $\vec{a}$ имеет векторный потенциал $\vec{b}$ в области $U$, т.е. $\vec{a} = \operatorname{rot} \vec{b}$. Тогда согласно лемме 2 § 5 в области $U$ имеем $\operatorname{div} \vec{a} = \operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{b} = 0$.

Достаточность. Пусть $\vec{a} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ – бездивергентное векторное поле в стягиваемой области $U$.

Тогда внешний дифференциал дифференциальной формы $\omega = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy$ равен

$$d\omega = \left( \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \wedge dy \wedge dz = \operatorname{div} \vec{a}\, dx \wedge dy \wedge dz = 0.$$

Поэтому дифференциальная форма $\omega$ замкнута в области $U$. В силу леммы Пуанкаре $\omega$ точна в $U$, т.е. существует дифференциальная форма $\beta = b^1\,dx + b^2\,dy + b^3\,dz$ такая, что $\omega = d\beta$ в области $U$, т.е. в области $U$ справедливо равенство

$$\omega = \left(\frac{\partial b^3}{\partial y} - \frac{\partial b^2}{\partial z}\right) dy\wedge dz + \left(\frac{\partial b^1}{\partial z} - \frac{\partial b^3}{\partial x}\right) dz\wedge dx + \left(\frac{\partial b^2}{\partial x} - \frac{\partial b^1}{\partial y}\right) dx\wedge dy,$$

которое можно записать в виде $\vec{a} = \operatorname{rot}\vec{b}$, где $\vec{b} = \beta_{\uparrow}$. □

**Замечание.** В общем случае из бездивергентности векторного поля $\vec{a}$ в области $U$ не следует существование векторного потенциала поля $\vec{a}$ в $U$. Действительно, рассмотрим *электрическое поле точечного заряда*, находящегося в начале координат

$$\vec{a} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|^3}, \quad \text{где} \quad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

в области $U = \mathbb{R}^3 \setminus \{\vec{0}\}$. Прямые вычисления показывают, что поле $\vec{a}$ бездиверегентно в области $U$.

Предположим, что векторное поле $\vec{a}$ имеет векторный потенциал $\vec{b}$ в области $U$. Вычислим поток поля $\vec{a}$ через сферу $S^2 = \{(x, y, z) : x^2+y^2+z^2 = 1\} \subset U$, ориентированную полем внешних нормалей $\vec{\vartheta} = \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$. Поскольку на сфере $S^2$ скалярное произведение $(\vec{a}, \vec{\vartheta})$ равно 1, то поток $\int\limits_{S^2} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\,dS$ равен площади сферы, т.е. $4\pi$. С другой стороны, в силу теоремы Стокса в узком смысле

$$\int\limits_{S^2} (\operatorname{rot}\vec{b}, \vec{\vartheta}\,)\,dS = \int\limits_{\partial S^2} \vec{b}^{\downarrow} = 0,$$

поскольку сфера $S^2$ не имеет края. Следовательно,

$$4\pi = \int\limits_{S^2} (\vec{a}, \vec{\vartheta}\,)\,dS = \int\limits_{S^2} (\operatorname{rot}\vec{b}, \vec{\vartheta}\,)\,dS = 0.$$

Полученное противоречие показывает, что поле $\vec{a}$ не имеет векторного потенциала в области $U$.

▷

## § 9. Звездочка Ходжа

**Определение.** Пусть $(M, g)$ – риманово многообразие размерности $n$. *Звездочкой Ходжа* называется оператор, который дифференциальной форме $\omega \in \Omega^k(M)$ ставит в соответствие дифференциальную форму $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$ по формуле

$$(*\omega)_{i_{k+1}\ldots i_n} = \frac{1}{k!}\epsilon_{i_1\ldots i_k i_{k+1}\ldots i_n}\ \omega^{i_1\ldots i_k},$$

где $\omega^{i_1\ldots i_k}$ – компоненты тензора $\omega_\uparrow$ типа $(k, 0)$, полученного путем поднятия всех индексов дифференциальной формы $\omega$ при помощи метрического контравариантного тензора $g$:

$$\omega^{i_1\ldots i_k} = \omega_{j_1\ldots j_k} g^{i_1 j_1} \ldots g^{i_k j_k}.$$

Таким образом, звездочка Ходжа определяется через свертку тензорного поля, полученного путем поднятия индексов у исходной дифференциальной формы с тензором Леви-Чивиты.

**Замечание.** Поскольку свертка тензоров является тензором соответствующего типа, то значение $*\omega$ в точке является тензором типа $(0, n - k)$. Из кососимметричности тезора Леви-Чивиты следует кососимметричность тензора $*\omega$. Легко видеть, что для гладкой дифференциальной формы $\omega$ коэффициенты $(*\omega)_{i_{k+1}\ldots i_n}$ являются гладкими функциями. Поэтому звездочка Ходжа действительно переводит дифференциальную форму $\omega \in \Omega^k(M)$ в дифференциальную форму $*\omega \in \Omega^{n-k}(M)$.

**Замечание.** Непосредственно из определения следует, что звездочка Ходжа обладает следующим свойством линейности. Для любых дифференциальных форм $\omega_1, \omega_2 \in \Omega^k(M)$ и для любых функций $\alpha_1, \alpha_2 \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ справедливо равенство

$$*(\alpha_1\omega_1 + \alpha_2\omega_2) = \alpha_1(*\omega_1) + \alpha_2(*\omega_2). \tag{1}$$

**Лемма 1.** *Пусть $(M, g)$ – ориентированное риманово многообразие и пусть ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на $M$ такова, что $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ – правый ортонормированный базис в $T_P(M)$. Тогда*

*(1) для дифференциальной формы $\omega = dx^1 \wedge \ldots \wedge dx^k$ справедливо равенство*

$$*\omega = dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n,$$

*(2) если набор $(i_1, \ldots, i_n)$ получен перестановкой набора $(1, \ldots, n)$, то для дифференциальной формы $\omega = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_k}$ справедливо равенство*

$$*\omega = \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n) \cdot dx^{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}. \tag{2}$$

**Доказательство.** (1). В силу замечания § 3 символы Леви-Чивиты для ортонормированного базиса имеют вид $\epsilon_{i_1\ldots i_n} = \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n)$. Компонеты тензора $\omega$ равны $\omega_{j_1\ldots j_k} = \mathrm{sign}(j_1, \ldots, j_k)$. Поскольку матрица Грамма для ортонормированного базиса единичная, то в результате поднятия индексов получаем $\omega^{i_1\cdots i_k} = \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_k)$. Следовательно,

$$(*\omega)_{i_{k+1}\ldots i_n} = \frac{1}{k!} \sum_{(i_1,\ldots,i_k)} \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n) \cdot \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_k), \tag{3}$$

где суммирование происходит по всем наборам $(i_1, \ldots, i_k)$ индексов $i_j \in \in \overline{1, n}$.

Можно считать, что суммирование происходит только по таким наборам $(i_1, \ldots, i_k)$, что эти наборы являются перестановками набора $(1, \ldots, k)$ и набор $(i_1, \ldots, i_n)$ является перестановкой набора $(1, \ldots, n)$. Иначе $\mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_k) = 0$ или $\mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n) = 0$. Тогда набор $(i_{k+1}, \ldots, i_n)$ является перестановкой набора $(k + 1, \ldots, n)$ и

$$\mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n) \cdot \mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_k) = s(i_{k+1}, \ldots, i_n),$$

где

$$s(i_{k+1}, \ldots, i_n) = \begin{cases} 1, & \text{если набор } (i_{k+1}, \ldots, i_n) \text{ получается из набора } (k+1, \ldots, n) \text{ в результате четного числа транспозиций;} \\ -1, & \text{если набор } (i_{k+1}, \ldots, i_n) \text{ получается из набора } (k+1, \ldots, n) \text{ в результате нечетного числа транспозиций;} \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Таким образом, если $s(i_{k+1}, \ldots, i_n) \neq 0$, то сумма (3) содержит $k!$ ненулевых слагаемых, все эти слагаемые одинаковы и равны $s(i_{k+1}, \ldots, i_n)$. Таким образом,

$$(*\omega)_{i_{k+1}\ldots i_n} = s(i_{k+1}, \ldots, i_n) = \left(dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n\right)_{i_{k+1}\ldots i_n}. \tag{4}$$

Если $s(i_{k+1}, \ldots, i_n) = 0$, то равенства (4) также справедливы. Поэтому $*\omega = dx^{k+1} \wedge \ldots \wedge dx^n$.

(2). Если $\mathrm{sign}(i_1, \ldots, i_n) = 1$, то $\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^{i_n}}\right)$ – правый ортонормированный базис в $T_P(M)$. Применяя утверждение пункта (1) к этому базису, получаем равенство

$$*\omega = dx^{i_{k+1}} \wedge \ldots \wedge dx^{i_n}. \tag{5}$$

Если $\operatorname{sign}(i_1,\ldots,i_n)=-1$, то $\left(\frac{\partial}{\partial x^{i_1}},\ldots,\frac{\partial}{\partial x^{i_n}}\right)$ – правый ортонормированный базис в $T_P(M^-)$ для многообразия $M^-$, полученного из $M$ изменением ориентации. Поэтому для многообразия ориентированного риманова многообразия $(M^-,g)$ справедлива формула (5). Поскольку при изменении ориентации многообразия $M$ меняется знак тензора Леви-Чивиты, то при изменении ориентации $M$ дифференциальная форма $*\omega$ изменит знак. Поэтому в случае $\operatorname{sign}(i_1,\ldots,i_n)=-1$ для ориентированного риманова многообразия $(M,g)$ получаем равенство

$$*\omega=-dx^{i_{k+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n}.$$

Таким образом, в любом случае справедлива формула (2). $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $(M,g)$ – $n$-мерное ориентированное риманово многообразие, $\omega\in\Omega^k(M)$. Тогда*

$$*(*\omega)=(-1)^{k(n-k)}\omega.$$

**Доказательство.** Поскольку звездочка Ходжа обладает свойством линейности, то доказываемое равенство достаточно проверить для монома $\omega=dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}$. В силу леммы 1 имеем

$$*\omega=\operatorname{sign}(i_1,\ldots,i_n)\cdot dx^{i_{k+1}}\wedge\ldots\wedge dx^{i_n},$$

$$*(*\omega)=\operatorname{sign}(i_1,\ldots,i_n)\cdot\operatorname{sign}(i_{k+1},\ldots,i_n,i_1,\ldots,i_k)\cdot dx^{i_1}\wedge\ldots\wedge dx^{i_k}.$$

Поскольку $\operatorname{sign}(i_1,\ldots,i_n)\cdot\operatorname{sign}(i_{k+1},\ldots,i_n,i_1,\ldots,i_k)=$ $=\operatorname{sign}(k+1,\ldots,n,1,\ldots,k)=(-1)^{k(n-k)}$, то $*(*\omega)=(-1)^{k(n-k)}\omega$. $\square$

**Замечание.** Из леммы 2 следует, что звездочка Ходжа является взаимно однозначным отображением из $\Omega^k(M)$ в $\Omega^{n-k}(M)$. Отсюда и из линейности звездочки Ходжа вытекает, что это отображение является изоморфизмом.

## § 10. Градиент, дивергенция и ротор на многообразиях

В §2 главы 12 для функции $\varphi\in C^1(\mathbb{R}^3,\mathbb{R})$ было определено векторное поле $\operatorname{grad}\varphi$. В § 5 главы 18 для векторного поля $\vec{a}$ в $\mathbb{R}^3$ были определены скалярное поле $\operatorname{div}\vec{a}$ и векторное поле $\operatorname{rot}\vec{a}$. В данном параграфе мы хотим распространить введенные ранее понятия градиента, дивергенции и ротора с пространства $\mathbb{R}^3$ на многообразие $M\in\mathfrak{M}^n$. Для этого воспользуемся оператором внешнего дифференциала, который определен для дифференциальных форм $\omega\in\Omega^n(M)$.

Рассмотрим евклидово пространство $\mathbb{R}^3$ как риманово многообразие, ориентированное стандартной декартовой системой координат. При $k = 1, 2, 3$ через $d_k$ обозначим внешний дифференциал, действующий из $\Omega^{k-1}(\mathbb{R}^3)$ в $\Omega^k(\mathbb{R}^3)$:

$$\Omega^0(\mathbb{R}^3) \stackrel{d_1}{\to} \Omega^1(\mathbb{R}^3) \stackrel{d_2}{\to} \Omega^2(\mathbb{R}^3) \stackrel{d_3}{\to} \Omega^3(\mathbb{R}^3).$$

**Теорема 1.** *Если наряду с отождествлением $T_P(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{R}^3$, принятым при определении оператора гамильтона отождествить*

*а) векторные и ковекторные поля в $\mathbb{R}^3$ с помощью операций опускания и поднятия индексов;*

*б) дифференциальные формы классов $\Omega^1(\mathbb{R}^3)$ и $\Omega^2(\mathbb{R}^3)$ с помощью операции звездочки Ходжа;*

*в) дифференциальные формы классов $\Omega^3(\mathbb{R}^3)$ и $\Omega^0(\mathbb{R}^3) = C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ также с помощью операции звездочки Ходжа,*

*то будут справедливы равенства*

$$\mathrm{grad} = d_1, \qquad \mathrm{rot} = d_2, \qquad \mathrm{div} = d_3.$$

**Доказательство.** Указанные отождествления возможны постольку, поскольку операции поднятия и опускания индексов задают изоморфизм векторных и ковекторных полей, а звездочка Ходжа задает изоморфизм $\Omega^k(\mathbb{R}^3)$ и $\Omega^{3-k}(\mathbb{R}^3)$.

1) Для любой гладкой функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}) = \Omega^0(\mathbb{R}^3)$ ее дифференциал

$$d_1\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dy + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,dz$$

путем поднятия индекса превращается в векторное поле

$$(d_1\varphi)_\uparrow = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial z},$$

которое в результате отождествления $T_P(\mathbb{R}^3)$ и $\mathbb{R}^3$ превращается в вектор-функцию $\begin{pmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial x} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial\varphi}{\partial z} \end{pmatrix} = \mathrm{grad}\,\varphi$. Поэтому $\mathrm{grad} = d_1$.

2) Любое гладкое векторное поле

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = P\,\frac{\partial}{\partial x} + Q\,\frac{\partial}{\partial y} + R\,\frac{\partial}{\partial z}$$

путем опускания индекса превращается в ковекторное поле

$$\vec{a}^{\downarrow} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz,$$

дифференциал которого равен

$$d_2(\vec{a}^{\downarrow}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy.$$

Звездочка Ходжа переводит эту дифференциальную форму в ковекторное поле

$$*d_2(\vec{a}^{\downarrow}) = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dx + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dy + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dz,$$

которая путем поднятия индекса превращается в векторное поле

$$(*d_2(\vec{a}^{\downarrow}))_{\uparrow} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) \frac{\partial}{\partial x} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) \frac{\partial}{\partial y} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \frac{\partial}{\partial z} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix} = \operatorname{rot} \vec{a}.$$

Следовательно, с учетом принятых отождествлений $\operatorname{rot} = d_2$.

3) Снова превратим произвольное гладкое векторное поле

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} = P\,\frac{\partial}{\partial x} + Q\,\frac{\partial}{\partial y} + R\,\frac{\partial}{\partial z}$$

в ковекторное поле

$$\vec{a}^{\downarrow} = P\,dx + Q\,dy + R\,dz.$$

Действуя на ковекторное поле $\vec{a}^{\downarrow}$ звездочкой Ходжа, получаем дифференциальную форму

$$*\vec{a}^{\downarrow} = P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy,$$

дифференциал которой равен

$$d_3(*\vec{a}^{\downarrow}) = \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx \wedge dy \wedge dz.$$

Действуя на полученную дифференциальную форму еще раз звездочкой Ходжа, имеем

$$*d_3(*\vec{a}^{\downarrow}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{a}.$$

Таким образом, с учетом принятых отождествлений $\operatorname{div} = d_3$. $\square$

**Замечание.** В ходе доказательства теоремы 1 фактически доказано, что без учета принятых в этой лемме отождествлений для ориентированного риманова многообразия $\mathbb{R}^3$ справедливы равенства

$$\operatorname{grad}\varphi = (d_1\varphi)_\uparrow, \qquad \operatorname{rot}\vec{a} = (*d_2(\vec{a}^\downarrow))_\uparrow, \qquad \operatorname{div}\vec{a} = *d_3(*\vec{a}^\downarrow). \tag{1}$$

Эти равенства позволяют распространить понятия градиента, ротора и дивергенции на римановы многообразия.

**Определение.** Пусть $(M, g)$ – риманово многообразие. *Градиентом* функции $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R})$ называется векторное поле

$$\operatorname{grad}\varphi = (d\varphi)_\uparrow.$$

**Замечание.** Поскольку $\varphi \in C^1(M, \mathbb{R}) = \Omega_1^0(M)$, то $d\varphi \in \Omega_0^1(M)$. В результате поднятия индекса получаем векторное поле $\operatorname{grad}\varphi = (d\varphi)_\uparrow$. Гладкость векторного поля $\operatorname{grad}\varphi$ на 1 меньше, чем гладкость функции $\varphi$. Для $C^\infty$-гладкой функции $\varphi$ векторное поле $\operatorname{grad}\varphi$ также будет $C^\infty$-гладким. В силу первого из равенств (1) в случае $M = \mathbb{R}^3$ новое определение градиента совпадает с ранее данным его определением.

**Определение.** *Дивергенцией* $C^1$-гладкого векторного поля $\vec{a}$ на ориентированном римановом многообразии $(M, g)$ называется скалярная функция

$$\operatorname{div}\vec{a} = *d(*\vec{a}^\downarrow).$$

**Замечание.** В результате опускания индекса у $C^1$-гладкого векторного поля $\vec{a}$ получаем ковекторное поле $\vec{a}^\downarrow \in \Omega_1^1(M)$. Применяя к нему звездочку Ходжа, получаем дифференциальную форму $*\vec{a}^\downarrow \in \Omega_1^{n-1}(M)$, внешний дифференциал которой $d(*\vec{a}^\downarrow) \in \Omega_0^n(M)$. Еще раз применяя звездочку Ходжа, получаем $\operatorname{div}\vec{a} = *d(*\vec{a}^\downarrow) \in \Omega_0^0(M)$, т.е. $\operatorname{div}\vec{a}$ – скалярное поле. Легко видеть, что гладкость поля $\operatorname{div}\vec{a}$ на 1 меньше гладкости векторного поля $\vec{a}$. В силу второго из равенств (1) в случае $M = \mathbb{R}^3$ новое определение дивергенции совпадает с ранее данным ее определением.

**Определение.** *Ротором* $C^1$-гладкого векторного поля $\vec{a}$ на $n$-мерном ориентированном римановом многообразии $(M, g)$ при $n \geq 2$ называется кососимметрическое тензорное поле типа $(n-2, 0)$

$$\operatorname{rot}\vec{a} = (*d(\vec{a}^\downarrow))_\uparrow.$$

**Замечание.** В результате опускания индекса у $C^1$-гладкого векторного поля $\vec{a}$ получаем ковекторное поле $\vec{a}^\downarrow \in \Omega_1^1(M)$, дифференциал которого является дифференциальной формой $d(\vec{a}^\downarrow) \in \Omega_0^2(M)$. Применяя к нему звездочку Ходжа, получаем дифференциальную форму $*d(\vec{a}^{\downarrow}) \in \in \Omega_0^{n-2}(M)$. В результате поднятия всех индексов, получаем, что $\operatorname{rot}\vec{a} = = (*d(\vec{a}^{\downarrow}))_{\uparrow}$ является кососимметричным тензорным полем типа $(n-2, 0)$. Только в случае $n = 3$ оно является векторным полем. В силу третьего из равенств (1) в случае $M = \mathbb{R}^3$ новое определение ротора совпадает с ранее данным его определением.

$\lhd$

## § 11. Псевдориманова метрика

Напомним, что для любой квадратичной формы $g_{ij}\xi^i\xi^j$ в линейном пространстве найдется базис этого пространства, в котором эта форма имеет канонический вид, т.е. $g_{ij} = \lambda_i\delta_{ij}$, где $\lambda_i \in \{-1, 1, 0\}$. Если $\lambda_i$ не обращаются в 0, то квадратичная форма называется *невырожденной.*

**Определение.** *Псевдоримановой* или *индефинитной* метрикой на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется гладкое тензорное поле $g$ типа $(0, 2)$, обладающее свойствами симметричности и невыржденности.

Таким образом, псевдориманова метрика отличается от римановой метрики тем, что свойство положительной определенности заменяется свойством невырожденности.

Пара $(M, g)$, состоящая из многообразия $M \in \mathfrak{M}^n$ и псевдоримановой метрики $g$ на $M$, называется *псевдоримановым многообразием.*

**Определение.** Пусть $(M, g)$ – псевдориманово многообразие, $P \in \in M$. Длиной касательного вектора $\vec{v} \in T_P(M)$ называется

$$|\vec{v}| := \sqrt{g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,]}.$$

Если $g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,] > 0$, то вектор $\vec{v}$ называется *пространственно-подобным*; если $g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,] < 0$ (и, следовательно, длина вектора $\vec{v}$ чисто мнимая), вектор $\vec{v}$ называется *времени-подобным*; если $g(P)[\vec{v}, \vec{v}\,] = 0$, то вектор $\vec{v}$ называется *световым.*

Кривая $M \in \mathfrak{M}^1$ называется *световым лучом*, если для любой точки $P \in M$ любой касательный вектор $\vec{v} \in T_P(M)$ является световым.

**Определение.** Пусть $M_1$ – гладкое подмногообразие псевдориманова многообразия $(M, g)$. *Индуцированной метрикой* на $M_1$ называется сужение тензорного поля $g$ на $M_1$.

**Определение.** Метрика

$$g = -\sum_{i=1}^{s} dx^i \otimes dx^i + \sum_{i=s+1}^{n} dx^i \otimes dx^i$$

на многообразии $M = \mathbb{R}^n$ называется *псевдоевклидовой.* Псевдориманово простарнство $(\mathbb{R}^n, g)$ с этой метрикой называется *псевдоевклидовым* пространством $\mathbb{R}^n_s$.

Псевдоевклидово пространство $\mathbb{R}^4_1$ называется *пространством Минковского.* Координаты точки в этом пространстве принято обозначать $(t, x, y, z)$. В этих обозначениях метрика пространства Минковского имеет вид

$$g = -dt \otimes dt + dx \otimes dx + dy \otimes dy + dz \otimes dz.$$

Глава 20

# ПРОИЗВОДНАЯ ЛИ

## § 1. Скобка Ли

В этом и следующем параграфах любое гладкое векторное поле на гладком многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ будем рассматривать как оператор, действующий из пространства $C^\infty(M,\mathbb{R})$ в $C^\infty(M,\mathbb{R})$.

**Замечание.** Суперпозиция двух векторных полей не является тензорным полем. Действительно, рассмотрим, например, векторные поля $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, которые в ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$ имеют вид $\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x^j}$ и $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^i}$. Суперпозиция этих векторных полей является оператором взятия второй производной $\vec{u}\circ\vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$. Посмотрим, как вид этого оператора изменяется при переходе к ЛСК $(\tilde{x}^1,\ldots,\tilde{x}^n)$. По формуле производной сложной функции для любой гладкой функции $f$ имеем

$$\frac{\partial f}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k}\,\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i}.$$

Дифференцируя это равенство, получаем

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2 f}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^k}\,\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^j}\,\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial \tilde{x}^k}\,\frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^j \partial x^i},$$

т.е.

$$\frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} = \frac{\partial^2}{\partial \tilde{x}^m \partial \tilde{x}^k}\,\frac{\partial \tilde{x}^m}{\partial x^j}\,\frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} + \frac{\partial}{\partial \tilde{x}^k}\,\frac{\partial^2 \tilde{x}^k}{\partial x^j \partial x^i}.$$

Видим, что при изменении ЛСК компоненты оператора $\vec{u}\circ\vec{v} = \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}$ меняется не по тензорному закону, т.е. этот оператор не является тензором.

**Определение.** *Скобкой Ли* или *коммутатором* векторных полей $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ называется дифференциальный оператор

$$[\vec{u},\vec{v}\,] := \vec{u}\circ\vec{v} - \vec{v}\circ\vec{u}.$$

**Лемма 1.** *Коммутатор двух гладких векторных полей $\vec{u}$ и $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ является гладким векторным полем на $M$ и выражается через компоненты векторных полей*

$$\vec{u} = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}, \qquad \vec{v} = \xi^j \frac{\partial}{\partial x^j}$$

*в базисе* $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}\right)$ *пространства* $T_P(M)$ *формулой*

$$[\vec{u}, \vec{v}\,] = \left(\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

**Доказательство.** По определению коммутатора имеем

$$[\vec{u}, \vec{v}\,] = \vec{u} \circ \vec{v} - \vec{v} \circ \vec{u} = \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} + \eta^i \xi^j \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} - \xi^j \eta^i \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i} =$$

$$= \eta^i \frac{\partial \xi^j}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j} \frac{\partial}{\partial x^i} = \left(\eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i} = \beta^i \frac{\partial}{\partial x^i},$$

где $\beta^i = \eta^j \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} - \xi^j \frac{\partial \eta^i}{\partial x^j}$ – гладкие скалярные функции. Таким образом, значение коммутатора $[\vec{u}, \vec{v}\,]$ на любой функции $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ представляется в виде

$$[\vec{u}, \vec{v}\,](f) = \beta^i \frac{\partial f}{\partial x^i}.$$

Это значение не зависит от ЛСК, поскольку согласно определению касательного вектора значения $\vec{u}(\vec{v}(f))$ и $\vec{v}(\vec{u}(f))$ не зависят от ЛСК. Таким образом, для любой точки $P \in M$ коммутатор $[\vec{u}, \vec{v}\,]$ удовлетворяет определению касательного вектора, т.е. $[\vec{u}(P), \vec{v}(P)] \in T_P(M)$. Отсюда и из гладкости функций $\beta^i$ следует, что $[\vec{u}, \vec{v}\,]$ – гладкое векторное поле на $M$. $\square$

**Замечание.** Пусть в некоторой ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ векторные поля $\vec{u}$ и $\vec{v}$ имеют вид $\vec{u} = \frac{\partial}{\partial x^1}$, $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^2}$. Тогда $[\vec{u}, \vec{v}\,] = \vec{0}$.

## § 2. Алгебры Ли

**Определение.** *Алгеброй Ли* называется линейное пространство $\mathfrak{L}$, на котором задана операция $[\ ,\ ]$, переводящая любую пару $(x,y) \in \mathfrak{L} \times \mathfrak{L}$ в элемент $[x,y] \in \mathfrak{L}$ и обладающая свойствами:

(1) $[y,x] = -[x,y] \quad \forall x,y \in \mathfrak{L}$ (кососимметричность);

(2) $[\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2, y] = \lambda_1 [x_1,y] + \lambda_2 [x_2,y] \quad \forall x_1,x_2,y \in \mathfrak{L} \quad \forall \lambda_1,\lambda_2 \in \mathbb{R}$ ( линейность по первому аргументу);

(3) $[x,[y,z]] + [y,[z,x]] + [z,[x,y]] = \vec{0}$ (тождество Якоби).

Заметим, что из свойств (1), (2) следует линейность по второму аргументу.

**Пример 1.** Пространство $\mathbb{R}^3$ является алгеброй Ли относительного операции векторного произведения $[a,b]$. Действительно, свойства (1) и (2) для векторного произведения хорошо известны. Тождество Якоби для векторного произведения следует из известного равенства

$$[a,[b,c]] = b\,(a,c) - c\,(a,b).$$

**Пример 2.** Пусть $X$ – линейное пространство, $\mathfrak{L}(X)$ – пространство линейных отображений (операторов) $A : X \to X$. Тогда $\mathfrak{L}(X)$ является алгеброй Ли относительно коммутатора

$$[A,B] := A \circ B - B \circ A.$$

Действительно, свойства кососимметричности и линейности по первому аргументу для коммутаторов линейных операторов проверяются устно. Проверим тождество Якоби. Пусть $A,B,C \in \mathfrak{L}(X)$. Тогда

$$[A,[B,C]] = A \circ B \circ C - A \circ C \circ B - B \circ C \circ A + C \circ B \circ A,$$

$$[B,[C,A]] = B \circ C \circ A - B \circ A \circ C - C \circ A \circ B + A \circ C \circ B,$$

$$[C,[A,B]] = C \circ A \circ B - C \circ B \circ A - A \circ B \circ C + B \circ A \circ C.$$

Складывая эти равенства, получаем тождество Якоби.

**Пример 3.** Пусть $\mathfrak{L}$ – линейное пространство гладких векторных полей на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда $\mathfrak{L}$ является алгеброй Ли относительно скобки Ли. Это следует из леммы 1 § 1 и предыдущего примера.

$\triangleright$

# § 3. Гамильтоновы системы и скобка Пуассона

Пусть задана гладкая функция $L(t,x,v)$, где $t \in [a,b]$, $x = \begin{pmatrix} x^1 \\ \dots \\ x^n \end{pmatrix} \in$ $\in \mathbb{R}^n$, $v = \begin{pmatrix} v^1 \\ \dots \\ v^n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$. Функцию $L(t,x,v)$ называют *лагранжианом.*

**Определение.** *Функционалом действия* для функции $x \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ называется

$$S(x) := \int_a^b L(t,x(t),\dot{x}(t))\,dt. \tag{1}$$

Поскольку в функционал действия в качестве $v$ подставляется $\dot{x}(t)$, то $v$ можно интерпретировать как скорость движения по траектории $x(t)$.

**Определение.** *Простейшей задачей вариационного исчисления* называется задача минимизации (максимизации) функционала действия (1) по всем функциям $x \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющих условиям $x(a) = x_0$, $x(b) = x_1$.

В курсе дифференциальных уравнений доказывается, что необходимым условием в простейшей задаче вариационного исчисления является следующая система *уравнений Эйлера*:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L(t,x(t),\dot{x}(t))}{\partial \dot{x}^i}\right) - \frac{\partial L(t,x(t),\dot{x}(t))}{\partial x^i} = 0, \qquad i = \overline{1,n}. \tag{2}$$

Зафиксируем точку $(t_0,x_0,v_0) \in \mathbb{R}^{2n+1}$ и обозначим $p^0 = (p_1^0,\dots,p_n^0)$, где $p_i^0 = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t_0,x_0,v_0)$. Будем предполагать, что в точке $(t_0,x_0,v_0)$ матрица вторых производных $\frac{\partial^2 L(t,x,v)}{\partial v^i \partial v^j}$ невырождена. Тогда по теореме о неявной функции в некоторой окрестности точки $(t_0,x_0,p^0)$ определена гладкая функция $v(t,x,p)$ такая, что для точек $(t,x,v,p)$, лежащих в достаточно малой окрестности $(t_0,x_0,v_0,p^0)$

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v)\ \forall i \in \overline{1,n} \qquad \Leftrightarrow \qquad v^i = v^i(t,x,p)\ \forall i \in \overline{1,n}. \tag{3}$$

**Определение.** Пусть функция $v(t,x,p)$ определена соотношением (3). Тогда функция

$$H(t,x,p) := p_j v^j(t,x,p) - L(t,x,v(t,x,p)), \tag{4}$$

называется *гамильтонианом*, а переход от $L(t,x,v)$ к $H(t,x,p)$ называется *преобразованием Лежандра.*

**Теорема 1.** (О гамильтоновом формализме.) *Для любой пары функций* $x \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ *и* $p \in C^1([a,b],\mathbb{R}^n)$ *система уравнений Эйлера (2) вместе с системой уравнений*

$$p_i(t) = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \ \forall i \in \overline{1,n} \tag{5}$$

*эквивалентна гамильтоновой системе*

$$\dot{x}^i(t) = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t, x(t), p(t)), \quad i \in \overline{1,n}, \tag{6}$$

$$\dot{p}_i(t) = -\frac{\partial H}{\partial x^i}(t, x(t), p(t)), \quad i \in \overline{1,n}. \tag{7}$$

**Доказательство.** Покажем сначала, что

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v) \ \forall i \in \overline{1,n} \qquad \Leftrightarrow \qquad v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}(t,x,p) \ \forall i \in \overline{1,n}. \tag{8}$$

Действительно, дифференцируя (4) по $p_i$ и опуская аргументы, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = v^i + \left(p_j - \frac{\partial L}{\partial v^j}\right)\frac{\partial v^j}{\partial p_i} \quad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{9}$$

Поэтому из равенств $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$ следуют равенства $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Обратно, пусть $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i}$. Тогда согласно формуле (9) справедливы равенства

$$\left(p_j - \frac{\partial L}{\partial v^j}\right)\frac{\partial v^j}{\partial p_i} = 0 \quad \forall i \in \overline{1,n}. \tag{10}$$

В силу (3) имеем $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}(t,x,v(t,x,p)) \ \forall i \in \overline{1,n}$. Дифференцируя эти равенства по $p_k$, получаем

$$\delta_i^k = \frac{\partial^2 L}{\partial v^j \partial v^i}\frac{\partial v^j}{\partial p^k} \qquad \forall i,k \in \overline{1,n}.$$

Поэтому матрица, составленная из частных производных $\frac{\partial v^j}{\partial p_i}$, невырождена. Отсюда и из равенств (10) следуют равенства $p_i = \frac{\partial L}{\partial v^i}$. Таким образом, соотношение (8) доказано.

Дифференцируя (4) по $x^i$, получаем

$$\frac{\partial H}{\partial x^i} = p_j \frac{\partial v^j}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial x^i} - \frac{\partial L}{\partial v^j}\frac{\partial v^j}{\partial x^i}.$$

Поэтому

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial v^j} \ \forall j \in \overline{1,n} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial H}{\partial x^i} = -\frac{\partial L}{\partial x^i} \ \forall i \in \overline{1,n}. \tag{11}$$

Теперь докажем теорему.

Пусть функции $x(t)$, $p(t)$ удовлетворяют уравнениям (2), (5). Применяя соотношение (8) для $v = \dot{x}(t)$, получаем уравнения (6). Поскольку

$$\dot{p}_i(t) \overset{(5)}{=} \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \overset{(2)}{=} \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \overset{(11)}{=} -\frac{\partial H}{\partial x^i}(t, x(t), p(t)),$$

то уравнения (7) также справедливы.

Докажем обратное: из гамильтоновой системы уравнений (6), (7) следует система уравнений (2), (5). Пусть имеет место гамильтонова система. Применяя соотношение (8) для $v = \dot{x}(t)$, получаем систему (5). Поскольку

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i}(t, x(t), \dot{x}(t)) \overset{(5)}{=} \dot{p}_i(t) \overset{(7)}{=} -\frac{\partial H}{\partial x^i}(t, x(t), p(t)) \overset{(11)}{=} \frac{\partial L}{\partial x^i}(t, x(t), \dot{x}(t)),$$

т.е. справедлива система уравнений Эйлера (2). □

**Определение.** *Скобкой Пуассона* непрерывно дифференцируемых функций $f(t, x, p)$ и $h(t, x, p)$ называется функция

$$\{h, f\} := \frac{\partial h}{\partial p_i}\frac{\partial f}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial h}{\partial x^i}.$$

**Замечание.** Гамильтонову систему (6), (7) можно следующим образом записать в терминах скобки Пуассона:

$$\begin{cases} \dot{x}^i(t) = \{H, x^i\}, \\ \dot{p}_i(t) = \{H, p_i\}. \end{cases}$$

**Определение.** *Производной* функции $f(t, x, p)$ *в силу гамильтоновой системы* (6), (7) в точке $(t_0, x_0, p^0)$ называется

$$\frac{df}{dt}(t_0, x_0, p^0) := \left.\frac{df(t, x(t), p(t))}{dt}\right|_{t=t_0},$$

где $x(t)$ и $p(t)$ – решения гамильтоновой системы (6), (7) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $p(t_0) = p^0$.

Выразим производную в силу системы через скобку Пуассона. Согласно формуле производной сложной функции

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{dx^i}{dt} + \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial x^i} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}.$$

Итак,

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\}. \tag{12}$$

**Определение.** Функция $f(t, x, p)$ называется *первым интегралом* гамильтоновой системы (6), (7), если $f(t, x(t), p(t)) = \mathrm{const}$ для любого решения $x(t)$, $p(t)$ этой системы.

**Замечание.** Из формулы (12) следует, что уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \{H, f\} = 0$$

– это необходимое и достаточное условие того, что непрерывно дифференцируемая функция $f(t, x, p)$ является первым интегралом гамильтоновой системы.

**Лемма 1.** *Пространство гладких функций $f(t, x, p)$ является алгеброй Ли относительно скобки Пуассона.*

**Доказательство.** Свойства линейности и кососимметричности скобки Пуассона следуют непросредственно из ее определения. Тождество Якоби

$$\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$$

проверяется прямым вычислением. □

**Определение.** *Симплектической формой* на фазовом пространстве $\mathbb{R}^n_x \times$ $\times\, \mathbb{R}^n_p$ называется следующая дифференциальная форма степени 2

$$\omega = dx^i \wedge dp_i.$$

Так как $\omega = dx^i \otimes dp_i - dp_i \otimes dx^i$, то матрица компонент симплектической формы имеет вид

$$\begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix},$$

где $E_n$ – единичная матрица размера $n \times n$.

Найдем значение симплектической формы на паре касательных векторов

$$\vec{u} = a^i \frac{\partial}{\partial x^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad \vec{v} = c^i \frac{\partial}{\partial x^i} + d_i \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Поскольку $dx^i \left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = \delta^i_j$, $dx^i \left[\frac{\partial}{\partial p_j}\right] = 0$, $dp_i \left[\frac{\partial}{\partial x^j}\right] = 0$, $dp_i \left[\frac{\partial}{\partial p_j}\right] = \delta^j_i$, то

$$\omega[\vec{u}, \vec{v}] = a^i d_i - b_i c^i.$$

**Определение.** *Гамильтоновым полем* для функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ называется векторное поле $\vec{f}$ на $\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p$, определяемое формулой

$$\omega\left[\vec{f}(x,p), \vec{v}\right] = df(x,p)[\vec{v}\,] \qquad \forall \vec{v} \in T_{x,p}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p). \tag{13}$$

**Лемма 2.** *1) Каждой функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ соответствует единственное гамильтоново поле $\vec{f}$. Это векторное поле имеет вид*

$$\vec{f} = \frac{\partial f}{\partial p_i}\frac{\partial}{\partial x^i} - \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial p_i}. \tag{14}$$

*2) Значение гамильтонова поля $\vec{f}$ на функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ равно скобке Пуассона:*

$$\vec{f}(\varphi) = \{f, \varphi\}.$$

**Доказательство.** 1) Разложим векторные поля $\vec{f}$ и $\vec{v}$ по базису $\left(\frac{\partial}{\partial x^1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial x^n}, \frac{\partial}{\partial p_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial p_n}\right)$ касательного пространства $T_{x,p}(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p)$:

$$\vec{f} = a^i\frac{\partial}{\partial x^i} + b_i\frac{\partial}{\partial p_i}, \qquad \vec{v} = c^i\frac{\partial}{\partial x^i} + d_i\frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Поскольку $\omega[\vec{f}, \vec{v}\,] = a^i d_i - b_i c^i$, $df[\vec{v}\,] = \frac{\partial f}{\partial x^i}c^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}d_i$, то формула (13) эквивалентна соотношению

$$a^i d_i - b_i c^i = \frac{\partial f}{\partial x^i}c^i + \frac{\partial f}{\partial p_i}d_i \qquad \forall c^i, d_i \in \mathbb{R},$$

которое, в свою очередь, эквивалентно системе уравнений

$$a^i = \frac{\partial f}{\partial p_i}, \quad b_i = -\frac{\partial f}{\partial x^i}, \quad i \in \overline{1,n}.$$

Таким образом, гамильтоново поле $\vec{f}$ однозначно определяется по функции $f(x,p)$ и имеет вид (14).

2) Равенство $\vec{f}(\varphi) = \{f, \varphi\}$ следует непосредственно из формулы (14) и определения скобки Пуассона. □

**Теорема 2.** (О связи скобки Пуассона и скобки Ли.) *Пусть $f, g \in C^2(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$. Тогда гамильтоново поле для скобки Пуассона $\{f,g\}$ совпадает со скобкой Ли гамильтоновых полей $\vec{g}$ и $\vec{f}$:*

$$\overrightarrow{\{f,g\}} = \left[\vec{f}, \vec{g}\right].$$

**Доказательство.** Рассмотрим результат применения гамильтонова поля $\overrightarrow{\{f,g\}}$ к функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$. Согласно лемме 2(2) имеем

$$\overrightarrow{\{f,g\}}(\varphi) = \{\{f,g\},\varphi\}.$$

Используя тождество Якоби и кососимметричность скобки Пуассона, приходим к равенствам

$$\overrightarrow{\{f,g\}}(\varphi) = \{f,\{g,\varphi\}\} - \{g,\{f,\varphi\}\}.$$

Еще раз применяя лемму 2(2), получаем $\{g,\varphi\} = \vec{g}(\varphi)$, $\{f,\{g,\varphi\}\} = \vec{f}(\vec{g}(\varphi)) = (\vec{f}\circ\vec{g})(\varphi)$. Аналогично, $\{g,\{f,\varphi\}\} = (\vec{g}\circ\vec{f})(\varphi)$. Таким образом, используя определение скобки Ли, приходим к равенствам

$$\overrightarrow{\{f,g\}}(\varphi) = (\vec{f}\circ\vec{g})(\varphi) - (\vec{g}\circ\vec{f})(\varphi) = \left[\vec{f},\vec{g}\right](\varphi).$$

В силу произвольности функции $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n_x \times \mathbb{R}^n_p, \mathbb{R})$ получаем доказываемое равенство. $\square$

$\triangleleft$

## § 4. Интегральные кривые и фазовый поток векторного поля

**Определение.** Кривая $\Gamma = \{r(t) : \ t \in [a,b]\}$, лежащая на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, называется *интегральной кривой* или *интегральной траекторией* векторного поля $\vec{v}$ на $M$, если для любого $t \in [a,b]$ и любой карты $(\psi, U)$ на $M$ такой, что $r(t) \in U$, выполнена система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx(t)}{dt} = \xi(r(t)), \tag{1}$$

где $x(t) = (\psi^{-1}\circ r)(t)$ – координатное представление функции $r(t)$, $\xi(r(t))$ – координаты значения векторного поля $\vec{v}$ в точке $r(t)$ в ЛСК $\psi^{-1}$. При этом функция $r : [a,b] \to M$ называется *законом движения по интегральной кривой*.

**Лемма 1.** *Интегральная траектория и закон движения по ней не зависят от карты на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. То есть, если система уравнений (1) выполнена для карты $(\psi, U)$, то эта система выполнена для любой карты $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$ такой, что $r(t) \in \tilde{U}$.*

**Доказательство.** Пусть система уравнений (1) выполнена для карты $(\psi, U)$ и пусть задана карта $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$ такая, что $r(t) \in \tilde{U}$. Пусть $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n) = \tilde{\psi}^{-1}$ – соответствующие ЛСК, $w = \tilde{\psi}^{-1} \circ \psi$ – отображение замены системы координат. Согласно теореме 1 § 5 главы 17 координаты касательного вектора $\vec{v}_{|_{r(t)}}$ меняются по закону $\tilde{\xi}^j = \frac{\partial \tilde{x}^j}{\partial x^i}\, \xi^i$. Обозначим координатные представления закона движения $r(t)$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ и $(\tilde{x}^1, \ldots, \tilde{x}^n)$ через $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \ldots \\ x^n(t) \end{pmatrix}$ и $\tilde{x}(t) = \begin{pmatrix} \tilde{x}^1(t) \\ \ldots \\ \tilde{x}^n(t) \end{pmatrix}$ соответственно: $x(t) := (\psi^{-1} \circ r)(t)$, $\tilde{x}(t) := (\tilde{\psi}^{-1} \circ r)(t)$. Тогда $\tilde{x}(t) = (w \circ x)(t)$,

$$\frac{d\tilde{x}^i(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\, \frac{dx^j(t)}{dt} = \frac{\partial \tilde{x}^i}{\partial x^j}\, \xi^j(r(t)) = \tilde{\xi}^i(r(t)).$$

Поэтому система (1) выполнена для карты $(\tilde{\psi}, \tilde{U})$. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $M \in \mathfrak{M}^n_N$, $v : M \to \mathbb{R}^N$ – поле геометрических касательных векторов на $M$, т.е. $v(P) \in \widetilde{T}_P(M)$ для любой точки $P \in M$. Пусть $\vec{v}$ – соответствующее векторное поле, т.е. в любой точке $P \in M$ справедливо равенство $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial v}$. Тогда для любой функции $r \in C^1([a,b], M)$ следующие условия эквивалентны:*

(а) *функция $r(t)$ является законом движения по некоторой интегральной кривой векторного поля $\vec{v}$;*

(б) $\frac{d}{dt} r(t) = v(r(t)) \qquad \forall t \in [a,b]$.

**Доказательство.** Зафиксируем карту $(\psi, U)$ на $M$ и для всех $t \in [a,b]$ таких, что $r(t) \in U$, обозначим через $x(t) = \begin{pmatrix} x^1(t) \\ \ldots \\ x^n(t) \end{pmatrix} := (\psi^{-1} \circ x)(t)$ координатное представление отображения $r(t)$. Дифференцируя равенство $r(t) = (\psi \circ x)(t)$, получаем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial \psi}{\partial x^i} \cdot \frac{dx^i(t)}{dt}.$$

Пусть $\xi = \begin{pmatrix} \xi^1 \\ \ldots \\ \xi^n \end{pmatrix}$ – координаты вектора $\vec{v}_{|_{r(t)}}$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi^{-1}$. Тогда $v(r(t)) = \xi^i\, \frac{\partial \psi}{\partial x^i}$. Поэтому уравнение (б) эквивалентно уравнению

$$\frac{dx^i(t)}{dt}\cdot\frac{\partial\psi}{\partial x^i}=\xi^i\,\frac{\partial\psi}{\partial x^i}.$$

Поскольку векторы $\frac{\partial\psi}{\partial x^i}$ линейно независимы, то последнее уравнение эквивалентно системе уравнений $\frac{dx^i(t)}{dt}=\xi^i$, т.е. системе уравнений (1). Таким образом, уравнение (б) эквивалентно условию (а).

**Замечание.** Из леммы 2 следует, что если $\Gamma$ – интегральная кривая векторного поля $\vec{v}$ на $M\in\mathfrak{M}^n_N$, то для любой точки $P\in\Gamma$ геометрический касательный вектор $v=v(P)\in\widetilde{T}_P(M)$, соответствующий касательному вектору $\vec{v}_{|_P}=\frac{\partial}{\partial v}\in T_P(M)$, является геометрическим касательным вектором к кривой $\Gamma$:

$$v(P)\in\widetilde{T}_P(\Gamma).$$

В курсе обыкновенных дифференциальных уравнений доказывается теорема о существовании и единственности решения задачи Коши, из которой следует, что для гладкого векторного поля $\vec{v}$ в области $M\subset\mathbb{R}^n$ через каждую точку $P\in M$ проходит единственная интегральная кривая. Аналогичный результат справедлив и для гладкого многообразия $M\in\mathfrak{M}^n$.

**Лемма 3.** *Пусть $\Gamma=\{r(t)\ :\ t\in[a,b]\}$ – интегральная кривая векторного поля $\vec{v}$ на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$. Тогда*

$$\frac{d}{dt}(f\circ r)(t)=\vec{v}_{|_{r(t)}}(f)\qquad\forall f\in C^1(M,\mathbb{R}).$$

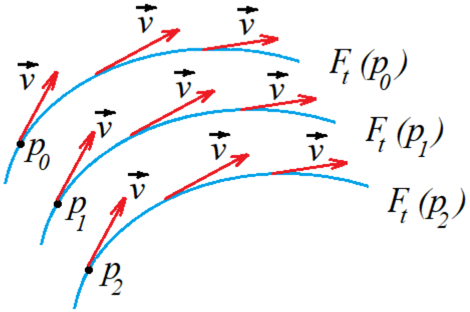
**Доказательство.** Пусть $x(t)=(x^1(t),\ldots,x^n(t))=(\psi^{-1}\circ r)(t)$ – координатное представление функции $r(t)$ в карте $(\psi,U)$, где $r(t)\in$ $\in U$. Поскольку $f\circ r=f\circ\psi\circ x$, то по формуле производной сложной функции

$$\frac{d}{dt}(f\circ r)(t)=\frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial x^i}\,\frac{dx^i(t)}{dt}=\frac{\partial(f\circ\psi)}{\partial x^i}\,\xi^i(r(t))=\vec{v}_{|_{r(t)}}(f),$$

где второе равенство следует из определения интегральной кривой, а третье равенство – из определения касательного вектора. □

**Замечание.** Лемма 3 позволяет интерпретировать значение векторного поля $\vec{v}$ в точке $r(t)$ на функции $f\in C^1(M,\mathbb{R})$ как скорость изменения физической величины $f$ для материальной точки, движущейся по интегральной кривой векторного поля $\vec{v}$ (см. замечание после теоремы 2 § 5 главы 17).

