

Правительство Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Санкт-Петербургский государственный университет»  
Кафедра статистического моделирования

Миллер Анастасия Александровна

## ИМИТАЦИОННАЯ МОДЕЛЬ АМЕРИКАНСКИХ ОПЦИОНОВ

Бакалаврская работа

Допущена к защите

Заведующий кафедрой:

д. ф.-м. н., профессор С. М. Ермаков

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор С. М. Ермаков

Рецензент:

к.ф.-м.н., доцент Т. М. Товстик

Санкт-Петербург

2015

Saint Petersburg State University  
Department of Statistical Modelling

Miller Anastasiia

## SIMULATION MODEL OF AMERICAN OPTIONS

Bachelor's Thesis

Admitted for defence

Head of Department:

Professor S. M. Ermakov

Scientific Supervisor:

Doctor of Physics and Mathematics, Professor  
S. M. Ermakov

Reviewer:

Candidate of Physics and Mathematics,  
Associate Professor T. M. Tovstik

Saint Petersburg

2015

# Оглавление

<b>Введение</b> . . . . .	4
<b>Глава 1. Имитационные модели оценки американского опциона</b> . . . . .	6
<b>Глава 2. Метод случайных деревьев</b> . . . . .	11
2.1. Оценка сверху . . . . .	12
2.2. Оценка снизу . . . . .	14
<b>Глава 3. Схема Неймана-Улама и её обобщение на нелинейные уравнения</b> . . . . .	16
3.1. Общие сведения о схеме Неймана-Улама применительно к ветвящемуся марковскому процессу . . . . .	16
3.2. Приложение к задаче оценивания Американского опциона . . . . .	20
3.2.1. Описание метода . . . . .	21
3.2.2. Численные результаты . . . . .	23
<b>Глава 4. Другие оценки</b> . . . . .	29
4.1. Анализ распределения состояний с помощью эмпирической функции распределения . . . . .	29
4.1.1. Описание метода . . . . .	29
4.1.2. Численные результаты . . . . .	30
4.2. Конечная сетка состояний . . . . .	31
4.2.1. Описание метода . . . . .	31
4.2.2. Численные результаты . . . . .	32
<b>Заключение</b> . . . . .	34
<b>Список литературы</b> . . . . .	35

## Введение

Работа посвящена некоторым методам оценки стоимости Американских опционов. Опцион — один из производных финансовых инструментов (вместе с фьючерсами, свопами, контрактами на разницу цен), активно использующихся на современных финансовых рынках. Интерес представляет оценивание «справедливой» цены опциона.

Более подробно, *опцион* — договор, по которому покупатель опциона (потенциальный покупатель или потенциальный продавец базового актива — товара, ценной бумаги) получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива (*исполнить* опцион) по заранее оговорённой цене (*цене страйк*) в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени. При этом продавец опциона несёт обязательство совершить ответную продажу или покупку актива в соответствии с условиями проданного опциона. Различают опционы на продажу актива и на его покупку. По количеству и типу моментов времени, в которые можно совершить оговорённую в контракте сделку, опционы подразделяются на Европейские (совершить сделку можно только в один указанный момент времени) и Американские (совершить сделку можно в любое время вплоть до указанного), а также более экзотические варианты (например, Бермудский, позволяющий совершить сделку в один из нескольких указанных моментов).

Опционный контракт предполагает возможность смены владельца, а исполнение опциона (совершение покупки или продажи, право на которую даётся в контракте) может принести выгоду по сравнению с аналогичной операцией на рынке, поэтому опционный контракт имеет собственную цену. Значение этой цены неочевидно, так как невозможно точно предсказать размер прибыли, которую получит владелец контракта.

В работе рассматриваются имитационные методы оценки Американского опциона. В работе [1] построены оценки на имитационных моделях, являющиеся оценками сверху и снизу цены Американского опциона. Оценки разработаны в основном для опционов с конечным числом дат исполнения, но доказано, что с ростом времени эти оценки сходятся к истинному значению цены Американского опциона. Однако с ростом времени вычислительная работа растёт экспоненциально, что делает невозможным применение этих оценок в исходном виде для подсчёта Американского опциона. Задачей дипломной

работы было указать методы, позволяющие избежать экспоненциального роста вычислительной работы.

## Глава 1

**Имитационные модели оценки американского опциона**

Традиционный подход предполагает следование гипотезе эффективного рынка, которая влечёт определение «справедливой» цены опциона как *такой цены, при которой ни продавец, ни покупатель в среднем не получают прибыли*. Тогда ценой Американского опциона является математическое ожидание прибыли, полученной при исполнении опциона в оптимальный момент времени, а задача оценки оказывается частным случаем проблемы остановки выбора (подробнее о проблеме с этой точки зрения можно посмотреть в [2], там же сформулировано дифференциальное уравнение для цены Американского опциона).

Опцион определяется своим временем жизни  $[0; T]$ , базовым активом  $X$  (под  $X(t)$  будем подразумевать состояние актива в момент времени  $t$ , являющееся случайной величиной,  $S(t) = S(X(t))$  — цену базового актива в момент  $t$ ), на который выписан опцион (список возможных активов на территории Российской Федерации представлен в [3]), процессом  $U(t), t \in [0; T]$ , представляющим дисконтированное значение функции выплат (разницы между рыночной стоимостью базового актива и ценой страйк, оговорённой в контракте; значение функции выплат показывает выгоду, получаемую владельцем опциона при исполнении), и множеством  $\mathcal{T}$  моментов времени, в которых возможно исполнить опцион. Тогда задача состоит в нахождении

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} U(\tau) \quad (1.1)$$

(формальное обоснование того, почему это выражение может быть названо ценой опциона, есть в [4]).

Мы будем действовать в менее общей постановке задачи, в предположении, что вся необходимая информация о состоянии базового актива в момент времени  $t$  содержится в переменной  $X(t) \in \mathfrak{R}^d$  и  $X(t)$  является марковским процессом. Дисконтированное значение функции выплат обозначается  $h(X(t)) \geq 0 \quad \forall t \in [0; T]$ , и тогда формулировка задачи сводится к оцениванию

$$\sup_{\tau \in \mathcal{T}} \mathbb{E} h(X(\tau)).$$

В случае классического Американского опциона пут (право на продажу актива по фиксированной цене  $K$ )  $h(t) = e^{-rt} (K - S(t))^+$ , опциона колл (право на покупку актива по фиксированной цене  $K$ ) —  $h(t) = e^{-rt} (S(t) - K)^+$ , где  $e^{-rt}$  — дисконтирующий множитель для процентной ставки в непрерывном начислении процентов  $r$ , обеспечивающий измерение цен в одних и тех же единицах.

Для решения задачи об оценивании Европейского опциона применимы формулы Блэка-Шоулса (при достаточно сильных предположениях о поведении базового актива и влиянии его на цену производного финансового инструмента). В случае же Американского опциона граница исполнения (та цена базового актива  $\bar{S}(t)$ , при которой досрочное исполнение становится оптимальным) априори неизвестна, что делает решение уравнения невозможным (см. [5] и ссылки оттуда, [2]). Поэтому для построения оценок Американского опциона используются различные имитационные методы. Все они на стадии теоретического или практического воплощения предполагают, что опцион может быть исполнен лишь в некоторые моменты времени  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_{m-1} < t_m = T$  (такой опцион иногда называют Бермудским, имея в виду его расположенность между Европейской и Американской моделью исполнения; такого вида финансовые инструменты действительно существуют, например, дискретизация может быть обусловлена наличием информации о том, что исполнение опциона может быть оптимальным только в эти моменты времени). Здесь и далее будем обозначать  $X_i = X(t_i)$ ,  $S_i = S(X_i)$ .

Имея дискретизацию  $t_0, t_1, \dots, t_m$ , мы можем выразить цену опциона как решение  $V_0(X_0)$  следующей задачи динамического программирования:

$$\begin{aligned} V_m(x) &= h_m(x) \\ V_k(x) &= \max \{h_k(x), E(V_{k+1}(X_{k+1}) | X_k = x)\}, k \in 0 : m-1 \end{aligned} \quad (1.2)$$

Обзор методов, использующих дискретизацию пространства состояний и имитирующих поведение базового актива, представлен ниже.

**Биномиальные и триномиальные деревья** Использование биномиальных и триномиальных деревьев предполагает существенное ограничение множества состояний, в которых может оказаться базовый актив в течение  $[0; T]$ . Предполагается, что за каждый отрезок времени  $[t_{k-1}; t_k]$ ,  $k \in 1 : m$  цена базового актива  $S$  может измениться (в биномиальной модели) лишь двумя способами: превратиться в  $Su$  с вероятностью

$p_u$  и превратиться в  $Sd$  с вероятностью  $p_d = 1$ . В триномиальной модели добавляется вероятность того, что цена актива не изменится, а на значения скачков цены накладываются ограничения  $ud = 1$ . В обоих случаях предположение сразу сужает класс опционов до тех, у которых базовый актив состоит лишь из одного вида товаров. Результатом модели становится дерево состояний актива, представленное на рис. 1.1. В силу предположения о дискретности процесса изменения состояния актива  $E(V_{k+1}(X_{k+1})|X_k = x)$  может быть подсчитано точно, и, обходя построенное дерево в глубину, мы получаем значение стоимости опциона.

**Дискретизация пространства состояний** Развивая идею об ограничении множества состояний, мы можем ограничить множество состояний, в которых может оказаться базовый актив в данный момент времени, некоторым набором  $A_{i1}, \dots, A_{ib_i}$  (или, что аналогично, разбить множество состояний на подмножества  $A_{ij}$ ), для  $i = 0 \dots b_i = 1$  и  $A_0 = \{X_0\}$ . Тогда мы можем определить вероятности

Если нам известны эти вероятности и значение функции выплат для каждого из множеств состояний, то мы можем точно посчитать значение  $V_0(X_0)$  по формуле (1.2). В случае, когда эти вероятности неизвестны (а они вряд ли известны), стоит воспользоваться их выборочной оценкой, полученной методом Монте-Карло. Для получения таких оценок достаточно зафиксировать набор состояний  $\{A_{i1}, \dots, A_{ib_i}\}_{i=1}^m$  и промоделировать процесс.



