Правительство Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего профессионального образования

«Санкт-Петербургский государственный университет»

Кафедра статистического моделирования

Миллер Анастасия Александровна

# Имитационная модель американских опционов

Бакалаврская работа

Допущена к защите

Заведующий кафедрой:

д. ф.-м. н., профессор С. М. Ермаков

Научный руководитель:

д. ф.-м. н., профессор С. М. Ермаков

Рецензент:

к.ф.-м.н., доцент Т. М. Товстик

Санкт-Петербург

2015

Saint Petersburg State University
Department of Statistical Modelling

Miller Anastasiia

# Simulation model of American options

Bachelor's Thesis

Admitted for defence
Head of Department:
Professor S. M. Ermakov

Scientific Supervisor:
Doctor of Physics and Mathematics, Professor
S. M. Ermakov

Reviewer:
Candidate of Physics and Mathematics,
Associate Professor T. M. Tovstik

Saint Petersburg
2015

# Оглавление

# Глава 1

# Метод случайных деревьев

Метод случайных деревьев, предложенный в [1], ищет решение проблемы оптимального времени остановки и оценивает истинное значение цены Американского опциона (в отличие от метода параметрических приближений).

Вместо того, чтобы строить оценку, каким-либо образом стремящуюся к $V_0\left(X_0\right)$, мы построим две функции, являющиеся смещёнными вверх и вниз состоятельными оценками $V$, (в [1] приведено доказательство отсутствия несмещённой оценки для $V_0\left(X_0\right)$). Пусть $\hat{V}\left(b\right)$ и $\hat{v}\left(b\right)$ — такие оценки, зависящие от некоторого параметра $b$, сходящиеся к $V$ при $b \to \infty$.

Метод случайного дерева основан на моделировании случайной цепи $X_0, X_1, \ldots X_m$. Зафиксируем параметр ветвления $b$. Из исходного состояния $X_0$ смоделируем $b$ независимых следующих состояний $X_1^1, X_1^2, \ldots X_1^b$, все с условием $X_1$. Для каждого $X_1^i$ снова смоделируем $b$ независимых последующих состояний $X_2^{i1}, \ldots X_2^{ib}$. На $m$-ом шаге будем иметь $b^m$ состояний, и это и есть источник основного недостатка этого метода — его экспоненциальной алгоритмической сложности. Пример получающегося дерева состояний приведён на 1.1.

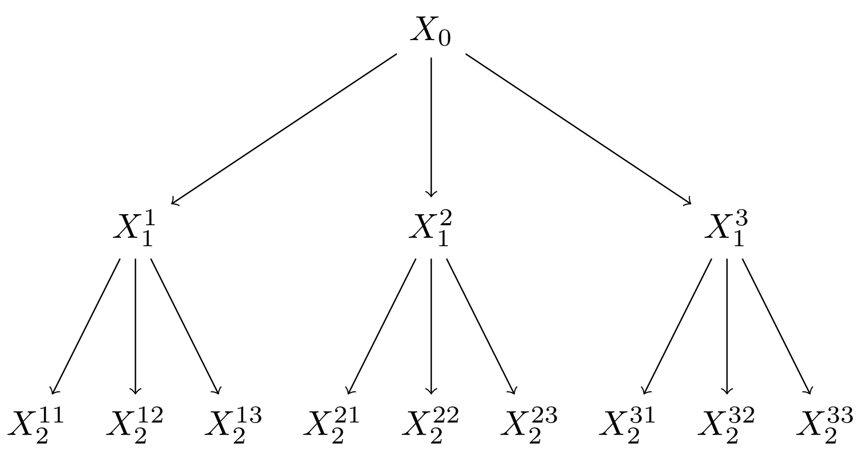


Рис. 1.1. Дерево состояний для $b = 3, m = 2$

## 1.1. Оценка сверху

Используя (**??**), зададим оценку в терминальных вершинах дерева равной известному значению функции выплат

$$\hat{V}_m^{j_1 \cdots j_m} = h_m \left( X_m^{j_1 \cdots j_m} \right), \tag{1.1}$$

в нетерминальных вершинах будем пользоваться результатами вычислений на предыдущем шаге

$$\hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} = \max \left\{ h_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} \right\}. \tag{1.2}$$

Другими словами, оценка сверху — это просто результат обхода дерева в глубину с присвоением каждой ветви дерева одинакового веса.

Смещённость оценки вверх и её состоятельность доказывается с помощью индукции:

**Теорема 1.** $\forall i \in 1:n$

$$\mathsf{E}\left[ \hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} | X_i^{j_1 \cdots j_i} \right] \geq V_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right)$$

*Доказательство.* В листьях дерева неравенство выполняется как равенство по определению.