**Определение.** Пусть $M \in \mathfrak{M}^n$, $r(t, p_0) = r(t)$ – закон движения по интегральной кривой векторного поля $\vec{v}$, удовлетворяющий начальному условию $r(0, p_0) = p_0$ (т.е. решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений (1) с этим начальным условием). Тогда отображение $F_t : M \to M$, заданное равенством $F_t(p_0) := r(t, p_0)$, $p_0 \in M$, $t \in \mathbb{R}$, называется ***фазовым потоком*** векторного поля $\vec{v}$.




На рисунке для многообразия $M = \mathbb{R}^2$ изображены интегральные кривые векторного поля $\vec{v}$, значения которого показаны как геометрические касательные векторы к интегральным кривым.

**Лемма 4.** *Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \in \mathfrak{M}^n$. Тогда фазовый поток $F_t$ векторного поля $\vec{v}$ является локальной группой гладких диффеоморфизмов, т.е. для любой точки $p_0 \in \in M$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при всех $t \in (-\delta, \delta)$ сужение отображения $F_t$ на некоторую окрестность точки $p_0$ является гладким диффеоморфизмом, удовлетворяющим групповому свойству*

$$F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2} \qquad \forall t_1, t_2 \in (-\delta, \delta). \tag{2}$$

**Доказательство.** Как известно из теории обыкновенных дифференциальных уравнений, для любой точки $p_0 \in M$ найдется число $\delta > 0$ такое, что решение $r(t, p)$ задачи Коши (1) с начальным условием $r(0, p) = p$ существует, единственно и гладким образом зависит от $t$ и $p$, если $t \in (-2\delta, 2\delta)$ и $p$ лежит в некоторой окрестности точки $p_0$. Фиксируем точку $p$ из этой окрестности и $t_1, t_2 \in (-\delta, \delta)$. Обозначим $p_1 = r(t_1, p)$. Тогда функции $r(t, p_1)$ и $r(t_1 + t, p)$ являются решениями задачи Коши для системы (1) с начальным условием

$$r(t, p_1)\big|_{t=0} = r(t_1 + t, p)\big|_{t=0} = p_1.$$

В силу единственности решения задачи Коши $r(t_1 + t_2, p) = r(t_2, p_1) = r(t_2, r(t_1, p))$, т.е. в точке $p$ имеет место групповое свойство (2). Из этого свойства следует, что $F_{-t} = (F_t)^{-1}$ при $t \in (-\delta, \delta)$. В силу гладкой зависимости решения задачи Коши $r(t, p)$ от $p$ отображение $F_t$ и обратное к нему $(F_t)^{-1} = F_{-t}$ являются гладкими отображениями, поэтому отображение $F_t$ (точнее, его сужение на некоторую окрестность точки $p_0$) является гладким диффеоморфизмом. $\square$

## § 5. Перенос тензорных полей

Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^n$, $M_2 \in \mathfrak{M}^n$, $F \in C^1(M_1, M_2)$. Фиксируем точку $P \in M_1$ и карту $(\psi_1, U_1)$ на $M_1$ такую, что $P \in U_1$. Обозначим $Q := F(P)$ и зафиксируем карту $(\psi_2, U_2)$ на $M_2$ такую, что $Q \in U_2$. Пусть $(x^1, \ldots, x^n) = \psi_1^{-1}$ и $(y^1, \ldots, y^n) = \psi_2^{-1}$ – соответствующие ЛСК. Обозначим через $y(x) := (\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1)(x)$ координатное представление отображения $F$.

Согласно теореме 1 § 5 главы 17 любой касательный вектор $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i} \in T_P(M_1)$ при отображении $F$ переходит в касательный вектор

$$F_*(\vec{v}) = dF(P)[\vec{v}\,] = \xi^i \, \frac{\partial y^j}{\partial x^i} \, \frac{\partial}{\partial y^j}. \qquad (1)$$

Если отображение $F$ не взаимно однозначно, то при этом отображении векторное поле $\vec{v}$ на $M_1$ не переходит в векторное поле $F_*(\vec{v})$ на $M_2$, поскольку заданной точке $Q \in M_2$ могут соответствовать различные точки $P, P' \in M_1$ такие, что $F(P) = F(P') = Q$ и при этом значения векторного поля $\vec{v}$ в точках $P$ и $P'$ могут быть различными, что не позволяет однозначно определить значение векторного поля $F_*(\vec{v})$ в точке $Q$. В случае, когда отображение $F : M_1 \to M_2$ является гладким диффеоморфизмом, формула (1) гладкому векторному полю $\vec{v}$ на $M_1$ сопоставляет гладкое векторное поле $F_*(\vec{v})$ на $M_2$, называемое *прямым переносом* векторного поля $\vec{v}$. *Обратный перенос*

$F^* := (F^{-1})_*$ гладкому векторному полю $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial y^i}$ на $M_2$ сопоставляет гладкое векторное поле

$$F^*(\vec{v}) = \xi^i \; \frac{\partial x^j}{\partial y^i} \; \frac{\partial}{\partial x^j}$$

на $M_1$, где $\frac{\partial x^j}{\partial y^i}$ – элементы матрицы Якоби функции $x(y) = (\psi_1^{-1} \circ F^{-1} \circ \psi_2)(y)$, обратной к функции $y(x)$.

Согласно теореме 2 § 5 главы 17 любой ковектор $\omega = \omega_i dy^i \in \in T_Q^*(M_2)$ обратным переносом переводится в ковектор

$$F^*(\omega) = \omega_i \; \frac{\partial y^i}{\partial x^j} \; dx^j \in T_P^*(M_1).$$

Обобщая эти определения, дадим общее определение обратного переноса тензорного поля.

**Определение.** Пусть $M_1 \in \mathfrak{M}^n$, $M_2 \in \mathfrak{M}^n$, $F : M_1 \to M_2$ – гладкий диффеоморфизм. *Обратным переносом* тензорного поля $T$ типа $(s, q)$, заданного на $M_2$, называется тензорное поле $F^*T$ типа $(s, q)$ на $M_1$, компоненты $(F^*T)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_q}$ которого в точке $P \in M_1$ в ЛСК $(x^1, \ldots, x^n) = \psi_1^{-1}$ выражаются через компоненты тензорного поля $T$ в точке $Q = F(P) \in M_2$ в ЛСК $(y^1, \ldots, y^n) = \psi_2^{-1}$ формулой

$$(F^*T)^{j_1 \ldots j_s}_{i_1 \ldots i_q}(P) = \frac{\partial x^{j_1}}{\partial y^{j'_1}} \cdots \frac{\partial x^{j_s}}{\partial y^{j'_s}} \; \frac{\partial y^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} \cdots \frac{\partial y^{i'_q}}{\partial x^{i_q}} \; T^{j'_1 \ldots j'_s}_{i'_1 \ldots i'_q}(Q), \qquad (2)$$

где $\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i}$ – элементы матрицы Якоби координатного представления $y(x) = (\psi_2^{-1} \circ F \circ \psi_1)(x)$ диффеоморфизма $F$, $\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}}$ – элементы обратной матрицы.

**Замечание.** Формула (2) совпадает с формулой изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК. Это вполне естественно, т.к. в случае тождественного отображения $F$ формула (2) и является формулой изменения компонент тензорного поля при замене ЛСК.

**Замечание.** Из формулы (2) видно, что обратный перенос гладкого тензорного поля $T$ при гладком диффеоморфизме $F$ является гладким тензорным полем.

## § 6. Производная Ли

**Определение.** Пусть $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ – семейство тензорных полей типа $(s,q)$ на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$. Производной $\frac{d}{dt}T_t$ в точке $t_0\in\mathbb{R}$ называется тензорное поле типа $(s,q)$ на $M$, значение которого в любой точке $P\in M$ на любых ковекторах $l^1,\ldots,l^s\in T^*_P(M)$ и векторах $\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q\in T_P(M)$ определяется следующим естественным образом:

$$\left.\left(\frac{d}{dt}T_t\right)\right|_{t=t_0}(P)[l^1,\ldots,l^s,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q]:=$$

$$=\frac{d}{dt}\left.\left(T_t(P)[l^1,\ldots,l^s,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q]\right)\right|_{t=t_0}.$$

Производная правой части этого равенства – это производная скалярной функции $T_t(P)[l^1,\ldots,l^s,\vec{v}_1,\ldots,\vec{v}_q]$ по скалярной переменной $t$.

**Замечание.** Подставляя в предыдущую формулу базисные векторы $\vec{v}_i=\frac{\partial}{\partial x^i}$ пространства $T_P(M)$ и базисные ковекторы $l^j=dx^j$ , получаем формулу, выражающую компоненты тензорного поля $\frac{d}{dt}T_t$ в ЛСК $(x^1,\ldots,x^n)$ через производные компонент тензорного поля $T_t$:

$$\left(\frac{d}{dt}T_t\right)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q}=\frac{d}{dt}\left(T_t\right)^{j_1\ldots j_s}_{i_1\ldots i_q}.$$

**Определение.** Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M\in\mathfrak{M}^n$; $F_t:M\to M$ – фазовый поток векторного поля $\vec{v}$. Пусть $T$ является $C^1$-гладким тензорным полем типа $(s,q)$ на $M$. *Производной Ли* $L_{\vec{v}}T$ тензорного поля $T$ вдоль векторного поля $\vec{v}$ называется производная по $t$ в точке $t=0$ обратного переноса тензорного поля $T$ фазовым потоком $F_t$:

$$L_{\vec{v}}T:=\left.\frac{d}{dt}(F_t^*T)\right|_{t=0}.$$

**Замечание.** Производная Ли $L_{\vec{v}}T$ показывает скорость изменения тензора $T$ при деформации пространства, задаваемой фазовым потоком $F_t$ векторного поля $\vec{v}$.

**Замечание.** Поскольку $F_t^*T$ – тензор того же типа, что и тензор $T$, то $L_{\vec{v}}T$ – тензор того же типа.

Следующая лемма дает явную формулу для производной Ли.

**Лемма 1.** *Компоненты тензора $L_{\vec{v}}T$ следующим образом выражаются через производные компонент тензора $T$ и координат $\xi^i$ векторного поля $\vec{v}$:*

$$(L_{\vec{v}}T)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q} = \xi^k \frac{\partial T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}}{\partial x^k} +$$
$$-T^{kj_2\dots j_s}_{i_1\dots i_q} \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^k} - \dots - T^{j_1\dots j_{s-1}k}_{i_1\dots i_q} \frac{\partial \xi^{j_s}}{\partial x^k} +$$
$$+T^{j_1\dots j_s}_{ki_2\dots i_q} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i_1}} + \dots + T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{q-1}k} \frac{\partial \xi^k}{\partial x^{i_q}}.$$

**Доказательство.** Фиксируем карту $(\psi, U)$ на $M$. По определению фазового потока $F_t$ имеем

$$\frac{d}{dt}(\psi^{-1} \circ F_t(p)) = \xi(F_t(p)), \qquad F_0(p) = p.$$

Обозначим $y_t(x) := (\psi^{-1} \circ F_t \circ \psi)(x)$ – координатное представление фазового потока. Тогда

$$\frac{d}{dt} y_t(x) = \xi(\psi \circ y_t)(x), \qquad y_0(x) = x.$$

Следовательно,

$$y_t(x) = x + t\xi(\psi(x)) + o(t), \quad t \to 0, \tag{1}$$

где $o(t)$ – такая гладкая функция относительно $x$ и $t$, что $\frac{o(t)}{t} \to 0$ при $t \to 0$. Поэтому

$$(T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q} \circ \psi)(y_t(x)) = (T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q} \circ \psi)(x) + t\xi^k \frac{\partial T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}}{\partial x^k} + o(t), \quad t \to 0,$$

а значит,

$$T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}(F_t(P)) = T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}(P) + t\xi^k \frac{\partial T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}}{\partial x^k} + o(t), \quad t \to 0.$$

Дифференцируя равенство (1), получаем следующие выражения для производных компонент вектор-функции $y(x) = y_t(x)$ по компонентам вектора $x \in \mathbb{R}^n$

$$\frac{\partial y^{i'}}{\partial x^i} = \delta_i^{i'} + t\frac{\partial \xi^{i'}}{\partial x^i} + o(t), \quad t \to 0.$$

Компоненты обратной матрицы равны

$$\frac{\partial x^j}{\partial y^{j'}} = \delta_{j'}^{j} - t\frac{\partial \xi^{j}}{\partial x^{j'}} + o(t), \quad t \to 0.$$

Подставляя эти выражения в формулу (2) § 5, получаем

$$(F_t^* T)^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q} = \left(\delta^{j_1}_{j'_1} - t\frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^{j'_1}}\right)\dots\left(\delta^{j_s}_{j'_s} - t\frac{\partial \xi^{j_s}}{\partial x^{j'_s}}\right)\times$$

$$\times\left(\delta^{i'_1}_{i_1} + t\frac{\partial \xi^{i'_1}}{\partial x^{i_1}}\right)\dots\left(\delta^{i'_q}_{i_q} + t\frac{\partial \xi^{i'_q}}{\partial x^{i_q}}\right)\left(T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q} + t\xi^k\ \frac{\partial T^{j'_1\dots j'_s}_{i'_1\dots i'_q}}{\partial x^k}\right) + o(t) =$$

$$= T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q} + t\left(\xi^k\ \frac{\partial T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_q}}{\partial x^k} - \frac{\partial \xi^{j_1}}{\partial x^{j'_1}} T^{j'_1 j_2\dots j_s}_{i_1\dots i_q} - \dots - \frac{\partial \xi^{j_s}}{\partial x^{j'_s}} T^{j_1\dots j_{s-1} j'_s}_{i_1\dots i_q} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \xi^{i'_1}}{\partial x^{i_1}} T^{j_1\dots j_s}_{i'_1 i_2\dots i_q} + \dots + \frac{\partial \xi^{i'_q}}{\partial x^{i_q}} T^{j_1\dots j_s}_{i_1\dots i_{q-1} i'_q}\right) + o(t), \quad t \to 0.$$

Отсюда вытекает доказываемое равенство. □

**Замечание.** Из леммы 1 следует линейность производной Ли $L_{\vec{v}}T$ как относительно тензорного поля $T$, так и относительно векторного поля $\vec{v}$.

Рассмотрим производные Ли конкретных типов тензоров.

**Пример 1.** Для скалярного поля $f \in C^1(M, \mathbb{R})$, т.е. тензорного поля типа $(0, 0)$ лемма 1 дает формулу

$$L_{\vec{v}} f = \xi^k\ \frac{\partial f}{\partial x^k} = \vec{v}(f).$$

Таким образом, *производная Ли скалярного поля $f$ по векторному полю $\vec{v}$ – это производная функции $f$ по вектору $\vec{v}$.*

**Определение.** Функция $f \in C^1(M, \mathbb{R})$ называется *первым интегралом* векторного поля $\vec{v}$, если $L_{\vec{v}} f = 0$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$.

Знание первого интеграла векторного поля $\vec{v}$ позволяет понизить порядок системы дифференциальных уравнений (1) § 4.

**Пример 2.** Компоненты производной Ли векторного поля $\vec{u} = \eta^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ на $M \in \mathfrak{M}^n$ вдоль векторного поля $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ согласно лемме 1 имеют вид

$$(L_{\vec{v}}\vec{u})^j = \xi^k \frac{\partial \eta^j}{\partial x^k} - \eta^k \frac{\partial \xi^j}{\partial x^k}.$$

Сравнивая это выражение с формулой, доказанной в лемме 1 § 1, видим, что *производная Ли векторного поля $\vec{u}$ вдоль векторного поля $\vec{v}$ совпадает со скобкой Ли (коммутатором)* $[\vec{v}, \vec{u}]$:

$$L_{\vec{v}}\vec{u} = [\vec{v}, \vec{u}].$$

Поскольку $[\vec{u}, \vec{v}] = -[\vec{v}, \vec{u}]$, то $L_{\vec{u}}\vec{v} = -L_{\vec{v}}\vec{u}$.

**Пример 3.** Пусть $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, $\omega \in \Omega^1_1(M)$ – ковекторное поле, $\omega = \omega_j dx^j$. Тогда согласно лемме 1 производная Ли ковекторного поля $\omega$ имеет вид:

$$L_{\vec{v}}\omega = \left( \xi^i \frac{\partial \omega_j}{\partial x^i} + \omega_i \frac{\partial \xi^i}{\partial x^j} \right) dx^j. \tag{2}$$

**Лемма 2.** *Для дифференциальных форм $\alpha \in \Omega^p_1(M)$, $\beta \in \Omega^q_1(M)$ и гладкого векторного поля $\vec{v}$ на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$ справедлива формула Лейбница*

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta).$$

**Доказательство.** Согласно определению производной Ли

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = \frac{d}{dt} F^*_t(\alpha \wedge \beta) \Big|_{t=0}.$$

Поскольку обратный перенос внешнего произведения дифференциальных форм совпадает с внешним произведением обратных переносов этих дифференциальных форм, то

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = \frac{d}{dt} (F^*_t\alpha) \wedge (F^*_t\beta) \Big|_{t=0} = \frac{d}{dt} (\alpha_t \wedge \beta_t) \Big|_{t=0}, \tag{3}$$

где введены обозначения $\alpha_t := F^*_t\alpha, \quad \beta_t := F^*_t\beta$.

Покажем, что

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t \wedge \beta_t) = \left(\frac{d}{dt}\alpha_t\right) \wedge \beta_t + \alpha_t \wedge \left(\frac{d}{dt}\beta_t\right). \tag{4}$$

В силу линейности производной и внешнего произведения равенство (4) достаточно проверить для мономов

$$\alpha_t = a_t\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p}, \qquad \beta_t = b_t\, dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Поскольку $\alpha_t \wedge \beta_t = a_t \cdot b_t\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}$, то

$$\frac{d}{dt}(\alpha_t \wedge \beta_t) = \frac{d(a_t \cdot b_t)}{dt}\, dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_p} \wedge dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_q}.$$

Используя формулу Лейбница дифференцирования произведения скалярных функций

$$\frac{d(a_t \cdot b_t)}{dt} = \frac{da_t}{dt}\, b_t + a_t\, \frac{db_t}{dt},$$

получаем равенство (4).

Из равенств (3), (4) следует, что

$$L_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = \left.\frac{d}{dt}\alpha_t\right|_{t=0} \wedge \beta_0 + \alpha_0 \wedge \left.\frac{d}{dt}\beta_t\right|_{t=0}. \tag{5}$$

Поскольку согласно определению фазового потока $F_0 = \mathrm{Id}$, то $F_0^* = \mathrm{Id}$ и $\alpha_0 = F_0^*\alpha = \alpha$, аналогично, $\beta_0 = \beta$. Согласно определению производной Ли $\left.\frac{d}{dt}\alpha_t\right|_{t=0} = L_{\vec{v}}\alpha$ и, аналогично, $\left.\frac{d}{dt}\beta_t\right|_{t=0} = L_{\vec{v}}\beta$. Подставляя эти выражения в формулу (5), получаем доказываемое равенство. $\square$

**Теорема 1.** *Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда производная Ли $L_{\vec{v}}$ и внешний дифференциал $d$ перестановочны, если они применяются к $C^2$-гладким дифференциальным формам:*

$$L_{\vec{v}} d\omega = dL_{\vec{v}}\omega \qquad \forall \omega \in \Omega_2^q(M).$$

**Доказательство.**

**Шаг 1.** Пусть $q = 0$, т.е. $\omega = f \in C^2(M, \mathbb{R})$. Пусть $\vec{v} = \xi^i \frac{\partial}{\partial x^i}$. Поскольку $df = \frac{\partial f}{\partial x^j} dx^j$, то согласно формуле (2) имеем

$$L_{\vec{v}}df = \left(\xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) dx^j.$$

С другой стороны, $L_{\vec{v}}f = \vec{v}(f) = \xi^i \frac{\partial f}{\partial x^i}$. Следовательно,

$$dL_{\vec{v}}f = \left(\xi^i \frac{\partial^2 f}{\partial x^j \partial x^i} + \frac{\partial f}{\partial x^i}\frac{\partial \xi^i}{\partial x^j}\right) dx^j = L_{\vec{v}}df.$$

Таким образом, в случае $q = 0$ доказываемая формула справедлива.

**Шаг 2.** Пусть $\omega = dx^i$ – дифференциал $i$-ой координатной функции. Используя шаг 1, получаем $L_{\vec{v}}\omega = L_{\vec{v}}dx^i = dL_{\vec{v}}x^i$. Поэтому

$$dL_{\vec{v}}\omega = d^2 L_{\vec{v}}x^i = 0 = L_{\vec{v}}d\omega,$$

где последнее равенство следует из того, что $d\omega = d^2x^i = 0$. Итак, в случае $\omega = dx^i$ доказываемая формула также справедлива.

**Шаг 3.** Покажем, что если $\omega = \alpha \wedge \beta$ и для дифференциальных форм $\alpha \in \Omega_2^s(M)$ и $\beta \in \Omega_2^p(M)$ доказываемое равенство справедливо, т.е.

$$L_{\vec{v}}d\alpha = dL_{\vec{v}}\alpha, \qquad L_{\vec{v}}d\beta = dL_{\vec{v}}\beta, \tag{6}$$

то $L_{\vec{v}}d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$.

Действительно, в силу правила Лейбница для внешнего дифференциала

$$d\omega = d\alpha \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge d\beta.$$

Используя формулу Лейбница для производной Ли, получаем

$$L_{\vec{v}}d\omega = (L_{\vec{v}}d\alpha) \wedge \beta + d\alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge d\beta + (-1)^s \alpha \wedge (L_{\vec{v}}d\beta).$$

Учитывая равенства (6), приходим к равенству

$$L_{\vec{v}}d\omega = (dL_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + d\alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge d\beta + (-1)^s \alpha \wedge (dL_{\vec{v}}\beta). \tag{7}$$

С другой стороны, формула Лейбница для производной Ли дает равенство

$$L_{\vec{v}}\omega = (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta),$$

откуда в силу правила Лейбница для внешнего дифференциала следует, что

$$dL_{\vec{v}}\omega = (dL_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge d\beta + d\alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s \alpha \wedge (dL_{\vec{v}}\beta).$$

Сравнивая полученное выражение с равенством (7), получаем равенство $L_{\vec{v}} d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$.

**Шаг 4.** Завершим доказательство теоремы. В силу линейности операций производной Ли и внешнего дифференцирования формулу $L_{\vec{v}} d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$ достаточно доказать для одного монома

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q},$$

где $f \in C^2(M, \mathbb{R})$. Заметим, что $\omega = f\alpha = f \wedge \alpha$, где $\alpha = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}$. В силу утверждений, доказанных на шагах 1 и 2, имеем $dL_{\vec{v}} f = L_{\vec{v}} df$ и $dL_{\vec{v}} dx^i = L_{\vec{v}} d(dx^i)$. Отсюда в силу шага 3 получаем равенство $L_{\vec{v}} d\omega = dL_{\vec{v}}\omega$. □

## § 7. Внутреннее произведение векторного поля на дифференциальную форму, тождество Картана

**Определение.** Пусть $\vec{v}$ – векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. *Внутренним произведением* векторного поля $\vec{v}$ на дифференциальную форму $\omega \in \Omega_0^q(M)$ при $q \geq 1$ называется дифференциальная форма $i_{\vec{v}}\omega$, значение которой равно

$$(i_{\vec{v}}\omega)(P)[\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{q-1}] := \omega(P)[\vec{v}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{q-1}]$$
$$\forall P \in M \ \forall \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_{q-1} \in T_P(M).$$

Если $\omega \in \Omega_0^0(M)$, т.е. $\omega$ – функция из $M$ в $\mathbb{R}$, то положим $i_{\vec{v}}\omega = 0$.

**Замечание.** Операция внутреннего умножения $i_{\vec{v}}$ на гладкое векторное поле $\vec{v}$ каждой дифференциальной форме $\omega \in \Omega_k^q(M)$ степени $q$ ставит в соответствие дифференциальную форму $i_{\vec{v}}\omega \in \Omega_k^{q-1}(M)$ степени $q-1$ (кососимметричность тензора $(i_{\vec{v}}\omega)(P)$ следует из кососимметричности тензора $\omega(P)$).

**Замечание.** Непосредственно из определения следует, что внутреннее произведение $i_{\vec{v}}\omega$ обладает свойством линейности как по дифференциальной форме $\omega$, так и по векторному полю $\vec{v}$.

**Замечание.** Значение внутреннего произведения $i_{\vec{v}}\omega$ в точке $P \in$ $\in M$ зависит лишь от значений векторного поля $\vec{v}$ и дифференциальной формы $\omega$ в точке $P$, в отличие, например, от производной Ли

$L_{\vec{v}}\omega$ или внешнего дифференциала $d\omega$, значения которых в точке $P$ зависят от значений $\vec{v}$ и $\omega$ не только в точке $P$, но и в окрестности этой точки.

При умножении векторного поля $\vec{v}$ или дифференциальной формы $\omega$ на функцию $f : M \to \mathbb{R}$ значение функции можно вынести за знак внутреннего умножения:

$$i_{f\vec{v}}\omega = f\, i_{\vec{v}}\omega, \qquad i_{\vec{v}}(f\omega) = f\, i_{\vec{v}}\omega. \tag{1}$$

**Замечание.** Пусть $\omega_{i_0 i_1 \dots i_{q-1}}$ – компоненты дифференциальной формы $\omega$, $\xi^k$ – координаты вектора $\vec{v}(P)$ в некоторой ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Непосредственно из определения внутреннего произведения вытекает следующая формула для компонент дифференциальной формы $\alpha := i_{\vec{v}}\omega$:

$$\alpha_{i_1 \dots i_{q-1}} = \xi^k \omega_{k i_1 \dots i_{q-1}}. \tag{2}$$

Поэтому внутренее произведение $i_{\vec{v}}\omega$ является сверткой тензорных полей $\vec{v}$ и $\omega$.

**Замечание.** Если $f \in C^1(M, \mathbb{R})$, то по определению внутреннего умножения

$$i_{\vec{v}} df(P) = df(P)[\vec{v}] = \vec{v}(f). \tag{3}$$

**Лемма 1.** *Пусть $(x^1, \dots, x^n)$ – ЛСК на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Внутреннее произведение векторного поля $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^1}$ на дифференциальную форму $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}$ при $1 \le i_1 < \dots < i_q \le n$ имеет вид*

$$i_{\vec{v}}\omega = \begin{cases} 0, & i_1 > 1, \\ dx^{i_2} \wedge \dots \wedge dx^{i_q}, & i_1 = 1. \end{cases}$$

**Доказательство.** По теореме 1 § 4 главы 18 дифференциальную форму $\alpha := i_{\vec{v}}\omega$ можно следующим образом представить через ее компоненты:

$$\alpha = \sum_{1 \le j_2 < \dots < j_q \le n} \alpha_{j_2 \dots j_q}\, dx^{j_2} \wedge \dots \wedge dx^{j_q}. \tag{4}$$

Поскольку координаты векторного поля $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^1}$ равны $\xi^i = \delta^i_1$, то согласно равенству (2) имеем

$$\alpha_{j_2 \dots j_q} = \delta^k_1 \omega_{k j_2 \dots j_q} = \omega_{1 j_2 \dots j_q}.$$

Используя теорему 1 § 4 главы 18, получаем, что при $1 \le j_1 < \ldots < j_q \le n$ компоненты $\omega_{j_1 \ldots j_q}$ дифференциальной формы $\omega = dx^{i_1} \wedge dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}$ имеют вид:

$$\omega_{j_1 \ldots j_q} = \begin{cases} 1, & (j_1, \ldots, j_q) = (i_1, \ldots, i_q), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Поэтому

$$\alpha_{j_2 \ldots j_q} = \begin{cases} 1, & (1, j_2, \ldots, j_q) = (i_1, \ldots, i_q), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Отсюда и из равенства (4) следует доказываемое равенство. □

**Теорема 1.** *Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$. Тогда взаимодействие внутреннего умножения с внешним описывается правилом Лейбница:*

$$i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta) \qquad \forall \alpha \in \Omega_0^s(M),\ \beta \in \Omega_0^p(M).$$

**Доказательство.** Фиксируем некоторую ЛСК $(x^1, \ldots, x^n)$ на $M$. Поскольку внутреннее произведение $i_{\vec{v}}\omega$ обладает свойством линейности как по дифференциальной форме $\omega$, так и по векторному полю $\vec{v}$, а также с учетом равенств (1) достаточно доказать, что равенство

$$i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta) \tag{5}$$

справедливо для векторного поля $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^k}$ и дифференциальных форм

$$\alpha = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}, \qquad \beta = dx^{j_1} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}. \tag{6}$$

Перенумеровывая при необходимости координатные функции $x^1, \ldots, x^n$, без потери общности будем предполагать, что $k = 1$, т.е. $\vec{v} = \frac{\partial}{\partial x^1}$. Поскольку при изменении порядка сомножителей во внешних произведениях (6) все слагаемые формулы (5) одновременно меняют или не меняют знак (в зависимости от четности перестановки), то можно считать, что $i_1 < i_2 < \ldots < i_s$ и $j_1 < j_2 < \ldots < j_p$.

Рассмотрим 4 случая.

Случай 1. $i_1 > 1,\ j_1 > 1$.

В этом случае согласно лемме 1 имеем $i_{\vec{v}}\alpha = i_{\vec{v}}\beta = i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = 0$. Поэтому формула (5) в данном случае справедлива.

Случай 2. $i_1 = 1,\ j_1 > 1$.

В силу леммы 1 имеем $i_{\vec{v}}\alpha = dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}$, $i_{\vec{v}}\beta = 0$, $i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s} \wedge \beta = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta$. В этом случае формула (5) также верна.

Случай 3. $i_1 > 1$, $j_1 = 1$.

В этом случае согласно лемме 1 получаем $i_{\vec{v}}\alpha = 0$, $i_{\vec{v}}\beta = dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}$. Поскольку

$$\alpha \wedge \beta = \alpha \wedge dx^1 \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} = (-1)^s dx^1 \wedge \alpha \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p},$$

то

$$i_{\vec{v}}(\alpha \wedge \beta) = (-1)^s \alpha \wedge dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p} = (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta).$$

Формула (5) снова справедлива.

Случай 4. $i_1 = 1$, $j_1 = 1$.

В этом случае $\alpha \wedge \beta = 0$. Согласно лемме 1 имеем

$$i_{\vec{v}}\alpha = dx^{i_2} \wedge \ldots \wedge dx^{i_s}, \qquad i_{\vec{v}}\beta = dx^{j_2} \wedge \ldots \wedge dx^{j_p}.$$

Поэтому

$$(i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta) = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge dx^1 \wedge (i_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s dx^1 \wedge (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge (i_{\vec{v}}\beta) = 0,$$

т.к. $(i_{\vec{v}}\alpha) \wedge dx^1 = (-1)^{s-1} dx^1 \wedge (i_{\vec{v}}\alpha)$. Формула (5) опять справедлива.

Итак, во всех случаях формула (5) справедлива. $\square$

**Теорема 2.** Пусть $\vec{v}$ – гладкое векторное поле на многообразии $M \in \mathfrak{M}^n$, пусть $\omega \in \Omega_1^q(M)$. Тогда справедливо следующее *магическое тождество Картана* (*формула гомотопии*), выражающее производную Ли $L_{\vec{v}}$ через операции внутреннего умножения и внешнего дифференциала:

$$L_{\vec{v}}\omega = i_{\vec{v}} d\omega + d\, i_{\vec{v}}\omega.$$

**Доказательство.**

**Шаг 1.** Пусть $q = 0$, т.е. $\omega = f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Тогда, как показано в примере 1 § 6 $L_{\vec{v}} f = \vec{v}(f) = i_{\vec{v}} df$, где последнее равенство следует из формулы (3). Поскольку $i_{\vec{v}} f = 0$, то в этом случае тождество Картана справедливо.

**Шаг 2.** Пусть $\omega = dx^i$ – дифференциал $i$-ой координатной функции. В силу теоремы 1 § 6 имеем $L_{\vec{v}} dx^i = dL_{\vec{v}} x^i$. Как показано на предыдущем шаге, $L_{\vec{v}} x^i = i_{\vec{v}} dx^i$. Поэтому в данном случае

$$L_{\vec{v}}\omega = L_{\vec{v}} dx^i = dL_{\vec{v}} x^i = d\ i_{\vec{v}} dx^i = d\ i_{\vec{v}}\omega.$$

Поскольку $d\omega = d^2 x^i = 0$, то в данном случае тождество Картана снова выполнено.

**Шаг 3.** Покажем, что если тождество Картана справедливо для дифференциальных форм $\alpha \in \Omega_1^s(M)$ и $\beta \in \Omega_1^p(M)$, т.е.

$$L_{\vec{v}}\alpha = i_{\vec{v}} d\alpha + d\ i_{\vec{v}}\alpha, \qquad L_{\vec{v}}\beta = i_{\vec{v}} d\beta + d\ i_{\vec{v}}\beta, \tag{7}$$

то это тождество справедливо для дифференциальной формы $\omega = \alpha \wedge \beta$.

Согласно правилу Лейбница для внешнего дифференциала имеем $d\omega = (d\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (d\beta)$. Отсюда в силу теоремы 1 получаем

$$i_{\vec{v}} d\omega = i_{\vec{v}}\Big((d\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (d\beta)\Big) =$$

$$= (i_{\vec{v}} d\alpha) \wedge \beta + (-1)^{s-1}(d\alpha) \wedge (i_{\vec{v}}\beta) + (-1)^s (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge (d\beta) + \alpha \wedge (i_{\vec{v}} d\beta).$$

С другой стороны, согласно теореме 1 имеем $i_{\vec{v}}\omega = (i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta)$. Отсюда по правилу Лейбница для внешнего дифференциала получаем

$$d\ i_{\vec{v}}\omega = d\Big((i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^s \alpha \wedge (i_{\vec{v}}\beta)\Big) =$$

$$= (d\ i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + (-1)^{s-1}(i_{\vec{v}}\alpha) \wedge (d\beta) + (-1)^s (d\alpha) \wedge (i_{\vec{v}}\beta) + \alpha \wedge (d\ i_{\vec{v}}\beta).$$

Складывая эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} & i_{\vec{v}} d\omega + d\ i_{\vec{v}}\omega = \\ & \qquad = (i_{\vec{v}} d\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (i_{\vec{v}} d\beta) + (d\ i_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (d\ i_{\vec{v}}\beta) = \\ & \qquad\qquad = (L_{\vec{v}}\alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (L_{\vec{v}}\beta) = L_{\vec{v}}\omega, \end{aligned}$$

где предпоследнее равенство следует из равенств (7), а последнее – из формулы Лейбница для производной Ли.

**Шаг 4.** Завершим доказательство теоремы. В силу линейности операций производной Ли и внешнего дифференцирования тождество Картана достаточно доказать для одного монома

$$\omega = f dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q},$$

где $f \in C^1(M, \mathbb{R})$. Заметим, что $\omega = f\alpha = f \wedge \alpha$, где $\alpha = dx^{i_1} \wedge \ldots \wedge dx^{i_q}$. В силу утверждений, доказанных на шагах 1 и 2, тождество Картана справедливо для дифференциальных форм $f$ и $dx^i$. Отсюда в силу шага 3 получаем тождество Картана для дифференциальной формы $\omega$. $\square$

Глава 21

# ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

## § 1. Неравенства Юнга, Гельдера и Минковского

**Лемма 1.** (Неравенство Юнга.) *Для любых чисел* $a, b \geq 0$ *и чисел* $p, q > 1$ *таких, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, *справедливо неравенство Юнга:*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

**Доказательство.** Поскольку функция $f(x) = \ln x$ выпукла вверх на множестве $(0, +\infty)$ (это следует из неравенства $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$ при $x > 0$), то

$$\lambda \ln x_1 + (1 - \lambda) \ln x_2 \leq \ln(\lambda x_1 + (1 - \lambda) x_2) \qquad \forall \lambda \in [0, 1] \quad \forall x_1, x_2 > 0.$$

Применяя это неравенство для $\lambda = \frac{1}{p}$, $x_1 = a^p$, $x_2 = b^q$ и замечая, что $1 - \lambda = \frac{1}{q}$, получаем

$$\ln(ab) = \frac{\ln a^p}{p} + \frac{\ln b^q}{q} \leq \ln \left( \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q} \right),$$

откуда следует доказываемое неравенство. $\square$

**Определение.** Функция $f : X \to \mathbb{C}$ называется *измеримой*, если функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ измеримы.

**Лемма 2.** (Неравенство Гельдера.) *Пусть* $X$ – *измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$; *числа* $p, q > 1$ *таковы, что* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$; *измеримые функции* $f : X \to \mathbb{C}$ *и* $g : X \to \mathbb{C}$ *таковы, что* $\int\limits_X |f(x)|^p \, dx < +\infty$ *и* $\int\limits_X |g(x)|^q \, dx < +\infty$. *Тогда справедливо неравенство Гельдера:*

$$\int\limits_X |f(x) \, g(x)| \, dx \leq \left( \int\limits_X |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \left( \int\limits_X |g(x)|^q \, dx \right)^{1/q}.$$

**Доказательство.** Положим

$$I_f := \int\limits_X |f(x)|^p\,dx, \qquad I_g := \int\limits_X |g(x)|^q\,dx.$$

Если $I_f = 0$, то $f(x) = 0$ почти всюду на $X$ и неравенство Гельдера тривиально выполнено. Аналогично при $I_g = 0$. Поэтому будем предполагать, что $I_f > 0$ и $I_g > 0$. Применяя неравенство Юнга для $a = \frac{|f(x)|}{I_f^{1/p}}$, $b = \frac{|g(x)|}{I_g^{1/q}}$, имеем

$$\frac{|f(x)\,g(x)|}{I_f^{1/p}\cdot I_g^{1/q}} \le \frac{|f(x)|^p}{I_f\cdot p} + \frac{|g(x)|^q}{I_g\cdot q} \qquad \forall x\in X.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\frac{1}{I_f^{1/p}\cdot I_g^{1/q}}\int\limits_X |f(x)\,g(x)|\,dx \le$$

$$\le \frac{1}{I_f\cdot p}\int\limits_X |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{I_g\cdot q}\int\limits_X |g(x)|^q\,dx = \frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1.$$

Отсюда следует доказываемое неравенство. $\square$

**Замечание.** Если $|f(x)|^p = |g(x)|^q$, то неравенство Гельдера обращается в равенство. Действительно, пусть $|f(x)|^p = |g(x)|^q = h(x)$. Тогда левая и правая части неравенства Гельдера равны $\int\limits_X h(x)\,dx$.

**Замечание.** В следующем параграфе будет определена норма

$$\|f\|_{L_p(X)} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

В терминах этой нормы неравенство Гельдера принимает вид

$$\int\limits_X |f(x)\,g(x)|\,dx \le \|f\|_{L_p(X)}\cdot\|g\|_{L_q(X)}.$$

**Замечание.** В случае $p = 2$ из равенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ следует, что $q = 2$. В этом случае неравенство Гельдера принимает вид

$$\int\limits_X |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \sqrt{\int\limits_X |f(x)|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_X |g(x)|^2\, dx}.$$

Следовательно, для любых измеримых функций $f, g : X \to \mathbb{C}$ таких, что $\int\limits_X |f(x)|^2\, dx < +\infty$ и $\int\limits_X |g(x)|^2\, dx < +\infty$ справедливо неравенство

$$\left| \int\limits_X f(x)\, \overline{g(x)}\, dx \right| \leq \sqrt{\int\limits_X |f(x)|^2\, dx} \cdot \sqrt{\int\limits_X |g(x)|^2\, dx}.$$

Это неравенство совпадает с неравенством Коши–Буняковского (теорема 1 §2 главы 4)

$$|(f, g)| \leq \sqrt{(f, f)} \cdot \sqrt{(g, g)}$$

для унитарного пространства $L_2(X)$ со скалярным произведением

$$(f, g) := \int\limits_X f(x)\, \overline{g(x)}\, dx.$$

**Теорема 1.** (Неравенство Минковского.) *Пусть $X$ – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$; число $p \geq 1$ и измеримые функции $f, g : X \to \mathbb{C}$ таковы, что $\int\limits_X |f(x)|^p\, dx < +\infty$ и $\int\limits_X |g(x)|^p\, dx < +\infty$. Тогда справедливо неравенство Минковского:*

$$\left( \int\limits_X |f(x) + g(x)|^p\, dx \right)^{1/p} \leq \left( \int\limits_X |f(x)|^p\, dx \right)^{1/p} + \left( \int\limits_X |g(x)|^p\, dx \right)^{1/p}.$$

**Доказательство.** В случае $p = 1$ неравенство Минковского получается путем интегрирования неравенства $|f(x) + g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)|$. Будем предполагать, что $p > 1$.

Покажем сначала, что

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,dx < +\infty. \tag{1}$$

Определим множества $X_1 := \{x \in X : \ |f(x)| \le |g(x)|\}$, $X_2 := X \setminus X_1$. Тогда для любого $x \in X_1$ имеем $|f(x)+g(x)| \le |f(x)| + |g(x)| \le \le 2|g(x)|$. Поэтому

$$\int\limits_{X_1} |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int\limits_{X_1} 2^p|g(x)|^p\,dx < +\infty.$$

Аналогично,

$$\int\limits_{X_2} |f(x)+g(x)|^p\,dx \le \int\limits_{X_2} 2^p|f(x)|^p\,dx < +\infty.$$

Отсюда и из равенства

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int\limits_{X_1} |f(x)+g(x)|^p\,dx + \int\limits_{X_2} |f(x)+g(x)|^p\,dx$$

следует неравенство (1).

Заметим, что

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int\limits_X |f(x)+g(x)|\cdot|f(x)+g(x)|^{p-1}\,dx \le$$

$$\le \int\limits_X |f(x)|\cdot\Big|f(x)+g(x)\Big|^{p-1}\,dx + \int\limits_X |g(x)|\cdot\Big|f(x)+g(x)\Big|^{p-1}\,dx.$$

Определим число $q$ из условия $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_X |f(x)|\cdot\Big|f(x)+g(x)\Big|^{p-1}\,dx \le$$

$$\le \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}\cdot\left(\int\limits_X |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q} =$$

$$= \left( \int\limits_X |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/q}.$$

Аналогично,

$$\int\limits_X |g(x)| \cdot \Big| f(x) + g(x) \Big|^{p-1} dx \le$$

$$\le \left( \int\limits_X |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \cdot \left( \int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/q}.$$

Следовательно,

$$\int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \le$$

$$\le \left( \left( \int\limits_X |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} + \left( \int\limits_X |g(x)|^p \, dx \right)^{1/p} \right) \cdot \left( \int\limits_X |f(x)+g(x)|^p \, dx \right)^{1/q}.$$

Отсюда следует неравенство Минковского. □

## § 2. Пространства $L_p$

В этом параграфе через $X$ обозначим некоторое измеримое по Лебегу множество в $\mathbb{R}^n$.

**Определение.** Функции $f : X \to \mathbb{C}$ и $g : X \to \mathbb{C}$ называются *эквивалентными* (пишут $f \sim g$), если $f(x) = g(x)$ почти всюду на $X$.

Заметим, что это отношение является отношением эквивалентности, т.к. обладает свойствами рефлексивности, симметричености и транзитивности.

**Определение.** Пусть $p \in [1, +\infty)$. Через $L_p(X) = L_p(X, \mathbb{C})$ обозначим множество измеримых функций $f : X \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\int\limits_X |f(x)|^p \, dx < +\infty. \tag{1}$$

Через $L_p(X, \mathbb{R})$ обозначим множество измеримых функций $f : X \to \to \mathbb{R}$, удовлетворяющих неравенству (1).

Примем соглашение об отождествлении эквивалентных функций, т.е. будем считать, что эквивалентные функции $f, g \in L_p(X)$ соответствуют одному и тому же элементу пространства $L_p(X)$. В более строгой терминологии это означает, что элементами пространства $L_p(X)$ являются классы эквивалентности измеримых функций $f : X \to \mathbb{C}$, удовлетворяющих неравенству (1).

Заметим, что если функции $f, g : X \to \mathbb{C}$ эквивалентны и $\int\limits_X f(x)\,dx$ существует, то $\int\limits_X g(x)\,dx$ существует и $\int\limits_X g(x)\,dx = \int\limits_X f(x)\,dx$. Поэтому интеграл $\int\limits_X f(x)\,dx$ корректно определен на классах эквивалентных функций, т.е. не зависит от конкретного представителя этого класса.

Для любой функции $f \in L_p(X)$ определим

$$\|f\|_{L_p(X)} := \left(\int\limits_X |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}, \tag{2}$$

**Теорема 1.** *Пространство $L_p(X)$ с нормой (2) является нормированным пространством.*

**Доказательство.** Пространство $L_p(X)$ является линейным пространством с естественными операциями сложения функций и умножения функций на числа. Соглашение об отождествлении эквивалентных функций (или, что тоже самое, переход к классам эквивалентности) не нарушает корректности линейных операций, т.к. если $f_i \sim g_i$ при $i = 1, 2$, то для любых $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ справедливо соотношение $\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 \sim \alpha_1 g_1 + \alpha_2 g_2$.

Проверим аксиомы нормы:

(1) $\forall f \in L_p(X) \hookrightarrow\ \|f\|_{L_p(X)} \geq 0$;

(2) $\forall \alpha \in \mathbb{C}\quad \forall f \in L_p(X) \hookrightarrow\ \|\alpha f\|_{L_p(X)} = |\alpha| \cdot \|f\|_{L_p(X)}$;

(3) $\forall f, g \in L_p(X) \hookrightarrow\ \|f + g\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{L_p(X)} + \|g\|_{L_p(X)}$;

(4) $\forall f \in L_p(X) : \|f\|_{L_p(X)} = 0 \hookrightarrow\ f = \overline{0}$.

Аксиомы (1), (2) следуют непосредственно из формулы (2). Аксиома (3) вытекает из неравенства Минковского. Аксимома (4) выполняется в силу соглашения об отождествлении эквивалентных функций. □

**Лемма 1.** *Если* $1 \le p_1 < p_2$, $X$ *конечно измеримо, то* $L_{p_2}(X) \subset \subset L_{p_1}(X)$ *и*

$$\|f\|_{L_{p_1}(X)} \le \|f\|_{L_{p_2}(X)} \cdot \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{1}{p_1}-\frac{1}{p_2}} \qquad \forall f \in L_{p_2}(X). \tag{3}$$

**Доказательство.** Пусть $f \in L_{p_2}(X)$. Заметим, что функция $f$ измерима. Обозначим $p = \frac{p_2}{p_1}$. Тогда $p > 1$. Число $q$ определим из равенства $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, т.е. $q = \frac{p}{p-1} = \frac{p_2}{p_2-p_1}$. Положим $h(x) = |f(x)|^{p_1}$, $g(x) = 1$. Тогда $\int\limits_X |h(x)|^p\,dx = \int\limits_X |f(x)|^{p_2}\,dx < +\infty$ и $\int\limits_X |g(x)|^q\,dx = = \mu(X) < +\infty$. В силу неравенства Гельдера имеем

$$\int\limits_X |h(x)\,g(x)|\,dx \le \left(\int\limits_X |h(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int\limits_X |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q},$$

т.е.

$$\int\limits_X |f(x)|^{p_1}\,dx \le \left(\int\limits_X |f(x)|^{p_2}\,dx\right)^{\frac{p_1}{p_2}} \cdot \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{p_2-p_1}{p_2}} < +\infty.$$

Поэтому $f \in L_{p_1}(X)$ и справедливо неравенство (3). $\square$

**Замечание.** Пусть $1 \le p_1 < p_2$. Условие конечной измеримости множества $X$ для включения $L_{p_2}(X) \subset L_{p_1}(X)$ существенно. Пусть, например, $X = [1, +\infty)$, $p_1 < p < p_2$, $f(x) = x^{-\frac{1}{p}}$. Тогда функция $f$ измерима, $\int\limits_X |f(x)|^{p_1}dx = +\infty$, $\int\limits_X |f(x)|^{p_2}dx < +\infty$. Поэтому $f \in \in L_{p_2}(X) \setminus L_{p_1}(X)$ и, следовательно, $L_{p_2}(X) \not\subset L_{p_1}(X)$.

**Задача 1.** Пусть $1 \le p_1 < p_2$ и функция $f \in L_{p_1}(X)$ ограничена. Докажите, что $f \in L_{p_2}(X)$.

**Задача 2.** Пусть $1 \le p_1 < p_2$ и $\mu(X) > 0$. Докажите, что $L_{p_1}(X) \not\subset L_{p_2}(X)$.

**Определение.** Функция $f : X \to \mathbb{C}$ называется *интегрируемой*, если функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ интегрируемы на $X$. Интегралом интегрируемой функции $f : X \to \mathbb{C}$ называется

$$\int\limits_X f(x)\,dx := \int\limits_X \operatorname{Re} f(x)\,dx + i \int\limits_X \operatorname{Im} f(x)\,dx.$$

**Лемма 2.** *Функция $f : X \to \mathbb{C}$ является интегрируемой $\Leftrightarrow$ $f \in L_1(X)$.*

**Доказательство.** "$\Rightarrow$". Пусть функция $f : X \to \mathbb{C}$ интегрируема. Тогда функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ измеримы на $X$. Так как

$$|f(x)| = \sqrt{(\operatorname{Re} f(x))^2 + (\operatorname{Im} f(x))^2} \leq |\operatorname{Re} f(x)| + |\operatorname{Im} f(x)|,$$

то $\int\limits_X |f(x)|\,dx < +\infty$. Следовательно, $f \in L_1(X)$.

