实验一：数值积分和数值微分

第一题：使用数值积分方法求以下两个积分值。

$$\int_{-1.96}^{1.96} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

$$\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$$

1. 使用复合梯形公式求两个积分值。
2. 使用复合辛普森公式求两个积分值。
3. 使用龙贝格求积公式求两个积分值，输出龙贝格积分的矩阵。
4. 比较节点数相同时复合梯形公式和复合辛普森公式的误差。

要求：

1. 使用复合梯形公式和复合辛普森公式时，分别将区间 n 等分，其中 n 自行选取至少 5 个不同的值。
2. 第一个积分积分值保留 5 位小数，误差控制在 10^{-5} 内。
3. 第二个积分积分值保留 4 位小数，误差控制在 10^{-4} 内。

提示：对于积分 $\int_0^1 \sqrt{x} \ln x dx$，被积函数 $f(x) = \sqrt{x} \ln x$ 在积分区域 $[0,1]$ 上存在瑕点 0，但 $\lim_{x \to 0} f(x) = 0$。所以 $\int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 g(x)dx$，其中：

$$g(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \ln x, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

第二题：使用数值微分方法求函数 $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ 的导数。

1. 使用两点法求 $f(x)$ 在 $x = 1, 2$ 处的导数值。
2. 使用外推法求 $f(x)$ 在 $x = 1, 2$ 处的导数值。要求每个节点上的导数值的误差都小于 10^{-3}。
3. 画出 $[1,2]$ 上函数的一阶数值微分曲线，并与理论上的一阶导数曲线进行比较。
4. 画出 $[1,2]$ 上函数的二阶数值微分曲线，并与理论上的二阶导数曲线进行比较。(提示：先近似求出一阶导数值，再利用求出的一阶导数值近似求出二阶导数值。)