«Численные методы и прикладное программирование»

Методические указания по выполнению лабораторных работ

Александр Граковский, Карина Цветкова

Оглавление

Лабораторная работа №1: «Методы решения системы линейных уравнений. Число обусловленности матрицы»

Структура отчета:

- ✓ Формулировка задания
- ✓ Метод исключения Гаусса с ведущим элементом
- ✓ Индивидуальный метод (один из перечисленных)
  - Метод Краута (Холецки)
  - Метод прогонки
  - Метод простых итераций (Якоби)
  - Метод Гаусса-Зейделя
  - Метод релаксаций
- ✓ Экспериментальное определение числа обусловленности матрицы
- ✓ Выводы

Содержание задания:

В данной лабораторной работе рассматриваются прямые и итерационные методы. Ниже приведены системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ), которые следует решить, используя указанные методы из *Таблицы 1*. Предположим, по индивидуальному заданию требуется реализовать метод Краута. Данный метод относиться к прямым методам, поэтому для демонстрации результата реализованного алгоритма следует показать решение СЛАУ под номерами ***1***, ***2*** и ***5***. В результатах работы алгоритма указываются номера систем и, соответствующие им, полученные вектора неизвестных.

Так же, в работе требуется произвести экспериментальный расчет числа обусловленности матрицы для двух систем: ***3*** и ***5***. Выполнить расчет можно как программным путем, так и ручным решением. Для вычислений требуется выбрать одну из двух норм: Манхетонская или Евклидова нормы.

Задачи для решения:

1) $$\begin{cases} x_1 - 2\cdot x_2 + x_3 = 2 \\ 2\cdot x_1 - 5\cdot x_2 - x_3 = -1 \\ -7\cdot x_1 + x_3 = -2 \end{cases}$$

2) $\begin{cases} 5 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 - 3 \cdot x_3 + 4 \cdot x_4 = -11 \\ x_1 - 4 \cdot x_2 + 6 \cdot x_3 - 4 \cdot x_4 = -10 \\ -2 \cdot x_1 - 5 \cdot x_2 + 4 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 = -12 \\ -3 \cdot x_1 - 3 \cdot x_2 + 5 \cdot x_3 - 5 \cdot x_4 = 8 \end{cases}$

3) $\begin{cases} 2 \cdot x_1 - x_2 - x_3 = 5 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - 2 \cdot x_3 = 7 \\ x_1 + 2 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 8 \cdot x_1 + 5 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 = 30 \\ -2 \cdot x_1 + 8 \cdot x_2 + x_3 = 15 \\ x_1 + 3 \cdot x_2 - 10 \cdot x_3 = 42 \end{cases}$

5) $\begin{cases} 0{,}78 \cdot x_1 + 0{,}563 \cdot x_2 = 0{,}217 \\ 0{,}913 \cdot x_1 + 0{,}659 \cdot x_2 = 0{,}254 \end{cases}$

Таблица 1

Метод	**Номер СЛАУ**
Итерационные методы	1, 3, 4
Прямые методы	1, 2, 5

<u>Оформление отчета:</u>

- ✓ Реализовать метод исключения Гаусса с выбором ведущего элемента
  - Листинг[1] программной реализации алгоритма
  - Результат работы алгоритма на указанных СЛАУ
- ✓ Реализовать индивидуальный метод
  - Листинг программной реализации алгоритма
  - Результат работы алгоритма на указанных СЛАУ
- ✓ Экспериментальное определение числа обусловленности матрицы
  - Листинг программной реализации алгоритма или полное ручное решение
  - Результаты вычислений с пояснением полученных решений
- ✓ Выводы

[1] Тут и далее под листингом алгоритма подразумевается программная реализация рассматриваемого метода. Надо отметить, что листинг должен содержать только саму реализацию метода, и по максимуму исключать такие второстепенные вещи как: консольный или оконный ввод/вывод, обработка структур, инициализация вспомогательных переменных и т.д. Комментарии приветствуются, только без злоупотребления.

В выводах требуется произвести сравнение двух реализованных в лабораторной работе методов решения систем линейных уравнений (метод Гаусса с выбором ведущего элемента и индивидуальный метод) путем замера времени работы алгоритма на вычислении системы ***2***.

Указать полученные результаты временного замера и объяснить – почему были получены такие числа. Для тех студентов, которые реализовывали программным путем расчет числа обусловленности матрицы, требуется оценить, насколько велика погрешность в полученных расчетах систем ***3*** и ***5***.

