

Имитационная модель американских опционов

Анастасия Миллер

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н. Товстик Т.М.



Санкт-Петербург
20 мая 2015 г.

Основные понятия

Определение

Опцион – договор, по которому потенциальный покупатель или потенциальный продавец актива (товара, ценной бумаги) получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени.

Основные понятия

Справедливой ценой опциона будет максимальная выручка, которую можно получить от исполнения опциона:

$$\max_{\tau \in [0; T]} E(e^{-rt} (S_\tau - K)^+)$$

1

Дискретные оценки: состояние актива меняется только в определённых точках $t_0, \dots, t_n \in [0; T], n < \infty$.

¹ S_τ в зависимости от контекста обозначает либо состояние базового актива, либо цену, которую можно получить за него на рынке

Формулировка задачи

Дискретизация процесса даёт оценку

$$\begin{cases} V_i(X_i) = \max \{e^{-rt_i} (S_{t_i} - K)^+, EV_{i+1}(X_{i+1})\}, i \in 1 : n - 1 \\ V_n(X_n) = e^{-rt_n} (S_{t_n} - K)^+ \end{cases}$$

здесь $V_0(X_0)$ — цена опциона, исполняемого n раз в году, на момент выписывания которого базовый актив был в состоянии X_0 .

Задача: оценить $V_0(X_0)$ методами, включающими построение траекторий по случайным деревьям

Случайные траектории

Будем оценивать $V_0(S_0)$ методом Монте-Карло.

Промоделируем много вариантов жизни базового актива.

Траектория — набор состояний S_{t_1}, \dots, S_{t_n} .

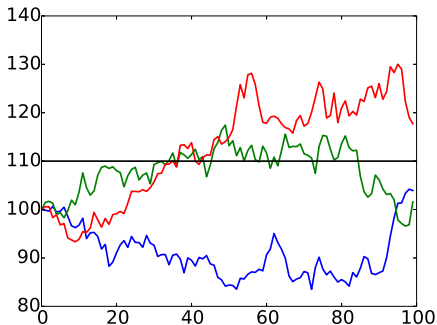


Рис.: Возможные траектории цены базового актива, горизонтальная линия — цена страйк

Случайные деревья

Дерево – способ получить больше траекторий в том же объёме памяти. Построение обычного дерева:

картинка про дерево

Случайные деревья

Число вершин в дереве –

$$\sum_{k=0}^n b^k = \frac{b^{n+1} - 1}{b - 1} = O(b^n)$$

Идея (Ермаков): число вершин уменьшится, если считать достаточно близкие вершины одинаковыми.

Квантили эмпирического распределения

$S_i^j, i \in 1 : b, j \in 1 : k$ — все промоделированные состояния базового актива, относящиеся к одному времени.

$$F_{S_i^j}(x) = \frac{1}{bk} \# \left\{ (i, j) \in 1 : b \times 1 : k \mid S_i^j < x \right\}$$

Группировка по квантилям:

$$A_j = \left\{ S_i^j \mid \frac{j-1}{n} < F_{S_\tau} \left(S_i^j \right) < \frac{j}{n} \right\}$$

Все вершины, принадлежащие множеству A_j , заменяются на $\text{med} A_j$.

Случайные деревья

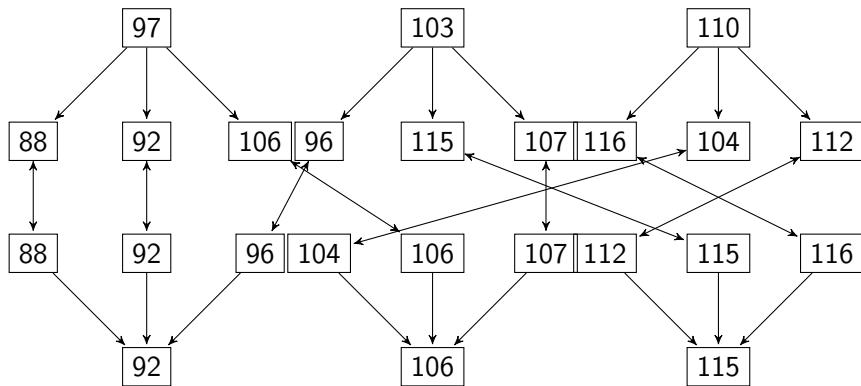


Рис.: Пример прореживания дерева

Оценки $V_0(X_0)$ по прореженному и точному дереву

Используемые оценки — оценки Бродаи-Глассермана, разработанные для деревьев с $O(b^n)$ вершинами

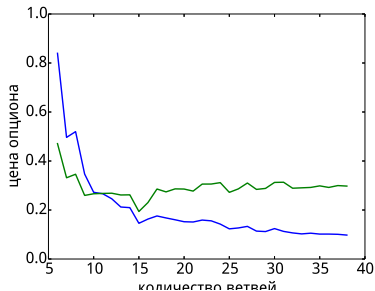


Рис.: Прореженное дерево

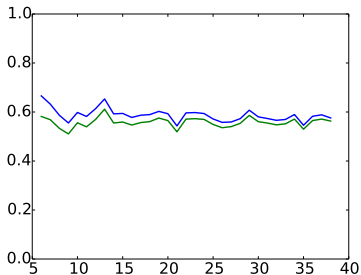


Рис.: Обычное дерево

Планы

- 1 Закончить рассмотрение оценки по гистограмме, в т.ч. найти аналитически математическое ожидание оценки
- 2 Рассмотреть оценку по кластерам
- 3 Рассмотреть другие оценки