Правительство Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Санкт-Петербургский государственный университет»
Кафедра статистического моделирования

Миллер Анастасия Александровна

# Имитационная модель американского опциона

Отчет о научно-исследовательской практике

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор С. М. Ермаков

Санкт-Петербург
2015

# Глава 1

# Задача оценки американского опциона в терминах тропической математики

Для Американского опциона с функцией выплат $h_t(X_t)$, где $X_t$ — состояние актива, на который выписан опцион, в момент времени $t \in [0; T]$, задача оптимального исполнения — это задача о нахождении

$$V = \max_{\tau} \mathrm{E} h_{\tau}(X_{\tau}). \tag{1.1}$$

При дискретизации (1.1) (принятии предположения о том, что опцион может быть исполнен только в некотором конечном числе моментов времени $\{t_i\}_{i=0}^{n} \in [0; T], t_0 = 0, t_n = T$) задача обретает эквивалентную формулировку о нахождении $V_0(X_0)$ для

$$\begin{aligned} V_m(x) &= h_m(x), \\ V_{i-1}(x) &= \max\{h_{i-1}(x), \mathrm{E}[V_i(S_i) | S_{i-1} = x]\}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

В [1] были предложены оценки для $V_0(X_0)$ (см. также [2]). Оценка сверху:

$$\begin{aligned} \hat{V}_m^{j_1 \cdots j_m} &= h_m\left(S_m^{j_1 \cdots j_m}\right), \\ \hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} &= \max\left\{h_i\left(S_i^{j_1 \cdots j_i}\right), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \ldots j_i j}\right\}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Оценка снизу:

$$\begin{aligned} \hat{v}_m^{j_1 j_2 \cdots j_m} &= h\left(S_m^{j_1 j_2 \cdots j_m}\right), \\ \hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \cdots j_i} &= \begin{cases} h\left(S_i^{j_1 j_2 \cdots j_i}\right), & \text{если } \frac{1}{b-1}\sum_{j=1, j\neq k}^{b} \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \cdots j_i j} \leq h\left(S_i^{j_1 j_2 \cdots j_i}\right), \\ \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \cdots j_i k}, & \text{иначе,} \end{cases} \\ \hat{v}_i^{j_1 j_2 \cdots j_i} &= \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} \hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \cdots j_i}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Для обеих оценок доказана состоятельность и асимптотическая несмещённость. Обозначения $X_k^{j_1 \cdots j_k}$ соответствуют путям в дереве, пример которого приведён на рис. 1.1.

Рассмотрим оценку сверху (1.3) на небольшом примере: $b = 3, m = 3$. Обозначим операцию $+$ как $\odot$ и max как $\oplus$. Будем также считать, что дерево состояний актива уже смоделировано и обозначим $h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right) = h_{j_1 \cdots j_1}$. Тогда