лизовать достаточно много траекторий изменения состояния актива на промежутке  $[0; T]$ . Для определения значения функции выплат  $h_{ij}, i \in 1 : m, j \in 1 : b_i$  можно также воспользоваться многократным моделированием и определить  $h_{ij}$  как  $E(h_i(x)|x \in A_{ij})$ . Ключевым вопросом в этом методе остаётся выбор множества состояний.

**Параметрические приближения** Возвращаясь к формулировке (1.1), мы можем ограничить не пространство состояний, а пространство стратегий принятия решения об исполнении опциона. Идея может быть хорошо проиллюстрирована на одномерных активах (состоящих из одного вида товаров). На рис. 1.2 мы видим, как выглядит пример области исполнения — области, при попадании состояния базового актива в которую оптимальным решением будет исполнить опцион. Задача переформулируется в виде нахождения

$$\sup_{\theta \in \Theta} E h_{\tau(\theta)}(X_{\tau(\theta)}),$$

где  $\tau(\theta)$  — момент времени, параметризованный по  $\theta$ . Имея множество  $\Theta$ , мы можем найти оценку супремума, находя значение параметра, доставляющее максимум выборочному математическому ожиданию по смоделированным траекториям.

Основная проблема заключается здесь в том, что оптимальная в семействе стратегия не обязана быть оптимальной на множестве всех стратегий.

**Метод стохастической сетки** Метод стохастической сетки решает задачу динамического программирования (1.2) с помощью генерирования случайных траекторий состояния базового актива. Сетку, получающуюся при назначении всех вершин предыдущего поколения родительскими вершинами для всех вершин следующего поколения, можно увидеть на рис. 1.3.

Количество узлов в сетке ограничено  $mn$ , где  $m$  — число дат исполнения опциона,  $n$  — число промоделированных траекторий. Неоднозначным остаётся лишь выбор весов, присваиваемых дугам сетки.

Все вышеописанные методы подробно рассмотрены в [6].

Также существуют некоторые аналитические формы приближённых оценок стоимости Американского опциона (см. [7], глава 3, и последующие ссылки), но они накладывают более жёсткие ограничения на сущность базового актива.

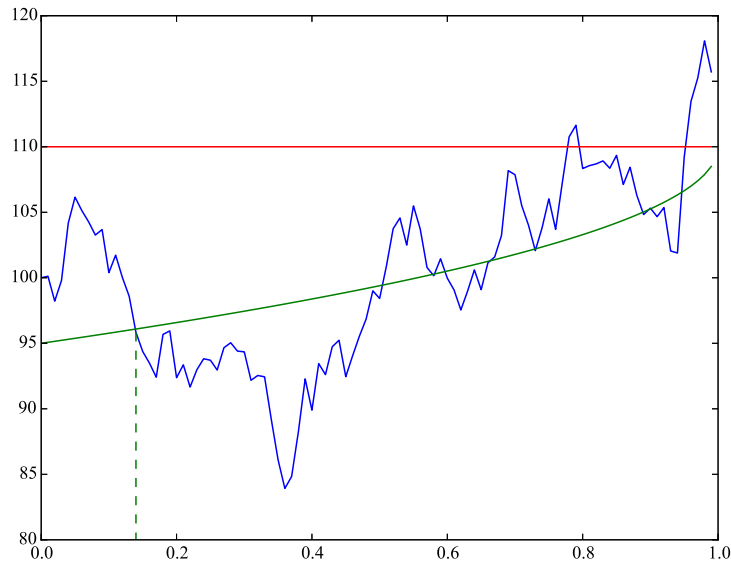


Рис. 1.2. Граница исполнения для Американского опциона пут с функцией выплат  $(K - S(t))^+$  (форма границы — примерная, точная форма неизвестна). Опцион исполняется, как только цена актива впервые достигает границы. Горизонтальная линия — цена страйк опционного контракта. Пунктирной линией отмечен момент оптимального исполнения опциона.

В следующей главе подробно рассматривается ещё один имитационный метод оценки: метод случайных деревьев, являющийся объектом исследования этой работы. Обладая некоторыми существенными недостатками, он, тем не менее, представляет интерес для исследования из-за потенциальной возможности обобщения на более широкий класс задач.

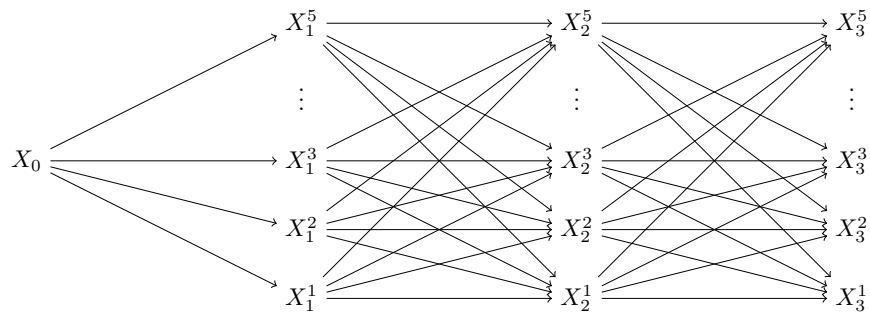


Рис. 1.3. Сетка состояний базового актива при использовании метода стохастической сетки

## Глава 2

## Метод случайных деревьев

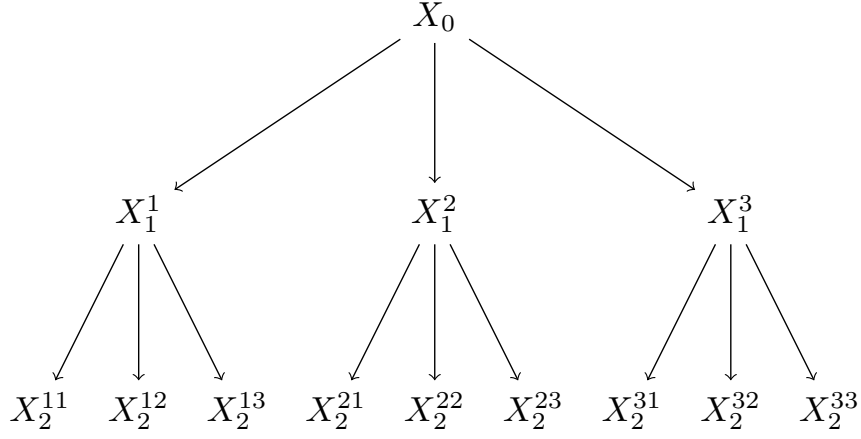
Метод случайных деревьев, предложенный в [1], ищет решение проблемы оптимального времени остановки и оценивает истинное значение цены Американского опциона (в отличие от метода параметрических приближений).

Известно, что точное значение цены А.о. может быть найдено с помощью методов динамического программирования, и оценки из [1] используют эти методы. Задача динамического программирования — это задача (1.2). В ней для численной реализации математическое ожидание заменяется на среднее арифметическое всех или части оценок на следующем шаге алгоритма (и именно эта замена является источником смещения получаемых оценок). Таким образом, мы видим, что рекуррентное выражение содержит оператор, который связывает значение в  $k$  момент времени с  $b$  значениями в последующий момент времени. Именно это приводит нас к визуализации задачи в виде дерева состояний, представленного на рис. 2.1.

С другой стороны, известно, что подобный же приём используется при решении нелинейных уравнений, в которых присутствует полиномиальная нелинейность

Вместо того, чтобы строить оценку, каким-либо образом стремящуюся к  $V_0(X_0)$ , мы построим две функции, являющиеся смещёнными вверх и вниз состоятельными оценками  $V$ , (в [1] приведено доказательство отсутствия несмещённой оценки для  $V_0(X_0)$ ). Пусть  $\hat{V}(b)$  и  $\hat{v}(b)$  — такие оценки, зависящие от некоторого параметра  $b$ , сходящиеся к  $V$  при  $b \rightarrow \infty$ .

Метод случайного дерева основан на моделировании случайной цепи  $X_0, X_1, \dots, X_m$ . Зафиксируем параметр ветвления  $b$ . Из исходного состояния  $X_0$  смоделируем  $b$  независимых следующих состояний  $X_1^1, X_1^2, \dots, X_1^b$ , все с условием  $X_1$ . Для каждого  $X_1^i$  снова смоделируем  $b$  независимых последующих состояний  $X_2^{i1}, \dots, X_2^{ib}$ . На  $m$ -ом шаге будем иметь  $b^m$  состояний, и это и есть источник основного недостатка этого метода — его экспоненциальной алгоритмической сложности. Пример получающегося дерева состояний приведён на 2.1.

Рис. 2.1. Дерево состояний для  $b = 3, m = 2$ 

## 2.1. Оценка сверху

Используя (1.2), зададим оценку в терминальных вершинах дерева равной известному значению функции выплат

$$\hat{V}_m^{j_1 \dots j_m} = h_m(X_m^{j_1 \dots j_m}), \quad (2.1)$$

в нетерминальных вершинах будем пользоваться результатами вычислений на предыдущем шаге

$$\hat{V}_i^{j_1 \dots j_i} = \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i j} \right\}. \quad (2.2)$$

Другими словами, оценка сверху — это просто результат обхода дерева в глубину с присвоением каждой ветви дерева одинакового веса.

Смещённость оценки вверх и её состоятельность доказывается с помощью индукции:

**Теорема 1.**  $\forall i \in 1 : n$

$$\mathbb{E} \left[ \hat{V}_i^{j_1 \dots j_i} | X_i^{j_1 \dots j_i} \right] \geq V_i(X_i^{j_1 \dots j_i})$$

*Доказательство.* В листьях дерева неравенство выполняется как равенство по определению.

