فصل چهارم

درونیابی

مقدمه

در ریاضیات معمولا با توابعی سرو کار داریم
که با یک یا چندضابطه تعریف شده اند. یعنی ، به ازای هرمقدار متغیر ،دستوری
برای تعیین مقدارتابع داده شده است . اما ، درعمل به ندرت باچنین وضعی روبه
رو می شویم واکثرا توابعی که باید مورد بررسی قرارگیرند مقدارشان به ازای بعضی
از مقادیر متغیر و آن هم از طریق آزمایش و یا اندازه گیری به زحمت قابل تعیین
است.

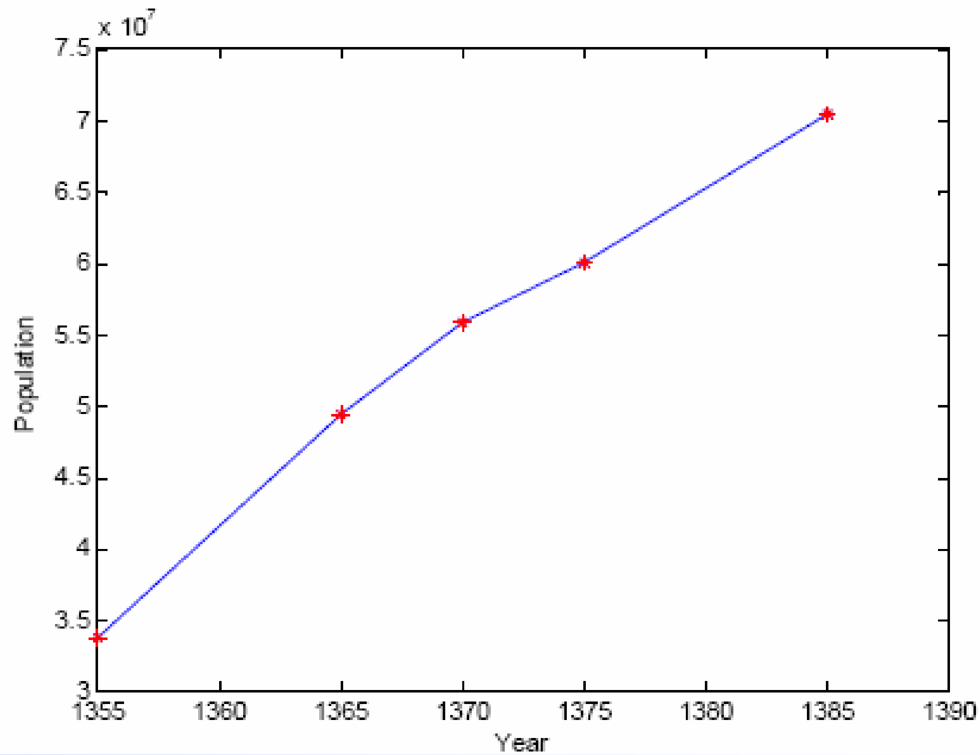
درونیابی و برون یابی

- مثال
  - جمعیت ایران طی سال‌های ۱۳۵۵ تا ۱۳۸۵

۱۳۸۵	۱۳۷۵	۱۳۷۰	۱۳۶۵	۱۳۵۵	سال
۷۰.۴۷۲.۸۴۶	۶۰.۰۵۵.۴۸۸	۵۵.۸۳۷.۱۶۳	۴۹.۴۴۵.۰۱۰	۳۳.۷۰۸.۷۴۴	جمعیت به نفر

- درونیابی
  - تخمین جمعیت کشور در سال ۱۳۸۰
- برون یابی
  - تخمین جمعیت کشور در سال ۱۳۹۰