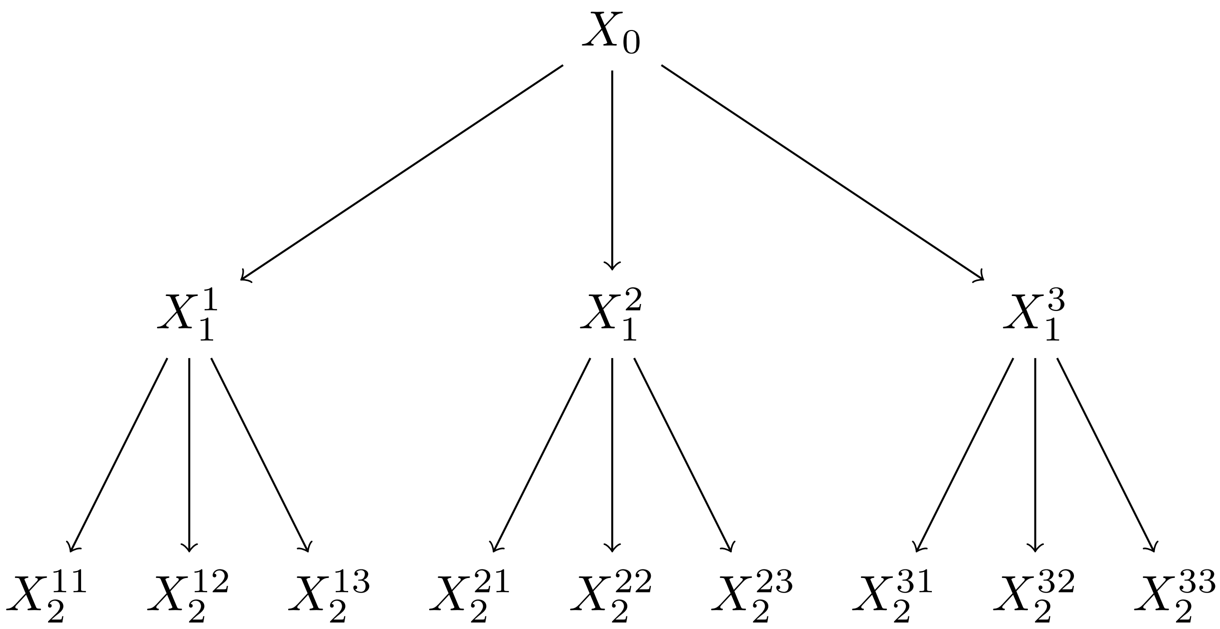


Рис. 1.1. Дерево состояний актива

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_1 = h_0 &\oplus \left(\frac{h_1}{3} \odot \frac{h_2}{3} \odot \frac{h_3}{3}\right) \oplus \\
&\oplus \left(\frac{h_1}{3} \odot \frac{h_2}{3} \odot \left(\frac{h_{31}}{9} \odot \frac{h_{32}}{9} \odot \frac{h_{33}}{9}\right)\right) \oplus \\
&\oplus \left(\frac{h_1}{3} \odot \left(\frac{h_{21}}{9} \odot \frac{h_{22}}{9} \odot \frac{h_{23}}{9}\right) \odot \frac{h_3}{3}\right) \oplus \\
&\oplus \left(\left(\frac{h_{11}}{9} \odot \frac{h_{12}}{9} \odot \frac{h_{13}}{9}\right) \odot \frac{h_2}{3} \odot \frac{h_3}{3}\right) \oplus \\
&\oplus \left(\left(\frac{h_{11}}{9} \odot \frac{h_{12}}{9} \odot \frac{h_{13}}{9}\right) \odot \left(\frac{h_{21}}{9} \odot \frac{h_{22}}{9} \odot \frac{h_{23}}{9}\right) \odot \frac{h_3}{3}\right) \oplus \\
&\oplus \left(\frac{h_1}{3} \odot \left(\frac{h_{21}}{9} \odot \frac{h_{22}}{9} \odot \frac{h_{23}}{9}\right) \odot \left(\frac{h_{31}}{9} \odot \frac{h_{32}}{9} \odot \frac{h_{33}}{9}\right)\right) \oplus \\
&\oplus \left(\left(\frac{h_{11}}{9} \odot \frac{h_{12}}{9} \odot \frac{h_{13}}{9}\right) \odot \frac{h_2}{3} \odot \left(\frac{h_{31}}{9} \odot \frac{h_{32}}{9} \odot \frac{h_{33}}{9}\right)\right) \oplus \\
&\oplus \left(\left(\frac{h_{11}}{9} \odot \frac{h_{12}}{9} \odot \frac{h_{13}}{9}\right) \odot \left(\frac{h_{21}}{9} \odot \frac{h_{22}}{9} \odot \frac{h_{23}}{9}\right) \odot \left(\frac{h_{31}}{9} \odot \frac{h_{32}}{9} \odot \frac{h_{33}}{9}\right)\right).
\end{aligned}
$$

В общем виде это выражение выглядит так:

$$\hat{V}_0 = \oplus_{\gamma \in \Gamma} A\left(\gamma\right),$$

где $\Gamma$ — полное дерево глубины $m$, т.е. дерево, у всех вершин которого, находящихся на меньшем, чем $m$, расстоянии от корня, есть ровно $b$ дочерних вершин, а у вершин на расстоянии $m$ детей нет, $\gamma$ — поддерево $\Gamma$, у каждой вершины которого либо 0, либо $b$