Докажем, что если утверждение теоремы выполняется на  $i+1$  шаге, то оно выполняется и на  $i$ . По определению

$$\mathbb{E} \left[ \hat{V}_i^{j_1 \dots j_i} | X_i^{j_1 \dots j_i} \right] = \mathbb{E} \left[ \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i j} \right\} | X_i^{j_1 \dots j_i} \right],$$

с помощью неравенства Йенсена ( $\varphi(\mathbb{E}[X]) \leq \mathbb{E}[\varphi(X)]$ ) это можно оценить как

$$\mathbb{E} \left[ \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i j} \right\} | X_i^{j_1 \dots j_i} \right] \geq \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \mathbb{E} \left[ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i j} | X_i^{j_1 \dots j_i} \right] \right\},$$

в силу того, что  $\forall j \in 1 : b$   $X_{i+1}^{j_1 \dots j_i j}$  - независимые одинаково распределённые случайные величины (и их математическое ожидание одинаково),  $\mathbb{E} \left[ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i j} \right] = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \mathbb{E} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i j} = \mathbb{E} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i 1}$ , а в силу индукционного предположения

$$\begin{aligned} \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \mathbb{E} \left[ \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i 1} | X_i^{j_1 \dots j_i} \right] \right\} &\geq \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \mathbb{E} [V_{i+1}(X_i^{j_1 \dots j_i 1}) | X_i^{j_1 \dots j_i}] \right\} \\ &\geq V_i(X_i^{j_1 \dots j_i}). \end{aligned}$$

Таким образом,  $\mathbb{E} \left[ \hat{V}_i^{j_1 \dots j_i} | X_i^{j_1 \dots j_i} \right] \geq \max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), V_i(X_i^{j_1 \dots j_i}) \right\}$  □

**Теорема 2.** Оценка  $\hat{V}$  асимптотически состоятельна, то есть

$$\hat{V}_i^{j_1 \dots j_i} \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{P} V_i(X_i^{j_1 \dots j_i})$$

*Доказательство.* В листьях дерева это очевидно ( $\hat{V}_m^{j_1 \dots j_m} = h_m(X_m^{j_1 \dots j_m}) = V_m(X_m^{j_1 \dots j_m})$  по определению). Предположим, что  $\hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i} \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{P} V_{i+1}(X_i^{j_1 \dots j_i})$ .

Обозначив  $\hat{V}_k = \hat{V}_k^{j_1 \dots j_k}$ ,  $\hat{V}_{k+1}^i = \hat{V}_k^{j_1 \dots j_k i}$  для некоторой случайной последовательности  $j_1 \dots j_k$ ,  $\|\xi\|_{X_k} = (\mathbb{E}(\xi^p | X_k))^{1/p}$ , получим на  $k$ -м шаге

$$\begin{aligned} \left\| \hat{V}_k(b) - V(X_k) \right\|_{X_k} &= \\ &= \left\| \max \left\{ h_k(X_k), \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \hat{V}_{k+1}^i(b) \right\} - \max \left\{ h_k(X_k), \mathbb{E}(V(X_{k+1}) | X_k) \right\} \right\|_{X_k} \leq \\ &\leq \left\| \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \hat{V}_{k+1}^i(b) - \mathbb{E}(V(X_{k+1}) | X_k) \right\|_{X_k} \leq \\ &\leq \left\| \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b \left( \hat{V}_{k+1}^i(b) - V_{k+1}(X_{k+1}^i) \right) \right\|_{X_k} + \\ &\quad + \left\| \frac{1}{b} \sum_{i=1}^b V_{k+1}(X_{k+1}^i) - \mathbb{E}(V(X_{k+1}) | X_k) \right\|_{X_k}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое является разностью суммы реализаций независимых (при данном  $X_k$ ) случайных величин и математического ожидаемого слагаемых этой суммы и сходится по закону больших чисел. Для первого же применяется индукционное предположение, в итоге

$$\left\| \hat{V}_k(b) - V(X_k) \right\|_{X_k} \xrightarrow[b \rightarrow \infty]{} 0.$$

Сходимость по норме даёт нам сходимость по вероятности, тем самым доказывая, что оценка  $\hat{V}$  состоятельна. Более подробное доказательство можно найти в [1].  $\square$

## 2.2. Оценка снизу

Значения оценки сверху в каждый момент времени — это выбор максимума из стоимости опциона при его немедленном исполнении и математического ожидания стоимости удержания опциона. Но стоимость удержания опциона рассчитывается, исходя из дочерних узлов дерева состояний актива, то есть оценка сверху рассчитывается, опираясь на информацию о будущем. Чтобы убрать ошибку, связанную с этим, необходимо отделить механизм принятия решения о исполнении или удержании опциона от значений, полученных после принятия решения об удержании опциона.

В более общей (и более короткой) постановке — необходимо оценить  $\max\{a, \mathbf{E}Y\}$  с помощью  $b$  независимых одинаково распределённых реализаций случайной величины  $Y$  для некоторой константы  $a$  и случайной величины  $Y$ . Оценка  $\max\{a, \bar{Y}\}$  (где  $\bar{Y}$  — среднее значение выборки) является оценкой сверху, так как  $\mathbf{E} \max\{a, \bar{Y}\} \geq \max\{a, \mathbf{E}\bar{Y}\} = \max\{a, \mathbf{E}Y\}$ , что и было использовано в построении оценки сверху.

Разделим множество реализаций  $\{Y_i\}_{i=1}^b$  случайной величины  $Y$  на два независимых подмножества и вычислим их средние значения  $\bar{Y}_1$  и  $\bar{Y}_2$ . Если положить

$$\hat{v} = \begin{cases} a, & \text{если } \bar{Y}_1 \leq a, \\ \bar{Y}_2, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2.3)$$

мы отделим процесс принятия решения о исполнении или удержании опциона от оценки стоимости (за решение будет отвечать  $\bar{Y}_1$ , за оценку —  $\bar{Y}_2$ ). При этом оценка  $\hat{v}$  является оценкой снизу:

$$\mathbf{E}\hat{v} = \mathbf{P}(\bar{Y}_1 \leq a) a + (1 - \mathbf{P}(\bar{Y}_1 \leq a)) \mathbf{E}Y \leq \max\{a, \mathbf{E}Y\}$$

В оригинальной работе [1] была использована немного другая оценка. Пусть «отвечающим за принятие решения» подмножеством будут все реализации, кроме одной, а «оценивающее» множество будет состоять из одной оставшейся реализации. Возьмём математическое ожидание этой величины, т.е. положим в листьях дерева значение оценки

$$\hat{v}_m^{j_1 j_2 \dots j_m} = h(X_m^{j_1 j_2 \dots j_m}), \quad (2.4)$$

а для промежуточных узлов определим

$$\hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i} = \begin{cases} h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), & \text{если } \frac{1}{b-1} \sum_{j=1, j \neq k}^b \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i j} \leq h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}) \\ \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i k}, & \text{иначе} \end{cases} \quad (2.5)$$

и оценку положим равной

$$\hat{v}_i^{j_1 j_2 \dots j_i} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i}. \quad (2.6)$$

Доказательства смещённости и состоятельности нижней оценки аналогичны вышеприведённым для оценки сверху и также могут быть найдены в [1].

Таким образом, мы имеем дерево с  $\sum_{k=1}^m b^k = \frac{b(b^m-1)}{b-1} = O(b^m)$  вершинами. Несмотря на то, что потребление памяти в процессе работы алгоритма можно держать в рамках  $O(bm)$  (структура алгоритма подразумевает обход дерева в глубину с сохранением только присущих обходимой траектории значений), анализа требуют все  $O(b^m)$  вершин, что означает экспоненциальный рост временной сложности алгоритма. Следовательно, об устремлении  $m \rightarrow \infty$  в изначальной форме алгоритма речь идти не может.

## Глава 3

## Схема Неймана-Улама и её обобщение на нелинейные уравнения

Деревья конструкции, аналогичной описанной в главе 2, используются в известном обобщении схемы Неймана-Улама, что приводит к идее применения оценок, разработанных для линейных интегральных уравнений, к задаче нахождения цены Американского опциона. Ниже будут изложены общие сведения о схеме Неймана-Улама и проведены более детальные аналогии с оценками (1.2).

### 3.1. Общие сведения о схеме Неймана-Улама применительно к ветвящемуся марковскому процессу

Пусть имеется уравнение

$$\varphi(x) = \int K(x, y, \varphi(y)) \varphi(y) \mu(dy) + f(x) \quad \text{mod } \mu, \quad (3.1)$$

для которого сходится метод последовательных приближений

$$\varphi_n(x) = \int K(x, y, \varphi_{n-1}(y)) \varphi_{n-1}(y) \mu(dy) + f(x) \quad \text{mod } \mu, \quad (3.2)$$

для некоторого начального приближения  $\varphi_0(x)$  при  $n \rightarrow \infty$ . Тогда при наличии предположений о сходимости ряда Неймана  $\sum_{i=0}^{\infty} \int K^i f d\mu$  в той же метрике, в которой сходится метод последовательных приближений, об устойчивости ядра  $K$  интегрального оператора к возмущениям, и, возможно, некоторых других, можно получать приближённые решения  $\varphi_n$  методом Монте-Карло.

Процесс отыскания численного решения усложняется тем, что неизвестным в интегральном уравнении является функция, а не число, что означает дополнительные вопросы о способе хранения информации о решении уравнения. Представленный ниже способ, как будет видно, избавляет от необходимости хранить таблицу значений искомой функции.



Будем рассматривать только «одночленные» уравнения вида

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= \int K(x, y_1, \dots, y_b) \prod_{i=1}^b \varphi(y_i) \mu^b(dy_1, \dots, dy_b) + f(x) \iff \\ \iff \varphi &= \mathcal{K}\varphi^{(b)} + f \end{aligned} \quad (3.3)$$

и предполагать, что метод последовательных приближений

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_n = \mathcal{K}\varphi_{n-1}^{(b)} + f \quad (3.4)$$

сходится в метрике некоторого банахова пространства  $F$  к решению уравнения (3.3).