درونیابی و برون یابی



درونیابی

- هدف:
  - با داشتن مجموعه ای از دادگان (x_i,y_i) به عنوان ورودی

x_i	x_0	x_1	x_2	…	x_n
$f(x_i)=y_i$	y_0	y_1	y_2	…	y_n

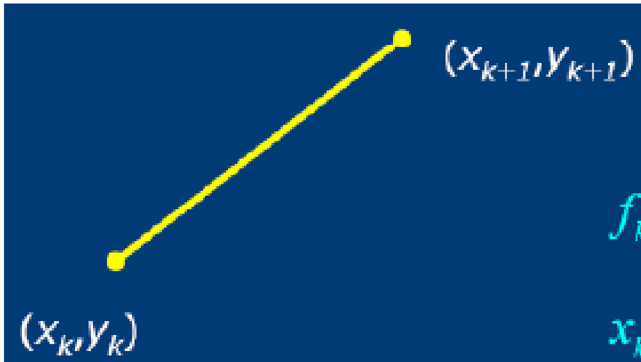
  - مقدار تابع f(x) را به ازای تمام نقاط دلخواه x که در بازه مجموعه دادگان ورودی قرار دارند، به دست آوریم.
- مثال:

x_i	0	1	2	3	4	5	6	7	8
y_i	6	0	2	-1	3	4	-2	5	4

$f(x)=?$ $\quad 0 \leq x \leq 8$

درونیابی تکه ای– خطی (Piecewise-Linear)

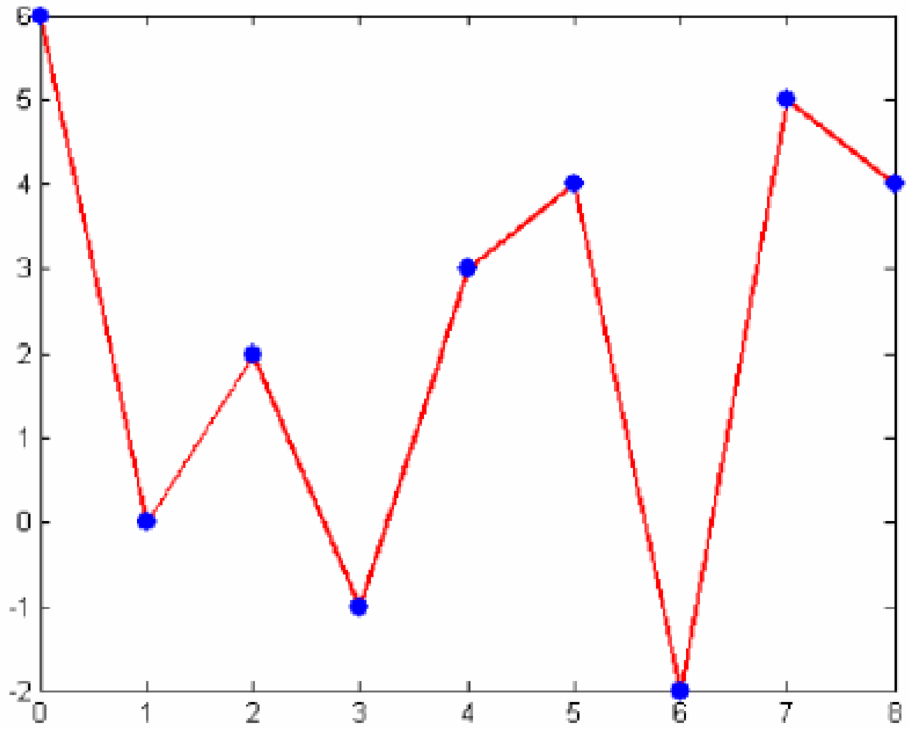
- هر دو نقطه متوالی (x_k,y_k) و (x_{k+1},y_{k+1}) را بوسیله یک خط راست به هم متصل می کنیم.



$$f_k(x) - y_k + \frac{x - x_k}{x_{k+1} - x_k}(y_{k+1} - y_k)$$

$$x_k \le x \le x_{k+1}$$

درونیابی تکه ای– خطی (Piecewise-Linear)



به بیان دقیق مقادیر تابع f به ازای نقاط دو به دو متمایز

به ترتیب عبارتند از: $f_0 , f_1 , f_2 ,\dots, f_n$ $x_0 , x_1 , x_2 ,\dots, x_n$

یک چنین تابعی را تابع جدولی نامیم . نمو نه هایی از این توابع را می شناسید،توابع مثلثاتی وتابع لگاریتم که مقدار آنها به ازای بعضی از مقادیر متغیر درجدولهایی درج شده است .

درونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x_0 < x < x_n$

$$x \neq x_i \qquad i = 1,2,\dots,n-1$$

وبرونیابی یعنی برآورد مقدار $f(x)$ وقتی $x \notin [x_0 , x_n]$.

۱-۴ مفهوم درونیابی

درریاضیات از دیرباز توابع جدولی ، یعنی توابعی که مقادیرآنهادرنقاطی ازحوزه

تعریف آنها در یک جدول ثبت شده است ، مورد استفاده قرار می گرفته اند .

همه با جدول مقادیرتوابع sin cos tg و cotg به ازای ۰،۱،۲،...،۴۵ درجه

آشناهستید ،. آنچه دردبیرستان برای تعیین ، مثلا سینوس۳۷درجه و ۴۰دقیقه انجام می دهید درونیابی خطی است

که در اینجا آنرا بررسی می کنیم . باپیدایش ماشین حساب وکامپیوتر جدولهای

مذکور دیگر به کار نمی روند و درونیابی بیشتر

هنر شناخت معانی ومفاهیم مستتر در یک جدول

است . یکی از این معانی ، تخمین مقدار یک تابع به ازای مقداری از x است که در جدول نیست ، ولی بین نقاط جدولی است . این همان مفهوم درونیابی است .

برای تخمین $f(x)$ وقتی f باجدول زیر داده شده است

x	x_0	x_1	x_2	...	x_n
$f(x)$	f_0	f_1	f_2	...	f_n

راههای متفاوتی وجود دارد . یکی از راههای نسبتا ساده این است که یک چند جمله ای

مانند$P(x)$پیدا کنیم که مقدارآن در x_i همان f_i باشد ، البته به ازای

$i = 0,1,2,...,n$یعنی داشته باشیم $\qquad P(x_i) = f_i \qquad i = 0,1,2,...,n$ *

وبعد به جای $f(x)$ ، در بازه $[x_0 , x_n]$ ، با $P(x)$ کار کنیم . اکنون سوالاتی به صورت زیر

مطرح می شود :

الف) چرا یک چند جمله ای پیدا می کنیم ؟ مگر چندجمله ای چه خصوصیتی داردکه دیگر

توابع ندارند؟

ب) آیا یک چند جمله ای که در * صدق کند همیشه وجود دارد؟ و در صورت وجود

منحصر به فرد است؟

درپاسخ به سوال (الف) ، همه می دانیم که محاسبه یک چندجمله ای به ازای مقداری از   بسیار ساده است. همچنین محاسبه مشتق و انتگرال توابع چندجمله ای و حتی تعیین x_1 ریشه های یک معادله چندجمله ای مشکل نیست .

جالب این که ، درصورت متمایزبودن نقاط ، جواب سوال(ب)مثبت است و همیشه یک چندجمله ای منحصربه فردوجوددارد و راههای ساده ای برای تعیین آن می شناسیم .

