

# Rozdział 1

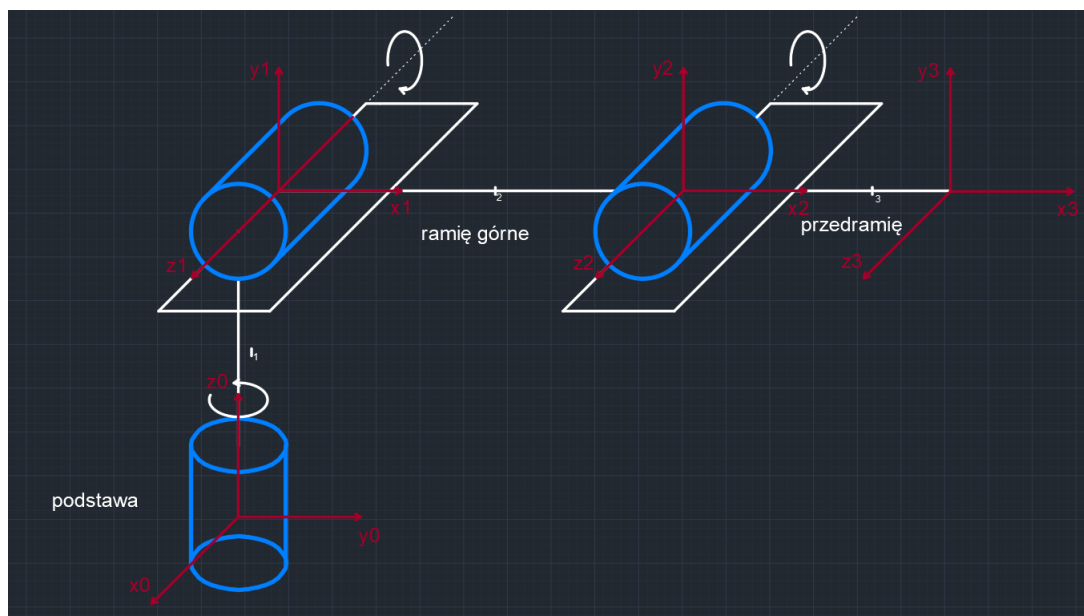
## Analiza kinematyki manipulatora

## 1.1 Schemat kinematyczny manipulatora łokciowego 3R

Celem poniższej pracy było zaprojektowanie manipulatora 3R z konfiguracją stawową.

Przyjęto następujące parametry manipulatora

- ...
- ...



Rysunek 1.1: Schemat kinematyczny manipulatora

Na powyższym rysunku (1.1) przedstawiono schemat kinematyczny manipulatora typu 3R wraz z wpisanymi układami współrzędnych. Układ znajduje się w orientacji Denavita-Hartenberga.

## 1.2 Kinematyka Prosta

Kinematyka prosta umożliwia wyznaczenie położenia roboczego punktu końcowego manipulatora. Bazuje na kątach wychylenia poszczególnych przegubów oraz wymiarów manipulatora.

Tabela z parametrami notacji Denavita-Hartenberga dla manipulatora 3R

Człon	$\phi_z$	$d_z$	$a_x$	$\alpha_x$
1	$\phi_1 + 90^\circ$	$d_1 + const$	0	$90^\circ$
2	$\phi_2$	0	$d_2 = const$	$0^\circ$
3	$\phi_3$	0	$d_3 = const$	$0^\circ$

Tabela 1. Wartości notacji D-H

W celu przekształcenia notacji D-H, dane z tabeli 1. podstawiono do ogólnej postaci poniższego wzoru:

$$A_i = Rot_{z,\phi} \times Trans_{z,d} \times Trans_{z,a} \times Rot_{z,\alpha}$$

$$A_i = \begin{bmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Powyższe obliczenia umożliwiły wyznaczenie poszczególnych macierzy przekształceń

Macierze przekształceń:

$$A_1 = \begin{bmatrix} \cos \phi_1 & 0 & \sin \phi_1 & 0 \\ \sin \phi_1 & 0 & -\cos \phi_1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} \cos \phi_2 & -\sin \phi_2 & 0 & a_2 \times \cos \phi_2 \\ \sin \phi_2 & \cos \phi_2 & 0 & a_2 \times \sin \phi_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \cos \phi_3 & -\sin \phi_3 & 0 & a_3 \times \cos \phi_3 \\ \sin \phi_3 & \cos \phi_3 & 0 & a_3 \times \sin \phi_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Na podstawie powyższych macierzy wyznaczono macierz przekształceń  $T_0^3$