"$\Leftarrow$". Пусть $f \in L_1(X)$. Тогда функции $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$ измеримы на $X$. Поскольку $|\operatorname{Re} f(x)| \leq |f(x)|$, то $\int\limits_X |\operatorname{Re} f(x)|\,dx < +\infty$. Отсюда согласно теореме о связи интегрируемости функции и интегрируемости ее модуля получаем интегрируемость функции $\operatorname{Re} f(x)$ на $X$. Аналогично, функция $\operatorname{Im} f(x)$ интегрируема на $X$. Следовательно, функция $f$ интегрируема на $X$. $\square$

**Теорема 2.** *1) Пространство $L_2(X) = L_2(X, \mathbb{C})$ является унитарным пространством ($L_2(X, \mathbb{R})$ – евклидовым пространством), где скалярное произведение функций $f, g \in L_2(X)$ определяется формулой*

$$(f, g) = \int\limits_X f(x)\,\overline{g(x)}\,dx, \tag{4}$$

*где $\overline{g(x)}$ – комплексно сопряженное к числу $g(x)$. При этом норма пространства $L_2(X)$ является евклидовой, т.е.*

$$\|f\|_{L_2(X)} = \sqrt{(f, f)} \quad \forall f \in L_2(X). \tag{5}$$

*2) В пространстве $L_p(X)$ при $p \in [1, +\infty)$, $p \neq 2$, $\mu(X) > 0$ нельзя ввести скалярное произведение так, чтобы $\|f\|_{L_p(X)} = \sqrt{(f, f)}$.*

**Доказательство.** 1) Пусть $f, g \in L_2(X)$. Так как $|f(x)\,\overline{g(x)}| \leq$ $\leq \frac{|f(x)|^2 + |g(x)|^2}{2}$, то $\int\limits_X |f(x)\,\overline{g(x)}|\,dx < +\infty$. Следовательно, функция $f(x)\,\overline{g(x)}$ интегрируема на $X$.

Проверим, что скалярное произведение (4) удовлетворяет аксиомам унитарного пространства:

(1) $\forall f \in L_2(X) \hookrightarrow\ (f, f) \geq 0$;

(2) $\forall f, g, h \in L_2(X)\ \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \hookrightarrow\ (\alpha\, f + \beta\, g, h) = \alpha\,(f, h) + \beta\,(g, h)$;

(3) $\forall f, g \in L_2(X) \hookrightarrow \ (g, f) = \overline{(f, g)}$;

(4) $\forall f \in L_2(X) : (f, f) = 0 \hookrightarrow \ f = \overline{0}$.

Аксиомы (1)–(3) следуют непосредственно из формулы (4). Аксиома (4) выполнена в силу соглашения об отождествлении. Формула (5) следует из (2), (4).

2) Пусть $p \in [1, +\infty)$, $p \neq 2$, $\mu(X) > 0$. Предположим, что в $L_p(X)$ можно ввести скалярное произведение так, чтобы для нормы $\|f\|_{L_p(X)}$ справедливо равенство $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$. Тогда из аксиом скалярного произведения следует, что

$$\|f+g\|^2 + \|f-g\|^2 = 2\|f\|^2 + 2\|g\|^2 \quad \forall f, g \in L_p(X). \tag{6}$$

Поскольку $\mu(X) > 0$, то существуют два непересекающихся подмножества $X_1, X_2 \subset X$ таких, что $\mu(X_1) = \mu(X_2) = \mu > 0$. Рассмотрим функции

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_1, \\ 0, & x \notin X_1, \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, & x \in X_2, \\ 0, & x \notin X_2. \end{cases}$$

В силу формулы (2) для нормы пространства $L_p(X)$ имеем $\|f\| = \|g\| = \mu^{\frac{1}{p}}$, $\|f+g\| = \|f-g\| = (2\mu)^{\frac{1}{p}}$. Подставляя в формулу (6), получаем $(2\mu)^{\frac{2}{p}} = 2\mu^{\frac{2}{p}}$, что при $p \neq 2$ неверно. $\square$

**Определение.** Функция $f : X \to \mathbb{C}$ называется *существенно ограниченной*, если существует множество $X_0 \subset X$ меры нуль такое, что функция $f$ ограничена на множестве $X \setminus X_0$.

**Определение.** Через $L_\infty(X)$ обозначим множество измеримых существенно ограниченных функций $f : X \to \mathbb{C}$. Для любой функции $f \in L_\infty(X)$ определим

$$\|f\|_{L_\infty(X)} := \operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} |f(x)|, \tag{7}$$

где

$$\operatorname*{ess\,sup}_{x \in X} g(x) := \inf_{\substack{X_0 \subset X \\ \mu(X_0) = 0}} \ \sup_{x \in X \setminus X_0} g(x).$$

Так же как и для пространств $L_p(X)$, примем соглашение об отождествлении эквивалентных функций, т.е. будем считать, что эквивалентные функции $f, g \in L_\infty(X)$ соответствуют одному и тому же элементу пространства $L_\infty(X)$.

**Замечание.** Пространство $L_\infty(X)$ с нормой (7) является нормированным пространством. Докажите это утверждение, проверив аксиомы нормы для $L_\infty(X)$.

**Задача 3.** Покажите, что если множество $X$ конечно измеримо, то $L_\infty(X) \subset L_p(X)$ для любого $p \in [1, +\infty)$.

## § 3. Эквивалентные и неэквивалентные нормы

**Определение.** Пусть в линейном пространстве $X$ заданы две нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$, $x \in X$. Эти нормы называются *эквивалентными*, если существуют константы $\alpha, \beta > 0$ такие, что

$$\alpha\|x\| \le \|x\|' \le \beta\|x\| \qquad \forall x \in X. \tag{1}$$

**Теорема 1.** *В конечномерном линейном пространстве $X$ любые две нормы эквивалентны.*

**Доказательство.** Пусть размерность пространства $X$ равна $n$. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ – базис в $X$. Для любого $x \in X$ через $x_1, \ldots, x_n$ будем обозначать координаты вектора $x$ в этом базисе: $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n$. Рассмотрим норму

$$\|x\|_2 := \sqrt{|x_1|^2 + \ldots + |x_n|^2}.$$

Эта норма является евклидовой относительно скалярного произведения, заданного формулой

$$(x, y) = x_1\overline{y}_1 + \ldots + x_n\overline{y}_n, \quad \text{где } x = x_1e_1 + \ldots + x_ne_n,\ y = y_1e_1 + \ldots + y_ne_n.$$

Заметим, что если две нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны норме $\|x\|_2$, то нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны между собой. Поэтому достаточно показать, что произвольная норма $\|x\|$ эквивалентна евклидовой норме $\|x\|_2$.

Используя аксимомы нормы, получаем для любого элемента $x = x_1 e_1 + \ldots + x_n e_n \in X$:

$$\|x\| \le \sum_{k=1}^{n} |x_k| \cdot \|e_k\| \le C\|x\|_2,$$

где $C := \sum\limits_{k=1}^{n} \|e_k\|$. Поэтому

$$\Big| \|x_1\| - \|x_2\| \Big| \leq \|x_1 - x_2\| \leq C\|x_1 - x_2\|_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in X.$$

Отсюда следует непрерывность функции $f(x) = \|x\|$ относительно евклидовой нормы $\|x\|_2$. Используя теорему Вейерштрасса о существовании минимума и максимума непрерывной на компакте функции, получаем существование

$$m := \min_{x \in X:\ \|x\|_2 = 1} \|x\|, \qquad M := \max_{x \in X:\ \|x\|_2 = 1} \|x\|.$$

Поскольку минимум достигается на некотором $x \in X \setminus \{\overline{0}\}$, то $m > 0$. В силу определений минимума и максимума имеем

$$m \leq \|x\| \leq M \qquad \forall x \in X:\ \|x\|_2 = 1.$$

Следовательно,

$$m\|x\|_2 \leq \|x\| \leq M\|x\|_2 \qquad \forall x \in X,$$

т.е. нормы $\|x\|$ и $\|x\|_2$ эквивалентны. $\square$

Напомним, что норма в линейном пространстве $X$ порождает топологию на $X$, т.е. семейство открытых множеств $A \subset X$, где множество $A \subset X$ считается открытым, если для любой точки $a \in A$ найдется число $\delta > 0$ такое, что $U_\delta(a) \subset A$, где

$$U_\delta(a) := \{x \in X:\ \|x - a\| < \delta\}.$$

Будем говорить, что последовательность $\{x_k\}$ элементов нормированного пространства $X$ *сходится по норме* $\|x\|$ к элементу $x_0 \in X$, если $\|x_k - x_0\| \to 0$ при $k \to \infty$.

**Замечание.** Последовательность $\{x_k\}$ элементов нормированного пространства $X$ *сходится по норме* $\|x\|$ к элементу $x_0 \in X$ тогда и только тогда, когда

$$\forall U(x_0)\ \exists N:\ \forall k \geq N \hookrightarrow\ x_k \in U(x_0),$$

где $U(x_0)$ – произвольная окрестность точки $x_0$, т.е. произвольное открытое (в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|$) множество, содержащее точку $x_0$.

**Теорема 2.** *Для двух норм $\|x\|$ и $\|x\|'$ в линейном пространстве $X$ следующие условия равносильны:*

(1) *нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны;*

(2) *последовательность $\{x_k\}$ элементов $X$ сходится к $x_0 \in X$ по норме $\|x\|$ тогда и только тогда, когда $\{x_k\}$ сходится к $x_0$ по норме $\|x\|'$;*

(3) *нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ порождают одну и ту же топологию на $X$.*

**Доказательство.** (1)$\Rightarrow$(3). Пусть нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ эквивалентны, т.е. выполнены неравенства (1). Пусть множество $A \subset X$ открыто в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|$. Покажем, что $A$ открыто в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|'$. Пусть $a \in A$. Тогда существует число $\delta > 0$ такое, что

$$\{x \in X: \ \|x - a\| < \delta\} \subset A.$$

Положим $\delta' := \alpha\delta$. Тогда если $\|x - a\|' < \delta'$, то в силу первого из неравенств (1) имеем $\alpha\|x - a\| \leq \|x - a\|' < \delta' = \alpha\delta$. Следовательно, $x \in \{x \in X: \ \|x - a\| < \delta\} \subset A$. Поэтому

$$\{x \in X: \ \|x - a\|' < \delta'\} \subset A.$$

Таким образом, $A$ открыто в смысле топологии, порожденной нормой $\|x\|'$. Аналогично, верно и обратное. Следовательно, нормы $\|x\|$ и $\|x\|'$ порождают одну и ту же топологию на $X$.

(3)$\Rightarrow$(2). Достаточно воспользоваться предыдущим замечанием, согласно которому топология, порожденная нормой, определяет сходимость по норме.

(2)$\Rightarrow$(1). Пусть выполнено условие (2). Предположим, что условие (1) не выполнено. Пусть, например, не существует числа $\beta > 0$ такого, что $\|x\|' \leq \beta\|x\|$ для любого $x \in X$. Поэтому для любого $k \in \mathbb{N}$ найдется $y_k \in X$: $\|y_k\|' > k\|y_k\|$. Полагая $x_k = \frac{y_k}{\|y_k\|'}$, получим $\|x_k\|' = 1$, $\|x_k\| < \frac{1}{k}$. Поэтому последовательность $\{x_k\}$ сходится к $\overline{0}$ по норме $\|x\|$, но не сходится к $\overline{0}$ по норме $\|x\|'$. Это противоречит условию (2). $\square$

**Пример 1.** Пусть $1 \leq p_1 < p_2$. Покажем, что нормы $\|f\|_{L_{p_1}[0,1]}$ и $\|f\|_{L_{p_2}[0,1]}$ в пространстве непрерывных функций $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ не эквивалентны.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$f_k(x) = \begin{cases} 1 - kx, & x \in \left[0, \frac{1}{k}\right], \\ 0, & x \in \left[\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Заметим, что

$$\int\limits_0^1 |f_k(x)|^p \, dx = \int\limits_0^{\frac{1}{k}} (1 - kx)^p \, dx = - \left. \frac{(1 - kx)^{p+1}}{k(p+1)} \right|_0^{\frac{1}{k}} = \frac{1}{k(p+1)}.$$

Поэтому

$$\|f_k\|_{L_p[0,\,1]} = \frac{1}{(k(p+1))^{\frac{1}{p}}}.$$

Следовательно,

$$\frac{\|f_k\|_{L_{p_2}[0,\,1]}}{\|f_k\|_{L_{p_1}[0,\,1]}} = \frac{(k(p_1+1))^{\frac{1}{p_1}}}{(k(p_2+1))^{\frac{1}{p_2}}} = \frac{(p_1+1)^{\frac{1}{p_1}}}{(p_2+1)^{\frac{1}{p_2}}} \, k^{\frac{1}{p_1} - \frac{1}{p_2}} \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Таким образом, нормы $\|f\|_{L_{p_1}[0,\,1]}$ и $\|f\|_{L_{p_2}[0,\,1]}$ не эквивалентны.

**Замечание.** Если две нормы $\|f\|$ и $\|f\|'$ в линейном пространстве $F$ связаны неравенством

$$\|f\|' \leq \beta \|f\| \quad \forall f \in F,$$

где $\beta$ – некоторая константа, то из сходимости последовательности элементов $f_k \in F$ к элементу $f_0 \in F$ по норме $\|f\|$ следует сходимость этой последовательности к $f_0$ по норме $\|f\|'$.

В частности, пусть $X$ – конечно измеримое множество в $\mathbb{R}^n$ и $1 \leq$ $\leq p_1 < p_2 < +\infty$. Согласно лемме 1 § 2

$$\|f\|_{L_{p_1}(X)} \leq \|f\|_{L_{p_2}(X)} \cdot \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{p_2 - p_1}{p_1 p_2}} \qquad \forall f \in L_{p_2}(X).$$

Поэтому для последовательности функций $f_k \in L_{p_2}(X)$ и функции $f_0 \in L_{p_2}(X)$ имеем

$$f_k \xrightarrow{L_{p_2}(X)} f_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_k \xrightarrow{L_{p_1}(X)} f_0.$$

**Определение.** Пусть $X$ – компакт в $\mathbb{R}^n$ или компактное топологическое пространство. Через $C(X,\mathbb{C})$ будем обозначать пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$ с нормой

$$\|f\|_{C(X)} := \max_{x\in X} |f(x)|,$$

через $C(X,\mathbb{R})$ – пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ с той же нормой. Если понятно из контекста или не имеет значения, о каком из пространств $C(X,\mathbb{C})$ или $C(X,\mathbb{R})$ идет речь, то для краткости соответсвующее пространство будем обозначать через $C(X)$.

Легко видеть, что для компакта $X \subset \mathbb{R}^n$ и $p \geq 1$

$$\|f\|_{L_p(X)} \leq \|f\|_{C(X)} \Big(\mu(X)\Big)^{\frac{1}{p}} \qquad \forall f \in C(X). \tag{2}$$

Поэтому для функций $f_k, f_0 \in C(X)$ получаем

$$f_k \xrightarrow{C(X)} f_0 \qquad \Longrightarrow \qquad f_k \xrightarrow{L_p(X)} f_0.$$

**Определение.** Сходимость последовательности функций $f_k$ по норме пространства $L_1(X)$ называется *сходимостью в среднем.* Сходимость $\{f_k\}$ по норме пространства $L_2(X)$ называется *сходимостью в смысле среднего квадратичного.*

Таким образом, из равномерной сходимости последовательности $\{f_k\}$ на компакте $X \subset \mathbb{R}^n$ следует сходимость $\{f_k\}$ в смысле среднего квадратичного, а из сходимости этой последовательности в смысле среднего квадратичного следует ее сходимость в среднем.

**Определение.** Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Последовательность функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ называется *сходящейся по мере* к функции $f : X \to \mathbb{R}$, если для любого числа $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \mu\left\{x \in X : \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\} = 0.$$

**Лемма 1.** *Пусть последовательность функций $f_k : X \to \mathbb{R}$ сходится к функции $f : X \to \mathbb{R}$ почти всюду на конечно измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$. Тогда последовательность $f_k$ сходится к $f$ по мере.*

**Доказательство.** Обозначим

$$\widehat{X} := \left\{x \in X: \ f(x) = \lim_{k\to\infty} f_k(x)\right\}.$$

Так как $f_k$ сходится к $f$ почти всюду на $X$, то $\mu(X \setminus \widehat{X}) = 0$.

Если $x \in \widehat{X}$, то по определению предела найдется номер $N$ такой, что

$$\forall k \geq N \hookrightarrow \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Следовательно, $\widehat{X} \subset \bigcup\limits_{N\in\mathbb{N}} X_N$, где

$$X_N := \{x \in X: \ \forall k \geq N \hookrightarrow \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\}. \tag{3}$$

Поскольку $X_N \subset X_{N+1}$ при всех $N \in \mathbb{N}$, то в силу непрерывности меры Лебега (теорема 2 §3 главы 8) имеем $\mu(\widehat{X}) = \lim\limits_{k\to\infty} \mu(X_k)$. Следовательно,

$$\mu(X \setminus X_k) = \mu(X) - \mu(X_k) = \mu(\widehat{X}) - \mu(X_k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Из равенства (3) следует, что

$$X_k \subset \{x \in X: \ |f_k(x) - f(x)| < \varepsilon\} \qquad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Поэтому

$$\{x \in X: \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \subset X \setminus X_k \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

а значит,

$$0 \leq \mu \ \{x \in X: \ |f_k(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \leq \mu(X \setminus X_k) \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

откуда вытекает доказываемое утверждение. □

**Замечание.** Условие конечности меры множества $X$ существенно в лемме 1. Пусть, например, $X = \mathbb{R}$ и

$$f_k(x) = \begin{cases} 1, & x \geq k, \\ 0, & x < k. \end{cases}$$

Тогда последовательность $\{f_k(x)\}$ сходится к $f(x) = 0$ всюду на $\mathbb{R}$, но не сходится по мере.

**Задача 1.** Приведите пример последовательности функций $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$, которые сходятся к функции $f(x) = 0$ на $[0,1]$ по мере, но не сходятся ни в одной точке $x \in [0,1]$.

**Лемма 2.** *Для любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$, любой измеримой неотрицательной функции $f : X \to [0,+\infty)$ и любого числа $\varepsilon > 0$ справедливо* неравенство Чебышева

$$\mu\{x \in X :\ f(x) \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{\varepsilon} \int\limits_X f(x)\, dx.$$

**Доказательство.** Обозначим $Y_\varepsilon := \{x \in X :\ f(x) \geq \varepsilon\}$. Тогда

$$\int\limits_X f(x)\, dx = \int\limits_{Y_\varepsilon} f(x)\, dx + \int\limits_{X \setminus Y_\varepsilon} f(x)\, dx \geq \int\limits_{Y_\varepsilon} f(x)\, dx \geq \varepsilon \mu(Y_\varepsilon).$$

□

**Замечание.** Из неравенства Чебышева следует, что если $X \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество и последовательность функций $f_k \in L_1(X)$ сходится к функции $f \in L_1(X)$ в среднем, то $f_k$ сходится к $f$ по мере.

**Задача 2.** Приведите пример последовательности функций $f_k \in$ $\in L_1(X)$, которые сходятся к функции $f(x) = 0$ на $[0,1]$ по мере и поточечно, но не сходятся в среднем.

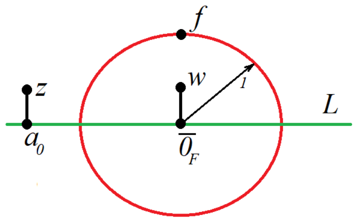
Как известно, критерием компактности множества в конечномерном нормированном пространстве является ограниченность и замкнутость этого множества. В бесконечномерном нормированном пространстве условия ограниченности и замкнутости множества не достаточны для его компактности. Мы докажем теорему о том, что в любом бесконечномерном нормированном пространстве замкнутый шар не является компактом. Для доказательства этой теоремы потребуется следующая лемма.

**Лемма 3.** *Пусть $L$ – конечномерное линейное подпространство нормированного пространства $F$ и $L \neq F$. Тогда найдется элемент $f \in F$ такой, что $\|f\| = 1$ и $\|f - g\| \geq 1$ для любого $g \in L$.*

**Доказательство.** Поскольку пространство $L \neq F$, то найдется $z \in F \setminus L$. Рассмотрим множество $A = \{a \in L : \ \|z - a\| \leq \|z\|\}$. Заметим, что $0 \in A$. Поскольку множество $A$ ограничено и замкнуто в конечномерном пространстве $L$ с нормой пространства $F$, то $A$ компактно и, следовательно, $\min\limits_{a \in A} \|z - a\|$ достигается в некоторой точке $a_0 \in A$. При этом для любого $b \in L \setminus A$ имеем $\|z - b\| \geq \|z\| = \|z - \overline{0}_F\| \geq \|z - a_0\|$, поскольку $\overline{0}_F \in A$. Следовательно,

$$\|z - b\| \geq \|z - a_0\| \qquad \forall b \in L. \tag{4}$$

Обозначим $w = z - a_0$. Тогда для любого $h \in L$ имеем $b = h + a_0 \in L$ и в силу неравенства (4) получаем




$$\|w - h\| = \|z - b\| \geq \|z - a_0\| = \|w\| > 0.$$

Деля это неравенство на $\|w\|$, приходим к неравенству

$$\left\| \frac{w}{\|w\|} - \frac{h}{\|w\|} \right\| \geq 1 \qquad \forall h \in L.$$

Обозначая $f := \frac{w}{\|w\|}$ и применяя предыдущее соотношение для $h = \|w\| g$, получаем требуемое утверждение. $\square$

**Теорема 3.** *В бесконечномерном нормированном пространстве $F$ любой замкнутый шар не является компактом.*

**Доказательство.** Любой замкнутый шар получается из единичного шара $B_1 := \{f \in F : \ \|f\| \leq 1\}$ путем умножения его на число и сдвига. При этих операциях компактность множества сохраняется. Поэтому достаточно доказать, что единичный шар $B_1$ не является компактом.

Фиксируем произвольный элемент $f_1 \in \partial B_1$. Пусть на $k$-ом шаге заданы элементы $f_1, \ldots, f_k \in \partial B_1$ такие, что $\|f_i - f_j\| \geq 1$ при всех различных $i, j \in \overline{1, k}$. Обозначим через $L_k$ линейную оболочку векторов $f_1, \ldots, f_k$. По лемме 3 найдется вектор $f_{k+1} \in \partial B_1$ такой, что $\|f_{k+1} - f_i\| \geq 1$ для всех $i \in \overline{1, k}$. Таким образом, процесс построения $\{f_k\}$ можно продолжать бесконечно. В результате получаем последовательность $\{f_k\}$ элементов $B_1$ такую, что $\|f_i - f_j\| \geq 1$

при всех различных $i, j$. Поэтому из этой последовательности нельзя выделить сходящуюся подпоследовательность, а значит, шар $B_1$ не является компактом. $\square$

## § 4. Линейные операторы

**Определение.** Пусть $X, Y$ – вещественные или комплексные нормированные пространства. *Линейным оператором*, действующим из $X$ в $Y$ называется отображение $A : X \to Y$, обладающее свойством линейности

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha A x_1 + \beta A x_2 \qquad \forall x_1, x_2 \in X \quad \forall \alpha, \beta,$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, если $X, Y$ – вещественные нормированные пространства и $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, если $X, Y$ – комплексные нормированные пространства.

*Нормой* линейного оператора $A : X \to Y$ называется

$$\|A\| := \sup_{x \in X:\ \|x\|_X = 1} \|Ax\|_Y. \tag{1}$$

Линейный оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если $\|A\| < +\infty$.

Множество всех линейных ограниченных операторов $A : X \to Y$ обозначим через $\mathcal{L}(X, Y)$.

**Замечание.** Если $A : X \to Y$ – линейный оператор, то

$$\|Ax\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X \qquad \forall x \in X. \tag{2}$$

Действительно, если $x = 0$, то $Ax = 0$ и неравенство (2) справедливо. Если $x \ne 0$, то положим $x_1 = \frac{x}{\|x\|_X}$. Тогда $\|x_1\|_X = 1$ и, следовательно, $\|Ax_1\|_Y \le \|A\|$. Поэтому $\|Ax\|_Y \le \|A\| \cdot \|x\|_X$.

**Теорема 1.** *Пусть $X, Y$ – нормированные пространства. Для линейного оператора $A : X \to Y$ следующие условия эквивалентны:*

(1) *оператор $A$ непрерывен в любой точке пространства $X$;*
(2) *оператор $A$ непрерывен в точке $0 \in X$;*
(3) *оператор $A$ ограничен.*

**Доказательство.** (1) $\Rightarrow$ (2) тривиально.

(2) $\Rightarrow$ (3). Применяя определение непрерывности отображения $A$ в точке $0 \in X$ для $\varepsilon = 1$, получаем существование числа $\delta > 0$ такого,

что
$$\forall x \in X: \ \|x\|_X \le \delta \hookrightarrow \ \|Ax\|_Y \le 1.$$
Используя это условие для $x = \delta \cdot x'$ в силу линейности оператора $A$ имеем
$$\forall x' \in X: \ \|x'\|_X \le 1 \hookrightarrow \ \|Ax'\|_Y \le \frac{1}{\delta}.$$
Следовательно, $\|A\| \le \frac{1}{\delta} < +\infty$, а значит, оператор $A$ ограничен.

(3) $\Rightarrow$ (1). Пусть оператор $A$ ограничен, т.е. $\|A\| < +\infty$. Покажем непрерывность $A$ в произвольной точке $x_0 \in X$. Пусть задано произвольное $\varepsilon > 0$. Определим $\delta := \frac{\varepsilon}{\|A\|}$, если $\|A\| > 0$ и $\delta := 1$, если $\|A\| = 0$. В любом случае $\|A\| \cdot \delta \le \varepsilon$. Тогда для любого $x \in X$ такого, что $\|x - x_0\|_X < \delta$ имеем
$$\|Ax - Ax_0\|_Y = \|A(x - x_0)\|_Y \overset{(2)}{\le} \|A\| \cdot \|x - x_0\|_X \le \|A\| \cdot \delta \le \varepsilon.$$
Поэтому отображение $A$ непрерывно в точке $x_0$. □

**Лемма 1.** *Пусть $X, Y$ – нормированные пространства. Тогда множество $\mathcal{L}(X, Y)$ является нормированным пространством с нормой (1).*

**Доказательство.** Пусть $A_1, A_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$, $\alpha, \beta$ – вещественные или комплексные числа (в зависимости от того, являются ли пространства $X, Y$ вещественными или комплексными). Определим оператор $\alpha A_1 + \beta A_2$ из $X$ в $Y$ по формуле
$$(\alpha A_1 + \beta A_2)x := \alpha A_1 x + \beta A_2 x \qquad \forall x \in X.$$
Из линейности операторов $A_1$ и $A_2$ следует линейность оператора $A = \alpha A_1 + \beta A_2$. Для любого $x \in X$ такого, что $\|x\|_X = 1$ имеем
$$\|(\alpha A_1 + \beta A_2)x\|_Y = \|\alpha A_1 x + \beta A_2 x\|_Y \le$$
$$\le |\alpha| \cdot \|A_1 x\|_Y + |\beta| \cdot \|A_2 x\|_Y \le |\alpha| \cdot \|A_1\| + |\beta| \cdot \|A_2\|.$$
Следовательно,
$$\|\alpha A_1 + \beta A_2\| \le |\alpha| \cdot \|A_1\| + |\beta| \cdot \|A_2\| < +\infty. \tag{3}$$
Поэтому оператор $\alpha A_1 + \beta A_2$ ограничен, т.е. $\alpha A_1 + \beta A_2 \in \mathcal{L}(X, Y)$. Легко видеть, что для $\mathcal{L}(X, Y)$ выполнены все аксиомы линейного

пространства. Используя аксиомы нормы для пространств $X$ и $Y$, получаем аксиомы нормы для пространства $\mathcal{L}(X, Y)$. В частности, неравенство треугольника для пространства $\mathcal{L}(X, Y)$ следует из соотношений (3). $\square$

**Определение .** *Банаховым пространством* называется полное нормированное пространство.

**Теорема 2.** *Пусть $X$ – нормированное пространство, $Y$ – банахово пространство. Тогда пространство $\mathcal{L}(X, Y)$ является банаховым.*

**Доказательство.** Рассмотрим фундаментальную последовательность операторов $A_k \in \mathcal{L}(X, Y)$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N : \; \forall k, m \geq N \hookrightarrow \; \|A_k - A_m\| < \varepsilon. \tag{4}$$

Поскольку для любого $x \in X$ и для любых $k, m \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $\|A_k x - A_m x\|_Y \leq \|A_k - A_m\| \cdot \|x\|_X$, то последовательность $\{A_k x\}$ фундаментальна в $Y$. В силу полноты пространства $Y$ эта последовательность сходится к некоторому элементу пространства $Y$, который мы обозначим через $Ax$. Таким образом, определено отображение $A : X \to Y$. Фиксируем произвольные $x_1, x_2 \in X$ и произвольные числа $\alpha$ и $\beta$. Переходя к пределу при $k \to \infty$ в равенстве

$$A_k(\alpha x_1 + \beta x_2) = A_k \alpha x_1 + A_k \beta x_2,$$

получаем равенство

$$A(\alpha x_1 + \beta x_2) = A\alpha x_1 + A\beta x_2.$$

Поэтому отображение $A : X \to Y$ является линейным оператором.

Используя соотношение (3), для любого $x \in X$ такого, что $\|x\|_X = 1$ и для любых $k, m \geq N$ имеем

$$\|A_k x - A_m x\|_Y \leq \|A_k - A_m\| < \varepsilon.$$

Переходя к пределу в этом неравенстве при $m \to \infty$, получаем

$$\|A_k x - Ax\|_Y \leq \varepsilon \qquad \forall k \geq N \quad \forall x \in X : \; \|x\|_X = 1.$$

Поэтому линейный оператор $A$ ограничен и $\|A_k - A\| \leq \varepsilon$ для любого $k \geq N$. Следовательно, последовательность операторов $A_k$ сходится к оператору $A \in \mathcal{L}(X, Y)$. $\square$

## § 5. Линейные функционалы

**Определение.** Линейный оператор из вещественного или комплексного нормированного пространства $X$ в $\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$ соответственно называется *линейным функционалом.*

Значение функционала $f$ на векторе $x \in X$ обозначают через $f(x)$ или $\langle f, x\rangle$.

*Нормой линейного функционала* $f : X \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \mathbb{C}$ называется норма линейного оператора $f$:

$$\|f\| := \sup_{x\in X:\ \|x\|_{\mathrm{X}}=1} |f(x)|.$$

**Замечание.** Согласно теореме 1 § 4 линейный функционал $f : X \to \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \mathbb{C}$ непрерывен тогда и только тогда, когда $\|f\| < < +\infty$.

**Лемма 1.** *Пусть $T \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество, $y : T \to \mathbb{C}$ – измеримая функция, пусть $p \in (1, +\infty)$ и линейный функционал $F_y : L_p(T) \to \mathbb{C}$ задан формулой*

$$F_y(x) = \int\limits_T x(t)\,\overline{y(t)}\,dt \qquad \forall x \in L_p(T),$$

*причем интеграл существует для любой фунции $x \in L_p(T)$. Тогда норма линейного функционала $F_y : L_p(T) \to \mathbb{C}$ совпадает с нормой функции $y$ в пространстве $L_q(T)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$:*

$$\|F_y\| = \|y\|_{L_q(T)}.$$

**Доказательство.** Используя неравенство Гельдера, получаем

$$|F_y(x)| \le \int\limits_T |x(t)\,y(t)|\,dt \le \|x\|_{L_p(T)} \cdot \|y\|_{L_q(T)} \qquad \forall x \in L_p(T).$$

Поэтому

$$\|F_y\| \le \|y\|_{L_q(T)}. \tag{1}$$

Докажем обратное неравенство.

Как было замечено сразу после доказательства неравенства Гельдера, если $|x(t)|^p = |y(t)|^q$, то неравенство Гельдера обращается в равенство. В точках $t \in T$, в которых $y(t) = 0$, положим $x(t) = 0$. В остальных точках значение $x(t)$ будем выбирать так, что $|x(t)|^p = |y(t)|^q$ и $\frac{x(t)}{|x(t)|} = \frac{y(t)}{|y(t)|}$. Тогда при всех $t \in T$ получим $x(t)\,\overline{y(t)} = |x(t)\,y(t)|$ и, следовательно,

$$F_y(x) = \int\limits_T |x(t)\,y(t)|\,dt = \|x\|_{L_p(T)} \cdot \|y\|_{L_q(T)}.$$

Если $\|y\|_{L_q(T)} = 0$, то неравенство $\|F_y\| \geq \|y\|_{L_q(T)}$ выполнено тривиально. Пусть $\|y\|_{L_q(T)} > 0$. Тогда $\|x\|_{L_p(T)} > 0$. Рассматривая функцию $x_1 := \frac{x}{\|x\|_{L_p(T)}}$, получаем $\|x_1\|_{L_p(T)} = 1$ и $F_y(x_1) = \|y\|_{L_q(T)}$. Поэтому $\|F_y\| \geq |F_y(x_1)| = \|y\|_{L_q(T)}$. Последнее неравенство вместе с неравенством (1) завершают доказательство. $\square$

**Замечание.** Лемма 1 и ее доказательство остаются справедливыми при замене множества комплексных чисел $\mathbb{C}$ на множество вещественных чисел $\mathbb{R}$.

**Определение.** *Сопряженным* к вещественному или комплексному нормированному пространству $X$ называется нормированное пространство $X^*$, элементами которого являются все линейные непрерывные функционалы $f : X \to \mathbb{R}$ или $f : X \to \mathbb{C}$ соответственно.

**Замечание.** Из теоремы 2 § 4 следует, что сопряженное к любому нормированному (даже неполному) пространству является банаховым пространством.

**Лемма 2.** *Пусть $e_1, \ldots, e_n$ – базис в конечномерном нормированном пространстве $X$. Для любого $k \in \overline{1,n}$ через $l_k(x)$ обозначим $k$-ю координату вектора $x \in X$ в этом базисе, т.е. $x = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k(x)\,e_k$. Тогда $l_k \in X^*$.*

**Доказательство.** Фиксируем $k \in \overline{1,n}$. Поскольку для любых чисел $\alpha, \beta$ и любых векторов $x_1, x_2 \in X$ справедливы равенства

$$\sum_{j=1}^{n} l_j(\alpha x_1 + \beta x_2)\,e_j = \alpha x_1 + \beta x_2 = \alpha \sum_{j=1}^{n} l_j(x_1)\,e_j + \beta \sum_{j=1}^{n} l_j(x_2)\,e_j,$$

то в силу единственности разложения вектора по базису получаем $l_k(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha l_k(x_1) + \beta l_k(x_2)$. Поэтому функционал $l_k$ линеен.

Легко видеть, что

$$\|x\|_1 = \sum_{j=1}^{n} |l_j(x)|$$

является нормой в $X$. В силу теоремы об эквивалентности норм найдется число $\beta$ такое, что

$$\|x\|_1 \le \beta \|x\| \qquad \forall x \in X,$$

где $\|x\|$ – норма пространства $X$. Следовательно, $|l_k(x)| \le \|x\|_1 \le \le \beta\|x\|$ для любого $x \in X$, а значит, $\|l_k\| \le \beta < +\infty$. Поэтому функционал $l_k$ непрерывен. □

**Лемма 3.** *Если $f$ – линейный функционал, заданный на конечномерном нормированном пространстве $X$, то $f$ непрерывен на $X$, т.е. $f \in X^*$.*

**Доказательство.** В силу конечномерности на $X$ существует конечный базис $e_1, \ldots, e_n$. Обозначая $k$-ю координату вектора $x \in X$ в этом базисе через $l_k(x)$, получаем $x = \sum\limits_{k=1}^{n} l_k(x)\, e_k$. Отсюда и из линейности функционала $f$ следует, что

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} l_k(x)\, f(e_k) \qquad \forall x \in X.$$

Согласно лемме 2 функционалы $l_k$ непрерывны. Поэтому функционал $f$ непрерывен. □

**Замечание.** В случае, когда нормированное пространство $X$ бесконечномерно, линейный функционал может быть разрывным. Действительно, пусть $X$ – пространство финитных числовых последовательностей, т.е. таких последвательностей $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$, что для каждой из них найдется номер $N(x)$ такой, что $x(k) = 0$ при всех $k \ge \ge N(x)$. Норму в $X$ определим формулой $\|x\| = \max\limits_{k \in \mathbb{N}} |x(k)|$. Тогда функционал $f : X \to \mathbb{R}$, заданный формулой

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)$$

линеен, но разрывен. Действительно, для произвольного числа $N \in \mathbb{N}$ рассмотрим финитную последовательность $x_N \in X$, где

$$x_N(k) = \begin{cases} 1, & k \le N, \\ 0, & k > N. \end{cases}$$

Тогда $\|x_N\| = 1$. Поэтому $\|f\| \ge |f(x_N)| = N$. В силу произвольности $N \in \mathbb{N}$ получаем, что $\|f\| = +\infty$. Поэтому согласно теореме 1 § 4 функционал $f$ разрывен.

**Определение.** Вещественным (комплексным) *гильбертовым пространством* называется полное евклидово (унитарное) пространство.

Норма в евклидовом, унитарном или гильбертовом пространстве $X$ считается евклидовой, т.е. задается равенством

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} \qquad \forall x \in X.$$

Далее докажем теорему Рисса–Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве. Доказательство этой теоремы будет использовать следующую лемму.

**Лемма 4.** *Пусть $H$ – гильбертово пространство, $f \in H^*$, $\|f\| = 1$. Тогда найдется элемент $x \in H$ такой, что $f(x) = \|x\| = 1$.*

**Доказательство.** По определению нормы функционала найдется последовательность элементов $x_k \in H$ такая, что $\|x_k\| = 1$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $|f(x_k)| \to \|f\| = 1$ при $k \to \infty$. Выделим подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ такую, что числовая последовательность $\{f(x_{k_j})\}$ сходится. Это можно сделать в силу ограниченности последовательности $\{f(x_k)\}$ как в случае, когда значения функцинала $f$ вещественны, так и в случае, когда они комплексные. Обозначая эту подпоследовательность $\{x_{k_j}\}$ снова через $\{x_k\}$, будем считать, что последовательность $\{f(x_k)\}$ сходится к некоторому числу $F$. Поскольку $|f(x_k)| \to 1$, то $|F| = 1$. Тогда

$$\lim_{k,m\to\infty} f(x_k + x_m) = \lim_{k\to\infty} f(x_k) + \lim_{m\to\infty} f(x_m) = 2F$$

и, следовательно,

$$\lim_{k,m\to\infty} |f(x_k + x_m)| = 2|F| = 2. \tag{2}$$

Так как $\|f\| = 1$, то $|f(x_k + x_m)| \le \|x_k + x_m\| \le \|x_k\| + \|x_m\| = 2$. Отсюда и из соотношения (2) следует, что

$$\lim_{k,m\to\infty} \|x_k + x_m\| = 2. \tag{3}$$

Заметим, что для любых $k, m \in \mathbb{N}$ справедливы равенства

$$\|x_k + x_m\|^2 + \|x_k - x_m\|^2 = (x_k + x_m, x_k + x_m) + (x_k - x_m, x_k - x_m) =$$

$$= 2(x_k, x_k) + 2(x_m, x_m) = 2\|x_k\|^2 + 2\|x_m\|^2 = 4.$$

Отсюда и из соотношения (3) получаем, что

$$\lim_{k,m\to\infty} \|x_k - x_m\| = 0,$$

т.е. последовательность $\{x_k\}$ фундаментальна. В силу полноты гильбертова пространства последовательность $\{x_k\}$ сходится к некоторому $\hat{x} \in H$. Так как $\|x_k\| = 1$, то $\|\hat{x}\| = 1$. Используя непрерывность функционала $f$ и соотношение $f(x_k) \to F$, получаем равенство $f(\hat{x}) = F$. Обозначая $x = \frac{\hat{x}}{F}$, приходим к равенствам $\|x\| = \frac{\|\hat{x}\|}{|F|} = 1$, $f(x) = \frac{f(\hat{x})}{F} = 1$. □

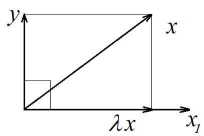
**Теорема 1.** (Теорема Рисса–Фреше об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве.) *Пусть $H$ – гильбертово пространство. Тогда для любого функционала $f \in H^*$ найдется элемент $x_f \in H$ такой, что*

$$f(x) = (x, x_f) \qquad \forall x \in H.$$

**Доказательство.** Фиксируем $f \in H^*$. Если $f = 0$, то утверждение теоремы справедливо при $x_f = 0$. Пусть $f \ne 0$. Рассмотрим $f_1 = \frac{f}{\|f\|}$. По лемме 4 найдется вектор $x_1 \in H$ такой, что $\|x_1\| = 1$, $f_1(x_1) = 1$. Покажем, что

$$f_1(x) = (x, x_1) \qquad \forall x \in H.$$

Фиксируем $x \in H$. Обозначим $\lambda = (x, x_1)$, $y = x - \lambda x_1$. Тогда $(y, x_1) = (x, x_1) - \lambda(x_1, x_1) = 0$. Рассмотрим случай, когда $H$ – комплексное гильбертово пространство. Для любого $t \in \mathbb{C}$ в силу равенства $(y, x_1) = 0$ имеем



$\|x_1 + ty\|^2 = (x_1 + ty, x_1 + ty) = 1 + |t|^2\|y\|^2$. Так как

$$|f_1(x_1 + ty)| \le \|x_1 + ty\| = \sqrt{1 + |t|^2\|y\|^2} = 1 + o(|t|), \quad t \to 0,\ t \in \mathbb{C},$$

то $|1 + tf_1(y)| = 1 + o(|t|)$, $t \to 0$, $t \in \mathbb{C}$. Полагая $t = \tau\overline{f_1(y)}$, получим $1 + \tau|f_1(y)|^2 = 1 + o(\tau)$, $\tau \to 0$, $\tau \in \mathbb{R}$. Следовательно, $f_1(y) = 0$. В случае, когда $H$ – вещественное гильбертово пространство, повторяя те же рассуждения с заменой $\mathbb{C}$ на $\mathbb{R}$, снова получаем равенство $f_1(y) = 0$.

Таким образом, $f_1(x) = f_1(y+\lambda x_1) = f_1(y)+\lambda f_1(x_1) = \lambda = (x, x_1)$. Полагая $x_f := \|f\| \cdot x_1$, получаем доказываемое утверждение. $\square$

**Определение.** Нормированные пространства $X$ и $Y$ называются *изометрически изоморфными*, если существует линейное взаимно однозначное отображение $\varphi$ из $X$ в $Y$, сохраняющее норму, т.е. $\|\varphi(x)\|_Y = \|x\|_X$ для любого $x \in X$. При этом отображение $\varphi : X \to Y$ называется *изометрическим изоморфизмом* этих пространств.

**Замечание.** Изометрически изоморфные пространства обычно отождествляют.

**Теорема 2.** *Пусть $H$ – гильбертово пространство. Тогда отображение $F$, которое каждому элементу $y \in H$ ставит в соответствие функционал $F_y : H \to \mathbb{C}$, заданный формулой*

$$F_y(x) = (x, y) \quad \forall x \in H,$$

*является изометрическим изоморфизмом из $H$ в $H^*$.*

**Доказательство.** Из линейности скалярного произведения следует линейность функционала $F_y : H \to \mathbb{C}$. Согласно неравенству Коши–Буняковского (теорема 1 §2 главы 4)

$$|F_y(x)| \le \|x\| \cdot \|y\| \qquad \forall x, y \in H.$$

Поэтому $\|F_y\| \le \|y\| < +\infty$, а значит, $F_y \in H^*$ для любого $y \in H$.

Покажем, что отображение $F$ сохраняет норму. Если $y = \overline{0}_H$, то $F_y(x) = 0$ для любого $x \in H$ и, следовательно, $\|F_y\| = 0$. Пусть $y \neq \overline{0}_H$. Тогда для вектора $x = \frac{y}{\|y\|}$ имеем $\|x\| = 1$, $F_y(x) = \frac{(y,y)}{\|y\|} = \|y\|$. Следовательно, $\|F_y\| = \|y\|$ для любого $y \in H$, то есть отображение $F$ сохраняет норму.

Покажем, что отображение $F : H \to H^*$ инъективно. Пусть $y_1, y_2 \in H$ и $F_{y_1} = F_{y_2}$. Рассмотрим $y := y_1 - y_2$. В силу линейности отображения $F$ имеем $F_y = F_{y_1} - F_{y_2} = 0$. Поэтому $\|y\| = \|F_y\| = 0$, а значит, $y = \overline{0}_H$, то есть, $y_1 = y_2$. Таким образом, отображение $F : H \to H^*$ инъективно. Сюръективность этого отображения следует из теоремы Рисса–Фреше. Итак, отображение $F$ линейно, взаимно однозначно и сохраняет норму. Поэтому $F$ – изометрический изоморфизм из $H$ в $H^*$. □

## § 6. Малые лебеговы пространства

**Определение.** Пусть $p \in [1, +\infty)$. Через $\ell_p$ и $\ell_p^{\mathbb{R}}$ обозначим множества всех числовых последовательностей, т.е. функций $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ и $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ соответственно, которые удовлетворяют условию $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p < +\infty$. Для любой такой последовательности обозначим

$$\|x\|_p := \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

**Определение.** Через $\ell_\infty$ и $\ell_\infty^{\mathbb{R}}$ обозначим множества всех ограниченных числовых последовательностей $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ и $x : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ соответственно, т.е. таких, что

$$\|x\|_\infty := \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < +\infty.$$

Линейные операции в $\ell_p$ определяются естественным образом: если $x, y \in \ell_p, \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad k \in \mathbb{N}$, то

$$(\alpha x + \beta y)(k) := \alpha x(k) + \beta y(k).$$

Аналогично определяются линейные операции в $\ell_p^{\mathbb{R}}$.

**Лемма 1.** *Пусть $p \in [1, +\infty]$. Пусть $q \in [1, +\infty]$ определяется равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, где положим $\frac{1}{+\infty} = 0$. Тогда справедливы* неравенство Гельдера

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)\, y(k)| \le \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \forall x \in \ell_p \quad \forall y \in \ell_q$$

*и* неравенство Минковского

$$\|x+y\|_p \le \|x\|_p + \|y\|_p \qquad \forall x, y \in \ell_p.$$

**Доказательство.** При $p = 1$ и $p = +\infty$ неравенства Гельдера и Минковского следуют непосредственно из определений. Пусть $p \in$ $\in (1, +\infty)$. Каждой последовательности $x \in \ell_p$ сопоставим функцию $\tilde{x} : [1, +\infty) \to \mathbb{C}$, заданную формулой

$$\tilde{x}(t) = x(k) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \quad \forall t \in [k, k+1).$$

Тогда функция $\tilde{x}$ измерима на $[1, +\infty)$ и

$$\|\tilde{x}\|_{L_p[1,+\infty)} = \left( \int\limits_1^{+\infty} |\tilde{x}(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|_p.$$

Неравенство Гельдера для последовательностей $x \in \ell_p$ и $y \in \ell_q$ следует из неравенства Гельдера для функций $\tilde{x}, \tilde{y}$. Неравенство Минковского для последовательностей следует из неравенства Минковского для функций. □

**Замечание.** Из неравенства Минковского следует, что линейная комбинация элементов пространства $\ell_p$ лежит в пространстве $\ell_p$. Поэтому пространство $\ell_p$ является линейным пространством. При этом $\|x\|_p$ удовлетворяет аксиомам нормы. В частности, неравенство треугольника в $\ell_p$ следует из неравенства Минковского. Таким образом, $\ell_p$ и $\ell_p^{\mathbb{R}}$ являются соответственно комплексным и вещественным нормированными пространствами.

**Лемма 2.** *Пусть* $1 \le p_1 < p_2 \le +\infty$. *Тогда* $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$ *и*

$$\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1} \qquad \forall x \in \ell_{p_1}.$$

**Доказательство.** Фиксируем произвольную последовательность $x \in \ell_{p_1}$. Поскольку для любого $k \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $|x(k)| \le \|x\|_{p_1}$, то $\|x\|_\infty \le \|x\|_{p_1} < +\infty$. При $p_2 = +\infty$ лемма доказана. Пусть $p_2 < +\infty$. Обозначим $\varepsilon := p_2 - p_1$. Снова используя неравенство $|x(k)| \le \|x\|_{p_1}$, получаем

$$\|x\|_{p_2}^{p_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{p_2} = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{p_1} \cdot |x(k)|^{\varepsilon} \le \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)|^{p_1} \cdot \|x\|_{p_1}^{\varepsilon} =$$

$$= \|x\|_{p_1}^{p_1} \cdot \|x\|_{p_1}^{\varepsilon} = \|x\|_{p_1}^{p_2}.$$

Следовательно, $\|x\|_{p_2} \le \|x\|_{p_1} < +\infty$, а значит, $\ell_{p_1} \subset \ell_{p_2}$. $\square$

**Замечание.** При $1 \le p_1 < p_2$ для любого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ ненулевой меры включение $L_{p_1}(X) \subset L_{p_2}(X)$ неверно (см. задачу 2 § 2).

