Имитационная модель американских опционов

Анастасия Александровна Миллер, 422 группа

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н. Товстик Т.М.

Санкт-Петербург
июнь 2015

Основные понятия

Определение

Опцион — договор, по которому потенциальный покупатель или продавец актива получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени.

Основные понятия

Справедливой ценой опциона будет максимальная выручка, которую можно получить от исполнения опциона:

$$\sup_{\tau \in [0;T]} \mathsf{E}\left(e^{-r\tau}\left(S_\tau - K\right)^+\right)$$

Дискретные оценки: состояние актива меняется только в определённых точках $t_0, \ldots, t_n \in [0;T]\,, n < \infty$.

Формулировка задачи динамического программирования

$$\begin{cases} V_i(X_i) = \max\left\{e^{-rt_i}\left(S_{t_i} - K\right)^+, \mathsf{E}\left[V_{i+1}\left(X_{i+1}\right)|X_i\right]\right\}, i \in 1{:}n{-}1 \\ V_n(X_n) = e^{-rt_n}\left(S_{t_n} - K\right)^+ \end{cases}$$

здесь $V_0(X_0)$ — цена опциона, исполняемого n раз в году, на момент выписывания которого базовый актив был в состоянии X_0.

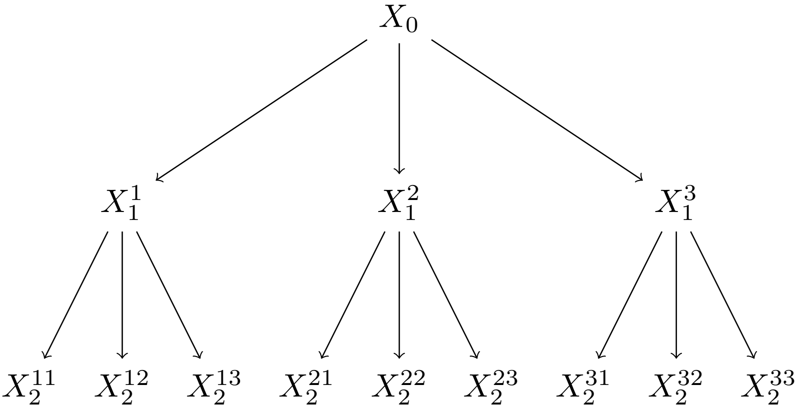
В (Broadie и Glasserman 1997) разработаны оценки сверху и снизу для $V_0(X_0)$.

Оценки Броади-Глассермана

В оценках Броади-Глассермана

$$\mathsf{E}\left[V_{i+1}\left(X_{i+1}\right)|X_i\right] \approx \frac{1}{\#J}\sum_{j\in J} V_{i+1}\left(X_{i+1}^{j}\right)$$

что приводит к взаимосвязи состояний вида



Постановка задачи

Число вершин в дереве:

$$\sum_{k=0}^{m} b^k = \frac{b^{m+1}-1}{b-1} = O(b^m), \text{ при этом } m \to \infty.$$

Задача: указать методы, позволяющие избежать экспоненциального роста вычислительной работы.

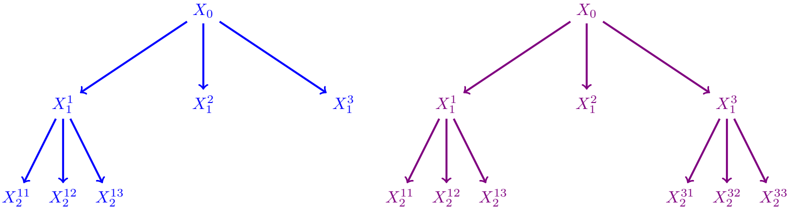
Избежать экспоненциального роста позволяет рандомизация.

Интегральные уравнения с полиномиальной нелинейностью

В «Методах Монте-Карло и смежных вопросах»
С. М. Ермакова для

$$\varphi(x) = \int K(x, y_1, \ldots, y_b) \prod_{i=1}^{b} \varphi(y_i)\, \mu^b(dy_1 \cdots dy_b) + f(x),$$

описано использование случайных поддеревьев полного дерева



Интегральные уравнения с полиномиальной нелинейностью

Также имеется сходство между самими уравнениями:

$$\varphi(x) = f(x) + \int K(x, y_1, \ldots, y_b) \prod_{i=1}^{b} \varphi(y_i)\, \mu^b(dy_1 \cdots dy_b) \quad \text{и}$$

$$V_i(X_i) = h(X_i) \oplus \int V_{i+1} p_{i,i+1}(X_i, X_{i+1})\, dX_{i+1}.$$

Можно проводить аналогии в построении оценок.

Заданы $p(X_k; X^1_{k+1}, \cdots, X^b_{k+1})$ и $g_k(X_k)$, X_0.

def `generate`(X_i, b):

input : текущее состояние $X_i^{j_1 \cdots j_i}$ (включает в себя время t_i), число веток b

`Get`(*событие обрыва* η *с вероятностью* g_k);

if η *произошло* **then**

    возвращаемся к родительской вершине;

промоделировать состояния $\{X^1_{i+1} \cdots X^1_{i+1}\}$;

for $x \in \{X^l_{i+1}\}^k_{l=1}$ **do**

    `generate`(x, b);

Результаты

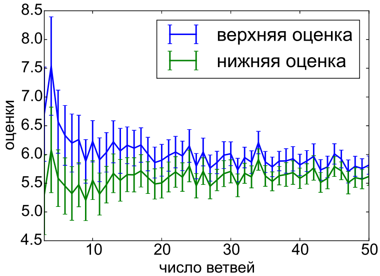


Рис.: Полное дерево.

Реализация алгоритма из статьи

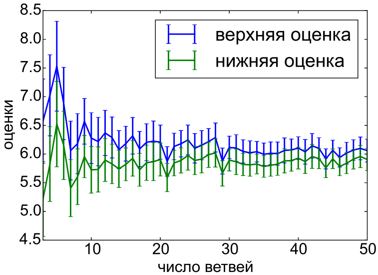


Рис.: Случайные поддеревья.

Реализация предложенного в ВКР алгоритма

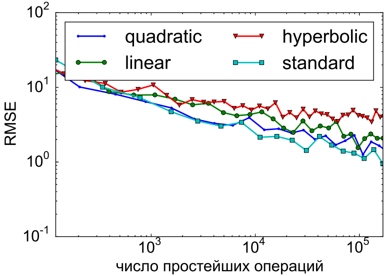


Рис.: Средняя ошибка оценки сверху

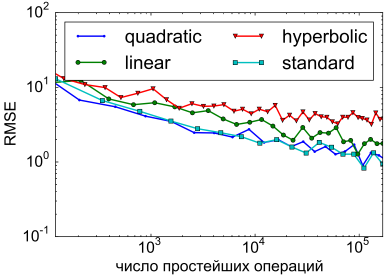


Рис.: Средняя ошибка оценки снизу

Итоги

- Рассмотрены оценки Американских опционов, основанные на имитационных моделях.
- Проведены аналогии с решением интегральных уравнений с полиномиальной нелинейностью.
- Реализованы методы и проведены вычислительные эксперименты по подбору оптимального соотношения дисперсии и вычислительной сложности.
- Предложенный метод применим при больших m, когда исходный метод работает неприемлемо долго.