Докажем, что если утверждение теоремы выполняется на $i+1$ шаге, то оно выполняется и на $i$. По определению

$$\mathsf{E}\left[ \hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} | X_i^{j_1 \cdots j_i} \right] = \mathsf{E}\left[ \max \left\{ h_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} \right\} | X_i^{j_1 \cdots j_i} \right],$$

с помощью неравенства Йенсена ($\varphi\left(\mathsf{E}\left[X\right]\right) \leqslant \mathsf{E}\left[\varphi(X)\right]$) это можно оценить как

$$\mathsf{E}\left[ \max \left\{ h_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right), \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} \right\} | X_i^{j_1 \cdots j_i} \right] \geq \max \left\{ h_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right), \mathsf{E}\left[ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} | X_i^{j_1 \cdots j_i} \right] \right\},$$

в силу того, что $\forall j \in 1:b \quad X_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}$ - независимые одинаково распределённые случайные величины (и их математическое ожидание одинаково), $\mathsf{E}\left[ \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} \right] = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^{b} \mathsf{E}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} = \mathsf{E}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i 1}$, а в силу индукционного предположения

$$\begin{aligned} \max \left\{ h_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right), \mathsf{E}\left[ \hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i 1} | X_i^{j_1 \cdots j_i} \right] \right\} &\geq \max \left\{ h_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right), \mathsf{E}\left[ V_{i+1} \left( X_i^{j_1 \cdots j_i 1} \right) \middle| X_i^{j_1 \cdots j_i} \right] \right\} \\ &\geq V_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right). \end{aligned}$$

Таким образом, $\mathsf{E}\left[ \hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} | X_i^{j_1 \cdots j_i} \right] \geq \max \left\{ h_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right), V_i \left( X_i^{j_1 \cdots j_i} \right) \right\}$ □

**Теорема 2.** *Оценка $\hat{V}$ асимптотически состоятельна, то есть*

$$\hat{V}_i^{j_1 \dots j_i} \underset{b \to \infty}{\xrightarrow{\mathsf{P}}} V_i\left(X_i^{j_1 \dots j_i}\right)$$

*Доказательство.* В листьях дерева это очевидно ($\hat{V}_m^{j_1 \dots j_m} = h_m\left(X_m^{j1 \dots j_m}\right) = V_m\left(X_m^{j1 \dots j_m}\right)$ по определению). Предположим, что $\hat{V}_{i+1}^{j_1 \dots j_i} \underset{b \to \infty}{\xrightarrow{\mathsf{P}}} V_{i+1}\left(X_i^{j_1 \dots j_i}\right)$.

Обозначив $\hat{V}_k = \hat{V}_k^{j_1 \cdots j_k}$, $\hat{V}_{k+1}^i = \hat{V}_k^{j_1 \cdots j_k i}$ для некоторой случайной последовательности $j_1 \cdots j_k$, $\|\xi\|_{X_k} = \left(\mathsf{E}\left(\xi^p | X_k\right)\right)^{\frac{1}{p}}$, получим на $k$-м шаге

$$\begin{aligned}
&\left\|\hat{V}_k(b) - V\left(X_k\right)\right\|_{X_k} = \\
&\quad = \left\| \max\left\{ h_k\left(X_k\right), \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} \hat{V}_{k+1}^i(b) \right\} - \max\left\{ h_k\left(X_k\right), \mathsf{E}\left(V\left(X_{k+1}\right) | X_k\right) \right\} \right\|_{X_k} \leq \\
&\qquad \leq \left\| \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} \hat{V}_{k+1}^i(b) - \mathsf{E}\left(V\left(X_{k+1}\right) | X_k\right) \right\|_{X_k} \leq \\
&\qquad \leq \left\| \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} \left( \hat{V}_{k+1}^i(b) - V_{k+1}\left(X_{k+1}^i\right) \right) \right\|_{X_k} + \\
&\qquad\qquad + \left\| \frac{1}{b}\sum_{i=1}^{b} V_{k+1}\left(X_{k+1}^i\right) - \mathsf{E}\left(V\left(X_{k+1}\right) | X_k\right) \right\|_{X_k}.
\end{aligned}$$

Второе слагаемое является разностью суммы реализаций независимых (при данном $X_k$) случайных величин и математического ожидаемого слагаемых этой суммы и сходится по закону больших чисел. Для первого же применяется индукционное предположение, в итоге

$$\left\|\hat{V}_k(b) - V\left(X_k\right)\right\|_{X_k} \underset{b \to \infty}{\to} 0.$$

Сходимость по норме даёт нам сходимость по вероятности, тем самым доказывая, что оценка $\hat{V}$ состоятельна. Более подробное доказательство можно найти в [1]. □

## 1.2. Оценка снизу

Значения оценки сверху в каждый момент времени — это выбор максимума из стоимости опциона при его немедленном исполнении и математического ожидания стоимости удержания опциона. Но стоимость удержания опциона рассчитывается, исходя из дочерних узлов дерева состояний актива,то есть оценка сверху рассчитывается, опираясь на информацию о будущем. Чтобы убрать ошибку, связанную с этим, необходимо отделить механизм принятия решения о исполнении или удержании опциона от значений, полученных после принятия решения об удержании опциона.