**Определение.** Будем говорить, что элемент $f$ нормированного пространства $F$ *раскладывается по системе*[1] $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов пространства $F$, если существует числовая последовательность $\{\alpha_k\}$ такая, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ сходится к элементу $f$ в смысле нормы пространства $F$, т. е. $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k\| \to 0$ при $n \to \infty$. В этом случае будем писать $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k = f$.

**Определение.** Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов нормированного пространства $F$ называется *базисом Шаудера* пространства $F$, если для любого элемента $f \in F$ существует единственная числовая последовательность $\{\alpha_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$.

Поскольку другие понятия базиса в бесконечномерном нормированном пространстве мы не будем рассматривать, то далее вместо «базис Шаудера» будем говорить «базис».

**Теорема 1.** *Пусть $p \in [1, +\infty)$. Тогда система последовательностей $e_k \in \ell_p$, определяемых формулой*

$$e_k(i) = \delta_{ki} \qquad \forall k, i \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

*где $\delta_{ki}$ – символ Кронекера, является базисом пространства $\ell_p$.*

*При этом*

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\, e_k \qquad \forall x \in \ell_p. \tag{2}$$

[1]здесь и далее под термином «система» понимается последовательность

**Доказательство.** Фиксируем произвольный элемент $x \in \ell_p$. Требует доказать существование и единственность последовательности чисел $\alpha_k \in \mathbb{C}$ такой, что

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \tag{3}$$

то есть

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4}$$

Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $z_n := x - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k e_k$. Тогда

$$z_n(i) = \begin{cases} x(i) - \alpha_i, & i \le n, \\ x(i), & i > n. \end{cases}$$

Поэтому

$$\|z_n\|_p^p = \sum_{i=1}^{n} |x(i) - \alpha_i|^p + \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p. \tag{5}$$

Покажем, что при $\alpha_k = x(k)$ соотношение (4) справедливо. Действительно, в этом случае

$$\|z_n\|_p^p = \sum_{i=n+1}^{\infty} |x(i)|^p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

поскольку ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |x(i)|^p$ сходится. Следовательно, $\|z_n\|_p \to 0$ при $n \to \infty$, то есть соотношение (4) справедливо, а значит, справедливо соотношение (2).

Покажем, что если соотношение (4) справедливо, то $\alpha_k = x(k)$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Действительно, пусть соотношение (4) справедливо. Тогда $\|z_n\|_p \to 0$ при $n \to \infty$. Согласно равенству (5) для любых $n \ge k$ имеем

$$\|x(k) - \alpha_k\|^p \le \|z_n\|_p^p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|x(k) - \alpha_k\|^p \le 0$, то есть $x(k) = \alpha_k$ при любом $k \in \mathbb{N}$. Таким образом, существует и единственна числовая последовательность $\{\alpha_k\}$ такая, что справедливо разложение (3). $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $p \in [1, +\infty]$, пусть задана последовательность $y : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ и пусть функционал $F_y : \ell_p \to \mathbb{C}$ задан формулой*

$$F_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\,\overline{y(k)} \qquad \forall x \in \ell_p, \tag{6}$$

*причем этот ряд сходится для любого $x \in \ell_p$. Тогда $\|F_y\| = \|y\|_q$, где $q \in [1, +\infty]$ определяется равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.*

**Доказательство.** Неравенство $\|F_y\| \leq \|y\|_q$ следует из неравенства Гельдера для последовательностей.

Докажем обратное неравенство. В случае $p \in (1, +\infty)$ по аналогии с доказательством леммы 1 § 5 определим последовательность $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ исходя из равенств

$$|x(k)|^p = |y(k)|^q \qquad \forall k \in \mathbb{N},$$

$$\frac{x(k)}{|x(k)|} = \frac{y(k)}{|y(k)|} \quad \text{при} \quad y(k) \neq 0.$$

Тогда

$$F_y(x) = \sum_{k=1}^{\infty} |x(k)\,y(k)| = \|x\|_p \cdot \|y\|_q,$$

откуда следует неравенство $\|F_y\| \geq \|y\|_q$. В случаях $p = 1$ и $p = +\infty$ последнее неравенство предлагается доказать самостоятельно. $\square$

**Теорема 2.** *Пусть $p \in [1, +\infty)$, $q \in (1, +\infty]$ связаны равенством $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Пространство $\ell_p^*$ изометрически изоморфно пространству $\ell_q$. Отображение $F$, переводящее любую последовательность $y \in \ell_q$ в функционал $F_y$, заданный формулой (6), является изометрическим изоморфизмом из $\ell_q$ в $\ell_p^*$.*

**Доказательство.** Согласно неравенству Гельдера для последовательностей

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x(k)\,y(k)| \leq \|x\|_p \cdot \|y\|_q \qquad \forall x \in \ell_p \quad \forall y \in \ell_q$$

Поэтому для любых $x \in \ell_p$, $y \in \ell_q$ ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x(k)\,\overline{y(k)}$ сходится абсолютно. Следовательно, для любой последовательности $y \in \ell_q$ формула (6) определяет линейный функционал $F_y : \ell_p \to \mathbb{C}$. Согласно лемме 3 для любого $y \in \ell_q$ имеем $\|F_y\| = \|y\|_q < +\infty$, то есть $F_y \in \ell_p^*$. Таким образом, отображение $F$ действует из $\ell_q$ в $\ell_p^*$ и сохраняет норму. Поскольку правая часть формулы (6) линейна по $y$, то отображение $F : \ell_q \to \ell_p^*$ линейно.

Инъективность линейного отображения $F$ следует из того, что это отображение сохраняет норму. Докажем сюръективность этого отображения.

Фиксируем произвольный функционал $f \in \ell_p^*$. Согласно теореме 1 система последовательностей $e_k$, определяемых формулой (1), составляет базис пространства $\ell_p$ и

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} x(k)\, e_k \qquad \forall x \in \ell_p,$$

то есть

$$\left\| x - \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \right\|_p \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из непрерывности функционала $f : \ell_p \to \mathbb{C}$ следует, что

$$f\left( x - \sum_{k=1}^{n} x(k) e_k \right) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Отсюда и из линейности $f$ получаем

$$f(x) - \sum_{k=1}^{n} x(k) f(e_k) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то есть

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x(k) f(e_k) \qquad \forall x \in \ell_p.$$

Поэтому $f = F_y$, где $y(k) = \overline{f(e_k)}$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Согласно лемме 3 имеем $\|y\|_q = \|F_y\| = \|f\| < +\infty$, то есть $y \in \ell_q$. Таким образом, линейное отображение $F : \ell_q \to \ell_p^*$ инъективно и сюръективно, то есть взаимно однозначно. Кроме того, это отображение сохраняет норму. Поэтому $F : \ell_q \to \ell_p^*$ является изометрическим изоморфизмом. □

**Замечание.** Пространство $\ell_\infty^*$ не является изометрически изоморфным пространству $\ell_1$. Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

**Замечание.** Для любого $p \in [1, +\infty)$ и любого измеримого множества $X \subset \mathbb{R}^n$ пространство $L_p^*(X)$ изометрически изоморфно пространству $L_q(X)$, где $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Доказательство этого факта также выходит за рамки нашего курса.

**Замечание.** Из теоремы 2 § 4 следует, что для любого $p \in [1, +\infty)$ пространство $\ell_p^*$ полно. Отсюда и из теоремы 1 этого параграфа вытекает полнота пространства $\ell_q$ при любом $q \in (1, +\infty]$. Пространство $\ell_1$ также полно, что предлагается доказать читателю самостоятельно. В § 13 главы 22 будет доказана полнота пространств $L_p(X)$ при всех $p \in [1, +\infty)$.

Глава 22

# РЯДЫ ФУРЬЕ

## § 1. Определение ряда Фурье по ортогональной системе

Мы хорошо знаем, что для работы с векторами в конечномерном линейном пространстве удобно ввести базис $\{e_k\}_{k=1}^n$ в этом пространстве и задавать векторы координатами в этом базисе: $a = \alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$.

Особенно удобно работать с ортогональным базисом $\{e_k\}$, т. е. с таким, что $(e_j, e_k) = 0$ при $j \neq k$. В этом базисе координаты вектора $a$ равны $\alpha_k = \frac{(a,e_k)}{(e_k,e_k)}$.

Функции, как известно, являются элементами бесконечномерного линейного пространства. Основная идея теории рядов Фурье состоит в том, чтобы задавать функции через коэффициенты Фурье, которые играют ту же роль, что и координаты конечномерного вектора.

Пусть $X$ – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$. Как было показано в теореме 2 § 2, формула

$$(f, g) = \int\limits_X f(x)\,\overline{g(x)}\,dx. \tag{1}$$

задает скалярное произведение в $L_2(X)$.

Мы будем использовать обозначение (1) не только в случае $f, g \in L_2(X)$, но и в некоторых других случаях, когда эта формула имеет смысл.

**Замечание.** Если $f \in L_1(X)$, $g \in L_\infty(X)$, то формула (1) определяет некоторое число $(f, g) \in \mathbb{C}$. Действительно, поскольку $g \in L_\infty(X)$, то существует множество $X_0 \subset X$, $\mu(X_0) = 0$ такое, что $C_g := \sup\limits_{x \in X \setminus X_0} |g(x)| \in \mathbb{R}$. Тогда $|f(x)\,\overline{g(x)}| \le C_g |f(x)|$ почти всюду на $X$. Следовательно, $\int\limits_X |f(x)\,\overline{g(x)}|\,dx \le C_g \int\limits_X |f(x)|\,dx < +\infty$. Отсюда и из измеримости функций $f$ и $g$ следует, что функция $f(x)\,\overline{g(x)}$ интегрируема на $X$.

**Определение.** Пусть на конечно измеримом множестве $X \subset \mathbb{R}^n$ задана система $\{e_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ функций $e_k \in L_\infty(X)$, не эквивалентных нулю и ортогональная в смысле скалярного произведения (1). Пусть $f \in L_1(X)$. Тогда числа

$$\alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}, \quad k \in \mathbb{N},$$

называются *коэффициентами Фурье* функции $f$ по ортогональной системе $\{e_k\}$. Здесь, согласно формуле (1),

$$(e_k, e_k) = \int\limits_X |e_k(x)|^2 \, dx, \qquad (f, e_k) = \int\limits_X f(x) \, \overline{e_k(x)} \, dx.$$

Функциональный ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k(x)$ называется *рядом Фурье* функции $f(x)$.

**Замечание.** Для любой функции $f \in L_1(X)$ коэффициенты Фурье существуют. Действительно, поскольку $e_k \in L_\infty(X)$, то функции $f(x) \, \overline{e_k(x)}$ и $|e_k(x)|^2$ интегрируемы. Поскольку функции $e_k(x)$ не эквивалентны нулю, то $(e_k, e_k) \neq 0$. Поэтому существуют числа $\alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} \in \mathbb{C}$.

Ряд Фурье функции $f \in L_1(X)$ в общем случае может расходиться или сходиться не к функции $f(x)$. В дальнейшем мы будем изучать вопрос о сходимости ряда Фурье.

**Определение.** *Тригонометрической системой* на отрезке $[x_0, x_0 + 2\ell]$ длиной $2\ell$ называется система функций

$$\frac{1}{2}, \ \sin\frac{\pi x}{\ell}, \ \cos\frac{\pi x}{\ell}, \ \ldots, \ \sin\frac{\pi k x}{\ell}, \ \cos\frac{\pi k x}{\ell}, \ \ldots$$

**Лемма 1.** *Тригонометрическая система ортогональна на любом отрезке длины $2\ell$.*

**Доказательство.** Для любого действительного числа $x_0$ и любых натуральных чисел $n$, $k$ $(n \neq k)$ имеем

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \sin\frac{\pi kx}{\ell}\,\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \frac{1}{2}\left(\sin\frac{\pi(n+k)x}{\ell} - \sin\frac{\pi(n-k)x}{\ell}\right) dx =$$

$$= -\frac{\ell}{2\pi(n+k)}\,\cos\frac{\pi(n+k)x}{\ell}\Big|_{x_0}^{x_0+2\ell} + \frac{\ell}{2\pi(n-k)}\,\cos\frac{\pi(n-k)x}{\ell}\Big|_{x_0}^{x_0+2\ell} = 0,$$

так как, например, $\cos\frac{\pi(n+k)(x_0+2\ell)}{\ell} = \cos\left(\frac{\pi(n+k)x_0}{\ell} + 2\pi(n+k)\right) = \cos\frac{\pi(n+k)x_0}{\ell}$. Аналогично, вычисляя интегралы, легко убедиться, что

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \sin\frac{\pi nx}{\ell}\,\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,dx = 0,$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \sin\frac{\pi nx}{\ell}\,\sin\frac{\pi kx}{\ell}\,dx = 0, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \cos\frac{\pi nx}{\ell}\,\cos\frac{\pi kx}{\ell}\,dx = 0 \quad (n \neq k),$$

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \frac{1}{2}\cos\frac{\pi nx}{\ell}\,dx = 0, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \frac{1}{2}\sin\frac{\pi nx}{\ell}\,dx = 0. \qquad \square$$

Поскольку

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \left(\frac{1}{2}\right)^2 dx = \frac{\ell}{2}, \qquad \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \left(\sin\frac{\pi kx}{\ell}\right)^2 dx = \int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} \left(\cos\frac{\pi kx}{\ell}\right)^2 dx = \ell,$$

то коэффициенты Фурье функции $f \in L_1[x_0, x_0+2\ell]$ определяются по формулам

$$a_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} f(x)\,\cos\frac{\pi kx}{\ell}\,dx, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots,$$

$$b_k = \frac{1}{\ell}\int\limits_{x_0}^{x_0+2\ell} f(x)\,\sin\frac{\pi kx}{\ell}\,dx, \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

Заметим, что если функция $f$ принимает только вещественные значения, то ее коэффициенты Фурье по тригонометрической системе также вещественны.

Ряд Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе имеет вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left( a_k \cos \frac{\pi k x}{\ell} + b_k \sin \frac{\pi k x}{\ell} \right). \tag{2}$$

**Определение.** *Стандартной тригонометрической системой* называется тригонометрическая система на отрезке длиной $2\pi$, т.е. $\ell = \pi$. Стандартная тригонометрическая система имеет вид

$$\frac{1}{2},\ \sin x,\ \cos x,\ \cdots,\ \sin kx,\ \cos kx,\ \cdots.$$

Заменой $x \to \frac{\pi x}{\ell}$ из стандартной тригонометрической системы можно получить тригонометрическую систему общего вида. Имея в виду эту замену, для простоты будем рассматривать стандартную тригонометрическую систему.

Далее в основном мы будем рассматривать ряды Фурье по тригонометрической системе, хотя можно рассматривать ряды Фурье по любой ортогональной системе, например, по системе многочленов Лежандра, о которой речь пойдет в § 11.

**Замечание.** Система функций $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ является ортогональной на любом отрезке длины $2\pi$.

Поскольку для функций $e_k(x) = e^{ikx}$ имеем $(e_k, e_k) = \int\limits_{x_0}^{x_0+2\pi} |e^{ikx}|^2\, dx = 2\pi$, то коэффициенты Фурье функции $f$ по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ определяются формулами

$$c_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)} = \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x_0+2\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

**Лемма 2.** *Частичная сумма*

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

*ряда Фурье функции $f \in L_1[-\pi,\pi]$ по стандартной тригонометрической системе совпадает с частичной суммой*

$$\sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

*ряда Фурье функции $f$ по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.*

**Доказательство.** Используя формулы Эйлера, получаем

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{ikx}+e^{-ikx}}{2}\,dx = c_k + c_{-k},$$

$$b_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\frac{e^{ikx}-e^{-ikx}}{2i}\,dx = i(c_k - c_{-k}).$$

Следовательно,

$$S_n(x) = c_0 + \sum_{k=1}^{n}\Big((c_k + c_{-k})\cos kx + i(c_k - c_{-k})\sin kx\Big) =$$

$$= c_0 + \sum_{k=1}^{n} c_k(\cos kx + i\sin kx) + \sum_{k=1}^{n} c_{-k}(\cos kx - i\sin kx) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

$\square$

Имея в виду лемму 2, ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ называют *тригонометрическим рядом Фурье в комплексной форме.* Сходимость такого «двустороннего» ряда будем понимать как сходимость последовательности

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

## § 2. Приближение функций по норме $L_p$. Теорема Римана об осцилляции

**Определение.** *Индикаторной функцией множества $A$* называется функция

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A, \\ 0, & x \notin A. \end{cases}$$

**Теорема 1.** *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. *Тогда для любого числа* $\varepsilon > 0$ *существует функция* $f_\varepsilon \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, *равная (конечной) линейной комбинации индикаторных функций клеток* $\Pi_j \subset \mathbb{R}^n$ *и такая, что*

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x)|.$$

**Доказательство.**

**Шаг 1.** Пусть $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$. В силу леммы 2 §7 главы 8 существуют измеримые счетно-ступенчатые функции $g, \varphi : \mathbb{R}^n \to$ $\to [0, +\infty)$ такие, что

$$g(x) \le f(x) \le g(x) + \varphi(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Поскольку функция $g$ является счетно-ступенчатой, то существует счетный набор измеримых множеств $X_k$ и соответствующий набор чисел $g_k \in [0, +\infty)$ такие, что

$$g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mathbf{1}_{X_k}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

Исключая из этой суммы нулевые слагаемые, будем считать, что $g_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(x)\, dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx < +\infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k)$ сходится. Поэтому существует индекс $k_0 \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Положим

$$\widetilde{g}(x) := \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mathbf{1}_{X_k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\|g - \widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x) - \widetilde{g}(x)|\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (g(x) - \widetilde{g}(x))\, dx = \sum_{k=k_0+1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) < \frac{\varepsilon}{4},$$

$$\|f - g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x) - g(x)|\, dx =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f(x) - g(x))\, dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Следовательно,

$$\|f - \widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \|g - \widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|f - g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (1)$$

Так как $g_k > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} g_k \cdot \mu(X_k) < +\infty$, то множества $X_k$ конечно измеримы. Следовательно, для каждого $k \in \overline{1, k_0}$ найдется клеточное множество $A_k \subset \mathbb{R}^n$ такое, что $g_k \cdot \mu(X_k \Delta A_k) < \frac{\varepsilon}{4k_0}$. Положим

$$h(x) := \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mathbf{1}_{A_k}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Так как клеточное множество $A_k$ представимо в виде дизъюнктного объединения конечного числа клеток: $A_k = \bigsqcup\limits_{i=1}^{I_k} \Pi_i^k$, то $\mathbf{1}_{A_k}(x) = \sum\limits_{i=1}^{I_k} \mathbf{1}_{\Pi_i^k}(x)$. Поэтому функция $h$ является конечной линейной комбинацией индикаторных функций клеток. Поскольку $\| \mathbf{1}_{A_k} - \mathbf{1}_{X_k} \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \mu(X_k \Delta A_k)$, то

$$\|h - \widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leq \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \| \mathbf{1}_{A_k} - \mathbf{1}_{X_k} \|_{L_1(\mathbb{R}^n)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mu(X_k \Delta A_k) < k_0 \cdot \frac{\varepsilon}{4k_0} = \frac{\varepsilon}{4}.$$

Используя неравенство (1), получаем

$$\|h-f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \|h-\widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|f-\widetilde{g}\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \qquad (2)$$

Обозначим

$$M := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x), \qquad f_\varepsilon(x) := \min\{h(x), M\}.$$

Так как функция $h$ является конечной линейной комбинацией индикаторных функций клеток, то функция $f_\varepsilon$ обладает тем же свойством. Покажем, что

$$|f_\varepsilon(x) - f(x)| \le |h(x) - f(x)| \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \qquad (3)$$

Фиксируем $x \in \mathbb{R}^n$. Если $h(x) \le M$, то $f_\varepsilon(x) = h(x)$ и неравенство (3) выполнено. Если $h(x) > M$, то $f(x) \le M = f_\varepsilon(x) < h(x)$ и неравенство (3) снова выполнено. Из неравенств (2), (3) следует, что $\|f_\varepsilon - f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \|h-f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon$. Из определения функции $f_\varepsilon$ следует, что $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f_\varepsilon(x) \le M = \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$.

**Шаг 2.** Пусть $f \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Применяя утверждение, доказанное на шаге 1, к функциям

$$f_+(x) := \max\{f(x), 0\}, \qquad f_-(x) := \max\{-f(x), 0\},$$

находим функции $f_+^\varepsilon, f_-^\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, равные конечным линейным комбинациям индикаторных функций клеток и такие, что

$$\|f_+^\varepsilon - f_+\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \|f_-^\varepsilon - f_-\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_\pm^\varepsilon(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f_\pm(x)|.$$

Замечая, что $f = f_+ - f_-$ и полагая $f_\varepsilon := f_+^\varepsilon - f_-^\varepsilon$, получим, что $f_\varepsilon$ является конечной линейной комбинацией индикаторных функций клеток и $f - f_\varepsilon = f_+ - f_+^\varepsilon - (f_- - f_-^\varepsilon)$, а значит,

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \le \|f_+ - f_+^\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \|f_- - f_-^\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

При этом

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_\varepsilon(x)| \le \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_+^\varepsilon(x)|, \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_-^\varepsilon(x)|\right\} \le$$

$$\le \max\left\{\sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_+(x)|, \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f_-(x)|\right\} = \sup_{x\in\mathbb{R}^n}|f(x)|.$$

$\square$

**Теорема 2.** *Пусть $X$ – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $f \in L_p(X)$, $p \in [1, +\infty)$, $\varepsilon > 0$. Тогда существует функция $f_\varepsilon \in L_p(\mathbb{R}^n)$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток и такая, что*

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_p(X)} < \varepsilon.$$

*При этом если $f \in L_p(X, \mathbb{R})$, то $f_\varepsilon \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$.*

**Доказательство.**

**Шаг 1.** Пусть $f \in L_p(X, \mathbb{R})$. Продолжим функцию $f$ на $\mathbb{R}^n$, полагая $f(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus X$. Тогда $f \in L_p(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим множество

$$X_k := \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \le k, \ |f(x)| \le k\}.$$

Поскольку $X_k \subset X_{k+1}$ для любого $k \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{R}^n = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} X_k$, то в силу теоремы о непрерывности интеграла по множествам (теорема 1 §8 главы 8)

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx = \lim_{k\to\infty}\int\limits_{X_k} |f(x)|^p\,dx.$$

Поэтому найдется индекс $k \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n\setminus X_k} |f(x)|^p\,dx < \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p. \tag{4}$$

Рассмотрим измеримую функцию

$$g(x) := \begin{cases} f(x), & x \in X_k, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus X_k. \end{cases}$$

Тогда

$$\|g-f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x) - f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} = \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n \setminus X_k} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Поскольку

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(x)| \, dx = \int\limits_{X_k} |f(x)| \, dx \leq k\mu(X_k) \leq k \cdot (2k)^n < +\infty,$$

то $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Зафиксируем произвольное число $\delta > 0$. Согласно теореме 1 найдется функция $g_\delta : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток и такая, что

$$\|g_\delta - g\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \delta, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g_\delta(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |g(x)| \leq k.$$

Так как $|g_\delta(x) - g(x)| \leq |g_\delta(x)| + |g(x)| \leq 2k$, то $|g_\delta(x) - g(x)|^p \leq$ $\leq |g_\delta(x) - g(x)| \cdot (2k)^{p-1}$ и, следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_\delta(x) - g(x)|^p \, dx \leq (2k)^{p-1} \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_\delta(x) - g(x)| \, dx < (2k)^{p-1} \cdot \delta. \quad (5)$$

Определим число $\delta$ из равенства $(2k)^{p-1} \cdot \delta = \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p$ и положим $f_\varepsilon = g_\delta$. Тогда

$$\|f_\varepsilon - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} = \left( \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g_\delta(x) - g(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно,

$$\|f_\varepsilon - f\|_{L_p(X)} \leq \|f_\varepsilon - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f_\varepsilon - g\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} + \|g - f\|_{L_p(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon.$$

**Шаг 2.** Пусть функция $f \in L_p(X)$ может принимать комплексные значения. Применяя утверждение, доказанное на шаге 1, к функциям $\operatorname{Re} f(x)$ и $\operatorname{Im} f(x)$, находим функции $g_\varepsilon, h_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, равные конечным линейным комбинациям индикаторных функций клеток и такие, что

$$\|\operatorname{Re} f - g_\varepsilon\|_{L_p(X)} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \|\operatorname{Im} f - h_\varepsilon\|_{L_p(X)} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Полагая $f_\varepsilon := g_\varepsilon + ih_\varepsilon$, получаем

$$\|f - f_\varepsilon\|_{L_p(X)} \le \|\operatorname{Re} f - g_\varepsilon\|_{L_p(X)} + \|\operatorname{Im} f - h_\varepsilon\|_{L_p(X)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

**Замечание.** Если функция $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ равна линейной комбинации индикаторных функций клеток $\Pi_j \subset \mathbb{R}^n$:

$$h(x) = \sum_{j=1}^{j_0} h_j \cdot \mathbf{1}_{\Pi_j}(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

то $h$ представима в виде линейной комбинации индикаторных функций попарно непересекающихся клеток.

Действительно, индукцией по числу клеток $j_0$ легко доказать, что клеточное множество $A := \bigcup\limits_{j=1}^{j_0} \Pi_j$ представимо в виде дизъюнктного объединения клеток $\pi_k \subset \mathbb{R}^n$ таких, что для любых индексов $j \in \overline{1, j_0}$ и $k \in \overline{1, k_0}$ либо $\pi_k \subset \Pi_j$, либо $\pi_k \cap \Pi_j = \emptyset$. Тогда любая клетка $\Pi_j$ является дизъюнктным объединением клеток $\pi_k$ таких, что $\pi_k \subset \Pi_j$. Следовательно,

$$\mathbf{1}_{\Pi_j}(x) = \sum_{k:\ \pi_k \subset \Pi_j} \mathbf{1}_{\pi_k}(x) \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n \quad \forall j \in \overline{1, j_0}.$$

Поэтому для любой точки $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$h(x) = \sum_{j=1}^{j_0} h_j \sum_{k:\ \pi_k \subset \Pi_j} \mathbf{1}_{\pi_k}(x) = \sum_{k \in \overline{1,k_0}} \left( \sum_{j:\ \pi_k \subset \Pi_j} h_j \right) \mathbf{1}_{\pi_k}(x),$$

то есть функция $h$ представима в виде линейной комбинации индикаторных функций попарно непересекающихся клеток $\pi_k$.

**Теорема 3.** (Теорема Римана.) *Пусть $f \in L_1(a, b)$, где $(a, b)$ – конечный или бесконечный интервал. Тогда*

$$\int\limits_a^b f(x)\, e^{i\omega x}\, dx \quad \overset{\omega \to \pm\infty}{\longrightarrow} \quad 0.$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 2 найдется функция $f_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток $\Pi_k \subset \mathbb{R}$: $f_\varepsilon(x) = \sum\limits_{k=1}^{k_0} g_k \cdot \mathbf{1}_{\Pi_k}(x)$ и такая, что $\|f - f_\varepsilon\|_{L_1(a,b)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Тогда

$$\left|\int_a^b (f(x) - f_\varepsilon(x))e^{i\omega x}\,dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x) - f_\varepsilon(x)|\,dx \le \|f - f_\varepsilon\|_{L_1(\mathbb{R})} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6}$$

Заметим, что клетка в $\mathbb{R}$ – это ограниченный числовой промежуток. Концы этого числового промежутка обозначим как $\alpha_k$ и $\beta_k$, $\alpha_k \le \le \beta_k$. Если $(\alpha_k, \beta_k) \not\subset (a,b)$, то заменим интервал $(\alpha_k, \beta_k)$ на интервал $(\alpha_k, \beta_k) \cap (a,b)$ и получим, что $(\alpha_k, \beta_k) \subset (a,b)$. Тогда

$$\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{i\omega x}\,dx = \sum_{k=1}^{k_0} g_k \int\limits_{\alpha_k}^{\beta_k} e^{i\omega x}\,dx = \sum_{k=1}^{k_0} g_k\, \frac{e^{i\omega x}}{i\omega}\bigg|_{x=\alpha_k}^{x=\beta_k}.$$

Следовательно,

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{i\omega x}\,dx\right| \le \frac{2}{|\omega|}\sum_{k=1}^{k_0} |g_k|.$$

Выбирая число $\omega_\varepsilon > 0$ так, что $\frac{2}{\omega_\varepsilon}\sum_{k=1}^{k_0} |g_k| < \frac{\varepsilon}{2}$, получаем неравенство

$$\left|\int_a^b f_\varepsilon(x)e^{i\omega x}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall \omega:\ |\omega| > \omega_\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (6) получаем

$$\left|\int_a^b f(x)e^{i\omega x}\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \qquad \forall \omega:\ |\omega| > \omega_\varepsilon.$$

Поэтому $\int\limits_a^b f(x)\, e^{i\omega x}\,dx \to 0$ при $\omega \to \pm\infty$. $\square$

**Следствие.** *Если $f \in L_1(-\pi, \pi)$, то коэффициенты Фурье*

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

*по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$ стремятся к нулю при $k \to \pm\infty$. Следовательно, коэффициенты Фурье по стандартной тригонометрической системе*

$$a_k = c_k + c_{-k}, \qquad b_k = i(c_k - c_{-k})$$

*также стремятся к нулю при $k \to \infty$.*

## § 3. Сходимость ряда Фурье в точке

Заметим, что поскольку функции $e^{ikx}$ являются $2\pi$-периодичными, то сумма ряда Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ (в случае сходимости ряда) является $2\pi$-периодической функцией. Поэтому периодичность функции $f(x)$ с периодом $2\pi$ является необходимым условием сходимости ряда Фурье функции $f(x)$ к самой функции $f(x)$.

При вычислении интегралов от периодических функций полезно иметь в виду, что интеграл по отрезку, длина которого равна периоду функции, не зависит от расположения этого отрезка.

**Лемма 1.** *Если функция $\varphi$ периодична с периодом $T$ и интегрируема на отрезке длиной $T$, то интеграл $\int\limits_{x_0}^{x_0+T} \varphi(x)\, dx$ не зависит от $x_0$.*

**Доказательство.** Поскольку любой отрезок можно покрыть конечным числом отрезков длиной $T$, то в силу аддитивности интеграла функция $\varphi$ интегрируема на любом отрезке. Используя периодичность функции $\varphi$, получаем

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+T} \varphi(x)\, dx = \int\limits_{x_0}^{T} \varphi(x)\, dx + \int\limits_{T}^{x_0+T} \varphi(x)\, dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{T} \varphi(x)\,dx + \int\limits_{0}^{x_0} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{0}^{T} \varphi(x)\,dx. \qquad \square$$

Обратимся к вопросу о сходимости ряда Фурье. Сходимость ряда Фурье означает сходимость последовательности его частичных сумм

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}. \tag{1}$$

**Лемма 2.** *Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$ является $2\pi$-периодичной. Тогда для частичных сумм ряда Фурье функции $f$ справедлива формула*

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_n(t)\,dt,$$

*где функция*

$$D_n(t) := \frac{1}{2} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikt} = \frac{1}{2} + \cos t + \dots + \cos nt$$

*называется ядром Дирихле порядка $n$.*

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное число $x \in \mathbb{R}$. Подставляя в формулу (1) выражения $c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(u)\, e^{-iku}\,du$, получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u) \left( \sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-u)} \right) du = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(u)\, D_n(x-u)\,du$$

Вводя новую переменную интегрирования $t = u - x$, получаем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+t)\, D_n(-t)\,dt.$$

Используя лемму 1, с учетом $2\pi$-периодичности функций $f$ и $D_n$, имеем

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int\limits_{-\pi}^{0} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left( \int\limits_{0}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt + \int\limits_{0}^{\pi} f(x+t)\, D_n(-t)\, dt \right) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_{0}^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_n(t)\, dt.$$

В последнем равенстве использована четность ядра Дирихле. $\square$

**Свойства ядра Дирихле.**

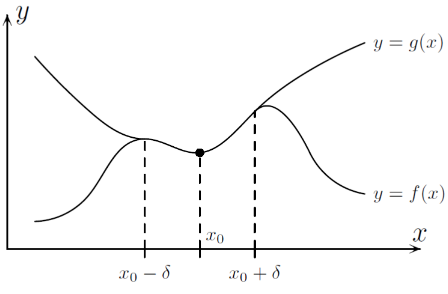
$$(1) \qquad \int\limits_0^\pi D_n(t)\, dt = \tfrac{\pi}{2};$$

$$(2) \qquad D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

**Доказательство.** 1) $\int\limits_0^\pi D_n(t)\, dt = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \int\limits_0^\pi \cos kt\, dt = \frac{\pi}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{\sin kt}{k}\Big|_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

2) $2\sin\frac{t}{2}\, D_n(t) = \sin\frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} 2\sin\frac{t}{2}\, \cos kt = \sin\frac{t}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \left(\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t - \sin\left(k-\frac{1}{2}\right)t\right) = \sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t.$ $\square$

**Теорема 1.** (Принцип локализации.) *Пусть функции $f, g \in L_1(-\pi,\pi)$ – $2\pi$-периодичны. Пусть существует число $\delta > 0$ такое, что $f(x) = g(x)$ $\forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.*



*Тогда в точке $x_0$ ряды Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$ сходятся или расходятся одновременно, а если сходятся – то к одинаковым значениям.*

**Доказательство.** Обозначим через $S_n^f(x)$, $S_n^g(x)$ частичные суммы рядов Фурье функций $f$ и $g$. В силу леммы 2

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi \Big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)\Big)\, D_n(t)\, dt.$$

По условию теоремы $f(x_0+t) + f(x_0-t) = g(x_0+t) + g(x_0-t)$ при $t \in (0, \delta)$, поэтому

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi \Big(f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)\Big)\, D_n(t)\, dt.$$

Пользуясь свойством (2) ядра Дирихле, получаем

$$S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_\delta^\pi h(t)\, \sin\left(n + \frac{1}{2}\right) t\, dt, \tag{2}$$

где

$$h(t) := \frac{f(x_0+t) + f(x_0-t) - g(x_0+t) - g(x_0-t)}{2\sin\frac{t}{2}}.$$

Так как $h \in L_1(\delta, \pi)$, то в силу теоремы Римана и формулы (2) получаем $\quad S_n^f(x_0) - S_n^g(x_0) \to 0$ при $n \to \infty$. $\square$

**Теорема 2.** (Признак Ди́ни.) *Пусть функция $f \in L_1(-\pi, \pi)$ является $2\pi$-периодичной. Пусть в точке $x_0$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0) = \lim\limits_{x\to x_0+0} f(x)$ и $f(x_0-0) = \lim\limits_{x\to x_0-0} f(x)$. Пусть существует число $\delta \in (0,\pi)$ такое, что функция*

$$\varphi(t) := \frac{f(x_0+t) - f(x_0+0) + f(x_0-t) - f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}$$

*принадлежит классу $L_1(0,\delta)$. Тогда ряд Фурье функции $f$ в точке $x_0$ сходится к числу $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.*

**Доказательство.** Поскольку $f \in L_1(-\pi,\pi)$, то $\varphi \in L_1(\delta,\pi)$. Отсюда и из условий теоремы получаем, что функция $\varphi \in L_1(0,\pi)$. В силу теоремы Римана

$$\int_0^\pi \varphi(t)\,\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\;dt \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Из леммы 2 следует, что

$$S_n(x_0) = \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \Bigg( f(x_0+t) - f(x_0+0) +$$

$$+ f(x_0-t) - f(x_0-0)\Bigg)\, D_n(t)\,dt + \tfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{\pi}\int_0^\pi D_n(t)\,dt.$$

Пользуясь свойствами ядра Дирихле $\int_0^\pi D_n(t)\,dt = \frac{\pi}{2}$ и $D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$, получаем

$$S_n(x_0) - \tfrac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2} =$$

$$= \tfrac{1}{\pi}\int_0^\pi \tfrac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{2\sin\frac{t}{2}}\,\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\;dt =$$

$$= \tfrac{1}{2\pi}\int_0^\pi \varphi(t)\,\sin\left(n+\tfrac{1}{2}\right)t\;dt \to 0 \quad \text{при} \quad n\to\infty.$$

Следовательно, $S_n(x_0) \to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$ при $n\to\infty$. □

**Теорема 3.** (О сходимости ряда Фурье в точке.) *Пусть функция $f \in L_1(-\pi,\pi)$ является $2\pi$-периодичной. Пусть в точке $x_0$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+0)$, $f(x_0-0)$ и конечные односторонние производные*

$$f'_+(x_0) = \lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t},$$

$$f'_-(x_0) = \lim_{t\to-0}\frac{f(x_0+t)-f(x_0-0)}{t}.$$

*Тогда ряд Фурье функции $f$ в точке $x_0$ сходится к числу $\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$, в частности, в случае непрерывности функции $f$ в точке $x_0$ – к значению $f(x_0)$.*

**Доказательство.** Поскольку

$$\lim_{t\to+0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} = f'_+(x_0) - f'_-(x_0),$$

то для функции $\varphi(t) = \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{\sin\frac{t}{2}}$ существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+0} \varphi(t) = \lim\limits_{t\to+0} \frac{t}{\sin\frac{t}{2}} \times$ $\times \lim\limits_{t\to+0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)+f(x_0-t)-f(x_0-0)}{t} = 2(f'_+(x_0) - f'_-(x_0))$. Следовательно, функция $\varphi$ ограничена на некотором интервале $(0,\delta)$, где $\delta \in (0,\pi)$. Отсюда и из измеримости $\varphi$ следует, что $\varphi \in L_1(0,\delta)$. По признаку Дини получаем требуемое утверждение. $\square$

Заметим, что если функция $f$ определена и дифференцируема на интервале $(x_0,x_1)$ и в точке $x_0$ существуют конечные пределы справа функции $f$ и ее производной, то в точке $x_0$ правая производная функции $f$ существует и равна правому пределу производной: $f'_+(x_0) =$ $= f'(x_0+0)$, где по определению $f'_+(x_0) = \lim\limits_{t\to+0} \frac{f(x_0+t)-f(x_0+0)}{t}$, $f'(x_0+0) = \lim\limits_{t\to+0} f'(x_0+t)$. Этот факт следует из теоремы Лагранжа о среднем (глава 3, §4). Аналогично, если существует $f'(x_0-0) \in \mathbb{R}$, то существует $f'_-(x_0)$ и $f'_-(x_0) = f'(x_0-0)$.

**Определение.** Функция $f$ называется *кусочно-непрерывной* на отрезке $[a,b]$, если она непрерывна во всех точках $(a,b)$ за исключением конечного числа точек $x_i \in (a,b)$, в которых существуют конечные односторонние пределы $f(x_i \pm 0)$, а в концах отрезка $[a,b]$ существуют конечные односторонние пределы $f(a+0)$ и $f(b-0)$. При этом в самих точках $x_i$ функция $f$ может быть неопределена.

Например, если функция $f$ и ее производная $f'$ кусочно-непрерывны на отрезке $[a,b]$, то в точках разрыва функции $f$ ее производная не существует, но существуют односторонние производные, равные односторонним пределам производной.

**Теорема 4.** *Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x \in (-\pi, \pi)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x+0) + f(x-0))$, а в точках $\pm\pi$ – к числу $\frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$.*

**Доказательство.** Если $f(-\pi) \neq f(\pi)$, то изменим значение функции $f$ в точке $\pi$ так, чтобы $f(-\pi) = f(\pi)$. При этом коэффициенты Фурье $c_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, e^{-ikx}\, dx$ не изменятся, а значит, не изменится и ряд Фурье. Продолжим функцию $f$ $2\pi$-периодически на всю числовую ось. Из теоремы 3 следует, что ряд Фурье функции $f(x)$ сходится в точках $x_0 \in (-\pi, \pi)$ к значению $\frac{1}{2}(f(x_0+0) + f(x_0-0))$, а в точках $\pm\pi$ – к числу $\frac{1}{2}(f(\pi+0) + f(\pi-0)) = \frac{1}{2}(f(-\pi+0) + f(\pi-0))$. □

**Замечание.** Существуют непрерывные и $2\pi$-периодические функции, ряды Фурье которых расходятся в некоторых точках.

**Задача 1.** Пусть $$Q(x, m) = \sum_{k=m}^{2m-1} \frac{\cos kx}{2m-k} + \sum_{k=2m+1}^{3m} \frac{\cos kx}{2m-k},$$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} Q(x, 2^{n^2}).$$

Доказать, что функция $f$ непрерывна и $2\pi$-периодична, но ее ряд Фурье не сходится в точке $x = 0$.

## § 4. Почленное дифференцирование и интегрирование ряда Фурье

**Теорема 1.** (О почленном дифференцировании ряда Фурье.) *Пусть функция $f$ непрерывна, а ее производная $f'$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и выполняется равенство $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда ряд Фурье функции $f'$ получается формальным почленным дифференцированием ряда Фурье*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx},$$

*функции $f$. То есть, ряд Фурье функции $f'$ имеет вид*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}.$$

**Доказательство.** Обозначим через $c_k'$ коэффициенты Фурье функции $f'(x)$. Интегрируя по частям и учитывая условие $f(-\pi) = f(\pi)$, получим

$$c_k' = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\, e^{-ikx}\, dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\, f(x)\, e^{-ikx}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(-ik)\, e^{-ikx}\, dx = ikc_k.$$

Поэтому ряд Фурье функции $f'$ имеет вид

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k' e^{ikx} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} ikc_k e^{ikx}. \qquad \square$$

**Замечание.** В вещественной форме ряды Фурье функция $f$ и $f'$ принимают соответственно вид

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(-ka_k \sin kx + kb_k \cos kx\right).$$

**Теорема 2.** (О почленном интегрировании ряда Фурье.) *Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$. Тогда для любого $x \in [-\pi, \pi]$ справедлива формула почленного интегрирования ряда Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$:*

$$\int\limits_0^x f(t)\, dt = \widetilde{C}_0 + c_0 x + \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{c_k}{ik} e^{ikx},$$

*где*

$$\widetilde{C}_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\, dx, \qquad \Phi(x) = \int\limits_0^x f(t)\, dt - c_0 x.$$

**Доказательство.** Так как

$$\Phi(\pi) - \Phi(-\pi) = \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt - c_0 \cdot 2\pi = 0,$$

то в силу теоремы 4 § 3 функция $\Phi(x)$ равна сумме своего ряда Фурье:

$$\Phi(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widetilde{C}_k e^{ikx}, \tag{1}$$

где $\widetilde{C}_k$ – коэффициенты Фурье функции $\Phi(x)$, в частности, $\widetilde{C}_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \Phi(x)\,dx$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье $c_k = ik\cdot\widetilde{C}_k$, что вместе с формулой (1) дает требуемое равенство. $\square$

## § 5. Порядок убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье

**Лемма 1.** *Пусть функция $f(x)$ и ее производная $f'(x)$ кусочно-непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$. Тогда для коэффициентов Фурье функции $f$ справедливы оценки:* $c_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, *т. е.*

$$\exists M\in\mathbb{R}:\quad \forall k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\} \hookrightarrow\ |c_k| \le \frac{M}{|k|}.$$

**Доказательство.** Поскольку из кусочной непрерывности функций $f$ и $f'$ следует их ограниченность, то существуют числа $M_0, M_1 \in \mathbb{R}$ такие, что

$$|f(x)| \le M_0,\quad |f'(x)| \le M_1 \qquad \forall x\in[-\pi,\pi].$$

Пусть $x_0,\dots,x_I \quad (-\pi = x_0 < x_1 < \dots < x_I = \pi)$ – точки разрывов функции $f$. Тогда для любого $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x)\,e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{I}\int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\frac{de^{-ikx}}{-ik} =$$

$$= -\frac{1}{2ik\pi}\sum_{i=1}^{I}\left( f(x)\,e^{-ikx}\Big|_{x=x_{i-1}+0}^{x=x_i-0} - \int\limits_{x_{i-1}}^{x_i} f'(x)\,e^{-ikx}\,dx \right).$$

Поэтому $|c_k| \le \frac{M_0 I+\pi M_1}{\pi|k|}$, т. е. $c_k = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$. □

**Теорема 1.** (О порядке убывания коэффициентов Фурье и остатка ряда Фурье.)

*1) Пусть функция $f$ и ее производные до $q-1$ порядка включительно непрерывны на отрезке $[-\pi,\pi]$ и удовлетворяют условиям $f^{(p)}(-\pi) = f^{(p)}(\pi)$ при $p \in \overline{0, q-1}$, где $q \in \mathbb{N}$; либо $q = 0$. Пусть производные $q$-го и $(q+1)$-го порядков функции $f$ кусочно-непрерывны на $[-\pi,\pi]$. Тогда справедлива следующая оценка скорости убывания коэффициентов Фурье функции $f$:*

$$c_k = O\left(\frac{1}{|k|^{q+1}}\right). \tag{1}$$

*2) При этом справедлива следующая оценка скорости убывания остатка ряда Фурье $r_n(x) = \sum\limits_{k=-\infty}^{+\infty} c_k\,e^{ikx} - \sum\limits_{k=-n}^{n} c_k\,e^{ikx}$:*

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right).$$

*3) Если функция $f^{(q)}(x)$ имеет неустранимый разрыв $(f^{(q)}(x_0-0) \ne f^{(q)}(x_0+0))$ в некоторой точке $x_0 \in (-\pi,\pi)$ или $f^{(q)}(\pi-0) \ne f^{(q)}(-\pi+0)$, то оценка (1) неулучшаема в том смысле, что*

$$\forall \varepsilon > 0 \hookrightarrow\ c_k \ne O\left(\frac{1}{|k|^{q+1+\varepsilon}}\right).$$

**Доказательство.** 1) Обозначим через $c_k^{(p)}$ коэффициенты Фурье функции $f^{(p)}(x)$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье следовательно,

$$c_k^{(p)} = (ik)^p c_k. \tag{2}$$

Применяя лемму 1 к функции $f^{(q)}(x)$, получим оценку $c_k^{(q)} = O\left(\frac{1}{|k|}\right)$, что вместе с равенством (2) доказывает оценку (1).

2) Из оценки (1) следует существование константы $M$ такой, что $|c_k| \le \frac{M}{|k|^{q+1}} \quad \forall k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, следовательно,

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} (|c_{-k}| + |c_k|) \le 2M \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^{q+1}}.$$

Интегрируя неравенство $\frac{1}{k^{q+1}} \le \frac{1}{t^{q+1}}$, справедливое при $t \in [k-1, k]$, получим неравенство $\frac{1}{k^{q+1}} \le \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{q+1}}$. Следовательно,

$$\sup_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| \le 2M \sum_{k=n+1}^{\infty} \int\limits_{k-1}^{k} \frac{dt}{t^{q+1}} = 2M \int\limits_{n}^{\infty} \frac{dt}{t^{q+1}} = \frac{2M}{q} \frac{1}{n^q},$$

т. е. $\sup\limits_{x\in[-\pi,\pi]} |r_n(x)| = O\left(\frac{1}{n^q}\right)$.

3) Третью часть теоремы докажем методом от противного. Предположим, что для некоторого числа $\varepsilon > 0$ справедлива оценка $c_k = O\left(\frac{1}{|k|^{q+1+\varepsilon}}\right)$. Отсюда и из равенства (2) получаем, что $c_k^{(q)} = O\left(\frac{1}{|k|^{1+\varepsilon}}\right)$, следовательно, числовой ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k^{(q)}|$ сходится. В силу признака Вейерштрасса равномерной сходимости функциональных рядов получаем равномерную сходимость ряда Фурье $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k^{(q)} e^{ikx}$ функции $f^{(q)}(x)$. Так как сумма равномерно сходящегося функционального ряда, члены которого являются непрерывными функциями, есть функция непрерывная (глава 10, §3, теорема 2), то сумма ряда Фурье функции $f^{(q)}(x)$ непрерывна.

Если $f^{(q)}(x_0 - 0) \ne f^{(q)}(x_0 + 0)$ в некоторой точке $x_0 \in (-\pi, \pi)$ или $f^{(q)}(\pi - 0) \ne f^{(q)}(-\pi + 0)$, то в силу теоремы о сходимости ряда Фурье в точке сумма ряда Фурье функции $f^{(q)}(x)$ будет иметь разрыв в точке $x_0$ или в точках $\pm\pi$ соответственно. Полученное противоречие завершает доказательство третьей части теоремы. $\square$

## § 6. Суммирование ряда Фурье методом средних арифметических

**Определение.** *Суммами Фейера* $\sigma_n(x)$ функции $f(x)$ называются средние арифметические сумм Фурье $S_n(x)$ функции $f(x)$:

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_n(x)}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots .$$

Ряд Фурье функции $f(x)$ называется *сходящимся в смысле средних арифметических*, если сходится последовательность сумм Фейера функции $f(x)$.