Рассмотрим пример для  $b = 2, n = 2$ .

$$\begin{aligned} \varphi_1(x_0) &= f(x_0) + \int K(x_0, x_1, x_2) f(x_1) f(x_2) \mu^2(dx_1, dx_2) \\ \varphi_2(x_0) &= f(x_0) + \int K(x_0, x_1, x_2) \times \\ &\quad \times \left[ f(x_1) + \int K(x_1, x_3, x_4) f(x_3) f(x_4) \mu^2(dx_3, dx_4) \right] \times \\ &\quad \times \left[ f(x_2) + \int K(x_2, x_5, x_6) f(x_5) f(x_6) \mu^2(dx_5, dx_6) \right] \times \mu^2(dx_1, dx_2) = \\ &= f_0 + \int K_{0,1,2} f_1 f_2 \mu_{1,2} + \int K_{0,1,2} \left( f_1 \int K_{2,5,6} f_5 f_6 \mu_{5,6} \right) \mu_{1,2} + \\ &\quad + \int K_{0,1,2} \left( f_2 \int K_{1,3,4} f_3 f_4 \mu_{3,4} \right) \mu_{1,2} + \\ &\quad + \int \int \int K_{0,1,2} K_{1,3,4} K_{2,5,6} f_3 f_4 f_5 f_6 \mu_{1,2} \mu_{3,4} \mu_{5,6} \end{aligned}$$

Если посмотреть на дерево вида 2.1, можно заметить, что переменные в слагаемых вышеприведённого уравнения в точности соответствуют поддеревьям полного дерева, у которого из каждой вершины выходит  $b = 2$  дочерних, а расстояние от корня до листьев равно  $n = 2$ .

Обозначив последовательности  $j_1 \dots j_k$  мультииндексами  $\nu[0] = (1)$ ,  $\nu[k+1] = (\nu[k], j_{k+1})$ , можно выразить уравнение метода последовательных приближений (3.4) как

$$\begin{aligned} \varphi_{N-k}(x[\nu(k)]) &= \int K(x[\nu(k)], x[\nu(k), 1], \dots, x[\nu(k), b]) \times \\ &\quad \times \prod_{j_{k+1}=1}^b \varphi_{N-k-1}(x[\nu(k+1)]) \mu^b(dx[\nu(k), 1], \dots, dx[\nu(k), b]) + \\ &\quad + f(x[\nu(k)]), \end{aligned}$$

а введя сокращённые обозначения

$$\begin{aligned} z[\nu(k)] &= \varphi_{N-k}(x[\nu(k)]), \\ a_{\nu(k)}\varphi &= \int K(x[\nu(k)], x[\nu(k), 1], \dots, x[\nu(k), b]) \varphi d\mu, \\ f[\nu(k)] &= f(x[\nu(k)]), \end{aligned}$$

переписать в виде

$$z[\nu(k)] = a_{\nu(k)} \prod_{j_{k+1}=1}^b z[\nu(k+1)] + f[\nu(k)].$$

Каждый мультииндекс  $\nu(k)$  является описанием некоторой траектории, а в силу конструкции индексов эти траектории сливаются в дерево. Для дальнейшей работы дадим более формальное описание деревьев.

Пусть  $\gamma_k = (\mathfrak{B}_0, \dots, \mathfrak{B}_k)$  — совокупность множеств  $\mathfrak{B}_r, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  мультииндексов  $\nu(r)$ , удовлетворяющих следующему условию:

1.  $\forall r > 1, \nu(r) \in \mathfrak{B}_r$  соответствующее  $\nu(r-1) \in \mathfrak{B}'_{r-1} \subset \mathfrak{B}_{r-1}$ .
2.  $\forall r > 0 \nu(r) = (\nu(r-1), j_r)$ , и  $j_r$  принимает всевозможные значения из  $1 : b$ .
3.  $\mathfrak{B}_0 = \{(1)\}$ .

Такую совокупность  $\gamma_k$  назовём деревом. Дерево, для которого все  $\mathfrak{B}'_{r-1} = \mathfrak{B}_{r-1}$ , называется полным. Множество  $\mathfrak{B}'_r$  здесь по сути является множеством, траектории из которого «продолжат существование» на следующем шаге. Так, дерево с рис. 2.1 имеет  $\mathfrak{B}'_1 = \cup_{b=1}^3 \{(1, b, 1), (1, b, 2), (1, b, 3)\}$  и  $\mathfrak{B}'_2 = \emptyset$ . Для любого дерева  $\gamma$  определён оператор

$$\begin{aligned} A(\gamma) &= f[\nu(0)] \text{ при } N = 0 \\ A(\gamma) &= a_{\nu(0)} \prod_{\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}'_1} f[\nu(1)] \prod_{\mathfrak{B}'_1} a_{\nu(1)} \prod_{\mathfrak{B}_2 \setminus \mathfrak{B}'_2} f[\nu(1)] \prod_{\mathfrak{B}'_2} a_{\nu(2)} \times \\ &\quad \times \dots \times \prod_{\mathfrak{B}_N} f[\nu(N)] \text{ при } N > 0 \end{aligned} \tag{3.5}$$

В [8] доказано, что

$$z[\nu(0)] = \sum_{\gamma \in \Gamma_N} A(\gamma), \tag{3.6}$$

где суммирование проходит по всем поддеревьям полного дерева с  $N$  поколениями  $\Gamma_N$ .

В результате реализации однородного ветвящегося марковского процесса с начальной плотностью  $\pi(x) \geq 0$ , переходной плотностью  $p(x, y_1, \dots, y_b) \geq 0$  и вероятностью поглощения  $g(x) : \int p(x, y_1, \dots, y_b) \mu^s(dy_1, \dots, dy_b) = 1 - g(x)$  образуется дерево описанного выше типа, число поколений которого  $N$  не обязательно конечно. В случае, если конкретная реализация  $\gamma$  имеет длину  $N \in (0; \infty)$ , то ей соответствует плотность вероятности

$$\begin{aligned} p(\gamma) = & \pi(x[1]) p(x[1], x[1, 1], \dots, x[1, b]) \times \prod_{\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}'_1} g[\nu(1)] \times \\ & \times \prod_{\mathfrak{B}'_1} p(x[\nu(k)], x[\nu(k), 1], \dots, x[\nu(k), b]) \times \\ & \times \prod_{\mathfrak{B}_2 \setminus \mathfrak{B}'_2} g[\nu(2)] \times \dots \times \prod_{\mathfrak{B}_N} f[\nu(N)]. \end{aligned}$$

Для марковского процесса *выполняются условия согласования*, если

$$1. \forall (x, y_1, \dots, y_b)$$

$$\begin{aligned} K(x, y_1, \dots, y_b) &\not\equiv 0 \pmod{\mu^{b+1}} \implies \\ \implies p(x, y_1, \dots, y_b) &> 0 \pmod{\mu^{b+1}} \end{aligned}$$

$$2. \forall x$$

$$\begin{aligned} h(x) &\not\equiv 0 \pmod{\mu} \implies \pi(x) > 0 \pmod{\mu} \\ f(x) &\not\equiv 0 \pmod{\mu} \implies g(x) > 0 \pmod{\mu} \end{aligned}$$

Сокращая обозначения  $h_0 = h(x[1])$ ,  $\pi_0 = \pi(x[1])$ ,  $f[\nu(k)] = f(x[\nu(k)])$ ,  $g[\nu(k)] = g(x[\nu(k)])$ ,

$$\begin{aligned} K_{\nu[k]} &= K(x[\nu(k)], x[\nu(k), 1], \dots, x[\nu(k), b]), \\ p_{\nu[k]} &= p(x[\nu(k)], x[\nu(k), 1], \dots, x[\nu(k), b]), \end{aligned}$$

для интегрального уравнения (3.3) и марковской цепи, для которой выполняются условия согласования с этим уравнением, можно определить оценку

$$\hat{J}_\gamma = \frac{h_0}{p_0} \frac{K_{\nu(0)}}{p_{\nu(0)}} \prod_{\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}'_1} \frac{f[\nu(1)]}{g[\nu(1)]} \prod_{\mathfrak{B}'_1} \frac{K_{\nu(1)}}{p_{\nu(1)}} \prod_{\mathfrak{B}_2 \setminus \mathfrak{B}'_2} \frac{f[\nu(2)]}{g[\nu(2)]} \prod_{\mathfrak{B}'_2} \frac{K_{\nu(2)}}{p_{\nu(2)}} \times \dots \times \prod_{\mathfrak{B}_N} \frac{f[\nu(N)]}{g[\nu(N)]}. \quad (3.7)$$

Эта оценка является несмещённой оценкой функционала  $(\varphi, h)$  (см. [8]).

### 3.2. Приложение к задаче оценивания Американского опциона

Для проведения аналогии между оценками интегральных уравнений и стоимости опциона рассмотрим небольшой пример.