۲-۴ چند جمله ای های لاگرانژ

یکی ازروشهای تعیین یک چندجمله ای حداکثر از درجه n که در ❋ صدق کند ، روش لاگرانژ است . در این روش فرض می کنیم $L_n(x),\ldots, L_1(x), L_0(x)$ هر یک، یک چندجمله ای درجه n باشند وداشته باشیم

$$P(x)=L_0(x)f_0+L_1(x)f_1+\ldots+L_j(x)f_j+\ldots+L_n(x)f_n$$

و سعی می کنیم $L_j(x)$ ها را چنان تعیین کنیم که

$$P(x_i)=f_i \qquad i=0,1,2,\ldots,n$$

برای این منظورمی گوییم به ازای $i = 0, 1, 2, \ldots, n$ باید داشته باشیم

$$P(x_i) = L_0(x_i) f_0 + \ldots + L_j(x_i) f_j + \ldots + L_n(x_i) f_n$$ ❊❊

بنابراین $L_i(x)$

$$L_j(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{j-1})(x - x_{j+1})\ldots(x - x_n)}{(x_j - x_0)(x_j - x_1)\ldots(x_j - x_{j-1})(x_j - x_{j+1})\ldots(x_j - x_n)}$$

که در آن داریم:

$$\begin{cases} L_j(x_i) = 0 & i \neq j \\ L_j(x_j) = 1 & i = j \end{cases} \qquad (۵.۴)$$

به سادگی می توانید آزمایش کنید که شرایط لازم برقرارند. چندجمله ایهای درجه که به این وسیله بیان می شوند به چندجمله ایهای لاگرانژ معروف اند.

۴-۲-۱ مثال

چندجمله ای $P(x)$ راکه مربوط به تابع جدولی زیر را به روش لاگرانژ حساب کنید.

x_i	۱-	۰	۱
f_i	۱	۱	۳

حل:

$$L_j(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_1)\ldots(x-x_{j-1})(x-x_{j+1})\ldots(x-x_n)}{(x_j-x_0)(x_j-x_1)\ldots(x_j-x_{j-1})(x_j-x_{j+1})\ldots(x_j-x_n)}$$

در این مثال $n=2$ و در نتیجه چند جمله ایهای لاگرانژ از درجه دو هستند .

چند جمله ایهای لاگرانژ به قرار زیرند:

$$L_0(x)=\frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)}=\frac{(x-0)(x-1)}{(-1-0)(-1-1)}=\frac{x^2-x}{2}$$

$$L_1(x)=\frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)}=\frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)}=\frac{x^2-1}{-1}$$

$$L_2(x)=\frac{(x\_x_0)(x\_x_1)}{(x_2\_x_0)(x_2\_x_1)}=\frac{(x+1)(x\_0)}{(1+1)(1\_0)}=\frac{x^2+x}{2}$$

از این رو، بنابر فرمول لاگرانژ داریم

$$P(x)=1\times L_0(x)+1\times L_1(x)+3\times L_2(x)=\frac{x^2-x}{2}-(x^2-1)+\frac{3(x^2+x)}{2}$$

$$P(x)=x^2+x+1$$

تحقیق کنیدکه $L_0(x)+L_1(x)+L_2(x)=1$

۴-۲-۲ مثال

بااضافه کردن نقطه (۲,۷) به تابع جدولی مثال (۴-۲-۱) مجددا چند جمله ای $P(x)$ را حساب کنید . به عبارت دیگر، چندجمله ای مربوط به جدول زیر را حساب کنید.

x_i	-۱	۰	۱	۲
f_i	۱	۱	۳	۷

حل:

در این مثال $n = 3$ و چند جمله ایهای لاگرانژ همه از درجه ۳ هستند . این چند جمله ایها عبارت اند از:

$$L_0(x)=\frac{(x-0)\,(x-1)\,(x-2)}{(-1-0)\,(-1-1)\,(-1-2)}=\frac{x^3-3x^2+2x}{-6}$$

$$L_1(x)=\frac{(x+1)\,(x-1)\,(x-2)}{(0+1)\,(0-1)\,(0-2)}=\frac{x^3-2x^2-x+2}{2}$$

$$L_2(x)=\frac{(x+1)(x-0)(x-2)}{(1+1)\,(1-0)\,(1-2)}=\frac{x^3-x^2-2x}{-2}$$

$$L_3(x)=\frac{(x+1)\,(x-0)\,(x-1)}{(2+1)\,(2-0)(2-1)}=\frac{x^3-x}{6}$$

درنتیجه چندجمله ای $P(x)$ عبارت است از:

$$P(x) = 1 \times L_0(x) + 1 \times L_1(x) + 3 \times L_2(x) + 7 \times L_3(x)$$

$$= \frac{x^3 - 3x^2 + 2x}{-6} + \frac{x^3 - 2x^2 - x + 2}{2} + \frac{3(x^3 - x^2 - 2x)}{-2} + \frac{7(x^3 - x)}{6}$$