В данном параграфе будет доказана теорема Фейера, утверждающая, что последовательность сумм Фейера непрерывной $2\pi$-периодической функции $f(x)$ сходится к функции $f(x)$ равномерно. Поэтому суммы Фейера любой непрерывной $2\pi$-периодической функции могут служить равномерными приближениями этой функции. Поскольку последовательность сумм Фурье непрерывной $2\pi$-периодической функции $f(x)$ может расходиться в некоторых точках, то суммы Фурье не могут служить приближениями такой функции $f(x)$ в этих точках и тем более равномерно.

**Лемма 1.** *Для сумм Фейера непрерывной $2\pi$-периодической функции $f(x)$ справедлива формула*

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, F_n(t)\, dt, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots ,$$

*где функция*

$$F_n(t) = \frac{D_0(t) + D_1(t) + \ldots + D_n(t)}{n+1}, \qquad n = 0, 1, 2, \cdots ,$$

*равная среднему арифметическому ядер Дирихле, называется ядром Фейера порядка $n$.*

**Доказательство.** В силу леммы 2 § 3 частичная сумма Фурье выражается через ядро Дирихле по формуле

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, D_k(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} S_k(x) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t)) \left( \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} D_k(t) \right) dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} (f(x+t) + f(x-t))\, F_n(t)\, dt. \qquad \square$$

**Свойства ядра Фейера:**

(1) $\int\limits_0^{\pi} F_n(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$;

(2) $F_n(t) = \frac{1-\cos(n+1)t}{(n+1)4\sin^2(t/2)}$;

(3) $F_n(t) \geq 0$;

(4) $\max\limits_{t\in[\delta,\pi]} F_n(t) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \qquad \forall \delta \in (0,\pi)$.

**Доказательство.** 1) В силу первого свойства ядра Дирихле $\int\limits_0^{\pi} D_k(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$, следовательно, $\int\limits_0^{\pi} F_n(t)\, dt = \frac{1}{n+1} \sum\limits_{k=0}^{n} \int\limits_0^{\pi} D_k(t)\, dt = \frac{\pi}{2}$.

2) Поскольку согласно второму свойству ядра Дирихле имеем $D_k(t) = \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}$, то

$$(n+1)\, 4\sin^2(t/2)\, F_n(t) = 2\sin(t/2) \sum_{k=0}^{n} \sin\left(k + \frac{1}{2}\right) t =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \Big(\cos kt - \cos(k+1)t\Big) = 1 - \cos(n+1)t.$$

3) Следует из второго свойства ядра Фейера.

4) Из второго свойства также следует, что $F_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)2\sin^2(t/2)}$, поэтому для любого $\delta \in (0,\pi)$ имеем

$$\max_{t\in[\delta,\pi]} F_n(t) \leq \frac{1}{(n+1)2\sin^2(\delta/2)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

**Теорема 1.** (Теорема Фейера.) *Пусть функция $f$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда последовательность сумм Фейера функции $f$ сходится к функции $f$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$.*

**Доказательство.** Требуется доказать, что

$$\sup_{x \in [-\pi,\pi]} |\sigma_n(x) - f(x)| \to 0 \qquad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{1}$$

Продолжим $2\pi$-периодично функцию $f$ на $\mathbb{R}$. Из условий теоремы следует непрерывность продолженной функции $f$. В силу леммы 1 и первого свойства ядра Фейера

$$\sigma_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi (f(x+t) + f(x-t))\, F_n(t)\, dt - \frac{2}{\pi}\, f(x) \int\limits_0^\pi F_n(t)\, dt =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \Big( f(x+t) + f(x-t) - 2f(x) \Big)\, F_n(t)\, dt.$$

Поэтому, используя третье свойство ядра Фейера, получаем

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt. \tag{2}$$

Для доказательства соотношения (1) разобъем интеграл в правой части неравенства (2) на два интеграла по отрезкам $[0, \delta]$ и $[\delta, \pi]$.

Из непрерывности функции $f$ на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ по теореме Кантора следует равномерная непрерывность $f$ на этом отрезке. Поэтому, обозначая

$$\omega(\delta) = \sup_{\substack{x', x'' \in [-2\pi, 2\pi] \\ |x' - x''| \le \delta}} |f(x') - f(x'')|,$$

получаем соотношение

$$\lim_{\delta \to +0} \omega(\delta) = 0. \tag{3}$$

Поскольку для любых $\delta \in (0, \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$ справедливы неравенства

$$\int\limits_0^\delta |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt \le$$

$$\leq \int\limits_0^\delta \left(|f(x+t) - f(x)| + |f(x-t) - f(x)|\right) F_n(t)\, dt \leq$$

$$\leq 2\omega(\delta) \int\limits_0^\delta F_n(t)\, dt \leq 2\omega(\delta) \int\limits_0^\pi F_n(t)\, dt,$$

то в силу первого свойства ядра Фейера для любых $\delta \in (0, \pi)$, $x \in \in [-\pi, \pi]$ имеем

$$\int\limits_0^\delta |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt \leq \pi\omega(\delta). \tag{4}$$

В силу непрерывности функции $f$ на отрезке $[-2\pi, 2\pi]$ существует число $M = \max\limits_{x \in [-2\pi, 2\pi]} |f(x)|$. Поэтому для любых $\delta \in (0, \pi)$, $x \in [-\pi, \pi]$ справедливо неравенство

$$\int\limits_\delta^\pi |f(x+t) + f(x-t) - 2f(x)|\, F_n(t)\, dt \leq 4M\, \pi \max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t).$$

Отсюда и из неравенств (2), (4) для любого $\delta \in (0, \pi)$ получаем

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(x) - f(x)| \leq \omega(\delta) + 4M \max_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t).$$

Используя соотношение (3), для любого числа $\varepsilon > 0$ определим число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0, \pi)$ так, что $\omega(\delta) < \frac{\varepsilon}{2}$. В силу четвертого свойства ядра Фейера существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что для любого $n \geq N$ справедливо неравенство $4M \max\limits_{t \in [\delta, \pi]} F_n(t) < \frac{\varepsilon}{2}$. Поэтому

$$\sup_{x \in [-\pi, \pi]} |\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon \quad \forall n \geq N(\varepsilon),$$

то есть выполняется условие (1). $\square$

## § 7. Приближения непрерывных функций многочленами

**Определение.** Пусть $A_0, A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots, B_n$ – некоторые комплексные числа, причем $A_n \neq 0$ или $B_n \neq 0$. Выражение

$$T_n(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{n} A_k \cos kx + B_k \sin kx$$

называется *тригонометрическим многочленом* степени $n$.

**Теорема 1.** (Первая теорема Вейерштрасса.) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на $[-\pi, \pi]$ и $f(-\pi) = f(\pi)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T_n(x)$, равномерно приближающий функцию $f(x)$ на $[-\pi, \pi]$ с точностью $\varepsilon$, т. е.*

$$\|f - T_n\|_{C[-\pi,\, \pi]} < \varepsilon.$$

*При этом, если все значения функции $f$ вещественны, то все коэффициенты тригонометрического многочлена $T_n$ вещественны.*

**Доказательство.** Поскольку частичные суммы Фурье являются тригонометрическими многочленами, то суммы Фейера $\sigma_n(x)$, равные линейным комбинациям сумм Фурье, также являются тригонометрическими многочленами. Из теоремы Фейера следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется число $n \in \mathbb{N}$ такое, что $\|f - \sigma_n\|_{C[-\pi,\, \pi]} <$ $< \varepsilon$. Полагая $T_n = \sigma_n$, получаем требуемое неравенство. $\square$

**Теорема 2.** (Вторая теорема Вейерштрасса.) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P_n(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$, равномерно приближающий функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ с точностью $\varepsilon$, т. е.*

$$\|f - P_n\|_{C[a,\, b]} < \varepsilon.$$

*При этом, если все значения функции $f$ вещественны, то все коэффициенты многочлена $P_n$ вещественны.*

**Доказательство.** Производя замену переменной

$$x = a + \frac{b-a}{\pi} t, \qquad 0 \le t \le \pi, \qquad a \le x \le b, \tag{1}$$

получим функцию $F(t) = f\left(a + \frac{b-a}{\pi} t\right)$, непрерывную на отрезке $[0, \pi]$. Продолжим функцию $F(t)$ на отрезок $[-\pi, 0]$ четным образом.

Получим непрерывную на $[-\pi, \pi]$ функцию $F(t)$, удовлетворяющую условию $F(-\pi) = F(\pi)$.

В силу теоремы 1 для любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен $T_m(t)$ такой, что

$$\|F - T_m\|_{C[-\pi,\,\pi]} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2}$$

Поскольку функции $\sin kt$, $\cos kt$ раскладываются в ряды Тейлора с радиусом сходимости $R = +\infty$, то функция $T_m(t)$, равная (конечной) линейной комбинации функций $\sin kt$, $\cos kt$, также раскладывается в ряд Тейлора с $R = +\infty$. Так как степенной ряд сходится равномерно на любом отрезке, содержащемся в интервале сходимости этого ряда, то ряд Тейлора функции $T_m(t)$ сходится к функции $T_m(t)$ равномерно на отрезке $[-\pi, \pi]$. Следовательно, найдется многочлен $Q_n(t) = c_0 + c_1\, t + \ldots + c_n\, t^n$ такой, что $\|T_m - Q_n\|_{C[-\pi,\,\pi]} < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из неравенства (2) получаем, что

$$\|F - Q_n\|_{C[-\pi,\,\pi]} < \varepsilon.$$

Производя обратную к (1) замену переменной: $t = \frac{\pi}{b-a}(x-a)$, получим неравенство

$$\max_{x\in[a,b]} \left| F\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right) - Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right) \right| < \varepsilon.$$

Определив многочлен $P_n(x) = Q_n\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$ и замечая, что $f(x) = F\left(\frac{\pi}{b-a}(x-a)\right)$, получаем требуемое неравенство. $\square$

**Определение.** Пусть $F$ – нормированное пространство. Множество $A \subset F$ называется *всюду плотным* подмножеством множества $B \subset \subset F$, если $A \subset B \subset \overline{A}$, т.е. $A \subset B$ и

$$\forall b \in B \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists a_\varepsilon \in A : \quad \|b - a_\varepsilon\| < \varepsilon.$$

**Определение.** Через $C^{=}[a, b]$ обозначим линейное пространство функций $f(x)$, непрерывных на отрезке $[a, b]$ и таких, что $f(a) = = f(b)$.

Первая теорема Вейерштрасса утверждает, что множество тригонометрических многочленов является всюду плотным подмножеством множества $C^{=}[-\pi,\pi]$ относительно нормы пространства $C[-\pi,\pi]$.

Вторая теорема Вейерштрасса утверждает, что множество алгебраических многочленов является всюду плотным подмножеством пространства $C[a,b]$.

## § 8. Теорема Вейерштрасса–Стоуна

**Определение.** Семейство $A$ непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}$ называется *алгеброй Стоуна* на топологическом пространстве $X$, если

1) любая постоянная функция $f : X \to \mathbb{R}$ содержится в $A$;

2) если $f, g \in A$, то $f+g \in A$ и $fg \in A$ (функции $f+g$ и $fg$ определяются формулами $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$, $(fg)(x) = f(x)g(x)$ для любого $x \in X$);

3) для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ найдется функция $f \in$ $\in A$ такая, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

**Лемма 1.** *Пусть $A$ – алгебра Стоуна на топологическом пространстве $X$. Тогда для любых различных точек $x_1, x_2 \in X$ и для любых чисел $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ найдется функция $f \in A$ такая, что $f(x_1) = \lambda_1$, $f(x_2) = \lambda_2$.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольные различные точки $x_1, x_2 \in X$ и для произвольные числа $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. В силу пункта 3) определения алгебры Стоуна найдется функция $g \in A$ такая, что $g(x_1) \neq g(x_2)$. Заметим, что для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $f(x) = \alpha g(x) + \beta$ принадлежит семейству $A$. Подберем числа $\alpha, \beta$ так, чтобы $f(x_1) = \lambda_1$, $f(x_2) = \lambda_2$, т.е.

$$\begin{cases} \alpha g(x_1) + \beta = \lambda_1, \\ \alpha g(x_2) + \beta = \lambda_2. \end{cases}$$

Поскольку определитель матрицы этой системы линейных уравнений равен $\begin{vmatrix} g(x_1) & 1 \\ g(x_2) & 1 \end{vmatrix} = g(x_1) - g(x_2) \neq 0$, то такие числа $\alpha, \beta$ существуют. $\square$

**Лемма 2.** *Пусть $A$ – алгебра Стоуна на компакте*[1] $X$*. Пусть* $f \in \in A$*. Тогда* $|f| \in \overline{A}$*, где* $\overline{A}$ *– замыкание множества* $A$ *относительно нормы* $C(X)$*.*

**Доказательство.** Обозначим $M = \max\limits_{x\in X}|f(x)|$. Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Поскольку функция $m(y) = |y|$ непрерывна, то в силу второй теоремы Вейерштрасса найдется алгебраический многочлен $P_n(y) = a_0 + a_1 y + \ldots + a_n y^n$ такой, что $\|m - P_n\|_{C[-M,\, M]} < < \varepsilon$. Следовательно,

$$\max_{x\in X}\Big|\,|f(x)| - P_n(f(x))\Big| < \varepsilon.$$

Положим $f_\varepsilon(x) := P_n(f(x)) = a_0 + a_1 f(x) + \ldots + a_n f^n(x)$. По определению алгебры Стоуна получаем $f_\varepsilon \in A$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\varepsilon \in A$ такая, что $\Big\||f| - f_\varepsilon\Big\|_{C(X)} < \varepsilon$. Поэтому $|f| \in \overline{A}$. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть $A$ – алгебра Стоуна на компакте $X$. Пусть* $f_1, f_2 \in \overline{A}$*,* $g(x) = \max\{f_1(x), f_2(x)\}$*,* $h(x) = \min\{f_1(x), f_2(x)\}$ *при всех* $x \in X$*. Тогда* $g, h \in \overline{A}$*.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как $f_1, f_2 \in \overline{A}$, то существуют функции $f_1^\varepsilon, f_2^\varepsilon \in A$ такие, что $\|f_i^\varepsilon - f_i\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$ при $i = 1, 2$. Положим $g^\varepsilon(x) := \max\{f_1^\varepsilon(x), f_2^\varepsilon(x)\}$, $x \in X$. Заметим, что для любого $x \in X$

$$g^\varepsilon(x) = \frac{1}{2}(f_1^\varepsilon(x) + f_2^\varepsilon(x) + |f_1^\varepsilon(x) - f_2^\varepsilon(x)|).$$

В силу леммы 2 имеем $|f_1^\varepsilon - f_2^\varepsilon| \in \overline{A}$. Поэтому найдется функция $\varphi \in A$ такая, что

$$\Big\||f_1^\varepsilon - f_2^\varepsilon| - \varphi\Big\|_{C(X)} < \varepsilon.$$

Следовательно, функция $\tilde{g}^\varepsilon := \frac{1}{2}(f_1^\varepsilon + f_2^\varepsilon + \varphi)$ содержится в $A$. При этом

[1]здесь и далее под компактом понимаем компактное топологическое пространство, в частности, ограниченное замкнутое множество в $\mathbb{R}^n$ является компактом

$$\left\|\tilde{g}^\varepsilon - g^\varepsilon\right\|_{C(X)} = \frac{1}{2}\left\||f_1^\varepsilon - f_2^\varepsilon| - \varphi\right\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{1}$$

Так как при $i = 1, 2$ имеем $\|f_i^\varepsilon - f_i\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$, то

$$f_i(x) - \frac{\varepsilon}{2} < f_i^\varepsilon(x) < f_i(x) + \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall x \in X,$$

а значит для любого $x \in X$

$$\max\{f_1(x), f_2(x)\} - \frac{\varepsilon}{2} < \max\{f_1^\varepsilon(x), f_2^\varepsilon(x)\} < \max\{f_1(x), f_2(x)\} + \frac{\varepsilon}{2},$$

то есть, $\|g - g^\varepsilon\|_{C(X)} < \frac{\varepsilon}{2}$. Отсюда и из неравенства (1) получаем неравенство

$$\|\tilde{g}^\varepsilon - g\|_{C(X)} < \varepsilon.$$

Поскольку $\tilde{g}^\varepsilon \in A$, то в силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $g \in \overline{A}$. Аналогично, $h \in \overline{A}$. □

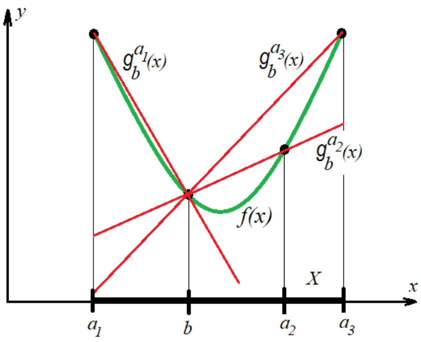
**Теорема 1.** (Теорема Вейерштрасса–Стоуна.) *Алгебра Стоуна на компакте $X$ является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{R})$.*

**Доказательство.** Пусть $A$ – алгебра Стоуна на компакте $X$. Фиксирум произвольную функцию $f \in C(X, \mathbb{R})$ и произвольное число $\varepsilon > 0$. Для любых двух точек $a, b \in X$ по лемме 1 существует функция $g_b^a \in A$ такая, что

$$g_b^a(a) = f(a), \quad g_b^a(b) = f(b).$$

В силу непрерывности функций $f$ и $g_b^a$ найдется окрестность $U^b(a)$ точки $a$ и окрестность $V^a(b)$ точки $b$ такие, что

$$|g_b^a(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in U^b(a) \cup V^a(b). \tag{2}$$




Фиксируем произвольную точку $b \in X$. В силу компактности $X$ из открытого покрытия $X \subset \bigcup\limits_{a \in X} U^b(a)$ можно выделить конечное подпокрытие, т.е. существует конечный набор точек $a_1, \ldots, a_I \in X$ такой, что

$$X \subset \bigcup_{i=1}^{I} U^b(a_i). \tag{3}$$

Для любой точки $x \in X$ положим

$$g_b(x) := \max_{i \in \overline{1,I}} g_{a_i,b}(x).$$

Из неравенства (2) следует, что

$$g_b(x) \geq g_b^{a_i}(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in U^b(a_i).$$

Отсюда и из включения (3) получаем

$$g_b(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in X. \tag{4}$$

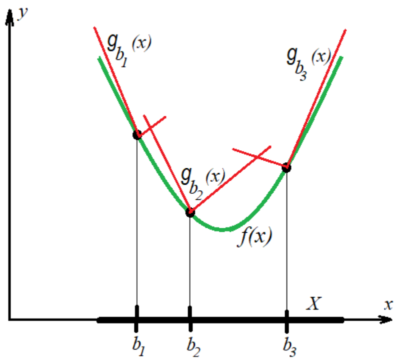
С другой стороны, из неравенства (2) следует, что

$$g_b^{a_i}(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in V^{a_i}(b),$$

а значит,

$$g_b(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in W(b), \tag{5}$$

где $W(b) := \bigcap\limits_{i=1}^{I} V^{a_i}(b)$ – окрестность точки $b$.




Выделяя конечное подпокрытие из открытого покрытия $X \subset \subset \bigcup\limits_{b\in X} W(b)$, найдем такой конечный набор точек $b_1, \ldots, b_J \in X$, что

$$X \subset \bigcup_{j=1}^{J} W(b_j).$$

Отсюда и из неравенства (5) получаем

$$g(x) < f(x) + \varepsilon \quad \forall x \in X, \tag{6}$$

где

$$g(x) := \min_{j\in\overline{1,J}} g_{b_j}(x).$$

Из неравенства (4) следует, что $g(x) > f(x) - \varepsilon \quad \forall x \in X$. Отсюда и из неравенства (6) имеем

$$\|f - g\|_{C(X)} < \varepsilon. \tag{7}$$

Так как $g_b^a \in A$, то в силу леммы 3 получаем $g_b \in \overline{A}$ при всех $b \in X$. Еще раз применяя лемму 3, приходим к включению $g \in \overline{A}$. Поэтому найдется функция $h \in A$ такая, что $\|h - g\|_{C(X)} < \varepsilon$. Используя неравенство (7), имеем $\|h - f\|_{C(X)} < 2\varepsilon$. В силу произвольности $\varepsilon > 0$ получаем $f \in \overline{A}$. Таким образом, $A \subset C(X,\mathbb{R}) \subset \overline{A}$. $\square$

**Следствие.** *Пусть $X$ – компакт в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любой непрерывной функции $f : X \to \mathbb{R}$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется алгебраический многочлен $P_m(x_1, \ldots, x_n)$ от $n$ переменных такой, что $\|f - P_m\|_{C(X)} < \varepsilon$.*

**Доказательство.** Достаточно заметить, что семейство алгебраических многочленов $P_m(x_1, \ldots, x_n)$ составляет алгебру Стоуна на $X$ и применить теорему Вейерштрасса–Стоуна. $\square$

**Замечание.** Утверждение, полученное прямым обобщением теоремы Вейерштрасса–Стоуна на комплеснозначные функции, несправедливо. Точнее, существует компакт $X$ и семейство $A$ непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$, содержащее все постоянные функции $f : X \to \mathbb{C}$ и удовлетворяющее условиям 2) и 3) определения алгебры Стоуна, которое не является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{C})$.

Пусть, например, $X$ – единичная окружность в $\mathbb{R}^2$ с топологией, индуцированной топологией пространства $\mathbb{R}^2$, а семейство $A$ состоит из функций вида

$$f(\varphi) = \sum_{k=0}^{n} c_k \, e^{ik\varphi},$$

где число $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ не фиксировано (зависит от конкретной функции $f \in A$), $c_k \in \mathbb{C}$, $\varphi$ – полярный угол точки на единичной окружности $X$. Легко видеть, что семейство $A$ состоит из непрерывных на $X$ функций, содержит все постоянные функции $f : X \to \mathbb{C}$ и удовлетворяет условиям 2) и 3) определения алгебры Стоуна.

Покажем, что $A$ не является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{C})$. Пусть $f_0(\varphi) = e^{-i\varphi}$. Тогда $f_0 \in C(X, \mathbb{C})$. Заметим, что

$$\int_0^{2\pi} f(\varphi) \, \overline{f_0(\varphi)} \, d\varphi = 0 \qquad \forall f \in A.$$

Поэтому для любой функции $f \in A$ имеем

$$\int_0^{2\pi} |f(\varphi) - f_0(\varphi)|^2 \, d\varphi = \int_0^{2\pi} (f(\varphi) - f_0(\varphi))(\overline{f(\varphi)} - \overline{f_0(\varphi)}) \, d\varphi =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2 \, d\varphi + \int_0^{2\pi} |f_0(\varphi)|^2 \, d\varphi - \int_0^{2\pi} f(\varphi) \, \overline{f_0(\varphi)} \, d\varphi - \overline{\int_0^{2\pi} f(\varphi) \, \overline{f_0(\varphi)} \, d\varphi} =$$

$$= \int_0^{2\pi} |f(\varphi)|^2\, d\varphi + \int_0^{2\pi} |f_0(\varphi)|^2\, d\varphi \geq \int_0^{2\pi} |f_0(\varphi)|^2\, d\varphi = 2\pi.$$

С другой стороны, $\int\limits_0^{2\pi} |f(\varphi) - f_0(\varphi)|^2\, d\varphi \leq 2\pi \|f - f_0\|^2_{C(X)}$. Следовательно,

$$\|f - f_0\|_{C(X)} \geq 1 \qquad \forall f \in A.$$

Таким образом, $A$ не является всюду плотным подмножеством пространства $C(X, \mathbb{C})$.

## § 9. Полные системы

**Определение.** Будем говорить, что система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов линейного нормированного пространства $F$ *полна* в пространстве $F$, если для любого элемента $f \in F$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n$ элементов системы $\{e_k\}$, приближающая элемент $f$ по норме пространства $F$ с точностью $\varepsilon$:

$$\|\alpha_1 e_1 + \dots + \alpha_n e_n - f\| < \varepsilon.$$

Иными словами, полнота системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в пространстве $F$ эквивалентна тому, что множество линейных комбинаций элементов этой системы является всюду плотным подмножеством пространства $F$.

Отметим, что полнота системы и полнота пространства – это совершенно разные понятия.

**Теорема 1.** *Стандартная тригонометрическая система полна в пространстве $C^{=}[-\pi, \pi]$ относительно нормы $C[-\pi, \pi]$.*

**Доказательство.** Поскольку любой тригонометрический многочлен является линейной комбинацией элементов тригонометрической системы, то из теоремы Вейерштрасса о приближении функций тригонометрическими многочленами следует, что любую функцию $f \in C^{=}[-\pi, \pi]$ можно с любой точностью равномерно (т. е. в смысле нормы пространства $C[-\pi, \pi]$) приблизить линейной комбинацией элементов тригонометрической системы. $\square$

**Пример 1.** Покажем, что тригонометрическая система неполна в нормированном пространстве $C[-\pi,\pi]$.

**Решение.** Поскольку любая линейная комбинация элементов тригонометрической системы является тригонометрическим многочленом $T_n(x)$, то неполнота тригонометрической системы в $C[-\pi,\pi]$ означает, что

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \exists f \in C[-\pi,\pi] \ : \quad \forall T_n \hookrightarrow \ \|f - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} \geq \varepsilon.$$

Определим $f(x) = x$, $\varepsilon = \pi$. Поскольку $T_n(-\pi) = T_n(\pi)$, то

$$\|f - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} = \max_{x\in[-\pi,\pi]} |f(x) - T_n(x)| \geq$$

$$\geq \max\{|f(-\pi) - T_n(-\pi)|,\ |f(\pi) - T_n(\pi)|\} \geq$$

$$\geq \frac{1}{2}\Big(|f(-\pi) - T_n(-\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\Big) =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(|f(-\pi) - T_n(\pi)| + |f(\pi) - T_n(\pi)|\Big) \geq \frac{1}{2}|f(-\pi) - f(\pi)| = \pi = \varepsilon. \quad \square$$

**Теорема 2.** *Система функций $\{x^k\}_{k=0,1,2,\ldots}$ полна в нормированном пространстве $C[a,b]$.*

**Доказательство** состоит в применении теоремы Вейерштрасса о равномерном приближении непрерывных функций многочленами. $\square$

Ниже мы докажем полноту тригонометрической системы в пространстве $L_p[-\pi,\pi]$. Для этого потребуются следующая лемма.

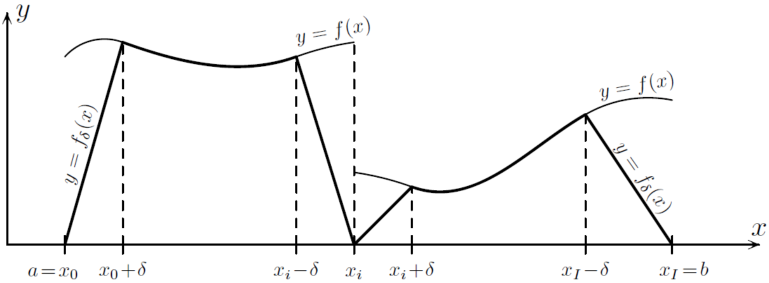
**Лемма 1.** *Множество $C^{=}[a,b]$ является плотным подмножеством множества кусочно-непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций относительно нормы $L_p[a,b]$, $p \in [1,+\infty)$.*

**Доказательство.** Пусть функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a,b]$, т. е. существует конечный набор точек $\{x_i\}_{i=0}^{I}$, $\quad a = x_0 < x_1 < \ldots < x_I = b$ таких, что в каждой точке $x \in [a,b]$, $x \neq x_i$ функция $f(x)$ непрерывна, а в точках $x_i$ функция $f(x)$ имеет конечные односторонние пределы. Обозначим $\delta_0 = \frac{1}{2} \min\limits_{i=1,\ldots,I}(x_i - x_{i-1})$. Для любого числа $\delta \in (0, \delta_0)$ определим непрерывную на $[a, b]$ функцию $f_\delta(x)$, положив

$f_\delta(x) = f(x)$ при $x \notin (x_i - \delta, x_i + \delta)$, $i = 0, 1, \ldots, I$;

$f_\delta(x) = \frac{1}{\delta}\, f(x_i + \delta)\,(x - x_i)$ при $x \in [x_i, x_i + \delta)$, $i = 0, 1, \ldots, I-1$;

$f_\delta(x) = -\frac{1}{\delta}\, f(x_i - \delta)\,(x - x_i)$ при $x \in (x_i - \delta, x_i)$, $i = 1, \ldots, I$.




Из непрерывности функции $f_\delta(x)$ и условий $f_\delta(a) = f_\delta(b) = 0$ следует, что $f_\delta \in C^{=}[a, b]$.

Поскольку функция $f(x)$ кусочно-непрерывна на $[a, b]$, то она ограничена на $[a, b]$, т. е. $C = \sup\limits_{x \in [a,b]} |f(x)| < +\infty$. Из определения функции $f_\delta(x)$ следует, что $|f_\delta(x)| \le C \ \forall x \in [a, b]$.

Поэтому

$$\|f - f_\delta\|^p_{L_p[a,\,b]} = \int\limits_a^b |f(x) - f_\delta(x)|^p\, dx =$$

$$= \sum_{i=1}^{I} \left( \int\limits_{x_{i-1}}^{x_{i-1}+\delta} |f(x) - f_\delta(x)|^p\, dx + \int\limits_{x_i - \delta}^{x_i} |f(x) - f_\delta(x)|^p\, dx \right) \le$$

$$\le I \cdot 2\delta \cdot (2C)^p \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Следовательно, для любой кусочно-непрерывной на $[a, b]$ функции $f$ и для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется функция $f_\delta \in C^{=}[a, b]$ такая, что $\|f - f_\delta\|_{L_p[a,\,b]} < \varepsilon$. $\square$

**Теорема 3.** *Стандартная тригонометрическая система полна в нормированном пространстве $L_p[-\pi,\pi]$ при $p \in [1,+\infty)$.*

**Доказательство.** Пусть заданы произвольные функция $f \in \in L_p[-\pi,\pi]$ и число $\varepsilon > 0$. В силу теоремы 2 § 2 существует функция $f_\varepsilon : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток (а значит, кусочно-непрерывная) и такая, что $\|f_\varepsilon - f\|_{L_p([-\pi,\pi])} < \frac{\varepsilon}{3}$. Согласно лемме 1 найдется функция $g_\varepsilon \in \in C^=[-\pi,\pi]$, удовлетворяющая неравенству $\|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L_p([-\pi,\pi])} < \frac{\varepsilon}{3}$. Из полноты тригонометрической системы в пространстве $C^=[-\pi,\pi]$ относительно нормы $C[-\pi,\pi]$ (теорема 1) следует существование тригонометрического многочлена $T_n$ такого, что $\|g_\varepsilon - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} < < \frac{\varepsilon}{3(2\pi)^{\frac{1}{p}}}$. Отсюда и из неравенства (2) § 3 вытекают неравенства

$$\|g_\varepsilon - T_n\|_{L_p([-\pi,\pi])} \leq (2\pi)^{\frac{1}{p}} \|g_\varepsilon - T_n\|_{C[-\pi,\pi]} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Итак,

$$\|f - T_n\|_{L_p([-\pi,\pi])} \leq \|f - f_\varepsilon\|_{L_p([-\pi,\pi])} + \|f_\varepsilon - g_\varepsilon\|_{L_p([-\pi,\pi])} + \\ + \|g_\varepsilon - T_n\|_{L_p([-\pi,\pi])} < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \qquad \square$$

## § 10. Сходимость ряда Фурье в смысле евклидовой нормы

**Определение.** Пусть $F$ – произвольное евклидово (или унитарное) пространство. Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов пространства $F$ называется *ортогональной*, если эта система не содержит нулевого элемента пространства $F$ и $(e_k, e_n) = 0$ при любых $k, n \in \mathbb{N}$ таких, что $k \neq n$. Числа $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$ называются *коэффициентами Фурье*, а ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ – *рядом Фурье* элемента $f \in F$ по системе $\{e_k\}$.

**Теорема 1.** (Минимальное свойство коэффициентов Фурье.) *Пусть в евклидовом (или унитарном) пространстве $F$ задана ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и элемент $f \in F$. Пусть задано число $n \in \mathbb{N}$.*

*Тогда среди всех линейных комбинаций элементов $e_1, \dots, e_n$ сумма Фурье*

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k, \qquad \text{где} \quad \alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)},$$

*является наилучшим приближением элемента $f$ в смысле евклидовой нормы пространства $F$, т. е.*

$$\min_{\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\| = \|f - s_n\|.$$

**Доказательство.** Обозначим $d_n = s_n - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k e_k$. Тогда

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \|f - s_n + d_n\|^2 =$$

$$= (f-s_n+d_n, f-s_n+d_n) = \|f-s_n\|^2 + (d_n, f-s_n) + (f-s_n, d_n) + \|d_n\|^2.$$

Поскольку в силу ортогональности системы $\{e_k\}$ для любого $k \in \{1, \dots, n\}$ справедливо равенство $(s_n, e_k) = \alpha_k\,(e_k, e_k)$, то по определению коэффициентов Фурье $\alpha_k$ получаем $(f - s_n, e_k) = (f, e_k) - \alpha_k\,(e_k, e_k) = 0$, а значит, $(e_k, f - s_n) = \overline{(f - s_n, e_k)} = 0$. Так как $d_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k) e_k$, то $(d_n, f - s_n) = \sum\limits_{k=1}^{n} (\alpha_k - \beta_k)\,(e_k, f - s_n) = 0$. Следовательно, $(f - s_n, d_n) = \overline{(d_n, f - s_n)} = 0$ и

$$\left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \|d_n\|^2 \geq \|f - s_n\|^2.$$

Поэтому

$$\min_{\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{C}} \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k e_k \right\| = \left\| f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k \right\| = \|f - s_n\|. \qquad \square$$

**Замечание.** (Геометрическая интерпретация минимального свойства коэффициентов Фурье.) Пусть $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)$ – линейная оболочка векторов $e_1, \ldots, e_n$, тогда $s_n$ – ортогональная проекция элемента $f$ на подпространство $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)$. Теорема 1 утверждает, что ортогональная проекция $s_n$ является наилучшим приближением элемента $f$ среди всех элементов подпространства $\mathrm{Span}(e_1, \ldots, e_n)$.

**Теорема 2.** (О единственности разложения элемента евклидова пространства по ортогональной системе.) *Пусть элемент $f$ евклидова (или унитарного) пространства $F$ раскладывается по ортогональной системе $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$: $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$, где сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ понимается в смысле евклидовой нормы пространства $F$. Тогда коэффициенты $\alpha_k$ являются коэффициентами Фурье: $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$.*

**Доказательство.** Пусть $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$. Равенство $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ означает, что $\|f - s_n\| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда и из неравенства Коши–Буняковского для любого $k \in \mathbb{N}$ получаем, что $|(f, e_k) - (s_n, e_k)| \leq \|f - s_n\| \cdot \|e_k\| \to 0$ при $n \to \infty$. Поэтому $\forall k \in \in \mathbb{N} \hookrightarrow (f, e_k) = \lim\limits_{n\to\infty} (s_n, e_k)$. Из ортогональности системы $\{e_k\}$ получаем равенство $(s_n, e_k) = \alpha_k\,(e_k, e_k)$ при $n \geq k$. Следовательно, $(f, e_k) = \alpha_k\,(e_k, e_k)$, а значит, $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$. □

**Следствие.** *Пусть функция $f(x)$ представима в виде тригонометрического ряда $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, равномерно сходящегося на $[-\pi, \pi]$. Тогда коэффициенты $a_k$, $b_k$ являются коэффициентами Фурье функции $f(x)$ по тригонометрической системе.*

**Доказательство.** Поскольку из равномерной сходимости ряда вытекает его сходимость в смысле среднего квадратичного, то ряд $\frac{a_0}{2} + \sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ сходится к функции $f(x)$ в смысле евклидовой нормы пространства $L_2[-\pi, \pi]$. Применяя теорему 2, получаем требуемое утверждение. □

**Теорема 3.** *Для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в евклидовом (или унитарном) пространстве $F$ следующие условия эквивалентны:*

(1$^o$) *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис пространства $F$;*

(2$^o$) *система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве $F$;*

(3$^o$) *для любого элемента $f \in F$ ряд Фурье этого элемента по системе $\{e_k\}$ сходился к элементу $f$ в смысле евклидовой нормы пространства $F$.*

**Доказательство.** (3$^o$) $\Rightarrow$ (1$^o$) следует непосредственно из теоремы 2 и определения базиса.

(1$^o$) $\Rightarrow$ (2$^o$). Пусть ортогональная система $\{e_k\}$ является базисом пространства $F$. Тогда по определению базиса для любого элемента $f \in F$ существует разложение $f = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$. Это означает, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует конечная линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$ такая, что $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k\| < \varepsilon$, т. е. система $\{e_k\}$ полна в пространстве $F$.

(2$^o$) $\Rightarrow$ (3$^o$). Пусть ортогональная система $\{e_k\}$ полна в пространстве $F$. Зафиксируем произвольный элемент $f \in F$. Обозначим

$$\Delta_n = \inf_{\beta_1,\ldots,\beta_n \in \mathbb{C}} \|f - \sum_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k\|.$$

Поскольку $\Delta_n \le \inf\limits_{\beta_1,\ldots,\beta_{n-1} \in \mathbb{C},\quad \beta_n = 0} \|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k\| = \Delta_{n-1}$, то числовая последовательность $\{\Delta_n\}_{n=1}^{\infty}$ является невозрастающей, следовательно, существует $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = \inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n$.

Из полноты системы $\{e_k\}$ следует, что для любого числа $\varepsilon > 0$ существует линейная комбинация $\sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k$ такая, что $\|f - \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_k\, e_k\| < \varepsilon$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists n \in \mathbb{N} : \quad \Delta_n < \varepsilon$. Отсюда и из неравенства $\Delta_n \ge 0$ следует, что $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} \Delta_n = 0$, а значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = 0$.

Из минимального свойства коэффициентов Фурье следует, что $\Delta_n = \|f - s_n\|$, где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$ – сумма Фурье порядка $n$. Поэтому $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - s_n\| = 0$, т. е. ряд Фурье произвольного элемента $f \in F$ сходится к элементу $f$. $\square$

Из теоремы 3 этого параграфа и полноты тригонометрической системы в пространстве $L_2[-\pi,\pi]$ (теорема 3 § 9) получаем следующую теорему.

**Теорема 4.** *1) Тригонометрическая система является базисом пространства* $L_2[-\pi,\pi]$.

*2) Ряд Фурье любой функции* $f \in L_2[-\pi,\pi]$ *сходится к этой функции в смысле среднего квадратичного (т. е. по норме* $L_2[-\pi,\pi]$*).*

**Замечание.** Из полноты ортогональной системы $\{e_k\}$ в нормированном пространстве $F$ относительно неевклидовой нормы не следует, что эта система является базисом пространства $F$. Например, система функций $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ полна в пространстве $C[-1,1]$ (теорема 2 § 9), но не является базисом этого пространства. Действительно, предположим противное: система $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ – базис пространства $C[-1,1]$. Тогда для функции $f(x)=|x|$, принадлежащей пространству $C[-1,1]$, существует разложение $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\alpha_k x^k$ $\forall x\in[-1,1]$. В силу теоремы о дифференцировании степенного ряда (теорема 6 § 3 главы 11) получаем, что функция $f(x)=|x|$ дифференцируема в точке $x=0$. Противоречие. $\square$

## § 11. Многочлены Лежандра

**Определение.** *Многочленами Лежандра* называются многочлены

$$\mathfrak{L}_0(x)=1,\qquad \mathfrak{L}_n(x)=\frac{1}{n!\,2^n}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\quad (n\in\mathbb{N}).$$

**Лемма 1.** *Многочлены Лежандра составляют ортогональную систему в пространстве* $L_2[-1,1]$.

**Доказательство.** Требуется доказать, что при $n>k$ справедливо равенство

$$J=\int\limits_{-1}^{1}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n\cdot\frac{d^k}{dx^k}(x^2-1)^k\,dx=0.$$

Поскольку $(x^2-1)^n=(x-1)^n(x+1)^n$, то индукцией по $j$ легко доказать, что для любого $j\in\overline{1,n-1}$ $\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n=(x-1)^{n-j}g(x)$, где $g(x)$ – некоторый многочлен. Следовательно, $\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n\Big|_{x=1} =$ $= 0$ при $j \le n-1$. Аналогично, $\frac{d^j}{dx^j}(x^2-1)^n\Big|_{x=-1} = 0$ при $j \le n-1$.

Интегрируя выражение $J$ по частям, получаем

$$J = -\int\limits_{-1}^{1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}(x^2-1)^n \cdot \frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}(x^2-1)^k\,dx = \dots =$$

$$= (-1)^n \int\limits_{-1}^{1} (x^2-1)^n \frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}(x^2-1)^k\,dx.$$

Поскольку многочлен $(x^2-1)^k$ имеет степень $2k$, а $k+n > 2k$, то $\frac{d^{k+n}}{dx^{k+n}}(x^2-1)^k = 0$, следовательно, $J = 0$. □

**Лемма 2.** *Любой алгебраический многочлен можно представить в виде линейной комбинации многочленов Лежандра.*

**Доказательство.** Обозначим через $E_n$ линейное пространство алгебраических многочленов степени не выше $n-1$. Поскольку любой многочлен степени не выше $n-1$ является линейной комбинацией $n$ функций $1, x, x^2, \dots, x^{n-1}$, то размерность пространства $E_n$ не превосходит $n$.

Согласно лемме 1 многочлены Лежандра составляют ортогональную систему в пространстве $L_2[-1,1]$. Поэтому любой конечный набор многочленов Лежандра линейно независим. Поскольку пространство $E_n$ содержит $n$ линейно независимых элементов $\mathfrak{L}_0(x), \dots, \mathfrak{L}_{n-1}(x)$, то размерность пространства $E_n$ равна $n$, а система $\mathfrak{L}_0(x), \dots, \mathfrak{L}_{n-1}(x)$ является базисом пространства $E_n$. Поэтому любой многочлен степени $n-1$ представим как линейная комбинация многочленов $\mathfrak{L}_0(x), \dots, \mathfrak{L}_{n-1}(x)$. □

**Теорема 1.** *Система многочленов Лежандра полна в пространствах $C[a,b]$ и $L_2[a,b]$ и является базисом пространства $L_2[-1,1]$. Ряд Фурье любой функции $f \in L_2[-1,1]$ по системе многочленов Лежандра сходится к функции $f$ в смысле среднего квадратичного.*

**Доказательство.** Из полноты системы $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ в пространстве $C[a,b]$ (теорема 2 § 9) следует, что

$$\forall f \in C[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \text{ алг. мн-н } P_n(x):\ \|f - P_n\|_{C[a,b]} < \varepsilon. \qquad (1)$$

Отсюда и из неравенства

$$\|g\|_{L_2[a,b]} \le \|g\|_{C[a,b]} \sqrt{b-a} \qquad \forall g \in C[a,b]$$

(см. неравенство (2) § 3) получаем

$$\forall f \in C[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists P_n(x):\ \|f - P_n\|_{L_2[a,b]} < \varepsilon \sqrt{b-a}. \qquad (2)$$

В силу теоремы 2 § 2 и леммы 1 § 9 множество $C^{=}[a,b]$, а значит, и множество $C[a,b]$ являются всюду плотными подмножествами пространства $L_2[a,b]$ относительно нормы $L_2[a,b]$, т. е.

$$\forall g \in L_2[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists f \in C[a,b]:\ \|f - g\|_{L_2[a,b]} < \varepsilon.$$

Отсюда и из (2) получаем

$$\forall g \in L_2[a,b]\ \forall \varepsilon > 0\ \exists P_n(x):\ \|g - P_n\|_{L_2[a,b]} < \varepsilon \sqrt{b-a} + \varepsilon. \qquad (3)$$

В силу леммы 2 из условия (1) следует полнота системы многочленов Лежандра $\{\mathfrak{L}_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ в пространстве $C[a,b]$, а из условия (3) – полнота системы $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ в пространстве $L_2[a,b]$.

Поскольку система $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ ортогональна в смысле скалярного произведения пространства $L_2[-1,1]$ и полна в $L_2[-1,1]$, то в силу теоремы 3 § 10 система $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ является базисом пространства $L_2[-1,1]$, и ряд Фурье любой функции $f \in L_2[-1,1]$ по системе $\{\mathfrak{L}_n(x)\}$ сходится к функции $f$ в смысле нормы $L_2[-1,1]$. $\square$

## § 12. Неравенство Бесселя, равенство Парсеваля и равномерная сходимость ряда Фурье

**Лемма 1.** *Пусть в евклидовом (или унитарном) пространстве $F$ задана ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ и элемент $f \in F$. Пусть $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$ – коэффициенты Фурье элемента $f$, а $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$ –*

*сумма Фурье порядка $n$. Тогда справедливо равенство*

$$\|f\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2.$$

**Доказательство.**

$$\|f\|^2 = \|f - s_n + s_n\|^2 = \|f - s_n\|^2 + 2\mathrm{Re}\,(f - s_n, s_n) + \|s_n\|^2.$$

В силу ортогональности системы $\{e_k\}$ справедливо равенство $(s_n, e_k) = \alpha_k(e_k, e_k)$ $\forall k \in \overline{1, n}$. Отсюда и из определения коэффициентов Фурье получаем

$$(f - s_n, e_k) = (f, e_k) - \alpha_k(e_k, e_k) = 0 \qquad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Так как $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$, то $(f - s_n, s_n) = 0$. Следовательно,

$$\|f\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \|s_n\|^2.$$

Еще раз используя ортогональность системы $\{e_k\}$, получаем

$$\|s_n\|^2 = \left( \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k, \sum_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k \right) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2\, (e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2. \quad \square$$

**Замечание.** Равенство $\|f\|^2 = \|f - s_n\|^2 + \|s_n\|^2$, доказанное в лемме 1, можно рассматривать как применение теоремы Пифагора к прямоугольному треугольнику с катетами $s_n$ и $f - s_n$ и гипотенузой $f$.

**Теорема 1.** (Неравенство Бесселя.) *Для любой ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ евклидова (или унитарного) пространства $F$ и для любого элемента $f \in F$ справедливо неравенство Бесселя:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 \leq \|f\|^2,$$

*где $\alpha_k$ – это коэффициенты Фурье элемента $f$ по системе $\{e_k\}$, а $\|e_k\|$, $\|f\|$ – евклидовы нормы соответствующих элементов.*

**Доказательство.** Из леммы 1 следует, что для любого $n \in \mathbb{N}$ $\|f\|^2 \geq \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$. Переходя к пределу при $n \to \infty$, получим требуемое неравенство. $\square$

**Теорема 2.** (Равенство Парсеваля.) *Ортогональная система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в евклидовом (или унитарном) пространстве $F$ является базисом пространства $F$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in F$ выполнено равенство Парсеваля:*

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|f\|^2,$$

*где $\alpha_k$ – это коэффициенты Фурье элемента $f$ по системе $\{e_k\}$, а $\|e_k\|$, $\|f\|$ – евклидовы нормы соответствующих элементов.*

**Доказательство.** В силу теоремы 3 § 10 система $\{e_k\}$ является базисом евклидова пространства $F$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in F$ ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ элемента $f$ сходится к $f$ в смысле евклидовой нормы. Это означает, что $\|f - s_n\| \to 0$ при $n \to \infty$, где $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$. В силу леммы 1 имеем $\|f\|^2 = \|f - s_n\|^2 + {} + \sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$. Поэтому система $\{e_k\}$ является базисом евклидова пространства $F$ тогда и только тогда, когда для любого элемента $f \in {} \in F$ справедливо предельное соотношение $\sum\limits_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 - \|f\|^2 \to 0$ при $n \to \infty$, т. е. $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|f\|^2$. $\square$

Так как тригонометрическая система является базисом евклидова пространства $L_2[-\pi, \pi]$, то в силу теоремы 2 получаем

**Следствие.** *Для любой функции $f \in L_2[-\pi, \pi]$ справедливо равенство Парсеваля:*

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2\, dx = \pi \left( \frac{|a_0|^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \right) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2,$$

*где $a_k, b_k$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$ по стандартной тригонометрической системе, $c_k$ – ее коэффицинты Фурье по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$.*

**Теорема 3.** (Достаточное условие равномерной сходимости ряда Фурье.) *Пусть функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[-\pi, \pi]$ и удовлетворяет условию $f(-\pi) = f(\pi)$. Пусть производная $f'(x)$ кусочно-непрерывна на $[-\pi, \pi]$. Тогда ряд Фурье функции $f(x)$ сходится равномерно.*

**Доказательство.** Пусть $c_k$ – коэффициенты Фурье функции $f(x)$, а $c'_k$ – коэффициенты Фурье функции $f'(x)$ по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$. В силу теоремы о почленном дифференцировании ряда Фурье $c'_k = ik\, c_k$. Так как функция $f' \in L_2[-\pi, \pi]$, то в силу равенства Парсеваля ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c'_k|^2$ сходится, следовательно, сходится ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k\, c_k|^2$. Применяя неравенство $xy \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ для $x = |k\, c_k|$, $y = \frac{1}{|k|}$, при всех $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ получим $|c_k| \leq \frac{1}{2}\left(|k\, c_k|^2 + \frac{1}{k^2}\right)$. Отсюда и из сходимости рядов $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |k\, c_k|^2$, $\sum\limits_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \frac{1}{k^2}$ по признаку сравнения следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|$. Поэтому в силу признака Вейерштрасса функциональный ряд $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx}$ сходится равномерно на $\mathbb{R}$. $\square$

## § 13. Полнота пространств $L_p$

Напомним, что метрическое пространство называется полным, если любая фундаментальная последовательность сходится в этом пространстве. Если $F$ – нормированное пространство, то $F$ – метрическое пространство с метрикой $\varrho(x, y) = \|x - y\|$.

