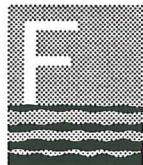


Lnr. 3115/94

Eutrofimodell for indre Oslofjord

En modell for omsetning av organiske stoff og næringssalter i innelukkede fjorder med vertikal sjiktning

Rapport 4: Fysiske prosesser. Litteraturstudium og dataanalyse



Fagrådet



Miljøverndepartementet

Oversikt over rapporter:

EUTROFIMODELL FOR INDRE OSLOFJORD
En modell for omsetning av organisk stoff og næringssalter
i innelukkede fjorder med vertikal sjiktning.

Rapport 1: Praktisk utprøving på indre Oslofjord.

NIVA-rapport lnr. 3112

Hovedrapport som også presenterer modellen ved å vise resultater fra kjøringer, sammenligne med observasjoner, og gi eksempler på hvordan den kan belyse virkningen av ytterligere tiltak mot forurensninger i indre Oslofjord.

Rapport 2: Faglig beskrivelse av innholdet i modellen

NIVA-rapport lnr. 3113

Her gis det en oversikt over hvordan både fysiske, biologiske og kjemiske prosesser er beskrevet matematisk i modellen, og hvilke faglige forutsetninger og forenklinger som ligger til grunn.

Rapport 3: EDB-teknisk beskrivelse og praktisk bruker-veiledning. NIVA-rapport lnr. 3114

Her beskrives hvordan modellen skal brukes rent teknisk og hva som må gjøres for å tilpasse modellen til andre fjordområder. Det gis også noe informasjon om hvordan programmet er bygd opp, til veileding for eventuell videre-utvikling. Rapporten inneholder også en beskrivelse av hvordan modellen er verifisert, dvs. hva som er gjort for å bygge inn internkontroll og luke ut feil i programkoden og sikre at EDB-programmet fungerer etter forutsetningene.

Rapport 4: Fysiske prosesser. Litteraturstudium og dataanalyse. NIVA-rapport lnr. 3115

Her beskrives hvordan fysiske forhold behandles i modellen. Rapporten redegjør også for hva modelleringen av fysiske forhold bygger på av litteratur og data.

Rapport 5: Fytoplankton-prosesser - et litteraturstudium. NIVA-rapport lnr. 3116

Denne rapporten beskriver bakgrunnen for modelleringen av de viktigste fytoplankton-prosessene, spesielt når det gjelder fotosyntese og næringsopptak, og viser hvordan modellbeskrivelsen er utviklet.

Rapport 6: Filtrering og vekst hos blåskjell som funksjon av miljøforhold.

NIVA-rapport lnr. 3117

Beskriver en feltundersøkelse som ble gjort i 1989 for å få et biomasse-estimat, og et litteraturstudium som har dannet grunnlag for delmodellen for blåskjell-bestanden og dens betydning for omsetningen i fjorden.

Norsk institutt for vannforskning

**O-90188/
E-87722**

EUTROFIMODELL FOR INDRE OSLOFJORD

En modell for omsetning av
organisk stoff og næringssalter
i innelukkede fjorder med vertikal sjiktning.

**Rapport 4:
Fysiske prosesser.
Litteraturstudium og dataanalyse.**

27.10.94

Birger Bjerkeng

Forord

Denne rapporten inngår som nr. 4 i en serie på seks rapporter som beskriver resultatet av et modell-utviklingsprosjekt utført ved NIVA. En liste over alle rapportene finnes på innsiden av rapportforsiden.

Prosjektet ble først skissert i et programforslag (Bjerkeng et. al. 1987) og siden i et forprosjekt finansiert av NIVAs basisbevilgning (Bjerkeng et. al. 1988). Det er gjennomført som et kombinert oppdrags- og forskningsprosjekt. Miljøverndepartementet og Fagrådet for vann- og avløpsteknisk samarbeid i indre Oslofjord bevilget 1.5 mill. kr. hver, og NIVA har skutt inn omrent samme beløp av egne forskningsmidler, slik at den totale rammen har vært omkring 4.5 mill kr. Oppdragsgiver og kontraktpartner har vært Fylkesmannen i Oslo og Akershus, på vegne av de bevilgende instanser.

Følgende personer utenfor NIVA takkes for verdifulle råd underveis i prosjektet når det gjelder den fysiske modellbeskrivelsen som er beskrevet her, uten at de på noen måte står ansvarlig for resultatet:

*Henrik Rye, Veritas-Miljøplan A/S,
Lars Petter Røed, Nansen Senter for Miljø og Fjernmåling (Nersc);
Anders Stigebrandt, Universitetet i Göteborg;
Jan Erik Weber, Universitet. i Oslo;*

Rapportutkastet er gjennomgått av Jan Magnusson, som også takkes for verdifulle kommentarer og råd.

Oslo 27.10.94

Birger Bjerkeng

INNHOLD

1. Innledning	9
2. Kortfattet beskrivelse av modellen - hensikt og hovedstruktur.....	9
3. Topografi og vannutveksling i indre Oslofjord	12
4. Oppdeling av vannmassene - volumkontinuitet og massebalanser.	15
5. Vannutveksling mellom bassengene	16
5.1. Strømhastighet som funksjon av horisontal trykkforskjell.....	17
5.2. Tilnærmet beregning av trykkforskjeller - nominelle inndelingsdyp	18
5.3. Barotrop og baroklin trykkdirret transport - iterasjon av vannstand.	19
5.4. Virkning av vind på horisontalutvekslingen mellom bassenger.....	21
5.5. Fordeling av transporter i mottagerbasseng - massetransporter	21
5.5.1. Buffervolumer i overgangen mellom bassenger - tidsforsinkelser	22
5.5.2. Fordeling av innstrømning over dyp	25
5.5.3. Homogenisering av innstrømning	26
5.6. Kobling med ytre fjord- eller hav-områder	27
6. Vertikalblanding innenfor hvert basseng.....	27
6.1. Grunnleggende differensialligning for vertikaltransporter	27
6.2. Avledning av endelig differanse-ligning basert på volum-midlede konsentrasjoner.....	28
6.3. Empirisk beskrivelse av vertikal blandingskoeffisient i dypvannet mellom innstrømninger.....	31
6.3.1. Beregningsmetodikk ved bruk av massebudsjetter	31
6.3.2. Parametrisering av vertikaldiffusjonen som funksjon av sjiktning.....	33
6.3.3. Tidligere beregninger for Oslofjorden	34
6.3.3.1. Sammenheng mellom blandingskoeffisient og sjiktning	34
6.3.3.2. Forholdet mellom stoff- og varmediffusjon.....	35
6.3.3.3. Teori om tidevannsenergi som hovedkilde for blanding.....	36
6.3.4. Egne beregninger for indre Oslofjord	37
6.3.4.1. Datagrunnlag og praktisk fremgangsmåte ved budsjettberegningen	37
6.3.4.2. Eliminasjon av data hvor det er indikasjon på innstrømning	37
6.3.4.3. Statistisk analyse av vertikalblanding mot sjiktning og dyp	38
6.3.5. Konklusjoner og drøfting av resultatet - modell for tidevannsdrevet vertikalblanding	43

6.4.	Vinddrevet vertikalblanding av overflatelaget	45
6.4.1.	Vertikal blanding som funksjon av vind i kontinuerlig sjiktning	45
6.4.2.	Vertikal blanding fra vind - som homogenisering av overflatelag.....	49
6.4.3.	Energioverføring fra vinden	51
6.4.4.	Overføring av impuls og energi fra vind til vannmasser.....	54
6.4.5.	Betydning av vindfluktuasjoner, tidsforsinkelser.....	56
6.5.	Overflateblanding pga. av andre energikilder	56
6.6.	Vertikalblanding knyttet til horisontale innstrømninger av tungt vann.....	57
6.6.1.	Alternativ 1 - Modell for medrivning av vann i en tung bunnstrøm.....	57
6.6.2.	Alternativ 2 - Energibetraktninger som grunnlag for å beregne blandingen.....	59
6.6.3.	Valgt alternativ - diffusiv vertikalblanding basert på energibetraktninger.	60
6.7.	Kunstig vertikalblanding knyttet til dyputslipp	60
7.	Ytre krefter og påvirkninger	64
7.1.	Lys-stråling	65
7.1.1.	Stråling i øvre del av atmosfæren.....	65
7.1.2.	Stråling i nedre del av atmosfæren.....	66
7.1.2.1.	Bølgelengdespektrum og demping i atmosfæren.....	66
7.1.2.2.	Analyse av globalstråling ved bakken - data fra Blindern, Oslo.....	67
7.1.2.3.	Sammenheng mellom skydekke og lysstråling ved bakken.....	68
7.1.2.4.	Modellering av "tilfeldige" variasjoner for gitt skydekke	70
7.1.2.5.	Oppdeling i direkte sollys og diffus stråling fra atmosfæren	71
7.1.3.	Brytning og refleksjon i vannoverflaten.....	72
7.1.4.	Absorbsjon og spredning av lyset i vannmassen.....	74
7.2.	Utveksling av varme og vann med atmosfæren.....	76
7.2.1.	Netto utstråling av varme	77
7.2.1.1.	Brutto utstråling fra vannflaten	77
7.2.1.2.	Tilbakestråling fra atmosfæren for skyfri himmel.	78
7.2.1.3.	Virkning av skydekke på tilbakestrålingen	79
7.2.1.4.	Oppsummering - beskrivelse valgt i eutrofimodellen.	80
7.2.2.	Nedbør, kondensasjon og fordampning	80
7.2.3.	Varmeledning	82
7.3.	Utveksling av oksygen med atmosfæren	82
7.3.1.	Diffusiv utveksling gjennom vannoverflaten.....	83
7.3.2.	Bobledannelse ved overmetning av oksygen.	84
7.4.	Virkning av isdekke på overflateutvekslingen.	86

LITTERATUR.....	87
Appendiks 1. Forenklet tetthetsformel.....	91
Appendiks 2. Beregning av mettet fuktighet og damptrykk	92
Appendiks 3. Mulig metode for fordeling av horisontale transporter til lagene i mottagende basseng ut fra tetthet.	93
Appendiks 4. Beregningsdetaljer for vertikal transport og blanding	95
A.4.1 Overgang fra differensialligning til oppdeling i lag av endelig tykkelse.....	95
A.4.2 Korreksjon for numerisk diffusjon knyttet til advektiv strømning.	98
A.4.3 Vertikalblanding som utjevningsprosess	100
A.4.4 Vertikalblanding knyttet til horisontale innstrømninger av tungt vann - vertikal spredning av blandingsenergi	105

Tabeller

Tabell 1. Statistikk for empirisk beregnet blandingsenergi mot tyngdefeltet i Bunnefjorden og Vestfjorden som funksjon av dyp.	39
Tabell 2. Parametre i sammenhengen mellom vind og vertikalblanding bestemt av Kullenberg (1968).....	46
Tabell 3. Resultat av statistisk reanalyse av Kullenbergs data.....	47
Tabell 4. Noen empiriske sammenhenger mellom vind og friksjonskoeffisient referert fra litteraturen.....	52
Tabell 5. Litteraturdata for sammenheng mellom varighet og virkningslengde for vind og resulterende bølgespeker.	56
Tabell 6. Variasjon i global stråling over et døgn øverst i atmosfæren for nordlig bredde 60° (Oslo).....	66
Tabell 7. Fordeling mellom bølgelengdeområder og dempning i atmosfæren	66
Tabell 8. Statistikk for målt globalstråling ved bakken (Oslo, Blindern) i forhold til beregnet stråling øverst i atmosfæren som funksjon av tid på året.	67
Tabell 9. Formler fra litteraturen for stråling fra atmosfæren som funksjon av luftfuktighet.	78
Tabell 10. Estimater i litteraturen for varmeutvekslingskoeffisient som funksjon av tetthetsstabilitet i overgangen luft/vann.	82

Figurer

Figur 1.	Prinsippskisse av den fysiske inndelingen av en fjord, som idealisert vertikalsnitt.....	10
Figur 2.	Skisse av elementene i den fysiske modellen for et basseng	11
Figur 3.	Hovedkomponenter i den biologiske delmodellen og sammenhengen mellom dem.	12
Figur 4.	Kart over Oslofjordområdet med lengdesnitt vist, og med modell-området avmerket.	13
Figur 5.	Kart over indre Oslofjord med dybdeforhold og endel tilførsler avmerket.	14
Figur 6.	Eksempel på strømprofil mellom to bassenger, satt opp av forskjeller i vannstand og tetthetsprofiler.....	18
Figur 7.	Strukturen for buffervolumene på overgangen mellom to bassenger.....	22
Figur 8.	Fordeling av strømmer fra basseng med skarp sjiktning inn i et basseng med svak sjiktning i tilsvarende tetthetsintervall.....	26
Figur 9.	Middelverdi for blandingsarbeid mot tyngdefeltet som funksjon av dyp i Bunnefjorden og Vestfjorden, beregnet ut fra massebudsjett for salt.....	40
Figur 10.	Absoluttverdi av avvik i budsjett-beregnet verdi for blandingsarbeid fra regresjonslinje, som funksjon av relativt feilestimat for budsjettberegnung.....	42
Figur 11.	Sammenheng mellom vind og friksjonskoeffisient - data fra Smith (1980) for begrenset fetch, med visuell kurvetilpasning.	53
Figur 11.	Oksygen-metning (%) i overflaten i indre Oslofjord,basert på data fra overvåkningen av indre Oslofjord 1973-1992.	85

1. Innledning

Denne rapporten omhandler fysikk-delen av en eutrofimodell for fjorder utviklet ved NIVA i perioden 1988-1992. Den beskriver litteraturstudier og bearbeiding av data fra indre Oslofjord som ligger til grunn for modellbeskrivelsen av de fysiske prosessene.

Rapporten inngår i en serie på seks rapporter som beskriver ulike sider ved eutrofimodellen. En rapport-oversikt finnes helt foran i rapporten, på innsiden av perm'en.

Denne spesialrapporten om de fysiske delene av modellen beskriver for det første hvordan vannmasser og bunnarealer er inndelt etter dyp, og hvordan volumstrømmer og massebalanser håndteres i modellen. Dernest beskrives den trykkstyrte transporten mellom bassengene med bl.a. innstrømning av nytt tungt vann over terskelen. Det gis også en drøfting av den vertikale blandingen innenfor bassengene og hvordan den er modellert. Det bygger i stor grad på en empirisk beskrivelse tilpasset data fra indre Oslofjord. Analysen av data fra indre Oslofjord er tatt med her fordi den knytter seg mer direkte til de fysiske prosessene i modellbassengene. Vertikalblanding i overflaten pga. vind er diskutert i denne rapporten, og også blanding knyttet til strømning av vann mellom bassenger og tvungen blanding knyttet til dykkede utslipps. Deretter behandles annen påvirkning via vannoverflatene, dvs. lys- og varmestråling, og utveksling av varme og oksygen, prosesser som også i stor grad er knyttet til vind. Noen appendikser beskriver endel beregningsmessige eller faglige detaljer.

Koblingen til utenforliggende fjord/havområder, dvs. modellens randbetingelser, er behandlet ganske kortfattet her. På dette punktet er mye av detaljene knyttet spesielt til anvendelsen på indre Oslofjord, og gjelder inngangsdata mer enn de grunnleggende prosessbeskrivelsene. En nærmere beskrivelse av hvordan randområdene er håndtert finnes derfor gitt i rapport 1 som spesielt dreier seg om utprøving og anvendelse på indre Oslofjord, tildels også i rapport 3, den praktiske brukerbeskrivelsen.

2. Kortfattet beskrivelse av modellen - hensikt og hovedstruktur.

Modellen skal kunne beskrive eutrofi-tilstanden i forholdsvis lukkede fjorder, spesielt fjorder med dypbassenger avstengt av terskler. Den skal beskrive dynamisk hvordan biomassen i overflatelaget og oksygeninnholdet i dypere lag i fjorden utvikler seg gjennom året og over en rekke år, under ulike forurensningssituasjoner. Den skal kunne beregne hvordan tilstanden varierer som funksjon av:

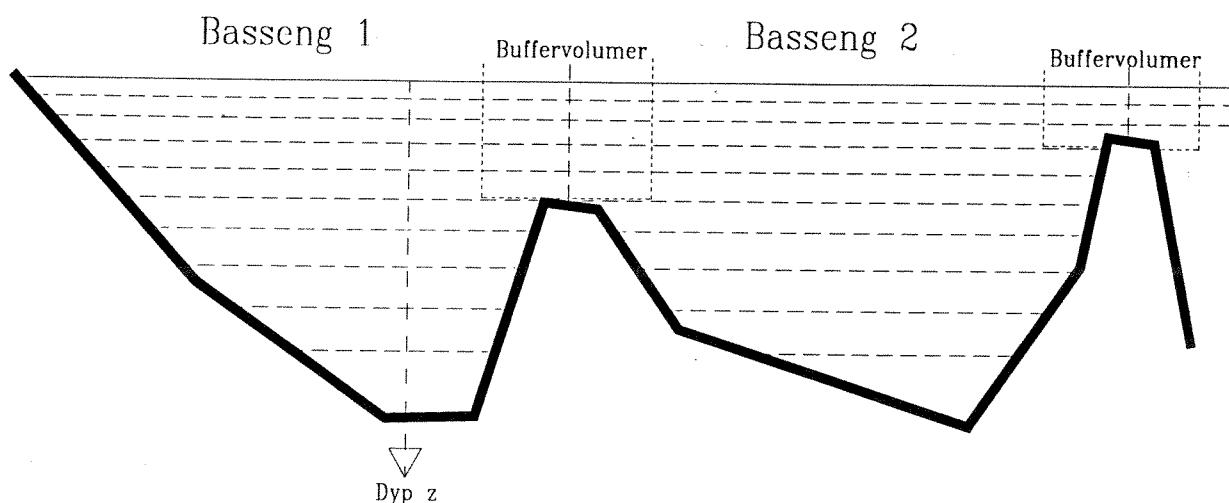
- endrede tilførsler av næringssalter (N, P) og organisk stoff,
- endret fordeling mellom overflateutsipp og dyputsipp,
- endret fordeling av utsipp mellom hovedbassengene i fjorden.

Modellen skal også kunne brukes til å beskrive hvordan de biologiske og kjemiske forhold i fjorden kan forandre seg med endrede fysiske forhold. Eksempler på aktuelle tiltak er tvungen sirkulering av dypvannet i Bunnefjorden ved nedpumping av overflatevann, og en åpning av Drøbakjetéen med endret vertikalblanding i Vestfjorden som mulig resultat.

Modellen er en prosessmodell som simulerer et tidsforløp dynamisk. Det vil si at den går ut fra en spesifisert starttilstand, hvor alle konsentrasjoner og mengder som inngår i modellen er

spesifisert. Så gjennomløpes det tidsrommet som skal simuleres i korte tidsskritt. For hvert tidsskritt beregnes først hastigheten på alle de prosesser som inngår i modellen som funksjon av tilstanden. Prosessene fører til at tilstanden angitt ved de forskjellige konsentrasjoner og mengder forandrer seg i løpet av tidsskrittet, og ut fra prosesshastighetene kan det beregnes en ny tilstand ved slutten av tidsskrittet. Den nye tilstanden brukes deretter som utgangspunkt for neste tidsskritt. Underveis tar modellen vare på mellomresultater med et visst tidsintervall, slik at en senere kan se på kurver for utviklingen av de forskjellige tilstandsvariable og beregne statistiske mål på tilstanden.

Eutrofimodellen er inspirert av en modell for Østersjøen utviklet av Stigebrandt og Wulff (1987), hvor hovedvannmassene i Østersjøen ble beskrevet som et horisontalmidlet basseng med vertikal oppdeling. I eutrofimodellen blir en fjord beskrevet som et antall naturlig avgrensede bassenger. Alle bassengene må stå i forbindelse med et randområde, enten direkte eller via andre bassenger. Innenfor hvert basseng beskrives tilstanden midlet horisontalt, men med forholdsvis detaljert beskrivelse av den vertikale variasjonen ved at vannvolumet deles opp i et antall lag etter en dypinndeling som ligger fast i tid. Figur 1 illustrerer denne oppdelingen.



Figur 1. Prinsippskisse av den fysiske inndelingen av en fjord, som idealisert vertikalsnitt.

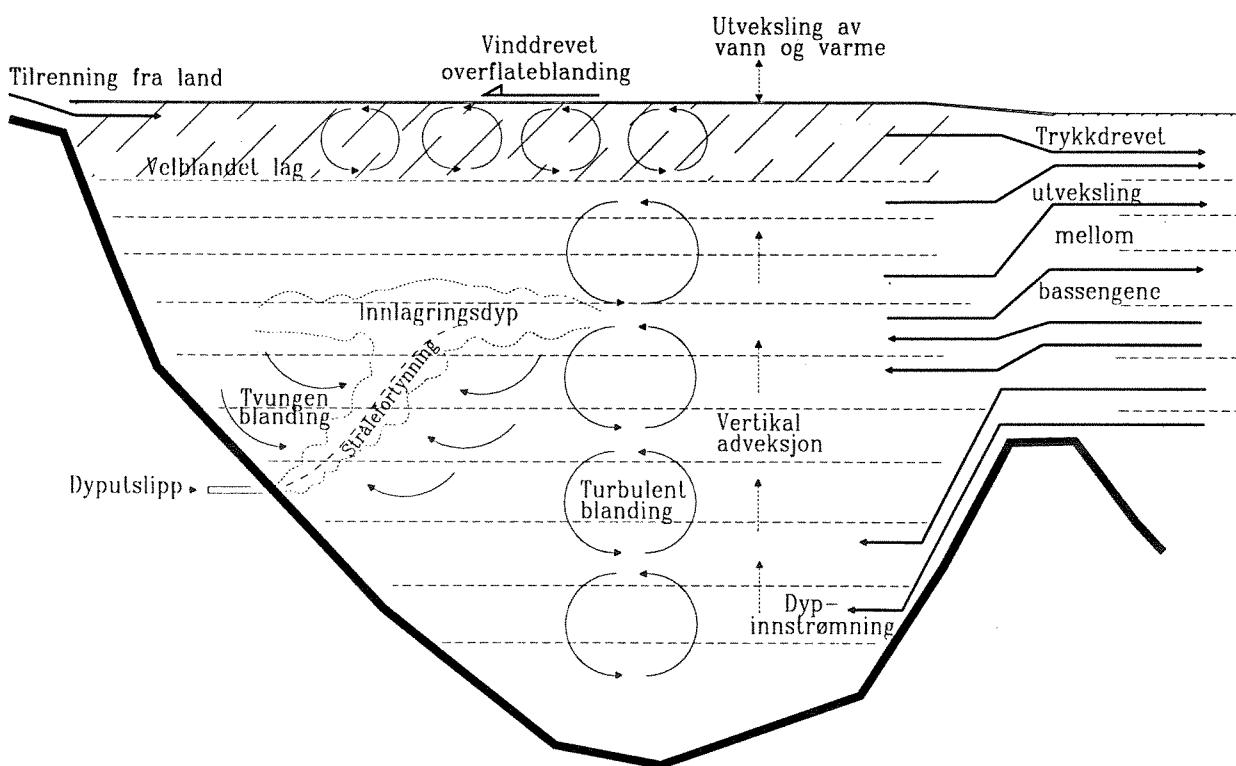
I tillegg til oppløst og partikulært materiale fordelt i vannmassene, beskriver modellen også partikulært materiale akkumulert på bunnen eller som sediment. Bunnarealene er delt opp etter dyp med samme inndeling som vannlagene, og hvert vannlag står i direkte kontakt med bunnarealet i samme dypintervall.

Eutrofimodellen er bygd opp av flere samarbeidende delmodeller. En hydrofysisk modell beskriver vertikale transporter mellom lagene i et basseng og horisontale vanntransporter mellom bassengene, og beregner massetransporter av de forskjellige oppløste og partikulære komponentene i vannet. Denne modellen beskriver både de naturlige prosessene i fjorden og virkningen av dykkede utslipper av ferskvann eller overflatevann. Biokjemiske modeller beskriver biologisk omsetning i vann og på bunnen innenfor hvert lag eller dybdeintervall. Det inkluderer også vertikal transport av organiske partikler mellom vannlagene, og utveksling av

løste stoffer mellom vann og sediment. Utviklingen av tilstanden i fjorden for de forskjellige bassenger og dyp er resultat av samspillet mellom disse prosessene, samt påvirkningen utenfra på det systemet modellen beskriver.

Den ytre påvirkningen består av:

- ferskvannstilrenning og utslipp av avløpsvann som fører med seg næringssalter og organisk karbon,
- påvirkning via overflaten ved solstråling, utveksling av varme og oksygen og utveksling av vann ved nedbør og fordampning,
- vannutveksling med havområdene utenfor det modellerte systemet, dvs. den ytre randen, hvor forholdene i hovedsak antas å variere uavhengig av hva som skjer inne i modellen.



Figur 2. Skisse av elementene i den fysiske modellen for et basseng

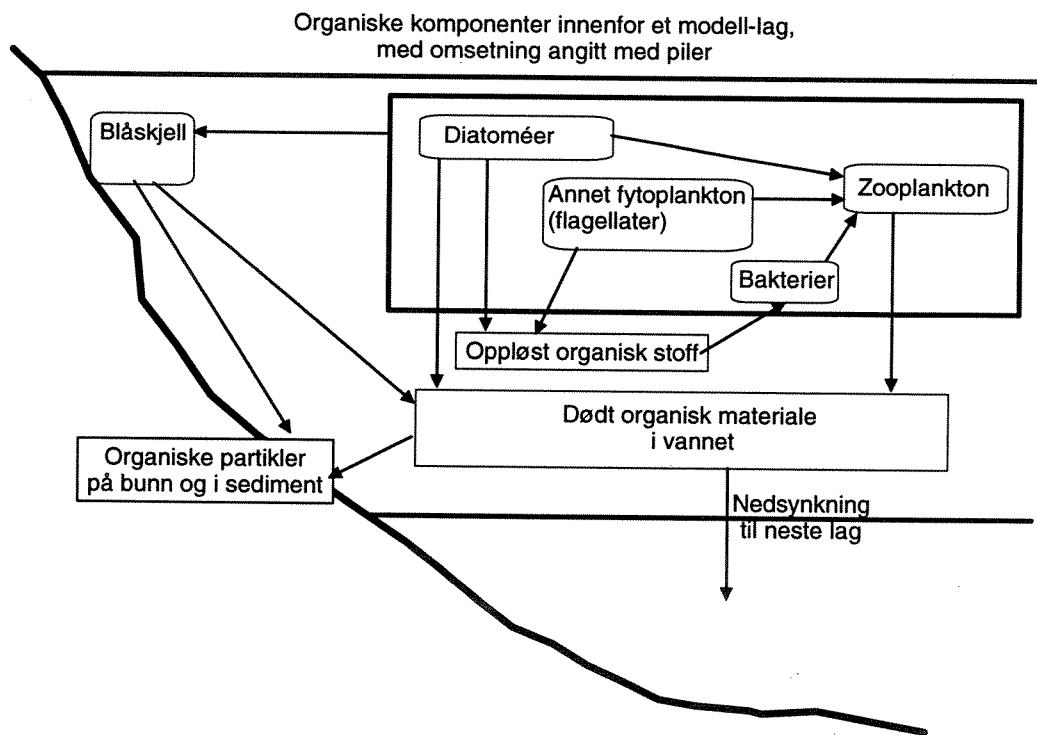
Figur 2 gir en oversikt over de prosessene og transporter som inngår i den fysiske modellen. De viktigste elementene i den fysiske modellen er:

- vanntransporter mellom bassengene innbyrdes og mot ytre randområder
- vertikal transport og utveksling av vann mellom lagene innenfor hvert basseng.

Begge deler er dels bestemt av ytre påvirkning, men styres også av tetthetsvariasjoner i bassengene, gitt som funksjon av temperatur og salinitet. Utviklingen av temperatur og salinitet er igjen en funksjon av de fysiske prosessene, det vil si at den fysiske modellen inneholder en rekke tilbakekoblinger. Detaljene i dette er nærmere omtalt senere i denne rapporten.

De biologiske prosessene beregnes i hovedsak separat innenfor hvert lag. Prosessene forbruker eller produserer ulike aktive eller passive komponenter, og har rater som er funksjoner av ytre miljøvariable og konsentrasjon av stoffer eller aktive komponenter som inngår i prosessene. Hovedkomponentene i den biologiske delmodellen er vist forenklet i figur 3.

Biologisk aktive komponenter er først og fremst plantoplankton (fytoplankton) som produserer biomasse ved hjelp av solenergi, dessuten zooplankton og bakterier i vannmassene og blåskjell i strandsonen.



Figur 3. Hovedkomponenter i den biologiske delmodellen og sammenhengen mellom dem.

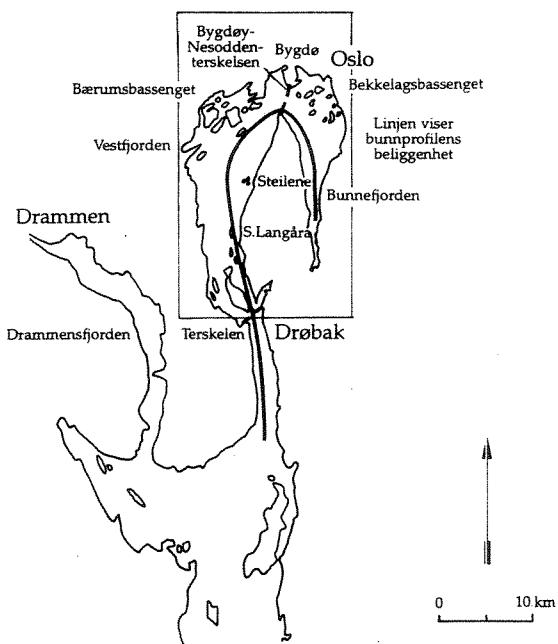
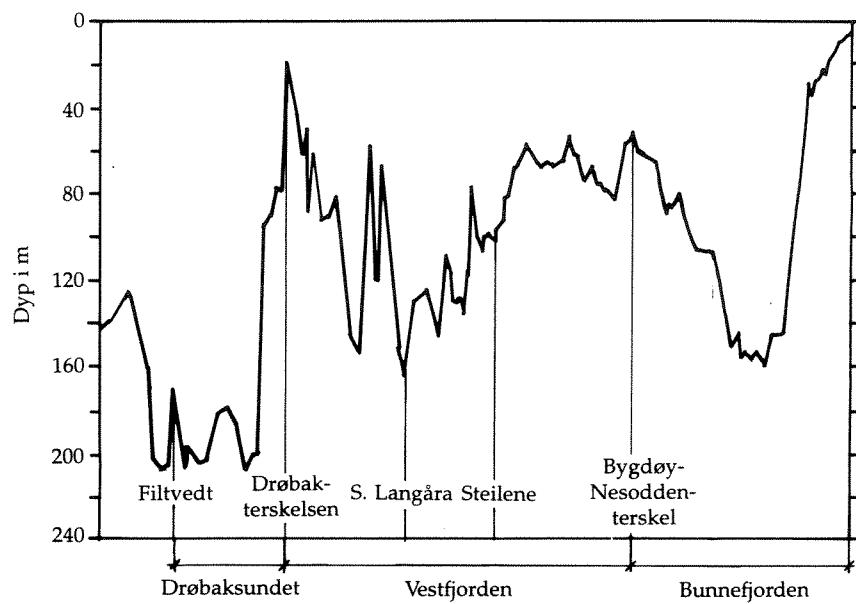
De fysisk/kjemiske konsentrasjoner som inngår i modellbeskrivelsen er salinitet, temperatur og oksygen, samt de viktigste uorganiske forbindelsene av N, P, og Si som tas opp av fytoplankton: nitrat, ammonium, fosfat og silikat.

Ved primærproduksjonen reduseres karbondioksid til organiske forbindelser, og derved frigjøres oksygen til vannmassene. Nedbrytning av dødt organisk materiale skjer delvis mens det synker nedover i vannmassene, og delvis etter at det er avsatt på bunnen. Det organiske materialet utgjør en oksygengjeld som tilsvarer det oksygenet som ble frigjort da det ble produsert, og nedbrytningen fører til forbruk av oksygen.

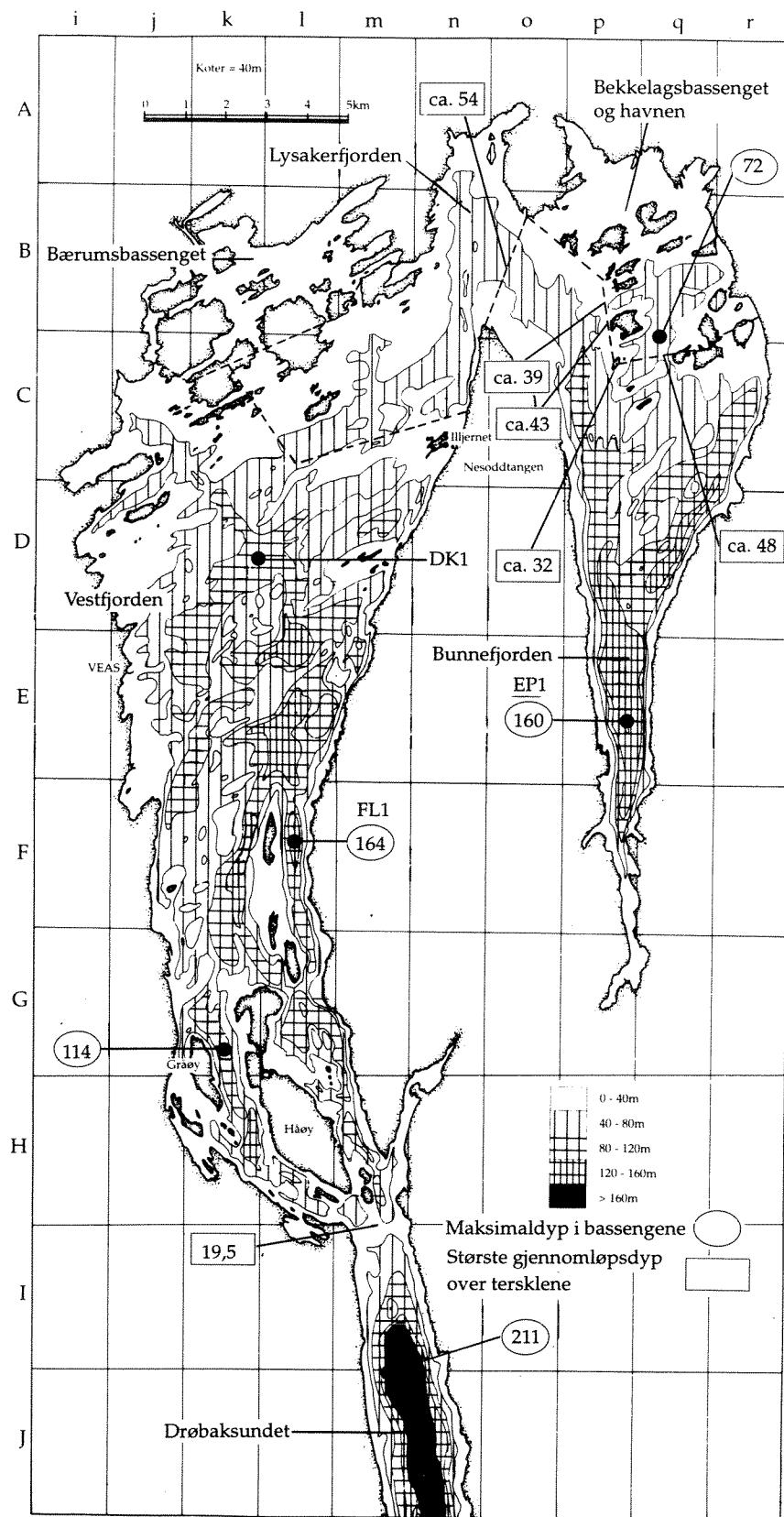
3. Topografi og vannutveksling i indre Oslofjord

Det aktuelle området er vist i figur 4 med modellområdet avmerket, og et mer detaljert kart over modellområdet er vist i figur 5. Indre Oslofjord er området innenfor Drøbaksterskelen,

denne delen av fjorden har et overflateareal på ca. 190 km², og er delt i to hovedbassenger, Bunnefjorden og Vestfjorden.



Figur 4. Kart over Oslofjordområdet med lengdesnitt vist, og med modell-området avmerket.



Figur 5. Kart over indre Oslofjord med dybdeforhold og endel tilførsler avmerket.

I de nordlige delene av de to hovedbassengene finnes noen naturlig avgrensede, mindre bassenger: Indre havn og Bekkelagsbassenget i Bunnefjorden, og Bærumsbassenget i Vestfjorden. De behandles ikke spesielt i denne rapporten, idet de ikke er skilt ut som egne vannvolumer i den første utgaven av modellen, men de kan innarbeides uten vanskelighet.

Bunnefjorden og Vestfjorden har begge maksimumsdyp på ca. 160m. De dypere delene av de to bassengene er avstengt fra hverandre med en terskel på 54 m dyp. Vestfjorden står i forbindelse med ytre Oslofjord gjennom en ca. 1 km bred åpning med terskeldyp 20 m ved Drøbak. Dypvannmassene er stagnante det meste av tiden, det vil si uten fornyelse av nytt vann utenfra, slik at hovedfornyelsene skjer episodisk. Vestfjorden har markert utskiftning av dypvannet hvert år, mens det i Bunnefjorden kan gå flere år mellom hver store utskiftning av dypvann.

Tidevannsamplituden er 10-20 cm, og vind- og lufttrykksinduserte vannstandsvariasjoner er normalt innenfor ± 1 m.

Det er liten direkte ferskvannstilførsel til indre Oslofjord, bare ca. 20-30 m³/s. Til tross for dette er det markert vertikal tetthetssjiktning gjennom det meste av året, med overflatesalinitet fra 25 til 15‰, mens den i dypere lag er 32-34‰. Sjiktningen i indre fjord skyldes i stor grad den store ferskvannstilførslene til ytre Oslofjord, som mottar mer enn 1000m³/s fra de to største elvene, Glomma og Drammenselva.

4. Oppdeling av vannmassene - volumkontinuitet og massebalanser.

Modellen deler en fjord inn i et antall bassenger, definert topografisk ved areal som funksjon av dyp. Bassengene er forbundet innbyrdes og mot randen ved åpninger definert av brede som funksjon av dyp. For indre Oslofjord er det bare én rand, nemlig mot ytre Oslofjord gjennom Drøbaksundet, men modellen kan også brukes med flere uavhengige randområder.

Hvert basseng er delt inn i et antall horisontale lag som vist i figur 1 på side 10. Dypinndelingen er felles for alle bassengene. Nærmest overflaten er det definert noen lag med ekvidistante dyp, deretter øker tykkelsen av lagene nedover mot dypet, med en konstant faktor fra lag til lag. Parametrene som styrer denne dypinndelingen kan varieres når modellen settes opp for kjøring. Den dypinndelingen som har vært brukt gir en sjikttykkelse på ca. 1.3 meter nær overflaten, økende til ca. 15 meters sjikt ned mot 150m dyp.

Det må her knyttes en kommentar til begrepet *horisontalt*. Siden modellen er integrert eller midlet horisontalt, kan den ikke beskrive horisontale og vertikale bevegelser i forbindelse med f.eks. vindoppstiving og dypvannsinnstrømninger. I modellen tar vi bare sikte på å få med den permanente *virkningene* av slike prosesser på vertikalsjiktningen, ved en empirisk beskrivelse. De horisontalt midlede konsentrasjoner modellen regner frem kan best sees som midler over vannlag med lik tetthet (iso-pyknisk), altså i vannvolumer som ville ligge innenfor horisontale lag dersom vannmassene lå i ro, bare påvirket av gravitasjonsfeltet. Det er altså ikke snakk om en horisontal midling i geometrisk forstand. Dette må tas i betraktning når en skal sammenligne med data, som kan være innsamlet i situasjoner med situasjonsbestemt og kortvarig forskyvning fra en slik likevekt. Sondringen er foreløpig mer av prinsipiell enn av praktisk art, siden vi i alle fall stort sett har data fra så få stasjoner at det ikke er mulig å danne reelle horisontale middelverdier.

Når modellen kjøres vil totalt volum i de forskjellige bassengene variere noe over tid pga. tilrenning og dynamisk beregnede transporter mellom bassengene. Hvert lag over største terskeldyp omfatter en fast andel i prosent av volumet ovenfor dette dypet, og har derfor også egentlig et svakt varierende volum over tid. I modellen blir dette tatt hensyn til når advektive vertikaltransporter mellom lagene i et basseng beregnes, slik at krav om volumbevaring blir oppfylt. Det betyr at bare total volumendring for hele bassenget må integreres over tid, mens volumet av hvert lag beregnes som totalvolum(fast andel).

I modellen skiller mellom to former for totalvolum i et basseng:

1. Dynamisk bestemt volum (V_d), som er uttrykk for hvor mye vann som finnes i bassenget, uansett hvor vannet hører hjemme ut fra sin sammensetning. Dynamisk volum angir mengde vann mellom faste fysiske grenser, og er bare et annet mål på vannstanden i bassenget: $\delta V_d \equiv \delta h \cdot A_0$, hvor A_0 er areal av overflaten og δV_d og δh er variasjoner i henholdvis dynamisk volum og vannstand i forhold til midlere verdier. Vannstanden er med på å styre transportene ved de trykkfeltene som skapes av vannstandsforskjeller, det er bakgrunnen for betegnelsen "dynamisk volum".
2. Massevolum (V_m), som er uttrykk for hvor mye vann som hører hjemme i bassenget, dvs. har egenskaper typisk for dette bassenget. Stofftransport mellom bassengene er knyttet til permanent overføring av vann mellom disse volumene, dvs. at nytt vann også må blandes inn i hovedvolumet i det bassenget det kommer til før det bidrar til permanent stoff- transport. Massevolumet er derfor ikke knyttet til helt faste fysiske grenser.

Dynamisk volum (vannstand) kan variere over tid i et basseng uten at massevolumet må variere tilsvarende. I stedet kan de fysiske grensene mellom massevolumene tenkes å forskyves i takt med bølgebevegelsen. Det er altså lagt inn et element av Lagrangebeskrivelse. Hvordan det er realisert i modellen er nærmere beskrevet nedenfor.

Modellen beregner ikke stoff-konsentrasjoner ved å integrere endring pr. tidsenhet av konsentrasjon direkte. I stedet brukes totalt volum V_m for hele bassenget og total stoffmengde i hvert lag som dynamiske tilstandsvariable som integreres over tid. Det betyr at modellen skal ha eksakt masse-bevaring innenfor regnenøyaktigheten, uavhengig av om det er stor eller liten diskretiseringsfeil i tidsintegrasjonen. Dette gjør det enklere å kontrollere numeriske kilder og sluk, og finne feil i modellen.