که پس ازساده کردن نتیجه می شود $P(x) = x^2 + x + 1$

ضمنا ازطریق محاسبه معلوم می شودکه

$$L_0(x) + L_1(x) + L_2(x) + L_3(x) = 1$$

مشاهده می شود که $P(x)$ ازدرجه ۲ است ولی $L_i(x)$ ها از درجه ۳ هستند.

ضمنا از محاسبات مربوط به مثال (۴-۲-۱) کمتر استفاده شد .

یعنی، با اضافه کردن یک نقطه به جدول باید تقریبا تمام عملیات را از سرگرفت. حجم عملیات نیزبا افزایش n به سرعت بالا می رود.درضمن درجه چندجمله ای درونیاب قبل از تعیین کامل آن معلوم نمی شود. قضیه زیر نشان می دهد که چندجمله ای $P(x)$ که در صدق می کند منحصر به فرد است.

۴-۲-۳ قضیه

فقط یک چند جمله ای $P(x)$ ، حداکثر از درجه n ، وجود دارد که در شرط زیر صدق می کند:

$$P(x_i) = f_i \qquad i = 0,1,2,\ldots, n \qquad (۶,۴)$$

۴-۲-۴ تعریف

چند جمله ای منحصر به فرد $P(x)$ که در (۶,۴) صدق می کند چند جمله ای درونیاب یا چند جمله ای هم محل تابع f در نقاط x_0 , x_1 ,..., x_n نامیده می شود .

روش لاگرانژ برای تعیین چندجمله ای درونیاب تنها از لحاظ نظری مورد توجه است ولی همان گونه که در مثال ۴-۲-۲ نشان داده شد از لحاظ عددی معایب زیادی است .

۴-۲-۵ معایب روش لاگرانژ

۱- محاسبات این روش ، وقتی n خیلی هم بزرگ نباشد ، زیاد است و خودکارکردن عملیات نیز ساده نیست .(به این مطلب فکر کنید که چگونه می توان ضرایب توان های مختلف x رادرهر یک از چندجمله ایهای لاگرانژ باکامپیوتر حساب کرد).

۲- درجه چند جمله ای درونیاب بعد از انجام تمام محاسبات تعیین می شود و با اضافه کردن یک یا چندنقطه به نقاط جدولی باید تقریبا تمام عملیات راaز سرگرفت.

۳- چون چند جمله ای درونیاب به تدریج حساب نمی شود این روش را باید با احتیاط کامل به کار برد (مثال زیر را مطالعه کنید).

۴-۲-۶ مثال

جدول مربوط به تابع $f(x)=\sqrt[3]{x}$ داده شده است مطلوب است تخمین $\sqrt[3]{20}$ با استفاده از درونیابی لاگرانژ .

x_i	۰	۱	۸	۲۷	۶۴
f_i	۰	۱	۲	۳	۴

حل :

باتوجه به تعریف چندجمله ایهای لاگرانژ داریم(توجه کنیدکه $f_0=0$ و $L_0(x)\times f_0=0$

$$P(x)=\frac{x\,(x-8)\,(x-27)\,(x-64)}{1\,(-7)\,(-26)\,(-63)}\times 1+\frac{x\,(x-1)\,(x-27)\,(x-64)}{8\,(7)\,(-19)\,(-56)}\times 2$$

$$+\frac{x(x-1)\,(x-8)\,(x-64)}{27(26)\,(19)\,(-37)}\times 3+\frac{x(x-1)\,(x-8)\,(x-27)}{64(63)\,(56)\,(37)}\times 4$$

