Имитационная модель американских опционов

Анастасия Миллер

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н. Товстик Т.М.

Санкт-Петербург
июнь 2015

Основные понятия

Определение

Опцион — договор, по которому потенциальный покупатель или продавец актива получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени.

Справедливой ценой опциона будет максимальная выручка, которую можно получить от исполнения опциона:

$$\max_{\tau \in [0;T]} E\left(e^{-rt}\left(S_\tau - K\right)^+\right)$$ [1]

Дискретные оценки: состояние актива меняется только в определённых точках $t_0, \ldots, t_n \in [0;T], n < \infty$.

[1] S_τ в зависимости от контекста обозначает либо состояние базового актива, либо цену, которую можно получить за него на рынке

Формулировка задачи

Дискретизация процесса даёт оценку

$$\begin{cases} V_i(X_i) = \max\left\{e^{-rt_i}\left(S_{t_i} - K\right)^+, EV_{i+1}(X_{i+1})\right\}, i \in 1{:}n{-}1 \\ V_n(X_n) = e^{-rt_n}\left(S_{t_n} - K\right)^+ \end{cases}$$

здесь $V_0(X_0)$ — цена опциона, исполняемого n раз в году, на момент выписывания которого базовый актив был в состоянии X_0.

Задача: оценить $V_0(X_0)$ методами, включающими построение траекторий по случайным деревьям

Будем оценивать $V_0(S_0)$ методом Монте-Карло.
Промоделируем много вариантов жизни базового актива.
Траектория — набор состояний $S_{t_1}, \ldots, S_{t_n}$.

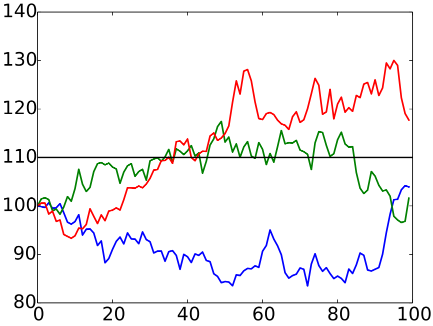

Рис.: Возможные траектории цены базового актива, горизонтальная линия — цена страйк.

Случайные деревья

Дерево — способ получить больше траекторий в том же объёме памяти. Построение обычного дерева:

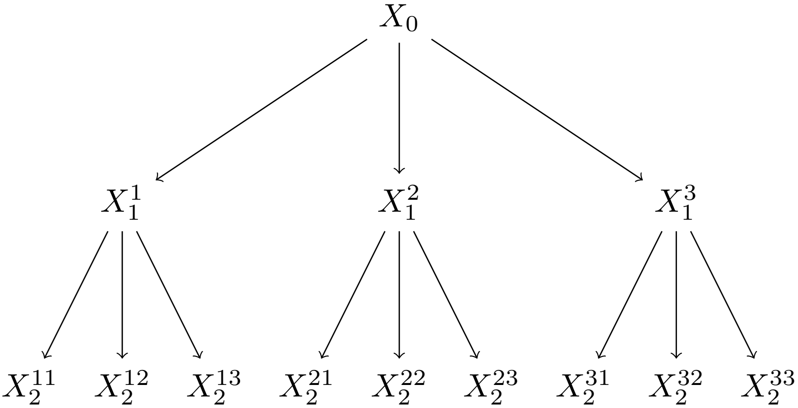

Рис.: Дерево состояний актива для $b = 3, m = 2$.

Число вершин в дереве —

$$\sum_{k=0}^{n} b^k = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} = O(b^n)$$

Идея (Ермаков): обходить не все вершины, а лишь некоторые

Оценка по поглощениям

Для уравнений вида

$$\varphi(x) = \int K(x, y, \varphi(y))\, \varphi(y)\, \mu(dy) + f(x) \qquad \mathrm{mod}\ \mu,$$

для которых сходится метод последовательных приближений

$$\varphi_n(x) = \int K(x, y, \varphi_{n-1}(y))\, \varphi_n(y)\, \mu(dy) + f(x) \qquad \mathrm{mod}\ \mu,$$

разработан метод оценки по ветвящемуся марковскому процессу. Так как

$$V_k(x) = h_k(x) \oplus \int V_{k+1} p_{k,k+1}(x, X_{k+1})\, dX_{k+1},$$

можно попробовать применить его к задаче оценки А.о.

Оценка по поглощениям

Доказано, что для оператора

$$\begin{aligned} A(\gamma) =& f[\nu(0)] \text{ при } N = 0, \\ A(\gamma) =& a_{\nu(0)} \prod_{\mathfrak{B}_1 \backslash \mathfrak{B}_1'} f[\nu(1)] \prod_{\mathfrak{B}_1'} a_{\nu(1)} \prod_{\mathfrak{B}_2 \backslash \mathfrak{B}_2'} f[\nu(1)] \prod_{\mathfrak{B}_2'} a_{\nu(2)} \times \\ & \times \cdots \times \prod_{\mathfrak{B}_N} f[\nu(N)] \text{ при } N > 0, \end{aligned}$$

где $a_{\nu(k)}\varphi = \int K(x[\nu(k)], x[\nu(k), 1], \ldots, x[\nu(k), b])\, \varphi d\mu$,

$$z[\nu(0)] = \sum_{\gamma \in \Gamma_N} A(\gamma)$$

Результаты

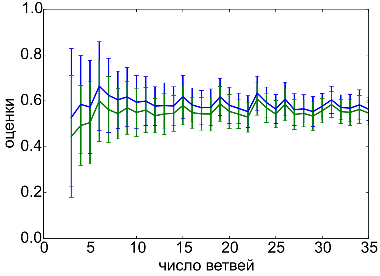

Рис.: Полное дерево.

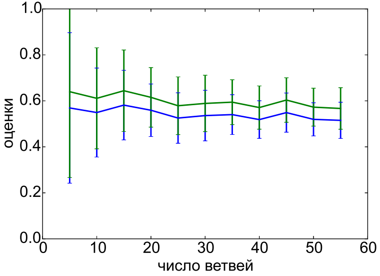

Рис.: Случайные поддеревья.

Конец

Вопросы