Konsentrasjon av de forskjellige stoffene, som styrer transporter og biokjemisk omsetning, beregnes som vanlige variable, gitt ved mengde/volum for hvert lag.

5. Vannutveksling mellom bassengene

Vanntransporter mellom bassengene styres hovedsakelig av horisontale trykkforskjeller. Horizontal trykkforskjell mellom to bassenger i overflaten er gitt av vannstandforskjellen mellom bassengene, og endrer seg som funksjon av tetthetsprofilene med økende dyp.

5.1. Strømhastighet som funksjon av horisontal trykkforskjell

Med utgangspunkt i Stigebrandt (1989) beskrives strømhastighet gjennom et antatt begrensende tverrsnitt med ligningen:

$$u(z) = \epsilon(z) \left[\frac{2\alpha_u |\delta P(z)|}{\rho_0} \right]^{1/2} \quad (1)$$

hvor ρ_0 = vannets tetthet. I eutrofimodellen benyttes en forenklet tetthetsformel, se appendiks 1.

α_u = en empirisk faktor som angir hvor stor del av trykkenergien som omsettes i kinetisk energi.

$\delta P(z)$ = horisontal trykkforskjell $P_A - P_B$ mellom bassengene i dyp z .

Trykkforskjellen blir i prinsippet beregnet ved å integrere tetthet fra overflaten ned til samme dyp i begge bassenger, med eventuell forskjell i lufttrykk som startverdi.

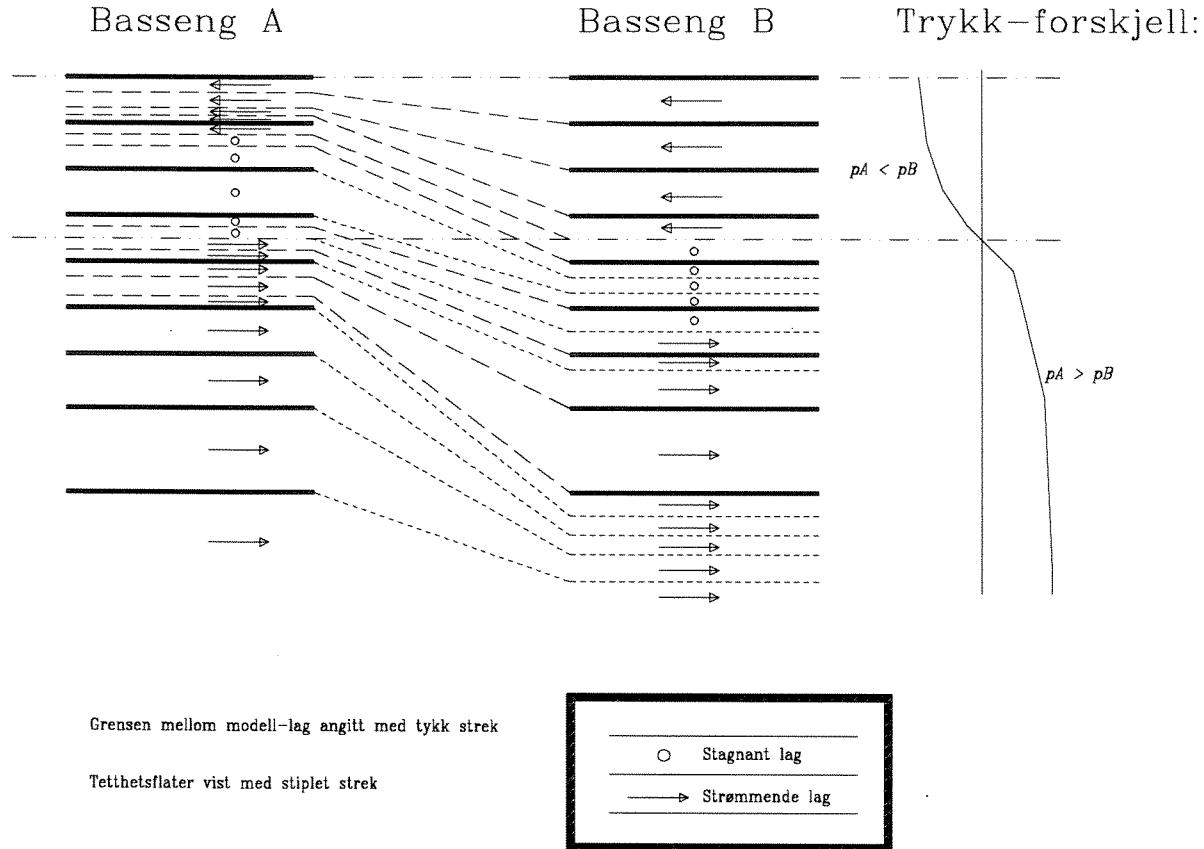
$\epsilon(z)$ = +1 hvis $\delta P(z) \geq 0$, gir transport fra basseng A til B
= -1 hvis $\delta P(z) < 0$, gir transport fra basseng B til A.

For laminær strøm uten friksjon er $\alpha_u=1$, turbulent strøm vil ha lavere verdier på α_u . Det er foreløpig valgt å sette konstanten $\alpha_u=0.5$, som anbefalt av Stigebrandt (1989) som et brukbart gjennomsnitt for ulike typer tolagsstrømmer. Det tilsvarer at 50% av potensiell energi pga. trykkforskjellen omsettes i kinetisk energi når vann akselereres mot transport-tverrsnittet.

Siden α_u uttrykker dissipering av energi, eller turbulent friksjon, kan det være aktuelt å la α_u være en funksjon av f.eks. Richardsons tall $N^2/(du/dz)^2$ hvor N er Brunt-Väisälä-frekvensen, se nedenfor. Da må ligning (1) eventuelt formuleres som et system av ikke-lineære differanseligninger som må beregnes ved en iterasjon i hvert tidsskritt. Som omtalt nedenfor benytter modellen allerede en iterativ prosess for å beregne transportene i tilknytning til vannstandsnivåer, så det trenger ikke medføre særlig vanskeligheter. Dette er derfor en mulig videreutvikling av modellen.

Hastigheten beregnes som midlere hastighet over dyptintervallet for hvert lag, og multipliseres med transport-tverrsnitt for å gi total fluks, dvs. volum pr. tidsenhet. I de dyp hvor $\delta P=P_A-P_B>0$ vil det gå transport fra basseng A til B, og i de dyp hvor $\delta P<0$ går det transport fra B til A. Dette kan f.eks. gi et strømbilde som vist i figur 6.

Trykkprofilen og transport-tverrsnittet som funksjon av dypet definerer altså størrelse og dybdefordeling for transporten ut fra hvert basseng. Tettheten i det utstrømmende vannet vil bestemme hvilke lag i det andre bassenget transportene går til. Hvordan det beregnes blir omtalt nærmere nedenfor, men først skal det sies litt om hvordan trykkforskjellen beregnes.



Figur 6. Eksempel på strømprofil mellom to bassenger, satt opp av forskjeller i vannstand og tetthetsprofiler.

5.2. Tilnærmet beregning av trykkforskjeller - nominelle inndelingsdyp

Dypet z i ligning (1) ovenfor er definert i forhold til ekvipotensial-flatene i tyngdefeltet. Denne stringente dybde-definisjonen er imidlertid ikke hensiktsmessig i modellen, fordi volumet av lagene ikke holdes fast i tid, men varierer litt i takt med varierende vannstand. Egentlig skulle da også inndelingsdypene varieres i takt med volumene, både ved beregning av trykkgradienter mellom bassengene, for innlagring av dykkede utslipper, og for vertikale blandingsprosesser. Dette ville komplisere beregningene, og i stedet opererer modellen med en "nominell" dypinndeling over terskeldyp som er lik for alle bassengene og fast over tid. Som vist nedenfor gir dette en tilfredsstillende tilnærmet trykkprofil.

Vi setter at et basseng ved et tidspunkt har vannstand $z_0 = -h$ og et dynamisk totalvolum $V_d = V(-h)$. Reelt dyp z , som ligger på en skala fra $-h$ til z_{\max} kan da regnes om til nominelt dyp z' på en skala fra 0 til z_{\max} ved formelen:

$$z' = z + h \frac{V(z)/A(z)}{V(-h)/A(-h)} \quad (2)$$

hvor $V(z)$ er volum under dyp z ned til største terskeldyp, og $A(z)$ horisontalt tverrsnittsareal i dyp z . Det fremgår av ligningen at endringen i volum ($A \cdot dz$) under et gitt nominelt dyp z' er

omtrent proporsjonalt med volumet under dette dypet, dvs. at små volumendringer fordeles omtrent proporsjonalt på alle delvolumer ned til største terskeldyp for hvert basseng.

Horizontal trykkforskjell mellom to bassenger A og B beregnes nå ved å integrere tettheten i to bassenger over nominelle dyp i stedet for over reelle dyp. Dette gir en viss unøyaktighet, men vi vil gå ut fra at den er mye mindre enn totalbidraget til trykket fra vannstandsforskjellen, og derfor ikke spiller noen vesentlig rolle for transportene. I modellen beregnes trykkforskjellen fra basseng A til B for nominelt dyp Z tilnærmet som

$$\delta P(Z) = \delta P'(Z) + g \cdot \delta h \cdot \rho_s \quad (3)$$

hvor

$$\delta P'(Z) = \int_0^Z g(\rho_A(z') - \rho_B(z')) dz' \quad (4)$$

$\delta h = h_A - h_B$ = forskjell i vannstand mellom de to bassengene.

ρ_s = tetthet i overflaten (tilnærmet lik i begge bassenger).

g = tyngdens akselerasjon.

5.3. Barotrop og baroklin trykkdrevet transport - iterasjon av vannstand.

For trykkdrevne strømmer som beskrevet ovenfor kan en skissere to ytterpunkter ut fra ligningen for trykkforskjellen.

Hvis vannstandsforskjellen dominerer dynamikken, dvs. at det siste ledet i ligning (3) er mye større enn det første ledet, vil det i hovedsak gå en enveis transport fra det bassenget hvor vannstanden er høyest over i det andre bassenget (barotrop transport).

I sjiktede fjorder vil det imidlertid ofte være slik at ulikheter i tethetssjiktning, dvs. variasjon i trykkforskjell med dypet, er avgjørende for transportene. Transportene kan da betraktes som satt sammen av to komponenter, en barotrop komponent knyttet til netto rettet transport integrert over transportverrsnittet, og en utveksling av vann gitt ved en varierende strømretning over dypet hvor transporten er like stor i begge retninger (baroklin transport).

Tidskonstanten for den barotrope komponenten er mye mindre enn for den barokline komponenten, og vannstandsforskjellene vil derfor raskt innstille seg slik at det i hovedsak skjer en utveksling av vann mellom bassengene ved at strømretningen skifter som funksjon av dyp (baroklin transport). Over tid gir dette en endring i tetthetsprofil som virker tilbake på transportene.

I indre Oslofjord er transportene sterkt varierende over tid. Det er liten tidevannsdempning mellom indre og ytre fjord, og rask dynamisk respons på vannstandsforskjeller. I noen situasjoner er det et utpreget baroklint strømbilde over Drøbaksteskelen, med innstrømning av tungt vann over terskelen kompensert av tilsvarende utstrøm av lettere vann. I andre tilfeller er transportene sterkt knyttet til tidevannet, og en kan ha dominerende barotrop transport, med samme strømretning i alle dyp, men med skiftende strømretning over tid. Noe tilsvarende gjør seg antagelig gjeldende mellom bassengene i indre Oslofjord.

For å beskrive transportene mellom bassengene best mulig er det valgt å ha med en modifisert kobling mellom vannstand og barotrop transport, som beskrevet nedenfor. Vannstandsforskjellene og tetthetsprofilene i hvert basseng setter opp et kvasistasjonært transportmønster ut fra ligning (1) og (3), som sammen med gitte ferskvannstilførsler bestemmer endring av vannstand og tetthetsprofil. Tidsforløpet beregnes ved å integrere differensialligninger i tid for endring av vannstand og tetthetsprofil ut fra transportene, mens transportene bestemmes av vannstand og transport i øyeblikket og endring pr. tidsenhet av vannstand på randen, som beskrevet nedenfor.

I randområdene, dvs. utenfor Drøbakssundet, må både vannstand og tetthet beskrives som funksjon av tid. For å starte beregningen må vannstand og tetthet ved $t=0$ også gis for de "indre" bassengene i modellen.

Som nevnt ovenfor er den dynamiske koblingen mellom vannstand og transport modifisert. Det er gjort på grunn av den raske tidskonstanten for denne koblingen. Uten en slik modifikasjon må modellen kjøres med svært korte tidskonstanter, kanskje ned mot sekunder, for å unngå numerisk ustabile løsninger. Modifikasjonen går ut på følgende:

Vannstandsnivåer og tetthetsprofiler definerer de trykkdrevne transportene. Hvis vannstanden avviker sterkt fra likevektsnivå, vil den barotrope komponenten endre vannstandsforskjellene svært raskt. I det reelle systemet vil endringene kontinuerlig virke tilbake på transportene med en viss tidskonstant, og vannstandsforskjellene stiller seg inn rundt kvasistasjonære "likevektsnivåer", dvs. de nivåer som gir en tilstrekkelig barotrop transport til å opprettholde uendret vannstandsforskjell mellom bassengene, for gitte verdier på h og dh/dt i randen og gitte ferskvannstilførsler til bassengene. I en numeriske modellen er tilbakevirkningen forsinket eller unøyaktig med i størrelsesorden ett tidsskritt, og uten spesielle tiltak kan det gi problemer med numerisk ustabilitet hvis ikke tidsskrittene er mindre enn de reelle tidskonstantene.

I eutrofimodellen etterlignes derfor innstillingen rundt likevekt ved å justere de vannstandsverdier som brukes i ligning (2) til verdier i nærheten av kvasistasjonære likevektsverdier der det er nødvendig. På den måten unngås dette problemet og det er mulig å ta større tidsskritt.

Faktiske vannstander som funksjon av tid integreres som tilstandsvariable i modellen ut fra beregnet barotrop komponent i dynamiske transporter, og er derfor hele tiden tilgjengelig som funksjon av tid ($\mathbf{h}_{intg} = h_{1,intg}, h_{2,intg}, \dots, h_{N,intg}$ for basseng 1,...N). Ved denne beregningen antas som en tilnærming at det horisontale arealet av vannflaten er uavhengig av vannstand, det er holdbart så lenge fjorden er mye dypere enn vannstandsviasjonene.

Når transportene skal beregnes for et tidsskritt t til $t+\Delta t$ finnes først settet av "likevektsnivåer" for vannstand (\mathbf{h}_{eq}) i de indre bassengene, definert som det settet av vannstandsverdier som ville gi konstant tidsderivert for volum (vannstand). Likevektsnivåene beregnes ved iterasjon fra \mathbf{h}_{intg} , og det som styrer iterasjonen er gitte verdier av \mathbf{h}_{ext} og $d\mathbf{h}_{ext}/dt$ for randområdene ved tid t . Løsningen \mathbf{h}_{eq} kan kalles likevektsverdier fordi de representerer den situasjon hvor vannstanden i modellbassengene og på randen "holder følge" med hverandre - til 1. orden - dvs. over et lite tidsrom.

Deretter finnes de vannstandsverdier \mathbf{h}^* som skal brukes til å beregne dynamiske transporter. Dette skjer ved en fase 2 i iterasjonsprosessen, som finner den vannstandsvektor som over et spesifisert tidsrom vil gi transporter lik midlere transport ut fra en 1.ordens analytisk løsning med konstant $d\mathbf{h}_{ext}/dt$ på randen. Likevektsløsningen \mathbf{h}_{eq} inngår i grunnlaget for denne

løsningen. Tidsrommet er en øvre grense for integrasjonstidsskrittet, og vil som regel være omtrent lik det tidsskrittet som tilslutt blir valgt. For bassenger hvor det er sterk tilbakekobling mellom vannstand og vannstandsendring ligger den itererte verdien nær likeverksverdien h_{eq} , mens det i bassenger med svak tilbakekobling er den "reelle" integrerte verdien h_{intg} som vektlegges mest.

Vannstandsverdiene h^* brukes så i ligning (1) og (3) til å beregne dynamiske transporter, og det er de barotrope komponentene i disse transportene som sammen med ferskvannstilførsler bestemmer hvordan vannstand h_{intg} endres over tid.

Metoden er implementert slik at den fungerer både for bassengene med små barotrope tidskonstanter i forhold til tidevannsperiodene, dvs. at vannstandsvariasjonene i de forskjellige bassengene er sterkt koblet, og for bassenger med sterkt dempet vannstands-variasjon i forhold til randen eller andre bassenger.

5.4. Virkning av vind på horisontalutvekslingen mellom bassenger

Selv om det er anledning til å variere koeffisienten α i ligning (1), er den strømhastigheten som beregnes der fortsatt begrenset til en ren trykkdrevet strøm. Vinddrevet overflatestrøm mellom bassengene er lagt inn som et ytterligere middel til å tilpasse modellen til observasjoner når det gjelder forskjell mellom bassenger.

For hver forbindelse er det anledning til å spesifisere et vindpådrag i form av en vindretning og en andel av vindhastigheten. Modellen vil da modifisere strømprofilen ved å legge til en bevegelsesenergi som tilsvarer en antatt vindindusert strømhastighet, dvs. at hastighetene kvadratsummeres:

$$v_{sum} = \sqrt{v_{trykk}^2 + v_{wind}^2} \quad (5)$$

Strømhastigheten beregnes ut fra vindens komponent i den angitte retningen, med den angitte andelen. For de kjøringene som er beskrevet i rapport 1 ble det brukt en faktor 0.03, slik at overflatehastigheten altså er 3% av vindhastighetens komponent i aktuell retning. Bidraget til strømhastigheten gjør seg sterkest gjeldende i overflaten, og avtar lineært med dypet til en verdi 0 et stykke ned i vannsøylen. Ved kjøring av modellen kan det spesifiseres en minstegrense for hvor langt ned denne virkningen skal strekke seg. Ut over det vil grensen være gitt ved dypet for det velblandede overflatelaget. Beregningen av vertikalblanding fra vind er beskrevet i kap. 6.4.

Denne mekanismen gjør at vinden setter opp en tvungen strøm i overflaten i tillegg til det som er gitt av trykkforskjellene. Det gir utslag på vannstandsfordelingen mellom bassengene, og etterhvert settes det opp et mottrykk som gir en kompensasjonsstrøm på større dyp.

Slik mekanismen er lagt inn nå, er det bare gjennomsnittlig vannstand innenfor hvert basseng som inngår. I virkeligheten vil det også bli en skråstilling av overflaten innenfor hvert basseng pga. vindpåvirkning. En slik skråstilling vil gi virkninger også på tetthetsflatene nedover i vannmassene, og modifisere trykkfeltet i forbindelsen mellom bassengene. Dette er ikke med i første versjon av modellen.

5.5. Fordeling av transporter i mottagerbasseng - massetransporter

Transportene er i første omgang bare definert som dynamiske transporter ut av de lagene hvor det er høyere trykk enn i nabobassengene. De dynamisk bestemte vanntransportene styrer variasjonen av dynamisk volum, dvs. vannstand, slik som beskrevet ovenfor. For å beregne endring pr. tidsenhet av vannstanden i bassengene som omtalt ovenfor er det tilstrekkelig å kjenne den barotrope komponenten, dvs. integralet av rettet strømhastighet over transportverrsnittet. Det spiller ingen rolle hvordan transportene er fordelt på dyp, eller hvor det blir av dem i det bassenget de strømmer til.

Når vi skal beregne virkningen på tetthetsprofilene som styrer den barokline komponenten er det derimot avgjørende hvilke lag transportene går til i det bassenget de strømmer til, hvilken stofftransport de medfører, og hvilken vertikal blanding de bidrar til. Nedenfor skisseres hvordan dette er behandlet i modellen.

5.5.1. Buffervolumer i overgangen mellom bassenger - tidsforsinkelser

Ovenfor ble det beskrevet et skille mellom dynamisk volum V_d og massevolum V_s . Dynamiske bestemte transporter endrer dynamisk volum, men får ikke nødvendigvis øyeblikkelig virkning i form av permanent vannutveksling mellom de to bassengene. Ved fluktuerende strømmer frem og tilbake gjennom en forbindelse, f.eks. i forbindelse med tidevann, vil det delvis være det samme vannet som strømmer frem og tilbake, og masseutvekslingen blir ikke gitt direkte av de dynamiske transportene. Topografien til kyst og bunn vil være avgjørende for hvordan strømmønsteret og den turbulente blandingen blir, og derved for den effektive vannutvekslingen.

For å kunne ta hensyn til slike ting innenfor den forenklede beskrivelsen som en horisontalintegrert modell representerer, er det for hver forbindelse definert buffervolumer for de lagene som ligger ovenfor terskelen mellom bassengene. De virker slik at fluktuerende vanntransporter mellom disse lagene får begrenset virkning på utvekslingen av vann og stoffkomponenter mellom bassengene. Buffervolumene må settes skjønnsmessig eller ved empirisk tilpasning av modellresultater til målinger.

Strukturen for buffervolumene er vist i figur 7, se også foran i figur 1. På hver side av en forbindelse, altså for hvert av de to bassengene som er forbundet, spesifiseres en serie buffervolumer $V_{buf}(i,j)$, ett for hvert lag ovenfor terskeldypet. Disse buffervolumene betegnes i ligningene nedenfor generelt med V_{buf} uten indeks, det betyr da ett eller annet element i en matrise av verdier som er definert for hver forbindelse.

Basseng 1:		Basseng 2:
Lag 1:	$V_{buf}(1,1)$	$V_{buf}(2,1)$
Lag 2:	$V_{buf}(1,2)$	$V_{buf}(2,2)$
...
Lag N:	$V_{buf}(1,N)$	$V_{buf}(2,N)$

Figur 7. Strukturen for buffervolumene på overgangen mellom to bassenger.

Tilstanden til buffervolumene defineres ved en fyllingsgrad som varierer fra 0 til 1. Fyllingsgrad 0 angir at buffervolumet er fylt opp av vann fra det bassenget det tilhører. Fyllingsgrad 1 angir at buffervolumet er helt fylt av vann fra det andre bassenget, og dette vannet antas å ha de samme egenskaper som i det bassenget det kom fra.

For hvert buffervolum er det også definert mindre overgangsvolum V_{tr} , som brukes til å angi en viss gradvis overgang mellom ulike situasjoner, som beskrevet nedenfor.

Modellkjøringene starter med fyllingsgrad 0 i alle buffervolumer. En strøm Q_{dyn} mellom to bassenger medfører i første omgang bare at fyllingsgraden øker i buffervolumene for de lag det strømmer inn i:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{Q_{dyn}}{V_{buf}} \quad (6)$$

Ettersom fyllingsgraden i disse buffervolumene overstiger $1 - V_{tr}/V_{buf}$, dvs. når den siste del V_{tr} av buffervolumet fylles opp, minskes oppfyllingen av buffervolumet, og en stadig større del av transporten gir i stedet en permanent massetransport fra det ene bassenget til det andre.

Hvis buffervolumet er helt fylt opp, blir massetransporten direkte gitt av dynamisk volumtransport multiplisert med stoffkonsentrasjoner.

For lag med utstrøm til andre bassenger går transporten tilsvarende helt eller delvis med til å tømme buffervolumet for "fremmed" vann dersom fyllingsgraden er større enn 0. Først når fyllingsgraden blir mindre enn V_{tr}/V_{buf} går transporten gradvis over til å gi utstrøm til det andre bassenget. Denne utstrømmen går da enten til å fylle opp buffervolumet i det laget transporten går til i det andre bassenget eller å gi permanent massetransport mellom bassengene, avhengig av hvordan status for buffer volumet er på den andre siden.

I tillegg er det definert en innblandingstid T_{buf} som kan betraktes som en tidskonstant for diffusiv blanding mellom buffervolumet og hovedbassenget. Hensikten med T_{buf} er at enhver periodisk strøm frem og tilbake skal gi en viss permanent utveksling av vann mellom bassengene selv om den ikke er tilstrekkelig til å fylle buffervolumene. Hvis et buffervolum V_{buf} har fyllingsgrad Φ for fremmed vann vil dette innebære en effektiv "forsinket" transport $\Phi \cdot V_{buf}/T_{buf}$ inn i tilsvarende lag, uavhengig av om det fortsatt foregår en dynamisk transport inn i dette laget fra det andre bassenget. Den forsinkede transporten settes opp fra det laget i det andre bassenget som i øyeblikket har tetthet tilsvarende det laget transporten går til.

Størrelse og blandingstid må settes på empirisk grunnlag, ved å justere modellparametre slik at modellens resultater stemmer best mulig. Topografien i området, spesielt kystlinjens form, vil bestemme i hvilken grad det er det samme vannet som kommer tilbake når strømmen snur, og hvor raskt innblandinga i det andre bassenget skjer. Her kan det være aktuelt å bruke feltmålinger og todimensjonale strømmodeller til å kalibrere den horizontalintegerte modellen for en gitt bassengforbindelse.

Det er bare lag ovenfor terskelen mellom bassengene som har definert buffervolumer. Hvis en transport havner i et lag under terskelen på grunn av sin tetthet, vil det øyeblikkelig gi en permanent massetransport med innblanding i bassenget det strømmer inn i.

Mekanismen kan skisseres slik:

I lag med dynamisk transport Q ut av bassenget blir virkningen på henholdsvis buffervolum og utstrømming fordelt slik:

Tømming av buffervolum:

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \min\left(1, \frac{\Phi \cdot V_{buf}}{V_{tr}}\right) \cdot \frac{Q_{dyn}}{V_{buf}} \quad (7)$$

Strøm til buffervolum i det andre bassenget:

$$Q_{ut} = Q \cdot \max\left(0, 1 - \frac{\Phi \cdot V_{buf}}{V_{tr}}\right) \quad (8)$$

For lag som mottar inntransport Q_{inn} ($=Q_{ut}$ fra annet basseng) blir tilsvarende:

Fylling av buffervolum:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \min\left(1, \frac{(1-\Phi) \cdot V_{buf}}{V_{tr}}\right) \cdot \frac{Q_{inn}}{V_{buf}} \quad (9)$$

Permanent transport mellom bassengene:

$$Q_p = Q_{inn} \cdot \max\left(0, 1 - \frac{(1-\Phi) \cdot V_{buf}}{V_{tr}}\right) \quad (10)$$

Den permanente transporten Q_p regnes om til en tilsvarende permanent massetransport av de forskjellige stoff og egenskaper i vannet ved å multiplisere med konsentrasjonen i det bassenget transporten hentes fra.

For alle lag over terskeldyp skjer det dessuten en forsiktig innblanding av buffervolum:

$$\left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{mix} = -\frac{\Phi}{T_{buf}} \quad (11)$$

Dette gir en forsiktig massetransport inn i bassenget:

$$\left(\frac{dM}{dt}\right)_{mix} = c_{inn} \cdot V_{buf} \cdot \left(\frac{d\Phi}{dt}\right)_{mix} \quad (12)$$

Det går samtidig en tilsvarende uttransport fra det andre bassenget.

Massetransportene beregnes ut fra øyeblikksverdier av konsentrasjoner i det bassenget det strømmer ut fra. Det kan forsvarer ut fra at de omsetningsprosessene som skjer i vannet kan antas å fortsette i løpet av transporttiden gjennom buffervolumet. Det vil imidlertid gi feil dersom tilførsler og andre transporter gir raske endringer i vannkvalitet i det bassenget strømmen kommer fra, idet slike endringer da vil få for rask virkning på massetransporten. Mer realistisk kan det bare bli dersom buffervolumene beskrives fullt ut som egne bassenger, men det ville være å utvide modellen med en finere horisontal oppdeling i flere bassenger

eller områder, og buffer- volumene er nettopp en måte å forbedre beskrivelsen av transportene for en gitt geografisk oppdeling, uten å legge inn nye volumer med selvstendig biokjemi.

Den kvasistasjonære beskrivelsen av horisontale transporter tilsier også at oppdelingen begrenses til bassenger forbundet med begrensende transportverrsnitt. En finere oppdeling, hvor hvert basseng deles i flere områder, vil kreve en annen dynamisk beskrivelse av transportene.

Det må bemerkes at det er tetthetsprofiler beregnet ut fra massetransportene som brukes til å beregne de dynamiske transportene som beskrevet tidligere. Det er ikke tatt hensyn til at de horisontale forskyvningene som er forsøkt beskrevet gjennom buffervolumene også kan gi seg utslag i ulike vertikale forskyvninger på ulike dyp; det er bare den totale vannstandsentringen som inngår i beregning av den dynamiske transporten. Denne feilen kan tenkes å ha en viss betydning fordi de vertikale forskyvningene kan være mye større enn vannstandsforskjellene mellom bassengene.

Et spørsmål i den forbindelse er hvordan de interne tidevannsbølgene spiller inn. Data i bl.a. Johannessen (1968) viser vertikale forskyvninger koblet til kortperiodisk tidevann i området sør for Drøbaksterskelen. Disse vertikale forskyvningene øker med dyp, og er ca. 5 meter omkring 20 meters dyp. Hvis noe lignende gjør seg gjeldende i indre Oslofjord, eventuelt som en form for stående bølger, kan det tenkes å influere sterkt på de horisontale transportene mellom bassengene. Dette er isåfall ikke tatt med tilfredsstillende i modellen.

5.5.2. Fordeling av innstrømning over dyp

Horisontale dynamiske transporter søker seg til det lag i det bassenget de strømmer inn hvor de hører hjemme tetthetsmessig. Dette styrer både hvilke buffervolumer som påvirkes, og hvilke lag massetransporten influerer på.

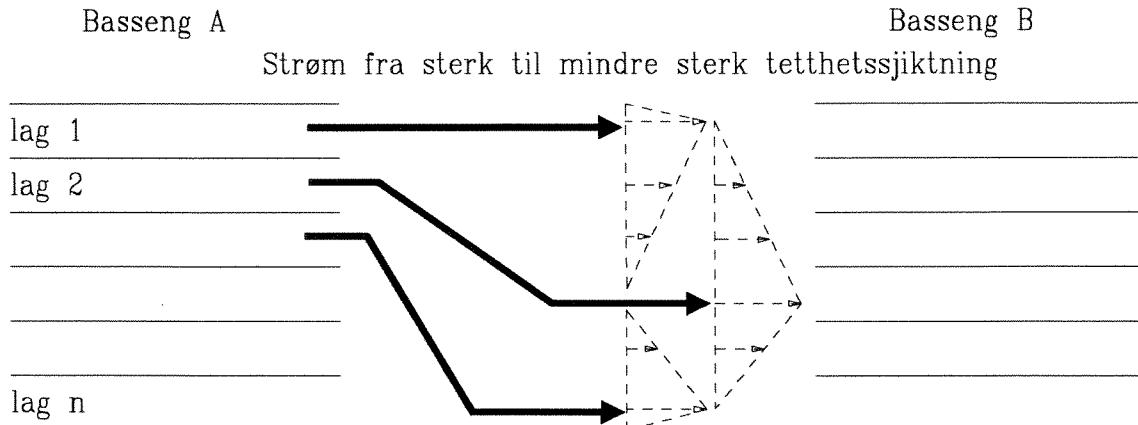
En transport fra basseng A til B vil ut fra tettheten som regel høre hjemme mellom to lag i basseng B. I modellen vil transporten da innslagre seg her og primært fordeles på disse to lagene, styrt av tetthetsforskjellene mellom innstrøm og de to lagene. Mengden fordeles omvendt proporsjonalt med absolutt forskjell i tetthet mellom innstrømmende vann og tettheten i de to lagene.

Hvis det strømmer fra svak til sterk sjiktning, vil transporter fra flere lag gå til de samme to lagene, men som regel med ulik fordeling ut fra ulikheten i tetthet.

Hvis det derimot strømmer fra et basseng med skarp sjiktning inn i et basseng med svak sjiktning i tilsvarende tetthetsintervall, kan det forekomme at transporter fra to nabolag etter sin tetthet havner i lag som er skilt fra hverandre ved ett eller flere mellomliggende lag i det basseng de strømmer inn i. Isåfall fordeles de to transportene over de mellomliggende lagene slik at det til hvert lag strømmer en blanding, med varierende blandingsforhold som gir en økende tetthet fra lag til lag. Dette er gjort for å ta hensyn til at tetthet og strømhastighet i virkeligheten varierer kontinuerlig i vertikal retning, og for å unngå at det oppstår kunstige diskontinuiteter i tetthetsprofilene.

I den første versjonen av modellen er dette gjort slik at tettheten øker lineært ned gjennom de mellomliggende lagene, dvs. transportene fordeles etter en triangulær fordeling som illustrert i figur 8. Det er også mulig å la fordelingen være styrt av tetthetene, dvs. at transportene fordeles slik at den blandingen som strømmer inn i hvert lag tilsvarer tettheten i det mot-

tagende laget. En mulig mekanisme for dette er skissert nærmere i appendiks 3, men det er altså ikke lagt inn i modellen ennå.



Figur 8. Fordeling av strømmer fra basseng med skarp sjiktning inn i et basseng med svak sjiktning i tilsvarende tetthetsintervall.

Det kan også skje at strømretningen snur midt i et lag, da reduseres utstrømmen tilsvarende, og det kan eventuelt samtidig skje en innstrøm til den ene del av laget. Modellen har ikke beregningsmessige problemer med dette, men det fremgår av beskrivelsen av mekanismen med buffervolumer ovenfor at de to motsatt rettede strømmene da kan motarbeide hverandre, slik at det blir lite permanent massetransport. Det er ikke gjort noe spesielt for å håndtere dette.

5.5.3. Homogenisering av innstrømning

Som beskrevet ovenfor kan det gå parallel strøm fra flere lag i samme retning. I forrige avsnitt ble det beskrevet hvordan slik strøm fra to parallele lag fordeles i dyp, eventuelt med overlapping, som funksjon av tettheten i de to lagene. Fordi innstrømmende vann fordeles etter tethet kan det gi en tendens til å opprettholde sjiktningen i det bassenget det strømmer inn i dersom det kan hentes vann av tilsvarende tethet fra forskjellige dyp innenfor de lagene det strømmer ut fra.

Ut fra erfaring underveis i utviklingen av modellen ble det funnet hensiktmessig å kunne påtvinge en innbyrdes blanding mellom parallele utstrømninger fra lag som ligger over hverandre. Dvs. at de tetthetsverdiene ρ_1 og ρ_2 for to parallele strømmer som ble brukt i ligningene foran blir modifisert i forhold til tettheten i de lagene det strømmer ut fra. Homogeniseringen er rent pragmatisk lagt inn som en justerbar blandingskoeffisient som kan settes uavhengig for hver forbindelse mellom bassenger, men gjelder uavhengig av dyp og strømstyrker. Mekanismen kan enkel beskrives slik:

Vi antar at vi har en situasjon med sammenhengende parallel utstrøm Q_i fra to eller flere lag $i=i_A$ til i_B , og med tettheter ρ_i i det utstrømmende vannet. I stedet for å bruke disse tetthetene direkte i beregningen i forrige avsnitt blir tetthetene modifisert slik:

$$\rho_i^* = (1 - k_{mix})\rho_i + k_{mix}\bar{\rho}_{ut} \quad (13)$$

hvor den gjennomsnittlige tettheten nå gjelder for kombinert utstrøm:

$$\bar{\rho}_{ut} = \left(\sum_{i=i_A}^{i_B} q_i \rho_i \right) / \sum_{i=i_A}^{i_B} q_i \quad (14)$$

Størrelsen k_{mix} er her blandingskoeffisienten, en verdi =0 tilsvarer at strømmen fra hvert lag ikke i det hele tatt regnes å blandes med nabostrommer, mens en verdi=1 tilsvarer full innbyrdes homogenisering av en strøm som er sammensatt av bidrag fra flere sammenhengende lag. Det er tetthetene ρ_i^* etter homogenisering som brukes til å fordele transportene på lagene i det bassenget det strømmer inn i.

Graden av blanding vil antagelig være avhengig av topografien i området, og må settes empirisk eller skjønnsmessig. Detaljerte målinger av innstrømningssituasjoner kunne bidra til å bestemme dette.

5.6. Kobling med ytre fjord- eller hav-områder

Modellen krever at det er definert et eller flere randområder, hvor vannstand, hydrografi og hydrokjemi er spesifisert som funksjon av tid og dyp. Alle bassenger måstå i forbindelse med et randområde direkte eller via andre bassenger. Transporter mellom bassenger og randområder beregnes på nøyaktig samme måte som mellom modellbassengene med vertikal fordeling av transporter styrt av tetthet, og buffervolumer på begge sider. Koblingen til randen innebærer ikke noen nye typer prosessbeskrivelser, og er derfor ikke omtalt i detalj i denne rapporten. Det henvises i stedet delvis til rapport 1 om utprøving på indre Oslofjord, og den praktiske brukerbeskrivelsen i rapport 3.

6. Vertikalblanding innenfor hvert basseng

6.1. Grunnleggende differensialligning for vertikaltransporter

Den naturlige vertikale transporten mellom lagene i et basseng kan i prinsippet beskrives ut fra den generelle ligningen for endimensjonal transport med varierende transport-tverrsnitt:

$$A \frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[A \cdot K \frac{\partial C}{\partial z} - A \cdot w \cdot C \right] + Q + P \quad (15)$$

Her er

z = dyp (0 i overflaten, >0 under overflaten)

t = tid

$C(z,t)$	= konsentrasjon av et stoff/tilstandsform ($\equiv 1$ for volum)	
$A(z)$	= horisontalt tverrsnittsareal	
K	= blandingskoeffisient (<i>diffusjonskoeffisient</i>);	[volum·lengde/areal/tid]
w	= vertikal strømhastighet, >0 for strøm rettet nedover fra overflaten mot økende dyp.	[lengde/tid]
Q	= Netto endring pga. andre transportprosesser og tilførsler utenfra, integrert over horisontalflaten	[mengde/dypenhets/tid]
P	= samlet netto virkning av biologisk/kjemisk omsetning i dyp z av stoffet eller tilstandsformen, også integrert horisontalt;	[mengde/dypenhets/tid]

Ligningen forenkler virkeligheten ved å integrere horisontalt (egentlig langs tetthetsflater) og impliserer også en antagelse om at vertikaltransportene for alle stoffer kan beskrives som funksjon av et felles sett av funksjoner med dyp for transport og blanding. Dette er ikke noen opplagt antagelse, den må bedømmes ut fra de resultatene modellen gir. Ligningen inneholder også en idealisering ved at blandingen beskrives som en kontinuerlig varierende blandingskoeffisient som i liten skala virker på den deriverte av konsentrasjonen. Idealiseringen består i at blandingen antas å foregå ved småskalaprosesser, mens det i virkeligheten også vil foregå vannutveksling på større skala knyttet til interne bølger og ulike sirkulasjonsmønstre.

6.2. Avledning av endelig differanse-ligning basert på volum-midlede konsentrasjoner.

I modellen brukes en differanseligning avledet av denne ligningen til å integrere innholdet av stoffkomponenter og varme over tid i de forskjellige lagene i modellen. Differanseligningen kan avledes ved å betrakte et lag av endelig tykkelse, avgrenset mellom to dyp. For lag nr. i kan vi betegne øvre og nedre dybdegrenser med z_{i-} og z_{i+} mot henholdsvis laget over og under.

Ved å integrere ligning (15) vertikalt mellom de to dypene, og med Q og P uttrykt som endring pr. volum q og p får vi for lag i :

$$\frac{\partial M_i(z_{i-}, z_{i+}, t)}{\partial t} = \left[A \cdot K \frac{\partial C}{\partial z} - A \cdot w \cdot C \right]_{i+} - \left[A \cdot K \frac{\partial C}{\partial z} - A \cdot w \cdot C \right]_{i-} + (q_i + p_i)V_i \quad (16)$$

hvor

$$M_i(z_{i-}, z_{i+}, t) = \int_{z_{i-}}^{z_{i+}} A(z)C(z, t)dz \quad (17)$$

er mengden av det aktuelle stoffet mellom de to dypene. Indeks $i+$ og $i-$ betegner henholdsvis grenseflaten mellom lag nr. i og henholdsvis lag nr $i+1$ og $i-1$. Dvs. at ledd med indeks $i+$ vil gjenfinnes med indeks $i+1-$ i ligningene for lag $i+1$.

De to første leddene på høyre side beskriver vertikal transport gjennom faste grenseflater til lagene over og under. Det siste leddet på høyre side beskriver virkning av andre transporter (utveksling med andre bassenger, ferskvannstilførsel, transporter knyttet til dykkede utslipper) og netto produksjon (-forbruk) innenfor laget uttrykt som volum-midlede rater q og p (*mengde/volum/tid*), dvs. vi har regnet om virkningen av leddene Q og P til endring pr. volum.

Ligning (16) gjelder for grenser z_{i-} og z_{i+} som er konstante over tid. Selv om eutrofimodellen i hovedsak har faste nivåer, er det lagt inn en viss variasjon over tid av volumet innenfor de enkelte lagene. Foreløpig er dette bare en proporsjonal variasjon knyttet til vannstandsvariasjoner, slik at hvert lag inneholder en konstant andel av totalvolumet. Det innebærer likevel at modellen er forberedt for å gjøres om til en ekte lagdelt modell, hvor de vertikale grensene mellom lagene flyter. Grensene kan da i stor grad følge raske eller kortperiodiske vertikale bevegelser av vannmassene i forbindelse med horisontalutveksling, bl.a. dypvannsfortrytelser, og det kan gi en bedre beskrivelse med bl.a. mindre numerisk diffusjon. Generelt betraktes massebalansen for et lag som varierer i tykkelse og vertikal beliggenhet over tid, dvs. at dybdegrensene $z_{i-}(t)$ og $z_{i+}(t)$ er funksjoner av tid. Da kan M_i betraktes som en ren funksjon av tid: $M_i(t) = M_i(z_{i-}(t), z_{i+}(t), t)$. Den totalderiverte av ligning (17) med hensyn på tid gir:

$$\frac{dM(z_{i-}, z_{i+}, t)}{dt} = \frac{\partial M(z_{i-}, z_{i+}, t)}{\partial t} + A(z_{i+})C(z_{i+}, t)\frac{\partial z_{i+}}{\partial t} - A(z_{i-})C(z_{i-}, t)\frac{\partial z_{i-}}{\partial t}. \quad (18)$$

Ved å sette inn ligning (16) får vi massebalansen for et varierende volum $V_i(t)$ mellom $z_{i-}(t)$ og $z_{i+}(t)$:

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = \left[D\frac{\partial C}{\partial z} - W_a \cdot C \right]_{i+} - \left[D\frac{\partial C}{\partial z} - W_a \cdot C \right]_{i-} + q \cdot V_i(t) \quad (19)$$

hvor følgende størrelser nå er innført:

$$D(z) = A(z) \cdot K(z) = \text{Vertikalblanding gjennom areal } A; \quad (\text{volum-lengde/tid})$$

$$W_{a,i\pm} = A_{i\pm} \left(w_{i\pm} - \frac{\partial z_{i\pm}}{\partial t} \right) = \text{Vertikal transport nedover gjennom } z_{i\pm}(t); \quad (\text{volum/tid})$$

Ligning (19) er fortsatt formelt sett eksakt, bortsett fra den idealiseringen det er å beskrive blandingen som en kontinuerlig varierende blandingskoeffisient som virker på den deriverte av konsentrasjonen. Idealiseringen består i at blandingen antas kunne beskrives som resultat av en kontinuerlig fordeling av småskalaprosesser, mens det i virkeligheten også vil foregå vannutveksling på større skala, knyttet til interne bølger og ulike sirkulasjonsmønstre. Idealiseringen kan også gis en statistisk tolkning, dvs. at den beskriver et gjennomsnitt eller en statistisk forventningsverdi.