برای تخمین $\sqrt[3]{20}$ به جای x قرار می دهیم ۲۰ خواهیم داشت

$$\sqrt[3]{20}\cong P(20)=-1/3139 \qquad (4D)$$

با رسم منحنی مشاهده می شود برآورد $\sqrt[3]{20}$ منفی است! علت چیست ؟

$$y=\sqrt[3]{x}$$

در فاصله [۸,۲۷] معلوم می شود که شکل منحنی نزدیک به یک خط راست است و مقدار تابع به ازای x های مختلف برابر است.

لذا ، اگر در این فاصله چند جمله ای درونیاب درجه اول را به دست آوریم حاصل می شود

$$P_1(x) = \frac{x-27}{8-27} \times 2 + \frac{x-8}{27-8} \times 3$$

وبه دست می آید

$$\sqrt[3]{20} \cong P_1(20) = \frac{14}{19} + \frac{36}{19} = \frac{50}{19} = 2/6316$$

که از $(4\ D)$ $\sqrt[3]{20} = 2/7144$ خیلی دور نیست .

۴-۳ روش تفاضلات نیوتن

۴-۳-۱ تفاضلات تقسیم شده نیوتن

فرض کنید $x_0, x_1, ..., x_n$ نقاط دو به دو متمایز و $f_0, f_1, ..., f_n$ مقادیر تابع f دراین نقاط باشد.

تفاضلات تقسیم شده اول بین x_i و x_{i+1} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f(x_i) - f(x_{i+1})}{x_i - x_{i+1}} = \frac{f_i - f_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}$$

بنابراین

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_0 - f_1}{x_0 - x_1} \quad , \quad f[x_1, x_2] = \frac{f_1 - f_2}{x_1 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده دوم بین x_i , x_{i+1} و x_{i+2} چنین تعریف می شود

$$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}] = \frac{f[x_i, x_{i+1}] - f[x_{i+1}, x_{i+2}]}{x_i - x_{i+2}}$$

به عنوان مثال

$$f[x_0, x, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

تفاضلات تقسیم شده n ام بین نقاط $x_n, \ldots, x_1, x_0$ عبارت است از:

$$f[x_0, x, \ldots, x_n] = \frac{f[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \ldots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

$$x \neq x_i \quad , \quad i = 1,2,\ldots, n-1$$

درونیابی با روش نیوتن

- فرمول چندجمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن:

$$P(x) = f_0 + (x-x_0)f[x_0,x_1] + (x-x_0)(x-x_1)f[x_0,x_1,x_2] + \cdots + (x-x_0)(x-x_1)\cdots(x-x_{n-1})f[x_0,x_1,\cdots,x_n]$$

که در آن $f[x_0,x_1,\dots,x_i]$ تفاضل مرتبه iام بین نقاط $x_0,x_1,\dots,x_i$ برای $i=1,\dots,n$ می‌باشد و به صورت زیر بر حسب تفاضلات مراتب قبلی محاسبه می شود:

$$f[x_0,x_1,\cdots,x_i] = \frac{f[x_0,\cdots,x_{i-1}] - f[x_1,\cdots,x_i]}{x_0 - x_i}$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + a_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots\ldots(x - x_{n-1})$$

$$a_0 = f(x_0)$$

$$a_1 = f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1}$$

$$a_2 = f[x_0, x_1, x_2] = \frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_2]}{x_0 - x_2}$$

.