Лабораторная работа №2: «Методы приближения функции. Интерполяция и аппроксимация»

Структура отчета:

- ✓ Формулировка задания
- ✓ Аппроксимация по методу наименьших квадратов (МНК)
- ✓ Индивидуальный метод (один из перечисленных)
    - Метод заданных точек (МЗТ)
    - Интерполяция Лагранжа
    - Интерполяция Ньютона
    - Сплайн интерполяция
    - Аппроксимация полиномом Лежандра
    - Аппроксимация полиномом Чебышева
    - Аппроксимация полиномом Лаггера
    - Аппроксимация Безье
- ✓ Графическое сравнение двух методов
- ✓ Выводы

Содержание задания:

Данная работа разделена на три части: в первой части требуется реализовать аппроксимацию методом МНК, во второй части реализовать индивидуальный метод, а в третьей части работы надо провести сравнение двух выше реализованных методов графическим путем. Для графического вывода можно использовать средства *Matlab'a*, но так же допустимо применение других средств отображения графиков (к примеру, генерация **.svg* файла для просмотра изображения в браузере). Для сравнительного графического анализа требуется на один график нанести одну функцию, которая была обработана двумя различными методами приближения (т.е. получается, что на графике изображены две функции, каждая из которых есть результат работы реализуемых методов приближения). Для наглядности рассмотрим следующий пример, где происходит графическое сравнение результатов приближения функции двух методов (аппроксимация МНК и аппроксимация полиномами Чебышева) при $k = N-1$ и $k = N$.:

Даны следующие точки:

x	0	3.3	6.6	9.9
y(x)	2.1	5.9	2.4	3.4

Построим графики двух функций приближения по имеющимся точкам:

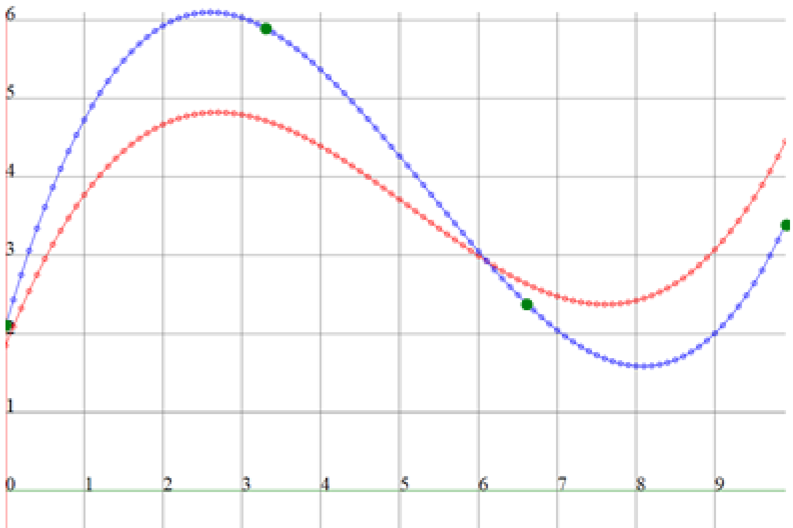

Рисунок 1

На первом рисунке изображены одновременно две функции приближения, где красным помечена аппроксимация полиномами Чебышева, а синим – работа алгоритма метода МНК. Этот случай рассматривает работу алгоритмов, когда порядок приближения равен ***N-1.***

Далее мы вводим порядок приближения равный количеству подаваемых точек в таблице ***k=N***:

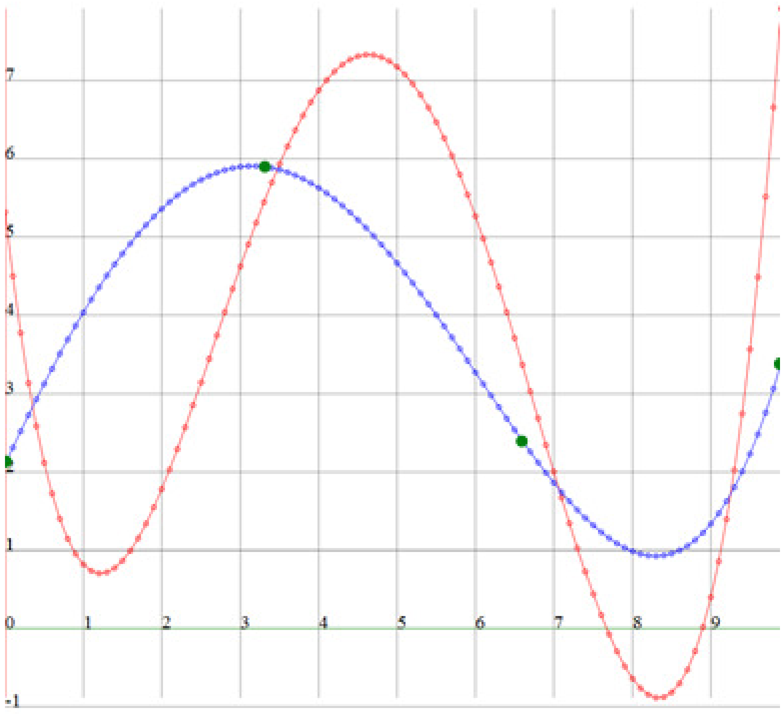

Рисунок 2

Задачи для решения:

1) $y = \sin(5x) \cdot e^{x}$, *где* $x = \overline{-2{,}2}$ $\Delta x = 0.5$

2)

X	-3.2	-2.1	0.4	0.7	2	2.5	2.777
Y	10	-2	0	-7	7	0	0

Информация для вывода:

- Аппроксимация **МНК**:
  - система при заданном порядке
  - коэффициенты *a*
  - значение *x* для конкретного заданного значения y
  - порядок аппроксимации
- Метод заданных точек (**МЗТ**) – вывести матрицу Вандермонда
- Интерполяция **Ньютона** – вывести таблицу дельт
- Аппроксимация полиномом **Лежандра** – вывести последовательность значений полиномов Лежандра
- Аппроксимация полиномом **Чебышева** - вывести последовательность значений полиномов Чебышева
- Аппроксимация полиномом **Лаггера** - вывести последовательность значений полиномов Лаггера
- Аппроксимация **Безье** – графическое изображение получаемой аппроксимации

Оформление отчета:

- ✓ Аппроксимация по методу наименьших квадратов (МНК)
  - Листинг программной реализации алгоритма
  - Графики одной функции при трех различных значениях порядка полинома
- ✓ Индивидуальный метод
  - Листинг программной реализации алгоритма
  - Требуемая информация для вывода
- ✓ Графическое сравнение двух методов

- ✓ Выводы:

В выводах аргументировано описать различие в реализациях двух рассматриваемых в работе методов приближения – сложность программирования, затраты на вычисления, время работы и т.п. характеристики. Требуется дать рекомендации, для каких задач применим тот или иной реализуемый метод приближения и пояснить почему.

Лабораторная работа №3: «Методы решения нелинейного уравнения»

Структура отчета:

- ✓ Формулировка задания
- ✓ Метод бисекции (деление отрезка пополам)
- ✓ Индивидуальный метод (один из перечисленных)
    - Метод «золотого сечения»
    - Метод хорд (секущей)
    - Метод Ньютона (касательной)
    - Метод Ньютона с коррекцией
    - Комбинированный метод
    - Метод парабол
    - Метод Якоби
    - Метод Якоби с коррекцией
- ✓ Выводы

Содержание задания:

В данной лабораторной работе требуется реализовать два алгоритма решения нелинейного уравнения: метод бисекции и индивидуальный метод. Предусмотрено два способа реализации алгоритмов: с использованием скользящего окна или же с локально заданным интервалом. В зависимости от выбора реализации, будут меняться входные параметры метода. Во всех обоих случаях в качестве входного параметра требуется установить ввод точности решения (эпсилон). В таблице ниже представлены необходимые параметры для запуска алгоритмов:

Использование скользящего окна	**Установка локальной области поиска**
– Начальная точка всей области поиска – Конечная точка всей области поиска – Ширина скользящего окна	– Начальная точка локального окна – Конечная точка локального окна

Таблица 2

Так же, для некоторых задач будет необходимо предусмотреть смещение функции по оси Y, поэтому для создания более универсальной реализации, требуется ввести и этот параметр.

<u>Задачи для решения:</u>

Для демонстрации работы реализованных алгоритмов, студентам предлагается использовать функции, которые представлены в учебном пособии «Численные методы» в разделе «Домашние задания» «Методы численного интегрирования и дифференцирования функции». Количество функций выбирается с учетом количества участников в группе, при этом в данной лабораторной работе используются для решения те функции, которые предназначаются студентам группы для выполнения их индивидуального домашнего задания. К примеру, группа состоит из трех человек, следовательно, выбираются три функции, из указанной таблицы, с вариантами всех трех участников группы.