$$T_0^3 = A_1 \times A_2 \times A_3 = \begin{bmatrix} n_{11} & n_{12} & n_{13} & n_{14} \\ n_{21} & n_{22} & n_{23} & n_{24} \\ n_{31} & n_{32} & 0 & n_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Poszczególne współczynniki macierzy przyjmują poniższą postać:

$$n_{11} = \frac{\cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}{2}$$

$$n_{21} = \frac{\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \sin(\cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3))}{2}$$

$$n_{31} = \sin(\phi_2 + \phi_3)$$

$$n_{12} = \frac{-\sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \sin(\cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3))}{2}$$

$$n_{22} = \frac{\cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + \cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}{2}$$

$$n_{32} = \cos(\phi_2 + \phi_3)$$

$$n_{13} = \sin \phi_1$$

$$n_{23} = -\cos \phi_1$$

$$n_{14} = \frac{a_2 \times \cos(\phi_1 + \phi_2) + a_2 \times \cos(\phi_1 - \phi_2) + a_3 \times \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + a_3 \times \cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}{2}$$

$$n_{14} = \frac{a_2 \times \sin(\phi_1 + \phi_2) + a_2 \times \sin(\phi_1 - \phi_2) + a_3 \times \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + a_3 \times \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}{2}$$

$$n_{34} = d_1 + a_2 \times \sin \phi_2 + a_3 \times \sin(\phi_2 + \phi_3)$$

Współrzędne końcowego punktu manipulatora w bazowym układzie współrzędnych mają następującą postać:

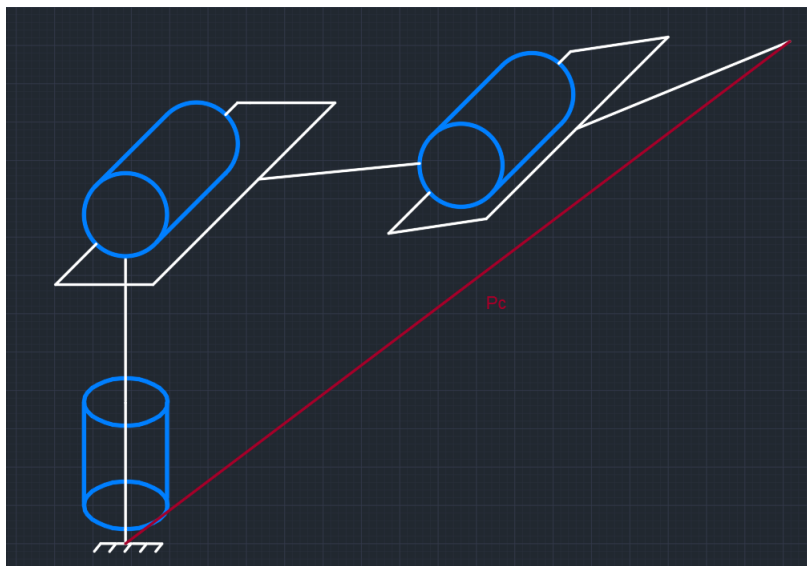
$$x = \frac{a_2 \times \cos(\phi_1 + \phi_2) + a_2 \times \cos(\phi_1 - \phi_2) + a_3 \times \cos(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + a_3 \times \cos(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}{2}$$

$$y = \frac{a_2 \times \sin(\phi_1 + \phi_2) + a_2 \times \sin(\phi_1 - \phi_2) + a_3 \times \sin(\phi_1 + \phi_2 + \phi_3) + a_3 \times \sin(\phi_1 - \phi_2 - \phi_3)}{2}$$

$$z = d_1 + a_2 \times \sin \phi_2 + a_3 \times \sin(\phi_2 + \phi_3)$$

## 1.3 Kinematyka Odwrotna

### 1. Wyznaczanie kąta $\phi_1$ :



Rysunek 1.2: Schemat kinematyczny do wyznaczania kąta  $\phi_1$

Niech wektor  $P_C = 4$ , zatem rzut środka ciężkości na płaszczyznę  $x_0, y_0$  przedstawia się następująco:

$$\phi_1 = \arctg(p_x, p_y)$$

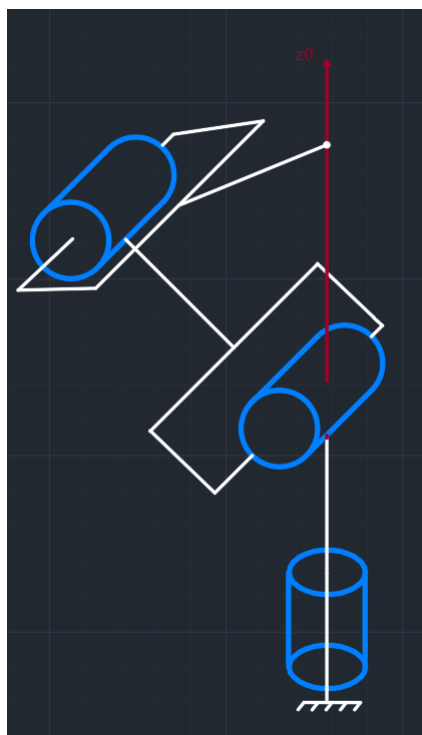
gdzie  $\arctg(x, y)$  oznaczają dwuargumentową funkcję  $\arctg()$  zdefiniowaną dla wszystkich  $(x, y) \neq 0$ , wyznaczającą jednoznacznie kąt  $\phi$  taki, że:

$$\cos(\phi) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \sin(\phi) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

Drugim dopuszczalnym rozwiązaniem dla kąta  $\phi_1$  jest:

$$\phi_1 = \Pi + \arctg(p_x, p_y)$$

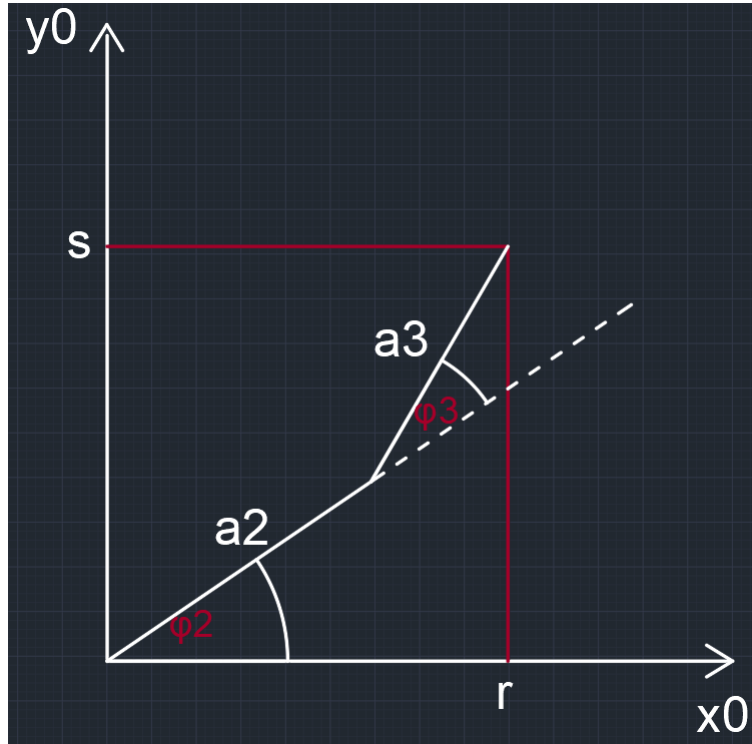
## 2. Pozycja osobliwa manipulatora ( $p_x = p_y = 0$ )



Rysunek 1.3: Pozycja nieosobliwa manipulatora.

Na rysunku 1.3 przedstawiono pozycję nieosobliwą manipulatora, w której środek kiści leży na osi  $z_0$ , więc dla każdej wartości kąta  $\phi_1$  położenie środka jest stałe. Zatem występuje nieskończona liczba rozwiązań dla  $\phi_1$ .

3. Wyznaczanie kątów  $\phi_2, \phi_3$ :



Rysunek 1.4: Dwuczłonowy mechanizm płaski

Na mocy wzorów dla dwuczłonowego mechanizmu płaskiego przedstawionego na rysunku 1.4 uzyskujemy następujące wartości dla kątów  $\phi_2$  i  $\phi_3$

$$\phi_2 = \arctan(\sqrt{p_x^2 + p_y^2}, p_z - d_1) - \arctan(a_2 + a_3 \cos(\phi_3), a_3 \sin(\phi_3))$$

$$\phi_3 = \arctan(M \pm \sqrt{1 - M^2})$$



# Spis treści

<b>1</b>	<b>Analiza kinematyki manipulatora</b>	<b>1</b>
1.1	Schemat kinematyczny manipulatora łokciowego 3R . . . . .	2
1.2	Kinematyka Prosta . . . . .	3
1.3	Kinematyka Odwrotna . . . . .	6
	Spis treści	