.

$$a_n = f[x_0, x_1, \ldots\ldots, x_n] = \frac{f[x_0, \ldots\ldots, x_{n-1}] - f[x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n]}{x_0 - x_n}$$

۴-۳-۲ مثال

با استفاده از جدول ذیل تفاضلات تقسیم شده مربوط به تابع f را حساب کنید.

x_i	-1	0	1	2	3
f_i	-1	1	1	5	19

x_i	f_i	$f[x_i, x_{i+1}]$	$f[x_i, x_{i+1}, x_{i+2}]$	ôù˘ #¥ ëœz|§###ô¯zŸ· #¥ ëœz|§	
-1	-1				
		$\frac{-1-1}{-1-0}=2$			
			$\frac{2-0}{-1-1}=-1$		
0	1			$\frac{-1-2}{-1-2}=1$	
		$\frac{1-1}{0-1}=0$			$\frac{-1-1}{-1-3}=0$
			$\frac{0-4}{0-2}=2$		
1	1				
				$\frac{2-5}{0-3}=1$	
		$\frac{1-5}{1-2}=4$			
			$\frac{4-14}{1-3}=5$		
2	5				
		$\frac{5-19}{2-3}=14$			
3	19				

/#õ ²´fl

خلاصه جدول بالا چنین است :(پس از حل چند تمرین نیازی به نوشتن کسرها نیست.)

x_i	f_i				
-1	-1				
		2			
0	1		-1		
		0		1	
1	1		2		0
		4		1	
2	5		5		
		14			
3	19				

$$P(x) = -1 + 2(x - x0) - 1(x - x0)(x - x1) +$$
$$1(x - x0)(x - x1)(x - x2) + 0(x - x0)(x - x1)(x - x2)(x - x3)$$

$$P(x) = -1 + 2(x + 1) - 1(x + 1)(x) +$$
$$1(x + 1)(x)(x - 1) + 0(x + 1)(x)(x - 1)(x - 2)$$

۳-۳-۴ مثال

جدول تفاضلات مربوط به تابع جدولی زیر را به دست آورید . سپس با اضافه کردن نقطه (2, 7) مجدداً جدول تفاضلات را تشکیل دهید.

x_i	-1	0	1
f_i	1	1	3

x_i	f_i	õ ²y#########ô ²`######ôù˘	
-1	1		
		0	
0	1		1
		2	
1	3		

حل:

با توجه به مثال قبل داریم:

(ضمناً زیر اعدادی که پس از اضافه کردن نقطه (2, 7) حاصل می شوند خط کشیده شده است.)

x_i	f_i	õ ²y	ô ²`	ôù˘
-1	1			
		0		
0	1		1	
		2		<u>0</u>
1	3		<u>1</u>	
		<u>4</u>		
2	7			

1#5 ²´fl

قضیه زیر نشان می دهد که از جدول تفاضلات می توان درجه چند جمله ای درونیاب را ، قبل از به دست آوردن آن ، معین کرد. مثلاً جدول (۲) نشـــان می دهد که چند جمله ای درونیاب f از درجه ۳ است . ضـــــمناً جدول (۳) نشان می دهد که با اضافه کردن نقطه $(2, 7)$ درجه چند جمله ای درونیاب تغییر نمی کند و برابر ۲ است.

۴-۳-۴ قضیه (فرمول چند جمله ای درونیاب بر حسب تفاضلات تقسیم شده نیوتن)

چند جمله ای درونیاب f در نقاط $x_n, \dots, x_1, x_0$ عبارت از

$$P(x) = f_0 + (x - x_0) f[x_0, x_1] + \dots + (x - x_0) \dots (x - x_{n-1}) f[x_0, x_1, \dots, x_n]$$

۴-۳-۵ مثال

چند جمله ای درونیاب تابع جدولی زیر را با استفاده از تفا ضلات تقسیم شده به دست آورید و $f(\frac{1}{2})$ را بر آورد کنید.

x_i	-1	1	2	3
f_i	-2	0	7	26

حل:

باتوجه به جدول بالا جدول تفاضلات تقسیم شده زیر را تشکیل می دهیم.

x_i	f_i	õ ²y##########ô²`######ôù˘		
-1	-2			
		1		
1	0		2	
		7		1
2	7		6	
		19		
3	26			