Пусть имеется опцион с  $m = 3$  датами исполнения:  $t_0, t_1, t_2$ . Обозначим операцию взятия максимума  $\max\{a, b\} = a \oplus b$ , и в нижеприведённом примере положим приоритет операции взятия максимума выше приоритета операции сложения. Тогда верхняя оценка его стоимости по случайному дереву с  $b = 3$  ветвями будет выглядеть как

$$\begin{aligned}
 \hat{V}_0(X_0) &= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 V_1(X_1^j) = \\
 &= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3} \left( h_1(X_1^1) \oplus \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 V_2(X_2^{1j}) + \right. \\
 &\quad \left. + h_1(X_1^2) \oplus \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 V_2(X_2^{2j}) + \right. \\
 &\quad \left. + h_1(X_1^3) \oplus \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 V_2(X_2^{3j}) \right) = \\
 &= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3} \left( h_1(X_1^1) \oplus \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{1j}) + \right. \\
 &\quad \left. + h_1(X_1^2) \oplus \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{2j}) + \right. \\
 &\quad \left. + h_1(X_1^3) \oplus \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{3j}) \right) =
 \end{aligned}$$

используя тот факт, что  $\forall a, b, c, d \ a \oplus b + c \oplus d = (a + c) \oplus (a + d) \oplus (b + c) \oplus (b + d)$

$$\begin{aligned}
 &= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3} (h_1(X_1^1) + h_1(X_1^2) + h_1(X_1^3)) \oplus \\
 &\quad \oplus \frac{1}{3} \left( h_1(X_1^1) + h_1(X_1^2) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{3j}) \right) \oplus \\
 &\quad \oplus \frac{1}{3} \left( h_1(X_1^1) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{2j}) + h_1(X_1^3) \right) \oplus \\
 &\quad \oplus \frac{1}{3} \left( h_1(X_1^1) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{2j}) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{3j}) \right) \oplus \\
 &\quad \oplus \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{1j}) + h_1(X_1^2) + h_1(X_1^3) \right) \oplus
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \oplus \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{1j}) + h_1(X_1^2) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{3j}) \right) \oplus \\
& \oplus \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{1j}) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{2j}) + h_1(X_1^3) \right) \oplus \\
& \oplus \frac{1}{3} \left( \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{1j}) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{2j}) + \frac{1}{3} \sum_{j=1}^3 h_2(X_2^{3j}) \right)
\end{aligned}$$

Пример даёт представление о виде оператора, аналогичного  $A(\gamma)$ . Он будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned}
A'(\gamma) = \sum_{\mathfrak{B}_0 \setminus \mathfrak{B}'_0} h_0(X_0) + \frac{1}{b} \sum_{\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}'_1} h_1(X_1^{\nu(1)}) + \frac{1}{b^2} \sum_{\mathfrak{B}_2 \setminus \mathfrak{B}'_2} h_2(X_2^{\nu(2)}) + \\
+ \dots + \frac{1}{b^m} \sum_{\mathfrak{B}_m} h_m(X_m^{\nu(m)})
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Тогда  $\hat{V}_0(X_0)$  выражается как  $\max_{\gamma \in \Gamma_m} A'(\gamma)$ .

Продолжение аналогии предполагает построение случайной величины  $J'_\gamma$ , математическое ожидание которой было бы равно  $(\hat{V}_0, f) = \int V_0(x)f(x)d\mu$  для любого наперёд заданного  $f$ . Но так как оцениваемым значением в данной работе является  $V_0(X_0)$  (и, следовательно,  $\hat{V}_0(X_0)$ ), такая случайная величина не представляет собой интереса.

### 3.2.1. Описание метода

Для дерева состояний базового актива обрыв траектории в  $t_i < t_m$  означает, что опцион исполнен в момент  $t_i$ . Априори вероятность этого события неизвестна, поэтому определить  $g(x)$  иначе, как равное 0, если  $t < t_m$ , и 1, если  $t = t_m$ , не представляется возможным. По этой же причине оценка стоимости опциона в вершине  $X_i^{j_1 \dots j_i}$  как  $h_i(X_i^{j_1 \dots j_i})$  является несостоятельной. Тем не менее, обход всех вершин (так как при текущем определении  $g$  дерево состояний всегда получается полным длины  $m$ ) означает ту же вычислительную сложность, что и в исходных оценках.

Рассматривая то же множество поддеревьев  $\gamma$  полного дерева  $\Gamma_m$  (поддеревья, каждая вершина которых имеет либо 0, либо  $b$  дочерних), что и в разделе 3.1, построим пару асимптотически состоятельных оценок.

Согласно описанию ветвящегося процесса, множество вершин, имеющих общую родительскую вершину, можно разделить на два класса: «поглощённые», то есть не имеющие дочерних вершин, и «выжившие», которые имеют дочерние вершины в количестве  $b$  штук. Будем использовать для пути, приведшего в вершину  $X_{k-1}^{j_1 \dots j_{k-1}}$  также обозначение  $\nu(k-1)$ , а множество вершин с общей родительской  $X_{k-1}^{j_1 \dots j_{k-1}}$  обозначим как  $\mathfrak{B}_{\nu(k)} = \left\{ X_k^{\nu(k-1), j} \right\}_{j=1}^b$ , подмножество выживших —  $\mathfrak{B}'_{\nu(k)} \subset \mathfrak{B}_{\nu(k)}$ . Для вершин, погибших на  $k$ -ом шаге, примем оценки стоимости удержания опциона равными оценкам стоимости удержания опциона, вычисленными для ближайшей в каком-либо смысле (например, в смысле евклидова расстояния на множестве состояний базового актива, если это  $\mathbb{R}^d$ ) вершины из множества выживших, то есть

$$\forall X \in \mathfrak{B}_{\nu(k)} \setminus \mathfrak{B}'_{\nu(k)} \quad \hat{V}_k(X) = \arg \min_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{V}_k(Y).$$

Получившаяся пара оценок:

$$\begin{cases} \hat{V}'_m(X_m^{j_1 \dots j_m}) = h_m(X_m^{j_1 \dots j_m}) \\ \hat{V}'_k(X_k^{j_1 \dots j_k}) = \begin{cases} h_m(X_m^{j_1 \dots j_m}) \oplus \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}'_{k+1}(X_{k+1}^{j_1 \dots j_k j}), & X_k^{j_1 \dots j_k} \in \mathfrak{B}'_k \\ \arg \min_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{V}_k(X), & X_k^{j_1 \dots j_k} \in \mathfrak{B}_k \setminus \mathfrak{B}'_k \end{cases} \end{cases} \quad (3.9)$$

$$\begin{cases} \hat{v}'_m(X_m^{j_1 \dots j_m}) = h_m(X_m^{j_1 \dots j_m}) \\ \hat{v}'_{ik}(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}) = \begin{cases} h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}), & \text{если } \frac{1}{b-1} \sum_{j=1, j \neq k}^b \hat{v}'_{i+1}(X_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i j}) \leq h(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}) \\ \hat{v}'_{i+1}(X_{i+1}^{j_1 j_2 \dots j_i k}), & \text{иначе} \end{cases} \\ \hat{v}'_k(X_k^{j_1 \dots j_k}) = \begin{cases} \hat{v}'_i(X_i^{j_1 j_2 \dots j_i}) = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^b \hat{v}'_{ik}(X_{ik}^{j_1 j_2 \dots j_i}), & X_k^{j_1 \dots j_k} \in \mathfrak{B}'_k \\ \arg \min_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{v}'_k(X), & X_k^{j_1 \dots j_k} \in \mathfrak{B}_k \setminus \mathfrak{B}'_k \end{cases} \end{cases} \quad (3.10)$$

Докажем, что оценки являются состоятельными. Принцип доказательства одинаковый, поэтому ограничимся оценкой сверху. В доказательстве используются те же сокращённые обозначения, что и в доказательстве теоремы 2.

**Теорема 3.**

$$\left\| \hat{V}'_k - V(X_k) \right\|_{X_k} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0$$

*Доказательство.* В листьях дерева утверждение очевидно. Предположим, что для  $k+1$

$$\left\| \hat{V}'_{k+1} - V(X_{k+1}) \right\|_{X_k} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0.$$

Для вершин из  $\mathfrak{B}'_k$  оценка  $\hat{V}'_k = h_m(X_m^{j_1 \dots j_m}) \oplus \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}'_{k+1}(X_{k+1}^{j_1 \dots j_k j})$ , то есть верхняя оценка стоимости опциона при условии неисполнения его на всех шагах до  $k$  включительно равна  $\frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}'_{k+1}(X_{k+1}^{j_1 \dots j_k j}) = \frac{1}{b} \left( \sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{V}'_{k+1}(X_{k+1}^{\nu(k+1)}) + \sum_{\mathfrak{B}_{\nu(k)} \setminus \mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \arg \min_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{V}'_k(X) \right)$ . Следовательно, её можно выразить как взвешенную сумму оценок на узлах из множества  $\mathfrak{B}'_{\nu(k)}$ :  $\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)} \hat{V}'_{k+1}(X_{k+1}^{\nu(k+1)})$ , где  $w_{\nu(k+1)}$  — частота использования оценки  $X_{k+1}^{\nu(k+1)}$ ,  $\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)} = 1$ .

Тогда имеется следующая оценка:

$$\begin{aligned} \left\| \hat{V}'_k - V(X_k) \right\|_{X_k} &\leq \left\| \sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)} \left( \hat{V}'_{k+1}(X_{k+1}^{\nu(k+1)}) - V_{k+1}(X_{k+1}^{\nu(k+1)}) \right) \right\|_{X_k} + \\ &+ \left\| \sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)} V_{k+1}(X_{k+1}^{\nu(k+1)}) - \mathbb{E}(V(X_{k+1}) | X_{\nu(k)}) \right\|_{X_k}. \end{aligned}$$

Второе слагаемое — разность взвешенной суммы независимых одинаково распределённых случайных величин и их математического ожидания, стремится к 0 при увеличении числа слагаемых в сумме  $b \rightarrow \infty$ . По определению оценки  $\hat{V}'$  первое слагаемое  $\left\| \sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)} \left( \hat{V}'_{k+1}(X_{k+1}^{\nu(k+1)}) - V_{k+1}(X_{k+1}^{\nu(k+1)}) \right) \right\|_{X_k} \leq \left\| \hat{V}'_{k+1} - V(X_{k+1}) \right\|_{X_k} \xrightarrow{b \rightarrow \infty} 0$  по индукционному предположению.  $\square$

Из вышеизложенных рассуждений получается алгоритм, приведённый на листинге 1.

Неочевидными остаются алгоритм выбора состояний, из которых дерево будет продолжать расти, и алгоритм назначения оценок.

### 3.2.2. Численные результаты

Алгоритм был реализован. На рис.3.2 можно увидеть полученные оценки. Вершины, из которых будут строиться дочерние из состояния  $X_i^{j_1 \dots j_i}$ , выбирались равновероятно из множества  $\{X_{i+1}^{j_1 \dots j_i j}\}_{j=1}^b$  всех смоделированных вершин, математическое ожидание числа вершин на шаге  $i$  было равно  $\max\{b \min\{i+1/m, 1\}, 1\}$ .

Также был реализован алгоритм Броди-Глассермана, результаты его работы можно увидеть на рис.3.1.

