**Абстракция в математике: путь от чисел к категориям и моделям**

**Предисловие**

Эта статья — первая глава цикла «Абстракция и логика. Основания математики». Здесь мы последовательно пройдём по ступеням математической абстракции. Каждый следующий уровень расширяет рамки предыдущего: от простых операций над числами к универсальным системам и философии математического мышления. Введение призвано дать представление о том, как эти ступени соединяются в единую лестницу абстракции, открывающую всё более глубокие и обобщённые методы описания структур и их взаимосвязей.

**Введение**

Главная проблема современного математического образования заключается в том, что детей учат различным инструментам и алгоритмам работы с числами, однако сами числа пропадают уже на втором уровне математической абстракции. Другими словами за 11 лет в школе среднестатистический ученик достигает лишь второго уровня абстракции, за редким исключением узнает что-то о третьем. В технических вузах дела обстоят чуть лучше: студенты начинают работать с третьим уровнем, что уже довольно неплохо развивает логическое и критическое мышление человека.

Предлагаю подробней рассмотреть про какие уровни идет речь, от самого простого до практически недосягаемого.

**Уровни математической абстракции**

**Числа.** На этом уровне мы абстрагируемся от всех свойств изучаемого объекта, кроме числовых характеристик. Нам не важен вкус, цвет или запах. Мы рассматриваем только количественную меру (скорость, вес, длина и т. д.)

*# Здесь пара красного и зеленого яблок превращаются в число 2. Грубо говоря, нас уже не интересуют их свойства, более того не интересует и то, что это яблоки. Зная, что 2+3=5, мы с уверенностью заявляем, что если в корзину к 2 яблокам (2 любым предметам) положить 3 яблока (3 любые предмета), то в корзине будет 5 яблок (5 любых предметов).*

**Переменные.** Примерно в 5-6 классе на уроках математики ученикам впервые встречаются буквы. В чем же заключается идея? На самом деле всё просто, это следующий уровень абстракции — теперь нас не интересует конкретное число, мы учимся решать задачи сразу для всех чисел.

*# Здесь 2+3=5 превращается в уравнение a+x=b, решением которого является x=b-a. То есть теперь мы знаем чему равен x для любых чисел a и b.*

**Группы.** Следующий шаг самый интересный. Предлагается абстрагироваться не только от конкретных чисел, но и от конкретных операций. Благодаря этому, мы можем работать, вообще говоря, с любыми объектами. Например, с поворотами квадрата или треугольника, где объект — геометрическая фигура, операция — поворот на некоторое кол-во градусов. Объект «Числа» с операцией «Арифметические операции +, -, \*, /» это всего лишь частный случай более общей структуры.

*# Здесь a+x=b превращается в уравнение a\*x=b, где \* (не путать с умножением) — любая операция, удовлетворяющая некоторым свойствам. Решением уравнения будет являться x = b\*a`, где a` — обратный элемент к a.*

Внимательный читатель заметит, что в одном уравнении операций может быть больше, чем одна. Тогда имеет место следующая классификация:

• 1 операция — группа (мн-во поворотов квадрата вокруг центра с операцией поворот на 90°)

• 2 операции — кольцо (целые числа с операциями + и \*)

• 3 операции — поле (рациональные числа с операциями +, \* и /)

**Алгебры.** Теперь мы переходим к более сложным структурам. Алгебры позволяют комбинировать операции и изучать их поведение в более сложных математических контекстах. Мы можем работать с операциями, которые могут быть не коммутативными (от перестановки мест слагаемых сумма МЕНЯЕТСЯ) или более абстрактными.

• *Алгебра Ли. Например, в физике мы часто сталкиваемся с ситуациями, где операция не коммутативна, то есть a×b≠b×a. В таких случаях мы применяем алгебры Ли, чтобы описывать физические процессы.*

*• Элементарная алгебра. Именно та, что изучается в средней школе и преподносится, как единственная возможная, но, к сожалению, это всего лишь частный случай множества всех алгебр.*

*• Алгебра логики. Алгебраическая структура, но немного другого рода. Она оперирует не с числами, а с высказываниями (утверждениями, которые могут быть либо истинны, либо ложны). Это фундамент для цифровой логики, схем, булевой алгебры и программирования.*

**Категории.** Постепенно мы абстрагировались от конкретных объектов и операций над ними. Пришло время узнать, чем занимается современная математика. Будем считать, что категория — это своего рода система, в которой есть два важных компонента:

• Объекты — элементы, с которыми работает система. Это может быть что угодно: числа, множества, геометрические фигуры, группы людей и так далее.

• Морфизмы — это связи между объектами. Морфизмы показывают, как один объект может быть преобразован в другой или как объекты могут взаимодействовать между собой.

*#* ***Бытовой пример:***

*Частный случай категории Set (категория множеств на примере кофе).*

*— Объекты: состояния кофе (зерно, молотый, напиток)*

*— Морфизмы: операции между ними (перемолоть, заварить и т.д.)*

*Тогда морфизм — это способ перейти от одного состояния к другому:*

*— молоть: зерно => молотый*

*— заварить: молотый => кофе*

*#* ***Формальный пример:***

*— Объекты: множества (например: {1, 2, 3}, {Алексей, Михаил, Светлана} и т.д.)*

*— Морфизмы: функции (отображения) между ними (например: f(1) = Алексей, f(2) = Михаил, f(n) = имя с порядковым номером n в списке)*

Теория категорий — это несложный набор правил, философия взгляда на математику. Она учит мыслить уровнями выше, находить общее в различном и строить мосты между тем, что раньше казалось несвязанным.

**Теории и модели.** На данном уровне изучаются математические структуры с точки зрения их моделей. Например, теории, описывающие множества или алгебраические структуры, могут быть исследованы с точки зрения того, какие модели могут их удовлетворять. Теория моделей позволяет изучать логические свойства этих структур.

• Теория множеств, где рассматриваются модели множества как математической структуры, удовлетворяющей аксиомам теории множества (например, ZFC).

• Гомотопическая теория типов является связующим звеном между математической логикой и топологией, и используется для более глубокой формализации понятий.

**Вывод**

На протяжении всех одиннадцати классов школьного курса учащиеся постигают лишь «частный случай частного случая другого частного случая». Если представить себе математическую науку как огромное многоквартирное здание, то школьная математика остаётся в одной-единственной комнате.

**Теория категорий** (частный случай всех теорий) → **категория полей** (частный случай всех категорий) → **поле рациональных чисел** (частный случай всех полей). Именно на уровне рациональных чисел строится вся школьная программа: арифметика, уравнения, элементарная алгебра. При этом сами учащиеся не подозревают, что находятся в узком подмножестве гораздо более обширного и многослойного мира абстрактных математических конструкций.