**Замечание.** Любое конечномерное нормированное пространство является полным. Это следует из критерия Коши в $\mathbb{R}^n$ и эквивалентности норм конечномерного пространства.

**Определение.** Пусть $F$ – нормированное пространство. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ элементов $u_k \in F$ называется *сходящимся* в $F$, если последовательность $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ сходится в $F$, т.е. существует элемент $S \in F$ такой, что $\|S - S_n\| \to 0$ $n \to \infty$. Ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ называется *абсолютно сходящимся*, если числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$ сходится.

**Лемма 1.** *Нормированное пространство $F$ является банаховым тогда и только тогда, когда абсолютная сходимость любого ряда из элементов $F$ влечет сходимость этого ряда в $F$.*

**Доказательство.** "$\Rightarrow$". Пусть $F$ – банахово пространство. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ из элементов $F$ сходится абсолютно. Обозначим $S_n := \sum\limits_{k=1}^{n} u_k$ – частичные суммы этого ряда. Тогда

$$\|S_{n+p} - S_n\| = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right\| \le \sum_{k=n+1}^{n+p} \|u_k\| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \|u_k\| \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Следовательно, последовательность $\{S_n\}$ фундаментальна. В силу полноты пространства $F$ последовательность $\{S_n\}$ сходится в $F$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится в $F$.

"$\Leftarrow$". Пусть абсолютная сходимость любого ряда из элементов $F$ влечет сходимость этого ряда в $F$. Пусть задана фундаментальная последовательность элементов $f_n \in F$. Требуется доказать сходимость последовательности $\{f_n\}$. Из определения фундаментальной последовательности следует существование строго возрастающей последовательности натуральных чисел $N_k$ такой, что

$$\|f_n - f_m\| < 2^{-k} \quad \forall n, m \ge N_k. \tag{1}$$

Покажем, что последовательность $g_k := f_{N_k}$ сходится. Рассмотрим ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$, где $u_1 := g_1$, $u_{k+1} := g_{k+1} - g_k$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Из неравенства (1) следует, что $\|u_{k+1}\| < 2^{-k}$ для любого $k \in \mathbb{N}$. Отсюда и из сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} 2^{-k}$ следует сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|$. Используя принятое условие, получаем сходимость ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ в $F$. Поскольку $\sum\limits_{k=1}^{n} u_k = g_n$, то последовательность $\{g_k\}$ сходится. Последовательность $\{g_k\}$ является подпоследовательностью последовательности $\{f_n\}$. Из сходимости этой подпоследовательности и фундаментальности последовательности $\{f_n\}$ следует сходимость $\{f_n\}$. □

**Лемма 2.** *Пусть $X$ – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$. Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – абсолютно сходящийся ряд из элементов $u_k \in L_p(X)$. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится для почти всех $x \in X$ к некоторой функции $S \in L_p(X)$, причем*

$$\|S\|_{L_p(X)} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)}.$$

**Доказательство.** Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$A_N(x) := \left( \sum_{k=1}^{N} |u_k(x)| \right)^p, \quad x \in X.$$

Поскольку $A_N(x) \leq A_{N+1}(x)$, то для любого $x \in X$ существует $A(x) := \lim\limits_{N\to\infty} A_N(x) \in [0, +\infty]$. По теореме Б. Леви о монотонной сходимости (теорема 1 §12 главы 8) функция $A(x)$ измерима и

$$\int_X A(x)\, dx = \lim_{N\to\infty} \int_X A_N(x)\, dx. \tag{2}$$

Заметим, что

$$\int_X A_N(x)\, dx = \int_X \left( \sum_{k=1}^{N} |u_k(x)| \right)^p dx = \left\| \sum_{k=1}^{N} |u_k| \right\|_{L_p(X)}^p.$$

В силу неравенства треугольника для нормы $L_p(X)$ получаем

$$\int_X A_N(x)\,dx \le \left(\sum_{k=1}^{N} \|u_k\|_{L_p(X)}\right)^p \le M^p,$$

где $M := \sum\limits_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)}$. В силу абсолютной сходимости ряда $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ имеем $M < +\infty$. Отсюда и из соотношения (2) следует, что

$$\int_X A(x)\,dx \le M^p < +\infty, \tag{3}$$

а значит функция $A(x)$ интегрируема на $X$. Согласно лемме 2 §6 главы 8 функция $A(x)$ конечна почти всюду на $X$.

Так как $\sum\limits_{k=1}^{N} |u_k(x)| = (A_N(x))^{\frac{1}{p}} \le (A(x))^{\frac{1}{p}}$, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k(x)| \le (A(x))^{\frac{1}{p}} < +\infty \quad \text{для почти всех } x \in X. \tag{4}$$

Для каждого $N \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$S_N(x) := \sum_{k=1}^{N} u_k(x), \quad x \in X. \tag{5}$$

Согласно лемме 1 §2 главы 11 из абсолютной сходимости комплексного числового ряда следует его сходимость. Поэтому в силу соотношения (4) при почти всех $x \in X$ существует

$$S(x) := \lim_{N\to\infty} S_N(x) \in \mathbb{C}.$$

Функция $S(x)$ измерима как поточечный предел измеримых функций. Используя соотношения (4), (5) для почти всех $x \in X$ полчаем

$$|S(x)| = \lim_{N\to\infty} |S_N(x)| \le \sum_{k=1}^{N} |u_k(x)| \le (A(x))^{\frac{1}{p}}.$$

Поэтому согласно неравенствам (3)

$$\int_X |S(x)|^p\,dx \le \int_X A(x)\,dx \le M^p < +\infty.$$

Следовательно, $S \in L_p(X)$ и

$$\|S\|_{L_p(X)} = \left( \int\limits_X |S(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq M = \sum_{k=1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)}.$$

$\square$

**Теорема 1.** *Пусть $X$ – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, +\infty)$. Нормированное пространство $L_p(X)$ является банаховым.*

**Доказательство.** Пусть $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ – абсолютно сходящийся ряд из элементов $u_k \in L_p(X)$. Обозначим $S_N(x) := \sum\limits_{k=1}^{N} u_k(x)$. В силу леммы 2 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ сходится для почти всех $x \in X$ к некоторой функции $S \in L_p(X)$. Применяя лемму 2 к ряду $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} u_k(x)$, получаем неравенство

$$\|S - S_N\|_{L_p(X)} \leq \sum_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)} \quad \forall N \in \mathbb{N}.$$

Поскольку ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится абсолютно, то $\sum\limits_{k=N+1}^{\infty} \|u_k\|_{L_p(X)} \to 0$ при $N \to \infty$. Поэтому $\|S - S_N\|_{L_p(X)} \to 0$ при $N \to \infty$, т.е. ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k$ сходится в $L_p(X)$. Применяя лемму 1, завершаем доказательство теоремы. $\square$

Из теоремы 1 данного параграфа и теоремы 2 § 2 следует, что пространство $L_2(X)$ является гильбертовым.

**Задача 1.** Докажите, что для любого измеримого множества $X \subset \subset \mathbb{R}^n$ пространство $L_\infty(X)$ является банаховым.

**Замечание.** Пусть $X$ – компактное топологическое пространство. Тогда пространство $C(X)$ является банаховым. Действительно, пусть последовательность непрерывных на $X$ функций $f_k(x)$ фундаментальна. В силу критерия Коши равномерной сходимости функциональной последовательности последовательность $\{f_k(x)\}$ равномерно (т.е. по норме пространства $C(X)$) сходится к некоторой функции $f(x)$. При этом функция $f(x)$ будет непрерывной на $X$, как равномерный предел последовательности непрерывных функций. Следовательно, последовательность $\{f_k\}$ сходится в пространстве $C(X)$.

**Пример 1.** Пусть $p \in [1, +\infty)$, $X$ – компакт в $\mathbb{R}^n$. Через $CL_p(X)$ обозначим пространство непрерывных функций $f : X \to \mathbb{C}$ с нормой пространства $L_p(X)$. Покажем, что нормированное пространство $CL_p[-1, 1]$ не полно.

Рассмотрим последовательность непрерывных функций

$$f_k(x) = \begin{cases} -1, & x \in \left[-1, -\frac{1}{k}\right], \\ kx, & x \in \left[-\frac{1}{k}, \frac{1}{k}\right], \\ 1, & x \in \left[\frac{1}{k}, 1\right]. \end{cases}$$

Если $n > k$, то $f_n(x) = f_k(x)$ для любых $x \in \left[-1, -\frac{1}{k}\right] \cup \left[\frac{1}{k}, 1\right]$. Поэтому

$$\|f_n - f_k\|_{L_p(X)} = \left( \int\limits_{-\frac{1}{k}}^{\frac{1}{k}} |f_n(x) - f_k(x)|^p \right)^{\frac{1}{p}} \le \left(\frac{2}{k}\right)^{\frac{1}{p}},$$

где последнее неравенство следует из неравенства $|f_n(x) - f_k(x)| \le 1$. Таким образом, $\|f_n - f_k\|_{L_p(X)} \to 0$ при $n \ge k \to \infty$, т.е. $\{f_n\}$ – фундаментальная последовательность в пространстве $CL_p[-1, 1]$. Покажем, что $\{f_n\}$ не сходится в пространстве $CL_p[-1, 1]$. Предположим противное: $\{f_n\}$ сходится по норме $L_p[-1, 1]$ к некоторой непрерывной функции $f : [-1, 1] \to \mathbb{C}$. Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \in (0, 1)$ и выберем число $\delta > 0$ из условия $(x_0 - \delta, x_0 + \delta) \subset (0, 1)$. Так как

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |f_n(x) - f(x)|^p dx \le \|f_n - f\|^p_{L_p(X)} \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и при $n > \frac{1}{x_0 - \delta}$ имеем $x_0 - \delta > \frac{1}{n}$, а значит, $f_n(x) = 1$ при всех $x \in \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$, то

$$\int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} |1 - f(x)|^p dx = 0.$$

Отсюда и из непрерывности функции $f$ следует, что $f(x_0) = 1$. Таким образом, $f(x) = 1$ при всех $x \in (0, 1)$. Аналогично, $f(x) = -1$ при всех $x \in (-1, 0)$. Это противоречит непрерывности функции $f$.

## § 14. Замкнутые системы

**Теорема 1.** *Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортогональная система в гильбертовом пространстве $F$; $\{\alpha_k\}$ – числовая последовательность. Следующие условия эквивалентны:*

(a) *ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ сходится к некоторому элементу $f \in F$ в смысле нормы пространства $F$;*

(b) *числа $\alpha_k$ являются коэффициентами Фурье некоторого элемента $f \in F$: $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \alpha_k = \frac{(f, e_k)}{(e_k, e_k)}$;*

(c) *числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$ сходится.*

**Доказательство.** По теореме о единственности разложения элемента евклидова пространства по ортогональной системе из условия (a) следует условие (b). В силу неравенства Бесселя из условия (b) следует условие (c).

Докажем, что (c) $\Rightarrow$ (a). Пусть выполнено условие (c). Для любого $n \in \mathbb{N}$ обозначим $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k\, e_k$. Поскольку при любых $n, p \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $s_{n+p} - s_n = \sum\limits_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\, e_k$, то в силу ортогональности системы $\{e_k\}$ получаем

$$\|s_{n+p} - s_n\|^2 = (s_{n+p} - s_n, s_{n+p} - s_n) = \left( \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\, e_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} \alpha_k\, e_k \right) =$$

$$= \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2\, (e_k, e_k) = \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2.$$

В силу критерия Коши сходимости числового ряда из условия (c) следует, что

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n \geq N \; \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \sum_{k=n+1}^{n+p} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 < \varepsilon.$$

Поэтому

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists N \in \mathbb{N}: \; \forall n \geq N \; \forall p \in \mathbb{N} \hookrightarrow \|s_{n+p} - s_n\|^2 < \varepsilon.$$

Это означает фундаментальность последовательности $\{s_n\}$ относительно нормы пространства $F$. Отсюда и из полноты пространства $F$ следует, что последовательность $\{s_n\}$ сходится к некоторому элементу пространства $F$ в смысле нормы пространства $F$, т. е. выполнено условие (a). $\square$

**Теорема 2.** (Теорема Рисса–Фишера.) *Гильбертово пространство $H$ со счетным ортонормированным базисом изометрически изоморфно пространству $\ell_2$.*

**Доказательство.** Пусть $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – ортонормированный базис $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в $H$. Определим отображение $\varphi : H \to \ell_2$, которое каждому элементу $f \in H$ ставит в соответствие последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ коэффициентов Фурье $\alpha_k = (f, e_k)$. Согласно теореме 1 ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2$ сходится, поэтому отображение $\varphi$ действительно является отображением из $H$ в $\ell_2$.

Покажем, что отображение $\varphi : H \to \ell_2$ является взаимно однозначным. Фиксируем последовательность $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell_2$. По теореме 1 найдется элемент $f \in H$ такой, что $\alpha_k = (f, e_k)$ для любого $k \in \mathbb{N}$, т.е. $\varphi(f) = \alpha$. Поскольку $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис, то ряд Фурье $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ сходится к $f$ в смысле евклидовой нормы $H$. Поэтому такой элемент $f \in H$ единственен и отображение $\varphi$ взаимно однозначно переводит $H$ в $\ell_2$.

В силу равенства Парсеваля $\|f\|_H^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = \|\alpha\|_{\ell_2}^2$. Отсюда и из линейности отображения $\varphi$ следует, что $\varphi$ – изометрический изоморфизм пространств $H$ и $\ell_2$. $\square$

**Следствие.** *Пространство $L_2[a, b]$ изометрически изоморфно пространству $\ell_2$.*

**Замечание.** При $p \neq 2$ пространства $L_p[a,b]$ и $\ell_p$ не являются изометрически изоморфными. Доказательство этого факта выходит за рамки нашего курса.

**Определение.** Система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ элементов евклидова пространства $F$ называется *замкнутой* в пространстве $F$, если не существует ненулевого элемента $f \in F$ такого, что $(f, e_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$.

Отметим, что замкнутость системы и замкнутость множества – это совершенно разные понятия.

**Теорема 3.** *Для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ в евклидовом (или унитарном) пространстве $F$ следующие условия эквивалентны:*

*$(1^o)$ система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ – базис пространства $F$;*

*$(2^o)$ система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ полна в пространстве $F$;*

*$(3^o)$ для любого элемента $f \in F$ ряд Фурье этого элемента по системе $\{e_k\}$ сходился к элементу $f$ в смысле евклидовой нормы пространства $F$;*

*$(4^o)$ для любого элемента $f \in F$ справедливо равенство Парсеваля $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2 = \|f\|^2$, где $\alpha_k$ – это коэффициенты Фурье элемента $f$ по системе $\{e_k\}$.*

*При этом любое из условий $(1^o)-(4^o)$ влечет условие*

*$(5^o)$ система $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ замкнута в пространстве $F$.*

*Если пространство $F$ гильбертово, то для ортогональной системы $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ все условия $(1^o)-(5^o)$ равносильны.*

**Доказательство.** Эквивалентность условий $(1^o)-(3^o)$ доказана в теореме 3 § 10. Отсюда и из теоремы 2 § 12 следует эквивалентность условий $(1^o)-(4^o)$.

Докажем, что $(3^o) \Rightarrow (5^o)$. Зафиксируем произвольный элемент $f \in F$ такой, что $(f, e_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Для доказательства замкнутости системы $\{e_k\}$ требуется доказать, что $f = \overline{0}$. Из условия $(f, e_k) = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}$ следует, что все коэффициенты ряда Фурье элемента $f$ равны нулю. Следовательно, ряд Фурье элемента $f$ сходится к нулевому элементу. С другой стороны, в силу условия $(3^o)$ ряд Фурье элемента $f$ сходится к элементу $f$. Поэтому $f = \overline{0}$. Поскольку условия $(1^o)$ – $(4^o)$ эквивалентны, то любое из этих условий влечет условие $(5^o)$.

Покажем теперь, что в случае гильбертова пространства $F$ из условия $(5^o)$ следует условие $(3^o)$. Зафиксируем произвольный элемент $f \in F$. Пусть $\alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$ – коэффициенты Фурье элемента $f$. В силу неравенства Бесселя числовой ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \cdot \|e_k\|^2$ сходится. Отсюда по теореме Рисса–Фишера получаем, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$ сходится в смысле нормы пространства $F$ к некоторому элементу $S \in \in F$. По теореме о единственности разложения элемента евклидова пространства числа $\alpha_k$ являются коэффициентами Фурье элемента $S$. Следовательно, $\forall k \in \mathbb{N} \hookrightarrow \frac{(S,e_k)}{(e_k,e_k)} = \alpha_k = \frac{(f,e_k)}{(e_k,e_k)}$. Поэтому $\forall k \in \in \mathbb{N} \hookrightarrow (S - f, e_k) = 0$. В силу замкнутости системы $\{e_k\}$ получаем, что $f - S = \overline{0}$, а значит, $f = S = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \alpha_k\, e_k$. Тем самым доказано, что в случае гильбертова пространства $F$ из условия $(5^o)$ следует условие $(3^o)$. Поэтому для гильбертова пространства $F$ все условия $(1^o)$ – $(5^o)$ эквивалентны. $\square$

**Замечание.** Замкнутая ортогональная система в неполном евклидовом пространстве $F$ может не быть базисом пространства $F$.

Глава 23

# ИНТЕГРАЛЫ, ЗАВИСЯЩИЕ ОТ ПАРАМЕТРА

## § 1. Равномерная сходимость несобственных интегралов

В этом параграфе будем рассматривать несобственный интеграл с особенностью в точке $b \in \mathbb{R} \bigcup \{+\infty\}$

$$\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx := \lim_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx$$

с параметром $y \in Y$, где $Y$ – произвольное множество параметров. Будем предполагать, что $-\infty < a < b \leq +\infty$ и для любого фиксированного $y \in Y$ функция $f(x,y)$ как функция переменной $x$ интегрируема по Лебегу на любом отрезке $[a,b'] \subset [a,b)$.

Несобственный интеграл с особенностью на левом конце промежутка интегрирования рассматривается аналогично.

**Определение.** Несобственный интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ называется *сходящимся равномерно* на множестве $Y$, если

1) для любого фиксированного $y \in Y$ этот интеграл сходится, т.е. существует

$$\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx := \lim_{b' \to b-0} \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx \in \mathbb{R} \text{ (или } \in \mathbb{C})$$

и

2) $\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx \underset{y \in Y}{\rightrightarrows} \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ при $b' \to b-0$, т.е.

$$\sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx \right| \to 0 \quad \text{при} \quad b' \to b-0.$$

**Теорема 1.** (Признак Вейерштрасса.) *Пусть* $|f(x,y)| \le g(x)$ *для любых* $x \in [a,b)$, $y \in Y$ *и функция* $g$ *интегрируема (по Лебегу) на* $(a,b)$. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $Y$.

**Доказательство.** В силу признака сравнения при каждом фиксированном $y \in Y$ существует конечный интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$. Интегрируя неравенство $|f(x,y)| \le g(x)$, получаем

$$\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \le \sup_{y\in Y}\int\limits_{b'}^{\to b} |f(x,y)|\,dx \le \int\limits_{b'}^{b} g(x)\,dx.$$

Из теоремы о непрерывности интеграла как функции верхнего предела (теорема 1 §9 главы 8) следует, что $\int\limits_{b'}^{b} g(x)\,dx \to 0$ при $b' \to b-0$. Поэтому $\sup\limits_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx\right| \to 0$ при $b' \to b-0$. □

**Теорема 2.** (Признак Дирихле.) *Пусть на множестве* $[a,b) \times Y$ *заданы функции* $f(x,y)$ *и* $g(x,y)$ *такие, что при любом фиксированном* $y \in Y$ *функция* $f(x,y)$ *непрерывна, а функция* $g(x,y)$ *непрерывно дифференцируема по* $x$ *на множестве* $[a,b)$. *Пусть*

*1) первообразная* $F(x,y) = \int\limits_a^{x} f(t,y)\,dt$ *равномерно ограничена:*

$$\exists C \in \mathbb{R}: \quad \forall x \in [a,b) \quad \forall y \in Y \hookrightarrow \ |F(x,y)| \le C;$$

*2) при любом* $y \in Y$ *функция* $g(x,y)$ *является невозрастающей относительно* $x$, *начиная с некоторого* $x_0$, *не зависящего от* $y$:

$$\exists x_0 \in [a,b): \quad \forall x \in [x_0,b) \quad \forall y \in Y \hookrightarrow \ g'_x(x,y) \le 0;$$

*3) при* $x \to b-0$ *функция* $g(x,y)$ *стремится к нулю равномерно по* $y \in Y$:

$$\sup_{y\in Y}|g(x,y)| \to 0 \quad \textit{при} \quad x \to b-0.$$

*Тогда интеграл* $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на множестве* $Y$.

**Доказательство.** В силу признака Дирихле сходимости несобственных интегралов, не зависящих от параметра (теорема 2 §3 главы 9), при каждом фиксированном $y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx$ сходится. Интегрируя по частям, для любых $b' \in \in [a,b)$, $y \in Y$ получаем

$$\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx = F(x,y)\,g(x,y)\Big|_{x=b'}^{x\to b-0} - \int\limits_{b'}^{\to b} F(x,y)\,g'_x(x,y)\,dx.$$

Поскольку $\forall y \in Y \hookrightarrow \lim\limits_{x\to b-0} F(x,y)\,g(x,y) = 0$, то

$$\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx = -F(b',y)\,g(b',y) - \int\limits_{b'}^{\to b} F(x,y)\,g'_x(x,y)\,dx.$$

Из неравенства $g'_x(x,y) \le 0$ при $x \in [x_0,b)$ и условия $\lim\limits_{x\to b} g(x,y) = 0$ следует, что $g(b',y) \ge 0$ для любых $b' \in [x_0,b)$, $y \in Y$. Отсюда и из неравенства $|F(x,y)| \le C$ получаем

$$\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right| \le C\,g(b',y) - C\int\limits_{b'}^{\to b} g'_x(x,y)\,dx =$$

$$= 2C\,g(b',y) = 2C\,|g(b',y)|.$$

Следовательно,

$$\sup_{y\in Y}\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,g(x,y)\,dx\right| \le 2C\sup_{y\in Y}|g(b',y)| \to 0 \quad \text{при} \quad b' \to b-0. \qquad \square$$

**Теорема 3.** (Критерий Коши.) *Для того чтобы интеграл* $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ *сходился равномерно на множестве* $Y$, *необходимо и* *достаточно, чтобы*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in [a, b): \ \forall b_1, b_2 \in [b', b) \hookrightarrow \ \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx \right| \leq \varepsilon. \tag{1}$$

**Доказательство.** 1) Пусть интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x, y)\, dx$ сходится равномерно на множестве $Y$. Тогда по определению равномерной сходимости интеграла

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in [a, b): \ \forall b_1 \in [b', b) \hookrightarrow \ \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Следовательно, для любых $b_1, b_2 \in [b', b)$

$$\sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx \right| = \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx - \int\limits_{b_2}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq$$

$$\leq \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| + \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b_2}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

т. е. выполняется условие (1).

2) Пусть выполняется условие (1). В силу критерия Коши сходимости несобственных интегралов, не зависящих от параметра, при каждом фиксированном $y \in Y$ интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x, y)\, dx$ сходится. Переходя к пределу при $b_2 \to b - 0$ в условии (1), получаем

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists b' \in [a, b): \ \forall b_1 \in [b', b) \hookrightarrow \ \sup_{y \in Y} \left| \int\limits_{b_1}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \leq \varepsilon,$$

т. е. $\sup\limits_{y \in Y} \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x, y)\, dx \right| \to 0$ при $b' \to b - 0$. $\square$

**Замечание.** Критерий Коши удобного использовать для доказательства того, что несобственный интеграл не сходится равномерно на множестве $Y$. Для этого достаточно проверить, что выполняется отрицание к условию (1), т. е.

$$\exists \varepsilon > 0: \ \forall b' \in [a, b) \ \exists b_1, b_2 \in [b', b) \ \exists y \in Y: \ \left| \int\limits_{b_1}^{b_2} f(x, y)\, dx \right| > \varepsilon.$$

## § 2. Непрерывность, интегрирование и дифференцирование интегралов по параметру

**Теорема 1.** (Непрерывность собственного интеграла.) *Пусть $X$ – измеримое множество в $\mathbb{R}^n$, $Y$ – произвольное множество в $\mathbb{R}^m$. Пусть задана функция $f: X \times Y \to \mathbb{C}$ такая, что для всех $y \in Y$ существует интеграл Лебега*

$$J(y) := \int\limits_X f(x, y)\, dx \in \mathbb{C}$$

*и для почти всех фиксированных $x \in X$ функция $f(x, y)$ непрерывна по $y \in Y$ в точке $y_0 \in Y$. Пусть существует интегрируемая функция $\varphi: X \to [0, +\infty]$ такая, что при почти всех $x \in X$ и при всех $y \in Y$*

$$|f(x, y)| \le \varphi(x).$$

*Тогда функция $J: Y \to \mathbb{C}$ непрерывна в точке $y_0$.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольную последовательность элементов $y_k \in Y \setminus \{y_0\}$, сходящуюся к точке $y_0$. В силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости (теорема 3 §12 главы 8)

$$\lim_{k\to\infty} J(y_k) = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X f(x, y_k)\, dx = \int\limits_X f(x, y_0)\, dx = J(y_0).$$

Согласно определению предела функции по Гейне получаем требуемое утверждение. □

**Замечание.** Условие ограниченности величины $|f(x,y)|$ интегрируемой функцией $\varphi(x)$, не зависящей от $y$, существенно в теореме 1. Действительно, рассмотрим интеграл

$$J(y) := \int_0^{+\infty} y\, e^{-xy}\, dx.$$

Подынтегральная функция $f(x,y) = y\, e^{-xy}$ непрерывна на $X \times Y = [0,+\infty) \times [0,1]$. Прямые вычисления показывают, что для каждого $y \in Y = [0,1]$ интеграл существует и равен $J(y) = 1$ при $y \in (0,1]$, $J(y) = 0$ при $y = 0$. Таким образом, интеграл $J(y)$ не непрерывен в точке $y_0 = 0$.

**Теорема 2.** (Непрерывность несобственного интеграла.) *Пусть $-\infty < a < b \le +\infty$, $Y$ – произвольное множество в $\mathbb{R}^n$. Пусть функция $f : [a,b) \times Y \to \mathbb{C}$ непрерывна и интеграл*

$$J(y) := \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\, dx$$

*сходится равномерно на $Y$. Тогда функция $J : Y \to \mathbb{C}$ непрерывна.*

**Доказательство.** Фиксируем произвольные точку $y_0 \in Y$ и последовательность точек $y_k \in Y$ такие, что $\lim\limits_{k\to\infty} y_k = y_0$. Согласно определению Гейне требуется показать, что

$$\lim_{k\to\infty} J(y_k) = J(y_0). \tag{1}$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. В силу равномерной сходимости интеграла $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\, dx$ существует число $b' \in [a,b)$ такое, что

$$\left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\, dx \right| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall y \in Y.$$

Заметим, что множество $\widetilde{Y} := \{y_k :\ k = 0,1,2,\ldots\}$ компактно. Поэтому множество $[a,b'] \times \widetilde{Y}$ также компактно. Отсюда и из непрерывности функции $f : [a,b) \times Y \to \mathbb{C}$ следует, что

$$M := \sup_{x\in[a,b'],\ y\in\widetilde{Y}} |f(x,y)| < +\infty.$$

Поскольку функция $\varphi(x) := M$ интегрируема на $[a,b']$, то согласно теореме 1 собственный интеграл $\int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx$ непрерывен по параметру $y \in \widetilde{Y}$ в точке $y_0$. Следовательно, найдется индекс $N_\varepsilon$ такой, что

$$\left|\int\limits_a^{b'} f(x,y_k)\,dx - \int\limits_a^{b'} f(x,y_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall k \geq N_\varepsilon.$$

Поэтому для любого $k \geq N_\varepsilon$ справедливы неравенства

$$|J(y_k) - J(y_0)| \leq \left|\int\limits_a^{b'} f(x,y_k)\,dx - \int\limits_a^{b'} f(x,y_0)\,dx\right| +$$

$$+\left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y_k)\,dx\right| + \left|\int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y_0)\,dx\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

т. е. выполнено соотношение (1). □

**Замечание.** Согласно теореме Фубини (теорема 3 §1 главы 15), если $X \subset \mathbb{R}^n$ и $Y \subset \mathbb{R}^m$ – измеримые множества, а функция $f : X \times \times Y \to \mathbb{C}$ интегрируема, то

$$\int\limits_Y dy \int\limits_X f(x,y)\,dx = \int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

Таким образом, теорема Фубини дает формулу интегрирования собственного интеграла по параметру.

**Теорема 3.** (Интегрирование несобственного интеграла.) *Пусть* $-\infty < a < b \leq +\infty$, $Y$ *– конечно измеримое множество в* $\mathbb{R}^n$. *Пусть функция* $f : [a,b) \times Y \to \mathbb{C}$ *интегрируема по Лебегу на множестве* $[a,b'] \times Y$ *для любого* $b' \in [a,b)$. *Пусть интеграл* $\int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ *сходится равномерно на* $Y$. *Тогда интеграл* $\int\limits_a^{\to b} dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy$ *сходится*

*и*
$$\int\limits_a^{\to b} dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy = \int\limits_Y dy \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx.$$

**Доказательство.** В силу теоремы Фубини
$$\int\limits_Y dy \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx = \int\limits_a^{b'} dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy \qquad \forall b' \in [a,b).$$

Заметим, что
$$\left| \int\limits_Y dy \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx - \int\limits_Y dy \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx \right| = \left| \int\limits_Y dy \int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx \right| \le$$
$$\le \mu(Y) \cdot \sup_{y\in Y} \left| \int\limits_{b'}^{\to b} f(x,y)\,dx \right| \to 0 \quad \text{при} \quad b' \to b-0.$$

Следовательно,
$$\int\limits_a^{\to b} dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy = \lim_{b'\to b-0} \int\limits_a^{b'} dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy =$$
$$= \lim_{b'\to b-0} \int\limits_Y dy \int\limits_a^{b'} f(x,y)\,dx = \int\limits_Y dy \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx.$$

□

**Теорема 4.** (Дифференцирование собственного интеграла.) *Пусть $X \subset \mathbb{R}^n$ – измеримое множество. Пусть функция $f(x,y)$ интегрируема по множеству $X$ при каждом фиксированном $y \in [y_1, y_2]$ и при почти всех $x \in X$ существует частная производная $f'_y(x,y)$. Пусть $|f'_y(x,y)| \le \varphi(x)$ при почти всех $x \in X$, где функция $\varphi : X \to \to [0,+\infty)$ интегрируема на $X$. Тогда при всех $y \in [y_1,y_2]$ существует*
$$\frac{d}{dy} \int\limits_X f(x,y)\,dx = \int\limits_X f'_y(x,y)\,dx.$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольное число $y_0 \in [y_1, y_2]$ и произвольную числовую последовательность $\{t_k\}$ такую, что $t_k \neq \neq 0$, $t_k \to 0$ и $y_0 + t_k \in [y_1, y_2]$ при всех $k \in \mathbb{N}$. Обозначим $g_k(x) := \frac{f(x,y_0+t_k)-f(x,y_0)}{t_k}$ при $x \in X$, $k \in \mathbb{N}$. По определению производной $g_k(x) \to f'_y(x, y_0)$ при $k \to \infty$ для почти всех $x \in X$. По теореме Лагранжа о среднем для почти всех $x \in X$ и при всех $k \in \mathbb{N}$ найдется число $\theta_k \in (0,1)$ такое, что $g_k(x) = f'_y(x, y_0 + \theta_k t_k)$. Следовательно, $|g_k(x)| \le \varphi(x)$ при всех $k \in \mathbb{N}$ и при почти всех $x \in X$. В силу теоремы Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_X g_k(x)\,dx = \int\limits_X \left(\lim_{k\to\infty} g_k(x)\right) dx = \int\limits_X f'_y(x, y_0)\,dx.$$

Следовательно,

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{t_k} \left( \int\limits_X f(x, y_0 + t_k)\,dx - \int\limits_X f(x, y_0)\,dx \right) = \int\limits_X f'_y(x, y_0)\,dx.$$

□

**Следствие.** *Пусть на отрезке* $[y_1, y_2]$ *заданы дифференцируемые функции* $\varphi(y)$ *и* $\psi(y)$ *такие, что* $\varphi(y) \le \psi(y)$ $\forall y \in [y_1, y_2]$. *Пусть в некотором открытом множестве* $G \subset \mathbb{R}^2$, *содержащем множество* $E = \{(x, y) \ : \ y \in [y_1, y_2],\ x \in [\varphi(y), \psi(y)]\}$, *задана функция* $f(x, y)$, *непрерывная вместе с частной производной* $f'_y(x, y)$. *Тогда функция* $J(y) = \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f(x, y)\,dx$ *дифференцируема на отрезке* $[y_1, y_2]$ *и для любого* $y \in [y_1, y_2]$ *справедливо равенство*

$$J'(y) = f(\psi(y), y)\,\psi'(y) - f(\varphi(y), y)\,\varphi'(y) + \int\limits_{\varphi(y)}^{\psi(y)} f'_y(x, y)\,dx.$$

**Доказательство.** Рассмотрим функцию $\Phi(y, \varphi, \psi) = = \int\limits_{\varphi}^{\psi} f(x, y)\,dx$. По формуле Ньютона–Лейбница $\Phi'_\psi(y, \varphi, \psi) = = f(\psi, y)$, $\Phi'_\varphi(y, \varphi, \psi) = -f(\varphi, y)$. В силу теоремы 4 имеем

$\Phi'_y(y,\varphi,\psi) = \int\limits_{\varphi}^{\psi} f'_y(x,y)\,dx$. Дифференцируя сложную функцию $J(y) = \Phi(y,\varphi(y),\psi(y))$: $J'(y) = \Phi'_y(y,\varphi(y),\psi(y)) + \Phi'_\varphi(y,\varphi(y),\psi(y))\,\varphi'(y) + \Phi'_\psi(y,\varphi(y),\psi(y))\,\psi'(y)$, получим требуемое утверждение. $\square$

**Теорема 5.** (Дифференцирование несобственного интеграла.) *Пусть функции $f(x,y)$ и $f'_y(x,y)$ непрерывны на множестве $[a,b)\times\times[y_1,y_2]$ (где $b\in\mathbb{R}\bigcup\{+\infty\}$), интеграл $\int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx$ сходится равномерно на отрезке $[y_1,y_2]$ и при некотором $y_0\in[y_1,y_2]$ сходится интеграл $\int\limits_a^{\to b} f(x,y_0)\,dx$. Тогда при любом $y\in[y_1,y_2]$ интеграл $J(y) := \int\limits_a^{\to b} f(x,y)\,dx$ сходится и существует*

$$J'(y) = \int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx.$$

**Доказательство.** Поскольку для любых $x\in[a,b)$, $t\in[y_1,y_2]$ справедливо равенство $f(x,t) = f(x,y_0) + \int\limits_{y_0}^{t} f'_y(x,y)\,dy$, то в силу теоремы об интегрировании несобственного интеграла по параметру для любого $t\in[y_1,y_2]$ имеем

$$\begin{aligned} J(t) &= \int\limits_a^{\to b} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_a^{\to b}\left(\int\limits_{y_0}^{t} f'_y(x,y)\,dy\right)dx = \\ &= \int\limits_a^{\to b} f(x,y_0)\,dx + \int\limits_{y_0}^{t}\left(\int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx\right)dy. \end{aligned} \tag{2}$$

Заметим, что функция $F(y) := \int\limits_a^{\to b} f'_y(x,y)\,dx$ непрерывна на $[y_1,y_2]$ согласно теореме о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Дифференцируя равенство (2) в точке $t=y$, получим требуемое утверждение. $\square$

**Пример 1.** Вычислить *интеграл Дирихле* $\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$.

**Решение.** Рассмотрим интеграл

$$D(y) = \int\limits_0^{\to+\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\,dx, \qquad y \geq 0,$$

который при $y > 0$ существует в собственном смысле. Заметим, что подынтегральная функция

$$F(x,y) := \begin{cases} e^{-yx}\,\dfrac{\sin x}{x}, & x > 0, \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

непрерывна на множестве $[0,+\infty) \times [0,+\infty)$. При этом функция $F'_y(x,y) = -\sin x\, e^{-yx}$ также непрерывна.

Зафиксируем произвольные числа $y_1$, $y_2$ такие, что $0 < y_1 < y_2$. Тогда при $y \in [y_1, y_2]$ справедливо неравенство $|F'_y(x,y)| \leq e^{-y_1 x}$, причем функция $\varphi(x) := e^{-y_1 x}$ интегрируема на множестве $[0,+\infty)$.

Согласно теореме о дифференцировании собственного интеграла по параметру при любом $y \in [y_1, y_2]$ существует

$$D'(y) = \int\limits_0^{+\infty} F'_y(x,y)\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} \sin x\, e^{-yx}\,dx = -\mathrm{Im} \int\limits_0^{+\infty} e^{(-y+i)x}\,dx =$$

$$= -\mathrm{Im}\, \frac{e^{(-y+i)x}}{-y+i}\Bigg|_{x=0}^{x\to+\infty} = \mathrm{Im}\,\frac{1}{-y+i} = \mathrm{Im}\,\frac{-y-i}{y^2+1} = -\frac{1}{y^2+1}.$$

Следовательно, при $0 < y_1 < y_2$

$$D(y_2) - D(y_1) = -\int\limits_{y_1}^{y_2} \frac{dy}{y^2+1} = -\mathrm{arctg}\, y_2 + \mathrm{arctg}\, y_1. \tag{3}$$

Поскольку $|D(y)| \leq \int\limits_0^{+\infty} e^{-yx}\,dx = \frac{1}{y} \to 0$ при $y \to +\infty$, то $\lim\limits_{y_2\to+\infty} D(y_2) = 0$. Отсюда, переходя к пределу при $y_2 \to +\infty$, $y_1 \to$

$+0$ в равенстве (3), получаем $\quad 0 - \lim\limits_{y_1 \to +0} D(y_1) = - \lim\limits_{y_2 \to +\infty} \operatorname{arctg} y_2 + \lim\limits_{y_1 \to +0} \operatorname{arctg} y_1 = -\frac{\pi}{2}$, т. е.

$$\lim_{y \to +0} D(y) = \frac{\pi}{2}.$$

Осталось доказать непрерывность функции $D(y)$ в точке $y = 0$ справа. Отсюда будет следовать, что интеграл Дирихле равен $\frac{\pi}{2}$:

$$\int\limits_0^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx = D(0) = \lim_{y \to +0} D(y) = \frac{\pi}{2}. \tag{4}$$

Зафиксируем произвольное $\delta > 0$. В силу теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру для доказательства непрерывности интеграла $D(y) = \int\limits_0^{\to +\infty} F(x, y)\, dx$ на отрезке $[0, \delta]$ достаточно проверить, что

1) функция $F(x, y)$ непрерывна на множестве $[0, +\infty) \times [0, \delta]$ и

2) интеграл $\int\limits_0^{\to +\infty} F(x, y)\, dx$ сходится равномерно на отрезке $[0, \delta]$.

Выполнение первого условия следует непосредственно из определения функции $F(x, y)$. Проверим равномерную сходимость интеграла $\int\limits_0^{\to +\infty} F(x, y)\, dx = \int\limits_0^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\, dx$. Заметим, что равномерная сходимость интеграла $\int\limits_0^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\, dx$ эквивалентна равномерной сходимости интеграла $\int\limits_1^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\, dx$.

Применим признак Дирихле равномерной сходимости несобственных интегралов. Функции $g(x) = \sin x$ и $h(x, y) = \frac{e^{-yx}}{x}$ непрерывны при $x \in [1, +\infty)$, первообразная функции $g(x)$ равномерно ограничена, а функция $h(x, y)$ при $x \to +\infty$ стремится к нулю монотонно и равномерно по $y$: $\;h'_x(x, y) < 0$ и $|h(x, y)| \leq \frac{1}{x} \to 0$ при $x \to +\infty$. В силу признака Дирихле получаем равномерную сходимость интеграла $\int\limits_1^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\, dx$, а значит, и интеграла $\int\limits_0^{\to +\infty} \frac{\sin x}{x}\, e^{-yx}\, dx$ по параметру $y \in [0, +\infty)$.

Итак, для интеграла $D(y) = \int\limits_0^{\to+\infty} F(x,y)\,dx$ выполняются все условия теоремы о непрерывности несобственного интеграла по параметру. Применение этой теоремы завершает обоснование формулы (4).

## § 3. Эйлеровы интегралы

**Определение.** *Гамма-функцией Эйлера* называется

$$\Gamma(p) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\,e^{-x}\,dx$$

Поскольку при $x \to +0$ имеет место эквивалентность $x^{p-1}\,e^{-x} \sim \sim x^{p-1}$, то в соответствии со вторым признаком сравнения (теорема 2 §2 главы 9) функция $x^{p-1}\,e^{-x}$ интегрируема по Лебегу на $[0,1]$ при $p > 0$. Так как при достаточно больших $x$ справедливо неравенство $x^{p-1}\,e^{-x} \le e^{-x/2}$ и $\int\limits_1^{+\infty} e^{-x/2}\,dx < +\infty$, то $\int\limits_1^{+\infty} x^{p-1}\,e^{-x}\,dx < +\infty$ при любых $p \in \mathbb{R}$. Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}\,e^{-x}\,dx < +\infty$ при $p > 0$.

**Теорема 1.** (Формула понижения.)

$$\Gamma(p+1) = p\,\Gamma(p) \qquad \forall p > 0.$$

**Доказательство.** При $p > 0$ имеем

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} x^p\,e^{-x}\,dx = -\int\limits_0^{+\infty} x^p\,de^{-x} =$$

$$= -x^p\,e^{-x}\Big|_{x=0}^{x\to+\infty} + \int\limits_0^{+\infty} p\,x^{p-1}\,e^{-x}\,dx = p\,\Gamma(p). \qquad \square$$

Поскольку $\Gamma(1) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = 1 = 0!$, то в силу формулы понижения получаем $\Gamma(n) = (n-1)!$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно,

$$k! = \Gamma(k+1) \qquad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}. \tag{1}$$

Таким образом, гамма-функция продолжает факториал на все действительные числа, большие $-1$.

**Определение.** *Бета-функцией Эйлера* называется

$$B(p,q) = \int\limits_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx.$$

Так как при $x \to +0$: $x^{p-1}\,(1-x)^{q-1} \sim x^{p-1}$, а при $x \to 1-0$: $x^{p-1}\,(1-x)^{q-1} \sim (1-x)^{q-1}$, то интеграл $\int\limits_0^1 x^{p-1}\,(1-x)^{q-1}\,dx < +\infty$ при $p > 0$, $q > 0$.

**Теорема 2.** (Формула сведения.)

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad \forall p > 0, \quad q > 0.$$

**Доказательство.** Фиксируем произвольные числа $p > 0$ и $q > 0$. В силу теоремы Фубини имеем

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^{+\infty} x^{p-1}dx \int\limits_0^{+\infty} y^{q-1}\,e^{-x-y}\,dy = \int\limits_{x>0,\,y>0} x^{p-1}\,y^{q-1}\,e^{-x-y}\,dxdy.$$

Перейдем от переменных $(x,y)$ к переменным $(x,s)$, где $s = x+y$.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_{s>x>0} x^{p-1}\,(s-x)^{q-1}\,e^{-s}\,dxds.$$

Снова применим теорему Фубини

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}\,ds \int\limits_0^{s} x^{p-1}(s-x)^{q-1}\,dx.$$

Переходя от переменной $x$ к переменной $t = \frac{x}{s}$, получаем $x = st$ и

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int\limits_0^{+\infty} e^{-s}\,ds \int\limits_0^1 s^{p-1}t^{p-1}s^{q-1}(1-t)^{q-1}s\,dt =$$

$$= \int\limits_0^{+\infty} s^{p+q-1}e^{-s}\,ds \int\limits_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}\,dt = \Gamma(p+q)\,B(p,q).$$

$\square$

При доказательстве формулы дополнения для гамма-функции понадобится следующая лемма.

**Лемма 1.**

$$\frac{\pi}{\sin \pi p} = \frac{1}{p} + 2p\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^2-k^2} \qquad \forall p \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}.$$

**Доказательство.** В силу теоремы 4 § 3 главы 22 ряд Фурье функции $\cos px$ по стандартной тригонометрической системе сходится к этой функции на интервале $(-\pi,\pi)$, т.е. с учетом четности $\cos px$

$$\cos px = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx \qquad \forall x \in (-\pi,\pi), \tag{2}$$

где

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos px\,dx = \frac{1}{\pi p}\sin \pi p\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} = \frac{2\sin \pi p}{\pi p},$$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \cos px\,\cos kx\,dx = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\Big(\cos(p+k)x + \cos(p-k)x\Big)dx =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\sin(p+k)x}{p+k}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi} + \frac{\sin(p-k)x}{p-k}\Big|_{x=-\pi}^{x=\pi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{(-1)^k \sin \pi p}{p+k} + \frac{(-1)^k \sin \pi p}{p-k}\right) = \frac{2p(-1)^k \sin \pi p}{\pi(p^2-k^2)}$$

при $k \in \mathbb{N}$. Подставляя в формулу (2) $x=0$, имеем

$$1 = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{\sin \pi p}{\pi p} + \frac{2p\sin \pi p}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{p^2-k^2}.$$

Домножая левую и правую части этого равенства на $\frac{\pi}{\sin \pi p}$, получаем доказываемое равенство. $\square$

**Теорема 3.** (Формула дополнения.)

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \qquad \forall p \in (0,1).$$

**Доказательство.** Фиксируем $p \in (0,1)$. В силу теоремы 2 имеем

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = B(p,1-p)\,\Gamma(1) = B(p,1-p) = \int\limits_0^1 x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx =$$

$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}} x^{p-1}(1-x)^{-p}\,dx + \int\limits_{\frac{1}{2}}^1 y^{p-1}(1-y)^{-p}\,dy.$$

Производя во втором слагаемом замену переменной $y \to x := 1-y$, приходим к равенству

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \Big(x^{p-1}(1-x)^{-p} + (1-x)^{p-1}x^{-p}\Big)dx.$$

Переходя к переменной интегрирования $t$, где $x = \frac{t}{1+t}$, получаем

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \int\limits_0^1 (t^{p-1} + t^{-p})\frac{dt}{1+t}. \tag{3}$$

Заметим, что для любого $t \in [0,1)$ справедливо равенство $\frac{1}{1+t} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k t^k$, т.е.

$$\frac{1}{1+t} = \lim_{n\to\infty} g_n(t),$$

где $g_n(t) := \sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k t^k = \frac{1-(-1)^{n+1}t^{n+1}}{1+t}$. Заметим, что $|g_n(t)| \le 1$ при всех $t \in [0,1)$ и $n \in \mathbb{N}$. Обозначая $\varphi(t) := t^{p-1} + t^{-p}$, получаем

$$|\varphi(t) g_n(t)| \le \varphi(t) \qquad \forall t \in [0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Так как функция $\varphi$ интегрируема на $[0,1]$, то согласно теореме Лебега об ограниченной сходимости получаем равенство

$$\int\limits_0^1 \left(\lim_{n\to\infty} \varphi(t) g_n(t)\right) dt = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \varphi(t) g_n(t)\, dt.$$

Отсюда и из равенства (3) следует, что

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_0^1 \left( (t^{p-1}+t^{-p}) \sum_{k=0}^{n} (-1)^k t^k \right) dt =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \int\limits_0^1 \left(t^{k+p-1}+t^{k-p}\right) dt =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \left( \frac{1}{k+p} + \frac{1}{k-p+1} \right) =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} + \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'}}{k'-p+1} =$$

$$= \frac{1}{p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+p} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k-p},$$

где последнее равенство получено путем замены индекса суммирования $k := k'+1$ во второй сумме. Таким образом,

$$\Gamma(p)\,\Gamma(1-p) = \frac{1}{p} + 2p \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^2-k^2} = \frac{\pi}{\sin \pi p},$$

последнее равенство следует из леммы 1. $\square$

**Замечание.** Согласно формуле дополнения $\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = \frac{\pi}{\sin\frac{\pi}{2}} = \pi$. Отсюда и из неравенства $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) > 0$ следует, что $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Это дает еще один способ вычисления интеграла Пуассона (см. пример 2 §3 главы 14)

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-x^2} dx \overset{x=\sqrt{t}}{=} 2 \int\limits_0^{+\infty} e^{-t} \frac{dt}{2\sqrt{t}} = \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (4)$$

**Теорема 4.** (Формула Стирлинга.)

$$\lim_{p\to+\infty} \frac{\Gamma(p+1)}{\sqrt{2\pi}\, p^{p+\frac{1}{2}}\, e^{-p}} = 1.$$

**Доказательство.** По определению гамма-функции $\Gamma(p+1) = \int\limits_0^{+\infty} t^p e^{-t}\, dt$. Переходя к переменной интегрирования $x = \frac{t}{p} - 1$, получаем $t = p(x+1)$,

$$\Gamma(p+1) = \int\limits_{-1}^{+\infty} p^p (x+1)^p e^{-p(x+1)} p\, dx = p^{p+1} e^{-p} \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-p(x-\ln(x+1))} dx.$$

Следовательно,

$$\Gamma(p+1) = p^{p+1} e^{-p} \cdot I(p), \tag{5}$$

где

$$I(p) = \int\limits_{-1}^{+\infty} e^{-p\varphi(x)} dx, \tag{6}$$

$$\varphi(x) = x - \ln(x+1).$$

Раскладывая $\varphi(x)$ по формуле Маклорена, получаем

$$\varphi(x) = \frac{x^2}{2} + o(x^2), \quad x \to 0. \tag{7}$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon \in (0,1)$. Тогда найдется число $\delta = \delta(\varepsilon) \in (0,1)$ такое, что

$$\frac{1-\varepsilon}{2} x^2 < \varphi(x) < \frac{1+\varepsilon}{2} x^2 \qquad \forall x \in (-\delta, \delta). \tag{8}$$

Представим интеграл (6) в виде суммы интегралов по числовым промежуткам $(-1,-\delta]$, $(-\delta,\delta)$, $[\delta,1]$, $[1,+\infty)$ и оценим каждый из полученных интегралов.