Представление о порядке улучшения, обеспечиваемом обходом случайных поддеревьев, можно получить, изучив графики 3.3 и ... . На первом из них представлено среднее

```

def calculate( $X_i^{j_1 \dots j_i}, b, K$ ):
    input : текущее состояние  $X_i^{j_1 \dots j_i}$  (включает в себя время  $t_i$ ), число
            веток  $b$ , цена страйк  $K$ 
    output: оценка стоимости опциона  $\hat{V}_i^{j_1 \dots j_i}$  при условии, что он не был
            исполнен до этого момента

    if  $t_i = t_m$  then
        | return  $h_m(X_m^{j_1 \dots j_m})$ ;
    end

    промоделировать состояния  $\{X_{i+1}^{j_1 \dots j_i j}\}_{j=1}^b$ ;
    выбрать случайным образом состояния  $\{X_{i+1}^l\}_{l=1}^k \subset \{X_{i+1}^{j_1 \dots j_i j}\}_{j=1}^b$ , из
    которых будут генерироваться дочерние вершины;
    for  $x \in \{X_{i+1}^l\}_{l=1}^k$  do
        |  $\hat{V}_{i+1}^l = \text{calculate}(x, b, K)$ ;
    end

    for  $x \in \{X_{i+1}^{j_1 \dots j_i j}\}_{j=1}^b \setminus \{X_{i+1}^l\}_{l=1}^k$  do
        |  $\hat{V}_{i+1}^l =$  случайно выбранная из уже полученных оценок;
    end

    return  $\max \left\{ h_i(X_i^{j_1 \dots j_i}), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^b \hat{V}_{i+1}^j \right\}$ ;

```

**Алгоритм 1:** оценка стоимости Американского опциона по случайно выбранным поддеревьям



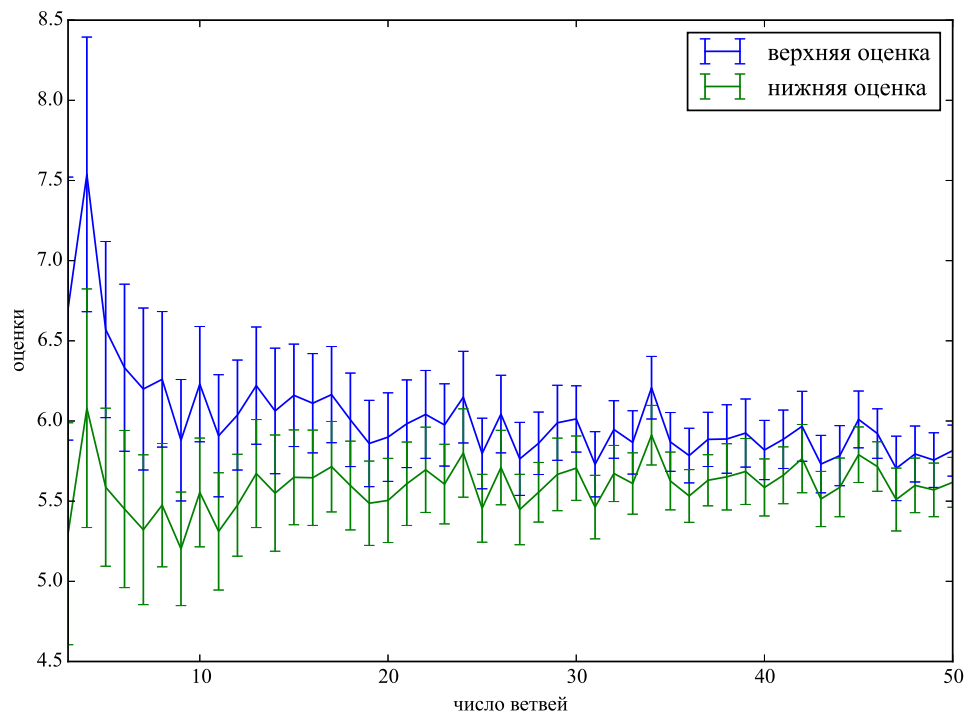


Рис. 3.1. Верхняя и нижняя оценки стоимости опциона по алгоритму Бродаи-Глассермана. Оценки стоимости опциона с начальной ценой 100 и ценой страйк 100, выписанного на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой  $r = 0.05$ , дивидендной ставкой  $\delta = 0.1$  и волатильностью  $\sigma = 0.2$ , цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами  $\mu = r - \delta$  и  $\sigma$ , исполняемого 4 раза в году.

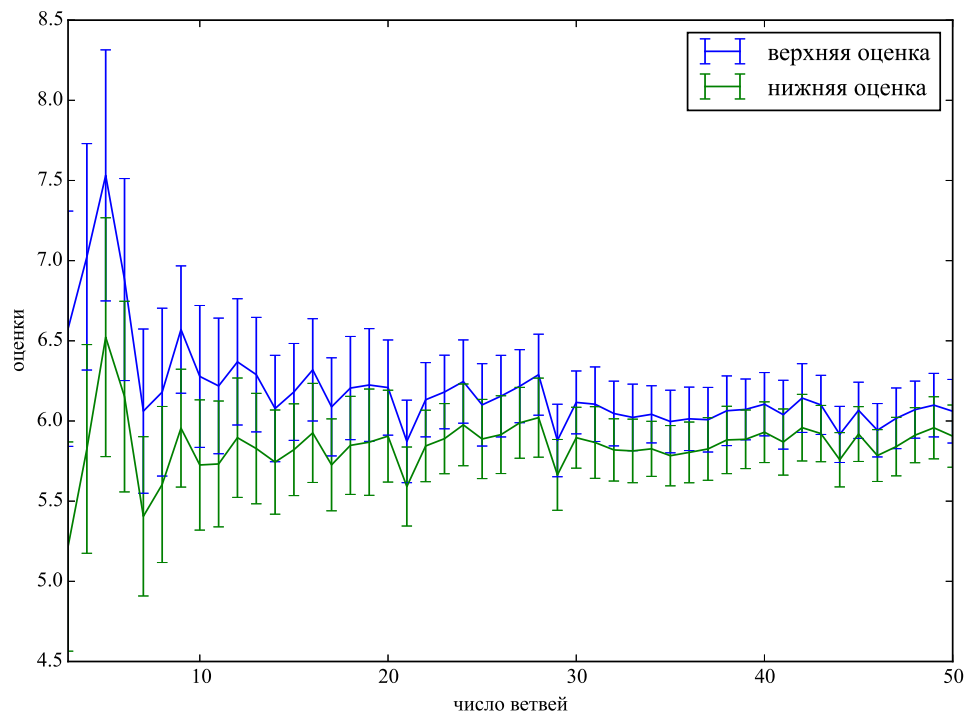


Рис. 3.2. Верхняя и нижняя оценки стоимости опциона по случайным поддеревьям. Оценки стоимости опциона с начальной ценой 100 и ценой страйк 100, выписанного на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой  $r = 0.05$ , дивидендной ставкой  $\delta = 0.1$  и волатильностью  $\sigma = 0.2$ , цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами  $\mu = r - \delta$  и  $\sigma$ , исполняемого 4 раза в году.

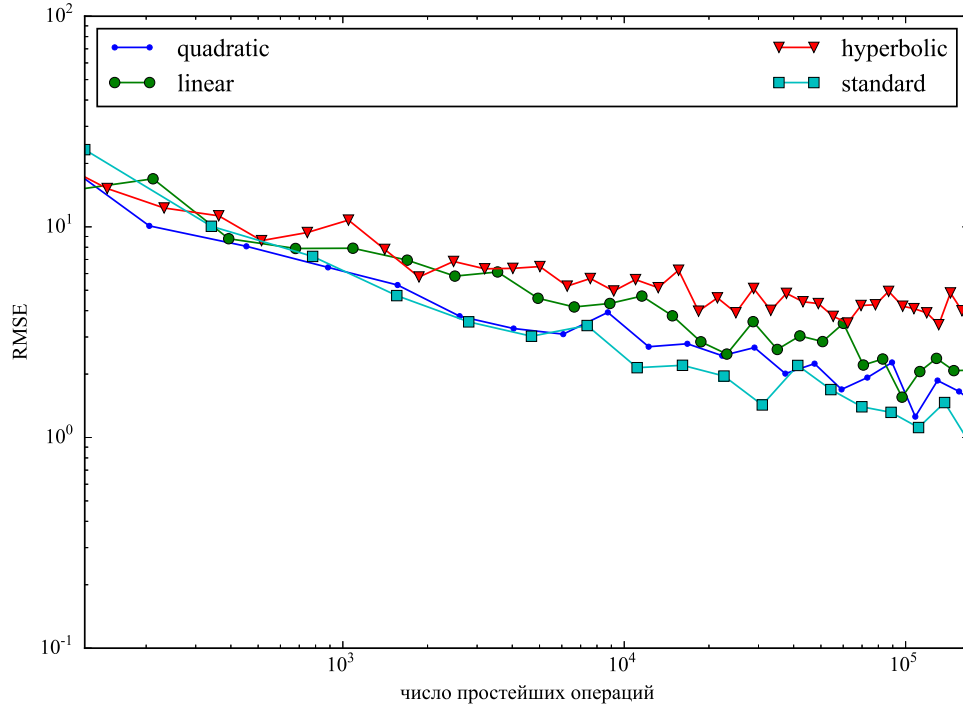


Рис. 3.3. Отклонение оценок стоимости опциона по полному дереву от истинного значения. Оценивается опцион с начальной ценой 100 и ценой страйк 100, выписанный на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой  $r = 0.05$ , дивидендной ставкой  $\delta = 0.1$  и волатильностью  $\sigma = 0.2$ , цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами  $\mu = r - \delta$  и  $\sigma$ , исполняемый 6 раз в году.