I modellen trenger vi en differanseligning basert på volummidlede konsentrasjoner for de enkelte lagene og lagtykkelsener. Uansett hvilken tilnærmelse som brukes for de to første leddene vil ligningssystemet ta vare på massebalansen m.h.t. utveksling og transport mellom lagene, fordi alle de leddene som beskriver dette vil gjenfinnes med motsatt fortegn i ligningen for laget ovenfor eller nedenfor. For lagene i topp og bunn forsvinner det ene leddet, og utvekslingen mot hhv. atmosfære og bunn kommer inn som endel av restleddet $(q_i + p_i)V_i$. Overgangen til differanseligningen gir bare en tilnærmet løsning i forhold til den idealiserte

ligningen, men feilene er slik at de ikke innvirker på massebalansen. Det har fordeler ved at det gjør det lettere å avsløre rene programmeringsfeil i modellen.

Uttrykkene for vertikaltransport i ligning (19) inneholder konsentrasjon C og konsentrasjonsgradient dC/dz i grenseflaten mellom lagene. Disse uttrykkene må erstattes av tilnærmelser beregnet ut fra lagtykkelse og volum-midlede konsentrasjoner innenfor hvert lag. Dette er nærmere omtalt i appendiks 4.1 og 4.2.

Resultatet kan formuleres på to måter. Foreløpig er ligningen nedenfor brukt i modellen:

$$\frac{d(V_i \bar{C}_i)}{dt} = W_{d,i+}^* \cdot (C_{i+1} - C_i) - W_{a,i+} C_{a,i+} - W_{d,i-}^* \cdot (C_i - C_{i-1}) + W_{a,i-} C_{a,i-} + (q_i + p_i) V_i \quad (20)$$

Her er $C_{a,i\pm}$ effektiv konsentrasjon for advektiv transport:

$$C_{a,i+} = \begin{cases} C_i & \text{hvis } W_{a,i+} > 0 \\ C_{i+1} & \text{hvis } W_{a,i+} < 0 \end{cases} \quad C_{a,i-} = \begin{cases} C_{i-1} & \text{hvis } W_{a,i-} > 0 \\ C_i & \text{hvis } W_{a,i-} < 0 \end{cases} \quad (21)$$

De advektive leddene $W_{a,i\pm}$ bestemmes ut fra kontinuitetsbetrakninger, og er gitt direkte av summen av netto utstrøm -innstrøm til lagene under den aktuelle grenseflaten.

Leddene $W_{d,i\pm}^*$ er toveis vannutveksling med laget under (+) og over (-), korrigert for å motvirke numerisk diffusjon:

$$W_{d,i\pm}^* = \frac{A_{i\pm} K_{i\pm}}{(h_{i\pm} + h_i)/2} - 0.5 \cdot |W_{a,i\pm}| \cdot \left(1 - \frac{|W_{a,i\pm}| \cdot \Delta t}{(V_i + V_{i\pm})/2} \right) \quad (22)$$

I appendiks A.4.3 er det skissert hvordan ligning (20) brukes i praksis under simuleringen. Den toveis vannutvekslingen er implementert som en utjevningsprosess, som gir stabil løsning selv når blandingskoeffisienten blir meget stor. Virkningen av adveksjonen beregnes som en del av den totale tidsderiverte som integreres over tidsskrittet på vanlig måte.

I en alternativ formulering som matematisk er helt ekvivalent betraktes toveis utveksling og advektiv transport i en kombinert beskrivelse, satt sammen av to enveis transporter av ulik størrelse:

$$\frac{d(V_i \bar{C}_i)}{dt} = [W_{d,i+} + (1 - \alpha_{i+}) \cdot W_{a,i+}] C_{i+1} - [W_{d,i+} - \alpha_{i+} \cdot W_{a,i+}] C_i - [W_{d,i-} + (1 - \alpha_{i-}) \cdot W_{a,i-}] C_i + [W_{d,i-} - \alpha_{i-} \cdot W_{a,i-}] C_{i-1} + (q_i + p_i) V_i \quad (23)$$

hvor

$$W_{d,i\pm} = \frac{A_{i\pm} K_{i\pm}}{(h_{i\pm} + h_i)/2} \quad (24)$$

og

$$\alpha_{i\pm} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{W_{a,i\pm} \Delta t}{(V_i + V_{i\pm})/2} \right) \quad (25)$$

Da kan den utjevningsprosessen som er beskrevet i appendiks 4.3 brukes for kombinert diffusjon/adveksjon.

Blandingskoeffisienten $K(z,t)$ er et samlet uttrykk for mange komplekse prosesser, og må beskrives empirisk. I kap. 6.3. drøftes hvordan $K(z,t)$ kan beregnes empirisk og beskrives som funksjon av de fysiske forhold.

6.3. Empirisk beskrivelse av vertikal blandingskoeffisient i dypvannet mellom innstrømninger.

Dersom en har nok data for konsentrasjonen $C(z,t)$ av et stoff hvor Q og P er kjent, er det i prinsippet enkelt å beregne effektiv blandingskoeffisient $K(z,t)$ empirisk ut fra ligningen ovenfor, forutsatt at en også har data for vertikal hastighet $w(z,t)$. Enklest er det for et konservativt stoff hvor $Q,P = 0$, og for perioder uten særlig vertikal advektiv bevegelse, dvs. $w=0$. Beregningsmetoden drøftes i kap. 6.3.1.

Målet er å beskrive vertikalblanding som funksjon av fysiske forhold. I kap. 6.3.2. oppsummeres noen slike beskrivelser gitt i litteraturen generelt, og i kap. 6.3.3. tidlige beskrivelser for indre Oslofjord. I kap. 6.3.4. redegjøres for egne beregninger av diffusjonskoeffisienten i Vestfjorden og Bunnefjorden basert på hydrografisk datamateriale og resultatene drøftes i sammenheng med kap. 6.3.3. Tilslutt beskrives en modell for vertikalblanding som funksjon av tetthetssjiktningen i kap. 6.3.5.

6.3.1. Beregningsmetodikk ved bruk av massebudsjetter

For å estimere vertikal blandingskoeffisient i fjorder er det mest naturlig å se på saltholdighet, og bruke salt som konservativt sporstoff. Ved å integrere ligningen ovenfor fra bunnen og opp til et gitt dyp z , og løse den med hensyn på K får ligningen:

$$K = - \frac{dM_s/dt}{(dS/dz)A} \quad [\text{lengde}^2/\text{tid}] \quad (26)$$

hvor

- z = dyp
- $A(z)$ = horisontalt areal
- $S(z,t)$ = saltholdighet
- $M_s(z,t)$ = total mengde salt under dyp z .

dM_s/dt beregnes ut fra endring av M_s fra et tidspunkt til et annet og dS/dz ut fra endring mellom to måledyp. For å få samhørende verdier av dM_s/dt og dS/dz må M_s interpoleres til midt mellom to måledyp, og S må interpoleres til midt mellom to tidspunkter.

Dette kan gjøres for alle dyp og alle tidsperioder i de hydrofysiske/hydrokjemiske data, og gir et sett av data som kan brukes til å parametrisere empiriske modellbeskrivelser for vertikalblanding som funksjon av ytre krefter, tetthetssjiktning eller dyp.

I denne analysen er det i første omgang valgt å bruke et annet mål på vertikalblanding som grunnlag for en slik parametrisering. I stedet for å beregne koeffisienten K som ovenfor, beregnes det arbeidet som blandingsprosessene utfører mot gravitasjonsfeltet pr. masseenhet og tid:

$$E = K N^2 \quad (\text{enhet effekt/masse} = \text{lengde}^2/\text{tid}^3) \quad (27)$$

Tetthetssjiktningen er her uttrykt ved stabiliteten N^2 . Størrelsen N , som kalles Brunt-Väisälä-frekvensen, er definert ved

$$N = \left[\frac{g}{\rho} \cdot \frac{dp}{dz} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (28)$$

hvor ρ = vannets tetthet

Blandingseffekten E kan beregnes ved følgende formel i stedet for å gå veien om diffusjonskoeffisienten:

$$E = \frac{g}{\rho} \cdot \frac{-dM_s/dt}{A(z)} \cdot \frac{dp/dz}{dS/dz} \quad (29)$$

Den siste brøken på høyre side i ligning (29) har i stor grad karakter av en konstant omregningsfaktor, og beregningene er gjort slik at det er denne faktoren som midles for begynnelsen og slutt av hver tidsperiode, og ikke hver enkelt dybdegradient.

En praktisk fordel med å basere analysen på blandingsenergi E er at den i mindre grad enn blandingskoeffisienten K er beregningsmessig koblet til tetthetsgradienten, som ønskes undersøkt som mulig forklaringsvariabel.

Hvis blandingskoeffisienten K benyttes, må en ta i betrakting at tetthetsgradienten dp/dz i stor grad er proporsjonal med gradienten i salinitet dS/dz , som inngår direkte i uttrykket for blandingskoeffisienten. Selv tilfeldige fluktuasjoner i saltgradienten, f.eks. pga. målefeil, vil være koblet til variasjoner i beregnet K og innvirke sterkt på samvariasjonen mellom de to variablene. En log-lineær regresjonsanalyse mellom K og dp/dz vil da ofte i hovedsak vise det selvsagte matematiske faktum at $1/X$ er omvendt proporsjonalt med X , og det vil gjøre seg sterkere gjeldende jo større de tilfeldige feilene i dS/dz er. Dette kan gjenspeile seg i en høy tilsynelatende forklaringsgrad som ikke har fysisk bakgrunn, og som kan gi inntrykk av en mye bedre sammenheng enn dataene gir reelt grunnlag for. Statistiske testverdier må isåfall brukes med forsiktighet. Konfidensintervaller for helningskoeffisienten i en slik regresjon kan fortsatt være gyldige, og kan brukes til å bedømme om helningskoeffisienten er signifikant forskjellig fra en antatt verdi (hypotese). Derimot vil estimater for signifikansnivå og korrelasjonskoeffisient være misvisende.

Også når E analyseres som funksjon av dp/dz er det prinsipielt et problem at begge variable er beregnet ut fra samme datamateriale og derfor ikke er stokastisk uavhengige, men problemet er mindre. Som formelen ovenfor viser, er beregnet E i stor grad proporsjonal med dM_s/dt , men skalert om fra salt til tetthet. Tetthetsgradienten dp/dz er beregnet som differensen i

tethet mellom to dyp midlet over to tidspunkter. Det er derfor mindre grunn til å vente systematisk samvariasjon i dette tilfelle pga. tilfeldige feil i tethetsgradienten, og det er mindre sjanse for å bli forleddet til statistiske feilslutninger. De formlene som benyttes til å beregne E viser at det er like stor sannsynlighet for positiv som negativ korrelasjon av hvordan målefeil slår ut i de to beregnede variable dM/dt og dp/dz . Det vil derfor ikke ventes noen tilsynelatende systematisk samvariasjon pga. målefeil eller andre "tilfeldige" avvik i dette tilfelle.

Uansett om E eller K beregnes som avhengig variabel er det et problem at beregnede verdier for ulike dyp på samme tidspunkt tildels er basert på det samme datamaterialet gjennom integrasjon av saltinnholdet under det aktuelle dypet. Datamaterialet vil derfor ikke tilfredsstille krav i statistiske testmetoder om uavhengighet. Det gjør at en må stille sterke krav til sammenheng for å påstå statistisk signifikans. I beregningene i kap. 6.3.4. er det forsøkt kompensert for dette ved å regne om de statistiske testverdiene.

6.3.2. Parametrisering av vertikaldiffusjonen som funksjon av sjiktning

Prosedyren ovenfor gir et sett med verdier for blandingsenergi mot tyngdefeltet for endel tidsperioder og dyp. Vi ønsker å parametrisere en matematisk beskrivelse av vertikaldiffusjonen som kan brukes i fjordmodellen. Siden modellen skal være horisontalintegret, trenges en forenklet beskrivelse. Det er ikke uten videre gitt hvordan en slik beskrivelse skal være. Energien kan komme fra advektive horisontale strømmer, både tidevann og tethetsdrevne strømmer, og fra vindenergi. Vertikalblandinga kan tenkes å variere både med dyp og sjiktning.

En vanlig bruk forenklet beskrivelse er å korrelere blandingskoeffisienten med stabiliteten i vannmassen, gitt ved Brunt-Väisälä-frekvensen N .

$$K = k \cdot N^{-\alpha} \quad (30)$$

Det oppgis nokså varierende verdier for α i litteraturen.[§] Fischer et al. (1979) s.195 angir at estimater for α kan variere fra 0.4 til 4 for innsjøer. Gargett (1984) argumenterer ut fra energibetrakninger for at vertikaldiffusjon i et internt bølgefelt i sjiktede vannmasser bør variere proporsjonalt med N^α , hvor $\alpha = 0.5$ til 1, og oppsummerer endel måleresultater, hvor α varierer i området 0.8-0.9 for innsjøer, basert på varmebudsjetter, og i området 1.0-1.2 for fjorder. Gargett gjengir også resultater som viser at direkte målt energidissipasjon i havområder øker omrent proporsjonalt med N , det kan tilsvare $\alpha = 1$ dersom en konstant andel av dette omsettes i blandingsarbeid mot tyngdefeltet. Stigebrandt og Aure (1989) har funnet sterkt varierende koeffisienter i endel fjorder på Mørekysten. Etter en vurdering av dataenes pålitelighet står de igjen med 11 antatt noenlunde pålitelige estimater fra 1 til 2, med gjennomsnitt 1.5 og standardavvik 0.4.

En koeffisient $\alpha = 2$ tilsvarer konstant energiforbruk mot gravitasjonsfeltet, uavhengig av sjiktningen. De faktiske estimatene ligger stort sett noe under denne verdien, og antyder at energien øker noe med økende sjiktning.

[§] Noen kilder skriver ligningen på formen $K = k N^{-2\alpha}$. De α -verdiene som oppgis her er regnet om til den første formen.

Det er imidlertid ikke uten videre opplagt at det er en eksplisitt sammenheng mellom tetthetssjiktning og blandingsenergi. I de data som brukes for å bestemme blandingskoeffisienten vil som regel stabiliteten N i hovedsak minske nokså lovmessig med dypet, mens den bare sekundært varierer med tid for et gitt dyp. Den statistiske sammenhengen mellom blandingsarbeid og sjiktning kan derfor skyldes at begge deler varierer med dyp, og trenger ikke være gyldig for situasjoner med uvanlig sterk eller svak sjiktning. Det kan f.eks. tenkes at turbulens genereres i visse dyp, ved vindpåvirkning ved overflaten, og ved interne bølger omkring sprangsjiktet, og forplanter seg vertikalt samtidig med at energien dels dissiperes, og dels brukes til å overvinne tyngdefeltet. Isåfall er det først og fremst naturlig å anta at energien er en funksjon av dypet. Sjiktningen kan imidlertid tenkes å innvirke på hvor mye turbulent energi som skapes eller hvor stor andel som brukes mot tyngdefeltet ved vertikal blanding. Isåfall vil en vente at energien varierer med tetthetsgradienten for gitt dyp.

Et problem med å beskrive blandingen som funksjon av sjiktningen ved en empirisk beregning, er at det i virkeligheten ikke er noen enveis sammenheng; sjiktningen er igjen et resultat av blandingen. Sterk blanding i en periode vil gi redusert sjiktning i tiden etterpå, og nettoeffekten av dette kan være slik at en får en statistisk sammenheng mellom blandingskoeffisient og sjiktning, uten at blandingen er en funksjon av sjiktningen. En løsning på dette ville være å korrelere blandingen i en tidsperiode med sjiktningen ved starten av perioden, i stedet for midlere sjiktning i perioden. Det er ikke gjort i beregningene for Oslofjorden i kap. 6.3.4. fordi det er så lange måleperioder.

Som en illustrasjon på dette problemet kan nevnes at Armi (1979) har avledet en sammenheng $K_z N^2 = \text{konstant}$ for havområder og forholdsvis store dyp, hvor det er variasjonen i sjiktning med dyp som forklares som funksjon av diffusjonskoeffisienten, og ikke omvendt. Armi går ut fra at vertikalblandinga i hovedsak skjer i randområdene, dvs langs bunnen, og antar ut fra det at effektiv diffusjon pr. areal er proporsjonal med forholdet mellom bunnarealet over et visst dypintervall og totalt horisontalt areal. Dette gir økende diffusjonskoeffisient med økende dyp. Når det samtidig antas konstant tetthetsfluks med dypet ut fra krav til massebevaring (salt) fås $N^2 = \text{konstant}/K_z$ som et resultat av blandingsprosessene og ikke omvendt. Analysen ser imidlertid ut til å være litt inkonsistent, fordi den bygger på at blandingskoeffisienten varierer vertikalt som funksjon av arealforhold, mens det samtidig brukes en massebalanse-betraktnign som ikke tar hensyn til at tverrsnittsarealet varierer med dyp.

6.3.3. Tidlige beregninger for Oslofjorden

6.3.3.1. Sammenheng mellom blandingskoeffisient og sjiktning

Gade (1970) har analysert data fra perioden 1963-1965 for indre Oslofjord[§], og beregnet vertikaldiffusjon både ved budsjettberegninger på salt for midlere og store dyp, og ut fra nedtrengning av varme for små og midlere dyp. Han har også estimert sammenhenger mellom tetthetsgradient og vertikaldiffusjon beregnet ut fra både salt og temperatur. Han fant verdier for α fra 1.2 til 1.6 for dypere lag i Oslofjorden basert på salt med de fleste estimatene nær 1.6, og 1.6 til 2.6 i overflatelaget, basert på varmnedtrengning. For saltbasert diffusjon i Vestfjorden fant Gade at $\alpha = 1.6$. Ut fra en visuell bedømmelse ser det ut til at dette er

[§] Gade brukte ligningsformen $K = k N^{-2\alpha}$, og hans verdier på α er derfor multiplisert med 2.

signifikant forskjellig fra 2. I Bunnefjorden er sammenhengen mer variabel fra år til år, og med større spredning i datapunktene. Det er muligens tendens til at energien øker ennå sterkere med sjikningen, dvs. at α er lavere enn 1.6, men det er vanskelig å bedømme visuelt. For diffusjon nær overflaten (0-60 meter), basert på analyse av oppvarming fra overflaten, ser det ikke ut til å være noe signifikant avvik fra helning $\alpha=2$, til det er spredningen i data for stor. Gade oppgir ikke konfidensintervaller for sine beregninger av α . Vanlige konfidensintervaller ville ikke være riktige, fordi beregnede diffusjonskoeffisienter for ulike dyp i samme tidsrom ikke har uavhengig målegrunnlag. Dette forsterkes av at det er brukt glidende midler og analytisk tilpassede funksjoner som grunnlag for beregningene, slik at det blir ennå større kobling mellom ulike datapunkter.

Gades figurer viser at $\log_{10}E$ (cm^2/s^3) i Vestfjorden, bestemt ut fra saltbudsjett, varierte i området -3.5 til -4 for høye N -verdier, dvs. nær overflaten, ned til ca. -4.5 for lave N , dvs. for de største dypene. I Bunnefjorden varierte verdiene sterkere både over tid og som funksjon av sjikning, fra området -3 til -4 for høye N -verdier, dvs. for små dyp, og ned til rundt -5 eller lavere for lave verdier av N , dvs. for store dyp. Gades figurer viser ingen systematisk forskjell mellom Bunnefjorden og Vestfjorden for høye verdier av N , mens Bunnefjord-verdiene ligger systematisk under med en faktor 5-10 for små N -verdier (store dyp) når en ser på datasett fra år til år.

6.3.3.2. Forholdet mellom stoff- og varmediffusjon

Ved temperaturbaserte beregninger fant Gade at $\log_{10}E$ (cm^2/s^3) varierte rundt en verdi -3 over sprangsjiktet, omtrent likt i begge bassenger, og i intervallet [-3,-5] under sprangsjiktet. Det var store variasjoner fra år til år, og mindre klar sammenheng med sjikning.

Av resultatene kan det se ut som varmediffusjonen er 2 til 5 ganger større enn diffusjonen av salt ved samme tetthetssjikning. Det er vanskelig å tenke seg at det reelt kan være høyere diffusjon for varme i forhold til salt, selv om muligheten for dette underbygges av Gade ved henvisning til annen litteratur. Molekylær saltdiffusjon i sjøvann varierer fra 0.9 til 1.6 $10^{-5}\text{cm}^2/\text{s}$ ved temperaturer fra 5 til 25°C (Horne 1966). Termisk diffusjon på molekylærskala er 100 ganger større, ca. $1.5 \cdot 10^{-3}\text{cm}^2/\text{s}$ ved 20 °C. I Oslofjorden har Gade (1970) funnet verdier på vertikal diffusjon fra 0.05 cm^2/s og oppover, og for dypvannet er verdiene mye høyere, typisk 1 cm^2/s , dvs. at turbulent og advektivt preget vertikalblanding er mye viktigere enn molekylær diffusjon.

En alternativ forklaring på forskjellen mellom tilsvarende saltdiffusjon og varmediffusjon kan være at noe av den empirisk beregnede varmediffusjonen i virkeligheten skyldes horisontal utveksling med ytre Oslofjord. Gade (1970) viser i sin figur 25 at varmenedtrengningen går dypere i Breiangen enn i indre Oslofjord. I Breiangen finnes hoveddelen av den vertikale temperaturvariasjonen mellom 40 og 80 meter, mens det i indre Oslofjord er mye større variasjon gjennom de øverste 40 metrene. Saltvariasjonen med dypet følger et mye mer likt mønster i de to områdene. Siden de horisontale advektive transportene i stor grad foregår langs flater med konstant salinitet, kan de tenkes å bidra vesentlig til temperaturutviklingen i indre Oslofjord på mellomdybde og gi for høye tilsvarende diffusjonskoeffisienter basert på temperatur.

I eutrofimodellen for indre Oslofjord er det derfor valgt å operere med samme diffusjonskoeffisient for stoff og varme, og den bestemmes i utgangspunktet på basis av saltholdighetsobservasjoner.

6.3.3.3. Teori om tidevannsenergi som hovedkilde for blanding

Stigebrandt (1977) har fremsatt en teori om at energi til den vertikale blandingen hovedsakelig kommer fra interne bølger knyttet til tidevannet. Stigebrandt antar at blandingen skjer i forbindelse med at slike interne bølger bryter mot bunnen, og har anslått empirisk at ca. 5% av tilgjengelig energi i tidevannsbølgen omsettes i arbeid mot tyngdefeltet på grunnlag av beregninger i indre Oslofjord. Omtrent det samme forholdstallet er også funnet av Stigebrandt og Aure (1989) med datamateriale fra en rekke terskelfjorder på Mørekysten for forholdstallet mellom volumintegrrert arbeid mot tyngdefeltet og energi i intern tidevannsbølge beregnet ut fra en tolagsmodell. Det siste materialet tyder på en reell proporsjonalitet når en sammenligner ulike fjorder.

En tilsynelatende bekreftelse på at vertikalblandingen skjer i spesielle soner langs bunnen kan finnes i sporstoffundersøkelser gjort i Vestfjorden over ca. en måned sommeren 1977. Her ble for de frie vannmasser rundt 25 meters dyp beregnet en vertikal diffusjons- koeffisient på bare 10% av det som kunne beregnes ut fra saltbudsjetten for forsøksperioden (Bjerkeng et al. 1978).

Til støtte for teorien kan også nevnes at Gargett (1984) refererer resultater fra en terskelfjord på Grønland, hvor vertikaldiffusjon bestemt ut fra radioaktivt sporstoff ble ca. 1/10 av det som beregnes ut fra saltbalanse for dypvannet over 3 måneder.

Gargett (1984) advarer riktignok mot å beregne diffusjonskoeffisienter for langtids sporstoff-forsøk basert på skyspredning, dvs. ved å se på vertikalprofiler gjennom skyen, og anbefaler i stedet at en da bruker total-budsjetter på sporstoffet. Bakgrunnen er at en vertikal variasjon i diffusjonskoeffisienten vil forstyrre tolkningen av spredning av skyen.

Dersom total blandingsenergi integrert over volum er en konstant andel av tidevannsenergien som antatt av Stigebrandt og Aure (1989) kan ikke blandingskoeffisienten bare være lokalt skalert av sjiktningen. Stigebrandt og Aure utleder en sammenheng:

$$K = \frac{w}{M^2 \rho_0} \cdot c \cdot \left(\frac{N}{M} \right)^{\delta-1}; \quad \delta = 1 - \alpha \quad (31)$$

hvor

M = Brunt-Väisälä frekvensen N midlet over volumet av bassenget nedenfor terskelen.

$\bar{N}_c = \overline{(N/M)^{1+\delta}}$ midlet over volumet under terskeldyp.

w = blandingsarbeid mot tyngdefeltet, midlet over samme volum, antatt å være en konstant andel (5%) av energi i intern tidevannsbølge i sprangsjiktet over terskelen.

ρ_0 = tetthet (tilnærmet konstant).

Ligning (31) er ekvivalent med

$$K = k \cdot N^{-\alpha} = k \cdot N^{\delta-1} \quad (32)$$

hvor konstanten k er gitt som en volumintegregert skaleringskonstant:

$$k = \frac{w}{\rho_0 n} ; \quad n = N^{\delta-1} \quad \text{midlet over basseng volumet.} \quad (33)$$

Stigebrandt og Aure finner $\delta=-0.5$ som en rimelig midlere verdi, dvs. $\alpha = 1.5$, for den lokale skaleringen mot tyngdefeltet, men med ganske store variasjoner mellom ulike fjorder. En forklaring på den store variasjonen kan ligge i at K uttrykkes som funksjon av flere korrelerte størrelser: sjiktningen inngår i både w , N og M , og koeffisienten δ slår ut likt både i lokal verdi N i teller og volummidlet verdi M i nevner. Ved beregningen av δ og c for hvert fjordbasseng ser det imidlertid ut til at det er brukt midlere verdier for w og M , dvs. at en må vente at all effekt av variasjon i sjiktningen vil slå ut i tilpasning av koeffisienten δ . Dette kan bidra til stor usikkerhet i korrelasjonen som bestemmer δ . Dessuten ser det ut til at størrelsen c er bestemt som en konstant over tid for hver fjord, mens den etter sin definisjon kan variere etter tetthetsprofilens form. Dette kan også bidra til usikkerhet.

Etter Stigebrandt og Aures formulering skal total blandingsenergi i hovedsak være en funksjon av topografi, tidevannsamplitude og tykkelse og tetthet av overflatelaget. Det er da ikke egentlig tilstrekkelig å uttrykke blandingskoeffisienten som funksjon av sjiktningen lokalt, dersom en skal gi en funksjonell beskrivelse av vertikalblandinga for et tidsforløp med sterkt varierende sjiktning.

6.3.4. Egne beregninger for indre Oslofjord

6.3.4.1. Datagrunnlag og praktisk fremgangsmåte ved budsjettberegningen

Blanding er estimert for de to hovedbassengene i fjorden. For hvert basseng er valgt den hydrografiske stasjon som dekker mest mulig av hele dypintervallet:

Bunnefjorden: EP1

Vestfjorden: FL1

Det er brukt data for saltholdighet, temperatur og tetthet fra perioden 1974 til 1987, samlet inn som ledd i overvåkningen av indre Oslofjord (Magnusson et. al. 1974-1994). Disse data er kombinert med topografiske data for å beregne mengde under gitte dyp som funksjon av tid. Saltholdighetsobservasjoner brukes til å beregne vertikalblandinga, mens temperatur og tetthetsdata brukes til kontroll og siling av data som beskrevet ovenfor. Selve beregningen er gjort med et EDB-program *MASSE-BUDSJETT* laget ved NIVA, som utfører den beregningen som er beskrevet ovenfor på de antatt konservative parametre, og dessuten kan beregne forbruk eller produksjon av ikke-konservative stoffer ved å korrigere endring av mengde pr. tidsenhet med beregnet diffusiv transport.

6.3.4.2. Eliminasjon av data hvor det er indikasjon på innstrømning

Beregningen som er beskrevet ovenfor er basert på at alle endringer i saltinnholdet skyldes prosesser som kan beskrives tilnærmet som en blanding mellom vannmasser på ulike dyp innen samme basseng.

Periodiske innstrømninger fra andre bassenger på intermediære og store dyp vil forstyrre bildet, fordi det skjer en netto tilførsel av salt, slik at nedgangen i $M_s(z,t)$ over tid blir redusert eller snudd til en økning. Fordi vi bare bruker data for en stasjon i hvert basseng, kan også horisontale bevegelser pga. vind og interne bølger gi avvikende data.

For å få best mulig bestemmelse av vertikalblandingen er det gjort en siling av data, slik at vi bare tar med perioder hvor det kan antas stagnerende forhold, dvs. uten merkbare forstyrrelser pga. innstrømninger. Datapunkter kuttes ut dersom en av følgende delvis overlappende indikasjoner på innstrømninger finnes:

- Beregnet diffusjonskoeffisient basert på saltholdighet er negativ. ($dM_s/dt > 0$, betyr innstrømning).
- Gjennomsnittlig tetthet av vannmassene under gitt dyp øker med tid.
- Temperaturen er ikke konservativ innenfor 50% nøyaktighet. Dette vil hjelpe til å luke ut perioder med innstrømninger av kaldt og mindre salt vann om vinteren som ikke influerer merkbart på tettheten, eller innstrømninger hvor saltholdighet og egenvekt er nær bassengvannets.
- Saltgradienten og eller tetthetsgradient i begynnelsen eller slutten av en periode er negativ (uklar sjiktning, målefeil).

Disse kriteriene anvendes lokalt for hvert datapunkt. Selv om det er spor av innstrømninger på større dyp, blir altså data for overliggende dyp tatt med dersom forstyrrelsene ikke gjør seg merkbart gjeldende videre oppover. Dette kan diskuteres, muligens burde avvik på ett dyp bety at en også kuttet alle overliggende punkter for samme tidsperiode.

Indikasjonene er delvis overlappende, men det antas at de kan utfylle hverandre og gi sikrere siling av data. Silingen hindrer ikke fullt ut at feilaktige data kommer med, men bidrar til en mer robust statistisk estimering av vertikalblandingen.

For å kunne bedømme godheten i de data som tas med, estimeres en relativ nøyaktighet i beregnet blandingsenergi ut fra hvor godt temperatur og tetthet oppfyller kravet til konservative parametre.

Fordi innstrømninger stort sett er knyttet til vinterhalvåret, betyr dette at metoden vil gi flest verdier for vertikalblanding i sommerhalvåret. Vi vil derfor kunne få et litt skjevt bilde av vertikalblanding ved å basere oss bare på massebudsjetter.

6.3.4.3. Statistisk analyse av vertikalblanding mot sjiktning og dyp

Budsjett-beregningen gir tabeller med samhørende verdier av blandingsarbeid mot tyngdefeltet (E) og sjiktningen gitt ved Brunt-Väisälä-frekvensen (N). Resultatene er analysert statistisk. Først er det gjort en enkel varians-analyse av $\log E$ gruppert etter dyp over hele materialet for å se om variasjonen med dyp er signifikant. Den statistiske testvariabel F fra denne testen er regnet om til en korrigert F^* , tilsvarende at det bare er en frihetsgrad (et uavhengig datapunkt) pr. tidsperiode. Dette er et forsøk på å korrigere for at det kan ventes samvariasjon mellom datapunkter ved samme tidspunkt:

$$F^*(N_z, N_t - N_z) = F(N_z, N_d - N_z) \frac{N_t - N_z}{N_d - N_z} \quad (34)$$

I denne ligningen er:

$$N_z = \text{antall dyp}$$

$$N_t = \text{antall tidsperioder med datapunkter}$$

$$N_d = \text{totalt antall datapunkter}$$

Resultatet er oppsummert i tabell 1. Konklusjonen er at det er klart signifikant variasjon med dyp.

Tabell 1. Statistikk for empirisk beregnet blandingsenergi mot tyngdefeltet i Bunnefjorden og Vestfjorden som funksjon av dyp.

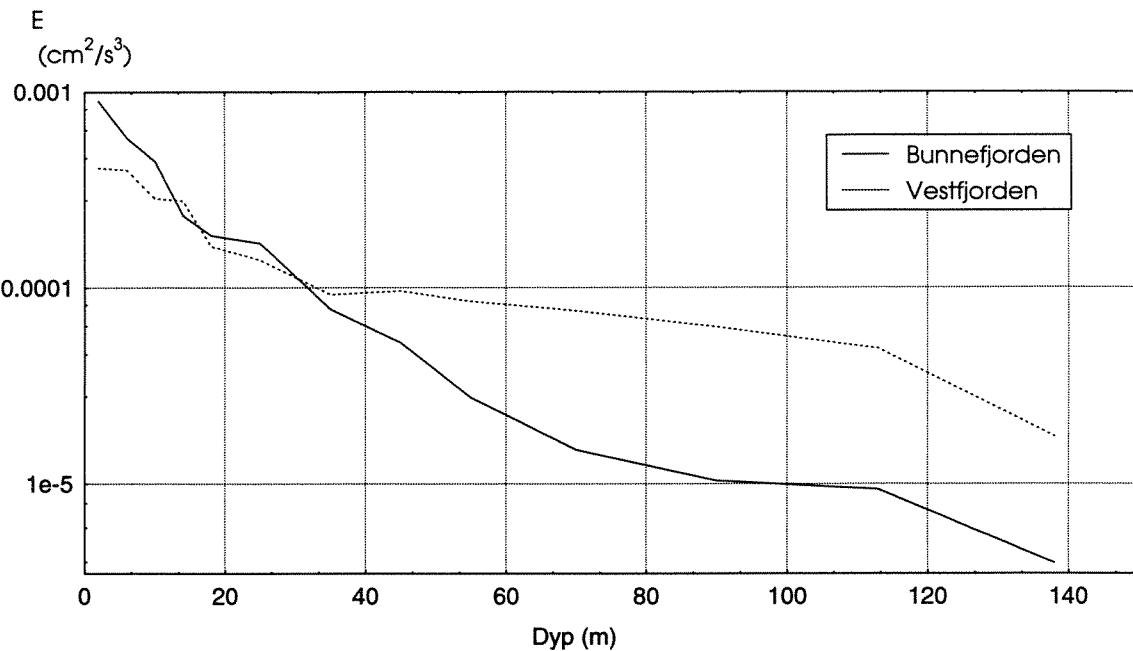
Dyp (m)	\log_{10} av spesifikk blandingsenergi E med enhet cm^2/s^3					
	Bunnefjorden			Vestfjorden		
	Antall data	log10E Gj.snitt	st.avvik	Antall data	log10E Gj.snitt	st.avvik
2	6	-3.04	0.37	3	-3.39	0.27
6	17	-3.23	0.38	10	-3.40	0.32
10	28	-3.35	0.34	10	-3.54	0.34
14	22	-3.63	0.30	9	-3.56	0.25
18	20	-3.73	0.35	12	-3.79	0.29
25	22	-3.77	0.25	12	-3.86	0.29
35	22	-4.11	0.35	12	-4.03	0.18
45	19	-4.28	0.30	8	-4.02	0.08
55	19	-4.56	0.46	10	-4.07	0.12
70	17	-4.83	0.20	15	-4.12	0.08
90	14	-4.98	0.32	7	-4.20	0.09
113	8	-5.03	0.14	10	-4.31	0.10
138	6	-5.40	0.13	3	-4.76	0.10
Gj.snittlig st.avvik:		0.32				0.22
Test av nullhypotese	$F^*(12,56) =$ p<<0.1%	18.34		$F^*(12,18) =$ p=1%	3.3	

Variasjonen med dyp er vist i figur 9. Som figuren viser, minsker blandingsarbeidet mot tyngdefeltet klart med økende dyp i begge bassengene, men minskningen er sterkest i Bunnefjorden.

For overflatelaget og på midlere dyp, ned til 40-50 meter, er det liten forskjell mellom de to bassengene. For dypvannet, fra 70 meter og nedover, er blandingsenergien ca. 5 ganger større i Vestfjorden enn i Bunnefjorden, og den er mer konstant med dyp i begge bassenger.

I Bunnefjorden er det en statistisk variasjon over tid i blandingsenergien med standardavvik rundt 0.3 på log-skala i omrent alle dyp, det tilsvarer en faktor 2 i blandingsenergi. Vestfjorden har omrent samme variasjonen med tid for dyp mindre enn 50 meter, mens det er mer konstante verdier på større dyp, med standarddavviket på 0.1 på log-skala, tilsvarende en faktor på 1.25. Hvis tidsvariasjonene regnes om til lineær skala ser det ut til at energien

som (cm^2/s^3) varierer omtrent like over tid i begge bassengene på gitt dyp, men selvagt sterkt avtagende med dypet. En tolkning av dette er at det kan være et likt bidrag i begge bassenger fra tidsvarierende blandingskilder, f.eks. knyttet til vind. Dette kunne eventuelt analyseres nærmere ved å sammenligne med vinddata.



Figur 9. Middelverdi for blandingsarbeid mot tyngdefeltet som funksjon av dyp i Bunnefjorden og Vestfjorden, beregnet ut fra massebudsjett for salt.

Verdiene for 138m dyp er sterkt avhengig av ekstrapolasjon av dybdeprofiler, og utelukkes fra den videre analyse. Gjennomsnittsverdiene ellers stemmer godt med resultatet til Gade (1970) for perioden 1963-1965 som er referert ovenfor i kap. 6.3.3.1.

Blandingsarbeidet mot tyngdefeltet avtar altså med økende dyp. Samtidig er det under sprangsjiktet avtagende tethets-gradient med økende dyp. Som nevnt tidligere er det et spørsmål om den observerte variasjonen med dypet i virkeligheten er uttrykk for en lovmessig kobling mellom blandingsenergi og sjiktning, som antatt av Stigebrandt og Aure, eller om den tilsynelatende sammenhengen med sjiktning bare er statistisk, og skyldes at også sjiktningen varierer med dyp.

For å prøve å svare på det, kunne en gjøre en multippel-regresjon av $\log E$ mot både en funksjon av dyp og $\log N$. Siden det er så sterk korrelasjon mellom dyp og sjiktning vil dette imidlertid gi upålitelige resultater. I stedet er stabiliteten N splittet opp i to komponenter ved hjelp av variansanalyse av $\log N$ mot dyp:

$$\log N_i = f(z) + \Theta_i \quad (35)$$

hvor

$f(z) =$ gjennomsnitt av $\log(N)$ for gitt dyp.

$\Theta_i =$ avvik fra gjennomsnittet for observasjon i .

De individuelle stabilitetsverdiene er gitt ved $N_i = \exp(f(z) \cdot \exp(\Theta_i))$, altså som et produkt av to faktorer. Verdiene Θ_i representerer nå den variasjon i sjiktningen som ikke er koblet til variasjon i dyp, og har pr. definisjon gjennomsnitt = 0 i hvert dyp. Det er derfor bare tilfeldig og svak korrelasjon mellom de to komponentene $f(z)$ og Θ_i .

Blandingsenergien E analyseres som funksjon av de to komponentene $f(z)$ og Θ_i ved multippel lineær-regresjon:

$$\log E = a + b \cdot f(z) + c \cdot \Theta_i \quad (36)$$

Hvis E egentlig er en funksjon av dyp, og sammenhengen med sjiktning er rent statistisk, og skyldes at gjennomsnittlig sjiktning er en funksjon av dyp, vil en vente at c ikke blir signifikant forskjellig fra 0. Hvis E derimot er funksjonelt knyttet til N på den formen som er gitt tidligere, vil en vente at $b = c = 2 - \alpha$. Hvis koeffisientene b og c er klart forskjellige, men begge forskjellig fra 0, vil det tyde på at blandingsarbeidet mot tyngdefeltet både varierer reelt med dyp og dessuten er direkte koblet til sjiktningen.

Det er ikke gjort noe forsøk på å ta med teoretisk beregnet tidevanns-energi eller volum-midlet sjiktning som forklaringsvariable for E i den statistiske analysen, slik en egentlig burde gjøre ut fra Stigebrandt og Aure (1989). Siden dette heller ikke ble gjort av Stigebrandt og Aure selv skulle resultatene være sammenlignbare.

For Vestfjorden analyseres data bare fra dyp større enn terskeldypet ved Drøbaksundet; diffusjonskoeffisienter fra 25m ned til og med 113m dyp er benyttet. For Bunnefjorden brukes verdier fra 50m ned til 113m, dvs. under terskelen mellom de to bassengene.