<u>Информация для вывода:</u>

График функции на заданном участке и найденный корень (корень следует отметить на графике)

Результаты работы для реализуемого алгоритма свести в таблице:

Номер функции	**Точности**	**Найденный корень**	**Число итераций**
1) …	$\varepsilon = 0.01$	$x = \dots$	$n = \dots$
	$\varepsilon = 0.0001$	$x = \dots$	$n = \dots$
2) …	$\varepsilon = 0.01$	$x = \dots$	$n = \dots$
	$\varepsilon = 0.0001$	$x = \dots$	$n = \dots$
…	…	…	…

Таблица 3

<u>Оформление отчета:</u>

- ✓ Метод бисекции (деление отрезка пополам)
  - Листинг программной реализации алгоритма
  - График функции на заданном участке и найденный корень
  - Таблица с результатами работы алгоритма
- ✓ Индивидуальный метод

- Листинг программной реализации алгоритма
- График функции на заданном участке и найденный корень
- Таблица с результатами работы алгоритма

✓ Выводы

В выводах требуется привести сводную таблицу (Рисунок 1) на основе которой осуществляется сравнение работы двух реализуемых алгоритмов.

Точность / Метод	10^{-2}	10^{-4}
Метод бисекции	$n = \ldots$ / $x = \ldots$	$n = \ldots$ / $x = \ldots$
Индивидуальный метод	$n = \ldots$ / $x = \ldots$	$n = \ldots$ / $x = \ldots$

Рисунок 3

Как и в прежних результирующих таблицах, требуется указать значение найденного корня и число итераций, которые потребовались для получения решения. В таблице, которая представлена на Рисунке 1, необходимо использовать, для сравнения, только одну функцию, корни который находятся двумя реализованными методами. После того как таблица будет составлена, требуется пояснить полученный результат.

Лабораторная работа №4: «Численные методы решения дифференциальных уравнений первого порядка»

Структура отчета:

- ✓ Формулировка задания
- ✓ Метод Эйлера
- ✓ Индивидуальный метод (один из перечисленных)
  - Метод Эйлера-Коши
  - Метод Адамса
  - Метод Башфорта
  - Метод Адамса-Башфорта
  - Метод Рунге-Кутта 4-ого порядка
  - Метод Гира 2-ого порядка
  - Метод Гира 3-его порядка
- ✓ Выводы

Содержание задания:

В данной лабораторной работе требуется реализовать два метода решения дифференциальных уравнений: метод Эйлера и индивидуальный метод. Само дифференциальное уравнение выдается преподавателем во время проведения лабораторных работ. Для того чтобы реализовать алгоритмы, требуется предусмотреть ряд входных параметров:

a – первый коэффициент дифференциального уравнения при *x*;

b – второй коэффициент уравнения при x^2;

h – точность проводимого вычисления;

x0 – начальное условие;

interval – правая граница интервала (левая по умолчанию равна нулю).

Информация для вывода:

В качестве выходных данных используются следующие графики:

Совместный график дифференциального уравнения при эталонном решении и полученные значения при использовании численного метода решения (т.е. на одном графике требуется зафиксировать аналитическое и численное решение, что дает возможно сравнить их чисто визуально).

График, демонстрирующий отклонение (ошибку) численного решения от эталонного решения.

Для наглядности приведем следующий пример. Мы будем рассматривать решение нелинейного дифференциального уравнения методом Эйлера. Для демонстрации решения, используется следующее уравнение:

$$\overset{*}{x} = 0.25x - 0.05x^2$$

Данное уравнение анализировалось на интервале от 0 до 30. Вычисления над этим уравнение были рассчитаны при шаге $h_1 = 0.05$ и $h_2 = 0.001$, что дает вариацию в точности вычисления.