отклонение от истинного значения для верхней оценки стоимости опциона различными методами: стандартным и усовершенствованным с изменением математического ожидания числа вершин, которые будут поглощены на  $k$ -м шаге, по линейному ( $g_k = k/m$ ), квадратичному ( $g_k = (k/m)^2$ ) и обратному квадратичному закону ( $g_k = \sqrt{k/m}$ ). Здесь видно, что средняя ошибка оценок относительно истинного значения цены опциона, полученных за одно и то же вычислительное время (число элементарных операций), для различных методов различаются слабо.

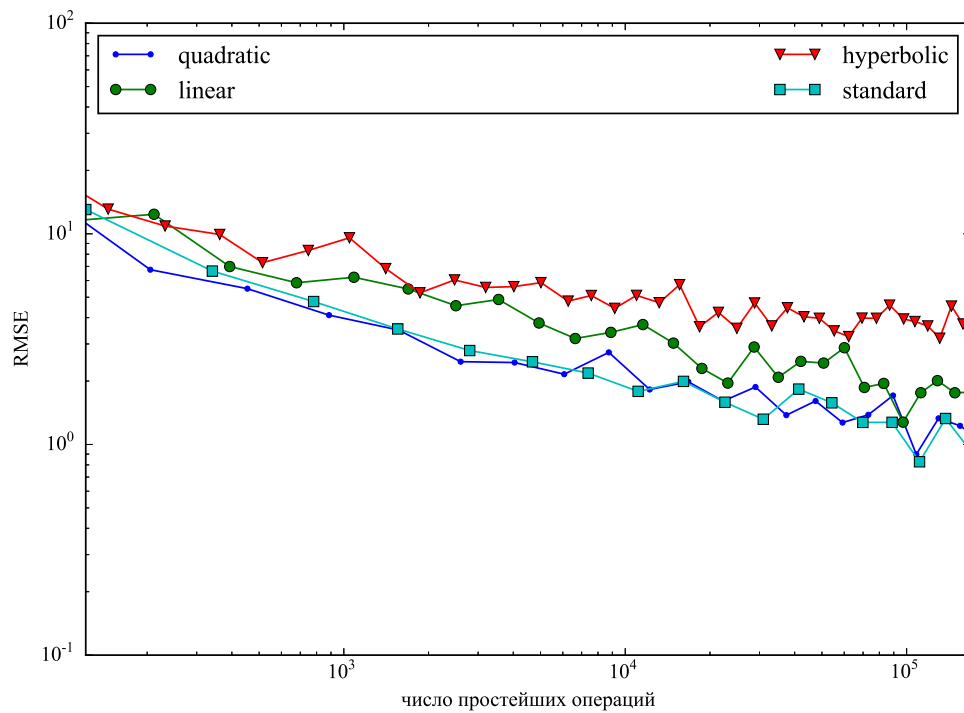


Рис. 3.4. Отклонение оценок стоимости опциона по случайным поддеревьям от истинного значения.

Оценивается опцион с начальной ценой 100 и ценой страйк 100, выписанный на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой  $r = 0.05$ , дивидендной ставкой  $\delta = 0.1$  и волатильностью  $\sigma = 0.2$ , цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами  $\mu = r - \delta$  и  $\sigma$ , исполняемый 6 раз в году.

## Глава 4

### Другие оценки

В ходе исследовательской работы было поставлено также несколько других вычислительных экспериментов. Они не относятся непосредственно к использованию схемы Неймана-Улама, но также представляют собой попытки снизить временную сложность вычисления оценки стоимости Американского опциона.

#### 4.1. Анализ распределения состояний с помощью эмпирической функции распределения

##### 4.1.1. Описание метода

В том случае, когда состояние актива  $S$  является числом в  $\mathbb{R}^1$ , в качестве параметра  $X$ , по распределению которого мы составляем эмпирическую функцию распределения, можно использовать само  $S$ , иначе можно использовать  $h(S)$ .

Пусть мы промоделировали дерево состояний базового актива до момента  $t_{k-1}$ . Тогда определено множество состояний актива в момент времени  $t_{k-1}$ :  $\{S_j\}_{j=1}^n$ ,  $n = b^{i-1}$ . Промоделировав у каждой  $j \in 1 : n$  вершины  $b$  дочерних вершин (независимых реализаций процесса изменения состояния актива)  $\{S_j^i\}_{i=1}^b$ , получим множество  $\left\{ \{S_j^i\}_{i=1}^b \right\}_{j=1}^n$ . Эмпирическая функция распределения состояния базового актива выглядит как

$$F_S(x) = \frac{1}{bk} \# \left\{ (i, j) \in 1 : b \times 1 : k \mid S_i^j < x \right\}.$$

Тогда мы можем сгруппировать вершины по квантилям их эмпирического распределения:

$$\forall k \in 1 : n \quad A_k = \left\{ S_i^j \mid \frac{k-1}{n} \leq F_S(S_i^j) < \frac{k}{n} \right\}.$$

У каждой группы однозначно определена медиана: либо среднее наблюдение в группе, либо смесь двух наиболее близких к середине. Заменяя всех членов группы её медианой, мы получаем  $bn$  вершин вместо  $n$ . Процесс проиллюстрирован на рис. 4.1.

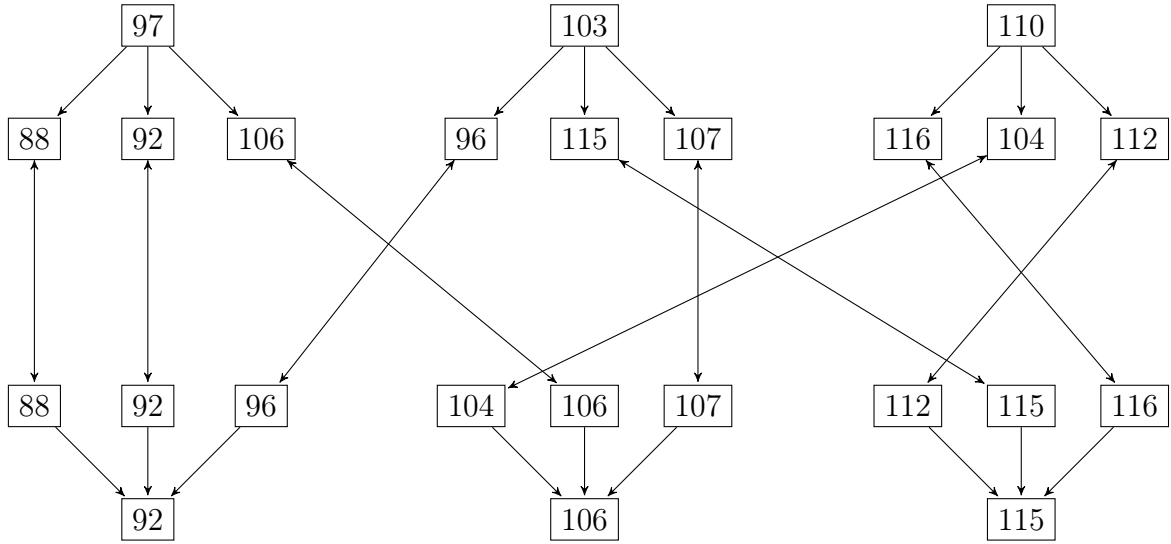


Рис. 4.1. Выбор вершин по квантилям эмпирического распределения

Таким образом, количество рассматриваемых состояний не увеличится. С другой стороны, этот метод предполагает хранение в памяти всего дерева, а не только непосредственно обчислимой ветки, как это предполагалось в исходной работе [1].

Также стоит отметить, что, пользуясь таким (и подобными ему) методом выбора состояний процесса, мы существенно нарушаем предположение об условной независимости реализаций: теперь состояние актива в  $t_i$  зависит не только от состояния актива в  $t_{i-1}$ , но и от состояния этого актива в других реализациях процесса. Доказательство сходимости оценок  $\hat{V}_0(S_0)$  и  $\hat{v}_0(S_0)$  к  $V_0(S_0)$  строится на том, что  $\hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i 1}, \dots, \hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i b}$  при данном  $S_i^{j_1 \dots j_1}$  — независимые одинаково распределённые случайные величины с математическим ожиданием  $E[V_{i+1}(S_{i+1}) | S_i^{j_1 \dots j_1}]$ . Следовательно, всё, чего мы можем ожидать, не меняя структуру оценок — достаточно слабой корреляции.

Генерирование каждого следующего ряда занимает  $O(bn \log(bn))$  времени (самая затратная операция — сортировка массива сгенерированных вершин длины  $bn$ ) и  $O(bn)$  памяти, следовательно, сложность моделирования в целом составляет  $O(mbn \log(bn))$

#### 4.1.2. Численные результаты

Алгоритм также реализован. Результаты моделирования для оценки стоимости того же опциона, что был использован для демонстрации классического алгоритма, представлены на рис. 4.2. Из графика видно, что сходимости к истинному значению не наблюдается.