Hvis alle datapunktene veies likt i regresjonen, blir resultatet:

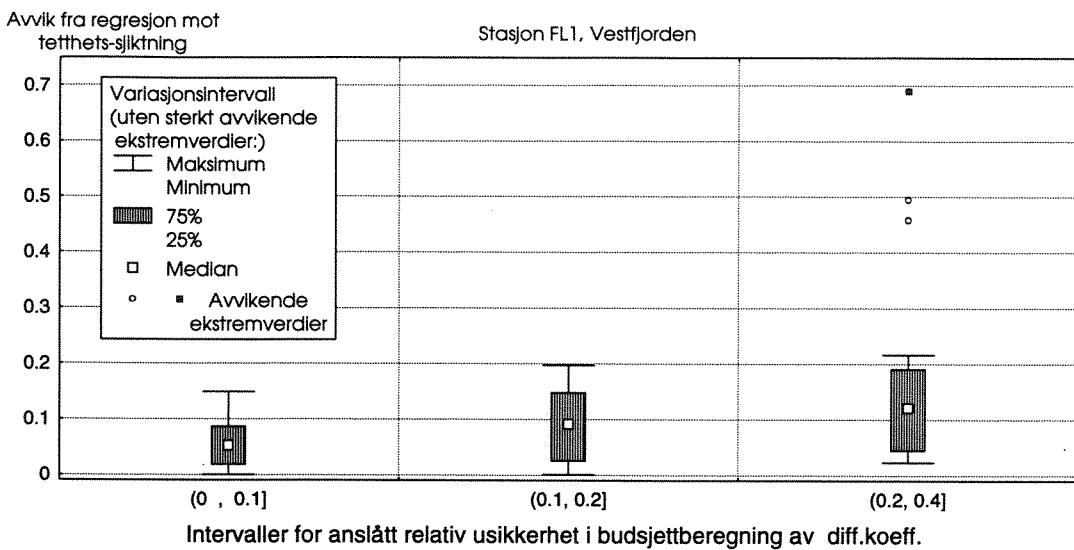
$$\text{Bunnefjorden: } \log E = -3.2 + 0.74_{\pm 0.02} f(z) + 0.40_{\pm 0.25} \Theta_i$$

$$\text{Vestfjorden: } \log E = -3.2 + 0.42_{\pm 0.06} f(z) + 0.31_{\pm 0.18} \Theta_i$$

Usikkerheten i koeffisienten er gitt som statistisk standardfeil for estimatet, beregnet ut fra at dataene er uavhengige. Som nevnt ovenfor er dette ikke oppfylt, fordi data for ulike dyp fra samme tidsrom ikke er uavhengige av hverandre. Rent skjønnsmessig kan en anta at usikkerhetene bør korrigeres med en faktor $\sqrt{2}=1.4$. Det er altså signifikant variasjon med dyp, men ikke helt med variasjon i sjiktning innenfor dypet. Denne forskjellen er naturlig fordi det meste av den totale variasjonen i sjiktningen er inkludert i $f(z)$, slik at Θ_i har et mye mindre variasjonsintervall. Resultatene som helhet er konsistent med at alle helningskoeffisienter har samme verdi i området 0.3-0.5, innenfor 90% konfidensintervaller som er ± 1.7 ganger standardavviket.

For Vestfjorden viser de individuelle avvikene fra regresjonslinjen en viss sammenheng med feilestimatet fra budsjettberegningen, som var basert på om det fantes tegn til advektive forstyrrelser pga. innstrømninger (figur 10).

Dette kan tolkes som at en stor del av spredningen i beregnede blandingsenergor for gitt dyp og sjiktning skyldes større og mindre advektive forstyrrelser, og at koeffisienten k i ligningen for diffusiv blanding K i realiteten har mindre variasjon enn beregnet statistisk.



Figur 10. Absoluttverdi av avvik i budsjett-beregnet verdi for blandingsarbeid fra regresjonslinje, som funksjon av relativt feilestimat for budsjettberegnung.

Ut fra dette er det gjort en ny regresjonsberegnung for Vestfjorden, hvor hvert datapunkt er gitt en vekt

$$w_i = [\max(0.08, s)]^{-2} \quad (37)$$

hvor s er feilestimatet fra budsjettberegningen. På denne måten legger regresjonen mindre vekt på data hvor det er klare tegn til at advektive prosesser har forstyrret beregningene.

Den vektede regresjonslinjen for Vestfjorden blir:

$$\log E = -3.1 + 0.45_{\pm 0.04} \cdot f(z) + 0.29_{\pm 0.14} \cdot \Theta_i \quad (38)$$

Usikkerheten i koeffisienten er gitt som statistisk standardfeil for estimatet, igjen for antatt uavhengige data. Sammenhengen med Θ_i er signifikant med testnivå 4%, altså endel bedre enn for regresjon uten veiling.

For Bunnefjorden er det dårligere sammenheng mellom regresjonsavvik og feilestimater, og det er derfor ikke gjort noen vektet regresjon her.

På grunn av problemene med avhengighet mellom data må resultatet betraktes med forsiktighet, bl.a. kan de angitte testnivåer være for sterke, men de tyder i allfall på at det er en signifikant variasjon for begge komponenter.

Det er ikke mulig å fastslå noen forskjell mellom koeffisientene b og c , og en tentativ konklusjon blir derfor at diffusjonen virkelig ser ut til å kunne avhenge bare av stabiliteten, uavhengig av dypet, og at koeffisienten $\alpha = 2-0.4 \approx 1.6$. Resultatet er ikke klart nok til å påstå en slik sammenheng; det kan ikke på rent statistisk grunnlag utelukkes at det i virkeligheten er en ren funksjon av dyp eller topografi som ligger under den sammenhengen som er funnet. En fornøyet analyse på et utvidet materiale (1962-94) kan kanskje gi et sikrere resultat.

6.3.5. Konklusjoner og drøfting av resultatet - modell for tidevannsdrevet vertikalblanding

På basis av analysen foran er rimelig å konkludere med at vertikalblandingen i stagnasjonsperioder i dypvannet kan beskrives brukbart bare som funksjon av tetthetssjiktningen. En slik beskrivelse finnes ved å gjøre en enkel regresjonsanalyse av $\log E$ mot $\log N$. Det er nå brukt sentrerte datasett for å få uavhengige feilledd for de to konstantene i regresjonsligningen. Med data fra de samme dypintervallene som i forrige underkapittel blir resultatet slik:

Uten vekting av data:

$$\text{Bunnefjorden: } \log E = -4.80_{\pm 0.044} + 0.61_{\pm 0.16} (\log N + 2.14) \quad s^2=0.33, n=58 \quad (39)$$

$$\text{Vestfjorden: } \log E = -4.10_{\pm 0.020} + 0.58_{\pm 0.05} (\log N + 2.09) \quad s^2=0.26, n=77 \quad (40)$$

Med vekting som ovenfor ut fra feilestimat i budsjett:

$$\text{Vestfjorden: } \log E = -4.08_{\pm 0.01} + 0.44_{\pm 0.04} (\log N + 2.07) \quad (40')$$

I disse ligningene har stabilitetsparameteren N enhet s^{-1} , og E har enhet cm^2/s^3 . Den statistiske usikkerheten er angitt som standardfeil ut fra antatt uavhengige data, og den er altså antakelig noe for lavt anslått, fordi datamaterialet ikke oppfyller dette kriteriet. Resultatene viser at det ikke er grunnlag for å påstå forskjeller mellom bassengene når det gjelder regresjonskoeffisienten, og det kan være rimelig som et utgangspunkt å bruke verdiene 0.6 for begge bassenger. Sammenhengen må imidlertid justeres ut fra hvordan modellen viser seg å stemme med observerte resultater når ligningen brukes i transportmodellen.

De empiriske ligningene ovenfor for $\log(E)$ kan generelt skrives om slik:

$$E = E_0 \cdot (N/N_0)^{2-\alpha} \quad (41)$$

Ved å sette dette inn i den definisjonsmessige ligningen for blandingskoeffisienten:

$$K = E \cdot N^{-2} \quad (42)$$

får vi:

$$K = K_0 \cdot (N/N_0)^{-\alpha} \quad (43)$$

hvor $K_0 = E_0 \cdot N_0^{-2}$ er blandingskoeffisienten ved stabilitet N_0 .

De empiriske verdiene over gir ved omregning følgende verdier innenfor statistisk usikkerhet:

	$E_0 (cm^2/s^3)$	$N_0 (1/s)$	$K_0 = E_0 N_0^{-2}$
Bunnefjorden	$10^{-4.8}$	$10^{-2.14}$	$10^{-0.52} cm^2/s = 0.3 \cdot 10^{-4} m^2/s$
Vestfjorden	$10^{-4.1}$	$10^{-2.09}$	$10^{0.08} cm^2/s = 1.2 \cdot 10^{-4} m^2/s$

Innenfor ca. 10% nøyaktighet kan vi bruke en felles verdi $N_0=0.8 \cdot 10^{-2} s^{-1}$ for begge bassengene. Det må understrekkes at den kvalitative konklusjonen er befeftet med usikkerhet. På den ene siden er det opplagt at for en gitt blandingsenergi vil vertikalblandingen avhenge av sjiktningen slik som uttrykt i ligning (43). Sammenhengene mellom blandingsenergi og tetthetssjiktning i ligning (39) og (40) er mer usikker når de brukes som funksjons-

sammenhenger. Som nevnt tidligere kan den statistiske sammenhengen også delvis skyldes en funksjonell sammenheng den andre veien, dvs. at perioder med høy blandingsenergi gir svak sjiktning. For å svare på det måtte en se om andre faktorer kunne forklare variasjonene i både sjiktning og blandingsenergi, eller verifisere en modell for dette mot mer detaljerte data for tidsforløp som kunne vise noe om kausalforholdet. Spørsmålet har en reell interesse, fordi det har betydning for virkningen av f.eks. ferskvannsinnblanding som bl.a. vil endre sjiktningen og derved kunne påvirke vertikalblanding, og også for virkningen av en dypvannsinnstrømning på den videre vertikalblanding.

Under terskeldyp ser det altså ut til at blandingsarbeidet mot tyngdefeltet varierer på samme måte som funksjon av sjiktningen i Vestfjorden og Bunnefjorden, men med 5 ganger lavere verdier i Bunnefjorden, og blandingskoeffisienten ser ut til å kunne beskrives som en ren funksjon av sjiktningen, $K = kN - \alpha$, med k =konstant over varierende dyp. Koeffisienten α kan anslås å være 1.4-1.6, litt avhengig om vi legger vekt på regresjon mot $\log N$ direkte, eller ser på regresjon mot de to oppsplittede komponentene i forrige underkapittel. Dette intervallet er i god overensstemmelse med gjennomsnittet til Stigebrandt og Aure (1989), og stemmer også rimelig bra med estimatene i Gade (1970).

Det kunne synes å ligge et problem i en slik beskrivelse, uansett verdi $\alpha > 0$, fordi diffusjonskoeffisienten går mot uendelig når stabiliteten $N \rightarrow 0$. I virkeligheten er dette ikke noe problem. Salt- og varme-transport vil variere omtrent proporsjonalt med blandingsarbeidet for den variabelen som dominerer sjiktningen, og bli med $\alpha < 2$ bli liten for svak sjiktning, og stor for sterk sjiktning. Dette vil bidra til å stabilisere systemet rundt en endelig verdi på sjiktningen N ved gitte tilførsler av ferskvann til overflaten og saltvann til dyplagene. En verdi $\alpha = 2$ ville ha omtrent konstant transport-kapasitet for salt uavhengig av sjiktningen, og det ville gi et mer ustabilt system m.h.t. til hvordan sjiktningen utvikler seg i tid. Det at saltdominert sjiktning i naturlige systemer synes å være svært stabil kan være en indikasjon på at det virkelig er en reell funksjonssammenheng med $\alpha < 2$. Tilfeller med $N \rightarrow 0$ kan likevel skape numeriske problemer, og for å unngå det er det lagt inn en øvre grense for blandingskoeffisienten. Grensen er valgt slik at den omtrent tilsvarer maksimal beregnet verdi ved lav sjiktning.

Det er ca.5 ganger sterkere blanding i dypvannet i Vestfjorden enn i Bunnefjorden. Dette kan sees som en ytterligere bekreftelse på teorien til Stigebrandt (1977) og Stigebrandt og Aure (1989) om at blandingen under sprangsjiktet skyldes dissipasjon av interne tidevannsbølger i Vestfjorden.

Fra dyp 60-50m i Bunnefjorden og 30m i Vestfjorden øker konstanten k i ligningen for K sterkt mot overflaten, og som figur 9 viser, er det tilsynelatende blandingsarbeidet mot tyngdefeltet omtrent likt i begge bassenger i de øverste 30 meter. Det kan ha to forklaringer.

Den ene er at horisontale gravitasjons- og vind-drevne strømmer mellom de to bassengene jevner ut forskjellene og gir samme tilsynelatende diffusjonskoeffisient, selv om vertikalblandingen er tidevannsdrevet, og 5 ganger sterkere i Vestfjorden enn i Bunnefjorden. Terskeldypet mellom de to bassengene er omkring 50 meter, og det er derfor rimelig at forskjellen mellom bassengene isåfall blir merkbar omkring dette dypet. Den kraftige økningen i tilsynelatende blandingsenergi nær overflaten i Vestfjorden kan tenkes å bli forklart ved en tilsvarende vekselvirkning med ytre Oslofjord. Modellsimuleringer kan vise om den horisontale utvekslingen blir sterk nok til å jevne ut forskjellene i overflatelaget.

Alternativt kan det tenkes at lokal blanding i overflatelaget, drevet hovedsakelig av vind, dominerer vertikalblandingen ned til 20-30m dyp, og at denne blandingen er omtrent like stor i de to områdene. I alle fall må en vente advektive forstyrrelser i de øvre lag, selv med den beskrevne silingen av data, og budsjettbestemte blandingskoeffisienter i overflaten kan derfor tenkes å være usikre. Stigebrandt og Aure (1989) er inne på at blandingsenergi fra vind kan spre seg nedover mot større dyp, og gi en tidevannsuavhengig bakgrunnsverdi for blandingen.

I modellen er den antatt tidevannsgenererte blandingen som er skissert ovenfor anvendt uniformt over i alle dyp fra overflate til bunn. Innvirkningen fra vinden på vertikal-blandingen drøftes i kap. 6.4. og kommer i tillegg til den tidevannsgenererte blandingen, sammen med noen andre tilleggsmekanismer.

6.4. Vinddrevet vertikalblanding av overflatelaget

Vinden virker delvis lokalt innenfor hvert basseng, ved å overføre bevegelsesmoment og turbulent blandingsenergi til overflatelaget. Delvis gir vinden også utveksling mellom bassengene på grunn av de horisontale transportene den setter opp, både direkte og via endring av vannstand og tetthetsflater innenfor hvert basseng. Modellen har foreløpig bare med den lokale virkning av vind som kilde til vertikal blandingsenergi. Virkningen på horisontal utveksling mellom bassengene er ikke inkludert, her regnes det at gravitasjonsdrevet tetthetsstrøm er dominerende.

I en horisontalintegrert modell kan heller ikke vinddrevet sirkulasjon innenfor bassenget beskrives fullt ut, fordi den like mye består av horisontale som vertikale bevegelser. Det er vindens virkning på den vertikale sjiktningen som skal beskrives i modellen, og virkningen av vinddrevet sirkulasjon må derfor parametrises. Det er i hvert fall to faktorer som er viktige her: vindstyrke/vindmengde (energitilførsel) og tetthetsjiktning (*blandingsmotstand i tyngdefeltet*).

Vinddrevet vertikalblanding finnes beskrevet på to alternative måter. Den ene muligheten er å beskrive vindblandingen som en empirisk bestemt vertikal diffusjonskoeffisient regulert av vind og kontinuerlig tetthetssjiktning. En slik betraktningsmåte er studert bl.a. av Kullenberg (1968) ved hjelp av sporstoffundersøkelser. Den andre muligheten er å beskrive virkningen av vinden som en fullstendig blanding ned til et visst dyp ut fra energibetrakninger. Den siste beskrivelsesmåten er brukt av Stigebrandt og Wulff (1987) i deres Østersjømodell, og er nærmere beskrevet i Stigebrandt (1985). Det siste alternativet har den fordel at det tar hensyn til tilførsel av blandingsenergi ved avkjøling i overflaten som gir tetthetsinversjon. Foreløpig er det derfor valgt å bygge på Stigebrandts beskrivelse i eutrofimodellen, men det bør være mulig å kombinere de to betraktningsmåtene[§]. Dette drøftes nærmere nedenfor.

6.4.1. Vertikal blanding som funksjon av vind i kontinuerlig sjiktning

Kullenberg (1968) har gjort ialt 19 forskjellige målinger av horisontal og vertikal diffusjonen ved hjelp av sporstoff (rhodamin). Målingene er utført i årene 1965, 1967 og 1968, fordelt over de fleste av årets måneder, og i forskjellige lokaliteter. De fleste målingene er gjort langs

[§] Slik modellen nå er utviklet med hensyn til vertikalblanding er det uproblematisk å håndtere tetthetsinversjoner og fullstendig blanding (se appendiks side 100ff.), så den kunne nå forenkles på dette punktet.

den svenske vestkysten, men noen er også fra danske fjorder, og et par av observasjonene er fra indre Oslofjord.

Diffusjonen er i hvert eksperiment beregnet ved å følge rhodamin-konsentrasjonen som funksjon av tid over et tidsrom på typisk tre timer. Dypet varierte fra 1 til 20 meter i de ulike forsøkene. Målingene fanger bare opp lokal blanding, og inkluderer ikke randeffekter på samme måte som budsjettberegninger vil gjøre.

Kullenberg har også målt vind, tetthetssjiktning og hastighetsskjær, og bruker det som forklaringsvariable for vertikaldiffusjonen. Ut fra datamaterialet antas at diffusjonskoeffisienten kan beskrives ved formelen:

$$K = k \left(\frac{W}{N} \right)^b \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (44)$$

hvor W = vindhastighet (cm/s)

N = Brunt-Väisälä frekvensen (s^{-1}).

Kullenberg fant de verdiene som er vist i tabell 2.

Tabell 2. Parametre i sammenhengen mellom vind og vertikalblanding bestemt av Kullenberg (1968).

	b	k (cm^2/s) for W i cm/s	k (cm^2/s) for W i m/s
For hele materialet:	1.6	$2.1 \cdot 10^{-7}$	$3.3 \cdot 10^{-4}$
For $W > 4\text{m/s}$,	1.9	$16.8 \cdot 10^{-9}$	$1.06 \cdot 10^{-4}$
For $W \leq 4\text{m/s}$	1.2	$4.8 \cdot 10^{-6}$	$1.2 \cdot 10^{-3}$

Kullenberg presenterer ikke noen statistisk analyse, og dataene er derfor reanalyseret ved multippelregresjon på logaritmisk transformerte data. Hvis vi i første omgang antar at W og N^{-1} ikke har samme eksponent, finnes følgende relasjon:

$$K = kW^b N^{-c} \quad (\text{cm}^2/\text{s}) \quad (45)$$

med $k = 2.45 \cdot 10^{-4}$

$b = 1.57$ (± 0.12 med 95% konf.)

$c = 1.79$ (± 0.1 med 95% konf.)

W forutsettes gitt som (m/s), og N som (s^{-1})

Eksponentene b og c er omrent som bestemt av Kullenberg, og konstanten k ligger også innenfor det Kullenberg fant, etter omregning til same enhet for W .

Relasjonen beskriver variasjonen i datamaterialet meget godt, og fanger faktisk inn 99% av variasjonen i $\log D$. Standardavviket på log-skala tilsvarer at 70% av alle observasjoner ligger innenfor et avvik på 25% fra denne funksjonen. Ingen observasjoner avviker mer enn med en

faktor 1.6. Det er bra overensstemmelse, når observerte diffusjons-koeffisienter varierer fra 0.04 til 60 cm²/s, dvs. over mer enn 3 dekader.

Den statistiske analysen viser imidlertid tegn til systematisk variasjon i avviket ("lack of fit"), med signifikansnivå ca.1%. En oppdeling i ulike vindområder, som antatt av Kullenberg, gir bedre forklaringsgrad. Materialet er derfor delt opp ut fra vindstyrken som hos Kullenberg. Koeffisientene b og c er bare såvidt signifikant forskjellig fra hverandre med konfidensnivå 95%, og vi taper ikke noen stor forklaringsgrad ved å anta $b=c$ på samme måte som Kullenberg. Datamaterialet er litt for lite til å gi grunnlag for å skille mellom b og c med en oppsplitting i to vindområder.

Regresjonsanalyse av log(D) mot log(W/N) gir nå koeffisientverdier i ligning (44) som vist i tabell 3. Her er W igjen forutsatt gitt som (m/s), og N som (s⁻¹).

Tabell 3. Resultat av statistisk reanalyse av Kullenbergs data

	k (cm ² /s) for W_i (m/s)	b
For $W > 4$ m/s:	$9.3 \cdot 10^{-5}$	$1.88 (\pm 0.1 \text{ med } 95\% \text{ konf.})$
For $W \leq 4$ m/s:	$7.75 \cdot 10^{-4}$	$1.41 (\pm 0.3 \text{ med } 95\% \text{ konf.})$

Nå ligger 70% av observasjonene innenfor en feil på 15-20%, og ingen av observasjonene avviker fra kurvene med mer enn en faktor 1.25. Det ser også ut til å være signifikant forskjell mellom b-verdiene for de to vindområdene.

Konklusjonen på bakgrunn av det foreliggende datamaterialet synes å være at ligning (44) med oppdeling i to vindområder gir en ganske nøyaktig og generell beskrivelse av vinddrevet turbulent diffusjon over et vidt spektrum av verdier for vindhastighet og sjiktning. Også alternativet med ett sett koeffisienter bestemt for hele datamaterialet gir imidlertid en tilfredsstillende beskrivelse.

Ut fra oppgitt data ser det ikke ut til å være noen eksplisitt sammenheng med dyp. I de fleste eksperimentene er sporstoff tilsatt midt i eller i underkant av sprangsjiktet, men noen forsøk er også gjort i overkant av sprangsjiktet, og en observasjon helt nær overflaten, uten at det er tegn til avvik i den ene eller andre retningen.

Når det gjelder å ta med hastighetsskjæret som selvstendig forklaringsvariabel i tillegg til vindhastigheten, er Kullenbergs konklusjon at det muligens bedrer forklaringsgraden for vertikal-diffusjonen, men ikke helt signifikant. Med den forklaringsgrad som oppnås ved de enkle modellene ovenfor, er det ikke nødvendig å ta i betraktnsing mer kompliserte modeller.

Siden data også inkluderer målinger i indre Oslofjord, burde Kullenbergs modell også kunne brukes her, hvis beregningene er holdbare. Beregning av blandingsarbeidet E mot tyngdefeltet for Kullenbergs forsøk gir verdier mellom 10^{-2} og 10^{-4} cm²/s³, med geometrisk gjennomsnitt rundt 10^{-3} . Dette stemmer noenlunde med det som er beregnet av Gade (1970) for overflatelaget i indre Oslofjord, basert på temperaturdata. Her varierer E fra 10^{-5} til 10^{-2} , med typiske verdier rundt 10^{-4} til 10^{-3} . Hvis budsjettberegningene for salt føres helt opp til overflaten, gir også de blandingsarbeid som ligger i området 10^{-4} til 10^{-2} cm²/s³. Som nevnt

tidligere er det imidlertid grunn til å tro at det kan ligge virkning av horisontale advektive transporter inne i disse verdiene.

Sjiktningsparameteren N^2 i Kullenbergs forsøk varierer fra 10^{-4} til 10^{-2} s^{-1} , og det tilsvarer omtrent den variasjon en finner i overflatelaget og sprangsjiktet i indre Oslofjord. Det er derfor i dette tilfellet tilsynelatende ingen grunn til å tro at de lokale diffusjonsmekanismer Kullenberg har observert er for små til å forklare total budsjettberegnet diffusjon, slik som for dypere lag.

I motsetning til dette viste resultatene til Bjerkeng et al. (1978) noe lenger ned, på 25-30 meters dyp, at sporstoffs målinger over lengre tid ga langt lavere diffusjonskoeffisienter enn ved bruk av budsjettberegninger i indre Oslofjord. Ved sporstoff-forsøket i indre Oslofjord i 1977 var stabiliteten $N=0.02-0.04\text{s}^{-1}$ i det aktuelle dypintervallet fra 25 til 35 meter, og målt diffusjonskoeffisient ut fra spredning av sporstoff var ca. $0.02\text{cm}^2/\text{s}$. Med en vindstyrke på 2 m/s, som kan anses rimelig ut fra Bjerkeng et al. (1978) fig 39, gir Kullenbergs formel en diffusjonskoeffisient på minst $0.2 \text{ cm}^2/\text{s}$, altså 10 ganger større enn beregnet for sporstoffs spredningen, og omtrent som beregnet ut fra saltbudsjetten.

Enten er det altså stor forskjell på lokal diffusjon fra 20 til 30m dyp, til en viss grad i overensstemmelse med budsjett-beregningene basert på perioden 1974-87, eller det er en uoverensstemmelse i beregningene.

En mulig forklaring kunne være at Kullenberg har brukt de samme eksperimentene til å beregne horisontal og vertikal diffusjonskoeffisient. Ut fra de formlene Kullenberg presenterer ser det ut til at beregningen av horisontal diffusjon ikke korrigerer for virkningen av vertikal diffusjon og omvendt. Egentlig bør horisontal diffusjon beregnes ut fra vertikalt integrerte konsentrasjoner pr. areal, mens ren vertikal spredning burde beregnes ut fra sporstoffets fordeling over dypet, integrert horisontalt over skyen. Det ser ut til at Kullenberg har brukt konsentrasjon som mengde/volum i begge tilfelle, og begge beregningene ser ut til i stor grad å bygge på reduksjon av konsentrasjon med tid. Dette kan bety at beregnede koeffisienter for horisontal og vertikal spredning hver for seg beskriver den totale spredningen av den tredimensjonale skyen, i det ene tilfelle tolket som horisontal spredning, i det andre som vertikal spredning. Effekten vil isåfall være at begge koeffisienter blir for høyt anslått, i forhold til hva som er riktig å bruke for å beskrive hhv. dypintegrert horisontal spredning og horisontalintegrert vertikalspredning.

Til sammenligning har Bjerkeng et al. (1978) beregnet spredning av sporstoff bare ut fra hvordan skyens tykkelse øker med tiden, reduksjonen av senterkonsentrasjon med tid inngår ikke i beregningen. På den annen side bygger Bjerkeng et al.s beregninger på lengre tidsrom, og Gargett (1984) mener at skyspredningsbetraktninger da kan gi misvisende resultater.

For en bestemt vindstyrke vil blandingskoeffisienten være en funksjon av sjiktingen, på samme form som den empiriske blandingskoeffisienten for dypere lag som ble utledet ovenfor. Selv for en vindstyrke på 4m/s gir Kullenbergs modell en lokal blandingskoeffisient $K = k \cdot N^{1.4} [\text{cm}^2/\text{s}]$, med $k = 5.5 \cdot 10^{-3}$. Dette er henholdsvis 15 og 4 ganger mer enn den empiriske blandingskoeffisienten bestemt ved hjelp av massebudsjetter, og den skal omfatte også randeffekter og er forventet å være mye større enn lokal blanding.

Skal Kullenbergs modell brukes, må overgangen mellom vinddrevet og tidevannsdominert blanding beskrives. En mulighet er å bruke Kullenbergs modell spesielt til å beskrive utvekslingen mellom det velblandede laget og det nærmeste laget under dette, og så bruke

tidevannsgenerert blanding under det, men det blir litt vilkårlig, og det må dessuten først avklares om Kullenbergs beregninger gir ekte endimensjonale blandingskoeffisienter.

6.4.2. Vertikal blanding fra vind - som homogenisering av overflatelag

Blandingsenergi i overflaten kommer hovedsakelig fra vind, men i perioder hvor overflatevannet blir tyngre på grunn av varmeutveksling eller fordampning bidrar også det med blandingsenergi, ved å gjøre vannsøyler tetthetsmessig ustabil. Blandingsenergien går med til å utføre et arbeid mot gravitasjonsfeltet, dels ved å blande lettare vann fra overflaten ned i det velblandede laget, og dels ved å blande inn tyngre vann som trekkes opp nedenfra. Den følgende beskrivelsen bygger på Stigebrandt (1985), men er noe modifisert.

Tilgjengelig blandingsenergi pr. areal og tidsenhet fra vinden er gitt ved

$$E_w = m_0 u_*^3 + \max(0, -\epsilon \cdot B_s) \quad (\text{m/s})^3 \quad (46)$$

Det første leddet på høyre side er energitilførsel fra vinden. Den er parametrisert ved en friksjonshastighet for vann u_* med en empirisk konstant $m_0 \approx 0.5$ iflg. Stigebrandt (1985). Friksjonshastigheten er nærmere beskrevet i neste avsnitt. Det andre leddet gjør seg gjeldende hvis tettheten i overflaten øker på grunn av temperaturendring eller fordampning. Koeffisienten ϵ settes til 0.05, som angis som en sannsynlig øvre grense av Stigebrandt 1985.

Tettheten i overflaten kan endres begge veier på grunn av oppvarming eller avkjøling, nedbør eller fordampning, og tilførsel av ferskvann fra land eller av lettare overflatevann fra andre bassenger. Endringen uttrykkes som en "buoyancy influx" B_s (tilskudd av oppdrift) i overflaten, gitt ved:

$$B_s = \frac{g}{\rho} \left[-\frac{dp}{dT} \cdot \frac{Q}{C_p} + \frac{dp}{dS} \cdot P \cdot S + \sum_{i=1}^N F_i (\rho - \rho_i) \right] \quad (\text{m}^2/\text{s}^3) \quad (47)$$

hvor

- Q = netto varmefluks ned i vannsøylen. (W/m^2)
- C_p = varmekapasitet ($\text{Ws}/^\circ\text{C}/\text{m}^3$)
- P = netto tilskudd av vann gjennom overflaten
- = nedbør - fordampning ($\text{m}^3/\text{m}^2/\text{s}$)
- F_i = innstrøm av vann fra land eller fra annet basseng til overflaten pr. flateenhet.
- ρ = tetthet av vannet i det velblandede overflatelaget.
- ρ_i = tetthet på innstrømmende vann.

De to første leddene beskriver virkningen av små perturbasjoner av T og S som blandes inn i vannsøylen fortløpende, mens det siste leddet beskriver gradvis tilførsel av vann med en helt annen tetthet.

Dersom $B_s > 0$ vil det forbruke energi å blande tetthetsavviket nedover i det velblandede volumet. Energiforbruket, dvs. økning i potensiell energi ved en slik innblanding er gitt ved

$$E_{b,I} = B_s \cdot h / 2 \quad (48)$$

hvor h = tykkelsen av det velblandede volumet. Energien til dette arbeidet må komme fra tilført vind-energi.

Dersom $B_s < 0$ representerer det en tilførsel av blandingsenergi, som kan bidra til å blande opp tyngre vann nedenfra. Det er tatt med i uttrykket for E_w ovenfor.

Et tilsvarende ledd kan settes opp for innblanding av tyngre vann fra den nedre grensen for det velblandede volumet. Modellen er innrettet slik at innstrøm av vann som er tyngre enn i det velblandede volumet i sin helhet går til lag under dette volumet. Blandingen nedenfra inn i det velblandede volumet beskrives ved at vann fra laget under trekkes opp og homogeniseres over den velblandede vannsøylen. I modellen inngår en innblandingshastighet w_e , som angir enveis transport av vann opp gjennom grensen mellom velblandet og sjiktet vann. Modellen opererer ikke med noen toveis diffusiv transport mellom det velblandede laget og nabosjiktet nedenfor.

Slik innblanding av tungt vann nedenfra representerer en økning i potensiell energi gitt ved:

$$E_{b,2} = g \cdot \frac{\delta p}{\rho} \cdot \frac{h}{2} \cdot w_e \quad (49)$$

Energibalansen settes opp pr. flateenhet og ikke for totalenergi integrert over tverrsnittsflaten. Det innebærer at blandingsenergi tilført gjennom overflaten i områder som er grunnere enn blandingsdypet ikke antas å bidra til blandingen, men i stedet dissiperes inne i det velblandede laget ved friksjon mot bunn. I indre Oslofjord vil dette bare kunne ha betydning i mindre bassenger som er forholdsvis grunne.

Den totale energibalansen blir $E_w = E_{b,1} + E_{b,2}$ som kan skrives:

$$J_w = g \cdot \frac{\delta p}{\rho} \cdot \frac{h}{2} \cdot w_e = m_0 u_*^3 + \max(0, -\varepsilon \cdot B_s) - \max\left(0, B_s \frac{h}{2}\right) \quad (50)$$

hvor B_s er gitt av ligning (47).

Ligningen er gyldig hvis $w_e > 0$, og kan brukes til å beregne erosjon av underliggende lag, dvs. økning av h med tiden. J_w kan representerer den del av vindenergi-tilførsel/tidsenhet som er tilgjengelig til å blande underliggende lag inn i det velblandede overflatelaget. Siden $w_e = dh/dt$ gir dette en differensialligning for h som kan integreres over tid som en del av modellen. For å unngå problemer med numerisk stabilitet pga. tilfeldig lave verdier av δp blir ligningen imidlertid ikke brukt direkte som differensialligning for $h(t)$. I stedet blir total tilgjengelig erosjonsenergi over et tidsskritt beregnet som integralet av over tid av J_w med den gamle verdien for blandingsdypet h .

Hvis $J_w > 0$ brukes den oppsamlede energien til å blande inn underliggende lag ved slutten av hvert tidsskritt, så langt ned som det er energi til. Det vil si at h justeres ut fra akkumulert blandingsenergi i stedet for å integreres numerisk ut fra en beregnet endringsrate i øyeblikket.

Hvis $w_e < 0$, dvs. $J_w < 0$, skjer det ingen videre erosjon, da vil i stedet det blandede laget øyeblikkelig justeres til en mindre dybde h , gitt av energibalansen $E_w = B_s h / 2$. ($J_w < 0$ forekommer bare dersom $B_s > 0$).

Denne vindblandingsmodellen tar ikke hensyn til virkning av vindgenerert turbulens under det velblandede laget. For å gjøre det kunne det være aktuelt å kombinere denne beskrivelsen med et vindbasert tilskudd til den ordinære vertikale diffusjonskoeffisienten.

6.4.3. Energioverføring fra vinden

I modellen for vindblanding i forrige avsnitt ble energitilførsel til blandingsprosessene fra vinden uttrykt som en friksjonshastighet u_* . Friksjonshastigheten er pr. def. gitt ved:

$$u_*^2 = \tau/\rho \quad (\text{m/s})^2 \quad (51)$$

hvor

$$\rho = \text{vannets tetthet} (= 1000 \text{ kg/m}^3)$$

$$\tau = \text{horisontalt stress (kraft/areal) i vindretningen (N/m}^2)$$

Vindstresset parametrizeses vanligvis gitt som funksjon av vinden ved ligningen:

$$\tau = \rho_a C_d U^2 \quad (\text{N/m}^2 = (\text{kg/m}^3) (\text{m}^2/\text{s}^2)) \quad (52)$$

hvor

$$\rho_a = \text{tetthet av luft} (=1.25\text{kg/m}^3)$$

$$C_d = \text{dimensjonsløs friksjonskoeffisient}$$

$$U = \text{vindhastighet (m/s) målt i 10 meters høyde.}$$

Friksjonshastigheten u_* beregnet på denne måten brukes som regel til å beskrive både vinddrevet vertikalblanding og vinddrevet adveksjon av vannmasser. Windstresset τ beskriver overføring av bevegelsesmengde pr. tidsenhet fra vind til hav, og dissipasjon av vindens bevegelsesenergi, men ikke uten videre overføring av energi til vannmassene. Mulige konsekvenser av dette skal drøftes nærmere nedenfor, men først gjennomgås data og empiriske parametriseringer for C_d som funksjon av regulerende parametre.

Friksjonskoeffisienten C_d fra vannflater mot vind er ikke konstant. Den øker først og fremst med vindhastigheten, fordi overflatebølger øker den effektive hydrauliske ruheten til vannflaten og derved gir større motstand (Fischer et al. 1979, Bowden 1983), men er også studert som funksjon av vindens virkningslengde ("fetch") (Wu 1980, 1988, Smith 1980) og av atmosfærisk stabilitet (Bunker 1976, Smith 1980, Large og Pond 1982). Virkningslengden er avgjørende for oppbygging av bølger, og stabiliteten påvirker turbulensen i vinden.

Når det gjelder sammenhengen mellom C_d og vindstyrke finnes det flere estimer i litteraturen, basert på målinger av turbulens i luft eller vindprofilens form, og som gjelder for åpent hav og for nøytrale atmosfæriske forhold. Noen av dem er gjengitt i tabell 4.

Tabell 4. Noen empiriske sammenhenger mellom vind og friksjonskoeffisient referert fra litteraturen.

Kilde	$C_d \cdot 10^3$	Vind U i 10m høyde (m/s)	Atmosfærisk stabilitet	Virkningslengde
Smith (1980)	$0.61 + 0.063 U$	6 - 22	Nøytral	Åpent hav
Smith and Banke (1975) (ref. av Smith 1980)	$0.61 + 0.075 U$	6 - 21		
Wu (1980)	$0.8 + 0.065 U$	1 - 22		Åpent hav
Garratt (1977)	$0.75 + 0.067 U$	3 - 21		$Fetch > 10\text{ km}$.
Large and Pond (1982)	1.14	3 - 10	Nøytral	Åpent hav
"	$0.49 + 0.065 U$	10 - 25	"	"

Vindstatistikk for Fornebu tyder på at vindområdet 5-10m/s er det viktigste i indre Oslofjord. Selv om vindstyrken er så stor i mindre enn 25% av tiden, er det vindstyrker over 5m/s som står for det meste av vindpåvirkningen, målt som integral over tid av energitilførsel antatt proporsjonal med u^3 . Dette gjelder selv om C_d antas konstant, uavhengig av vindhastighet. Maksimal årlig vindstyrke ligger rundt 10m/s. Funksjonssammensetningen ovenfor dekker forsåvidt det mest interessante området, og for en vindstyrke 5m/s gir de C_d i området 0.93-1.14.

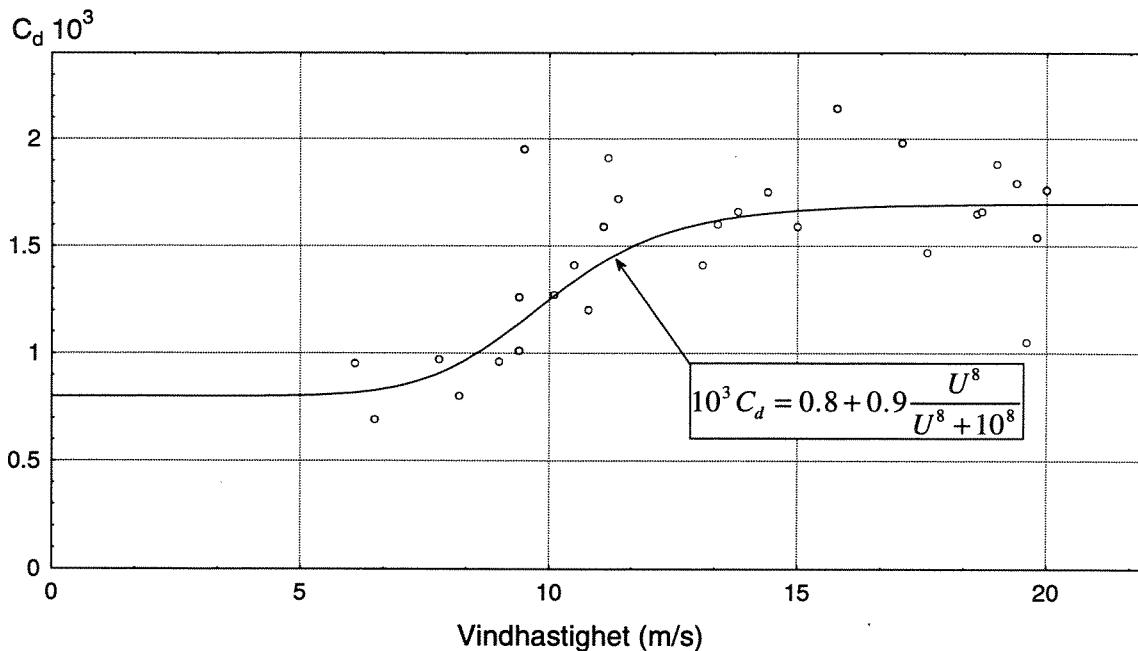
I indre Oslofjord er imidlertid virkningslengden begrenset. Bassengene her har horisontal lengdeskala 5-25 km avhengig av vindretning, og det er derfor av interesse å se spesielt på data for begrenset "fetch".

Det kan leses ut av fig.1 i Wu (1988) at $10^3 C_d$ ifølge en empirisk formel skal øke ca. 10-20% når fetch øker fra 5 til 25km. Smith (1980) har analysert friksjonskoeffisienten som funksjon av bl.a. virkningslengde ("fetch") i sine data, men finner ikke noen klar sammenheng. En fornyet analyse av de data i Smith (1980) som gjelder begrenset "fetch" (10-83 km, ved fralandsvind mot målestasjonen) viser et noe annet forløp som funksjon av vind enn for åpent hav, men i omtrent samme verdi-intervall: $10^3 C_d$ øker fra 0.7 til ca. 1.5 når vindhastigheten øker fra 5-6 til 11-12m/s, og holder seg omtrent konstant for høyere vindhastigheter. Det er ingen systematisk variasjon med "fetch" fra 10 til 83 km, og Wu (1988) antyder også nokså konstante verdier over dette området, når C_d er definert for vind målt i en fast referansehøyde.

Variasjonen av C_d for vindstyrker 5 til 20m/s ved begrenset fetch beskrives brukbart ved:

$$10^3 C_d = \begin{cases} 0.14U & \text{for } 5\text{ m/s} < U < 11.5\text{ m/s} \\ 1.6 & \text{for } U \geq 11.5\text{ m/s} \end{cases} \quad (53)$$

Dette gir en C_d som varierer sterkere med vinden i området 5-10m/s enn sammenhengene for åpent hav. Smith (1980) har ikke data for vindstyrker lavere enn 6m/s. Visuelt kan det se ut som C_d flater ut for vindstyrker ned mot 5m/s, men det er ikke data til å fastslå dette sikkert.



Figur 11. Sammenheng mellom vind og friksjonskoeffisient - data fra Smith (1980) for begrenset fetch, med visuell kurvetilpasning.

Smiths data for begrenset fetch beskrives også godt av den visuelt tilpassede formelen:

$$10^3 C_d = 0.8 + 0.9 \frac{U^8}{U^8 + 10^8} \quad (54)$$

Måledata med inntegnet kurve er vist i figur 11.

Som nevnt ovenfor kan også atmosfærisk stabilitet ha betydning for friksjonskoeffisienten. Large og Pond (1982) henviser til en parametrisering av Deardorff (1968), og bruker det til å regne om sine resultater fra målt C_d til en ekvivalent C_{dn} for nøytrale atmosfæriske forhold.

Bunker (1976) har beregnet C_d som funksjon av temperaturforskjell mellom sjø (T_s) og atmosfære (T_a) for ulike vindstyrker, basert på formlene fra Deardorff (1968) for forholdet mellom $C_d(T_s, T_a, U)$ og nøytral $C_{dn}(U)$ som funksjon av Richardsons tall for atmosfæren. Bunker har gitt resultatet i en tabell, og den viser at C_d avhenger sterkere av atmosfærisk stabilitet jo svakere vinden er. For vindstyrker over 15-20m/s er det lite variasjon, men for avtagende vindstyrker fra 10 m/s minsker C_d i økende grad ved overgang fra ustabile til stabile atmosfæriske forhold. I det viktigste vindområdet fra 5 til 10 m/s varierer C_d med en faktor 2.4 når temperaturforskjellen $T_s - T_a$ går fra +5°C til -5°C, dvs. ved overgang fra markert ustabil til stabil atmosfærisk grensesjikt, med den sterkeste variasjonen ved overgang fra nøytral til stabil sjiktning. For svak vind og sterkt stabilitet går C_d mot verdier nær 0.