Так как $\varphi'(x) = 1 - \frac{1}{1+x} = \frac{x}{1+x}$, то $\varphi(x)$ убывает на $(-1,0]$ и возрастает на $[0,1)$. Поэтому

$$\varphi(x) \geq m \qquad \forall x \in (-1,-\delta] \cup [\delta,1],$$

где $m = m(\varepsilon) := \min\{\varphi(-\delta(\varepsilon)), \varphi(\delta(\varepsilon))\} > 0$. Следовательно,

$$\int\limits_{-1}^{-\delta} e^{-p\varphi(x)}dx + \int\limits_{\delta}^{1} e^{-p\varphi(x)}dx < 2e^{-pm}.$$

Поскольку $\varphi'(x) = \frac{x}{1+x} \geq \frac{1}{2}$ при $x \geq 1$, то $\varphi(x) \geq \varphi(1) + \frac{x-1}{2}$ для любого $x \geq 1$. Следовательно,

$$\int\limits_{1}^{+\infty} e^{-p\varphi(x)}dx \leq e^{-p\varphi(1)} \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-\frac{p(x-1)}{2}}dx = \frac{2}{p}e^{-p\varphi(1)} = \frac{2e^{-p(1-\ln 2)}}{p}.$$

В силу неравенств (8) получаем

$$\int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-p\varphi(x)}dx < \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1-\varepsilon}{2}px^2}dx <$$

$$< \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1-\varepsilon}{2}px^2}dx \overset{t=\sqrt{\frac{(1-\varepsilon)p}{2}}x}{=} \sqrt{\frac{2}{(1-\varepsilon)p}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}dt = \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\varepsilon)p}},$$

где в последнем равенстве был использован интеграл Пуассона (4). Таким образом,

$$I(p) = \int\limits_{-1}^{-\delta} e^{-p\varphi(x)}dx + \int\limits_{-\delta}^{\delta} e^{-p\varphi(x)}dx + \int\limits_{\delta}^{1} e^{-p\varphi(x)}dx + \int\limits_{1}^{+\infty} e^{-p\varphi(x)}dx <$$

$$< 2e^{-pm} + \frac{2e^{-p(1-\ln 2)}}{p} + \sqrt{\frac{2\pi}{(1-\varepsilon)p}}.$$

Следовательно,

$$\sqrt{\frac{p}{2\pi}}I(p) \leq \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \alpha(\varepsilon, p),$$

где $\lim\limits_{p\to+\infty} \alpha(\varepsilon, p) = 0$ при любом $\varepsilon \in (0, 1)$. Для любого числа $\tilde{\varepsilon} > 0$ выберем $\varepsilon \in (0, 1)$ так, что $\frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} < 1 + \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$, а затем число $p_{\tilde{\varepsilon}} > 0$ так, что $\alpha(\varepsilon, p) < \frac{\tilde{\varepsilon}}{2}$ при всех $p > p_{\tilde{\varepsilon}}$. Тогда

$$\sqrt{\frac{p}{2\pi}}I(p) \le \frac{1}{\sqrt{1-\varepsilon}} + \alpha(\varepsilon, p) < 1 + \tilde{\varepsilon} \qquad \forall p > p_{\tilde{\varepsilon}}. \tag{9}$$

Оценим интеграл $I(p)$ снизу. Используя неравенства (8), получаем

$$I(p) \ge \int_{-\delta}^{\delta} e^{-p\varphi(x)}dx \ge \int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{1+\varepsilon}{2}px^2}dx = 2\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda x^2}dx,$$

где $\lambda = \frac{(1+\varepsilon)p}{2}$. Заметим, что

$$\int_{\delta}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda(\delta+t)^2}dt < \int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda(\delta^2+t^2)}dt = e^{-\lambda\delta^2}\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx.$$

Поэтому

$$I(p) \ge 2\int_{0}^{\delta} e^{-\lambda x^2}dx = 2\left(\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx - \int_{\delta}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx\right) \ge$$

$$\ge 2\left(1 - e^{-\lambda\delta^2}\right)\int_{0}^{+\infty} e^{-\lambda x^2}dx = \left(1 - e^{-\lambda\delta^2}\right)\sqrt{\frac{\pi}{\lambda}},$$

где в последнем равенстве использован интеграл Пуассона. Таким образом,

$$I(p) \ge \left(1 - e^{-\frac{1+\varepsilon}{2}p\delta^2}\right)\sqrt{\frac{2\pi}{(1+\varepsilon)p}}.$$

Отсюда аналогично доказательству соотношения (9) получаем, что для любого $\tilde{\varepsilon} > 0$ существует число $\tilde{p}_{\tilde{\varepsilon}} > 0$ такое, что

$$\sqrt{\frac{p}{2\pi}}I(p) < 1 - \tilde{\varepsilon} \qquad \forall p > \tilde{p}_{\tilde{\varepsilon}}.$$

Последнее неравенство вместе с неравенством (9) дает соотношение

$$\lim_{p\to+\infty}\sqrt{\frac{p}{2\pi}}I(p) = 1,$$

из которого с учетом (5) вытекает доказываемое равенство. $\square$

**Замечание.** Из теоремы 4 и формулы (1) получаем асимптотическую формулу для факториала

$$k! = \sqrt{2\pi}\, k^{k+\frac{1}{2}}\, e^{-k}(1 + o(1)), \quad k \to \infty.$$

Далее получим формулу объема шара в $\mathbb{R}^n$, для доказательства которой потребуется следующая лемма.

**Лемма 2.** *Пусть множество $X \subset \mathbb{R}^n$ измеримо и функция $f : X \to$ $\to [0, +\infty]$ измерима. Тогда*

$$\int\limits_X f(x)\, dx = \int\limits_0^{+\infty} \mu_x\{x \in X : \ f(x) \geq y\}\, dy.$$

**Доказательство.**

**Шаг 1.** Пусть $\int\limits_X f(x)\, dx < +\infty$. В силу теоремы геометрическом смысле интеграла (теоремы 2 §10 главы 8) множество

$$F := \{(x, y) \in \mathbb{R}^{n+1} : \ x \in X, \ 0 \leq y \leq f(x)\}$$

конечно измеримо в $\mathbb{R}^{n+1}$ и его мера равна

$$\mu(F) = \int\limits_X f(x)\, dx. \tag{10}$$

Согласно теореме о выражении меры множества через интеграл от меры сечений

$$\mu(F) = \int\limits_0^{+\infty} \mu_x(F(y))\, dy, \tag{11}$$

где $F(y) = \{x \in \mathbb{R}^n : \ (x, y) \in F\} = \{x \in X : \ f(x) \geq y\}$. Из равенств (10), (11) получаем доказываемое равенство в случае $\int\limits_X f(x)\, dx < +$ $+\infty$.

**Шаг 2.** Пусть $\int\limits_X f(x)\, dx = +\infty$. В этом случае по определению интеграла Лебега существует последовательность интегрируемых функций $f_k : X \to [0, +\infty)$ таких, что $f_k(x) \leq f(x)$ для почти всех $x \in X$ и $\lim\limits_{k\to+\infty} \int\limits_X f_k(x)\, dx = +\infty$. Используя утверждение, доказанное на шаге 1, получаем

$$\int_0^{+\infty} \mu_x\{x \in X:\ f(x) \geq y\}\,dy \geq \int_0^{+\infty} \mu_x\{x \in X:\ f_k(x) \geq y\}\,dy =$$

$$= \int_X f_k(x)\,dx \to +\infty \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, $\int\limits_0^{+\infty} \mu_x\{x \in X:\ f(x) \geq y\}\,dy = +\infty$ и доказываемое равенство выполнено и в этом случае. □

**Теорема 5.** (Объем шара в $\mathbb{R}^n$.) *Мера шара* $B_r^n := \{x \in \mathbb{R}^n:\ |x| \leq r\}$ *радиуса* $r \geq 0$ *в* $\mathbb{R}^n$ *выражается формулой*

$$\mu(B_r^n) = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} r^n.$$

**Доказательство.** Согласно теореме Фубини

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int_{\mathbb{R}} e^{-x_1^2}\,dx_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-x_2^2}\,dx_2 \ldots \int_{\mathbb{R}} e^{-x_n^2}\,dx_n = \left(\int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}\,dt\right)^n.$$

Используя интеграл Пуассона, получаем

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \pi^{\frac{n}{2}}.$$

Отсюда в силу леммы 2 следует, что

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-|x|^2}\,dx = \int_0^{+\infty} \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n:\ e^{-|x|^2} \geq y\right\}dy.$$

Поскольку при $y > 1$ множество $\{x \in \mathbb{R}^n:\ e^{-|x|^2} \geq y\}$ пусто, то

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int_0^1 \mu\left\{x \in \mathbb{R}^n:\ e^{-|x|^2} \geq y\right\}dy. \tag{12}$$

Так как шар $B_r^n$ получается из шара $B_1^n$ линейным преобразованием $z(x) = r \cdot x$ с якобианом $r^n$, то по теореме о замене переменных в кратном интеграле

$$\mu(B_r^n) = \int\limits_{B_r^n} dz = \int\limits_{B_1^n} r^n \, dx = r^n \mu(B_1^n). \tag{13}$$

Поскольку

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \ e^{-|x|^2} \geq y\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq \sqrt{-\ln y}\} = B_{r(y)}^n,$$

где $r(y) := \sqrt{-\ln y}$, то из равенств (12), (13) получаем

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \int\limits_0^1 \mu(B_{r(y)}^n) \, dy = \int\limits_0^1 \mu(B_1^n)(r(y))^n \, dy = \mu(B_1^n) \int\limits_0^1 (-\ln y)^{\frac{n}{2}} \, dy.$$

Производя замену переменной $t = -\ln y$, имеем

$$\int\limits_0^1 (-\ln y)^{\frac{n}{2}} \, dy = \int\limits_{+\infty}^0 t^{\frac{n}{2}} e^{-t} (-dt) = \int\limits_0^{+\infty} t^{\frac{n}{2}} e^{-t} \, dt = \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

Следовательно,

$$\pi^{\frac{n}{2}} = \mu(B_1^n) \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right).$$

Используя равенство (13), получаем

$$\mu(B_r^n) = \mu(B_1^n) \, r^n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2} + 1\right)} r^n.$$

□

Глава 24

# ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФУРЬЕ

## § 1. Преобразование и интеграл Фурье функций одной переменной

Поскольку сумма ряда Фурье по тригонометрической системе является периодической функцией, то непериодическую функцию $f(x)$ нельзя представить как сумму ряда Фурье на всей числовой прямой. Далее мы увидим, что многие непериодические функции представимы интегралом Фурье, который является аналогом ряда Фурье.

**Определение .** Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ интегрируема (по Лебегу) на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Интеграл в смысле главного значения* $\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ определяется формулой

$$\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx := \lim_{\lambda \to +\infty} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx.$$

Заметим, что если функция $f$ интегрируема на $\mathbb{R}$, то интеграл в смысле главного значения $\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ существует и равен интегралу $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Из существования интеграла $\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ не следует существование интеграла $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$. Например, $\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx = 0$, но интеграл $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\,dx$ не существует как в собственном, так и в несобственном смыслах.

Если функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ нечетна и интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$, то для любого числа $\lambda > 0$ имеем $\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x)\,dx = 0$, следовательно, $\mathrm{v.\,p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 0$.

**Определение.** Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ интегрируема на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. *Преобразованием Фурье* функции $f$ называется функция $F[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-ixy}\, dx. \tag{1}$$

Обратным преобразованием Фурье функции $f$ называется функция $F^{-1}[f] : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{ixy}\, dx. \tag{2}$$

Если в точке $y \in \mathbb{R}$ не существует интеграл в смысле главного значения, записанный в формуле (1) или (2), то в этой точке $F[f](y)$ или $F^{-1}[f](y)$ соответственно не существует.

**Замечание.** Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то из равенства $|f(x)\, e^{\pm ixy}| = |f(x)|$ следует интегрируемость функций $f(x)\, e^{\pm ixy}$ по переменной $x$ на $\mathbb{R}$. В этом случае интегралы в смысле главного значения в формулах (1), (2) существуют и совпадают с обычными интегралами Лебега.

**Замечание.** Если $f \in L_1(\mathbb{R})$, то в силу теоремы 1 § 2 функции $F[f]$ и $F^{-1}[f]$ непрерывны на $\mathbb{R}$.

**Определение.** *Интегралом Фурье* функции $f \in L_1(\mathbb{R})$ называется интеграл

$$I_f(x) := F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} F[f](y)\, e^{ixy}\, dy.$$

**Лемма 1.** *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$. Тогда для любого $x \in \mathbb{R}$*

$$F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = F\Big[F^{-1}[f]\Big](x) = \lim_{\lambda \to +\infty} I_f(x, \lambda), \tag{3}$$

*где*

$$I_f(x,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\lambda} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\cos y(x-t)\,dt.$$

*Формулу (3) следует понимать так, что* $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x)$, $F\Big[F^{-1}[f]\Big](x)$ *и* $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_f(x,\lambda)$ *существуют или не существуют одновременно, а если существуют, то равны между собой.*

**Доказательство.** Поскольку $f \in L_1(\mathbb{R})$, то интеграл (2) в смысле главного значения совпадает с интегралом в обычном смысле:

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{ity}\,dt.$$

Фиксируем $x \in \mathbb{R}$. Тогда

$$F\Big[F^{-1}[f]\Big](x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\ \mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} F^{-1}[f](y)\,e^{-ixy}\,dy =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty} dy \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,e^{i(t-x)y}\,dt = \frac{1}{2\pi}\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(g_1(y)+ig_2(y))dy,$$

где

$$g_1(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\cos(t-x)y\,dt, \qquad g_2(y) = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\sin(t-x)y\,dt.$$

Поскольку функция $g_2(y)$ нечетна, то $\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_2(y)\,dy = 0$. Так как функция $g_1(y)$ четна, то

$$\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} g_1(y)\,dy = \lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_{-\lambda}^{\lambda} g_1(y)\,dy = 2\lim_{\lambda\to+\infty}\int\limits_0^{\lambda} g_1(y)\,dy.$$

Следовательно,

$$F\Big[F^{-1}[f]\Big](x) = \frac{1}{\pi} \lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^\lambda g_1(y)\,dy = \lim_{\lambda\to+\infty} I_f(x,\lambda).$$

Равенство $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_f(x,\lambda)$ доказывается аналогично. $\square$

**Теорема 1.** (Об интеграле Фурье.) *Пусть $f \in L_1(\mathbb{R})$ и пусть в точке $x_0 \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние пределы $f(x_0+$ $+0)$, $f(x_0-0)$ и конечные односторонние производные $f'_+(x_0)$, $f'_-(x_0)$. Тогда интеграл Фурье функции $f(x)$ сходится в точке $x_0$ к числу $\frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0))$:*

$$I_f(x_0) = \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)).$$

**Доказательство.** Согласно лемме 1 справедливо равенство $I_f(x_0) = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} I_f(x_0,\lambda)$. Поэтому требуется доказать, что

$$\lim_{\lambda\to+\infty} I_f(x_0,\lambda) = \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)). \tag{4}$$

Производя замену переменной интегрирования $u = t - x_0$, имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\cos y(x_0-t)\,dt = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_0+u)\,\cos yu\,du =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{0} f(x_0+u)\,\cos yu\,du + \int\limits_{0}^{+\infty} f(x_0+u)\,\cos yu\,du =$$

$$= \int\limits_{0}^{+\infty} (f(x_0+u)+f(x_0-u))\,\cos yu\,du.$$

Следовательно,

$$I_f(x_0,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\lambda dy \int\limits_0^{+\infty} (f(x_0+u)+f(x_0-u))\,\cos yu\,du.$$

Поскольку функция $F_1(y,u) := f(x_0+u)+f(x_0-u)$ интегрируема на множестве $[0,\lambda]\times[0,+\infty)$, а функция $F_2(y,u) := F_1(y,u)\cos yu$ измерима и удовлетворяет неравенству $|F_2(y,u)| \le |F_1(y,u)|$, то функция $F_2(y,u)$ также интегрируема на множестве $[0,\lambda]\times[0,+\infty)$. Меняя порядок интегрирования в силу теоремы Фубини, получаем

$$I_f(x_0,\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(f(x_0+u)+f(x_0-u))\,du\int\limits_0^{\lambda}\cos yu\,dy =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{+\infty}(f(x_0+u)+f(x_0-u))\,\frac{\sin\lambda u}{u}\,du.$$

Используя интеграл Дирихле $\int\limits_0^{\to+\infty}\frac{\sin\lambda u}{u}\,du = \int\limits_0^{\to+\infty}\frac{\sin t}{t}\,dt = \frac{\pi}{2}$, приходим к равенству

$$\begin{gathered} I_f(x_0,\lambda) - \frac{1}{2}(f(x_0+0)+f(x_0-0)) = \\ = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\to+\infty}\Big(f(x_0+u)+f(x_0-u)-f(x_0+0)-f(x_0-0)\Big)\frac{\sin\lambda u}{u}\,du. \end{gathered} \tag{5}$$

Покажем, что

$$\int\limits_0^{\to+\infty}(f(x_0+u)-f(x_0+0))\,\frac{\sin\lambda u}{u}\,du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty \tag{6}$$

и

$$\int\limits_0^{\to+\infty}(f(x_0-u)-f(x_0-0))\,\frac{\sin\lambda u}{u}\,du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty. \tag{7}$$

Отсюда и из равенства (5) будет следовать требуемое равенство (4).

Представим интеграл из соотношения (6) в виде суммы трех интегралов:

$$\int\limits_0^{\to+\infty}(f(x_0+u)-f(x_0+0))\,\frac{\sin\lambda u}{u}\,du = \int\limits_0^{1}\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}\,\sin\lambda u\,du+$$

$$+\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f(x_0+u)}{u} \sin\lambda u\, du - f(x_0+0) \int\limits_{1}^{\to+\infty} \frac{\sin\lambda u}{u}\, du.$$

Из интегрируемости функции $f$ на $\mathbb{R}$ и существования конечного предела $\lim\limits_{u\to+0} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u} = f'_+(x_0)$ следует интегрируемость функции $\frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u}$ на отрезке $[0,1]$. Поэтому в силу теоремы Римана об осцилляции

$$\int\limits_{0}^{1} \frac{f(x_0+u)-f(x_0+0)}{u} \sin\lambda u\, du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty. \tag{8}$$

Из интегрируемости функции $f$ на $\mathbb{R}$ и неравенства $\left|\frac{f(x_0+t)}{t}\right| \leq$ $\leq |f(x_0+t)| \quad \forall t \geq 1$ следует интегрируемость функции $\frac{f(x_0+t)}{t}$ на $(1,+\infty)$, что в силу теоремы Римана дает соотношение

$$\int\limits_{1}^{+\infty} \frac{f(x_0+u)}{u} \sin\lambda u\, du \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty.$$

Из сходимости интеграла Дирихле $\int\limits_{0}^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt$ следует, что

$$\int\limits_{1}^{\to+\infty} \frac{\sin\lambda u}{u}\, du \overset{t=\lambda u}{=} \int\limits_{\lambda}^{\to+\infty} \frac{\sin t}{t}\, dt \to 0 \quad \text{при} \quad \lambda\to+\infty. \tag{9}$$

Из формул (8) – (9) следует соотношение (6). Соотношение (7) доказывается аналогично. Из равенств (5) – (7) следует требуемое равенство (4). $\square$

**Замечание.** Из леммы 1 и теоремы 1 следует, что на классе непрерывных функций $f \in L_1(\mathbb{R})$, для которых в каждой точке $x \in \mathbb{R}$ существуют конечные односторонние производные $f'_\pm(x)$, преобразования $F$ и $F^{-1}$ являются взамно обратными:

$$F^{-1}\Big[F[f]\Big] = F\Big[F^{-1}[f]\Big] = f.$$

**Лемма 2.** *Пусть функция $f(x)$ интегрируема на любом отрезке $[a,b] \subset \mathbb{R}$. Тогда в случае, когда функция $f(x)$ четная, справедливы равенства*

$$F[f](y) = F^{-1}[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to +\infty} f(x) \, \cos xy \, dx,$$

*а в случае, когда $f$ нечетная, – равенства*

$$F[f](y) = -F^{-1}[f](y) = -i \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to +\infty} f(x) \, \sin xy \, dx.$$

**Доказательство.** Пусть функция $f$ четная. Тогда

$$F[f](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \text{ v. p.} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x) \, e^{-ixy} \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \to +\infty} \int\limits_{-\lambda}^{\lambda} f(x) \, (\cos xy - i \, \sin xy) \, dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \lim_{\lambda \to +\infty} \left( 2 \int\limits_0^{\lambda} f(x) \, \cos xy \, dx \right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to +\infty} f(x) \, \cos xy \, dx,$$

аналогично, $F^{-1}[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{\to +\infty} f(x) \, \cos xy \, dx$.

В случае нечетной функции $f$ лемма доказывается аналогично. $\square$

**Пример 1.** Найти преобразования Фурье функций $f(x) = e^{-|x|}$ и $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

**Решение.** В силу четности функции $f$ по лемме 2 получаем

$$F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \, \cos xy \, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \text{ Re} \int\limits_0^{+\infty} f(x) \, e^{ixy} \, dx =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re} \int\limits_0^{+\infty} e^{(-1+iy)x}\, dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re}\ \left.\frac{e^{(-1+iy)x}}{-1+iy}\right|_{x=0}^{x\to+\infty} =$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re}\ \frac{-1}{-1+iy} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \mathrm{Re}\ \frac{1+iy}{1+y^2} = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{1}{1+y^2}.$$

Следовательно,

$$F[f](y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\ g(y).$$

Поэтому $F^{-1}[g](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ F^{-1}\Big[F[f]\Big](x)$. Поскольку функция $f(x) = e^{-|x|}$ непрерывна и интегрируема на $\mathbb{R}$, а $f'(x)$ кусочно-непрерывна на $\mathbb{R}$, то по теореме 1 имеем $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = f(x)$. Следовательно, $F^{-1}[g](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ f(x)$. В силу четности $g$ имеем $F^{-1}[g](x) = F[g](x)$. Поэтому

$$F[g](x) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ f(x). \tag{10}$$

□

**Замечание.** В силу четности функции $g(y) = \frac{1}{1+y^2}$ согласно лемме 2 формулу (10) можно переписать в виде

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} g(x) \cos xy\, dy = \sqrt{\frac{\pi}{2}}\ f(x),$$

т. е.

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{2}\ e^{-|x|}.$$

Тем самым мы вычислили один из *интегралов Лапласа* $\int\limits_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{1+y^2}\, dy$.

Аналогично, рассматривая преобразования Фурье функций $f(x) = e^{-|x|} \operatorname{sign} x$ и $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$, вычисляется второй интеграл Лапласа:

$$\int\limits_0^{\to+\infty} \frac{y \sin xy}{1+y^2}\, dy = \frac{\pi}{2}\ e^{-|x|} \operatorname{sign} x.$$

**Лемма 3.** *Пусть $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha \neq 0$, $f \in L_1(\mathbb{R})$, $g(x) = f(\alpha x + \beta)$ при всех $x \in \mathbb{R}$. Тогда*

$$F[g](y) = \frac{1}{|\alpha|} e^{i\frac{\beta}{\alpha}y} F[f]\left(\frac{y}{\alpha}\right) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Поскольку $g \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F[g](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(\alpha x + \beta) e^{-ixy}\, dx \quad \overset{u=\alpha x+\beta}{=}$$

$$= \frac{\operatorname{sign} \alpha}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} f(u) e^{-i\frac{u-\beta}{\alpha}y} \frac{du}{\alpha} = \frac{1}{|\alpha|} e^{i\frac{\beta}{\alpha}y} F[f]\left(\frac{y}{\alpha}\right).$$

$\square$

**Теорема 2.** (Преобразование Фурье производной.) *Пусть функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывна, а ее производная $f' \in L_1(\mathbb{R})$ кусочно-непрерывна на любом отрезке $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Тогда*

$$F[f'](y) = iy\, F[f](y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Покажем, что $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Поскольку $f(x) = f(0) + \int\limits_0^x f'(t)\, dt$, то из условия $f' \in L_1(\mathbb{R})$ следует существование конечного предела $A = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = f(0) + \int\limits_0^{+\infty} f'(t)\, dt$.

Если $A \neq 0$, то по определению предела $\exists x_0 :\ \forall x > x_0 \hookrightarrow\ |f(x)| > > |A|/2$. Это противоречит конечности интеграла $\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|\, dx$. Следовательно, $A = 0$. Аналогично доказывается, что $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$.

Так как $f' \in L_1(\mathbb{R})$, то

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f'(x) e^{-ixy}\, dx.$$

Интегрируя по частям и учитывая, что $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$, получаем

$$F[f'](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( f(x)\, e^{-ixy} \Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - \right.$$

$$\left. - \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,(-iy)\, e^{-ixy}\, dx \right) = iy\, F[f](y). \qquad \square$$

**Следствие.** *Пусть функции* $f, f', \ldots, f^{(k-1)}$ *интегрируемы и непрерывны на* $\mathbb{R}$*, а функция* $f^{(k)}$ *интегрируема и кусочно-непрерывна на* $\mathbb{R}$*. Тогда*

$$F[f^{(k)}](y) = (iy)^k F[f](y). \tag{11}$$

*и*

$$F[f](y) = o\left(\frac{1}{y^k}\right), \qquad y \to \infty. \tag{12}$$

**Доказательство** равенства (11) состоит в $k$-кратном применении теоремы 2. В силу теоремы Римана об осцилляции

$$F[f^{(k)}](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f^{(k)}(x)\, e^{-ixy}\, dx \to 0 \quad (y \to \infty).$$

Следовательно, согласно равенству (11) имеем $(iy)^k F[f](y) = F[f^{(k)}](y) \to 0$ при $y \to \infty$, т.е. справедливо соотношение (12). $\square$

**Теорема 3.** (Производная преобразования Фурье.) *Пусть* $f \in L_1(\mathbb{R})$ *и* $x\, f \in L_1(\mathbb{R})$*. Тогда преобразование Фурье функции* $f(x)$ *является непрерывно дифференцируемой на* $\mathbb{R}$ *функцией и*

$$\frac{d}{dy} F[f](y) = F[-ix\, f](y) \qquad \forall y \in \mathbb{R}.$$

**Доказательство.** Фиксируем число $t > 0$. Поскольку функция $g(x, y) := f(x)(-ix)e^{-ixy}$ интегрируема на множестве $\mathbb{R} \times [0, t]$, то по теореме Фубини

$$\int_{-\infty}^{+\infty} dx \int_0^t f(x)(-ix)e^{-ixy} dy = \int_0^t dy \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy} dx. \tag{13}$$

Поскольку $\int\limits_0^t (-ix)e^{-ixy}dy = \int\limits_0^t \left(\frac{d}{dy}e^{-ixy}\right)dy = e^{-ixt} - 1$, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)(-ix)e^{-ixy}dx = \sqrt{2\pi}\, F[-ix\, f](y)$, то равенство (13) можно переписать в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\left(e^{-ixt} - 1\right)dx = \sqrt{2\pi}\int_0^t F[-ix\, f](y)\, dy,$$

то есть при любом $t > 0$ справедливо равенство

$$F[f](t) - F[f](0) = \int_0^t F[-ix\, f](y)\, dy. \tag{14}$$

При $t < 0$ это равенство доказывается аналогично, а при $t = 0$ оно тривиально. Поэтому равенство (14) справедливо при всех $t \in \mathbb{R}$.

В силу теоремы 1 § 2 функция $F[-ix\, f](y)$ непрерывна. Поэтому в правой части равенства (14) стоит непрерывно дифференцируемая функция. Следовательно, функция, стоящая в левой части равенства (14), также непрерывно дифференцируема. Дифференцируя равенство (14) в точке $t = y$, получаем доказываемое равенство. $\square$

**Следствие.** *Пусть функции $f(x), xf(x), \ldots, x^k f(x)$ интегрируемы на $\mathbb{R}$. Тогда преобразование Фурье функции $f$ является $k$ раз непрерывно дифференцируемой функцией и*

$$\frac{d^k}{dy^k}F[f](y) = F[(-ix)^k f](y).$$

**Доказательство** состоит в $k$-кратном применении теоремы 3. $\square$

**Пример 2.** Вычислить преобразование Фурье функции $f(x) = e^{-x^2/2}$.

**Решение.** В силу теоремы о производной преобразования Фурье получаем

$$\frac{d}{dy}F[f](y) = F[-ix\, f](y) = \frac{-i}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2/2}\, e^{-ixy}\, dx =$$

$$= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (x+iy)\, e^{-x^2/2}\, e^{-ixy}\, dx - \frac{y}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\, dx =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\right)'_x dx - y\, F[f](y) =$$

$$= \frac{i}{\sqrt{2\pi}}\; e^{-\frac{x^2}{2}-ixy}\Big|_{x\to-\infty}^{x\to+\infty} - y\, F[f](y) = -y\, F[f](y).$$

Следовательно, функция $F[f](y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению $\frac{d}{dy}F[f](y) = -y\, F[f](y)$. Решая это уравнение, получаем

$$F[f](y) = C\, e^{-y^2/2}, \tag{15}$$

где

$$C = F[f](0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx. \tag{16}$$

Поскольку $e^{-y^2/2} = f(y)$, то равенство (15) можно записать в виде $F[f](y) = C\, f(y)$. Аналогично, справедливо равенство $F^{-1}[f](y) = C\, f(y)$. Следовательно, $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = C^2\, f(x)$. Поскольку функция $f \in L_1(\mathbb{R})$ непрерывно дифференцируема, то по теореме 1 имеем $F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = f(x)$. Следовательно, $C^2 = 1$. Из формулы (16) следует, что $C > 0$. Поэтому $C = 1$. Отсюда и из формулы (15) следует, что

$$F[f](y) = e^{-y^2/2}.$$

**Замечание.** Пример 2 дает еще один способ вычисления интеграла Пуассона: из формулы (16) и равенства $C = 1$ следует, что $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$, а значит,

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, dx = \sqrt{\pi}.$$

## § 2. Преобразование и интеграл Фурье функций нескольких переменных

**Определение.** *Преобразованием Фурье* функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $F[f] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i(x,y)}\, dx,$$

где $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_n y_n$ – скалярное произведение векторов $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$.

*Обратным преобразованием Фурье* функции $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $F^{-1}[f] : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, определяемая формулой

$$F^{-1}[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{i(x,y)}\, dx.$$

**Замечание.** Если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то в силу теоремы 1 § 2 функция $F[f]$ непрерывна на $\mathbb{R}^n$.

**Замечание.** Непосредственно из определения преобразования Фурье следует, что если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то функция $F[f]$ ограничена на $\mathbb{R}^n$ и

$$\|F[f]\|_{C(\mathbb{R}^n)} \le \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}. \tag{1}$$

Аналогичные утверждения справедливы для $F^{-1}[f]$.

Если $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $F[f] \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то *интегралом Фурье* функции $f$ называется интеграл

$$I_f(x) := F^{-1}\Big[F[f]\Big](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](y)\, e^{i(x,y)}\, dy.$$

**Лемма 1.** *Пусть* $\alpha > 0$, $f(x) = e^{-\frac{\alpha|x|^2}{2}}$, $x \in \mathbb{R}^n$. *Тогда*

$$F[f](y) = \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}}\, e^{-\frac{|y|^2}{2\alpha}} \qquad \forall y \in \mathbb{R}^n.$$

**Доказательство.** Заметим, что $f(x) = e^{-\frac{\alpha}{2}(x_1^2 + \ldots + x_n^2)} = \varphi(x_1) \cdots \varphi(x_n)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\varphi(t) = e^{-\frac{\alpha t^2}{2}}$, $t \in \mathbb{R}$. По теореме Фубини

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x_1)\, e^{-ix_1y_1}\, dx_1 \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x_2)\, e^{-ix_2y_2}\, dx_2 \times \ldots$$
$$\ldots \times \int\limits_{\mathbb{R}} \varphi(x_n)\, e^{-ix_ny_n}\, dx_n = F[\varphi](y_1) \ldots F[\varphi](y_n). \qquad (2)$$

Так как $\varphi(t) = \varphi_1(\sqrt{\alpha}t)$, где $\varphi_1(\tau) = e^{-\frac{\tau^2}{2}}$, то по лемме 3 § 1 получаем

$$F[\varphi](u) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} F[\varphi_1]\left(\frac{u}{\sqrt{\alpha}}\right).$$

Согласно примеру 2 § 1 имеем $F[\varphi_1] = \varphi_1$, а значит, $F[\varphi](u) = \frac{1}{\sqrt{\alpha}}\, e^{-\frac{u^2}{2\alpha}}$. Отсюда и из равенства (2) получаем доказываемое равенство. $\square$

**Лемма 2.** (О свертке непрерывной функции с функцией гауссовой плотности.) *Пусть функция* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, *пусть* $\varrho_\alpha(x)$ – *плотность* нормального (гауссова) распределения, *т.е.*

$$\varrho_\alpha(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}}, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

*Тогда*

$$\lim_{\alpha \to +0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_0 - u)\, \varrho_\alpha(u)\, du = f(x_0).$$

**Доказательство.** Согласно теореме Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{|u|^2}{2\alpha}}\, du = \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u_1^2}{2\alpha}}\, du_1 \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u_2^2}{2\alpha}}\, du_2 \ldots \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u_n^2}{2\alpha}}\, du_n = \left(\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}\, dt\right)^n.$$

Используя интеграл Пуассона, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\frac{t^2}{2\alpha}}\, dt \overset{\xi = \frac{t}{\sqrt{2\alpha}}}{=} \sqrt{2\alpha} \int\limits_{\mathbb{R}} e^{-\xi^2}\, d\xi = \sqrt{2\pi\alpha}.$$

Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varrho_\alpha(u)\, du = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-\frac{|u|^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}}\, du = 1. \qquad (3)$$

Следовательно, для доказательства требуемого равенства достаточно доказать, что

$$\lim_{\alpha\to+0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du=0. \tag{4}$$

Фиксируем произвольное число $\varepsilon>0$. В силу непрерывности функции $f$ в точке $x_0$ найдется число $\delta>0$ такое, что $|f(x_0-u)-f(x_0)|<$ $<\varepsilon$ при всех $u\in U_\delta(0)$. Используя равенство (3), имеем

$$\left|\int\limits_{|u|<\delta}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du\right|\le\varepsilon\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varrho_\alpha(u)\,du=\varepsilon. \tag{5}$$

Заметим, что

$$\int\limits_{|u|\ge\delta}\varrho_\alpha(u)\,du \overset{v=\frac{u}{\sqrt{\alpha}}}{=} \int\limits_{|v|\ge\frac{\delta}{\sqrt{\alpha}}}\varrho_1(v)\,dv \xrightarrow{\alpha\to+0} 0,$$

$$\int\limits_{|u|\ge\delta}|f(x_0-u)|\,\varrho_\alpha(u)\,du \le \|f\|_{L_1(\mathbb{R}^n)}\cdot\sup_{|u|\ge\delta}\varrho_\alpha(u) \xrightarrow{\alpha\to+0} 0,$$

так как

$$\sup_{|u|\ge\delta}\varrho_\alpha(u)=\frac{e^{-\frac{\delta^2}{2\alpha}}}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}} \xrightarrow{\alpha\to+0} 0.$$

Поэтому найдется число $\alpha_\varepsilon>0$ такое, что при всех $\alpha\in(0,\alpha_\varepsilon)$

$$\left|\int\limits_{|u|\ge\delta}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du\right|<\varepsilon.$$

Отсюда и из неравенства (5) получаем

$$\left|\int\limits_{\mathbb{R}^n}(f(x_0-u)-f(x_0))\,\varrho_\alpha(u)\,du\right|<2\varepsilon \qquad \forall\alpha\in(0,\alpha_\varepsilon).$$

В силу произвольности $\varepsilon>0$ отсюда вытекает соотношение (4). $\square$

**Теорема 1.** (О взаимно обратных преобразованиях Фурье.) *Пусть функция* $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ *непрерывна в точке* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *и пусть* $F[f] \in \in L_1(\mathbb{R}^n)$. *Тогда*

$$F\left[F^{-1}[f]\right](x_0) = F^{-1}\left[F[f]\right](x_0) = f(x_0).$$

**Доказательство.** Для любого $\alpha \geq 0$ обозначим

$$g_\alpha(y) := F[f](y) \cdot e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2}}, \qquad f_\alpha := F^{-1}[g_\alpha](x_0).$$

Тогда

$$f_0 = F^{-1}[g_0](x_0) = F^{-1}\Big[F[f]\Big](x_0). \tag{6}$$

Так как $\lim\limits_{\alpha\to+0} g_\alpha(y) = g_0(y)$ и $|g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}| = |g_\alpha(y)| \leq |F[f](y)|$ при всех $y \in \mathbb{R}^n$, причем $F[f] \in L_1(\mathbb{R}^n)$, то по теореме Лебега об ограниченной сходимости

$$\lim_{\alpha\to+0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}\, dy = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left(\lim_{\alpha\to+0} g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}\right) dy,$$

а значит,

$$\lim_{\alpha\to+0} f_\alpha = \lim_{\alpha\to+0} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_\alpha(y)\, e^{i(x_0,y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g_0(y)\, e^{i(x_0,y)}\, dy = F^{-1}[g_0](x_0) = f_0.$$

Отсюда и из равенств (6) следует, что для доказательства равенства $F^{-1}\left[F[f]\right](x_0) = f(x_0)$ достаточно доказать, что

$$\lim_{\alpha\to+0} f_\alpha = f(x_0). \tag{7}$$

Так как

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{-i(\xi,y)}\, d\xi,$$

то

$$f_\alpha = F^{-1}[g_\alpha](x_0) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f](y)\, e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} + i(x_0,y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} + i(x_0,y) - i(\xi,y)}\, d\xi.$$

Поскольку модуль подынтегральной функции не превосходит функции $F(y,\xi) := |f(\xi)| \cdot e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2}}$, которая интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, то подынтегральная функция также интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Меняя по теореме Фубини порядок интегрирования, получаем

$$f_\alpha = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, d\xi \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} - i(\xi - x_0, y)}\, dy.$$

В силу леммы 1

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{\alpha|y|^2}{2} - i(\xi - x_0, y)}\, dy = \frac{1}{\alpha^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|\xi - x_0|^2}{2\alpha}}.$$

Поэтому

$$f_\alpha = \frac{1}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(\xi)\, e^{-\frac{|\xi - x_0|^2}{2\alpha}}\, d\xi \quad \overset{u = x_0 - \xi}{=} \quad \frac{1}{(2\pi\alpha)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_0 - u)\, e^{-\frac{|u|^2}{2\alpha}}\, du.$$

Применяя лемму 2, получаем соотношение (7). Следовательно,

$$F^{-1}\left[F[f]\right](x_0) = f(x_0).$$

Замечая, что $F^{-1}[f](y) = F[f](-y)$, приходим к равенству $F\left[F^{-1}[f]\right] = F^{-1}\left[F[f]\right]$. $\square$

## § 3. Пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$

Будем использовать обозначение

$$\mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

**Определение.** *Мультииндексом* $\overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$ называется упорядоченный набор $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n)$ индексов $m_i \in \mathbb{N}_0$.

Для вектора $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ и мультииндекса $\overline{m} = (m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}_0^n$ будем использовать обозначения

$$|\overline{m}| := m_1 + \ldots + m_n, \qquad x^{\overline{m}} = x_1^{m_1} \cdots x_n^{m_n},$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{m_1} \ldots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{m_n} = \frac{\partial^{|\overline{m}|}}{\partial x_1^{m_1} \ldots \partial x_n^{m_n}}.$$

**Определение.** *Пространством Шварца* $S(\mathbb{R}^n)$ называется линейное пространство, состоящее из бесконечно дифференцируемых *быстроубывающих* функций, т.е. таких функций $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| x^{\overline{p}} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi(x) \right| < +\infty \quad \forall \overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n.$$

В частности, $S(\mathbb{R})$ – пространство бесконечно дифференцируемых функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ таких, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} \left| x^p \varphi^{(m)}(x) \right| < +\infty \quad \forall p, m \in \mathbb{N}_0.$$

Операции умножения элемента на число и сложения элементов в $S(\mathbb{R}^n)$ определяются естественным образом:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in S(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow\ (\varphi_1+\varphi_2)(x) = \varphi_1(x)+\varphi_2(x), \qquad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\,\varphi(x).$$

Легко видеть, что данные операции не выводят из пространства $S(\mathbb{R}^n)$.

Заметим, что функция $\varphi(x) = e^{-|x|^2} = e^{-(x_1^2+\ldots+x_n^2)}$ содержится в $S(\mathbb{R}^n)$.

**Лемма 1.** *Пусть* $\alpha > \frac{n}{2}$. *Тогда функция* $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$, *заданная формулой* $f(x) = (1 + |x|^2)^{-\alpha}$, *интегрируема на* $\mathbb{R}^n$.

**Доказательство.** В силу леммы 2 § 3 главы 23

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_0^{+\infty} \mu\,\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \geq y\}\,dy = \int\limits_0^{1} \mu\,\{x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \geq y\}\,dy,$$

где последнее равенство следует из неравенства $f(x) \leq 1$ при всех $x \in \mathbb{R}^n$. Так как $f(x) = g(|x|)$, где $g(r) = (1 + r^2)^{-\alpha}$ – убывающая функция, то $\{x \in \mathbb{R}^n : \ f(x) \geq y\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \leq r(y)\} = B^n_{r(y)}$, где функция $r(y)$ – обратная к $g(r)$. Поскольку $\mu(B^n_{r(y)}) = r^n(y)\mu(B^n_1)$ (см. теорему 5 § 3 главы 23), то

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \int\limits_0^1 \mu(B^n_{r(y)})\,dy = \mu(B^n_1)\int\limits_0^1 r^n(y)\,dy.$$

Переходя к переменной интегрирования $r = r(y)$, получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = \mu(B^n_1)\int\limits_{+\infty}^0 r^n g'(r)\,dr = 2\alpha\mu(B^n_1)\int\limits_0^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^{\alpha+1}}\,dr$$

Поскольку $\frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^{\alpha+1}} \sim \frac{1}{r^{2\alpha+1-n}}$ при $r \to +\infty$ и $\alpha > \frac{n}{2}$, то $\int\limits_0^{+\infty} \frac{r^{n+1}}{(1+r^2)^{\alpha+1}}\,dr < +\infty$. Следовательно, $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx < +\infty$, а значит функция $f$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$. $\square$

**Определение.** Последовательность $\{\varphi_k\}$ функций $\varphi_k \in S(\mathbb{R}^n)$ называется *сходящейся* в $S$ к функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ (пишут $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$ при $k \to \infty$), если для любых $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$

$$x^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi_k(x) \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} x^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi(x) \quad \text{при} \quad k \to \infty,$$

то есть

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left| x^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} (\varphi_k - \varphi)(x)\right| \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

**Лемма 2.** (a) *$S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$;*

(б) *если $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$, то $\varphi_k \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} \varphi$.*

**Доказательство.** Фиксируем целое число $k > \frac{n}{2}$ и рассмотрим многочлен $P(x) := (1+|x|^2)^k$. Согласно лемме 1

$$C_0 := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{P(x)} < +\infty.$$

(а) Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Обозначим

$$C_1 := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |P(x)\varphi(x)|.$$

Из определения пространства $S(\mathbb{R}^n)$ следует, что $C_1 < +\infty$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\varphi(x)|\, dx \le C_1 \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{P(x)} = C_1 C_0 < +\infty,$$

то есть, $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

(б) Пусть $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$. Обозначим $\beta_k := \varphi_k - \varphi$,

$$\varepsilon_k := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |P(x)\beta_k(x)|.$$

Из определения сходимости в пространстве $S(\mathbb{R}^n)$ следует, что $\varepsilon_k \to \to 0$ при $k \to \infty$. Поэтому

$$\|\beta_k\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\beta_k(x)|\, dx \le \varepsilon_k \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{dx}{P(x)} = \varepsilon_k C_0 \to 0 \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Следовательно, $\beta_k \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} 0$, а значит, $\varphi_k \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} \varphi$. □

**Лемма 3.** *Пусть $f \in S(\mathbb{R}^n)$ и пусть $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$. Тогда для любого $y \in \mathbb{R}^n$ справедливо равенство*

$$(iy)^{\overline{p}} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[f](y) = F\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}} \left((-ix)^{\overline{m}} f\right)\right](y).$$

**Доказательство.** Для любого индекса $k \in \overline{1,n}$ через $F_k$ обозначим преобразование Фурье по $k$-ой координате. Если функция $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n)$ интегрируема по координате $x_k$ на $\mathbb{R}$, то

$$F_k[f](x_1, \ldots, x_{k-1}, y_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-ix_k y_k}\, dx_k.$$

Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то согласно лемме 2 имеем $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Поэтому для интеграла

$$F[f](y) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x)\, e^{-i(x,y)}\, dx$$

можно применить теорему Фубини и, следовательно,

$$F[f](y_1, \ldots, y_n) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix_1 y_1} dx_1 \ldots \int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \ldots, x_n)\, e^{-ix_n y_n} dx_n =$$

$$= (F_1 \circ \ldots \circ F_n)[f](y_1, \ldots, y_n).$$

Таким образом,

$$F[f] = (F_1 \circ \ldots \circ F_n)[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Если $f \in S(\mathbb{R}^n)$, то $x_k f \in S(\mathbb{R}^n)$. Поэтому согласно теореме о производной пребразования Фурье

$$F_k[(-ix_k)f] = \frac{\partial}{\partial y_k} F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \quad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{2}$$

По определению преобразования $F_k$ имеем

$$F_k[x_j f] = x_j F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall j \neq k. \tag{3}$$

В силу теоремы о дифференцировании собственного интеграла по параметру

$$F_k\left[\frac{\partial}{\partial x_j} f\right] = \frac{\partial}{\partial x_j} F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall j \neq k. \tag{4}$$

Из равенств (1)–(4) следует, что

$$F[(-ix_k)f] = \frac{\partial}{\partial y_k} F[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{5}$$

Согласно теореме о преобразовании Фурье производной

$$F_k\left[\frac{\partial}{\partial x_k} f\right] = (iy_k) F_k[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall k \in \overline{1, n}.$$

Отсюда и из равенств (1), (3), (4) следует, что

$$F\left[\frac{\partial}{\partial x_k} f\right] = (iy_k) F[f] \qquad \forall f \in S(\mathbb{R}^n) \qquad \forall k \in \overline{1, n}. \tag{6}$$

Из равенств (5), (6) вытекает доказываемое утверждение. □

**Теорема 1.** (а) *Преобразование Фурье любую функцию* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *переводит в функцию пространства* $S(\mathbb{R}^n)$.

(б) *Преобразование Фурье* $F : S(\mathbb{R}^n) \to S(\mathbb{R}^n)$ *непрерывно в смысле сходимости в* $S(\mathbb{R}^n)$, *т.е. если* $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$, *то* $F[\varphi_k] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} F[\varphi]$.

(в) *Для любой функции* $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ *справедливы формулы обращения*

$$F\left[F^{-1}[\varphi]\right] = F^{-1}\left[F[\varphi]\right] = \varphi.$$

**Доказательство.** (а). Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$; $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$. Тогда $\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}}\left((-ix)^{\overline{m}}\varphi\right) \in S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда в силу неравенства (1) § 2 следует ограниченность функции $F\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}}\left((-ix)^{\overline{m}}\varphi\right)\right]$ на $\mathbb{R}^n$. Поэтому согласно лемме 3

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|(iy)^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[\varphi](y)\right| < +\infty.$$

Следовательно, $F[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n)$.