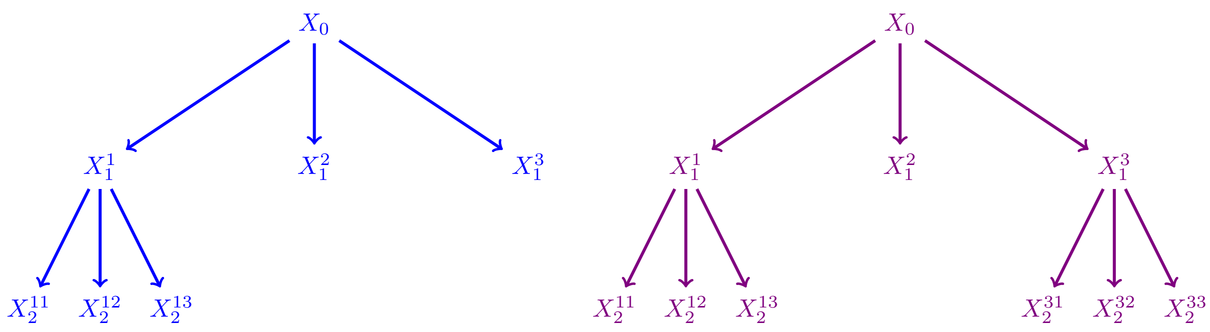


Рис. 1.2. Примеры поддеревьев $\gamma$

дочерних (примеры таких деревьев можно увидеть на рис. 1.2),

$$A(\gamma) = \odot_{X \in \gamma} \frac{h_j(X)}{b^j},$$

где $j$ — расстояние от вершины $X$ до корня.

Таким образом, мы получаем выражение для верхней оценки опциона, построенное по отдельным поддеревьям $\gamma \in \Gamma$. Если мы докажем, что для получения состоятельной оценки максимума по всем $\gamma$ необязательно подсчитывать $A(\gamma)$ для всех $\gamma$, мы добьёмся существенного снижения временных затрат.

# Глава 2

# Сравнение с методом стохастической сетки

Метод стохастической сетки излагается по [3] и (неопубликованной) [4].

Метод стохастической сетки также предлагает оценки сверху и снизу для решения (1.2), но принцип построения оценок несколько отличается от рассматриваемых мною оценок по случайному дереву.

Для описания состояния актива в моменты времени $t_1, \ldots, t_m$ задаются плотности распределения случайной величины, характеризующей состояние актива, в зависимости от времени, обозначим их $g_i(\cdot)$. Для каждого момента $t \in \{t_i\}_{i=1}^m$ генерируется b точек $X_{t,1}, \ldots, X_{t,b}$ в соответствии с этой плотностью. Оценка сверху по полученной сетке определяется как

$$\begin{aligned} \hat{Q}_{T,i} &= h_T\left(X_{T,i}\right), \\ \hat{Q}_{t,i} &= \max\left\{ h_t\left(X_{t,i}\right), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \hat{Q}_{t+1}\left(X_{t+1,j}\right) w_t\left(X_{t,i}, X_{t+1,j}\right)\right\}, \end{aligned} \tag{2.1}$$

где $w_t\left(X_{t,i}, X_{t+1,j}\right)$ — вес, сопоставляемый переходу из $X_i$ в $X_j$. $\hat{Q}_{0,0}$ является состоятельной и асимптотически несмещённой оценкой сверху для истинной цены опциона при условии, что веса $w_t$ выбраны должным образом. Основная идея, поясняющая выбор весов, заключается в следующем рассуждении:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left(Q_{t+1}\left(X_{t+1}\right) | X_t = x\right) &= \int Q_{t+1}(u)\, f(x,t,u)\, \mathrm{d}u = \\ &= \int Q_{t+1}(u)\, \frac{f(x,t,u)}{g_{t+1}(u)} g_{t+1}(u)\, \mathrm{d}u = \\ &= \mathrm{E}\left(Q_{t+1}\left(X_{t+1}\right) \frac{f(x,t,u)}{g_{t+1}(u)}\right), \end{aligned}$$

где $f(x,t,u)$ — переходная плотность, плотность вероятности того, что актив из состояния $x$ в момент $t$ перейдёт в состояние $u$ к моменту $t+1$. Таким образом, веса компенсируют неточность, порождённую моделированием состояний базового актива без учёта траекторий его развития. Для оценок по случайным деревьям эти веса не нужны, так как плотность распределения $X_{k+1}^{j_1 \cdots j_{k+1}} \Big| X_k^{j_1 \cdots j_k} = x$ всегда учитывает траекторию, по которой актив попадает в состояние $X_{k+1}^{j_1 \cdots j_{k+1}}$ наличием условия в правой части. Следовательно, ряд проблем, вызываемых поиском подходящей плотности $g$ и весов $w$, которые бы обеспечили отсутствие экспоненциального роста дисперсии (решение этой проблемы и предлагается в [4]), пропадает сам собой.