Bunkers absoluttverdier for C_d er ca. 20% høyere enn i de andre estimatene, men en kurvetilpasning til verdiene i Bunkers tabell viser at denne variasjonen med stabilitet kan beskrives godt ved følgende formel:

$$C_d = C_{dn} \left[1 + A \frac{(T_s - T_a)^\alpha}{U^\beta} \right]^\gamma \quad (55)$$

hvor koeffisientene er gitt slik:

	A	α	β	γ
For ustabile forhold ($T_a < T_s$):	0.313	0.842	0.968	+1
For stabile forhold ($T_a > T_s$):	0.023	5.673	2.634	-1

Smith (1980) har også undersøkt variasjon med stabilitet, og finner indikasjoner på variasjon som forventet, men kan ikke bestemme noen signifikant sammenheng ut fra sine data. Smith har stort sett data for vindhastigheter $> 10\text{ m/s}$, hvor variasjonen med stabilitet er svak, og for vind i området $6-10\text{ m/s}$ bare for små temperaturforskjeller. Det stemmer med Bunkers og Deardorffs formler at det ikke er sterk variasjon med stabilitet da.

I modellen bestemmes C_d som funksjon av temperaturforhold og vind ved å multiplisere C_{dn} etter ligning (54) inn i ligning (55).

Denne beskrivelsen skulle gi en viss årstidsvariasjon knyttet til endringer i luft-stabiliteten, med tendens til større friksjon om høsten, når vannet avkjøles, og om natten, under ellers like vindforhold. I tillegg til stabiliteten, gitt av temperaturforskjellen mellom luft og vann, kan det tenkes at det absolutte temperaturnivået også har noe å si, fordi luftens tetthet er større jo lavere temperaturen er. Noe slikt er ikke tatt med i modellen

6.4.4. Overføring av impuls og energi fra vind til vannmasser.

Tangensielt vindstress overfører horisontal bevegelsesenergi til vannet via et grensesjikt. Ved denne overføringen må total bevegelsesmengde (impuls) bevares i horisontal retning, dvs. at den bevegelsesmengden som tappes fra vinden overføres til vannmassene som horisontal bevegelsesmengde. De resulterende hastighetene i vannet er imidlertid mye lavere enn vindhastigheten, og det betyr at bare en liten del av den energi som tappes fra vinden overføres til horisontal bevegelsesenergi i vannmassene. Det meste av energien dissiperes via turbulente bevegelser, dels i luft, og dels ved overføring av energi til bølger og turbulens i vannet.

Ved lave vindstyrker vil friksjonen være som mot en glatt overflate, med et laminaert grensesjikt nærmest vannet. Friksjonskoeffisienten vil da ifølge Smith (1980) være omtrent konstant, eller til og med øke når vindhastigheten går mot 0, dvs. at friksjonen avtar langsommere enn U^2 . Dette utledes teoretisk av teori for strømning over en glatt grenseflate. I denne situasjonen vil energidissipasjonen for det meste skje ved turbulens i luft, og energi overføres til vannmassene bare via tangensielt stress i overflaten, i første omgang som horisontal bevegelsesenergi, etterhvert dissipert som turbulens.

Ved økende vindhastigheter utvikles overflatebølger, ved en form for resonans med fluktuasjonene i overflatetrykket pga. turbulens i vinden (Bowden 1983). Bølgene vokser inntil det dissiperes like mye energi som det mates inn. Vinden mater først og fremst energi til kortperiodiske bølger. Langperiodiske bølger bygges opp ved interferens mellom kortperiodiske bølger, og dissiperes langsommere (Bowden 1983).

Energioverføringen til bølger er knyttet til fluktuasjoner i trykket, som virker normalt på vannflaten. Bølgene innebærer først og fremst en direkte overføring av vertikal impuls fra luft til vann som gir energi til bølgebevegelsene, men har også en horisontal nettokomponent som bidrar til å øke overføringen av horisontal bevegelsesmengde fra vinden til vannmassene, slik at effektiv tangensiell vindstress øker (Wu 1988). Vindgenererte bølger må derfor ha en tosidig virkning: Delvis øker friksjonskoeffisienten, slik at det overføres mer horisontal impuls til vannet enn om den var konstant. Delvis innebærer bølgene en direkte overføring av turbulent energi fra luft til vann.

Bestemmelser av C_d ser stort sett ut til være basert på målinger i luft, dvs. at målingene vil fange inn hvordan det totale tangentielle stresset på vinden varierer. Det resulterende stresset τ er et direkte uttrykk for overføring av horisontal bevegelsesmengde til vannet, og er den relevante størrelsen for beregning av vinddrevne strømmer.

Som beskrevet ovenfor er det vanlig å bruke stresset τ omregnet til friksjonshastighet også til å beregne tilførsel av blandingsenergi til vannmassene. Fischer et al. (1979) setter opp $\tau \cdot u_w$ som uttrykk for den totale tilførsel av energi som har betydning for vertikal blanding, hvor u_w er strømhastigheten i overflaten. Dette er imidlertid bare en liten del av den vindenergien som dissiperes ($\tau \cdot U$). Resten blir dissipert direkte ved turbulens i vinden, eventuelt overført til bølgeenergi i vannet. Bowden (1983) mener at det effektive tangensielle stresset på vannflaten også omfatter generering av bølger, men det kan vel ikke gjelde overføring av vertikalt rettet bevegelsesenergi, som er en viktig del av bølgeenergien og kommer direkte fra de vertikale komponentene i hastighetsfluktuasjonene i vinden. Det er derfor ikke gitt at de to formene for energioverføring innvirker på vertikalblandinga i samme grad. Det kan tenkes at blandingseffekten på grunn av energidissipasjon via bølger kan neglisjeres i forhold til det som skyldes mer makroskopiske vinddrevne bevegelser, eller at det ivaretas tilstrekkelig av en empirisk parametrisering av sammenheng mellom stress og blandingseffekt. Det kan også tenkes at blandingseffekten fra vertikal impulsoverføring via bølger burde tas i betraktnsing eksplisitt.

Foreløpig er det valgt å bruke vanlig praksis i modellen, dvs. å parametrisere vertikalblandinga som funksjon av det horisontalt rettede vindstresset med C_d gitt for begrenset virkningslengde for vinden og med korreksjon for atmosfærisk stabilitet som spesifisert av ligning (54) og (55).

6.4.5. Betydning av vindfluktuasjoner, tidsforsinkelser.

Variasjonen i C_d med vind er knyttet til etablering av overflatebølger, og det krever både at vinden har en viss varighet og at den har en tilstrekkelig stor virkningslengde ("fetch"). Ved høye vindstyrker tar det lengre tid å oppnå fullt bølgespektrum enn ved svakere vind, men "fetch" kan også være begrensende, og gjør da at bare endel av vinden er effektiv. Tabell 5 viser noen data funnet i litteraturen for den varighet og fetch som kreves for å oppnå fullt bølgespekter, og hvilken bølgeenergi dette representerer.

Tabell 5. Litteraturdata for sammenheng mellom varighet og virkningslengde for vind og resulterende bølgespekter.

Vindstyrke (m/s):	5	10	15	20	25
Pond og Pickard (1983):					
Varighet (timer)	2.3	9.5	22	40	64
"Fetch" (km)	20	130	480	1200	2400
Energi (rel. enheter)		5	50	230	
Bowden (1983):					
Varighet (timer)	9	20			
Fetch (km)	50	200			

For indre Oslofjord vil maksimal "fetch" i hovedbassengene variere fra 5 til 25km avhengig av vindretningen, og tabellen viser at dette kan begrense sterkt virkningen av vindstyrker på 5 m/s eller mer. Selv om tallene fra de to kildene avviker endel tyder de på at det vil oppnås likevekt raskere, og med lavere bølgeenergi enn i åpent hav. Det synes rimelig å anta en responstid på inntil 3 timer.

Når det gjelder vind-adveksjonen, er det ifølge Bowden (1983) s.130ff slik at klassisk Ekman-teori for vinddrevet strøm i tetthetshomogen, åpent hav gir etableringstider på i størrelsesordenen en dag for stasjonær tilstand, mens en modifisert teori som er bedre i overenstemmelse med observasjoner gir etableringstider på bare ca. 3 timer (Madsen 1977). Strømhastigheter opp mot de stasjonære verdier i overflaten (men ikke i samme retning) oppnås etter henholdsvis 2 og 1/3 time ifølge de to teoriene. Hvordan tetthetssjiktning innvirker på etableringstiden sies det ikke noe om.

Totalt sett er det altså grunn til å tro at responstiden for vindens virkning på blandingen i overflatelaget er 1-3 timer både når det gjelder bølgespekter og vindaveksjon, og i praksis kan vi antagelig bruke øyeblikksverdier for vinden i uttrykket for vertikalblanding, fordi vinden varierer forholdsvis lite over slike perioder. Modellen kjøres med inngangsdata for meteorologi hvor vinden er gitt med ett 10 minutters middel hver 6. time, og vinden blir da lineærinterpolert mellom registreringene.

6.5. Overflateblanding pga. av andre energikilder

Forsøksvis er det også i lagt inn i modellen en helt grov beskrivelse av et tilleggsledd for overflateblanding. Det er lagt inn ved et spesifisert tillegg til blandingsenergien i ligning (56),

som er størst i overflaten, holder seg omtrent konstant ned til et visst dyp, og deretter med overgang til eksponensiell dempning med dypet.

$$E_s = E_{s,0} \frac{f(z)}{f(z)+1} \xrightarrow{z \rightarrow \infty} E_{s,0} f(z) ; \text{ hvor } f(z) = e^{-(z-z_s)/h_s} \quad (56)$$

Her er $E_{s,0}$ = blandingsenergi i overflaten ($z=0$), z_s = dypet hvor blandingsenergien er halvert, og h_s = er en vertikal dimensjon som angir hvor raskt blandingsenergien avtar med dypet. Dette gir et tillegg $E_s N^2$ til den totale blandingskoeffisienten K .

Dette bygger ikke på studier av noen bestemt prosess, det er bare lagt inn som en mekanisme for å kunne studere hvordan varierende grad av vertikalblanding innvirker på overflateprosessene. En mulig årsak til slik overflateblanding er båttrafikken - det er gjort estimerer i visse områder (Frierfjorden) som tyder på at dette kan tilføre vesentlige mengder blandingsenergi. En mer realistisk modellering av slik overflateblanding kunne kanskje ta hensyn til tetthetssjiktningen også for å bestemme vertikal avgrensning.

6.6. Vertikalblanding knyttet til horisontale innstrømninger av tungt vann

Innstrømninger av tyngre vann fra andre bassenger gir en tilførsel av blandingsenergi. Data fra Oslofjorden viser at store dypvannsinnstrømninger ofte gir omtrent homogene forhold i dyplagene under 50-60 meter dyp. Dette kan delvis være en følge av at tunge stråle-lignende strømmer river med seg omgivende vann på vei ned mot innlagsdypet, som beskrevet av Stigebrandt (1987), og derved gir en form for sirkulasjon av vannmassene. Eventuelt kan det også tenkes å henge sammen med at kinetisk energi dissiperes rundt innlagsdypet i form av blandingsenergi, dvs. at energien utløses i sammenheng med at strømmene når sitt innlagsdyp og bremses opp.

I det etterfølgende underavsnitt diskuteres generelt hvilke energier som er aktuelle, og det drøftes mulige løsninger, og deretter beskrives i et eget avsnitt hvordan det er lagt inn i modellen foreløpig

6.6.1. Alternativ 1 - Modell for meddrivning av vann i en tung bunnstrøm.

Den hydraulisk orienterte beskrivelsen av meddrivning som er satt opp av Stigebrandt (1987) for Østersjøen gjelder en tung og antatt homogen bunnstrøm inn i en stagnant vannmasse.

I denne beskrivelsen antas strømmen å være i lokal dynamisk likevekt, dvs. at turbulent friksjon og tyngderedusert gravitasjonskraft er i likevekt. Meddrivningen beskrives empirisk som funksjon av friksjonen.

Tilnærmet likevekt mellom gravitasjonskretfer og friksjon vil si at det meste av tilført energi fra tyngdefeltet dissiperes ved turbulens og meddrivning av overliggende vann inn i bunnstrømmen, og at en neglisjerbar del går over i kinetisk energi:

$$u^2 C_d = g' h s = u_*^2 \quad (57)$$

Medrivningen beskrives ved å anta at en viss andel av dissipert energi går med til det arbeid mot tyngdefeltet som det representerer å blande lettere vann ned i en underliggende strøm:

$$\frac{dq}{dx} = w = \frac{2m_0 u_*^3}{g' h} \quad (58)$$

I disse ligningen er:

- x = horisontal posisjon i strømretningen
- q = volumfluks pr. bredde
- h = tykkelse av bunnstrømmen (m)
- u = q/h = strømhastighet
- g' = redusert tyngde = $g \cdot \delta p/p$
- ρ = tetthet i bunnstrømmen
- δp = tetthetsforskjell mellom bunnstrømmen og vannet over.
- u_* = friksjonshastighet (m/s)
- s = bunnens helning dz/dx
- m_0, C_d = empiriske dimensjonsløse koeffisienter

Ut fra disse ligningene finnes medrivning pr. dybdeenhet ved ligningen:

$$\frac{dq}{dz} = 2m_0 \cdot C_d^{1/6} \cdot \left(g' q / s^2 \right)^{1/3} \quad (59)$$

Medrivningen vil dels innebære en vertikal sirkulasjon i det bassenget det strømmer inn i, og dels vil den minske tettheten i bunnstrømmen og dermed kunne gi minske innlagsdypet, på samme måte som for dykkede ferskvannsutslipp.

Hvis en beskriver dypinnstrømning på denne måten vil q øke med dypet, men g' vil minske både som følge av økende omgivende tetthet og minskende tetthet i bunnstrømmen. Hastigheten u kan skrives

$$u = \left(s g' q / C_d \right)^{1/3} \quad (60)$$

Når $g' \rightarrow 0$ nær innlagsdyp vil også hastigheten minske. Det vil representere en dissipasjon av energi og bør gi en økt turbulens og derved bidra til økt medrivning, eller diffusiv blanding i bassenget som helhet omkring innlagsdyp.

En slik beskrivelse av en bunnstrøm er ikke umiddelbart så lett å kombinere med den mer generelle beskrivelsen som er lagt inn i Oslofjordmodellen av vannutvekslingen mellom bassengene, hvor trykkgrevne strømmer i en finere lagdeling fordeles til ulike dyp ut fra tetthetsprofiler. Det finnes to alternativer. Den ene muligheten er å forenkle transportbeskrivelsen ved å koble flere strømmer i samme retning til én strøm, med definert tykkelse. Det innebærer samtidig å anta full homogenisering av innstrømmen, og ødelegger altså muligheten til en detaljert beskrivelse av tetthetsbestemt vertikalfordeling av transporter. En annen mulighet er å utvikle modellen for tung bunnstrøm til en mer detaljert beskrivelse av hvordan strømmen i ulike lag samvirker med hverandre, og med vannet i bassenget det strømmer inn i. Det kan tenkes at en kan bruke Richardsons tall $Ri = N^2/(du/dz)^2$ som

blandingsparameter ved å la $g'/h \rightarrow N^2$ og $u/h \rightarrow du/dz$. Topografien må inngå også i en slik modell, og med Oslofjordens komplekse topografi innenfor Drøbaksteskelen kan det antagelig uansett bare bli en grov tilnærming.

6.6.2. Alternativ 2 - Energibetrakninger som grunnlag for å beregne blandingen.

Fischer et al.(1979), s. 166-167 gir en alternativ betraktningsmåte for innstrømning av tyngre vann i et tetthethomogen basseng. Beskrivelsen kan lett omformuleres til en situasjon med sjiktning i bassenget. Utgangspunktet er at vann med tetthet ρ_i strømmer inn i bassenget i et dyp z_i , med volumfluks q_i . I første omgang tenker vi oss at innstrømningen skjer uten særlig meddrivning og at vannet da ville innlagra seg etter sin tetthet på et eller annet dyp z_0 . Innstrømningens vertikale forskyvning i tyngdefeltet frigjør pr. tidsenhet en energi på totalt

$$E_p = g(z_i - z_0) q_i \rho_i + E_{kin} \quad (61)$$

hvor E_{kin} = kinetisk energi pr. tidsenhet i innstrømmen.

Noe av denne energien brukes til å fortrenge det vannet som er i bassenget fra før. Pr. tidsenhet skyves vannet mellom z_0 og z_i opp med en hastighet $w(z)$ gitt ved

$$w(z) = q_i / A(z) \quad (62)$$

hvor $A(z)$ er det horisontale tverrsnittsarealet i dyp z . Det arbeidet som da utføres mot tyngdefeltet pr. tidsenhet er

$$E_g = g \int_{z_0}^{z_i} \rho(z) w(z) A(z) dz = g \cdot q_i \int_{z_0}^{z_i} \rho(z) w(z) A(z) dz \quad (63)$$

hvor $\rho(z)$ er tettheten i bassenget på dyp z . Maksimalt tilgjengelig frigjort energi når vi tar hensyn til vannets reduserte tyngde er da

$$E_p - E_g = g q_i \int_{z_0}^{z_i} (\rho_i - \rho(z)) dz + E_{kin} \quad (64)$$

Noe av denne energien kan tenkes brukt til blandingsarbeid mot tyngdefeltet i resipienten generelt, mens en del av energien vil dissiperes ved meddrivning av omkringliggende vann i innstrømmen. Det siste vil egentlig bety innlaging noe høyere opp, og derved også redusere total energi i forhold til ligning (64). Det peker i retning av en iterativ løsning.

Hvis meddrivning imidlertid betyr forholdsvis lite, kunne en addere en viss del av blandingsenergien ifølge ligning (64) til den tidevannsdrevne vertikaldiffusjonen omkring innlagringsdyp.

Fisher (1979) s.169 er ikke på at også endringer i utstrømningen fra et reservoar gir forstyrrelser og bidrar til blandingsenergi, men vi vil anta at det ikke er så vesentlig i et naturlig system uten store vannuttak, dvs. uten avvik fra hydrostatisk trykk.

6.6.3. Valgt alternativ - diffusiv vertikalblanding basert på energibetrakninger.

Foreløpig er det valgt å legge inn i modellen en løsning basert på energibetrakninger ut fra Fischer (1979), hvor den utløste energien matematisk antas å kunne beskrives som et tilskudd til den ordinære vertikale blandingen. Innlagring skjer ut fra den tettheten innstrømningen har over terskelen, modifisert av en eventuell homogenisering mellom delstrømmene.

Det er foreløpig ikke tatt hensyn til meddrivning av vann fra de lagene det innstrømmende vannet passerer på vei ned mot innlagsdyp. Her kan det være aktuelt å videreutvikle modellkoden. Som grunnlag for en bedre beskrivelse av den vertikale blandingen eller omrøringen knyttet til dypinnstrømninger burde det foretas en forholdsvis detaljert måling av sjiktning og vertikalblanding før, under og etter en dypvannsinnstrømning. Dette er et mulig emne for videreutvikling av modellen, men det kan kanskje også gjøres noe ut på dette feltet ved et nærmere studium av eksisterende data.

Den potensielle energien antas i den eksisterende første versjon av modellen å bli utløst som kinetisk, turbulent energi i det laget innstrømningen lagrer seg, og gi vertikalblanding, eventuelt med en viss spredning til lagene ovenfor og nedenfor. Energi som på den måten er fordelt til et lag blir brukt til å blande mellom dette laget og laget ovenfor.

For å gi bedre mulighet til empirisk tilpasning av modellen er det anledning til å la den frigjorte energien fra hver delstrøm fordeles vertikalt rundt innlagsdypet og altså bli brukt til blanding i flere lag. Det er her valgt å bruke en empirisk modell utledet for Gjersjøen (Bjerkeng, 1973), hvor det ble funnet av variasjonene i temperaturprofil gjennom året at blandingsenergi som funksjon av dypet kunne beskrives som en spredning fra overflaten og nedover av en samlet energimengde som var korrelert med vindhastighet, og med en vertikal dempning som var koblet til tethetssjiktningen. Den samme betraktningen er her brukt på spredning i begge retninger av blandingsenergi fra et visst dyp.

Appendiks 4.4 viser detaljene i hvordan dette er gjennomført, med overgang til beskrivelse i diskrete lag, basert på rekursjonsformler som gir effektiv beregning. Sammenhengen er slett ikke generelt bekreftet, og må bare betraktes som en hypotese, men den er som nevnt tatt med for å gi mulighet til tilpasning. En modell av denne typen burde kunne utvides til å brukes på alle typer blandingsenergi, og det bør være enkelt f.eks. å la total energimengde brukt til vertikalblanding også influeres av tethetssjiktningen, dersom en finner empirisk grunnlag for det.

6.7. Kunstig vertikalblanding knyttet til dyputslipp

Det er vanlig å legge større utslipps av avløpsvann neddykket på dyp 40-100m, gjerne med en diffusor hvor vannet sendes ut i mange mindre stråler med hastighet omkring 4-5m/s. Strålene sendes ut omtrent horisontalt med en bevegelsesenergi som etterhvert omsettes i turbulent blandingsenergi; turbulensen gjør at strålen blander inn vann fra resipienten og øker i omfang, mens hastigheten avtar. Ved dykket utslipps av ferskvann i marine resipienter vil oppdriften bøye av strålene oppover og tilføre bevegelsesenergi som også etterhvert omsettes i blandingsenergi. De turbulente strålene vil derfor rive med seg vann fra resipienten mens de stiger mot overflaten. Innblandinga av vann fra resipienten gjør at strålen øker i tethet, samtidig med at eventuelle overkonsentrasjoner i utslippsvannet fortynnes. Når strålene stiger mot overflaten vil de samtidig møte vann av stadig mindre tethet, og de når som regel tilslutt et dyp hvor vannet i strålene blir tyngre enn vannet i resipienten. Da bremses strålene av tyngdefeltet, og det fortynnede avløpsvannet vil tilslutt innlagre seg i et sjikt etter sin endelige

tetthet, og spre seg videre horisontalt ved gravitasjonsdrevet frontspredning og ved naturlige spredningsprosesser.

Utslipp av dykkede turbulente stråler med oppdrift vil medføre en transport av vann i nærsonen rundt utslippet fra de underliggende resipientlagene opp til innlagsingsdypet. Det vannet som transportereres opp på denne måten erstattes av innstrømning av fortynningsvann fra sidene, og for å ta vare på volumkontinuiteten må dette motvirkes av en langsom nedsynkning av vann lengre unna for å erstatte det som rives med strålene. Sett i tre dimensjoner vil transportene altså sette opp et sirkulasjonsmønster med mer eller mindre radiell geometri; strøm oppover i nærsonen og radielt utover omkring innlagsingsdyp, kompensert av en nedsynkning av vann lengre unna utslippet og en strøm inn mot utslippssonen fra innlagsingsdyp og ned til omkring utslippsdyp.

I den horisontalmidlede modellen er det de vertikale komponentene av dette strømbildet som er av interesse. Den første fasen fra utslipp til innlaging må modelleres som en selvstendig prosess. Den kompenserende nedsynkningen av vann ellers i resipienten vil automatisk inngå i den horisontalmidlede vertikalhastigheten som settes opp for å bevare vannvolum i modellen.

I virkeligheten er det en sammenheng mellom vertikale og horisontale transporter som genereres av dykkede utslipp. Horisontaltransportene drives av horisontale gradienter i det tetthetsregulerte trykkfeltet, og vertikale tetthetsgradienter i resipientene setter derfor en grense for mye fortynningsvann som kan blir transportert inn til utslippet. Tetthetsgradienten kan også begrense hvor effektivt det fortynnede avløpsvannet kan bli transport bort fra nærsonen. Begge disse faktorene kan virke tilbake på hvor stor effektiv fortynning en kan få. For indre Oslofjord er disse spørsmålene behandlet nærmere i bl.a. Bjerke et al. (1978) i forbindelse med utformingen av utslippet fra Sentralrenseanlegg Vest. I eutrofimodellen er det foreløpig antatt at begrensningene i horisontale transporter ikke setter merkbare grenser for fortynning. I et gitt tilfelle må det foreløpig gjøres supplerende beregninger for å vurdere hvor holdbart dette er.

I sammenheng med avløpsdata som gis som inngangsdata til modellen, er det lagt inn en mulighet for å spesifisere dykket utslipp. Det er samme type inngangsdata som brukes til å beskrive all tilrenning fra land, både elver, bekker og utslipp av avløpsvann, og en kan derfor også spesifisere dykket utslipp av ferskvann fra elver med det formål å påvirke vertikalsirkulasjon. Data gis slik at de spesifiserer strålediameter og hastighet for hver stråle. Det antas at strålene er rettet horisontalt, men det er trivielt å gi anledning til å spesifisere stråleretning også.

Utslippsbetingelsene i strålene er definert ved:

$$Z_0 = \text{utslippsdyp}$$

$$D_0 = \text{strålediameter}$$

$$Q_0 = \text{vannføring i utslippet}$$

$$N_0 = \text{antall hull i diffusoren}$$

$$U_0 = Q_0 / (\pi D_0^2 / 4) = \text{hastighet i strålen}$$

Tettheten i utslippet settes foreløpig til $\rho_0 = 1.000 \text{ kg/l}$ (som for ferskvann ved 0°C) og trenger ikke spesifisieres som inndata. Det er også bygd inn i modellen en antagelse om at strålene slippes ut horisontalt, dvs. i vinkel $\theta_0 = 0$ med horisontalplanet. Nedenfor beskrives strålefotypning for vilkårlig ρ_0 og θ_0 .

Ved utslippet er strålen forholdsvis homogen over tverrsnittet både i tetthet og hastighet. Friksjon og turbulens gir innblanding av omgivende vannmasser i strålen. Innblandingen starter i utkanten av strålen og forplanter seg inn mot stråleaksen i økende avstand fra hullet gjennom den såkalte etableringssonen. I en viss avstand fra utslippsåpningen vil hele strålen være omfattet av blandingen, og variasjonen over stråletverrsnittet av både hastighet og konsentrasjon av avløpsvann vil deretter være beskrevet ganske godt som radielt symmetriske normalfordelinger (Gaussfordelinger). I det videre forløpet beregnes strålebane og meddrivning ut fra differensial-ligningene til Fan og Brooks (1969). Disse ligningen beskriver hvordan volumfluks, bevegelsesmengde og oppdrift forandrer seg langs strålebanen, og hvordan konsentrasjonsprofilene for hastighet og konsentrasjon varierer.

Hvis krumningen av strålebanen er begrenset kan et punkt i strålen fastlegges ved

$s =$ integrert avstand langs stråleaksen til det planet på tvers av stråleretningen hvor punktet befinner seg

$r =$ avstanden loddrett på stråleaksen ut til punktet.

Variasjonen på tvers av stråleretningen beskrives da av følgende ligninger:

For hastighet i strålens retning: $u^*(s, r) = u(s) \cdot e^{-(\sqrt{b})^2}$

For avvik fra tetthet i omgivende vann: $\Delta\rho^*(s, r) = \Delta\rho(s) \cdot e^{-(\sqrt{\lambda b})^2}$

hvor b er et mål på bredden av strålen. Parameteren λ er en formfaktor som beskriver forskjellen i utbredelse av energi/impuls og masse. For stråler med radiell symmetri som antatt her anbefales verdien $\lambda=1.16$.

Ved å integrere u^* , $(u^*)^2$ og $(\Delta\rho^* u^*)$ over stråletverrsnittet[§] finnes flukser av:

- Volum: $Q = \pi b^2 u$
- Bevegelsesmengde: $P = \frac{\pi b^2}{2} u^2 = \sqrt{P_x^2 + P_z^2}$ hvor $P_x = \frac{\pi b^2}{2} u \cdot u_x$; $P_z = \frac{\pi b^2}{2} u \cdot u_z$
- Oppdriftsmengde: $R = \pi b^2 u \Delta\rho \frac{\lambda^2}{1+\lambda^2}$

§

$$F(s) = \int_0^{2\pi} \int_0^\infty f(s, r) dr d\vartheta = 2\pi \int_0^\infty r \cdot f(s, r) dr$$

Endringene av fluksene langs strålebanen er styrt av følgende sett av differensialligninger:

$$\begin{aligned}\frac{dQ}{ds} &= \alpha \cdot 2\pi bu \\ \frac{dP_z}{ds} &= \pi g(\lambda b)^2 \frac{\Delta\rho}{\rho} \\ \frac{dP_x}{ds} &= 0 \\ \frac{dR}{ds} &= Q \cdot \frac{\partial \rho_a}{\partial s} = -Q \cdot \frac{\partial \rho_a}{\partial z} \cdot \frac{1}{\sin \theta}\end{aligned}\tag{65}$$

I den siste ligningen inngår ρ_a = tettheten til vannet omkring strålen i høyde z . For å beregne strålebanen (z og x som funksjon av s) integreres i tillegg de geometriske sammenhengene:

$$\frac{dz}{ds} = -\sin \theta\tag{66}$$

$$\frac{dx}{ds} = \cos \theta\tag{67}$$

Ved å integrere disse ligningene langs strålebanen beskrives stråleforløpet ved hjelp av senterverdiene. Som startbetingelser for den numeriske integrasjonen brukes tilstanden i slutten av etableringssonen. I denne sonen neglisjeres oppdriften, og stråletilstanden i endepunktet antas tilnærmet gitt ved:

$s_i = 6.2D$	$b_i = D / \sqrt{2}$
$z_i = Z_0 - 6.2D \sin \theta$	$x_i = 6.2D \cos \theta$
$\Delta\rho_i = (\rho_a(z_i) - \rho_0) \frac{1 + \lambda^2}{2\lambda^2}$	$u_i = U_0$

Beregningen føres frem inntil $\Delta\rho < 0.0$, dvs. at senteret av den fortynnede strålen blir tyngre enn omgivende vann i resipienten. Da regnes at effektiv fortynning stanser, idet strålen nå kan komme inn i den innlagrede skyen av avløpsvann, og utslippsvannet antas innlagret i dette dypet. I virkeligheten vil det kunne skje en viss fortsatt fortynning, og beregningen er derfor konservativ m.h.t. vertikaltransport og fortynning, og gir innlagring litt for langt ned. Alternativt kunne beregningen vært ført frem inntil strålen snur. Sannheten vil ligge et sted i mellom.

Ut fra det beregnede strålefortynningsforløpet integreres medrivningen fra hvert lag strålen passerer, og de resulterende transporter blir anvendt som vertikale transporter fra disse lagene som en "kortslutning" direkte til det laget hvor utslippet innlagres, og innvirker på fordelingen av alle stoffer i vannmassene. Det regnes bare med medrivning av vann utenfra og inn i strålen, og det antas derfor at permanent tap av vann fra strålen til de lagene den passerer kan neglisjeres. En kompenserende transport av vann nedover fra innlagsdyp til lagene under til erstatning for det som rives med av strålen blir automatisk inkludert i vertikalhastighetene slik at volumkontinuitet er oppfylt.

7. Ytre krefter og påvirkninger

En viktig del av den fysiske delen av eutrofimodellen er beskrivelsen av hvordan transport og biokjemisk omsetning i vannmassene påvirkes av ytre påvirkninger. Disse påvirkningene kommer i hovedsak på tre måter:

- Ved tilrenning fra land, via elver, bekker, utsipp av avløpsvann og diffuse tilførsler. Det viktigste formålet med modellen er å undersøke virkningen av disse tingene, og se på konsekvenser av endringer i disse påvirkningene.
- Ved vannutveksling med havområder utenfor det geografiske området som modellen beskriver, det vil for indre Oslofjord si vannmassene utenfor Drøbaksundet. Den vannkvalitet som spesifiseres for disse ytre havområdene utgjør modellens randbetingelser, mens selve utvekslingen beskrives som prosesser og er en del av modellen.
- Via overflaten, ved lys- og varmestråling, varmeledning, og ved utveksling av vann og gasser.

Når det gjelder påvirkningen fra land og fra utenforliggende havområder er det lagt inn en rent empirisk og områdeavhengig modellering som i liten grad er knyttet til en generell beskrivelse av fysiske mekanismer. Det som er gjort i eutrofimodellen på disse to punktene er derfor beskrevet andre steder. I den praktiske brukerbeskrivelsen i rapport 3 er det vist hvordan data for tilrenning og randbetingelser skal settes opp for bruk i modellen helt generelt, med data for indre Oslofjord som eksempler. Tilrenning beskrives nokså grovt som en årssyklus av månedsverdier, splittet opp på et valgfritt antall kilder. Randbetingelsene genereres som en tidsserie basert på et statistisk bilde av årsvariasjon, med variasjoner av "tilfeldig" karakter. Rapport 1 om utprøving av modellen på indre Oslofjord beskriver det datagrunnlaget og den dataanalyse som ligger bak den empiriske modelleringen av tilrenningsdata når det gjelder indre Oslofjord. Rapport 3 redegjør for hvordan randbetingelsene er satt opp konkret for indre Oslofjord.

I denne rapporten beskrives bare det tredje punktet som er nevnt ovenfor, dvs. overflateutvekslingen. Den er i større grad basert på generelle, fysisk baserte prosessbeskrivelser som gjelder uavhengig av område, og hører derfor hjemme i fysikk-rapporten.

Påvirkningen via vannflaten består av tre hovedkomponenter, som beskrives hver for seg i de etterfølgende underavsnitt:

- Solstråling, som trenger et stykke ned i vannmassene, og først og fremst påvirker de biokjemiske prosesser direkte ved at lyset regulerer primærproduksjonen, men som også innvirker noe på temperaturen i vannet.
- Utveksling av vann og varme ved fordampning og kondensasjon, nedbør, varmeledning og varmestråling.
- Utveksling av oksygen mellom vann og luft. I realiteten vil det også skje utveksling av karbondioksid og nitrogen, men det beskrives ikke i modellen, fordi konsentrasjonen av disse gassene (CO_2 hovedsakelig som HCO_3^-) ikke regnes for å være kritiske, dvs. at variasjonen i konsentrasjon ikke innvirker på de biokjemiske prosessene.

7.1. Lys-stråling

7.1.1. Stråling i øvre del av atmosfæren

Radiansen fra sola inn mot jorda er tilnærmet konstant over tid, med verdi:

$$S = 1350 \text{ W/m}^2 \pm 2\%$$

Enkle geometriske betrakninger gir solhøyden, dvs. solens vinkel ϕ i forhold til horisonten sett fra jordoverflaten som funksjon av tid:

$$\sin \phi = \sin \delta \cdot \sin t_y + \cos \delta \cdot \cos t_y \cdot \cos r_d \quad (51)$$

hvor

$$\delta(T_y) = \text{sol-inklinasjon} = -23.45 \cos(2\pi t_y/365) \quad (\text{°})$$

$$t_y = \text{tid relativt til vintersolverv.} \quad (\text{dager})$$

$$\phi = \text{breddegrad} \approx 60^\circ \text{ for indre Oslofjord}$$

$$r = \text{soltid i radianer i forhold til kl. 12.00: } [-\pi, +\pi] \text{ fra kl. 0.00 til 24.00.}$$

Hvis avbøyning i atmosfæren neglisjeres vil den andelen av døgnet som har direkte sollys (D) være gitt av betingelsen $\sin \phi > 0$. Ved å definere størrelsen

$$\Omega = \tan \delta \cdot \tan \phi \quad (52)$$

og anvende betingelsen $\sin(\phi) > 0$ i ligning (51) finnes følgende uttrykk for D :

$$D = \begin{cases} 1 & \text{hvis } \Omega \geq 1 \\ 1 - \arccos(\Omega) & \text{hvis } -1 < \Omega < 1 \\ 0 & \text{hvis } \Omega \leq -1 \end{cases} \quad (53)$$

Betingelsen $\Omega > 1$ gjelder hvis $\sin \phi > 0$ gjennom hele døgnet, dvs. uansett verdi på r_d , og hvis $\Omega < -1$ hvis $\sin \phi < 0$ gjennom hele døgnet.

Ser vi bort fra avbøyning, absorpsjon og spredning i atmosfæren blir strålingsintensiteten pr. flateenhet parallelt med jordoverflaten gitt ved:

$$I_s = \max[0, S \cdot \sin \phi] \quad (54)$$

Ved å sette uttrykket for $\sin(\phi)$ fra ligning (51) inn i ligning (54) og integrere over perioden med dagslys kan samlet stråling over et døgn pr. horisontal flateenhet før atmosfærisk demping og brytning beregnes til:

$$G_0 = S \cdot t_d \cdot (\sin \delta \cdot \sin t_y + \cos \delta \cdot \cos t_y \cdot \sin(\pi D)/\pi) \quad (55)$$

hvor t_d = lengden av et døgn = 86400 sekunder.

Med S i enhet W/cm^2 og med t_d i sekunder, får G_0 enheten $\text{J/cm}^2/\text{døgn}$.

For Oslo (Blindern) på nordlig breddegrad 60° varierer den globale strålingen over et døgn øverst i atmosfæren som vist i tabell 6.

Tabell 6. Variasjon i global stråling over et døgn øverst i atmosfæren for nordlig bredde 60° (Oslo).

	Periode med dagslys (timer)	Solhøyde ($^\circ$) kl.12	Stråling I kl.12 (W/m^2)	Global stråling, teoretisk maksimum. G_0 ($\text{J/cm}^2/\text{døgn}$)
Vintersolverv:	5.5	6.5	150	200
Sommersolverv:	18.0	53.2	1080	4220

7.1.2. Stråling i nedre del av atmosfæren

7.1.2.1. Bølgelengdespektrum og demping i atmosfæren

Solstrålingen har et bølgelengde-spekter med størst strålingsintensitet omkring 450 nm, dvs. i overgangen mellom fiolett og blått lys, den grønne delen av spekteret. Ca. 40% av energien er synlig lys med bølgelengder fra 400 til 700 nm, mens resten i hovedsak er infrarød stråling med bølgelengde opp til 3000nm.

Tabell 7. Fordeling mellom bølgelengdeområder og demping i atmosfæren

Type stråling:	Bølgelengde-område:	Øverst i atmosfæren [§]	Ved havflaten [†]
Kortbølget UV-stråling	0-290 nm	1%	-
Langbølget UV-stråling	290-400 nm	8%	1.5%
Synlig lys (fotosynteseaktivt)	400-700 nm	38%	24.5%
Infrarød stråling	>700 nm	53%	30%
Totalt:		100%	56%

[§] Handbook of Chemistry and Physics, CRC Press.

[†] Ved innfallsvinkel 30° og gjennomsnittlig sammensetning av atmosfæren.
(Handbook of Marine Sciences, CRC Press.)

Avhengig av skydekke og atmosfærens sammensetning vil strålingen absorberes og spres på vei ned mot jordoverflaten, ulikt for ulike bølgelengder. Ultrafiolett stråling absorberes sterkere enn synlig lys. Selv på en klar dag vil bare ca. 55% av ultrafiolett stråling (350 nm) kunne nå helt ned, mens opptil 95% av strålingen i den rød enden av lysspekteret (600-700nm) kan nå jordoverflaten (Jørgensen og Gromiec 1989). Hvor mye som når ned

avhenger også av solhøyden. Tabell 7 oppsummerer noen hovedtrekk ved fordeling mellom bølgelengdeområder og demping i atmosfæren. Av denne tabellen fremgår det at fordelingen mellom synlig lys og infrarød stråling er nokså konstant ned gjennom atmosfæren, begge deler dempes omtrent like mye.

7.1.2.2. Analyse av globalstråling ved bakken - data fra Blindern, Oslo.

Ved Meteorologisk Institutt på Blindern er det med små avbrudd målt daglig akkumulert globalstråling, fra 1970 til 1989, ialt ca. 7000 registeringer. Globalstråling vil her si total strålingsenergi summert over alle retninger pr. horisontal flate. Målingene tilsvarer G_0 som ble definert ovenfor, altså akkumulert over et døgn, men etter absorpsjon og spredning i atmosfæren.

Datamaterialet viser at den faktisk registrerte strålingsenergien ved bakken kan være opp til 3500 J/cm²/døgn om sommeren, og opp mot 300 J/cm²/døgn om vinteren når vintersolverv, men gjennomsnittet ligger langt lavere. Tabell 8 gir statistikk for $\ln(G_{\text{obs}}/G_0)$ hvor G_0 er beregnet av ligning (55). I datamaterialet fra Meteorologisk Institutt er noen av verdiene interpolert i tid fordi observasjoner manglet, slike verdier er ikke tatt med som grunnlag for statistikken.

Tabell 8. Statistikk for målt globalstråling ved bakken (Oslo, Blindern) i forhold til beregnet stråling øverst i atmosfæren som funksjon av tid på året.

Måned	$\ln(G_{\text{obs}}/G_0)$ for daglig globalstråling, Oslo, Blindern. G_0 = beregnet verdi øverst i atmosfæren, G_{obs} = målt verdi ved bakken.				
	Minimum	Maksimum	Median	Middelverdi	Standardavvik på enkeltverdi
1	-6.12	0.30	-0.93	-1.14	0.99
2	-4.63	0.07	-0.87	-1.03	0.79
3	-4.21	-0.06	-0.83	-1.10	0.83
4	-3.34	-0.14	-0.71	-0.96	0.69
5	-3.52	-0.27	-0.74	-0.95	0.60
6	-3.21	-0.30	-0.72	-0.90	0.54
7	-3.54	-0.12	-0.74	-0.88	0.51
8	-4.16	-0.19	-0.72	-0.91	0.59
9	-4.55	-0.14	-0.80	-1.08	0.80
10	-4.95	0.22	-1.11	-1.28	0.94
11	-5.67	0.37	-1.07	-1.22	0.93
12	-5.56	0.39	-0.92	-1.16	0.98

Tabell 8 viser at forholdet G_{obs}/G_0 typisk ligger i området 0.5 til 0.3 ($e^{-0.7}$ til $e^{-1.2}$). Om våren og sommeren kan koeffisienten være helt nede i $0.03 = e^{-3.5}$ på dager med skydekke og/eller disig atmosfære, mens den på klare dager kan være oppe i 0.8 til 0.9. Om sommeren vil forholdet G_{obs}/G_0 være mindre enn 0.5 i 50% av tiden.