(б). Пусть $\varphi_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} \varphi$. Фиксируем произвольные мультиндексы $\overline{p}, \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n$. Обозначим

$$\beta_k := \varphi_k - \varphi, \qquad g_k(x) := \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}}\left((-ix)^{\overline{m}}\beta_k\right)(x).$$

Поскольку $\beta_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$, то по определению сходимости в $S(\mathbb{R}^n)$ имеем $g_k \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$. Отсюда в силу леммы 2(б) следует, что $g_k \xrightarrow{L_1(\mathbb{R}^n)} 0$. Поэтому в силу неравенства (1) § 2 получаем $F[g_k] \xrightarrow{C(\mathbb{R}^n)} 0$. Применяя лемму 3 к функциям $f = \beta_k$, получаем равенства

$$(iy)^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[\beta_k](y) = F[g_k](y).$$

Следовательно,

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^n}\left|y^{\overline{p}}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{m}} F[\beta_k](y)\right| = \|F[g_k](y)\|_{C(\mathbb{R}^n)} \to 0.$$

Это означает, что $F[\beta_k] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} 0$, то есть, $F[\varphi_k] \xrightarrow{S(\mathbb{R}^n)} F[\varphi]$.

(в). Пусть $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. В силу пункта (а) настоящей теоремы и леммы 2(а) имеем $F[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n) \subset L_1(\mathbb{R}^n)$. Отсюда по теореме о взаимно обратных преобразованиях Фурье получаем формулы обращения. $\square$

## § 4. Свертка и преобразование Фурье

**Теорема 1.** (Тонелли.) *Пусть $X$ и $Y$ – измеримые множества в $\mathbb{R}^n_x$ и $\mathbb{R}^m_y$ соответственно. Пусть функция $f : X \times Y \to [0, +\infty]$ измерима. Тогда*

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy.$$

**Доказательство.** Для любого $k \in \mathbb{N}$ определим функцию

$$f_k(x,y) := \begin{cases} f(x,y), & |x| \le k,\ |y| \le k,\ |f(x,y)| \le k, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Так как функция $f_k$ интегрируема на $X \times Y$, то согласно теореме Фубини

$$\int\limits_{X\times Y} f_k(x,y)\,dx\,dy = \int\limits_X dx \int\limits_Y f_k(x,y)\,dy \qquad \forall k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

В силу теоремы Б. Леви о монотонной сходимости имеем

$$\int\limits_Y f(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_Y f_k(x,y)\,dy \qquad \forall x \in X.$$

Поэтому, еще раз применяя теорему Б. Леви, получаем

$$\int\limits_X dx \int\limits_Y f(x,y)\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_X dx \int\limits_Y f_k(x,y)\,dy.$$

Третий раз применяя теорему Б. Леви, можно написать

$$\int\limits_{X\times Y} f(x,y)\,dx\,dy = \lim_{k\to\infty} \int\limits_{X\times Y} f_k(x,y)\,dx\,dy.$$

Поэтому, переходя к пределу в равенстве (1), получаем доказываемое равенство. $\square$

**Теорема 2.** *Пусть $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Тогда*

(1) *функция $F(x,y) := f(x-y)\,g(y)$ интегрируема на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$;*

(2) *для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$ существует конечный интеграл*

$$h(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy; \tag{2}$$

(3) *$h \in L_1(\mathbb{R}^n)$.*

**Доказательство.** Для любого $x \in \mathbb{R}^n$ определим

$$\varphi(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dy \in [0, +\infty].$$

По теореме Тонелли

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} |f(x-y)g(y)|\,dxdy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(x-y)|\,dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |g(y)|\,dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f(z)|\,dz < +\infty.$$

Поэтому $F \in L_1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ и $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Согласно лемме 2 §6 главы 8 имеем $\varphi(x) < +\infty$ для почти всех $x \in X$. Если $\varphi(x) < +\infty$, то в силу теоремы 3 §7 главы 8 интеграл (2) существует. Так как функция $h$ измерима (как предел интегралов от счетно-ступенчатых измеримых функций) и $\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h(x)|\,dx \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\,dx < +\infty$, то $h \in L_1(\mathbb{R}^n)$. □

**Определение.** *Сверткой* функций $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ и $g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ называется функция $f * g \in L_1(\mathbb{R}^n)$, определяемая формулой

$$(f * g)(x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x-y)\,g(y)\,dy.$$

Корректность этого определения следует из теоремы 2.

**Замечание.** Согласно лемме 2 § 3 главы 22 для частичной суммы ряда Фурье $2\pi$-периодической функции $f \in L_1[-\pi, \pi]$ справедлива формула

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} f(x-t)\, D_n(t)\, dt,$$

т.е. частичная сумма ряда Фурье равна свертке функции $f$ с ядром Дирихле $D_n$.

Свертка функций имеет многочисленные применения в математической физике, теории вероятностей и других разделах математики.

**Замечание.** Свертка функций обладает следующими свойствам:

(1) коммутативность: $g * f = f * g$;

(2) дистрибутивность: $(f_1 + f_2) * g = f_1 * g + f_2 * g$;

(3) ассоциативность: $(f * g) * h = f * (g * h)$.

Для доказательства свойства коммутативности достаточно сделать замену переменной интегрирования: $z = x - y$. Свойство дистрибутивности следует из линейности интеграла. Свойство ассоциативности – из теоремы Фубини.

**Теорема 3.** (Преобразование Фурье от свертки.) *Пусть* $f, g \in$ $\in L_1(\mathbb{R}^n)$*. Тогда преобразование Фурье свертки функций* $f$ *и* $g$ *равно произведению преобразований Фурье этих функций, умноженному на коэффициент* $(2\pi)^{\frac{n}{2}}$*:*

$$F[f * g] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot F[f] \cdot F[g].$$

**Доказательство.** По определению преобразования Фурье и свертки для любого $x \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$F[f * g](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} (f * g)(y)\, e^{-i(x,y)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\, g(z)\, e^{-i(x,y)}\, dz.$$

В силу теоремы 2 функция $f(y-z)\, g(z)$, а значит, и функция $f(y-z)\, g(z)\, e^{-i(x,y)}$ интегрируемы по $(y, z)$ на $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Поэтому согласно теореме Фубини

$$F[f * g](x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z)\, e^{-i(x,z)}\, dz \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y-z)\, e^{-i(x,y-z)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} g(z)\, e^{-i(x,z)}\, dz \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(t)\, e^{-i(x,t)}\, dt =$$

$$= (2\pi)^{\frac{n}{2}} \cdot F[f](x) \cdot F[g](x).$$

$\square$

Глава 25

# ОБОБЩЕННЫЕ ФУНКЦИИ (РАСПРЕДЕЛЕНИЯ)

Рассмотрим последовательность функций

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2n}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2n}, +\infty\right), \\ n, & x \in \left(-\frac{1}{2n}, \frac{1}{2n}\right). \end{cases} \tag{1}$$

Поскольку $f_n(x) \geq 0$ и $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_n(x)\,dx = 1$, то функцию $f_n(x)$ можно интерпретировать как линейную плотность однородного стержня массы 1 и длины $\frac{1}{n}$. Уменьшая длину стержня в пределе при $n \to \infty$, получим материальную точку массы 1. Поскольку $f_n(0) = n \to +\infty$, то в классе обычных функций не существует предела $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Далее мы будем рассматривать пространство обобщенных функций, которое наряду с обычными функциями содержит, например, $\delta$-функцию Дира́ка. $\delta$-функцию Дирака можно интерпретировать как плотность материальной точки массы 1. При этом для последовательности функций (1) выполняется соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = \delta(x)$ в смысле обобщенных функций.

Приведем еще один аргумент в пользу рассмотрения обобщенных функций. Многие часто встречающиеся функции (например, $f(x) = |x|$) не дифференцируемы в некоторых точках. Одним из достоинств пространства обощенных функций является то, что для любой обощенной функции (в том числе и для $f(x) = |x|$ и для $f(x) = \delta(x)$) существуют производные любого порядка, которые также являются обобщенными функциями.

## § 1. Пространство $\mathcal{D}$ основных (пробных) функций

Напомним, что функция $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется финитной, если ее носитель

$$\operatorname{supp} \varphi = \overline{\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \varphi(x) \neq 0\}}.$$

является компактом.

**Определение.** *Пространством пробных (основных) функций* $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ называется линейное пространство, элементами которого являются финитные бесконечно дифференцируемые функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$.

Операции умножения элемента на число и сложения элементов в $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ определяются естественным образом:

$$\forall \varphi_1, \varphi_2, \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{C},\ x \in \mathbb{R}^n \hookrightarrow$$

$$\hookrightarrow\ (\varphi_1 + \varphi_2)(x) = \varphi_1(x) + \varphi_2(x), \qquad (\lambda\varphi)(x) = \lambda\,\varphi(x).$$

Легко видеть, что данные операции не выводят из пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$.

Элементом пространства $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является, например, функция

$$\varphi(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2 - |x|^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a. \end{cases}$$

**Определение.** Будем говорить, что последовательность функций $\varphi_k \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *сходится* к функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ *в пространстве* $\mathcal{D}$, и писать $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ при $k \to \infty$, если

1) множество $\bigcup\limits_{k \in \mathbb{N}} \operatorname{supp} \varphi_k$ ограничено и

2) $\forall \overline{m} \in \mathbb{N}_0^n \hookrightarrow\ \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi_k(x) \underset{x \in \mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{m}} \varphi(x)$ при $k \to \infty$.

## § 2. Пространство $\mathcal{D}'$ обобщенных функций

**Определение.** *Функционалом* $f$ называется отображение $f : \Phi \to \mathbb{C}$, которое каждому элементу $\varphi$ бесконечномерного пространства $\Phi$ ставит в соответствие число $(f, \varphi) \in \mathbb{C}$, равное значению функционала на элементе $\varphi \in \Phi$.

Рассмотрим функционалы, определенные на пространстве пробных функций $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Функционал $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ называется *линейным*, если

$$\forall \varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \hookrightarrow\ (f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 (f, \varphi_1) + \lambda_2 (f, \varphi_2).$$

Функционал $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ называется *непрерывным*, если для любой последовательности пробных функций $\{\varphi_k\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, сходящейся к пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ в пространстве $\mathcal{D}$, числовая последовательность $(f, \varphi_k)$ сходится к числу $(f, \varphi)$:

$$\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi \quad \text{при} \quad k \to \infty \quad \Longrightarrow \quad (f, \varphi_k) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

**Определение.** *Пространством обобщенных функций (или распределений)* $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ называется множество линейных непрерывных функционалов $f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$. Пространство $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является линейным пространством, операции в котором определяются естественным образом:

$$\forall f, f_1, f_2 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow$$
$$\hookrightarrow\ (f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \quad (\lambda f, \varphi) = \lambda (f, \varphi).$$

**Определение.** Функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называется *локально интегрируемой*, если она интегрируема (по Лебегу) на любом компакте $\Omega \subset \mathbb{R}^n$.

В частности, непрерывные функции $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ локально интегрируемы.

**Лемма 1.** *Если функционал $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ порожден локально интегрируемой функцией $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ согласно формуле*

$$(f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n), \tag{$*$}$$

*то $f$ является распределением из пространства $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.*

**Доказательство.** Поскольку функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ финитна, то ее носитель $\Omega := \operatorname{supp} \varphi$ является компактом. Из интегрируемости на компакте $\Omega$ функции $f_0$ и непрерывности функции $\varphi$ следует существование интеграла $(f,\varphi) = \int\limits_{\Omega} f_0(x)\,\varphi(x)\,dx$. Линейность функционала $f$ следует из свойства линейности интеграла. Покажем непрерывность функционала $f$. Пусть $\varphi_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \varphi$ при $k\to\infty$. Тогда существует компакт $\Omega$, содержащий носители всех функций $\varphi_k$, и, кроме того, $\varphi_k(x) \underset{x\in\mathbb{R}^n}{\rightrightarrows} \varphi(x)$ при $k\to\infty$. Следовательно,

$$|(f,\varphi_k)-(f,\varphi)| = \left|\int\limits_{\Omega} f_0(x)\,(\varphi_k(x)-\varphi(x))\,dx\right| \leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{\Omega} |f_0(x)|\,dx\right) \max_{x\in\Omega}|\varphi_k(x)-\varphi(x)| \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Таким образом, функционал $f:\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{C}$ линеен и непрерывен, следовательно, $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. $\square$

**Определение.** *Регулярным функционалом* называется функционал $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, порожденный некоторой локально интегрируемой функцией $f_0:\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$ согласно формуле $(*)$.

**Лемма 2.** *Пусть $\Pi$ – клетка в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого числа $\varepsilon>0$ найдется пробная функция $\varphi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$\varphi:\mathbb{R}^n\to[0,1], \quad \operatorname{supp}\varphi\subset\Pi, \quad \int\limits_{\Pi}\varphi(x)\,dx > \mu(\Pi)-\varepsilon.$$

**Доказательство.** Согласно определению клетки $\Pi=\omega_1\times\ldots\times\omega_n$, где $\omega_k$ – ограниченные числовые промежутки с концами $a_k, b_k$. Тогда $(a_k,b_k)\subset\omega_k\subset[a_k,b_k]$. Если $\mu(\Pi)=0$, то достаточно взять $\varphi(x)=0$. Пусть $\mu(\Pi)>0$, а значит, $b_k>a_k$ при всех $k\in\overline{1,n}$. Положим

$$\delta_0 := \frac{1}{2}\min_{k\in\overline{1,n}}(b_k-a_k).$$

Фиксируем произвольное число $\delta \in (0, \delta_0)$. В силу леммы леммы 1 § 2 главы 14 для любого $k \in \overline{1, n}$ существует гладкая функция $\beta_k \in \in C^\infty(\mathbb{R}, [0, 1])$ такая, что $\operatorname{supp} \beta_k \subset (a_k, b_k)$ и $\beta_k(t) = 1$ при $t \in [a_k + + \delta, b_k - \delta]$. Положим

$$\varphi(x) := \beta_1(x_1) \cdots \beta_n(x_n) \qquad \forall x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Тогда $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$, $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \Pi$ и

$$\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in \Pi_\delta := [a_1 + \delta, b_1 - \delta] \times \ldots \times [a_n + \delta, b_n - \delta].$$

Поэтому

$$\int\limits_{\Pi} \varphi(x)\, dx \geq \int\limits_{\Pi_\delta} \varphi(x)\, dx = \mu(\Pi_\delta) = (b_1 - a_1 - 2\delta) \cdots (b_n - a_n - 2\delta).$$

Поскольку $\mu(\Pi_\delta) \xrightarrow{\delta \to +0} (b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) = \mu(\Pi)$, то число $\delta \in \in (0, \delta_0)$ можно выбрать так, что $\mu(\Pi_\delta) > \mu(\Pi) - \varepsilon$. Следовательно, $\int\limits_{\Pi} \varphi(x)\, dx > \mu(\Pi) - \varepsilon$. $\square$

**Лемма 3.** *Пусть функция $\gamma : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ является линейной комбинацией индикаторных функций клеток в $\mathbb{R}^n$. Тогда для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется пробная функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такая, что*

$$\|\gamma - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \varepsilon, \qquad \operatorname{supp} \varphi \subset \operatorname{supp} \gamma, \qquad \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \leq \sup_{x \in \mathbb{R}^n} |\gamma(x)|.$$

**Доказательство.** По условию леммы найдутся числа $\gamma_k \in \mathbb{C}$ и клетки $\Pi_k \subset \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\gamma(x) = \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k \cdot \mathbf{1}_{\Pi_k}(x), \qquad \forall x \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Согласно замечанию после теоремы 2 § 2 главы 22 клетки $\Pi_k$ можно считать попарно непересекающимися. Отбрасывая нулевые слагаемые, будем считать, что $\gamma_k \neq 0$ при $k \in \overline{1, k_0}$. В силу леммы 2 для каждого $k \in \overline{1, k_0}$ найдется пробная функция

$$\varphi_k \in C^\infty(\mathbb{R}^n, [0, 1]) : \qquad \operatorname{supp} \varphi_k \subset \Pi_k,$$

$$\int\limits_{\Pi_k} \varphi_k(x)\,dx > \mu(\Pi_k) - \frac{\varepsilon}{k_0 \cdot |\gamma_k|}. \tag{2}$$

Положим

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{k_0} \gamma_k \cdot \varphi_k(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3}$$

Так как клетки $\Pi_k$ попарно не пересекаются, то

$$\operatorname{supp}\,\varphi \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \operatorname{supp}\,\varphi_k \subset \bigcup_{k=1}^{k_0} \Pi_k = \operatorname{supp}\,\gamma,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \le \max_{k\in\overline{1,k_0}} |\gamma_k| = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\gamma(x)|,$$

$$\|\gamma-\varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \int\limits_{\mathbb{R}^n} |\gamma(x)-\varphi(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{\Pi_k} |\gamma(x)-\varphi(x)|\,dx \overset{(1),(3)}{=}$$

$$= \sum_{k=1}^{k_0} \int\limits_{\Pi_k} |\gamma_k|\cdot|1-\varphi_k(x)|\,dx = \sum_{k=1}^{k_0} |\gamma_k| \left( \mu(\Pi_k) - \int\limits_{\Pi_k} \varphi_k(x)\,dx \right) \overset{(2)}{\le}$$

$$\le \sum_{k=1}^{k_0} |\gamma_k| \cdot \frac{\varepsilon}{k_0 \cdot |\gamma_k|} = \varepsilon.$$

□

Далее нам понадобится следующая теорема, которую можно рассматривать как обобщение основной леммы вариационного исчисления, изучаемой в курсе дифференциальных уравнений.

**Теорема 1.** *Пусть функционалы, порожденные локально интегрируемыми функциями $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ и $g_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ в соответствии с формулой $(*)$, совпадают, т. е.*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g_0(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n).$$

*Тогда значения функций $f_0$ и $g_0$ совпадают почти всюду на $\mathbb{R}^n$.*

**Доказательство.** Обозначим $h_0(x) := f_0(x) - g_0(x)$. Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_0(x)\,\varphi(x)\,dx = 0 \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

Требуется доказать, что $h_0(x) = 0$ почти всюду на $\mathbb{R}^n$. Предположим противное. Тогда согласно лемме 3 § 1 главы 14

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_0(x)|\,dx > 0. \tag{5}$$

Для того, чтобы показать основную идею доказательства предположим сначала, что соотношение (4) справедливо для любой измеримой функции $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Тогда, применяя соотношение (4) к функции

$$\varphi_0(x) := \begin{cases} \frac{\overline{h_0(x)}}{|h_0(x)|}, & h_0(x) \neq 0, \\ 0, & h_0(x) = 0, \end{cases}$$

где $\overline{h_0(x)}$ – число, комплексно сопряженное числу $h_0(x)$, получим

$$0 = \int_{\mathbb{R}^n} h_0(x)\,\varphi_0(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} |h_0(x)|\,dx,$$

что противоречит неравенству (5).

Проведем теперь строгое доказательство. Для любого $m \in \mathbb{N}$ рассмотрим куб $Q_m := [-m, m]^n = [-m, m] \times \ldots \times [-m, m]$. В силу непрерывности интеграла Лебега по множествам интегрирования

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} |h_0(x)|\,dx = \lim_{m\to\infty} \int\limits_{Q_m} |h_0(x)|\,dx.$$

Поэтому согласно неравенству (5) найдется индекс $m \in \mathbb{N}$ такой, что

$$\int\limits_{Q_m} |h_0(x)|\,dx = C > 0. \tag{6}$$

Поскольку $h_0 \in L_1(Q_m)$, то в силу теоремы 2 § 2 главы 22 существует функция $\beta \in L_1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, равная линейной комбинации индикаторных функций клеток и такая, что

$$\|h_0 - \beta\|_{L_1(Q_m)} < \frac{C}{4}. \tag{7}$$

Полагая $\beta(x) = 0$ при $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q_m$, получим, что $\operatorname{supp} \beta \subset Q_m$. Заметим, что $M_\beta := \sup\limits_{x\in\mathbb{R}^n} |\beta(x)| < +\infty$. Обозначим

$$\gamma(x) := \begin{cases} \frac{\overline{\beta(x)}}{|\beta(x)|}, & \beta(x) \neq 0, \\ 0, & \beta(x) = 0, \end{cases} \tag{8}$$

где $\overline{\beta(x)}$ – число, комплексно сопряженное числу $\beta(x)$.

В силу леммы 3 найдется пробная функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ такая, что

$$\|\gamma - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} < \frac{C}{4M_\beta}, \tag{9}$$

$$\operatorname{supp} \varphi \subset \operatorname{supp} \gamma \subset \operatorname{supp} \beta \subset Q_m,$$

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \le \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\gamma(x)| \le 1.$$

Заметим, что

$$0 \overset{(4)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^n} h_0(x)\,\varphi(x)\,dx \overset{\operatorname{supp}\varphi\subset Q_m}{=} \int\limits_{Q_m} h_0(x)\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{Q_m} \beta(x)\,\varphi(x)\,dx + \int\limits_{Q_m} (h_0(x) - \beta(x))\,\varphi(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{Q_m} \beta(x)\,\gamma(x)\,dx + \int\limits_{Q_m} \beta(x)\,(\varphi(x) - \gamma(x))\,dx + \int\limits_{Q_m} (h_0(x) - \beta(x))\,\varphi(x)\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{Q_m} |\beta(x)|\,dx \overset{(8)}{=} \int\limits_{Q_m} \beta(x)\,\gamma(x)\,dx \le$$

$$\le \left| \int\limits_{Q_m} \beta(x)\,(\varphi(x) - \gamma(x))\,dx \right| + \left| \int\limits_{Q_m} (h_0(x) - \beta(x))\,\varphi(x)\,dx \right| \le$$

$$\leq \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\beta(x)| \cdot \|\gamma - \varphi\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} + \sup_{x\in\mathbb{R}^n} |\varphi(x)| \cdot \|h_0 - \beta\|_{L_1(Q_m)} <$$

$$\overset{(7),\,(9)}{<} \quad M_\beta \cdot \frac{C}{4M_\beta} + \frac{C}{4} = \frac{C}{2}.$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{Q_m} |\beta(x)|\,dx = \|\beta\|_{L_1(Q_m)} \geq \|h_0\|_{L_1(Q_m)} - \|h_0 - \beta\|_{L_1(Q_m)} \overset{(6),\,(7)}{\geq} \frac{3}{4}C.$$

Получено неравенство $\frac{3}{4}C < \frac{C}{2}$, которое противоречит неравенству $C > 0$. $\square$

**Замечание.** Из теоремы 1 следует, что если не различать функции, которые отличаются лишь на множестве лебеговой меры нуль, то формула $(*)$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между обычными локально интегрируемыми функциями $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ и регулярными функционалами $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$. Когда говорят «рассмотрим функцию $f(x)$ как обобщенную функцию», имеют в виду, что рассматривается регулярный функционал $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, порожденный функцией $f_0 = f$ по формуле $(*)$. При этом функционал, как правило, обозначают той же буквой, что и породившую его обычную функцию, отождествляя обычные функции с регулярными функционалами. В этом смысле любая обычная локально интегрируемая функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ содержится в пространстве $D'(\mathbb{R}^n)$.

**Определение.** Функционалы $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, не являющиеся регулярными, называются *сингулярными*.

**Определение.** *$\delta$-функцией Дирака* называется функционал $\delta$, определяемый по формуле

$$(\delta, \varphi) = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n).$$

Легко видеть, что функционал $\delta$ линеен и непрерывен, т.е. $\delta \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

**Лемма 4.** *Функционал $\delta$ является сингулярным.*

**Доказательство.** Предположим противное: существует локально интегрируемая функция $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ такая, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,\varphi(x)\,dx = \varphi(0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку для пробной функции $\varphi_a(x) = \begin{cases} e^{-\frac{a^2}{a^2-|x|^2}}, & |x| < a, \\ 0, & |x| \geq a \end{cases}$ справедливо равенство $\sup\limits_{x\in\mathbb{R}} \varphi_a(x) = \varphi_a(0) = e^{-1}$, то согласно нашему предположению для любого числа $a > 0$ имеем

$$\varphi_a(0) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\,\varphi_a(x)\,dx = \int\limits_{|x|\leq a} f_0(x)\,\varphi_a(x)\,dx \leq \varphi_a(0) \int\limits_{|x|\leq a} |f_0(x)| dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{|x|\leq a} |f_0(x)|\,dx \geq 1 \qquad \forall a > 0. \tag{10}$$

С другой стороны, в силу непрерывности интеграла по множествам интегрирования

$$\int\limits_{|x|\leq 1} |f_0(x)|\,dx = \int\limits_{0<|x|\leq 1} |f_0(x)|\,dx = \lim_{a\to+0} \int\limits_{a<|x|\leq 1} |f_0(x)|\,dx$$

и, следовательно,

$$\lim_{a\to+0} \int\limits_{|x|\leq a} |f_0(x)|\,dx = 0,$$

что противоречит соотношению (10). $\square$

Ради единства формы записи сингулярные функционалы также записывают как обычные функции (например, $\delta(x)$), хотя сингулярному функционалу не соответствует никакая обычная функция. Такая запись еще удобна, например, при рассмотрении *смещенной $\delta$-функции* $\delta(x - x_0)$, которая определяется формулой

$$(\delta(x - x_0), \varphi) = \varphi(x_0) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n).$$

## § 3. Сходимость в пространстве $\mathcal{D}'$

**Определение.** Будем говорить, что последовательность распределений $f_k \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *сходится* к распределению $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *в пространстве* $\mathcal{D}'$, и писать $f_k(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} f(x)$ при $k \to \infty$, если

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ (f_k, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Аналогично, запись $f_\varepsilon(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} f(x)$ при $\varepsilon \to +0$ означает, что

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow \ (f_\varepsilon, \varphi) \to (f, \varphi) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

**Пример 1.** Доказать, что $f_k(x) \xrightarrow{\mathcal{D}'} \delta(x)$ при $k \to \infty$, где

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & x \in \left(-\infty, -\frac{1}{2k}\right) \bigcup \left(\frac{1}{2k}, +\infty\right), \\ k, & x \in \left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right). \end{cases}$$

**Решение.** Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Тогда $(f_k, \varphi) = k \int\limits_{-1/(2k)}^{1/(2k)} \varphi(x)\, dx$. В силу интегральной теоремы о среднем

$$\forall k \in \mathbb{N} \quad \exists \xi_k \in \left(-\frac{1}{2k}, \frac{1}{2k}\right): \qquad \int\limits_{-1/(2k)}^{1/(2k)} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{k}\, \varphi(\xi_k).$$

Поскольку $\xi_k \to 0$ при $k \to \infty$, то в силу непрерывности функции $\varphi$ имеем $(f_k, \varphi) = \varphi(\xi_k) \to \varphi(0)$ при $k \to \infty$. Итак, $\forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}) \hookrightarrow$ $\to \ (f_k, \varphi) \to \varphi(0) = (\delta, \varphi)$ при $k \to \infty$. $\square$

## § 4. Произведение обобщенной функции на бесконечно дифференцируемую функцию

**Определение.** Пусть функция $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ бесконечно дифференцируема, а $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ – распределение. *Произведением* $\psi f$ называется распределение, определяемое по формуле

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi) \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Поскольку произведение бесконечно дифференцируемой функции $\psi$ на финитную бесконечно дифференцируемую функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ является финитной бесконечно дифференцируемой функцией, то $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Следовательно, имеет смысл выражение $(f, \psi\varphi)$, а значит, функционал $\psi f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ определен корректно. Легко видеть, что функционал $\psi f$, определенный по формуле (1), линеен и непрерывен, т. е. $\psi f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

**Лемма 1.** *Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$, а функционал $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ является регулярным. Тогда произведение $\psi(x)\, f(x)$ в смысле обобщенных функций совпадает с произведением $\psi(x)\, f(x)$ в смысле обычных функций. Иными словами, если функционал $f$ порожден локально интегрируемой функцией $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ согласно формуле $(*)$, то функционал $\psi f$ порожден функцией $\psi f_0$.*

**Доказательство.** Требуется доказать, что

$$(\psi f, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \psi(x)\, f_0(x)\, \varphi(x)\, dx \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Подставляя в формулу $(*)$ функцию $\psi\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ вместо функции $\varphi$, получим $(f, \psi\varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\, \psi(x)\, \varphi(x)\, dx$, что вместе с равенством (1) доказывает формулу (2). □

**Пример 1.** Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Покажем, что

$$\psi(x)\, \delta(x) = \psi(0)\, \delta(x).$$

**Решение.** Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$(\psi\delta, \varphi) = (\delta, \psi\varphi) = \psi(0)\, \varphi(0) = \psi(0)\, (\delta, \varphi). \qquad \square$$

## § 5. Производная обобщенной функции

**Определение.** *Производной* распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ называется распределение $f' \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$, определяемое по формуле

$$(f', \varphi) = -(f, \varphi') \qquad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}).$$

Это определение представляет собой частный случай следующего.

**Определение.** *Производная* $\frac{\partial}{\partial x_i}f$ распределения $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i}f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{1}$$

Поскольку для любой финитной бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ ее производная $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$ также финитна и бесконечно дифференцируема, то имеет смысл выражение $\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)$. Следовательно, функционал $\frac{\partial}{\partial x_i}f : \mathcal{D}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ определен корректно. Легко видеть, что функционал $\frac{\partial}{\partial x_i}f$, определенный по формуле (1), линеен и непрерывен, т. е. $\frac{\partial}{\partial x_i}f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$.

**Лемма 1.** *Пусть функция $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Тогда производная $\frac{\partial}{\partial x_i}f_0(x)$ в обычном смысле совпадает с производной $\frac{\partial}{\partial x_i}f_0(x)$ в смысле обобщенных функций. Иными словами, если функционал $f$ порожден функцией $f_0 \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ согласно формуле $(*)$, то функционал $\frac{\partial}{\partial x_i}f$ порожден функцией $\frac{\partial}{\partial x_i}f_0$.*

**Доказательство.** Без потери общности будем считать, что $i = 1$. Требуется доказать, что

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f, \varphi\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1}\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Согласно формуле (1) имеем

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_1}f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_1}\varphi\right) = -\int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\frac{\partial\varphi(x)}{\partial x_1}\,dx.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1}\,\varphi(x)\,dx - \left(\frac{\partial}{\partial x_1}f, \varphi\right) =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1}\, \varphi(x) + f_0(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_1} \right) dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\, dx,$$

где $h = f_0 \varphi \in C^1(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. В силу теоремы Фубини

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} dx_2 \dots dx_n \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\, dx_1.$$

Используя финитность функции $h$ и формулу Ньютона–Лейбница, получаем $\int\limits_{\mathbb{R}} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\, dx_1 = 0$. Поэтому

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_0(x)}{\partial x_1}\, \varphi(x)\, dx - \left( \frac{\partial}{\partial x_1} f, \varphi \right) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\, dx = 0.$$

Таким образом, равенство (2) доказано. □

**Лемма 2.** *Пусть* $f_k \xrightarrow{\mathcal{D}'} f$ *при* $k \to \infty$. *Тогда* $f_k' \xrightarrow{\mathcal{D}'} f'$ *при* $k \to \infty$.

**Доказательство.** Пусть $\varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R})$. Тогда

$$(f_k', \varphi) = -(f_k, \varphi') \xrightarrow{k \to \infty} -(f, \varphi') = (f', \varphi).$$ □

**Лемма 3.** *Для любой функции* $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ *и для любого распределения* $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ *справедлива формула Лейбница*

$$\frac{\partial (\psi\, f)}{\partial x_i} = \psi\, \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, f.$$

**Доказательство.** Пусть $\varphi \in \mathcal{D}\,(\mathbb{R}^n)$. Тогда

$$\left( \frac{\partial (\psi\, f)}{\partial x_i}, \varphi \right) = -\left( \psi f, \frac{\partial}{\partial x_i} \varphi \right) = -\left( f, \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right) =$$

$$= \left( f, -\frac{\partial (\psi \varphi)}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \varphi \right) = \left( \frac{\partial f}{\partial x_i}, \psi \varphi \right) + \left( f, \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \varphi \right) =$$

$$= \left( \psi \frac{\partial f}{\partial x_i}, \varphi \right) + \left( \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f, \varphi \right) = \left( \psi \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i} f, \varphi \right).$$

Следовательно, $\frac{\partial (\psi\, f)}{\partial x_i} = \psi\, \frac{\partial f}{\partial x_i} + \frac{\partial \psi}{\partial x_i}\, f$. □

**Пример 1.** Пусть $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$. Показать, что

$$\psi(x)\,\delta'(x) = \psi(0)\,\delta'(x) - \psi'(0)\,\delta(x).$$

**Решение.** Из леммы 3 следует, что $(\psi(x)\,\delta(x))' = \psi'(x)\,\delta(x) + \psi(x)\,\delta'(x)$. В силу примера 1 имеем $\psi(x)\,\delta(x) = \psi(0)\,\delta(x)$, $\psi'(x)\,\delta(x) = \psi'(0)\,\delta(x)$. Поэтому $(\psi(0)\,\delta(x))' = \psi'(0)\,\delta(x) + \psi(x)\,\delta'(x)$, т. е. $\psi(x)\,\delta'(x) = \psi(0)\,\delta'(x) - \psi'(0)\,\delta(x)$. $\square$

## § 6. Пространство Шварца обобщенных функций $S'$

Используя пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$, определим пространство Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций.

**Определение.** *Пространством Шварца* $S'(\mathbb{R}^n)$ *обобщенных функций (или распределений)* называется линейное пространство, состоящее из линейных непрерывных функционалов $f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, т.е. таких, что

1) $\forall \varphi_1, \varphi_2 \in S(\mathbb{R}^n),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C} \hookrightarrow$
$(f, \lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1\,(f, \varphi_1) + \lambda_2\,(f, \varphi_2)$ и

2) $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi \quad \Rightarrow \quad (f, \varphi_k) \to (f, \varphi)$ при $k \to \infty$.

Операции умножения элемента на число и сложения элементов в $S$ определяются естественным образом:

$$\forall f, f_1, f_2 \in S'(\mathbb{R}^n),\ \lambda \in \mathbb{C},\ \varphi \in S(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow$$
$$\hookrightarrow\ (f_1 + f_2, \varphi) = (f_1, \varphi) + (f_2, \varphi), \quad (\lambda\, f, \varphi) = \lambda\,(f, \varphi).$$

**Лемма 1.** *Пусть локально интегрируемая функция* $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ *является функцией* медленного роста, *т.е. существуют числа* $m \in \mathbb{N}$ *и* $C_1, C_2 > 0$ *такие, что*

$$|f_0(x)| \le C_1(1 + |x|^m) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n : \ |x| \ge C_2. \tag{1}$$

*Тогда функционал* $f : S(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$, *определяемый формулой*

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\varphi(x)\,dx \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n), \tag{$**$}$$

*является элементом пространства* $S'(\mathbb{R}^n)$.

**Доказательство.** Зафиксируем натуральное число $N > \frac{n}{2}$. Согласно лемме 1 § 3 главы 24 функция

$$g(x) := \frac{1}{(1+|x|^2)^N}$$

интегрируема на $\mathbb{R}^n$. Зафиксируем произвольную пробную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$.

Поскольку $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$, то в частности для числа $m \in \mathbb{N}$, для которого выполнено неравенство (1), справедливо неравенство

$$C_\varphi := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^m)(1+|x|^2)^N \varphi(x)\right| < +\infty.$$

Следовательно, $|f_0(x)\varphi(x)| \le \frac{C_\varphi C_1}{(1+|x|^2)^N} = C_\varphi C_1\, g(x)$ при $|x| \ge C_2$, а значит, интеграл

$$\int\limits_{|x|\ge C_2} f_0(x)\varphi(x)\,dx$$

существует и конечен. Так как функция $\varphi$ непрерывна, а функция $f_0$ локально интегрируема, то их произведение $f_0(x)\varphi(x)$ является локально интегрируемой функцией и, в частности, интегрируемой на множестве $\{x \in \mathbb{R}^n :\ |x| \le C_2\}$. Поэтому интеграл $(**)$ существует и конечен. Итак, для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ определено значение функционала $f$.

Линейность функционала $f$, определяемого формулой $(**)$, следует из линейности интеграла. Докажем непрерывность функционала $f$. Пусть $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$. Тогда

$$\varepsilon_k := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left|(1+|x|^m)(1+|x|^2)^N(\varphi_k(x)-\varphi(x))\right| \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Так как при $|x| \ge C_2$ справедливы неравенства

$$|f_0(x)|\cdot|\varphi_k(x)-\varphi(x)| \le C_1(1+|x|^m)\cdot|\varphi_k(x)-\varphi(x)| \le C_1\varepsilon_k g(x),$$

то

$$|(f,\varphi_k-\varphi)| \le \int\limits_{\mathbb{R}^n} |f_0(x)|\cdot|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\,dx =$$

$$= \int\limits_{|x|\le C_2} |f_0(x)|\cdot|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\,dx + \int\limits_{|x|\ge C_2} |f_0(x)|\cdot|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\,dx.$$

$$\int\limits_{|x|\le C_2} |f_0(x)|\cdot|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\,dx \le \sup_{|x|\le C_2} |\varphi_k(x)-\varphi(x)|\cdot \int\limits_{|x|\le C_2} |f_0(x)|\,dx \to 0,$$

$$\int\limits_{|x|\ge C_2} |f_0(x)|\cdot|\varphi_k(x)-\varphi(x)|\,dx \le C_1\varepsilon_k \int\limits_{|x|\ge C_2} g(x)\,dx \to 0 \quad \text{при} \quad k\to\infty.$$

Поэтому $(f, \varphi_k - \varphi) \to 0$ при $k \to \infty$, т.е. функционал $f$ непрерывен. □

**Определение.** *Регулярным функционалом* называется функционал $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, порожденный некоторой локально интегрируемой функцией медленного роста $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ согласно формуле $(**)$. Функционал $f \in S'(\mathbb{R}^n)$, не являющийся регулярным, называется *сингулярным.*

Принято отождествлять, обозначая одной и той же буквой, регулярные функционалы $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ и порождающие их функции $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$. В связи с этим пространство $S'(\mathbb{R}^n)$ принято называть пространством *обобщенных функций медленного роста.*

**Определение.** *Производная* $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ определяется формулой

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right) \qquad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{2}$$

Докажем корректность этого определения. Поскольку для любой быстроубывающей бесконечно дифференцируемой функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ ее производная $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$ также является быстроубывающей бесконечно дифференцируемой функцией, то значение функционала $\left(\frac{\partial}{\partial x_i} f, \varphi\right) = -\left(f, \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi\right)$ определено. Так как из сходимости $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$ следует сходимость $\frac{\partial}{\partial x_i}\varphi_k \xrightarrow{S} \frac{\partial}{\partial x_i}\varphi$, то в силу непрерывности функционала $f$ функционал $\frac{\partial}{\partial x_i} f$ также непрерывен. Таким образом, для любого $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ функционал $\frac{\partial}{\partial x_i} f$, определяемый формулой (2), также является элементом пространства $S'(\mathbb{R}^n)$.

**Определение.** Пусть функция $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{C})$ удовлетворяет условию

$$\forall \overline{p} \in \mathbb{N}_0^n \quad \exists m \in \mathbb{N}: \qquad \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left| \frac{1}{1+|x|^m} \left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}} \psi(x) \right| < +\infty. \tag{3}$$

*Произведением* распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ на функцию $\psi$ называется распределение $\psi f \in S'(\mathbb{R}^n)$, определяемое формулой

$$(\psi f, \varphi) = (f, \psi\varphi) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство корректности этого определения предлагается провести самостоятельно. Заметим, что многочлен $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ является бесконечно дифференцируемой функцией и удовлетворяет условию (3). Поэтому, в частности, определено произведение распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ на многочлен.

## § 7. Преобразование Фурье обобщенных функций

**Лемма 1.** *Пусть функция медленного роста $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ интегрируема на $\mathbb{R}^n$. Пусть регулярный функционал $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ порожден функцией $f_0$, а функционал $\widehat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$ порожден функцией $F[f_0]$, т.е. для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$*

$$(f, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\varphi(x)\, dx, \tag{1}$$

$$(\widehat{f}, \varphi) = \int_{\mathbb{R}^n} F[f_0](y)\varphi(y)\, dy. \tag{2}$$

*Тогда*

$$(\widehat{f}, \varphi) = (f, F[\varphi]) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

**Доказательство.** По определению преобразования Фурье

$$(\widehat{f}, \varphi) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} F[f_0](y)\varphi(y)\, dy = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\, dy \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x) e^{-i(x,y)}\, dx.$$

Меняя порядок интегрирования в силу теоремы Фубини, получаем

$$(\widehat{f}, \varphi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x)\, dx \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-i(x,y)} \varphi(y)\, dy =$$

$$= \int\limits_{\mathbb{R}^n} f_0(x) F[\varphi](x)\, dx = (f, F[\varphi]).$$

$\square$

**Определение.** Преобразованием Фурье распределения $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ называется распределение $F[f] \in S'(\mathbb{R}^n)$, определяемое формулой

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n). \tag{3}$$

Докажем корректность этого определения. В силу пункта (а) теоремы 1 § 3 главы 24 для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливо включение $F[\varphi] \in S(\mathbb{R}^n)$, поэтому выражение $(f, F[\varphi])$ имеет смысл. Функционал $F[f]$, заданный формулой (3), линеен по $\varphi$ в силу линейности преобразования Фурье и функционала $f$. Проверим непрерывность функционала $F[f]$. Пусть $\varphi_k \xrightarrow{S} \varphi$. Тогда в силу пункта (б) упомянутой выше теоремы имеем $F[\varphi_k] \xrightarrow{S} F[\varphi]$. Отсюда в силу непрерывности функционала $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ получаем $(f, F[\varphi_k]) \to (f, F[\varphi])$, то есть $(F[f], \varphi_k) \to (F[f], \varphi)$ при $k \to \infty$. Таким образом, функционал $F[f]$ непрерывен, а значит, $F[f] \in S'(\mathbb{R}^n)$.

Проверим, наконец, что определение преобразования Фурье обобщенных функций соответствует определению преобразования Фурье обычных функций в случае, когда обобобщенная функция является регулярным функционалом, порожденным функцией $f_0 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, интегрируемой на $\mathbb{R}^n$. Пусть функционал $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ порожден такой функцией $f_0$, а функционал $\widehat{f} \in S'(\mathbb{R}^n)$ порожден ее преобразованием Фурье $F[f_0]$, т.е. для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы формулы (1), (2). Тогда в силу леммы 1 для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$(F[f], \varphi) = (f, F[\varphi]) = \left(\widehat{f}, \varphi\right).$$

Следовательно, $F[f] = \widehat{f}$.

Аналогично определяется обратное преобразование Фурье обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$:

$$\left(F^{-1}[f], \varphi\right) = \left(f, F^{-1}[\varphi]\right) \quad \forall \varphi \in S(\mathbb{R}^n).$$

Согласно формулам обращения (см. теорему 1(в) § 3 главы 24) для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ справедливы равенства $F^{-1}\left[F[\varphi]\right] = F\left[F^{-1}[\varphi]\right] = \varphi$. Поэтому

$$F^{-1}\left[F[f]\right] = F\left[F^{-1}[f]\right] = f \qquad \forall f \in S'(\mathbb{R}^n). \tag{4}$$

**Лемма 2.** *Для любой обобщенной функции $f \in S'(\mathbb{R}^n)$ и для любого мультииндекса $\overline{p} \in \mathbb{N}_0^n$ справедливы равенства*

$$F\left[\left((-ix)^{\overline{p}} f\right)\right](y) = \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} F[f](y), \tag{5}$$

$$F\left[\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\overline{p}} f(x)\right](y) = (iy)^{\overline{p}} F[f](y). \tag{6}$$

**Доказательство.** Зафиксируем произвольную пробную функцию $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$. Используя определения операций с обобщенными функциями и лемму 3 § 3 главы 24 получаем

$$\left(\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} F[f](y), \varphi(y)\right) = (-1)^{|\overline{p}|}\left(F[f](y), \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} \varphi(y)\right) =$$

$$= (-1)^{|\overline{p}|}\left(f(x), F\left[\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} \varphi(y)\right](x)\right) = (-1)^{|\overline{p}|}\left(f(x), (ix)^{\overline{p}} F[\varphi](x)\right) =$$

$$= \left((-ix)^{\overline{p}} f(x), F[\varphi](x)\right) = \left(F\left[(-ix)^{\overline{p}} f\right](y), \varphi(y)\right).$$

Тем самым доказано равенство (5). Равенство (6) доказывается аналогично. $\square$

**Пример 1.** Найти преобразование Фурье следующих обобщенных функций:

1) $f_1(x) = \delta(x)$, $x \in \mathbb{R}^n$;
2) $f_2(x) = 1$;
3) $f_3(x) = x^{\overline{p}}$, $\overline{p} \in \mathbb{N}_0^n$, $x \in \mathbb{R}^n$.

**Решение.** Обобщенные функции $f_2$ и $f_3$ являются регулярными функционалами, порожденными соответственно функциями 1 и $x^{\overline{p}}$. Для любой пробной функции $\varphi \in S(\mathbb{R}^n)$ имеем

$$\Big(F[f_1], \varphi\Big) = \Big(f_1, F[\varphi]\Big) = \Big(\delta, F[\varphi]\Big) = F[\varphi](0) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x) e^{-i(x,y)}\, dx \Bigg|_{y=0} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)\, dx = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} (f_2, \varphi).$$

Следовательно, $F[f_1] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} f_2$. Аналогично, $F^{-1}[f_1] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} f_2$. Поэтому, используя равенство (4), получаем

$$F[f_2] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} F\left[F^{-1}[f_1]\right] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} f_1.$$

В силу равенства (5) имеем

$$F[f_3](y) = F[x^{\overline{p}} f_2](y) = i^{|\overline{p}|} F[(-ix)^{\overline{p}} f_2](y) =$$

$$= i^{|\overline{p}|} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} F[f_2](y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\ i^{|\overline{p}|} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} f_1(y).$$

**Ответ.** $F[\delta] = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$; $\qquad F[1] = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \delta$;

$$F\left[x^{\overline{p}}\right](y) = (2\pi)^{\frac{n}{2}}\, i^{|\overline{p}|} \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^{\overline{p}} \delta(y).$$

В данном параграфе было определено преобразование Фурье на пространстве Шварца $S'(\mathbb{R}^n)$ обобщенных функций. Это определение использует тот факт, что преобразование Фурье переводит пространство Шварца $S(\mathbb{R}^n)$ пробных функций в себя. Следующий пример показывает, что преобразование Фурье любую пробную функцию $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$, не равную тождественно нулю, переводит в функцию, не лежащую в $\mathcal{D}(\mathbb{R})$. Отсюда следует, что на пространстве обобщенных функций $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (и, тем более, на $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$) невозможно корректно определить преобразование Фурье.

**Пример 2.** Пусть $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ и $F[\varphi] \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Покажем, что $\varphi \equiv 0$.

**Решение.** Так как функция $\varphi$ финитна, то существует число $A > 0$ такое, что $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Рассмотрим функцию $\beta(x) := = \varphi\left(\frac{A}{\pi}x\right)$. Тогда $\operatorname{supp}\beta \subset [-\pi, \pi]$. Поскольку $F[\beta](y) = \frac{\pi}{A}F[\varphi]\left(\frac{\pi}{A}y\right)$, то из финитности функции $F[\varphi]$ следует финитность функции $F[\beta]$. Обозначим через $c_k$ коэффициенты Фурье функции $\beta$ по системе $\{e^{ikx}\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} \beta(x)\, e^{-ikx}\, dx, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Сравнивая это выражение с преобразованием Фурье функции $\beta$

$$F[\beta](y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{v.\,p.}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\beta(x)\, e^{-ixy}\, dx \overset{\operatorname{supp}\beta\subseteq[-\pi,\pi]}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\pi}^{\pi}\beta(x)\, e^{-ixy}\, dx,$$

получаем равенства $c_k = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}F[\beta](k)$ при всех $k \in \mathbb{Z}$. В силу финитности функции $F[\beta]$ существует такой индекс $k_0 \in \mathbb{N}$, что $c_k = = 0 \quad \forall k \in \mathbb{Z}: \ |k| > k_0$.

По теореме о сходимости ряда Фурье

$$\beta(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k\, e^{ikx} = \sum_{k=-k_0}^{k_0} c_k\, e^{ikx} \quad \forall x \in [-\pi, \pi].$$

Поэтому функция $\beta$ совпадает с тригонометрическим многочленом на $[-\pi, \pi]$.

Предположим, что $\varphi \not\equiv 0$. Тогда $\beta \not\equiv 0$. Обозначим

$$x_0 := \sup\{x \in [-\pi, \pi] : \ \beta(x) \neq 0\}.$$

Тогда $x_0 \in (-\pi, \pi]$ и $\beta(x) = 0 \quad \forall x \geq x_0$. Следовательно, $\beta^{(k)}(x_0) = = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}_0$. Таким образом, все слагаемые ряда Тейлора функции $\beta$ в точке $x_0$ равны нулю.

Поскольку функция $\beta$ совпадает с тригонометрическим многочленом на $[-\pi, \pi]$, то функция $\beta$ регулярна на $[-\pi, \pi]$, а значит ряд Тейлора функции $\beta$ в точке $x_0$ сходится к функции $\beta$ в некоторой левой полуокрестности точки $x_0$. Следовательно, $\beta(x) = 0$ в некоторой левой полуокрестности точки $x_0$, что противоречит определению $x_0$.