Для более детального анализа оценка по методу стохастической сетки с учётом поправок, предложенных в [4], была реализована. Состояние актива моделировалось лог-нормальным процессом без скачков, в качестве функций плотности на сетке (mesh density functions) были выбраны маргинальные плотности лог-нормального распределения. Веса в оценках были посчитаны с учётом поправок, предложенных в [4]. Разберём пример подробнее.

Мы будем считать стоимость опциона колл на один актив. Состояние актива можно промоделировать с помощью геометрического Броуновского движения, то есть

$$\mathrm{d}S_t = S_t\left((r-\delta)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}Z_t\right),$$

где $S_t$ — цена актива в текущий момент времени, $Z_t$ — стандартное Броуновское движение, $r = 3\%$ — безрисковая процентная ставка, $\delta$ — дивидендная ставка, $\sigma$ — волатильность актива. Функция выплат опциона колл на единственный актив определяется как $h_t\left(S_t\right) = \left(S_t - K\right)^+ = \max\left\{S_t - K, 0\right\}$, где $K$ — цена страйк. Промежуток времени — $[0;1]$, в котором исполнение опциона доступно на каждом шаге $i/n, i \in 1:n$. При $n \to \infty$ оценка цены опциона должна приближаться к оценке цены Американского опциона с теми же параметрами.

Для подсчётов понадобятся маргинальные и переходные плотности геометрического Броуновского движения ($S_t \sim GBM\left(r-\delta, \sigma^2\right)$). Для краткости будем называть $\mu = r - \delta$ коэффициентом сноса. Посчитаем переходную плотность:

$$\begin{aligned}
p_{s,t}(x,y) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{P}\left(S_t < y | S_s = x\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{P}\left(x \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma \underbrace{\xi}_{\sim\mathcal{N}(0,t-s)}\right) < y\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{P}\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s) + \sigma\xi < \log y - \log x\right) = \\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\mathrm{P}\left(\sigma\xi < \log y - \log x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right) = \\
&= p_{\mathcal{N}(0,\sigma^2(t-s))}\left(\log y - \log x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)\right) \cdot \frac{1}{y} = \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2(t-s)}y}\exp\left(-\frac{\log y - \log x - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)(t-s)}{2\sigma^2(t-s)}\right).
\end{aligned}$$

Аналогично выписывается и маргинальная плотность:

$$g_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}x\sigma\sqrt{t}}\exp\left(-\frac{\log x - \log S_0 - \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t}{2\sigma^2 t}\right).$$

Из-за того, что $g_t$ является плотностью лог-нормального распределения, мы можем моделировать состояния актива на сетке, используя моделирование нормального распределения: $\forall i \in 1:M, t\ X_{t,i} = S_0 \cdot \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sqrt{t}\xi\right), \xi \sim \mathcal{N}\left(0, \sigma^2\right)$.

Имея $g_t$ и $p_{s,t}$, можно определить $\rho_{t+1}(x,j) = p_{t,t+1}(x, X_{t+1,j}) / g_{t+1}(X_{t+1,j})$ и выписать в явном виде оценки по сетке:

$$\begin{aligned}
\hat{Q}_{T,i} &= h_T(X_{T,i}), \\
\hat{Q}_{t,i} &= \max\left\{h_t(X_{T,i}), \frac{\sum_{j=1}^{M}\rho_{t+1}(x,j)\hat{Q}_{t+1,j}}{\sum_{j=1}^{M}\rho_{t+1}(x,j)}\right\}.
\end{aligned}$$

Результаты моделирования представлены на рис. 2.1. Как и предполагалось, оценка уточняется по мере увеличения ширины сетки. Аналогичные результаты получаются и для других $n$.