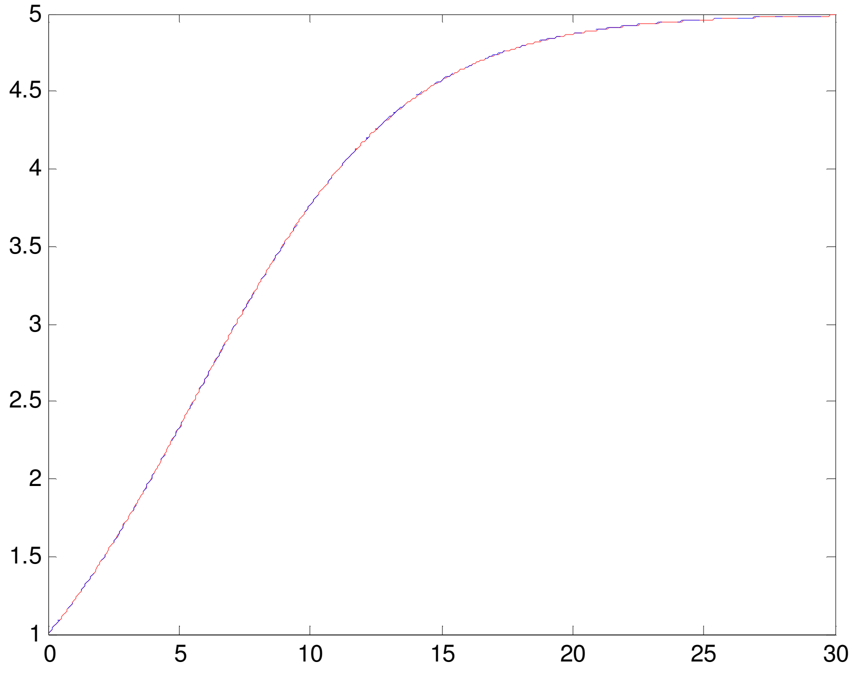

Рисунок 4

На четвертом рисунке представлено решение при точности 0.05. При исходном масштабе графика, красная пунктирная линия (аналитическая функция) и синяя непрерывная линия (полученное решение методом Эйлера), наложились друг на друга.

Отклонение численного решения от аналитического решения представлено ниже, на рисунке 5.

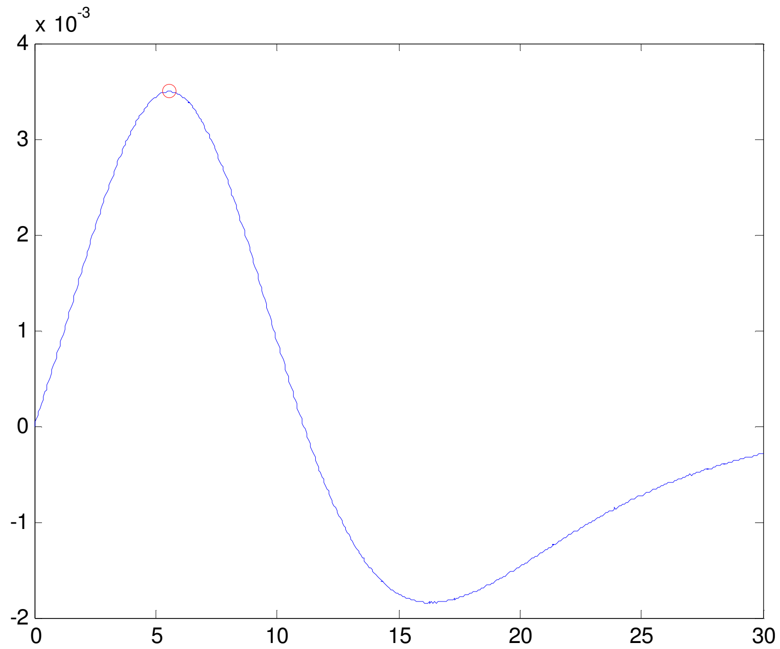

Рисунок 5

<u>Оформление отчета:</u>

- ✓ Метод Эйлера
  - Листинг программной реализации алгоритма
  - Совместный график эталонного решения и численного решения
  - График ошибки при точности вычислений *0.05*
  - График ошибки при точности вычислений *0.001*
- ✓ Индивидуальный метод
  - Листинг программной реализации алгоритма
  - Совместный график эталонного решения и численного решения
  - График ошибки при точности вычислений *0.05*
  - График ошибки при точности вычислений *0.001*
- ✓ Выводы

В выводах произвести сравнение двух реализованных методов по точности их вычислений. Пояснить, что происходит при увеличении точности, как она влияет на работу реализованных численных методов, а так же всегда ли увеличение точности приводит к улучшению результатов. Основываясь на полученных графиках, пояснить свои заключения.