Om vinteren er det større variasjon. Høyeste observerte verdi for G_{obs}/G_0 er $e^{+0.4} = 1.5$ og forekommer om vinteren. Dette kan henge sammen med at den lyskonsentrerende virkningen av lysbrytningen i atmosfæren slår sterkere ut for lave solhøyder. Forenklede beregninger

(homogen atmosfære under normalbettingelser, tykkelse 5 km) viser at effekten av dette for solhøyder under 5° kan være signifikant selv for klar atmosfære. Det kan også tenkes at fullmåne eller spesielt lysgunstige kombinasjoner av klar himmel og delvis skydekke kan gi forhøyde maksimalverdiene. Det kan slå ut spesielt sterkt om vinteren, fordi det da er lite direkte lys. I middel er imidlertid forholdet G_{obs}/G_0 20-30% lavere om vinteren enn om sommeren, og minimumsverdiene er 5-10 ganger lavere. Det er altså økt absorpsjon og spredning pga. lengre vei gjennom atmosfæren som dominerer ved lave solhøyder. Uansett er det statistikken for resten av året som har mest interesse i eutrofimodellen.

7.1.2.3. Sammenheng mellom skydekke og lysstråling ved bakken.

Globalstrålingen ved bakken kan beskrives som $G_{\text{obs}} = G_0 \cdot s_r$, hvor G_0 er teoretisk stråling i øvre del av atmosfæren, og s_r er en døgnmidlet svekningskoeffisient som varierer over tid som funksjon av skydekke og andre atmosfæriske forhold. Kremer og Nixon (1978) brukte i sin modell en funksjon

$$s_r = 1 - 0.071 \cdot N_{c,10} \quad (56)$$

hvor $N_{c,10}$ = grad av skydekke (0-10) varierer tilfeldig fra dag til dag. Denne sammenhengen er også brukt av Stigebrandt (1990). Ifølge Simpson og Paulson (1979) stammer denne sammenhengen fra Kimball (1928). Som påvist ovenfor varierer imidlertid den målte strålingen fra dag til dag mye sterkere enn det ligningen angir, og den kan derfor i beste fall gi en *midtverdi* for gitt skydekke. Simpson og Paulson refererer også noen andre empiriske sammenhenger, hvor lyset modelleres som funksjon av en 1. eller 2.grads funksjon av skydekke og eller solhøyde.

For å få mest mulig direkte simulering av koblingen mellom lyssvekning og skydekke slik det er oppgitt i de meteorologiske data, er lysmålingene fra Blindern analysert i sammenheng med 6-timers registreringer av skydekke ved Fornebu (Data fra meteorologisk institutt). Skydekket er oppgitt med verdier fra 0 til 9, hvor 0-8 angir andel overskyet himmel i 8-deler, og 9 angir tåke, denne variabelen er nedenfor betegnet med N_c . Data for årene 1973, 1974, 1987 og 1988 er brukt i denne analysen.

Først ble det gjort en foreløpig analyse hvor det bare ble brukt data for døgn hvor graden av skydekke er omtrent konstant gjennom døgnet ($N_{c,\text{max}} = N_{c,\text{min}}$), og hvor teoretisk stråling $G_0 > 1000 \text{ J/cm}^2/\text{døgn}$. Resultatet antydet at s_r for globalstrålingen varierer omtrent proporsjonalt med N_c^n , hvor n er omtrent 3, dvs. med statistisk forventningsverdi $E(s_r)$ gitt ved:

$$E(s_r) = s_{r,0} - b_s \cdot N_c^3 \quad (57)$$

Dette gjelder altså for global døgnstråling, dvs. summen av direkte sollys og diffust spredt lys fra klar himmel og skyer integrert over et døgn. Koeffisientene $s_{r,0}$ og b_s blir derfor lysvektede gjennomsnittsverdier over døgnet og over den lyseste delen av året. Antagelig burde de egentlig vært modellert som funksjon av solhøyden, men datamaterialet gir ikke noe helt godt grunnlag for å analysere det, siden strålingen ikke er målt for perioder med veldefinert solhøyde. Foreløpig nøyer vi oss derfor med denne grove modellen, selv om det burde være mulig å få ut noe ved en statistisk analyse. Hvis det antas at ligning (57) i praksis kan brukes omtrent uavhengig av midlere solhøyde over døgnet, kan vi bruke sammenhengen:

$$\frac{E(G_{\text{obs}})}{G_0} = \frac{\int_0^{t_d} I_s(t) \cdot E(s_r[N_c(t)]) \cdot dt}{\int_0^{t_d} I_s(t) \cdot dt} \quad (58)$$

Denne ligningen viser at den globale strålingen pr. døgn bør være omtrent proporsjonal med midlere svekningskoeffisient over døgnet, vektet med lysstyrken I_s i øvre del av atmosfæren, gitt av ligningene (51) og (54). For å tilpasse s_r som en polynom-regresjon mot N_c av 3. orden kan en derfor tilpasse globalstrålingen som polynom-regresjon av lysvektede døgnmidler av N_c^n ($n=1,2,3$). Slike døgnmidler ble derfor beregnet for 6-timers registreringene fra meteorologisk institutt, med teoretisk lysstyrke I_s gitt av ligning (54) for gitt dato og klokkeslett som vektingsfaktor for registreringene. Beregningen ble gjort ved numerisk integrasjon på timebasis; 6-timers registreringene av skydekke N_c ble lineærinterpolert.

Om vinteren, dvs. ved lave lysstyrker og korte dagslysperioder, er det stor spredning i lysvekningen ved gitt grad av midlere skydekke, mens det er bedre sammenheng i sommerhalvåret. Det kan tenkes å skyldes at variasjonen reelt er større ved lave solhøyder, eller at usikkerheten i midlere skydekke basert på 6-timer registeringer slår mest ut om vinteren, når dagene er korte. Det er derfor valgt fortsatt å se bort fra døgn hvor $G_0 < 1000 \text{ J/cm}^2/\text{døgn}$. Døgn hvor det forekommer tåke gir også stor variasjon i stråling og ble derfor kuttet ut.

Gjenværende data for G_{obs} , som omfatter ca. 900 av 1400 døgn, ble brukt til å tilpasse en regresjonsmodell for lysvekning som funksjon av lysvektede døgnmidler av N_c^n for $n=1,2,3$:

$$\begin{aligned} E(G_{\text{obs},k}) &= G_{0,k} \cdot E(s_r) \\ E(s_r) &= (s_{r,0} + b_{s,1} N_c^{1,m} + b_{s,2} N_c^{2,m} + b_{s,3} N_c^{3,m}) \\ N_c^{i,m} &= \frac{\int_{\text{døgn}} N_c^i \cdot I_s \cdot dt}{\int_{\text{døgn}} I_s \cdot dt} \end{aligned} \quad (59)$$

hvor indeks k angir observasjonsdøgn. Regresjonsberegningen ga en sammenheng for forventningsverdien for s_r , gyldig for $N_c = 0 - 8$, som vi antar også kan brukes til å beskrive øyebliksverdier tilstrekkelig godt:

$$E(s_r) = 0.67 - 0.0011 \cdot N_c^3 \quad (60)$$

Usikkerheten i koeffisientene er henholdsvis 1% og 5% (relativ standardfeil i estimatet). Sammenhengen forklarer ca. 79% av variansen i s_r , og det er bare 3.ordens-leddet som er signifikant; forklaringsgraden blir ikke vesentlig bedre ved å ta med også 1. og 2.ordens leddene.

Ved hjelp av ikke-lineær regresjon ble også undersøkt om det var indikasjoner på at en annen eksponent kunne gi bedre tilpasning, dvs. $N_c^{3,m}$ ble erstattet med $(N_c^{3,m})^\eta$, hvor η ble tillatt å variere kontinuerlig. Dette ga ikke η signifikant forskjellig fra 1.

En høyere ordens variasjon med skydekke virker intuitivt fornuftig. Det er rimelig å tro at det er statistisk positiv sammenheng mellom grad av skydekning og tykkelse av skydekke, og fordi spredningen og absorpsjon av lys ved gitt grad av skydekning må antas å øke med tykkelsen av skydekket, er det derfor også rimelig at lysstrålingen varierer med et ledd av høyere orden som funksjon av skydekningen. Det at midlere svekningskoeffisient varierer som

en 3.ordens funksjon av skydekningsgraden N_c kan da ses som uttrykk for den statistiske sammenheng mellom skydekningsgrad og tykkelse/vanninnhold av skyene, mens den statistiske spredningen i lysstråling ved gitt skydekningsgrad kan uttrykke virkningen av varierende tykkelse av skydekket for gitt skydekningsgrad.

7.1.2.4. Modellering av "tilfeldige" variasjoner for gitt skydekke

Absoluttverdi på avvikene rundt regresjonslinjen er noenlunde homogene m.h.t. på variasjon i forklaringsvariablen N_c^3 , dvs. at den relative spredningen rundt predikert verdi er størst for høye verdier av N_c når gjennomsnittet er lavt. Variasjonen av svekningskoeffisienten s_r rundt forventningsverdi ved gitt grad av skydekke ble undersøkt, og viser seg å kunne modelleres ganske godt stokastisk ved en funksjon:

$$s_r(t) = E(s_r) \cdot e^{\varepsilon(t)} \quad (61)$$

hvor logtransformerte avvik $\varepsilon(t)$ kan beskrives som en omtrent stasjonær stokastisk prosess som er normalfordelt $N(\mu, \sigma)$. Med stokastisk menes her at variasjonene har et tilfeldig preg i forhold til den forklaringsvariabel som benyttes.

Standardavviket σ for den stokastiske logtransformerte variasjonen øker når $E(s_r)$ minsker, dvs. ved økende grad av skydekke:

$$\sigma = 2.9 \cdot \left\{ 1 - [E(s_r)/0.95]^{1/8} \right\} \quad (62)$$

For å få riktig aritmetiske gjennomsnitt på den stokastiske prosessen s_r må gjennomsnittet μ av ε defineres som en funksjon av σ :

$$\mu = -\sigma^2/2 \quad (63)$$

Den stokastiske spredningen kan delvis skyldes statistiske feil i beregning av midlere skydekke pga. at vi bare har data hver 6. time, og delvis at N_c bare er et grovt samlemål for skydekkets lysdempende virkning. Så lenge simuleringsmodellen skal benytte tilsvarende grove data er det riktig å ha med hele spredningen. For situasjoner med tåke brukes ligningene med $N_c = 7$, resultatet av det skiller seg ikke signifikant fra det statistiske bildet en får av datamaterialet for dager med tåke.

Det "tilfeldige" elementet $\varepsilon(t)$ er foreløpig ikke lagt inn i eutrofimodellen når det gjelder solstrålingen, bare regresjonen med skydekke er inkludert. Som en videreutvikling av modellen kan en tenke seg å gjenskape eller simulere det med en autoregressiv stokastisk prosess med fordeling $N(\mu, \sigma)$ hvor gjennomsnitt μ og standardavvik σ er bestemt av den observerte data-serien. I tillegg til riktig gjennomsnitt og standardavvik vil en da også ønske at en slik simulering skal gi realistisk frekvens for typiske svingninger. Modellen skal kunne brukes for vilkårlige tidsskritt og må derfor formuleres slik at koblingen mellom tidspunkter er uavhengig av tidsskrittet for integrasjon. For en stasjonær, normalfordelt serie $Y(t)$ kan en få til dette ved følgende formel, som beskriver en såkalt Orstein-Uhlenbeck serie (ACSL ref. manual, Priestley 1981 s.167):

$$Y(t + \Delta t) = Y(t) \cdot \alpha_{\Delta t} + \omega(t) \cdot \sqrt{1 - \alpha_{\Delta t}^2} \quad (64)$$

hvor

$Y(t)$ = verdi som funksjon av t .

$\alpha_{\Delta t} = e^{-\Delta t/\tau}$ ($\rightarrow 1$ for $\Delta t \rightarrow 0$)

$\omega(t)$ = er en tilfeldig normalfordelt verdi $N(0, \sigma)$ ("hvit støy").

τ = tidskonstant, avgrenser tidsintervaller som har vesentlig autoregresjon.

En analyse av residualene for globalstrålingen i forhold til regresjonsmodellen mot skydekningsgrad N_c viser at korttidsfluktuasjonene i s_r , gitt som log-transformerte verdier $\varepsilon(t)$ som beskrevet foran, kan beskrives tilnærmet som en Orstein-Uhlenbeck serie med tidskonstant $\tau = 0.7$ døgn og et standardavvik 0.95. Dette vil si at bare 15-20% av et gitt avvik fra middel er residual fra døgnet før, mens 80-85% er et nytt avvik, uavhengig av forhistorien. Langtidsfluktuasjoner, dvs. forskjell i gjennomsnitt fra måned til måned, har et standardavvik på ca. 0.3, det gir et samlet standardavvik på 1.00.

Den empiriske verdien på ω som funksjon av tid kan defineres ved å interpolere i tid gjennomsnitt beregnet for hver måned av året. Estimat for den statistiske fordelingen av ω finnes også direkte ved å beregne

$$\tilde{\omega} = (Y(t + \Delta t) - Y(t)\alpha_{\Delta t}) / \sqrt{1 - \alpha_{\Delta t}^2} \quad (65)$$

og betrakte dette som et stokastisk datamateriale.

7.1.2.5. Oppdeling i direkte sollys og diffus stråling fra atmosfæren

Ligningen ovenfor i forrige avsnitt er funnet ved å analysere data for globalstråling, dvs. samlet lysstråling fra alle retninger pr. horisontal flate. Dette lyset er satt sammen av to komponenter:

- Direkte sollys med bestemt stråleretning
- Diffust lys som spres fra atmosfæren og/eller fra skydekket.

For klar himmel øker andelen diffust lys med minskende solhøyde. Basert på data i Dahlgren (1974) og Paltrigde og Platt (1976) som har gjort øyeblikksmålinger av lys, ser det ut til at det diffuse lyset for klar himmel kan beskrives godt med ligningen:

$$I_{diffus,0} = I_{g,0} \cdot (0.55 - 0.52 \cdot e^{-0.14/\sin \phi}) \quad (66)$$

hvor $I_{g,0}$ = globalstråling for skyfri himmel, dvs. stråling integrert over alle retninger, nederst i atmosfæren og nå som øyeblikkverdi, og ϕ = solhøyden i øyeblikket, gitt i radianer.

Mengden direkte sollys er da pr. definisjon gitt ved følgende ligning, hvor indeks 0 angir uten skydekke ($N_c=0$):

$$I_{direkte,0} = I_{g,0} - I_{diffus,0} = I_{g,0} \cdot (0.45 + 0.52 \cdot e^{-0.14/\sin \phi}) \quad (67)$$

Størrelsen $I_{g,0}$ beregnes som

$$I_{g,0} = I_s \cdot s_{r,0} \quad (68)$$

hvor I_s er teoretisk direkte innstråling gitt av ligning (54), multiplisert med svekningskoeffisienten $s_{r,0} = 0.67$ for klar himmel. Denne verdien ble funnet ved analyse av døgnakkumulert globalstråling, og variasjon med solhøyde ble her neglisjert. Egentlig skulle den antagelig vært koblet med solhøyden, dvs. med både tid på døgnet og tid på året. Ligning (67) gir en sterkere variasjon med solhøyde enn det som ligger rent geometrisk bestemt i ligning (54), og hvis denne variasjonen er riktig burde den egentlig vært fremkommet ved analyse av svekning av direkte sollys som funksjon av solhøyde i øyeblikket, og blitt sett som en del av variasjonen i $s_{r,0}$. Utledningen ovenfor får ses som en foreløpig løsning. Det er ikke tilfredsstillende å bestemme det direkte lyset som en rent empirisk bestemt differanse, men det tilgjengelige datagrunnlaget tillater ikke noe annet.

For situasjoner med skydekke $N_c > 0$ er det valgt fortsatt å bruke ligning (66) til å beskrive variasjon med solhøyden, men nå modifisert med et tredje-ordens ledd av skydekke gitt av ligning (60), dvs. vi har:

$$I_{diffus,0} = I_{g,0} \cdot (0.67 - 0.0011 \cdot N_c^3) \cdot (0.55 - 0.52 \cdot e^{-0.14/\sin\phi}) \quad (69)$$

mens det direkte sollyset antas å være en lineær funksjon av skydekke:

$$I_{direkte} = I_{g,0} \cdot (0.45 + 0.52 \cdot e^{-0.14/\sin\phi}) \cdot (1 - N_c/8) \quad (70)$$

Dette medfører at andelen diffust lys øker med tiltagende skydekke, og det virker i iallfall kvalitativt fornuftig. Disse to ligningene sammen med ligning beskriver den modellen vi vil bruke for å beskrive variasjonen i solstråling gjennom døgnet og over året. Solhøyden ϕ er gitt av ligning (51) og bestemt bare av tidspunktet, mens N_c finnes ved interpolasjon i innleste meteorologiske data. Foreløpig er den stokastiske variasjonen ikke lagt inn i eutrofimodellen.

7.1.3. Brytning og refleksjon i vannoverflaten

Når lyset passerer vannflaten brytes det. Brytningsindeksen for sjøvann varierer lite med bølgelengde, saltholdighet og temperatur (Jerlov 1968), og kan for praktiske formål settes konstant 1.335, dvs. vi har sammenhengen

$$\frac{\sin \phi_a}{\sin \phi_w} = 1.335 \quad (71)$$

hvor ϕ_a og ϕ_w betegner lysets vinkel på en linje normalt på vannflaten i henholdsvis luft (a) og vann (w). Denne ligningen brukes for det direkte sollyset for å gi midlere retning ϕ_w nedover i vannmassene, med $\phi_a = \phi$ bestemt av ligning (51), dvs. for jevn horisontal flate. Bølger vil gi spredning rundt den verdien av ϕ_w som er beregnet på denne måten, men det neglisjeres i modellen. Den midlere retningen inngår i beregning av lysstyrke og lysvekning med dypet, dette blir beskrevet i neste avsnitt.

Endel av lyset blir reflektert i overflaten. Refleksjonskoeffisienten r_I (albedo) dvs. forholdet mellom energi i innfallende lys og den energien som reflekteres i overflaten, er gitt ved følgende ligning (Jerlov 1968):

$$r_I = 0.5 \left\{ \left[\frac{\sin(\varphi_a - \varphi_w)}{\sin(\varphi_a + \varphi_w)} \right]^2 + \left[\frac{\tan(\varphi_a - \varphi_w)}{\tan(\varphi_a + \varphi_w)} \right]^2 \right\} \quad (72)$$

Ligningen gjelder for lysstrålenes vinkel i forhold til en linje normalt på vannflaten i det punktet de passerer. Som regel er vannflaten fragmentert i et spekter av ulike brytningsplan pga. vindgenererte bølger, og for å komme frem til en modell for samlet lysbrytning og refleksjon kreves en form for statistisk modellering, hvor en tar hensyn til hvordan bølgene bryter opp vannflaten. Preisendorfer og Mobley (1986) har gjort slike simuleringer på datamaskin, og beregnet midlere refleksjonskoeffisient (albedo) for forskjellig vindstyrke fra 0 til 20m/s og varierende solhøyde, ved å ta i betraktnsing kapillærbølger og dobbeltrefleksjon. Resultatet er en nokså kompleks variasjon, men med følgende hovedtrekk:

For solhøyder $>70^\circ$, dvs. ved små vinkler φ_a på innfallende lys, er refleksjonskoeffisienten ≈ 0.02 uavhengig av vindstyrke. Refleksjonskoeffisienten øker med minskende solhøyde, sterkest i området fra 30° ned til 0° . Når solhøyden $\varphi_a \rightarrow 0^\circ$, dvs. når sola nærmer seg horisonten, vil $r_I \rightarrow 1$ dersom det ikke er bølger, dvs. omtrent alt lys reflekteres. Dette følger direkte av ligning (72). Vindgenererte bølger kan gi litt økt refleksjon ved stor solhøyde, men dette betyr ikke mye, derimot kan det ha betydning at vinden gir vesentlig nedsatt refleksjon ved lave solhøyder, slik at en vesentlig større andel av lyset trenger ned i vannmassene. Ifølge resultatene til Preisendorfer og Mobley vil en vindstyrke 10 m/s gi en reduksjon av r_I med 30-60% ved lave solhøyder sammenlignet med en plan vannflate.

Ifølge Preisendorfer og Mobley varierer refleksjonen også med vinkelen mellom loddrett stråleplan og vindretning. Variasjonen ligger innenfor ± 0.05 og $\pm 20\%$, betydningen av dette øker med økende vind og minskende solhøyde. Dette er ikke tatt med i eutrofimodellen, refleksjonen er her modellert ut fra resultatene for vertikalt stråleplan i vindretningen. Preisendorfer og Mobley gir sine resultater i figurer, og følgende ligning er funnet ved tilpasning til verdier lest ut av deres fig.18 for nedoverrettede stråler med stråleplan i vindretningen:

$$r_I = \frac{1}{1 + 0.48 \cdot U^{0.62} + 47 \cdot (\cos \varphi_a)^{1.9}} \quad (73)$$

Denne ligningen er foreløpig brukt i eutrofimodellen. Foreløpig anses det tilstrekkelig å modellere sammenhengen mellom vind, solhøyde og albedo uten å ta i betraktnsing vinkelen mellom stråleplan og vindretning. For stråling på tvers av vindretningen er refleksjonen altså noe større, men dette er foreløpig ikke tatt inn i modellen. Det kunne eventuelt modelleres siden vindretningen er tilgjengelig som inngangssdata.

Ligning (73) gir refleksjonskoeffisienten for direkte solstråling, hvor alle strålene har en og samme veldefinerte retning. Det diffuse lyset fra atmosfæren eller fra skyer har ifølge fig. 21 hos Preisendorfer og Mobley en albedo som er forholdsvis lav og kan beskrives innenfor en feil ± 0.002 som funksjon av vind:

$$r_I = \begin{cases} 0.052 - 0.0007 \cdot U & \text{for uniformt fordelt lys} \\ 0.068 - 0.0015 \cdot U & \text{for tett skydekke (kardiodal fordeling (Jerlov 1968), } c = 2 \end{cases}$$

hvor U er vindstyrke i m/s. Med de vindstyrker som forekommer i indre Oslofjord (< 15 m/s) er variasjonen ikke vesentlig, og i eutrofimodellen er det derfor brukt en konstant refleksjonskoeffisient 0.05 for det diffuse lyset.

7.1.4. Absorbsjon og spredning av lyset i vannmassen

Lysstrålingen, enten det er direkte sollys eller indirekte lys fra atmosfæren, består delvis av infrarødt lys med bølgelengder opp til 3000nm. I modellen regnes med at all IR-stråling som trenger ned i vannet blir absorbert nær overflaten, innenfor det øverste laget i modellen. Andelen IR-stråling antas å være en fast andel av den energien som trenger ned i vannet, i utgangspunktet satt til 40%, men det kan justeres gjennom en modellkonstant.

Resten regnes som synlig lys, som vil trenge ned i vannmassene og dempes med dypet, og regulere primærproduksjonen. Lyset svekkes på vei nedover i vannet både pga. absorbsjon og spredning. Svekning med dypet er avhengig av lysets retning ned gjennom vannsøylen, men er også ulik for ulike bølgelengder. Det er raskere svekning med dyp for skrått lys fordi lyset da har en større vei å tilbakelegge pr. dypintervall.

Svekningen av lys med lysstyrke I med gitt bølgelengde og retning φ_w kan uttrykkes:

$$\frac{dI}{dz} = -\frac{k_l}{\cos \varphi_w} I \quad (74)$$

hvor k_l er svekningskoeffisient pr. lengde i stråleretningen for lys av den aktuelle bølgelengden. For et dypintervall hvor k_l kan regnes for konstant med dypet vil lysstyrken variere slik:

$$I = I_0 \exp\left(-\frac{k_l}{\cos \varphi_w}(z - z_0)\right) \quad (75)$$

hvor I_0 er lysstyrken i dyp z_0 .

Svekningskoeffisienten for lys av bestemt retning er en funksjon av både absorbsjon og spredning. Spredning vil ikke virke helt på samme måte for diffust lys integrert over alle retninger, men slike detaljer neglisjeres i eutrofimodellen. Det er i alle fall snakk om en ganske grov modellering av de fysiske prosessene.

Svekningskoeffisienten varierer med bølgelengde, men også med vannets innhold av partikler og farge. Den blir ofte uttrykt generelt som en sum av tre ledd:

$$k_l = k_w + k_p + k_s \quad (76)$$

hvor de tre leddene representerer henholdsvis virkningen av rent vann, av partikler og av oppløst stoff. Verdier i litteraturen kan variere mellom mindre enn 0.1 og opp til ca. 1 m^{-1} (Jerlov 1968, Parsons et al. 1977).

Siktedyprsmålinger kan settes i sammenheng med lyssvekningen med dypet. Siktedypt er et mål på integrert lyssvekning for lys fra overflaten til en sikteskive ut fra faktisk fordeling av nedoverrettet lys over alle innfallsvinkler, og lyssvekningen for lyset tilbake fra sikteskiven, men da bare rett opp gjennom vannmassen. Siktedypt vil være et mål på den samlede lyssvekningen, eventuelt sett i forhold til refleksjon av rett innfallende lys i overflaten. En omregning må derfor egentlig ta i betraktning både lysforholdene og vannflatens tilstand m.h.t. bølger, avhengig av hvordan siktedyptet observeres.

Sammenhengen mellom svekningskoeffisient og siktedypp D_s kan grovt uttrykkes med følgende enkle empiriske formel, ifølge Parsons et al. (1977):

$$k_t = \frac{1.7}{D_s} \quad (77)$$

For indre Oslofjord, hvor vanlig siktedypp har vært 2-4 m, kan koeffisienten i overflatelaget ut fra denne ligningen anslås til 0.4 til 0.9 m^{-1} , i god overenstemmelse med de høyeste verdiene fra litteraturen.

I eutrofimodellen er det mest relevant å bruke midlere svekningskoeffisient. Beskrivelsen av lyssvekningen forenkles ved at lyset bare beskrives som en total energifluks, uten oppdeling i bølgelengdeområder, og med bare en svekningskoeffisient, antatt representativ for fotosyntetisk aktivt lys, dvs. bølgelengder fra 400 til 700 μm .

Svekningen vil som sagt influeres av alle typer partikler i vannet, og også av oppløste stoffer med fargevirkning. I eutrofimodellen er det viktigst å modellere sammenhengen mellom planktonmengde og lyssvekning, siden dette er en potensielt viktig reguleringsmekanisme for primærproduksjonen. Stigebrandt og Wulff (1987) har brukt følgende empiriske sammenheng:

$$k_t = 0.25 + 0.02 \cdot SS \quad [\text{m}^{-1}] \quad (78)$$

hvor SS = midlere konsentrasjon av organiske partikler i de øverste 20 meter målt som partikulært nitrogeninnhold med enheten $\text{mmol/m}^3 = \mu\text{M/l}$.

I eutrofimodellen brukes i stedet partikulært karbon som det mest relevante målet på mengden organisk stoff, dvs. at vi setter:

$$k_t = k_{t,1} + k_{t,2} \cdot PARTC \quad [\text{m}^{-1}] \quad (79)$$

Her velges $k_{t,1} = 0.25 \text{ m}^{-1}$ og $k_{t,2} = 0.00025 \text{ m}^{-1} \cdot (\mu\text{gC/l})^{-1}$ etter Stigebrandt og Wulff. Den siste koeffisienten er regnet om etter et C:N-forhold 7:1 (atom:atom). $PARTC$ er nå mengden partikulært organisk karbon som $\mu\text{gC/l}$.

I eutrofimodellen brukes denne ligningen med $PARTC$ = summen av alle organiske partikulære C-komponenter, dvs. en sum som omfatter både fytoplankton, zooplankton og dødt partikulært organisk materiale. Det er altså antatt at lysabsorbsjonsevnen er en funksjon bare av total mengde organisk partikulært karbon uavhengig av tilstandsform, og det er en åpenbart svært grov forenkling. En mer differensiert modellering på dette punktet kan være ønskelig. Kanskje burde koeffisientene justeres ned når en går over til å bruke totalt organisk karbon i stedet for bare organiske partikler som grunnlag, det avhenger av hvordan de er bestemt. Konstantene er lagt inn i modellen som justerbare parametre som kan settes av bruker.

Lysdempningen beregnes nedover gjennom vannmassene ved å integrere lyssvekningen gjennom hvert lag ved hjelp av ligning (74) og (79) ved å bruke gjennomsnittlig konsentrasjon av karbon for hele lagtykkelsen. På den måten beregner modellen lysstyrken i grenseflaten mellom hvert lag nedover i modellen. Lysdempingen beregnes separat for direkte sollys og for diffus lys. Absorbert lys inngår i prinsippet i varmebalansen, selv om det kanskje er nokså uvesentlig i forhold til vertikalblanding.

I første omgang beregner modellen nedoverrettet stråling som energi pr. horisontal flate. Den effektive lysstyrken I_p for primærproduksjonen beregnes deretter som akkumulert energi pr. flateenhet inn på en kuleformet gjenstand. Det antas at dette best beskriver hvor mye lys fytoplankton greier å fange opp. Det betyr at alle lyskilder skal summeres med strålingsintensitet pr. flate loddrett på stråleretningen. Med de forenklinger som er gjort foran blir beregningen slik:

$$I_p = \frac{I_{direkte}}{\sin \varphi_w} + I_{diffus} \quad (80)$$

For det direkte lyset som faller skrått ned gjennom vannet i vinkel φ_w på loddlinjen blir effektiv lysstyrke større enn strålingen pr. horisontal flate. For det diffusive lyset neglisjeres avviket fra loddrett stråleretning, så her gjøres ingen omregning.

Stråling som funksjon av dyp nedover i vannmassene beregnes ved å integrere svekningen gjennom hvert modell-lag. På den måten beregnes lysstyrken i grenseflatene mellom lagene. Den midlere effektive lysstyrken for primærproduksjonen i et lag beregnes ut fra dette som geometrisk middel av lysstyrken i øvre og nedre grenseflate. Hvis vi betegner lysstyrken i øvre grenseflate for lag i med $I_{p,i}^*$, blir den midlere lysstyrken i det samme laget gitt av ligningen

$$I_i = \sqrt{I_{p,i}^* \cdot I_{p,i+1}^*} \quad (81)$$

Fordi dette skal være et volummiddel burde det egentlig vært tatt hensyn til hvordan arealet varierer nedover i laget når det gjelder å vekte de to lysstyrkene, men det er ikke gjort foreløpig.

7.2. Utveksling av varme og vann med atmosfæren

Transporten av varme gjennom grenseflaten vann/luft for perioden uten islegging kan deles i følgende komponenter (Pickard og Emery, 1982):

Q_s = innstråling av solenergi, i stor grad som synlig lys.

Q_b = netto langbølget varmestråling fra vann til atmosfære.

Q_h = varmeledning fra vann til atmosfære.

Q_e = netto varmetap/tilskudd knyttet til fordampning og kondensering av vann.

For perioder med islegging om vinteren vil det frigjøres varme når is fryser, og det blir varmetap ved smelting av is eller snø, dessuten innvirker isen på varmeutvekslingen. Siden fjordmodellen med hensyn til overflatelaget i hovedsak skal beskrive vekstperioden for alger, er det ikke tatt hensyn til dette. I første omgang koncentreres oppmerksomheten om å modellere den isfrie perioden uten snø. I kap. 7.4. er det nærmere beskrevet hvordan virkning av islegging kan tas hensyn til helt grovt. Nedbør vil tilføres med lufttemperatur, og gir også et lite varmeovergangsledd, men det er trivielt å ta med, og dessuten uvesentlig i størrelse, og trenger ingen nærmere drøfting.

Varmebalansen for et basseng fra overflate til bunn er gitt ved:

$$\frac{dH}{dt} = Q_s - Q_b - Q_h - Q_e + Q_v \quad (82)$$

hvor

H = varmeinnhold i bassenget

Q_v = netto varmetransport med vanntransporter til og fra andre bassenger.

Solstrålingen Q_s er beskrevet i avsnittet ovenfor. Den vil absorberes gradvis nedover i dypet, og innvirker direkte på varmebalansen i flere lag i modellen. De andre leddene (Q_b , Q_h , Q_e) berører bare det øverste laget direkte, mens virkningen på dypere lag skjer indirekte via vertikal vannutveksling. I underavsnittene nedenfor gjennomgås de tre siste komponentene i varmebudsjettet hver for seg.

7.2.1. Netto utstråling av varme

Netto varmestråling opp fra vannflaten er gitt som forskjellen mellom en brutto utstråling av varme fra vann til atmosfære ($Q_{b\uparrow}$) og en tilbakestråling av varme fra de nedre deler av atmosfæren ($Q_{b\downarrow}$):

$$Q_b = Q_{b\downarrow} + Q_{b\uparrow} \quad (83)$$

For temperaturer fra 0 til 20°C vil brutto utstråling variere fra 300 til 400W/m². Det meste av dette vil imidlertid balanseres av den atmosfæriske varmestrålingen, slik at typiske målte korttidsverdier for netto varmestråling fra havflaten kan ligge i området 0-100 W/m² (Simpson og Paulson 1979). Dette er likevel ikke uvesentlig sammenlignet med solstrålingen ved havflaten på breddegrad 60°, som om sommeren varierer fra 350 til 20W/m² midt over døgnet, avhengig av skydekke. Det kan derfor være av betydning å ha en brukbar beskrivelse av varmestrålingen.

100 W/m² tilsvarer 8,640 J/m²/kg·m³/døgn, og med et spesifikt varmeinnhold i vann på 4200 J/kg/grad gir det ca. 2 °C·m/døgn, altså 2 °C/døgn i 1 meter vannsøyle, 0.4 °C for 5 meter vannsøyle. Virkningen er altså ikke så viktig på kort sikt, men kan bety noe på tidsrom større enn ca. en uke. Brutto utstråling kan være viktig også på kort sikt innenfor et døgn pga. virkningen på vertikalblandinga dersom det gir opphav til tetthetsmessig ustabil vertikalprofil. Nedenfor behandles de to leddene i Q_b hver for seg.

7.2.1.1. Brutto utstråling fra vannflaten

Utstrålingen fra vannflaten kommer fra et tynt sjikt nær overflaten, og beskrives av den generelle varmestrålingsloven:

$$Q_{b\uparrow} = \varepsilon \sigma T_s^4 \quad (84)$$

hvor

ε = emissivitet for vann = 0.97 (Anderson 1952, Fichefet og Gaspar 1988)

σ = Stefan-Bolzmann konstant = 5.67 10⁻⁸ (W/m²K⁴)

T_s = absolutt temperatur for vann i overflaten (°K)

Spørsmålet her er hvordan T_s skal settes i forhold til gjennomsnittstemperaturen T_b i et overflatelag av en viss tykkelse. Målinger av Street og Miller (1977) i vindtunnel tyder på at ved ustabil temperaturforskjell mellom luft og vann, dvs. $T_a < T_b$, vil $T_b - T_s < 0.1(T_b - T_a)$ når T_b

er gjennomsnittlig temperatur i et 1 m tykt overflatelag. Forskjellen mellom T_b og T_s avtar med økende vind og ustabilitet. For stabil temperaturforskjell, dvs. $T_a > T_b$, og for svak vind kunne det tenkes at T_s kommer mye nærmere lufttemperatur T_a . Kudryavtsev og Soloviev (1990) har målt mikrostrukturen nær overflaten i frie vannmassene, med vertikaloppløsning ca. 1 cm. De profilene de viser under perioder med oppvarming om dagen har ingen vesentlige avvik nær overflaten innenfor den viste oppløsningen. De har ikke målt lufttemperatur. Det kan tenkes at grunnen til de temperaturen ikke øker helt nær overflaten er at fordampning alltid gir temperaturfall og ustabilitet nær overflaten.

7.2.1.2. Tilbakestråling fra atmosfæren for skyfri himmel.

Tilbakestrålingen fra skyfri himmel beskrives vanligvis som funksjon av lufttemperaturen nær overflaten (T_a):

$$Q_{b\downarrow} = \varepsilon \sigma T_a^4 \quad (85)$$

hvor ε = atmosfærens emissivitet.

Emissiviteten ε ligger i området 0.6-0.9. Den er egentlig en funksjon av mange faktorer, men beskrives vanligvis som funksjon av innholdet av vanndamp i det nederste laget i atmosfæren, ut fra at tyngdepunktet for den varmestrålingen som når bakken ligger nokså langt ned, i 200-300 meters høyde (Paltrigde og Platt 1976). Tabell 9 viser noen slike formler som finnes i litteraturen.

Tabell 9. Formler fra litteraturen for stråling fra atmosfæren som funksjon av luftfuktighet.

Referanse:	Formel for $f = \frac{Q_{b\downarrow}}{\sigma T_a^4}$	Verdier av f for ulike verdier av luftfuktighet e_a		
		$e_a = 2$ mb	$e_a = 10$ mb	$e_a = 30$ mb
Ångstrøms formel parametervalg fra Anderson (1952)	$A - B \cdot \exp(-\alpha \cdot e_a)$ $A = 1.107$ $B = 0.405$ $\alpha = 0.022$	0.72	0.78	0.90
Brunts formel parametervalg fra Anderson (1952)	$a + b e_a^{1/2};$ $a = 0.682$ $b = 0.036$	0.73	0.80	0.88
Anderson (1952):	$\varepsilon(0.74 + 0.0049e_a)$	0.73	0.76	0.86

De formlene som har vært mest benyttet, er de som er satt opp av Ångstrøm og Brunt. Også i nyere litteratur er det i stor grad disse formlene som er brukt (Kraus 1972, Paltrigde og Platt 1976, Simpson og Paulson 1979, Gill 1982, Fichefet og Gaspar 1988). For hver av formlene finnes det flere uavhengige bestemmelser av parametrene i litteraturen, og de kan tildels variere nokså mye. For Brunts formel er det anslått a -verdier fra 0.34 til 0.69 og for b er det

gitt verdier fra 0.029 til 0.127 (Marshunova 1966, Anderson 1952). Verdiparene viser nokså sterk negativ korrelasjon mellom a og b . I tabellen ovenfor oppgis koeffisienter ifølge Anderson (1952).

Formlene ovenfor er rent empiriske parametriseringer av stråling som funksjon av temperatur og fuktighet nær bakken, i ca. 2m høyde. Sett over et tidsrom på noen dager varierer damptrykket stort sett direkte som funksjon av temperatur, og det kan derfor være vanskelig å skille mellom effekten av høyere temperatur og økende luftfuktighet. Swinbank (1963) fremsetter som hypotese at den empiriske koblingen mellom stråling og fuktighet ikke skyldes direkte innvirkning av varierende fuktighet, men at sammenhengen mellom stråling og fuktighet bare skyldes at begge deler varierer med temperatur. Swinbank har derfor tilpasset empirisk en alternativ formel, hvor strålingen kobles til temperatur alene:

$$Q_{b\downarrow} = k T_a^6 \quad (86)$$

hvor $k = 5.31 \cdot 10^{-13} \text{ W/m}^2/(\text{°K})^6$

Ifølge Paltrigde og Platt (1976) stråler atmosfæren som et svart legeme i den del av spekteret som absorberes av vanndamp, dvs. utenfor 8-14μm. Det gir en f -verdi omkring 0.7 i ligning (85) ved vanlige temperaturer. Hvor stor andel av strålingen som ligger i dette vinduet varierer med temperaturen. Deacon (1970) har analysert dette teoretisk, og finner at endringer i strålingsspektrum og endring i absorpsjonsgrad med temperatur bare skulle gi en svak temperatureffekt, ca. $T^{0.2}$. Ved å bruke en empirisk sammenheng mellom temperatur og vannmengde i atmosfæren finner Deacon en formel som stemmer bra med Swinbanks formel (86), og det kan tyde på at det likevel er en reell sammenheng med luftfuktighet. Også Swinbank understreker at det meste at varmestrålingen skyldes vanndampen i atmosfæren.

Døgnvariasjoner i temperatur nederst i atmosfæren følges ikke av tilsvarende variasjoner i absolutt fuktighet. Det er usikkert hvilken av betraktningsmålene som gir best beskrivelse. Swinbanks formel er basert på målinger om kvelden og natten og kan tendere mot å beskrive situasjoner med temperaturinversjon. Om dagen vil formelen gi verdier som er ca. 20 W/m² for høye ifølge Paltrigde og Platt (1976), fordi temperaturen rett over havflaten øker mer enn for tyngdepunktet av strålingen. Swinbanks formel kan altså gi for sterkt døgnvariasjon. Formlene til Ångstrøm og Brunt vil gi ca. 50% mindre døgnvariasjon enn Swinbanks formel, fordi fuktigheten varierer mindre over døgnet enn temperaturvariasjonene skulle tilsi. Selv om Swinbanks formel kan være brukbar for døgnmidler, er det derfor mulig at Brunts formel er bedre til å beskrive døgnvariasjoner.

For beregning av netto Q_b som gjennomsnitt over døgnet gjengir Oke (1978) formlene ovenfor, men strålingen begge veier modelleres som funksjon av lufttemperatur T_a , dvs. at det antas at overflatetemperatur i vann $T_s = T_a$ i ligning (84). Stigebrandt (1985,1990) med bakgrunn i Gill (1982) går den andre veien, og oppgir netto stråling bare som funksjon av T_s , tydeligvis basert på Brunts formel for $Q_{b\downarrow}$ kombinert med standard utstrålingsledd:

$$Q_b = \epsilon \sigma T_s^4 (0.39 - 0.05 e_a^{1/2}) \quad (87)$$

7.2.1.3. Virkning av skydekke på tilbakestrålingen

Skydekke vil øke tilbakestrålingen fra atmosfæren. For formler som bygger på forenklingen $T_s = T_a$ kan det være brukbart å multiplisere netto utstråling med en reduksjonsfaktor. Kraus (1972) gir basert på Budyko (1958) en faktor $(1 - c \cdot N_c^m)$, hvor $c=0.76$ for 60°N og $m=1.5-2.0$,

og N_c = graden av skydekke varierende fra 0 for skyfri himmel til 1 ved tett skydekke. Stigebrandt (1985,1990) bruker en faktor $(1-0.75N_c^2)$.

Pollard og Thomas (1989) bruker en faktor $(1-0.8N_c)$ på netto utstråling selv om de ikke har antatt $T_s = T_a$. Det kan i prinsippet gi urimelige utslag, fordi det innebærer at skydekke minsker tallverdien på netto utstråling uansett fortegn. I praksis vil det antagelig alltid være en netto utstråling (Anderson 1952), så det spiller liten rolle ved anvendelser.

