ГЛАВА VI

ЧАСТНЫЕ ВИДЫ ЛИНЕЙНЫХ ДИФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

В теории диференциальных уравнений линейные уравнения являются одним из наиболее интересных отделов. Это обусловливается как тем, что они относятся к типу уравнений с хорошо разработанной общей теорией, так и широкими возможностями их приложений к физике, механике и т. д. Линейные уравнения содержат несколько классов, для которых до конца решается задача о представлении общего решения при помощи элементарных функций. В тех же случаях, когда такая элементарная интеграция невозможна, часто оказывается необходимым — ввиду важности данного уравнения, теоретической или прикладной — исследовать свойства его решений, вводя последние в математический обиход в качестве новых трансцендентных функций. Для линейныйх уравнений такое исследование оказывается значительно проще, чем для нелинейных, так как нам не приходится заботиться об изучении зависимости решения от произвольных постоянных — оно известно из общей теории. Таким образом для изучения например общего решения линейного уравнения второго порядка достаточно изучить две функции от одного независимого переменного x — два частных решения.

Настоящая глава посвящена тем типам уравнений, для которых задачи интеграции доводятся до конца, а также изложению некоторых свойств линейных уравнений второго порядка.

§1. Линейные уравнения с постоянными коэфициентами и приводимые к ним

1. Однородное линейное уравнение с постояными коэфициентами. Рассмотрим диференциальное уравнение, линейное однородное n-го порядка с коэфициентом при старшей производной, равным единице:

$$L[y] = \frac{d^n y}{dx^n} + a\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + a_2\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}} + \ldots + a_{n-1}\frac{dy}{dx} + a_n y = 0,$$

или

$$L[y] \equiv y^n + a_1 y^{(n-1)} + a_2 y^{(n-2)} + \ldots + a_{n-1}y' + a_n y = 0. \qquad (1)$$

В этом параграфе мы будем считать коэфициенты $a_1, a_2, \ldots, a_n$ постоянными (действительными) числами. Мы покажем, что в таком случае *интеграция уравнения* (1) *всегда возможна в элемен-*

тарных функциях и сводится даже не к квадратурам, а *к алгебраическим операциям.*

Заметим, что в силу общих свойств линейных уравнений нам достаточно найти n частных решений, образующих фундаментальную систему, т.е. линейно независимых.

Постараемся выяснить себе, какие элементраные функции могли бы обратить уравнение (1) в тождество. Для этого нужно, чтобы по подстановке решения в левую часть уравнения там оказались подобные члены, которые в сумме могли бы дать нуль. Из диференциального исчисления мы знаем функцию, которая подобна со всеми своими производными в смысле элементарной алгебры, эта функция $e^{k\infty}$, где k — постоянное. Итак, попытаемся удовлетворить нашему уравнению, полагая

$$y = e^{kx}, \tag{2}$$

где k — постоянное, которое мы можем выбирать произовльно. Диференцируя по x выражение (2) один раз, два раза, …, n раз, мы получим следующие функции:

$$y' = k^2 e^{kx}, \ldots, y^{(n-1)} = k^{n-1} e^{kx}, y^{(n)} = k^n e^{kx}. \tag{3}$$

Внося выражения (2) и (3) в левую часть уравнения (1), которую мы обозначим символом оператора L, мы получим:

$$L[e^{kx}] = e^{kx}(k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n). \tag{4}$$

В равентсве (4) в правой части в скобках стоит многочлен n-й степени относительно k с постоянными коэфициентами. Он называется *характеристическим многочленом*, соответствующим оператору L; обозначим его через $F(k)$;

$$F(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n.$$

В этих обозначениях равенство (4) кратко запишется так:

$$L[e^{kx}] = e^{kx} F(k). \tag{4'}$$

Заметим, что характеристический многочлен получается из оператора $L[y]$, если производные различных порядков в этом последнем заменить равными степенями величины k. Если выражение (2) есть решение диференциального уравнения (1), то выражение (4) должно тождественно обращаться в нуль. Но множетель $e^{kx} \neq 0$, следовательно, мы должны положить:

$$F(k) \equiv k^n + a_1 k^{n-1} + a_2 k^{n-2} + \ldots + a_{n-1} k + a_n = 0. \tag{5}$$

Равенство (5) есть алгебраическое уравнение с неизвестным k. Оно называется *характеристическим уравнением. Если мы* в качестве постоянного k в выражении (2) *возьмем корень* k_1 *характеристического*