از این رو ، بنابر تعاریف برای چند جمله ای درونیاب ، داریم

$$
\begin{aligned}
P(x) &= -2+(x+1)\times 1+(x+1)(x-1)\times 2+(x+1)(x-1)(x-2)\times 1 \\
&= -2+x+1+2x^2-2+x^3-2x^2-x+2
\end{aligned}
$$

که در نتیجه،

$$P(x)=x^3-1$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)\approx P\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}$$

۴-۴ خطای چند جمله ای درونیاب

تـا کنون دو روش برای تعیین چند جملـه ای درونیاب یک تـابع در تعـدادی نقطه ارائِه کرده ایم . در این قسمت می خواهیم خطای $P(x)$ و یا به عـبارت دیگر $|f(x)-P(x)|$ را حساب کنیم . واضـح است که خطای مـطلق $P(x)$ نـشان خواهد داد که $P(x)$ به ازای هر x از حوزهٔ تعریف f ،تـقریب خـوبی برای این تابع هست یا نیست ، ضمناًراههای مینیمم سازی خطای مطلق $P(x)$ را نیز تحقیق خواهیم کرد .

۴-۴-۲ قضیه

اگر $P(x)$ چند جمله ای درونیاب f در نقاط دو به دو متمایز x_0 ، x_1 ، $\cdots$ ، x_n و f دارای مشتق مرتبهٔ $(n+1)$ باشد آن گا ه

$$f(x) = P(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_n)}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\eta_x)$$

که در آن η_x نقطه ای در $[x_0, x_n]$ است که در حالت کلی به x بستگی دارد .

۴-۴-۳ نتیجه

با شرایط قضیهٔ ۴-۴-۲ داریم

$$\left| f(x) - P(x) \right| \le \left| (x - x_0) \ \dots \ (x - x_n) \right| \times \frac{M_{n+1}}{(n+1)!}$$

که در آن M_{n+1} یک کران بالا برای $\left| f^{(n+1)}(x) \right|$ بر $[(x_0, x_n)]$ است

. یعنی ، برای هر x از $[(x_0, x_n)]$ ، $\left| f^{(n+1)}(x) \right| \le M_{n+1}$. در عمل ،

به دلیل مشخص نبودن محل η_x ، از (۴-۴-۳) استفاده می شود .

در اینجا با چند مثال کاربرد قضیهٔ ۴- ۴- ۲ و نتیجهٔ آن را توضیح می دهیم

مثال ۴-۴-۴

چند جمله ای درونیاب $f(x) = \cos \frac{\pi x}{2}$ را در نقاط $x_0 = 0$ و $x_1 = 1$ به دست آورید و کران بالایی برای $|f(x) - P(x)|$ حساب کنید . مقدار $\left|f(\frac{1}{2}) - P(\frac{1}{2})\right|$ را با کران بالا در $x = \frac{1}{2}$ مقایسه کنید .

حل:

جدول مربوط به تابع عبارت است از :

	f_i	[illegible]
0	1	
		-1
1	0	

برای این منظور مشتقات مرتبهٔ اول و دوم تابع f راحساب می کنیم .

$$f'(x) = -\frac{\pi}{2}\sin\frac{\pi x}{2}$$

$$f''(x) = -\frac{\pi^2}{4}\cos\frac{\pi x}{2}$$

درنتیجه

$$\left|f''(x)\right| \le \frac{\pi^2}{4} = M_2$$

پس ، بنابر ۴-۴-۳ ،

$$\left|f(x) - P(x)\right| \le \left|(x-0)(x-1)\right| \times \frac{\frac{\pi^2}{4}}{2!} = \frac{\pi^2}{8}\left|x^2 - x\right|$$

مقدار کران بالا به ازای $x = \frac{1}{2}$ برابر است با

$$\frac{\pi^2}{8} \times \left|\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\right| = \frac{\pi^2}{32} = 0/31 \quad (2D)$$