Et alternativ som virker mer prinsipielt riktig for formler hvor en skiller mellom T_s og T_a , er å addere et skyledd til $Q_{b\downarrow}$, gitt ved:

$$Q_{b\downarrow \text{skyer}} = \varepsilon \delta \cdot T_c^4 \cdot N_c \quad (88)$$

hvor N_c = grad av skydekke (0-1)

T_c = temperatur i skydekket [$^\circ\text{K}$]

δ = empirisk konstant

Ifølge Paltrigde og Platt (1976) kan det være brukbart å sette $\delta=0.3$, basert på at skydekket bidrar til å stenge inne den delen av varmestrålingen som ikke absorberes av vanndamp (8-14 μm), og som utgjør ca.30% av total varmestråling ved vanlige temperaturer. Det er imidlertid upraktisk å ha med skytemperatur T_c som variabel. Ifølge Paltrigde og Platt kan en som en forenkling erstatte dette med en konstant midlere verdi:

$$Q_{b\downarrow \text{skyer}} = Q_0 \cdot N_c \quad (89)$$

hvor verdien $Q_0 = 60 \text{ W/m}^2$, som er bestemt for data fra Aspendale i Australia, er typisk for midlere breddegrader ifølge Paltrigde og Platt (1976). Denne verdien er også anbefalt av prof. Skartveit (personlig meddelelse) til bruk for norske forhold.

7.2.1.4. Oppsummering - beskrivelse valgt i eutrofimodellen.

I eutrofimodellen velges å beskrive netto varmestråling eksplisitt som forskjellen mellom brutto utstråling gitt som funksjon av vannets overflatetemperatur T_s , og en tilbakestråling basert på Brunts formel med et separat skyledd ifølge ligning (89):

$$Q_b = \varepsilon \sigma T_s^4 - (0.61 + 0.05 e_a^{1/2}) \sigma T_a^4 - Q_0 N_c \quad (90)$$

Vi antar at dette gir et brukbart utgangspunkt for å modellere døgnvariasjoner riktig, og få frem eventuelle vekselvirkninger i døgnvariasjoner mellom forskjellige påvirkninger, f.eks. kobling mellom solstråling og netto varmestråling, som kan ha betydning for blandingsprosessene.

7.2.2. Nedbør, kondensasjon og fordampning

Nedbør er gitt som en del av de meteorologiske data som leses inn til modellen. Nedbør gis som akkumulert nedbørmengde mellom registreringer. I modellen blir nedbørmengden fordelt som avsetning pr. tidsenhet, jevnt over aktuell periode.

Netto energitap ved fordampning (eller -energitilskudd ved kondensering) er gitt ved:

$$Q_e = F_e \cdot L_t \quad [\text{W/m}^2/\text{s}] \quad (91)$$

hvor

$$L_t = \text{spesifikk fordampningsvarme} = 2494 - 2.2(T_s - 273.15) \quad [\text{J/g}]$$

$$F_e = C_e \cdot (q_s - q_a)U = \text{fordampning (- kondensasjon)} \quad [\text{g/m}^2/\text{s}]$$

$$U = \text{vindhastighet} \quad (\text{m/s})$$

$$q_s = \text{absolutt mettet fuktighet for luft ved vannets overflatetemperatur } T_s \quad [\text{g/m}^3]$$

$$q_a = \text{absolutt fuktighet ved lufttemperatur } T_a \quad [\text{g/m}^3]$$

Bunker (1976) har oppsummert sine egne og andres resultater for koeffisienten C_e , de varierer mellom $0.5 \cdot 10^3$ og $3 \cdot 10^3$. For nøytral luftstabilitet ser det ut til at formelen

$$C_e \cdot 10^3 = 1.1 + 0.03 \cdot U \quad (92)$$

kan være en brukbar beskrivelse ut fra Bunkers data for området 0-10m/s. Ved lave vindhastigheter er C_e sterkt avhengig av stabilitet ifølge Bunker. Koeffisienten avtar mot null for stabil sjiktning og lave vindstyrker, mens den er mer uavhengig av vind for ustabil sjiktning og høyere vindstyrker. På samme måte som for friksjonskoeffisienten C_d har Bunker beregnet $C_e/C_{e,n}$, hvor $C_{e,n}$ er verdien ved nøytral temperaturforskjell, og resultatet er oppgitt i tabellform. Ved ikke-lineær optimalisering er det funnet at dette forholdet kan beskrives godt av en lignende formel som C_d :

$$C_e = C_{e,n} \left[1 + A_e \frac{(T_s - T_a)^{\alpha_e}}{\max(1.5, U)^{\beta_e}} \right]^{\gamma_e} \quad (93)$$

med koeffisienter:

	A_e	α_e	β_e	γ_e
For ustabile forhold ($T_a < T_s$):	0.371	0.807	0.922	+1
For stabile forhold ($T_a > T_s$):	2.855	1.648	1.722	-1

Large og Pond (1982) fant gjennomsnittlig fordampningskoeffisient $10^3 C_e = 1.15$ (usikkerhet 20%) for nøytrale og ustabile tilstander ($T_s \geq T_a$), men med spredning i enkeltverdiene mellom 0.6 og 1.7, for vindhastigheter i området 4-10m/s. For vind $> 10\text{m/s}$ er gjennomsnittet ca. 1.3. De hadde ikke data til å bestemme C_e for stabile tilstander, men henviser til resultater i Anderson og Smith (1981), som indikerer at C_e ikke er mye forskjellige for stabile og ustabile tilstander. Large og Pond mener Bunker (1976) har overestimert C_e med 10-20%.

Stigebrandt (1985) har i sin Østersjømodell brukt $C_e = C_h$ hvor C_h er varmeovergangskoeffisient som bestemt av Smith (1980), og den har forskjellig verdi for stabil og ustabil tilstand, se neste avsnitt. Dette er mer i overenstemmelse med resultatene i Bunker 1976. Siden det i Oslofjorden er forholdsvis små vindstyrker, med 5-10 m/s som det viktigste

område, kan variasjonene i C_e med stabilitet ha betydning, og det er derfor valgt å modellere C_e som funksjon av vindhastighet og stabilitet slik som beskrevet foran, basert på Bunker (1976), men redusert med 20% i forhold til Bunkers verdier.

7.2.3. Varmeledning

Varmetransport fra vann til atmosfære ved turbulent varmeledning beskrives vanligvis ved denne ligningen:

$$Q_h = \rho_a \cdot c_a \cdot C_h \cdot U \cdot (T_s - T_a) \quad (\text{W/m}^2) \quad (94)$$

hvor ρ_a	= luftens tetthet	(kg/m ³)
c_a	= varmekapasitet for luft	(J/kg/°C)
C_h	= varmeledningskoeffisient	dimensjonsløs
U	= vindhastighet 10 m over vannflaten	(m/s)
T_s	= vanntemperatur i overflaten	(°C)
T_a	= lufttemperatur 10 m over vannflaten	(°C)

Litteraturverdier for C_h er gjengitt i tabell 10.

Tabell 10. Estimater i litteraturen for varmeutvekslingskoeffisient som funksjon av tetthetsstabilitet i overgangen luft/vann.

	$10^3 \cdot C_h$:		
	Stabilt ($T_s < T_a$)	Nøytralt	Ustabilt ($T_s > T_a$)
Bunker (1976)	0.86	0.97	1.46
Smith (1980)	0.83		1.1
Large og Pond (1982)	0.66		1.13

Estimatene til Smith (1980) og Large og Pond (1982) er basert på data for vindhastigheter i området fra 4-6 m/s opp til 20-25 m/s. Large og Pond finner tegn til at C_h kan øke noe for vind over 10m/s, men det er ikke statistisk signifikant. De angir en usikkerhet innenfor ca. 10% for sine verdier. Dataene til Smith, som dekker et dobbelt så stort variasjonsområde for $U(T_s - T_a)$, viser ingen tegn til en slik økning. I de verdiene Bunker (1976) oppgir er ikke avhengigheten av vind undersøkt. I eutrofimodellen antas som hos Stigebrandt (1985) $C_h = C_e$, men med den modellen for C_e som ble avledd i forrige avsnitt. Den er stort sett i god overenstemmelse med verdiene for C_h som er gjengitt ovenfor.

7.3. Utveksling av oksygen med atmosfæren

Oksygenutvekslingen med atmosfæren bidrar til den totale oksygenbalansen i modellen. Det er lagt inn to mekanismer for dette i modellen, en diffusiv utveksling gjennom overflaten, og en mekanisme knyttet til antatt bobledannelse ved overmetning.

7.3.1. Diffusiv utveksling gjennom vannoverflaten

Denne diffusive utvekslingen kan beskrives med ligningen:

$$Q_{ox} = k_{ox} \cdot ([O_2] - [O_{2,metn}]) \quad (95)$$

hvor $[O_2]$ er faktisk oksygenkonsentrasjon i vannet ved overflaten, og $[O_{2,metn}]$ er oksygenkonsentrasjon ved metning for gjeldende temperatur og salinitet i overflatevannet.

Utvekslingskoeffisienten k_{ox} er først og fremst en funksjon av vinden men varierer også med temperatur. Data om denne utvekslingskoeffisienten finnes i litteraturen.

Banks (1975) oppgir data og sammenhenger fra litteraturen for både oksygen- og varmeutveksling som funksjon av vind, temperatur er ikke oppgitt. For vindstyrker på 2-4m/s er det oppgitt utvekslingskoeffisienter i området $5-10 \cdot 10^{-6}$ m/s, dvs. 0.04-0.08m/dag, og utvekslingskoeffisientene varierer forholdsvis svakt med vindstyrken, svakere enn $\sim U^{1/2}$. Ved vindstyrke ca. 10m/s er utvekslingskoeffisienten $2-3 \cdot 10^{-5}$ m/s, dvs. 1.7-2.6m/dag, og for vindstyrker over 10m/s øker k_{ox} omtrent som U^2 .

Watson et al. (1991) gir data for utvekslingskoeffisienten for CO_2 som funksjon av vindhastighet i området 5-20m/s ved temperatur 20°C. Deres data er beregnet ut fra målinger i Nordsjøen med svovelheksafluorid og helium som sporstoffer. Resultatene stemmer bra med en stykkevis rettlinjet funksjon basert på data fra innsjøer og vindtunnelforsøk. Koeffisienten k_{ox} er ifølge den viste funksjonen < 0.1 m/dag for vindhastigheter under 3m/s, øker omtrent lineært til 26cm/time (6.2m/dag) ved vind 13m/s, og videre til 80cm/time (19m/dag) ved vind 21 m/s. Watson et al. angir på basis av teoretiske modeller for gassutveksling at utvekslingskoeffisienter for ulike gasser kan ventes å variere proporsjonalt med kvadratroten av molekulær diffusjonskoeffisient for gassene. Oksygen har 15% høyere molekulær diffusjon i sjøvann enn CO_2 (Horne 1966), og bør derfor ha ca. 7% høyere utvekslingskoeffisient.

På basis av dette kan det settes opp følgende ligning for utvekslingskoeffisienten ved 20°C for vindhastigheter >3m/s:

$$k_{ox} = k_0 + 0.67 \cdot \max(0, U - 3) + 1.07 \cdot \max(0, U - 13) \quad [\text{m/dag}] \quad (96)$$

hvor vindhastigheten U er gitt i m/s. Denne formelen gir $k_{ox} \approx 4.7$ m/dag for vindstyrke $U=10$ m/s, altså noe høyere enn hos Banks (1975). Det konstante nivået k_0 ved lave vindhastigheter er usikkert, men kan ut fra Banks' data tentativt settes til 0.04m/dag.

Stigebrandt (1991) bruker en annen formel hvor både vindhastighet og vanntemperatur inngår:

$$k_{ox} = 5.9 Sc^{-1/2} \cdot 2.85 \cdot (U - 3.4); \quad \text{gyldig for } U \in [3.6, 13] \text{ m/s} \quad (97)$$

Størrelsen Sc kalles Schmidts tall, og er forholdet mellom kinematisk viskositet og molekulær diffusivitet. I temperaturområdet $T=0-40^\circ\text{C}$ angis Sc å variere som:

$$Sc = 1450 - 71 \cdot T + 1.1 \cdot T^2 \quad (98)$$

dvs. temperaturvariasjonene blir omtrent slik:

T [°C]	Sc	k (m/dag) (ved $U=10\text{m/s}$)
0	1450	2.91
5	1122	3.31
10	850	3.81
15	633	4.41
20	470	5.12

Den relative temperaturvariasjonen kan også modelleres ved et eksponensielt uttrykk:

$$k_{ox} = k_{ox,20} \cdot \exp(0.029(T - 20^\circ C)) \quad (99)$$

I modellen er det valgt å bruke denne formelen, med $k_{ox,20}$ gitt av ligning (96), for å beskrive den diffusive utvekslingen av oksygen med atmosfæren.

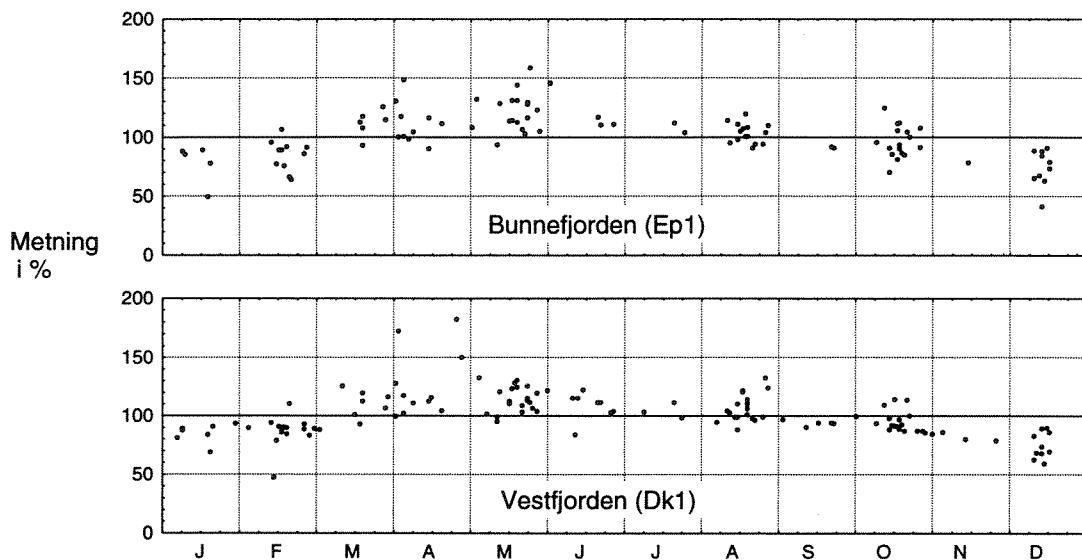
Stigebrandt opererer også med en korreksjon for luftbobler som blandes ned i vannet av brytende bølger, og derved utveksler oksygen under litt større trykk, det er ikke tatt med her. Derimot der det tatt med en mekanisme for å simulere bobledannelse ved overmetning pga. oksygenfrigjøring fra primærproduksjonen, det er beskrevet i neste avsnitt.

7.3.2. Bobledannelse ved overmetning av oksygen.

I produksjonsesongen skjer det en betydelig oksygenproduksjon i overflatelaget pga. primærproduksjonen. Det gir oksygenkonsentrasjoner som overstiger metningskonsentrasjonen i vannet. Data fra indre Oslofjord viser at metningskonsentrasjonen rutinemessig overskrides med mer enn 20-30% fra sent på vinteren og utover mesteparten av sommeren. Overskridelser ut over det forekommer forholdsvis sjeldent, men verdier opp mot 80% overmetning kan forekomme. Dette er illustrert i figur 11.

Modellkjøringer i en tidlig fase tydet på at en diffusiv mekanismen som er beskrevet ovenfor ikke er tilstrekkelig til å gi realistiske oksygenkonsentrasjoner, oksygenkonsentrasjonene i de øverste lagene ble alt for høye i forhold til observerte oksygenkonsentrasjoner i de øverste metrene. Det var da nærliggende å prøve å kompensere dette ved å legge inn en tilleggsmekanisme for avgivelse av overkonsentrasjoner til atmosfæren. Metningskonsentrasjonen er den konsentrasjon som gir likevekt mellom vann og luft under standard atmosfæriske forhold. Overkonsentrasjoner må pr. definisjon antas å føre til at det dannes bobler med oksygen. Ut fra almen fysisk kunnskap må det antas at partikler i vannet vil fremme denne prosessen. Boblene må også antas å kunne løses seg ut og stige til overflaten, slik at oksygenet blir avgitt til atmosfæren.

I eutrofimodellen er det derfor bygd inn en enkel beskrivelse av dette, basert på rent almene fysiske betrakninger, og med en justerbar koeffisient som tillater tilpasning til rimelige simuleringsforløp. Denne mekanismen antas i prinsippet å kunne virke på flere lag nedover, og er derfor beskrevet som funksjon av dyp z , forutsatt gitt i meter, men den er viktigst nærmest overflaten. Mengden oksygen som går over i bobler og stiger til overflaten pr. volum og tid betegnes $B(z)_{ox}$ og antas å være en lineær funksjon av overkonsentrasjonen av oksygen.



Figur 11. Oksygen-metning (%) i overflaten i indre Oslofjord, basert på data fra overvåkningen av indre Oslofjord 1973-1992.

(Magnusson et al. 1974-1994)

Det kan grunngis ved at det er snakk om samme type diffusiv overgang mellom bobler og omgivende vann som beskrevet ovenfor for overflaten:

$$B(z)_{ox} = -b_{ox} \cdot \max(0, O_2(z) - O_2(z)_{sat}) \quad (100)$$

Koeffisienten b_{ox} er en spesifikk rate med enhet (tid⁻¹) som spesifiserer hvor raskt en overkonsentrasjon motvirkes av dannelse av bobler som stiger til overflaten, og $B(z)_{ox}$ har følgelig dimensjon (oksygen/volum/tid).

Den effektive metningskonsentrasjonen $O_2(z)_{sat}$ er en lineært økende funksjon av dypet z . Det skyldes at trykket i vannet øker nedover i vannsøylen. Dette trykket, og derfor også gasstrykket i eventuelle bobler i likevekt med oppløst gass i vannfasen, vil øke med 0.1 atmosfære pr. meter dyp. De dominerende gasser i atmosfæren er nitrogen med ca. 78% og oksygen med ca. 21% målt som molekylærfraksjon. Bidragene til trykket blir proporsjonalt med molekylandelen. Siden nitrogen er mye mindre influert av biologiske eller kjemiske prosesser enn oksygen, er det naturlig å anta at nitrogen er omtrent mettet i overflaten, og at en finner omtrent konstant absolutt konsentrasjonen av oppløst nitrogen nedover i vannmassene. Det samme bør gjelde de gasser som finnes i mindre konsentrasjoner, slik at atmosfærinneholdet unntatt oksygen kan bidra med et partialtrykk på 0.79 atm i en boble i likevekt med vannet, uansett dyp. Karbondioksid bidrar svært lite til lufttrykket, og kan derfor neglisjeres, selv om karbonat forekommer i store totalkonsentrasjoner og kan variere mye med biologisk omsetning. Den økningen i likevektstrykk med dyp som kreves for å få bobler på et gitt dyp må derfor eventuelt i hovedsak skyldes forhøyet partialtrykk fra oksygen. Nødvendig partialtrykk fra oksygen som funksjon av dyp for at det skal bli bobler er derfor gitt ved

$$p_{O_2} = 0.21 + 0.1 \cdot z \quad (101)$$

og siden metningskonsentrasjonen av oksygen er proporsjonal med partialtrykket (Henry's lov) har vi:

$$\begin{aligned} O_2(z)_{sat} &= O_2(0)_{sat} \cdot (p_{O_2}(z)/p_{O_2}(0)) \\ &= O_2(0)_{sat} \cdot (1 + 0.476 \cdot z) \end{aligned} \quad (102)$$

Dette avgrenser virkningen av bobledannelser meget sterkt i dyp, fordi den oksygenkonsentrasjon som kreves øker sterkt med dyp og fordi oksygenproduksjonen avtar raskt med økende dyp og minskende lys. Det er likevel tatt med i modellen, fordi det kan ha betydning i det øverste laget, hvor midlere metningskonsentrasjon kan være nede i ca. 1.4 ganger metningskonsentrasjonen ved overflaten, dvs. omtrent som observert. Virkningen av eventuell bobledannelse på gjenværende nitrogenkonsentrasjon er ikke inkludert i modellen, det gjør at begrensningen i ligning (102) kan være litt for sterk.

7.4. Virkning av isdekke på overflateutvekslingen.

Ved isdekking vil det selvsagt trenge mye mindre lys ned i vannet, og utveksling av varme med atmosfæren og tilførsel av blandingsenergi fra vind vil stoppe. I eutrofimodellen er foreløpig ikke lagt inn noen reell modellering av at det kan forekomme islegging om vinteren. De fleste vintrene vil en stor del av indre Oslofjord være isfrie, så det er neppe særlig viktig for den aktuelle anvendelsen. Selv uten is er det dessuten svært lite lys som kan trenge gjennom vannflaten om vinteren, men islegging kan ha betydning for utveksling av varme og blandingsenergi fra vind.

Når det gjelder den varmetransporten som ble beskrevet i kap. 7.2., er det lagt inn en nedre temperatursperre for å unngå urimelig avkjøling. Dersom temperaturen i overflatelaget kommer ned i frysepunktet ved gitt saltholdighet antas det at det ikke lenger skjer noen varmetransport med atmosfæren. I virkeligheten kan ikke vannet avkjøles særlig mye mer før det fryser, det vil frigjøre varme som motvirker avkjølingen. Temperatursperren kan ses som en slags 0'te ordens modellering av dette, hensikten er bare å unngå urealistisk lave temperaturer. Det at isen senere vil kreve varme når den smelter, er derimot ikke med i modellen foreløpig.

Temperatursperren vil ikke påvirke den variablene i modellen som lagrer varmetransportene (Q_{OUT}) men innebefatter at disse varmetransportene ikke anvendes, dvs. de gir ikke temperaturrendringer i vannmassene. Modelleringen er ikke helt konsekvent her, idet fordampning, kondensasjon og nedbør ikke påvirkes, men det anses for å ha liten betydning.

Når det gjelder absorpsjon av lys gjennom isen er det lagt inn i modellen en justerbar faktor *ICEFAC* som kan brukes til å justere lysinntrengingen i tilfeller der overflatetemperaturen synker til frysepunktet for gjeldende overflatesalinitet. Den er mest ment som et redskap for følsomhetstesting, men kan også brukes til å justere modellen til andre fjordområder, ut fra kjennskap til isleggingsforhold, dersom det finnes påkrevet. Faktoren er i utgangspunktet satt til 1.0, dvs. at det antas isfri overflate uansett temperatur. Hvis den settes lavere blir lysinntrenging redusert med denne faktoren dersom temperatursperren ovenfor er trådt i kraft. Verdier mellom 0 og 1 kan ha mening ut fra at endel av overflaten kan være isdekt. Generelt har det antagelig liten betydning hvordan denne faktoren settes.

LITTERATUR

ACSL Ref. Manual: Advanced Continuous Simulation Language - Reference Manual.
Mitchell and Gauthier Associates, Concord. Mass., U.S.A, 1987.

Anderson, E.R. 1952: Energy-Budget Studies. In: Water-Loss Investigations: Volume 1 - Lake Hefner Studies. *Technical Report, Geological Survey Circular 229, United States Dept. of the Interior.*

Anderson, R.J. og Smith, S.D. 1981: Evaporation coefficient for the sea surface from eddy flux measurements. *J. Geophys. Res., 86, 449-465.*

Armi, L. 1979: Effects of variations in eddy diffusivity on property distributions in the oceans. *J. Mar. Res., 37(3, 515-530.*

Banks, B. 1975: Some features of Wind Action on Shallow Lakes. *J. Env. Engineering Div., Proc. Am. Soc. Civil Eng., 101, No.EE5.*

Bjerkeng, B. 1973: Modellbeskrivelse av fysiske prosessers rolle for vertikaltransport av energi og materiale i Gjersjøen. *Manuskript, NORDFORSK-seminar om nordiske sjøundersøkelser i OECD-programmet, Erken, Sverige, 16-18/10-1973.*

Bjerkeng, B., Göranson, C.G. & Magnusson, J. 1978: Undersøkelser av alternative utslippssteder for avløpsvann fra Sentralrenseanlegg Vest. *Norsk institutt for vannforskning. Prosjekt-rapport O-132/76., 15. mars 1978. Del I: 74 sider, Del II: 71. figurer.*

Bowden 1983: Physical Oceanography of Coastal Waters. *Ellis Horwood Series in Marine Science. John Wiley & Sons.*

Budyko, M.I. 1958: The Heat Balance of the Earth's Surface. *Office of Technical Services, U.S. Dept. of Commerce.*

Bunker, A.F. 1976: Computations of Surface Energy Flux and Annual Air-Sea Interaction Cycles of the North Atlantic Ocean. *Monthly Weather Review, 104, 1122-1140.*

Dahlgren, L. 1974: Solar Radiation Climate near sea level in the Canadian Arctic Archipelago. *Doctoral Dissertation at Uppsala University 1974. ISBN 91-506-0001-X.*

Deacon, E.L. 1970: The Derivation of Swinbank's long-wave radiation formula. *Quart. J. R. Met. Soc., 96, 313-319.*

Deardorff, J.W. 1968: Dependence of Air-Sea Transfer Coefficients on Bulk Stability. *J. Geophys. Res., vol.73, no.8, 2549-2557.*

Fan, L. N. og Brooks, N. H., 1969: Numerical solutions of turbulent buoyant jet problems. *Report No. KH-R-18, January 69, California Institute of Technology.*

Fichefet, Th. og Gaspar, Ph. 1988: A Model Study of Upper Ocean-Sea Ice Interactions. *J. Phys. Oceanogr., 18, 181-195.*

Fischer, H.B., List, E.J., Koh, R.C.Y., Imberger, J. & Brooks, N.H. 1979: Mixing in Inland and Coastal Waters. *Academic Press.*

- Gade, H. 1970: Hydrographic Investigations in the Oslofjord, a study of Water Circulation and Exchange Processes. *Geophysical Institute, report no. 24. University of Bergen.*
- Gargett, A.E. 1984: Vertical eddy diffusivity in the ocean interior. *J. Mar. Res.*, 42(2, 359-393.
- Garratt, J.R. 1977: Review of Drag Coeficients over Oceans and Continents. *Mon. Wea. Rev.*, 105, 915-929.
- Gill, A. H. 1982: Atmosphere-Ocean Dynamics. *Academic Press, Inc.*
- Handbook of Chemistry and Physics, 60th ed. *CRC Press, ISBN 0-8493-0460-8.*
- Handbook of Marine Science, *CRC Press, ISBN 0-87819-388-X.*
- Horne, R.A. 1966: Marine Chemistry - The structure of Water and the Chemistry of the Hydrosphere. *Wiley Interscience, Wiley & Sons.*
- Jerlov, N. G. 1968: Optical Oceanography. *Elsevier.*
- Johannesen. O.M. 1968: Some current measurements in the Drøbak sound, the narrow entrance to the Oslofjord. *Hvalrådets skrifter: Scientific Results of Marine Biological Research. Utgitt av Det Norske Videnskaps-akademi i Oslo på Universitetsforlaget*, 1968.
- Jørgensen, S.E. og Gromiec. M.J. 1989, ed.: Mathematical Submodels in Water Quality Systems. *Developments in Environmental Modelling, vol. 14., Elsevier Science Publishing Co., New York. 408p.*
- Kimball, H.H., 1928: Amount of solar radiation that reaches the surface of the earth on the land and on the sea, and methods by which it is measured. *Mon. Weath Rev.*, 56, 393-398.
- Kudryavtsev, V.N. og Soloviev, A.N. 1990: Slippery Near-Surface Layer of the Ocean Arising Due to Daytime Solar Heating. *J. Phys. Oceanogr.*, 20, 617-628.
- Kraus, E.B. 1972: Atmosphere-Ocean Interaction. *Clarendon Press.*
- Kullenberg, G. 1968: Measurements of horizontal and vertical diffusion in coastal waters. *Rapport nr. 3, 1968. Københavns univ., Inst. for fysisk oceanografi.*
- Large, W.G. og Pond, S. 1982: Sensible and Latent Heat Flux Measurements over the Ocean. *J. Phys. Oceanogr.*, 12, 464-482.
- Oke, T.R. 1978: Boundary Layer Climates. *A Halstead Press Book, John Wiley and Sons.*
- Madsen, O.S. 1977: A realistic model of the wind-induced Ekman boundary layer. *J. Phys. Oceanogr.*, 7, 248-255.
- Magnusson, J. et al. 1974-1994: Årlige rapporter om overvåkningen av indre Oslofjord. *Norsk institutt for vannforskning, O-71160.*
- Marshunova, M.S. 1966: Principal characteristics of the radiation balance of the underlying surface and of the atmosphere in the arctic. In: *Soviet data on the arctic heat budget and its climatic influence. Rand Corporation, Memorandum RM-5003-PR, p-y 1966.*

- Paltridge, G.W og Platt, C.M.R. 1976: Radiative processes in meteorology and climatology. Elsevier.
- Parsons, T.R., Takahashi, M og Hargrave, B. 1977: Biological Oceanographic Processes. *Pergamon Press*.
- Pickard, G.L. og Emery, W.J. 1982: Descriptive Physical Oceanography. An Introduction. *Pergamon Press*.
- Pollard, R.T og Thomas, K.J.H. 1989: Vertical Circulation Revealed by Diurnal Heating of the Upper Ocean in Late Winter. Part I: Observations. *J. Phys. Oceanogr.*, 19, 269-278
- Pond, S. og Pickard, G.L. 1983: Introductory Dynamical Oceanography 2.edition. *Pergamon Press*.
- Preisendorfer, R. W. og Mobley, C.D. 1986: Albedos and Glitter Patterns of a Wind-Roughened Sea Surface. *J. Phys. Oceanogr.* 16, 1293-1316.
- Priestley, M.B. 1981: Spectral Analysis and Time Series. *Academic Press. ISBN-0-12564922-3*.
- Simpson, J.J. og Paulson, C.A. 1979: Mid-ocean observations of atmospheric radiation. *Quart. J.R. Met. Soc.*, 105, 487-502
- Smith, S.D. 1980: Wind Stress and Heat Flux over the Ocean in Gale Force Winds. *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 709-726.
- Smith, S.D. og Banke, E.G. 1975: Variations of the sea drag coefficient with wind speed. *Quart. J.R. Met. Soc.*, 101, 665-673.
- Stigebrandt, A. 1976: Vertical Diffusion Driven by Internal Waves in a Sill Fjord. *J. Phys. Oceanogr.*, 6, 486-495.
- Stigebrandt, A. 1979: Observational Evidence for Vertical Diffusion Driven by Internal Waves of Tidal Origin in the Oslofjord. *J. Phys. Oceanogr.*, 9, 435-441.
- Stigebrandt, A. 1985: A Model for the Seasonal Pycnocline in Rotating Systems with Application to the Baltic Proper. *J. Phys. Oceanogr.*, 15, 1392-1404.
- Stigebrandt, A. 1987: A Model for the Vertical Circulation of the Baltic Deep water. *J. Phys. Oceanogr.*, 17, 1772-1785.
- Stigebrandt, A. 1989: Kompendium i Marin Systemanalys: Nr.1 Strömning i sund. *Göteborgs Universitet, Oceanogr. Inst.*
- Stigebrandt, A. 1990: Kompendium i Marin Systemanalys: Nr. 2. Diapyknisk blandning i havet. *Göteborgs Universitet, Oceanogr. Inst.*
- Stigebrandt, A. 1991: Computations of oxygen fluxes through the sea surface and the net production of organic matter with application to the Baltic and adjacent seas. *Limnol. Oceanogr.* 36(3), 444-454.
- Stigebrandt, A. og Aure, J. 1989: Vertical Mixing in Basin Waters in Fjords. *J. Phys. Oceanogr.*, 19, 917-926.

Stigebrandt, A. og Wulff, F. 1987: A model for the dynamics of nutrient and oxygen in the Baltic Proper. *J. Mar. Res.*, 45, 729-759.

Street, R.L. og Miller, A.W.Jr. 1977: Determination of the Aqueous Sublayer Thicknesses at an Air-Water Interface. *J. Phys. Oceanogr.*, 7, 110-117.

Swinbank, W.C. 1964: Long-wave radiation from clear skies.
Quart. J. R. Met. Soc., 89, 339-348.

UNESCO 1981: Tenth Report of the Joint Panel on Oceanographic tables and Standards.
Unesco Technical Papers in Marine Science, NO. 36.

Watson, A.J, Upstill-Goddard, R.C. og Liss, P.S. 1991: Air-sea gas exchange in rough and stormy seas measured by a dual-tracer technique. *Nature*, 349, 145-147.

Wu, J. 1980: Wind-Stress Coefficients over Sea Surface near Neutral Conditions - A revisit. *J. Phys. Oceanogr.*, 10, 727-740

Wu, J. 1988: Momentum Flux from Wind to Aqueous Flows at Various Wind Velocities and Fetches. *J. Phys. Oceanogr.*, 18, 140-144.

Appendiks 1. Forenklet tetthetsformel.

Tetthet for sjøvann er definert som funksjon av salt og temperatur etter en forholdsvis komplisert formel (UNESCO 1981). En enklere formel som beskriver tettheten nøyaktig nok for eutrofimodellen er funnet ved å beregne σ_t som funksjon av salinitet S og temperatur T for endel kombinasjoner av S og T som dekker et rektangulært variasjonsområde $S=(0;36)$ $T=(0;28)$ med den fullstendige formelen og tilpassede enklere funksjoner til disse punktene. Det er da funnet at følgende formel er tilstrekkelig:

$$\sigma_t = k_0 + S \cdot k_s + [k_t + k_{t,s} \cdot S + (k_{tt} + k_{tt,s} \cdot S + k_{ttt} \cdot T) \cdot T] \cdot T \quad (\text{A.1})$$

Koeffisientverdiene er bestemt ved å minimere summen av avvik i 6. potens, dvs. at det er lagt vekt på å minimere de store avvikene. Resultatet er:

$$\begin{array}{llll} k_0 & = & -0.117918 & k_{t,s} = -0.003031 & k_{ttt} = 0.000060 \\ k_s & = & 0.805700 & k_{tt} = -0.008592 \\ k_t & = & 0.062968 & k_{tt,s} = 0.000035 \end{array}$$

Appendiks 2. Beregning av mettet fuktighet og damptrykk

I formlene for utveksling av vann og varme mellom vannmasser og atmosfæren inngår mettet fuktighet i luft, som er en funksjon av temperaturen. For temperaturområdet fra 0 til 20°C varierer mettet fuktighet fra 5 til 17 g/m³, eller som damptrykk fra 6 til 23 mb. Absolutt luftfuktighet q (g/m³) ved metning over rent vann kan beskrives som funksjon av temperatur $T > 0$ [°C] ved følgende empiriske funksjon:

$$q(T) = q_0 \left(\frac{T}{T_k} + 1 \right)^a \quad (\text{A.2})$$

hvor $q_0 = 4.80$ [g/m³], $T_k = 109.7$ [°C] $a = 7.594$

Funksjonen er tilpasset tabelldata for rent vann og har avvik innenfor 0.1%. Mettet fuktigheten varierer ubetydelig med saltholdighet i vannet, innenfor en faktor 0.98, det er neglisjert her. Funksjonen brukes også for $T < 0$ °C.

Absolutt vanninnhold kan regnes om til damptrykk e [enhet mb] med følgende omregningsfaktor som er en funksjon av temperatur:

$$k = 1.260 + r \cdot T \quad [\text{mb}/(\text{g/m}^3)] \quad (\text{A.3})$$

hvor $r = 0.0151$ for $T < 0$ °C, relativ nøyaktighet 0.01% ,
 $r = 0.00456$ for $T > 0$ °C, relativ nøyaktighet 0.6%.

Appendiks 3. Mulig metode for fordeling av horisontale transporter til lagene i mottagende basseng ut fra tetthet.

Som nevnt i kap. 5.5.2 kan strøm fra et basseng med skarp sjiktning inn i et basseng med svak sjiktning i tilsvarende tetthetsintervall føre til at transporter fra to nabolog etter sin tetthet havner i lag som er skilt fra hverandre ved ett eller flere mellomliggende lag. Modellen inneholder en mekanisme for å fordele to slike transporter over mellomliggende lag med en overlapping. Foreløpig blir det brukt triangulære fordelinger slik at tettheten i blandingen øker lineært ned gjennom de mellomliggende lagene.

Det er imidlertid også mulig å la fordelingen være styrt av tetthetene, dvs. at transportene fordeles slik at den blandingen som strømmer inn i hvert lag tilsvarer tettheten i det mottagende laget. En mekanisme for dette er skissert nærmere nedenfor, men dette er altså ikke lagt inn i modellen ennå.

Mekanismen skal altså tre i kraft hvis det strømmer fra to nabolog i_A og i_A+1 i basseng A inn i basseng B, slik at den nederste del av strømmen fra i_A primært går til k_B , og den øverste del av strømmen fra i_A+1 primært går til k_B+n , hvor $n > 0$. Det er tilfelle hvis strømmen fra lag i_A tetthetsmessig hører hjemme mellom lag k_B og lag k_B+1 , og strømmen fra lag i_A+1 hører hjemme mellom lag k_{B+n-1} og lag k_{B+n} . Den resterende del av totalstrømmene kan eventuelt gå til henholdsvis k_B-1 og k_B+n+1 dersom disse lagene finnes, de inngår ikke i den følgende betraktingen.

Vi ser nå på fordelingen av de to deltransportene over dyptintervallet fra lag k_B til og med k_B+n i basseng B, det vil si lagene som ligger mellom de tetthetsmessige tyngdepunktene i basseng B for strømmene ut fra basseng A.

Primær andel av strømmen fra lag i_A til k_B kalles for Q_1 , og primær andel av strømmen fra lag i_A+1 til k_B+n for Q_2 . Det er disse to strømmene som skal fordeles på lag k_B til og med k_B+n . For å bestemme fordelingen innføres følgende betegnelser:

$$\rho_s = \text{tetthet i } Q_s, s=1,2$$

$$\rho_{B,r} = \text{tetthet i lag } k_B+r \text{ i basseng B, } r=0, \dots, n$$

$$c_{s,r} = \text{andel av } Q_s \text{ som strømmer til lag } k_B+r, s=1,2 \text{ og } r=0, \dots, n$$

$$f_r = \text{andel av total strøm } Q_1 + Q_2 \text{ som strømmer til lag } k_B+r, r=0, \dots, n.$$

Verdier på $c_{s,r}$ og f_r må nå velges slik at det blir en fornuftig fordeling. Ett naturlig sett av betingelser gis av å kreve at blandingstettheten inn i lag k_B+r skal være $\rho_{B,r}$, dvs.:

$$c_{1,r}Q_1 \cdot \rho_1 + c_{2,r}Q_2 \cdot \rho_2 = (c_{1,r}Q_1 + c_{2,r}Q_2) \cdot \rho_{B,r} \quad (\text{A.4})$$

Denne ligningen kan skrives om slik at den spesifiserer forholdet mellom $c_{1,r}$ og $c_{2,r}$:

$$c_{1,r}Q_1 \cdot (\rho_{B,r} - \rho_1) = c_{2,r}Q_2 \cdot (\rho_2 - \rho_{B,r}) \quad (\text{A.5})$$

Pr. definisjon har vi at:

$$f_r(Q_1 + Q_2) = c_{1,r}Q_1 + c_{2,r}Q_2 \quad (\text{A.6})$$

Vi går ut fra at verdiene til f_r er foreskrevet på en eller annen måte. De ukjente $c_{1,r}$ og $c_{2,r}$ kan da bestemmes ved å kombinere de to siste ligningene, det gir:

$$\begin{aligned} c_{1,r} Q_1 \cdot (\rho_2 - \rho_1) &= f_r \cdot (Q_1 + Q_2) \cdot (\rho_2 - \rho_{B,r}) \\ c_{2,r} Q_2 \cdot (\rho_2 - \rho_1) &= f_r \cdot (Q_1 + Q_2) \cdot (\rho_{B,r} - \rho_1) \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Fordelingsmekanismen vil bare brukes når $Q_1 > 0$, $Q_2 > 0$ og $\rho_2 > \rho_1$. Ligningen vil da alltid gi endelige verdier ≥ 0 for koeffisientene $c_{1,r}$ og $c_{2,r}$.

$$\begin{aligned} c_{1,r} &= f_r \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{Q_1} \cdot \frac{\rho_2 - \rho_{B,r}}{\rho_2 - \rho_1} \\ c_{2,r} &= f_r \cdot \frac{Q_1 + Q_2}{Q_2} \cdot \frac{\rho_{B,r} - \rho_1}{\rho_2 - \rho_1} \end{aligned} \quad (\text{A.8})$$

Det gjenstår nå å bestemme verdier på f_r slik at summen av strøm fra hvert lag blir som spesifisert, dvs. vi vil ha oppfylt disse tre betingelsene:

$$\sum_{r=0}^n c_{s,r} = 1 \text{ for } s = 1, 2 ; \quad \sum_{r=0}^n f_r = 1 \quad (\text{A.9})$$

Betingelsene er ikke uavhengige, de er bundet sammen gjennom definisjonen av f_r . Hvis to av dem er oppfylt er automatisk også den tredje tilfredsstilt. Dersom betingelsen på f_r er oppfylt vil begge de to andre betingelsene gi følgende ligning:

$$\sum_{r=0}^n \rho_{B,r} f_r = \frac{Q_1 \rho_1 + Q_2 \rho_2}{Q_1 + Q_2} \stackrel{\text{def}}{=} \bar{\rho} \quad (\text{A.10})$$

Denne ligningen krever at et veid snitt av tettheten i de mottagende lagene skal være lik gjennomsnittlig tetthet $\bar{\rho}$ i de to transportene som skal blandes. Dette er bare mulig med positive vekter f_r dersom tettheten $\bar{\rho}$ ligger innenfor variasjonsområdet for $\rho_{B,r}$ for $r=0,..,n$. Hvordan f_r bør settes opp gjenstår å ta stilling til. Når det er gjort kan mekanismen eventuelt legges inn i modellen.

Appendiks 4. Beregningsdetaljer for vertikal transport og blanding

A.4.1 Overgang fra differensialligning til oppdeling i lag av endelig tykkelse.

I kap. ble massebalansen i et lag av varierende tykkelse, med volum $V_i(t)$ avgrenset av dyp $z_{i-}(t)$ og $z_{i+}(t)$ satt opp med følgende ligning, avledet fra den opprinnelige partielle differensialligningen i z og t :

$$\frac{dM_i(t)}{dt} = \left[D \frac{\partial C}{\partial z} - W \cdot C \right]_{i+} - \left[D \frac{\partial C}{\partial z} - W \cdot C \right]_{i-} + (q + p) \cdot V_i(t) \quad (\text{A.11})$$

hvor

$$D(z) = A(z) \cdot K(z) \quad = \text{Vertikalblanding gjennom areal } A; \quad (\text{volum}\cdot\text{lengde}/\text{tid})$$

$$W_{a,i\pm} = A_{i\pm} \left(w_{i\pm} - \frac{\partial z_{i\pm}}{\partial t} \right) = \text{Vertikal vanntransport nedover gjennom } z_{i\pm}(t); \quad (\text{volum}/\text{tid})$$

$$q+p = \text{netto produksjon} + \text{netto tilførsel utenfra fordelt pr. volumenhet.}$$

I modellen trenger vi en differanseligning basert på volummidlede konsentrasjoner for de enkelte lagene og lagtykkeler. Uttrykkene for vertikaltransport i ligning (A.11) inneholder konsentrasjon C og gradient dC/dz i grenseflaten mellom lagene. Disse uttrykkene må erstattes av tilnærmelser beregnet ut fra lagtykkeler og volum-midlede konsentrasjoner innenfor hvert lag.