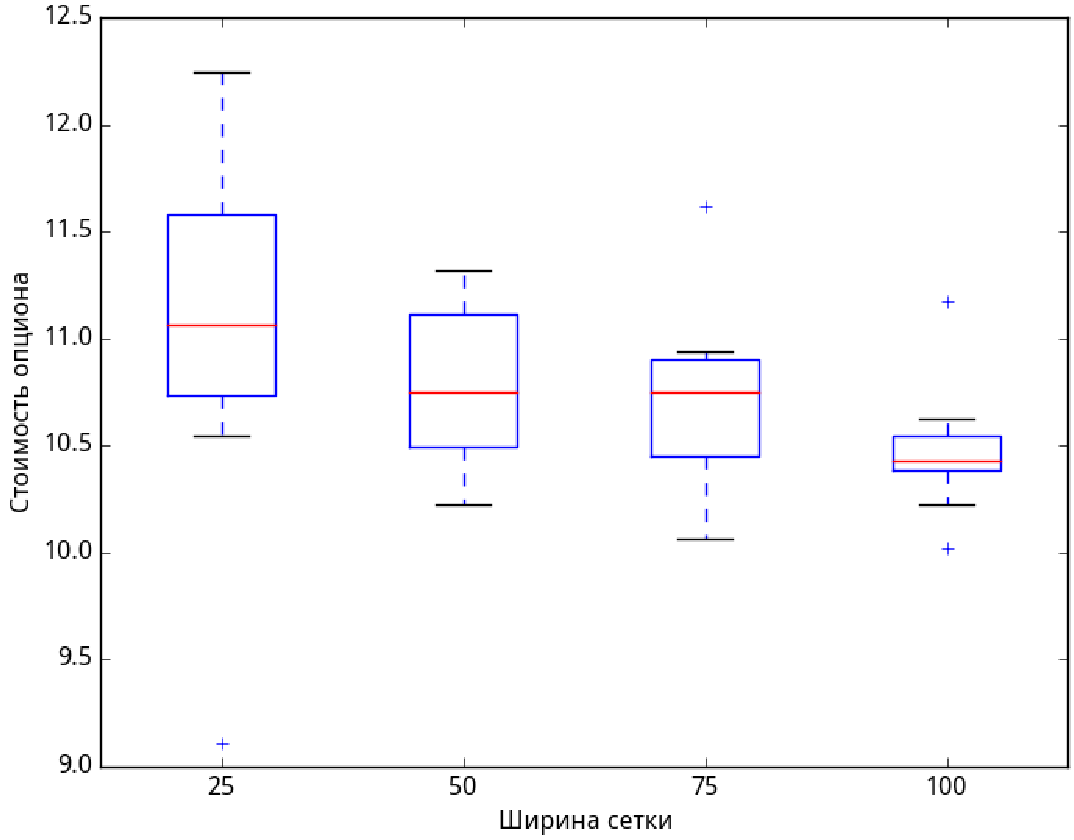


Рис. 2.1. Оценки по сетке стоимости опциона при $n = 50$ моментах исполнения $r = 3\%, \delta = 10\%, \sigma = 30\%$. Начальная цена актива $S_0$ и цена страйк $K$ одинаковы и равны 100.

# Заключение

Получена формулировка задачи как задачи поиска максимума по всем возможным поддеревьям. Такая формулировка позволяет рассчитывать на то, что при применении соответствующих теорем мы получим состоятельную оценку с меньшими временными затратами, чем в изначальном методе. В дальнейшем планируется разработать такую состоятельную оценку.

Рассмотрена и реализована оценка стоимости опциона по стохастической сетке, которая обладает меньшей вычислительной сложностью.

# Список литературы

1. Broadie Mark, Glasserman Paul. Pricing American-style securities by simulation // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1997. — Vol. 21. — P. 1323–1352.
2. Glasserman Paul. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. — Springer, 2004.
3. Broadie Mark, Glasserman Paul. A stochastic mesh method for pricing high-dimensional American options // Journal of Computational Finance. — 2004. — Vol. 7. — P. 35–72.
4. Kashtanov Yuri. Stochastic Mesh Method for Optimal Stopping Problems. — не опубликовано. — 2015.