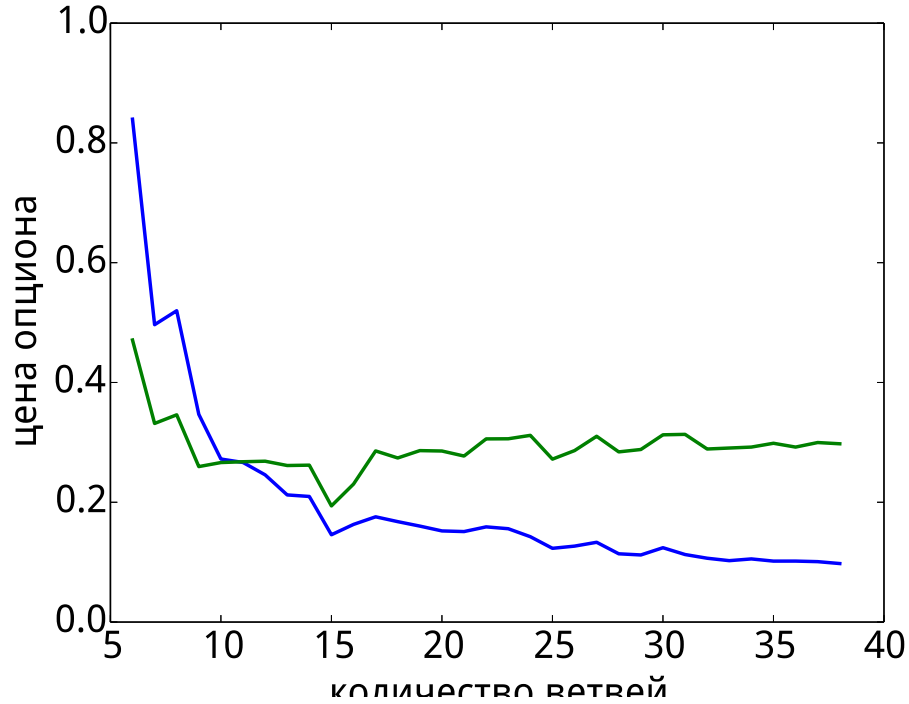


Рис. 4.2. Верхняя и нижняя оценки стоимости опциона по дереву с анализом эмпирической функцией распределения

Оценки стоимости опциона с начальной ценой 100, выпущенного на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой  $r = 0.05$ , дивидендной ставкой  $\delta = 0.1$  и волатильностью  $\sigma = 0.2$ , цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами  $\mu = r - \delta$  и  $\sigma$ , исполняемого 4 раза в году

## 4.2. Конечная сетка состояний

### 4.2.1. Описание метода

Для того, чтобы сложность алгоритма по памяти составляла  $O(bm)$ , необходимо начиная с некоторого момента ограничивать множество состояний, в которые может перейти актив из данного. Так как мы имеем дело с нестационарным случайным процессом, распределение состояний на следующем шаге меняется, как только мы получаем новую реализацию состояния на предыдущем шаге.

Можно использовать знания о законе распределения, которому подчиняется состояние базового актива, чтобы уменьшить число возможных состояний.

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t \implies \log \left( \frac{S_t}{S_0} \right) \sim N \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t, \sigma^2 t \right).$$

Ограничив множество состояний базового актива в момент времени  $t$  числом  $n$ , мы можем рассчитать, попадание в какие  $n$  классов состояний будет равновероятно. Пусть  $F(x)$  — функция распределения  $N(0, 1)$ , тогда

$$\forall i \in 1 : n \quad \exists \xi_i = F^{-1} \left( \frac{i - 0.5}{n} \right) \text{ — представитель } i\text{-го состояния,} \quad (4.1)$$

$$\forall i \in 0 : n \quad \exists z_i = F^{-1} \left( \frac{i}{n} \right) \text{ — граница } i\text{-го состояния.} \quad (4.2)$$

Для каждого момента времени  $t_i$  определено множество состояний

$$S_i^j = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} \xi_j \right), j \in 1 : n$$

и множество границ этих состояний

$$Z_i^j = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) t + \sigma \sqrt{t} z_j \right), j \in 1 : n.$$

Для любого состояния  $S_i^{j_1 \dots j_i}$  найдётся  $k \in 1 : n : Z_i^{k-1} \leq S_i^{j_1 \dots j_i} < Z_i^k$ , тогда  $S_i^{j_1 \dots j_i} := S_i^j$ .

Множество состояний не зависит от имеющихся результатов моделирования, только от параметров базового актива, следовательно, генерируемые траектории будут достаточно независимы, чтобы подходить под условия сходимости оценок (2.1)-(2.2), (2.4)-(2.6). Количество возможных состояний на каждом шаге можно увеличивать по мере увеличения  $t_i$ , что может частично компенсировать растущую дисперсию.

#### 4.2.2. Численные результаты

Результаты моделирования для оценки стоимости того же опциона, что был использован для демонстрации классического алгоритма, представлены на рис. 4.3 Несмотря на выполнение условий сходимости, налагаемых на траектории, вычисления демонстрируют отсутствие сходимости при  $b \rightarrow \infty$ : при больших значениях  $b$  ( $b = 60, 80$ , не показаны на графике) оценки демонстрируют устойчивое поведение, и среднее значение верхней и нижней оценки по 100 реализаций для каждого  $b$  равны  $0.48 \pm 0.02$  и  $0.43 \pm 0.03$  соответственно.



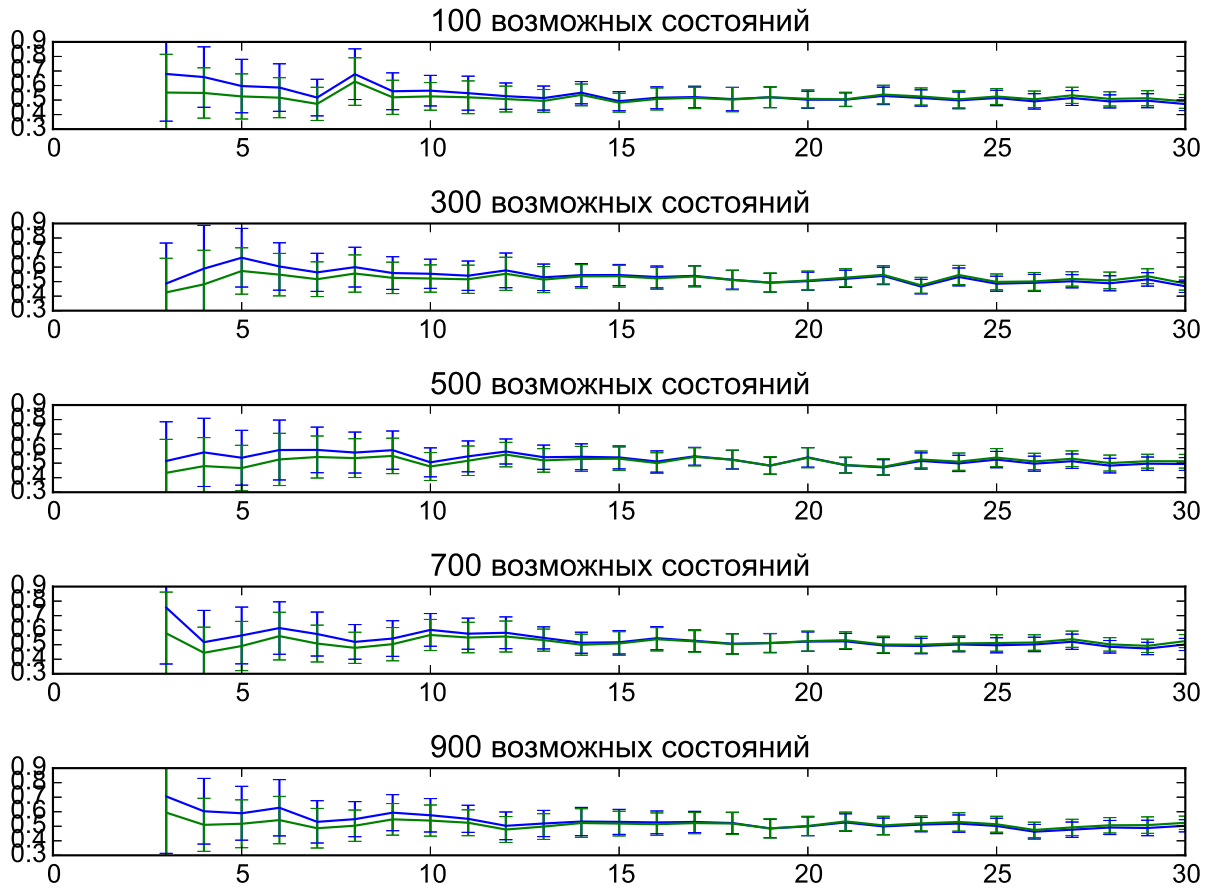


Рис. 4.3. Верхняя и нижняя оценки стоимости опциона по дереву с анализом эмпирической функцией распределения

Оценки стоимости опциона с начальной ценой 100, выписанного на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой  $r = 0.05$ , дивидендной ставкой  $\delta = 0.1$  и волатильностью  $\sigma = 0.2$ , цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами  $\mu = r - \delta$  и  $\sigma$ , исполняемого 4 раза в году

## Заключение

В работе были рассмотрены оценки стоимости американского опциона, которые строятся на базе имитационных моделей. Эти оценки требуют экспоненциально растущей с ростом времени вычислительной работы, и для преодоления этого препятствия была использована идея рандомизации. При этом была использована аналогия, возникающая между методами динамического программирования, используемыми при построении оценок американского опциона, и методами решения интегральных уравнений с полиномиальной нелинейностью.

Алгоритмы, предложенные в главах 2 и 3, реализованы, и с их помощью На вычислительных примерах показано, что соответствующее «проклятье размерности» может быть преодолено с помощью подбора соответствующих констант вероятности обрыва траектории. Таким образом, получен новый результат относительно возможности приближённой оценки без экспоненциального роста вычислительной работы.

## Список литературы

1. Broadie Mark, Glasserman Paul. Pricing American-style securities by simulation // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1997. — Vol. 21. — P. 1323–1352.
2. Peskir Goran, Shiryaev Albert. [Optimal Stopping and Free-Boundary Problems](#). Lectures in Mathematics. ETH Zürich. — 1 edition. — Birkhäuser Basel, 2006.
3. Указание Банка России от 16.02.2015 №3565-У «О видах производных финансовых инструментов».
4. Duffie Darrell. Dynamic Asset Pricing Theory. — Third edition. — Princeton University Press, 2001.
5. Ю Ду Люу. Методы и алгоритмы финансовой математики / Под ред. Е.В. Чепурина. — БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
6. Glasserman Paul. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. — Springer, 2004.
7. Haug Espen Gaarder. The Complete Guide to Option Pricing Formulas. — McGraw-Hill Education, 2007. — ISBN: [9780071389976](#).
8. Сергей Михайлович Ермаков. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — Наука, 1975.
9. Broadie Mark, Glasserman Paul, Jain Gautam. Enhanced Monte Carlo estimates for american option prices // Journal of Derivatives. — 1997. — Vol. 5, no. 1 (Fall). — P. 25–44.