For å finne en tilnærmelse til konsentrasjonsgradient dC/dz i grenseflaten z_{i+} kan vi ta utgangspunkt i Taylor-utviklingen av $A \cdot C$ rundt grenseflaten, og integrere den over de to lagene i og $i+1$. Ved å splitte 1.ordens-leddene slik:

$$[\partial AC/\partial z = A \cdot (\partial C/\partial z) + (\partial A/\partial z) \cdot C] \quad (\text{A.12})$$

kan resultatet skrives:

$$\begin{aligned} -V_i C_i &= \left[-A_{i+} + \frac{h_i}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{i+} \right] h_i C_{i+} + \frac{h_i^2}{2} A_{i+} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-h_i)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^n A C}{\partial z^n} \right)_{i+} \\ V_{i+1} C_{i+1} &= \left[A_{i+} + \frac{h_{i+1}}{2} \left(\frac{\partial A}{\partial z} \right)_{i+} \right] h_{i+1} C_{i+} + \frac{h_{i+1}^2}{2} A_{i+} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_{i+1}^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^n A C}{\partial z^n} \right)_{i+} \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Her er nå: $V_i =$ volum av lag i

$C_i =$ volum-midlet konsentrasjon i lag i

$h_i =$ tykkelse av lag i

mens indeks $i+$ angir at størrelsen gjelder i grenseflaten mellom lag i og lag $i+1$. Ved å integrere Taylor-utviklingen av $A(z)$ omkring grenseflaten z_{i+} på samme måte finner vi:

$$\begin{aligned} A_{i+} h_i &= V_i + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-h_i)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^n A}{\partial z^n} \right)_{i+} \\ A_{i+} h_{i+1} &= V_{i+1} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h_{i+1}^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^n A}{\partial z^n} \right)_{i+} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Ved å kombinere ligningene (A.13) og (A.14) blir resultatet:

$$\begin{aligned} -V_i C_i &= -V_i C_{i+} + V_i \frac{h_i}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-h_i)^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^n AC}{\partial z^n} - \frac{\partial^n A}{\partial z^n} C - \frac{\partial^{n-1} A}{\partial z^{n-1}} \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} \\ V_{i+1} C_{i+1} &= V_{i+1} C_{i+} + V_{i+1} \frac{h_{i+1}}{2} \left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{h_{i+1}^{n+1}}{(n+1)!} \left(\frac{\partial^n AC}{\partial z^n} - \frac{\partial^n A}{\partial z^n} C - \frac{\partial^{n-1} A}{\partial z^{n-1}} \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Ved å dividere hver ligning (A.15) med volumet av respektivt lag og addere de to ligningene får tilnærmelsen:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} \approx \frac{C_{i+1} - C_i}{(h_{i+1} + h_i)/2} \quad (\text{A.16})$$

med et restledd:

$$-\sum_{n=2}^{\infty} \left[\Lambda_{n,i+} \cdot \frac{\left(\frac{h_{i+1}^n}{A_{i+1}} - \frac{(-h_i)^n}{A_i} \right)}{\left(\frac{(h_{i+1} + h_i)}{2} (n+1)! \right)} \right] \quad \text{hvor} \quad \Lambda_{n,i+} = \left(\frac{\partial^n AC}{\partial z^n} - \frac{\partial^n A}{\partial z^n} C - \frac{\partial^{n-1} A}{\partial z^{n-1}} \frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+}$$

Her betegner nå A_i og A_{i+1} gjennomsnittlig areal av henholdsvis lag i og $i+1$, og C_i og C_{i+1} er gjennomsnittlig konsentrasjon i volumene, og ikke konsentrasjonen i midtpunktet av de to lagene. I det generelle tilfelle med $A_i \neq A_{i+1}$ og/eller $h_i \neq h_{i+1}$ vil et omtrentlig estimat for feilen være første ledd i rekkeutviklingen:

$$\begin{aligned} \Omega &= A_{i+} \cdot \left(\frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \right)_{i+} \cdot \frac{h_i^2 / A_i - h_{i+1}^2 / A_{i+1}}{3(h_{i+1} + h_i)} \\ &\approx \frac{\partial^2 C}{\partial z^2} \cdot \frac{A}{6} \cdot \frac{\partial(h^2/A)}{\partial z} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Dette feilreddet er av orden $h \cdot \Delta h / \Delta z$ eller h^2 . Dersom relativ endring i lagtykkelse som funksjon av z er gitt vil altså feilreddet være av 2. orden i h . Dersom det i stedet er valgt en gitt relativ endring av h fra lag til lag vil feilreddet være av orden Δh . For å få en bedre presisjon måtte en ta 2.derivert av C i betrakting.

Dersom $h_i = h_{i+1} = h$ og $A_i = A_{i+1}$ forenkles ligningen til:

$$\left(\frac{\partial C}{\partial z} \right)_{i+} \approx \frac{C_{i+1} - C_i}{h} \quad \text{med feilledd} \quad - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h^{2k}}{(2k+2)!} \left(\frac{\partial^{(2k+1)} C}{\partial z^{(2k+1)}} \right)_{i+} \quad (\text{A.18})$$

Da er feilleddet av 2.orden i h og proporsjonalt med 3.derivert av C . Feilleddet er ikke helt det samme som dersom C_{i+1} og C_i ikke var gjennomsnittsverdier, men i stedet ekvidistante punktverdier som i de vanlige numeriske løsninger av partielle differensiellligninger.

Ut fra dette kunne det estimeres hvilken feil som er innebygd i overgangen fra differensielligning til differensligning med varierende lagtykkelse når det gjelder diffusjonsleddet, og hvordan feilen kan minimeres. Dersom den totale virkningen av feilleddene for en enkelt grenseflate skal analyseres må en se det i forhold til dyptintegrert endring av innholdet, ikke i forhold til innholdet i et enkelt lag. For å se på et enkelt lag må forskjell i feilledd mellom øvre og nedre grenseflate studeres.

Verdiene på vertikalblandingskoeffisienten $K(z, t)$ er bestemt empirisk ut fra en lignende sjiktning med økende intervaller mot dypt, og skal justeres empirisk i modellen, så vi nøyer oss med å bruke de tilnærmede 1.ordens leddene uten noen nærmere analyse av feilene.

Med tilnærmelsen i ligning (A.16) blir det diffusive leddet for stofftransport i grenseflaten $i, i+1$:

$$A \cdot K \frac{dC}{dz}_{i+} = \frac{A_{i+} K_{i+}}{(h_{i+1} + h_i)/2} \cdot [C_{i+1} - C_i] \quad (\text{A.19})$$

dvs. det kan tolkes som en utjevning mellom de to lagene pga. en vannutveksling:

$$W_{d,i+} = \frac{A_{i+} K_{i+}}{(h_{i+1} + h_i)/2} \quad (\text{A.20})$$

Når det gjelder det advektive leddet ($W_a C$) _{$i+$} er den enkleste og mest stabile løsningen i utgangspunktet å bruke konsentrasjonen i det laget det strømmer ut av, dvs.:

$$(W_a C)_{i+} \approx W_{a,i+} C_{a,i+} ; \quad C_{a,i+} = \begin{cases} C_i & \text{hvis } W_{a,i+} > 0 \\ C_{i+1} & \text{hvis } W_{a,i+} < 0 \end{cases} \quad (\text{A.21})$$

Når dette brukes i en numerisk 1.ordens integrasjon over tid fører det til en numerisk betinget spredning i tillegg til den som er spesifisert i W_d .

I avsnittet nedenfor er dette drøftet for et forenklet eksempel, og det påvises at det kan motvirkes ved å beregne adveksjonen som gitt av (A.21), men korrigere den diffusiven transporten slik:

$$W_{d,i+}^* = W_{d,i+1} - 0.5 \cdot |W_{a,i+}| \cdot \left(1 - \frac{|W_{a,i+}| \cdot \Delta t}{(V_i + V_{i+1})/2} \right) \quad (\text{A.22})$$

Dette er nå lagt inn i modellen. Korreksjonen er implementert ved at det først i hvert tidsskritt beregnes diffusjon, vertikal adveksjon og tidsderiverte pga. av produksjon, tilførsler og horisontale transporter for seg. Ut fra dette bestemmes lengden av neste tidsskritt, og

diffusjonskoeffisienten blir justert ned i hver grenseflate ifølge ligning (A.22). Tilsvarende ligninger gjelder for grenseflatene mot lag $i-1$. Den totale differensialligningen for lag nr. i blir:

$$\frac{d(V_i \bar{C}_i)}{dt} = W_{d,i+}^* \cdot (C_{i+1} - C_i) - W_{a,i+} C_{a,i+} \\ - W_{d,i-}^* \cdot (C_i - C_{i-1}) + W_{a,i-} C_{a,i-} + (q_i + p_i) V_i \quad (\text{A.23})$$

Som standard vil EDB-programmet ha innebygd en sperre mot netto negative diffusjonskoeffisienter, dvs. at det bare blir foretatt en ufullstendig korreksjon dersom vertikalblandingen er mindre enn den numeriske diffusjonen. Det er lagt inn alternativer i programkoden slik at modellen også kan bygges for å tillate negative korrigerte diffusjonskoeffisienter. Matematisk er det ikke noe i veien for det, og det kan gi en riktigere korreksjon, men også tendens til ustabile løsninger. Det skulle ikke nødvendigvis være noe stort problem fordi det alltid vil opptre i sammenheng med positivt virkende transporter som virker dissiperinge, nettopp for å motvirke denne dissipasjonen. Den korrigende mekanismen virker imidlertid bare riktig opp til 2. ordens moment i fordelingen, og kan derfor gi numeriske fluktusjoner, med f.eks. negative konsentrasjoner i enkelte lag.

Som vist i neste avsnitt finnes en alternativ formulering som er helt ekivalent matematisk, hvor en kombinerer adveksjon og korrigert diffusjon i en felles beskrivelse av toveis transport:

$$\left[A \cdot K \frac{dC}{dz} + W_a \cdot C \right]_{i+} = [W_{d,i+} + (1 - \alpha_{i+}) \cdot W_{a,i+}] C_{i+1} - [W_{d,i+} - \alpha_{i+} \cdot W_{a,i+}] C_i \quad (\text{A.24})$$

hvor diffusiv utveksling er gitt av ligning (A.20) og koeffisienten α er gitt ved:

$$\alpha_{i+} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{W_{a,i+} \Delta t}{(V_i + V_{i+1})/2} \right) \quad (\text{A.25})$$

Tilsvarende ligninger vil gjelde for $(\partial C / \partial z)_i$ med forskyvning av indeksene, og det totale resultatet ville bli:

$$\frac{d(V_i \bar{C}_i)}{dt} = [W_{d,i+} + (1 - \alpha_{i+}) \cdot W_{a,i+}] C_{i+1} - [W_{d,i+} - \alpha_{i+} \cdot W_{a,i+}] C_i \\ - [W_{d,i-} + (1 - \alpha_{i-}) \cdot W_{a,i-}] C_i + [W_{d,i-} - \alpha_{i-} \cdot W_{a,i-}] C_{i-1} + (q_i + p_i) V_i \quad (\text{A.26})$$

En slik formulering kan lett håndteres av den algoritmen som er skissert i appendiks A.4.3 for å beregne vertikalutveksling og transport som utjevnings- og forflytningsprosesser i stedet for ved å integrere tidsderiverte direkte.

A.4.2 Korreksjon for numerisk diffusjon knyttet til advektiv strømning.

Som nevnt er det i differanse-ligningen som ble utledet foran tatt inn korreksjonsledd for å motvirke den dissiperinge virkning adveksjon har når det integreres numerisk over tid med endelige delvolumer. Fornuftige korreksjonsledd kan bestemmes ved å se på en forenklet situasjon:

Vi tenker oss en serie like store lag eller delvolumer med tverrsnittsareal A og tykkelse h , dvs. at volumene er $V = A \cdot h$. Lagene er nummerert fortløpende med indeks k , og det antas å gå en

strøm i retning av økende k . Hvis det bare foregår adveksjon vil vannet flyte fra lag til lag uten noen blanding i strømretningen. For å beskrive dette ved numerisk integrasjon trenges en Lagrange-beskrivelse, hvor oppdelingen flytter seg med strømmen. Dersom adveksjonen beskrives ved numerisk integrasjon med delvolumer som har fast beliggenhet, vil det opprinnelig samlede vannvolumet både forflytte seg og spres mellom flere delvolumer. Vi kan tenke oss at det vannvolumet som ved tiden $t=0$ befinner seg i et bestemt lag er merket med et sporstoff. En advektiv volumfluks W_a gjennom systemet kan regnes om til en relativ overføringsgrad

$$r = W_a \Delta t / V \quad (\text{A.27})$$

mellom delvolumer pr. tidsskritt Δt . Hvis netto transport av sporstoff fra lag k til lag $k+1$ tilnærmet settes til $W_a C_k$, hvor C_k er midlere konsentrasjon i lag k , vil sporstoffet etter at n slike tidsskritt er integrert med 1.ordens metode være fordelt binomisk over $n+1$ delvolumer, med en konsentrasjonsprofil gitt av

$$C_k = \frac{n!}{k! (n-k)!} r^k (1-r)^{n-k} \quad (\text{A.28})$$

for $k=0, \dots, n$, hvor lag 0 er det opprinnelige laget, og $k>0$ angir etterfølgende lag i strømretningen. Hvis indeks k brukes som lengdevariabel vil sporstoffmengden være fordelt med riktig midlere posisjon $\bar{k} = nr$, men variansen

$$\sigma_a^2 = nr(1-r) \quad (\text{A.29})$$

vil også øke lineært med antall tidsskritt. Dette er en rent numerisk spredning som henger sammen med den begrensede oppløsningen av volumene. For store n vil fordelingen nærme seg en normalfordeling.

Hvis det i stedet bare foregår diffusjon til begge sider vil sporstoffet etter et n tidsskritt Δt være fordelt over indeks i med varians

$$\sigma_d^2 = 2K n \Delta t / h^2 \quad (\text{A.30})$$

hvor K er diffusjonskoeffisient med enhet (volum-lengde/areal/tid). Dette gjelder også tilnærmet ved numerisk integrasjon med endelig oppløsning av avstand eller volum. Diffusjonskoeffisienten K tilsvarer en volumutveksling pr. tidsenhet W_d mellom delvolumene gitt ved

$$K = W_d h / A \quad (\text{A.31})$$

og netto stofftransport fra lag k til lag $k+1$ er da gitt ved $W_d(C_k - C_{k+1})$.

Mye av den numeriske diffusjonen kan oppheves ved å redusere diffusiv volumutveksling så mye at det ikke blir noen samlet netto økning i varians: $\Delta\sigma_d^2 + \sigma_a^2 = 0$. Innsatt uttrykkene for r og K gir det denne ligningen:

$$\Delta W_d = -\frac{W_a}{2} \cdot \left(1 - \frac{W_a \Delta t}{V} \right) \quad (\text{A.32})$$

Det må altså innføres en slik korreksjon i diffusjonen avhengig av tidsskrittet for å motvirke den numeriske diffusjonen. Hvis vi ser på en situasjon med kombinert adveksjon og diffusjon

av et stoff som foreligger i delvolumene med gjennomsnittskonsentrasjon C_k vil samlet nettotransport fra lag k til $k+1$ beregnet som ovenfor uten korreksjon bli

$$W_d \cdot (C_k - C_{k+1}) + W_a \cdot C_k$$

dvs. en kombinasjon av de to transportene. For å motvirke den økte spredningen pga. numerisk diffusjon må diffusjonsleddet korrigeres, og netto stofftransport fra lag k til lag $k+1$ blir altså i stedet:

$$\text{Transport}(k \rightarrow k+1) = \left(W_d - 0.5 W_a \left(1 - \frac{W_a}{V} \Delta t \right) \right) \cdot (C_k - C_{k+1}) + W_a \cdot C_k \quad (\text{A.33})$$

I fjordmodellen, hvor de advektive strømmer kan gå både oppover og nedover, brukes en tilsvarende betraktnings separat for hver grenseflate. Hvis det strømmer nedover mot økende k brukes ligningen ovenfor. Hvis det strømmer mot minskende k , dvs. at $W_a < 0$, blir netto transport motsatt vei fra lag $k+1$ til k gitt ved en tilsvarende ligning, som kan avledes av (A.33) ved snu retningen, dvs. bytte indeksene og bruke absoluttverdien på den advektive strømmen:

$$\text{Transport}(k+1 \rightarrow k) = \left(W_d - 0.5 |W_a| \left(1 - \frac{|W_a|}{V} \Delta t \right) \right) \cdot (C_{k+1} - C_k) + |W_a| \cdot C_{k+1} \quad (\text{A.34})$$

Ligning (A.33) og (A.34) kan forenes i en felles matematisk beskrivelse som gjelder uansett fortegn på W_a . Kombinasjonen av diffusjon og adveksjon beskrives da som to motsatt rettede vanntransporter, $W_{k,k+1} \geq 0$ fra lag k til $k+1$, og $W_{k+1,k} \geq 0$ fra lag $k+1$ til k , begge med konsentrasjon gitt av det laget transporten kommer fra:

$$\text{Stofftransport}(k \rightarrow k+1) = W_{k,k+1} C_k - W_{k+1,k} C_{k+1} \quad (\text{A.35})$$

Verdien på vanntransportene er gitt ved ligningene:

$$W_{k,k+1} = W_d + 0.5 W_a \cdot \left(1 + \frac{W_a}{V} \Delta t \right) \quad (\text{A.36})$$

$$W_{k+1,k} = W_d - 0.5 W_a \cdot \left(1 - \frac{W_a}{V} \Delta t \right) \quad (\text{A.37})$$

A.4.3 Vertikalblanding som utjevningsprosess

Vertikalblandingen i modellen er en funksjon av tetthetssjiktningen, slik at svak sjiktning gir sterkt blandning. Selv om det er lagt inn en øvre grense for blandingsintensiteten kan den bli så høy at modellen måtte integreres med svært små tidsskritt for å unngå numeriske ustabiliteter dersom den diffuse vertikalblandingen skulle beregnes ved å integrere deriverte på vanlig måte. Dette problemet var merkbart i utviklingsfasen av modellen, den automatiske tidsskrittjusteringen førte da til perioder med svært korte tidsskritt pga. sterkt vertikalblanding.

For å overkomme dette problemet er det derfor innført en beregningsalgoritme hvor vertikalblandingen i stedet er lagt inn som en *utjevningsprosess* som gjennomføres for hvert tidsskritt. Denne utjevningen går ut på at det som befinner seg innenfor et lag ved tiden t fordeles på de nærmeste omkringliggende lagene ved tid $t+\Delta t$ i en konsentrasjonsprofil som

får større utstrekning ettersom tidsskrittet øker. Dette gjøres separat for innholdet av hvert lag, og den nye konsentrasjonsprofilen er summen av alle fordelingene. Hvis blandingsintensiteten øker over alle grenser eller tidsskrittet øker ubegrenset vil det bare føre til at resultatet går asymptotisk mot full utjevning i stedet for at det oppstår ustabiliteter fordi de deriverte går mot uendelig.

Beregningsalgoritmen er utledet av den analytiske løsningen for endimensjonal diffusjon i x -retning med konstant diffusjonskoeffisient, definert av ligningen:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = K \frac{\partial^2 C}{\partial x^2} \quad (\text{A.38})$$

Hvis vi som startbetingelse ved $t=0$ antar at en mengde M er samlet i $x=0$ gir det den velkjente løsningen

$$C(x, t) = \frac{M}{\sqrt{4\pi Kt}} \cdot \exp\left(-\frac{x^2}{4Kt}\right) \quad (\text{A.39})$$

Dersom vi bare er interessert i verdien av C i ekvidistante punkter $x=\pm h, \pm 2h, \dots$ kan løsningen uttrykkes som en rekursjon i begge retninger fra $x=0$, hvor $x=rh$ nå angis med heltallsverdi r , altså som en indeks relativt til utgangspunktet $x=0$:

$$C_{r\pm 1}(t) = C_r(t) \cdot \exp\left(-\frac{2r+1}{4(K/h^2)t}\right) \quad ; \quad r \geq 0 \quad (\text{A.40})$$

Ligning (A.38) kan transformeres til et sett av enkle differensial-ligninger i t med skritt lengde h i x :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \frac{K}{h^2} \cdot [C(x+h, t) - 2C(x, t) + C(x-h, t)] \quad (\text{A.41})$$

Numerisk integrasjon av dette ligningssettet over mange små tidsskritt ved 1. ordens metode (Euler) gir en tilnærming til den analytiske løsningen. Den numeriske løsningen har noe større spredning i halene enn den analytiske løsningen. Det innvirker ikke på hoveddelen av fordelingen, forskjellen ser ut til å bli merkbar først for konsentrasjoner mindre enn 10% av toppkonsentrasjonen. Rent empirisk viser det seg at halene på den numeriske løsningen beskrives godt av en modifisert rekursjon:

$$C_{r\pm 1}(t) = C_r(t) \cdot \max\left(\frac{(K/h^2)t}{r+1+(K/h^2)t}, \exp\left(-\frac{2r+1}{4(K/h^2)t}\right)\right) \quad ; \quad r=0,1,2,\dots \quad (\text{A.42})$$

Modifikasjonen representerer virkningen av den begrensede oppløsningen i x -retning ved den numeriske integrasjonen, den sanne løsningen ligger i ligning (A.40). Det vil si at en rekursjonsløsning kan komme nærmere den sanne løsningen enn en tradisjonell numerisk integrasjon. Hvis vertikalblandingen er svært liten i forhold til den vertikale oppløsningen kan modifikasjonsleddet i (A.42) ha praktisk betydning, fordi det eksponensielle uttrykket fort kan bli uten virkning pga. datamaskinenes begrensede numeriske nøyaktighet. Modifikasjonsleddet kan da bidra til å sikre at det blir en viss spredning slik at løsningen ikke "kjøres fast", men vil til gjengjeld bidra til å gi litt for stor spredning.

Rekursionsformelen er satt opp for konstant diffusjonskoeffisient i x , men er også prøvd ut for tilfeller hvor diffusjonskoeffisienten K varierer sterkt med posisjon. Overensstemmelsen viser seg å være rimelig god også i slike tilfeller, det skal ganske store skjevheter til for å få særlig avvik. Dette er grunnlaget for å bruke en slik rekursjon i eutrofimodellen, hvor diffusjonskoeffisienten kan variere sterkt med dyp.

I eutrofimodellen anvendes rekursionsformler som er satt opp som en generalisering av ligning (A.40). Hvis vi har gitt $C(x,t)$ i et punkt x kan verdien i et annet punkt $x+h$ beregnes ut fra den analytiske løsningen til:

$$C(x+h, t) = C(x, t) \cdot \exp\left(-\frac{(2x+h)h}{4Kt}\right) \quad (\text{A.43})$$

Det åpner for en rekursjon gjennom en serie punkter som ikke er ekvidistante. Ved å innføre transport-tverrsnittet A , og uttrykke blandingsintensiteten med $W=KA/h$, hvor W nå betraktes som vannutveksling gitt som volum pr. tidsenhet gjennom et lag av tykkelse h , kan ligningen skrives:

$$C(x+xp, t) = C(x, t) \cdot \exp\left(-\frac{xA + (x+h)A}{4Wt}\right) \quad (\text{A.44})$$

Her er nå xA volumet fra 0 til x , mens $(x+h)A$ er volumet fra 0 til $x+h$. Ligning (A.44) kan generaliseres til den lagdelte situasjonen i eutrofimodellen, hvor både delvolumer $V_{i\pm k}$ og diffusjonskoeffisient varierer med dyp eller lag-nummer. Vi tar utgangspunkt i en stoffmengde $M_i^{(t)}$ som ved tid t er samlet i lag nr. i . Ved tidspunkt $t+\Delta t$ vil transportene ha ført til at denne mengden er fordelt over flere lag. Vi lar $X_{i,\pm k}$ betegne konsentrasjonen pga. mengden $M_i^{(t)}$ i lag $i\pm k$ relativt til gjenværende konsentrasjon i det opprinnelige lag i . Denne fordelingen kan da beskrives ved rekursjonsligningene nedenfor:

$$\begin{aligned} X_{i,i} &= 1 \\ X_{i,i\pm k} &= X_{i,i\pm(k-1)} \cdot R_{i,\pm k} ; \quad k = 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (\text{A.45})$$

hvor $R_{i,\pm k}$ er en reduksjonsfaktor som er satt opp ut analogi med ligning (A.44):

$$R_{i,\pm k} = \exp\left(-\frac{VSUM_{i,\pm(k-1)} + VSUM_{i,\pm k}}{4\Delta t \cdot W_{i\pm(k-1), i\pm k}}\right) \quad \text{for } k=1, 2, \dots \quad (\text{A.46})$$

I disse formlene inngår $VSUM_{i,\pm k}$ som betegner summen av volumer fra og med midten av lag i til og med midten av lag $i\pm k$. De kan også beregnes rekursivt:

$$\begin{aligned} VSUM_{i,\pm 0} &= 0 \\ VSUM_{i,\pm k} &= VSUM_{i,\pm(k-1)} + \frac{V_{i\pm(k-1)} + V_{i\pm k}}{2} ; \quad k > 0 \end{aligned} \quad (\text{A.47})$$

Vannutvekslingen er beskrevet som volumtransporter pr. tidsenhet mellom lagene, $W_{j,j+1}$ fra lag nr. j til lag $j+1$ og $W_{j+1,j}$ motsatt vei. For ren diffusiv transport er $W_{j,j+1} = W_{j+1,j}$ dvs. det går like stor transport begge veier. Det er rimelig å sette:

$$W_{j,j+1} = W_{j+1,j} = \frac{A_{j+1} K_{j+1}}{(h_{j+1} + h_j)/2} \quad (\text{A.48})$$

hvor indeks $j+$ angir grenseflaten mellom lag j og $j+1$.

Som det fremgår av formlene for $R_{i,\pm k}$ vil reduksjonsfaktoren nærme seg 1 dersom det er svært sterk vannutveksling, og for økende tidsskritt, og går mot 0 hvis det er svært liten blanding.

Løsningen gitt av ligning (A.45) og (A.46) er først og fremst beregnet på å håndtere tilfelle med så sterk vertikalblanding at innholdet av et lag fordeler seg over flere nabolag i løpet av ett tidsskritt. Under vanlige omstendigheter kan $R_{i,\pm 1}$ fort kan bli så liten at spredningen blir uten virkning pga. begrenset regnemaskin-nøyaktighet. En mulighet kunne da være å akkumulere vannutveksling W over flere tidsskritt der det var nødvendig, og så jevne ut når akkumulert utveksling var blitt passe stor. Foreløpig er det i stedet valgt å modifisere formelen for $R_{i,\pm 1}$ på samme måte som $C_{r,\pm 1}$ gitt av ligning (A.42) slik at den gir omtrent lineær funksjon av Δt dersom tidsskrittet er svært lite i forhold til vertikalblanding. Analogt med (A.42) har vi altså:

$$R_{i,\pm k} = \max\left[\frac{A}{1+A}, \exp\left(-\frac{1}{4A}\right)\right] \quad \text{hvor} \quad A = \frac{\Delta t \cdot W_{i,i\pm 1}}{\left(\frac{V_i + V_{i\pm 1}}{2}\right)} \quad (\text{A.49})$$

Det har også vært vurdert å legge inn en monoton sinkende $R_{i,\pm k}$ for økende $k > 1$. Formålet var eventuelt å hindre at stor blanding på den andre siden av en barriére med svært liten vannutveksling skulle innvirke for mye på transporten gjennom barriéren. Utprøving med sammenligning mellom numerisk integrert verdi og rekursjonen tyder imidlertid ikke på at det er nødvendig, så det er utekommende.

Fordelingen av mengden $M_i(t)$ på de forskjellige lagene ved tid $t+\Delta t$ beregnes slik:

$$M_{i,k}(t+\Delta t) = M_i(t) \cdot \frac{X_{i,k} \cdot V_k}{\sum_{j(X_{i,j} > \epsilon)} (X_{i,j} \cdot V_j)} \quad (\text{A.50})$$

Som antydet i denne formelen blir $X_{i,k}$ bare beregnet og summert til hver side så lenge verdiene er signifikant større enn 0. Ved spredning mot øverste og nederste lag blir rekursionsrekken $X_{i,k}$ matematisk sett "reflektert" tilbake, og direkte og reflektert bidrag summert.

Den totale konsentrasjonen i lag k ved tid $t+\Delta t$ beregnes ved å summere spredningsbidraget fra hvert lag:

$$M_k^{(t+\Delta t)} = \sum_i M_{i,k}^{(t+\Delta t)} \quad (\text{A.51})$$

Utjevningsprosessen som er beskrevet her kombineres med alle de andre prosessene i modellen ved følgende beregningsalgoritme:

1. I starten av et nytt tidsskritt ved tid t beregnes først samlet tidsderivert for alle lokale prosesser, tilførsler og andre transporter, dvs. alle endringer unntatt den direkte virkningen av vertikalblanding.

2. Den diffusive utjevningsprosessen anvendes deretter på halve tidsskrittet med den konsentrasjonsprofilen som gjaldt ved tiden t .
3. De resulterende konsentrasjoner blir så oppdatert med netto endring over hele tidsskrittet som funksjon av de tidsderiverte, altså som funksjon av alle prosesser unntatt vertikaldiffusjon.
4. Tilslutt blir den diffusive utjevningsprosessen utført for den siste halvdelen av tidsskrittet, med utgangspunkt i de modifiserte konsentrasjonene fra trinn 3.

På den måten blir altså konsentrasjonene ved tiden t diffundert over to halve tidsskritt, mens det for den endringen som skjer i løpet av tidsskrittet regnes at effektiv diffusjonstid har vært et halvt tidsskritt i middel.

Denne måten å beskrive diffusjonen på viser seg å stemme godt med resultatet av enkel numerisk integrasjon med Eulers metode utført med et stort antall korte tidsskritt. Brukt med svært korte tidsskritt vil den tilsvare vanlig differensialligning, men den vil også håndtere svært lange tidsskritt, dvs. situasjoner med svært sterkt blandning, med en brukbar nøyaktighet. Siden vertikalblanding beskrevet ved blandingskoeffisienter i alle fall er en idealisering, og koblingen mellom tetthetssjiktning og vertikalblanding i alle fall må justeres ved empirisk tilpasning, kan denne beskrivelsen være like brukbar som andre. Beregningsmetoden kan derfor gjerne betraktes som en selvstendig måte å beskrive vertikalblanding.

Beregningsmetoden bør likevel testes mer grundig ved å sammenligne simuleringer med ulike tidsskritt. Hvis tidsskrittene reduseres sterkt vil ligningene oppføre seg mer og mer som en vanlig 1. ordens numerisk integrasjon. Ved ekstremt stor blandning vil de ikke gi en nøyaktig løsning, men likevel langt bedre enn 1.ordens numerisk integrasjon ved sammenlignbare tidsskritt.

Den diffusive utjevningsprosessen beregnes foreløpig via overføringskoeffisienter $X_{i,k}$ i matriseform. Beregningene bør kanskje gjennomgås med tanke på å finne lignende rekursjoner som de som er satt opp for å fordele blandingsenergi vertikalt. Ved å summere alle bidrag $M_{i,k}$ over lag i og så utlede toveis rekursjoner på lignende måte burde det kunne gå.

Beregningen ovenfor brukes nå i modellen bare for den rene diffusiven. Dvs. at $Q_{i,i+1} = Q_{i+1,i}$ i ligningene ovenfor; samme verdi brukes for vanntransport begge veier mellom to lag. Formuleringen tillater imidlertid også å kombinere diffusiv og advektiv transport i regneskjemaet. Kombinert diffusjon og adveksjon mellom lag i og $i+1$ kan generelt uttrykkes som to motsatt rettede transporter, $Q_{i,i+1}$ fra lag i og $i+1$ og $Q_{i+1,i}$ lag $i+1$ til i . I avsnittet foran ble det utredet hvordan diffusjon må justeres ned for å motvirke numerisk spredning pga. adveksjon. Det ble der påvist at det leder frem til en mulig formulering med to motsatt rettede transporter $Q_{i,i+1}$ og $Q_{i+1,i}$ som kombinerer adveksjon og diffusjon og gir riktig korrektsjon av den numeriske spredningen. Dette kan være en fordel, fordi en da kan håndtere også sterkt vertikaladveksjon som ellers vil kreve kortere tidsskritt; en slik løsning kan gi tilnærmet riktig løsning og numerisk stabilitet selv om advektiv strøm i løpet av et tidsskritt går over flere delvolumer. Det er egentlig ikke så store endringer som skal til her: toppunktet i den nye fordelingen X_i må flyttes i overenstemmelse med den advektive delen av transporten, men det må selvsagt prøves ut om løsningen fortsatt gir en god tilnærming til det som oppnås med tradisjonell integrasjon over korte tidsskritt.

A.4.4 Vertikalblanding knyttet til horisontale innstrømninger av tungt vann - vertikal spredning av blandingsenergi

Når det gjelder vertikalblanding forårsaket av energien i dypvannsinnstrømninger er det som nevnt i kap. 6.6.2 lagt inn i modellen en løsning basert på energibetrakninger ut fra Fischer (1979). Den potensielle energien antas i den eksisterende første versjon av modellen å bli utløst som kinetisk, turbulent energi i det laget innstrømningen lagrer seg inn i, og gi vertikalblanding, eventuelt med en viss spredning til lagene ovenfor og nedenfor.

Som en enkel måte å beskrive den vertikale spredningen rundt innlagringsdypet brukes en modell basert på Bjerkeng (1973) utledet empirisk av datamateriale fra Gjersjøen. Det ble her funnet at fordelingen av blandingsenergi nedover i dypet kan beskrives som en spredning fra overflaten og nedover av en samlet energimengde som er en funksjon av vindhastigheten, og med en vertikal fordeling som er styrt av følgende ligning:

$$\frac{dX(z)}{dz} = -a_K \cdot N^{b_K} X(z) \quad (\text{A.52})$$

hvor X er et mål på resulterende energitethet i dyp z , som må skaleres slik at integralet blir lik total energi, og vi ellers har

N = stabilitet (Brunt-Väisälä frekvens) = funksjon av dyp for gitt tidspunkt.

a_K, b_K = empiriske dimensjonsløse koeffisienter > 0 .

Verdiene ble av Bjerkeng (1973) anslått til $a=1.25$, $b=0.4$

Den samme betraktingen brukes på det mer generelle tilfelle at det i et dyp z_i genereres en blandingsenergi pr. dypenhet og tid $E(z_i)$, integrert over horisontal-arealet. Det antas nå at denne energien fordeles vertikalt og brukes til blanding mot gravitasjonsfeltet etter en fordelingsfunksjon gitt av:

$$\frac{dX(z_i, z)}{dz} = \delta_i(z_i, z) \cdot a_K \cdot N^{b_K} X(z_i, z) \quad (\text{A.53})$$

I denne ligningen er

$$\delta_i(z_i, z) = \begin{cases} -1 & \text{for } z > z_i \\ 1 & \text{for } z < z_i \end{cases} \quad \text{slik at } X \text{ avtar til begge sider av } z_i$$

I et lite sjikt Δz omkring dypet z_i genereres eller frigjøres en energi $E \cdot \Delta z$ pr. tidsenhet. Ut fra ligningen ovenfor blir det resulterende bidrag til blandingsarbeid pr. dyp og tid i dyp z gitt ved:

$$w(z_i, z) = \frac{X(z_i, z)}{\int_{z_{\min}}^{z_{\max}} X(z_i, z) dz} \cdot E(z_i) \cdot \Delta z \quad (\text{A.54})$$

og den samlede blandingsenergi pr. dypenhet og tid:

$$W(z) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{X(\eta, z)}{F(\eta)} \cdot E(\eta) \cdot d\eta ; \text{ hvor } F(\eta) = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} X(\eta, z) dz \quad (\text{A.55})$$

$X(z_i, z)$ beregnet etter ligningen ovenfor kan skrives:

$$X(z_i, z) = \exp \left[a \int_{z_i}^z \delta_i N^b d\eta \right] \quad (\text{A.56})$$

Skaleringen av X er vilkårlig, for enkelhets skyld er den valgt slik at $X(z_i, z_i) = 1$. I ligningene ovenfor er det valgt å anta at energien konvergerer, og ikke tapes mot bunnen når den spres nedover mot minskende arealer.

Oversatt til diskrete lag kan fordelingen beregnes slik:

Det frigjøres en volumintegrrert energi E_i i lag nr. i med tykkelse Δz_i . Energien spres vertikalt mellom lagene med en dempningsfaktor p_j mellom lag j og $j+1$ med følgende ligning for bidraget $W_{i,k}$ til blandingsarbeidet i lag k :

$$W_{i,k} = \Delta z_k \cdot E_i \frac{X_{i,k}}{F_i} ; \quad \text{hvor } F_i = \sum_{j=1}^n X_{i,j} \cdot \Delta z_j \quad (\text{A.57})$$

Her er nå $X_{i,k}$ = en vilkårlig skalert overgangskoeffisient mellom lag i og k , gitt ved:

$$X_{i,k} = \begin{cases} 1 \text{ (vilkårlig valgt)} & \text{for } i = k \\ \prod_{j=i}^{k-1} p_j & \text{for } i < k \\ \prod_{j=k}^{i-1} p_j & \text{for } i > k \end{cases} \quad (\text{A.58})$$

med

$$p_j = \exp \left[-a (N_{j,j+1})^b (z_{j+1} - z_j) \right] = \text{dempning mellom lag } j \text{ og lag } j+1.$$

Samlet energimengde i lag k etter vertikal fordeling av energien fra alle lagene er:

$$W_k^* = \sum_{i=1}^n W_{i,k} \quad (\text{A.59})$$

Summene F_i kan deles opp:

$$F_i = f_i^- + f_i^+ ; \quad f_i^- = \sum_{j=1}^{i-1} X_{i,j} \Delta z_j ; \quad f_i^+ = \sum_{j=i}^n X_{i,j} \Delta z_j \quad (\text{A.60})$$

Ved å anvende definisjonen av $X_{i,j}$ fås følgende formler for f_i^- og f_i^+

$$\begin{aligned} f_i^- &= \sum_{j=1}^{i-1} \Delta z_j \left(\prod_{s=j}^{i-1} p_s \right) = p_{i-1} \left[\Delta z_{i-1} + \sum_{j=1}^{i-2} \Delta z_j \left(\prod_{s=j}^{i-2} p_s \right) \right] \quad \text{for } i > 1 \\ f_i^+ &= \Delta z_i + \sum_{j=i+1}^n \Delta z_j \left(\prod_{s=i}^{j-1} p_s \right) = \Delta z_i + p_i \left[\Delta z_{i+1} + \sum_{j=i+2}^n \Delta z_j \left(\prod_{s=i+1}^{j-1} p_s \right) \right] \quad \text{for } i < n \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

I disse ligningene er "tomme" summer og produkter definert naturlig ved

$$\sum_{j=r}^{r-1} y_j = 0 \quad ; \quad \prod_{j=r}^{r-1} y_j = 1$$

Ligningene for f_i^- og f_i^+ gir følgende rekursjonsformler:

$$\begin{aligned} f_i^- &= p_{i-1} [\Delta z_{i-1} + f_{i-1}^-] \quad \text{for } i > 1 \quad ; \quad f_1^- = 0 \\ f_i^+ &= \Delta z_i + p_i f_{i+1}^+ \quad \text{for } i < n \quad ; \quad f_n^+ = \Delta z_n \end{aligned} \quad (\text{A.62})$$

På tilsvarende måte kan W_k^* skrives

$$W_k^* = (w_k^- + w_k^+) \Delta z_k \quad ; \quad w_k^- = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{E_i}{F_i} X_{i,k} \quad ; \quad w_k^+ = \sum_{i=k}^n \frac{E_i}{F_i} X_{i,k} \quad (\text{A.63})$$

det gir disse to rekursjonsformlene:

$$\begin{aligned} w_k^- &= \sum_{i=1}^{k-1} \frac{E_i}{F_i} \left(\prod_{s=i}^{k-1} p_s \right) \\ &= p_{k-1} \left[\frac{E_{k-1}}{F_{k-1}} + \sum_{i=1}^{k-2} \frac{E_i}{F_i} \left(\prod_{s=i}^{k-2} p_s \right) \right] \quad \text{for } k > 1 \\ &= p_{k-1} \left(\frac{E_{k-1}}{F_{k-1}} + w_{k-1}^- \right) \end{aligned} \quad (\text{A.64})$$

$$w_1^- = 0$$

$$\begin{aligned} w_k^+ &= \frac{E_k}{F_k} + \sum_{i=k+1}^n \frac{E_i}{F_i} \left(\prod_{s=k}^{i-1} p_s \right) \\ &= \frac{E_k}{F_k} + p_k \left[\frac{E_{k+1}}{F_{k+1}} + \sum_{i=k+2}^n \frac{E_i}{F_i} \left(\prod_{s=k+1}^{i-1} p_s \right) \right] \quad \text{for } k < n \\ &= \frac{E_k}{F_k} + p_k w_{k+1}^+ \end{aligned} \quad (\text{A.65})$$

$$w_n^+ = \frac{E_n}{F_n}$$

En effektiv beregningsprosedyre blir slik:

- Sett f_1^- , og beregn p_j og f_{j+1}^- for $j = 1, 2 \dots n-1$ ved rekursjon.
- Sett f_n^+, F_n, w_n^+ , og beregn f_j^+, F_j og w_j^+ for $j = n-1, n-2, \dots, 1$ ved rekursjon. Variable som inneholdt f_j^- kan nå frigis til annet bruk.
- Sett w_1^- og W_1^* , og beregn w_{j+1}^- og W_{j+1}^* for $j = 1, 2 \dots n-1$ ved rekursjon.

Resultatet er nå gitt som $W_j^* =$ blandingsenergi for hvert lag.



Norsk institutt for vannforskning
Postboks 173 Kjelsås, 0411 Oslo
Telefon: 22 18 51 00 Fax: 22 18 52 00

ISBN 82-577-2634-6