В более общей (и более короткой) постановке — необходимо оценить $\max\{a, \mathsf{E}Y\}$ с помощью $b$ независимых одинаково распределённых реализаций случайной величины $Y$ для некоторой константы $a$ и случайной величины $Y$. Оценка $\max\left\{a, \bar{Y}\right\}$ (где $\bar{Y}$ — среднее значение выборки) является оценкой сверху, так как $\mathsf{E}\max\left\{a, \bar{Y}\right\} \geq \max\left\{a, \mathsf{E}\bar{Y}\right\} = \max\{a, \mathsf{E}Y\}$, что и было использовано в построении оценки сверху.

Разделим множество реализаций $\{Y_i\}_{i=1}^b$ случайной величины $Y$ на два независимых подмножества и вычислим их средние значения $\bar{Y}_1$ и $\bar{Y}_2$. Если положить

$$\hat{v} = \begin{cases} a, & \text{если } \bar{Y}_1 \leqslant a, \\ \bar{Y}_2, & \text{иначе}, \end{cases} \tag{1.3}$$

мы отделим процесс принятия решения о исполнении или удержании опциона от оценки стоимости (за решение будет отвечать $\bar{Y}_1$, за оценку - $\bar{Y}_2$). При этом оценка $\hat{v}$ является оценкой снизу:

$$\mathsf{E}\hat{v} = \mathsf{P}\left(\bar{Y}_1 \leqslant a\right) a + \left(1 - \mathsf{P}\left(\bar{Y}_1 \leqslant a\right)\right) \mathsf{E}Y \leqslant \max\{a, \mathsf{E}Y\}$$

В оригинальной работе [1] была исполоьзована немного другая оценка. Пусть «отвечающим за принятие решения» подмножеством будут все реализации, кроме одной, а «оценивающее» множество будет состоять из одной оставшейся реализации. Возьмём математическое ожидание этой величины, т.е. положим в листьях дерева значение оценки

$$\hat{v}_m^{j_1 j_2 \cdots j_m} = h\left(X_m^{j_1 j_2 \cdots j_m}\right), \tag{1.4}$$

а для промежуточных узлов определим

$$\hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \cdots j_i} = \begin{cases} h\left(X_i^{j_1 j_2 \cdots j_i}\right), & \text{если } \frac{1}{b-1} \sum_{j=1, j\neq k}^{b} \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \cdots j_i j} \leq h\left(X_i^{j_1 j_2 \cdots j_i}\right) \\ \hat{v}_{i+1}^{j_1 j_2 \cdots j_i k}, & \text{иначе} \end{cases} \tag{1.5}$$

и оценку положим равной

$$\hat{v}_i^{j_1 j_2 \cdots j_i} = \frac{1}{b} \sum_{k=1}^{b} \hat{v}_{ik}^{j_1 j_2 \cdots j_i}. \tag{1.6}$$

Доказательства смещённости и состоятельности нижней оценки аналогичны вышеприведённым для оценки сверху и также могут быть найдены в [1].

Таким образом, мы имеем дерево с $\sum_{k=1}^{m} b^k = \frac{b(b^m-1)}{b-1} = O\left(b^m\right)$ вершинами. Несмотря на то, что потребление памяти в процессе работы алгоритма можно держать в рамках $O\left(bm\right)$ (структура алгоритма подразумевает обход дерева в глубину с сохранением только присущих обходимой траектории значений), анализа требуют все $O\left(b^m\right)$ вершин, что означает экспоненциальный рост временной сложности алгоритма. Следовательно, об устремлении $m \to \infty$ в изначальной форме алгоритма речь идти не может.

# Глава 2

# Схема Неймана-Улама и её обобщение на нелинейные уравнения

Деревья конструкции, аналогичной описанной в главе 1, используются в известном обобщении схемы Неймана-Улама, что приводит к идее применения оценок, разработанных для линейных интегральных уравнений, к задаче нахождения цены Американского опциона. Ниже будут изложены общие сведения о схеме Неймана-Улама и проведены более детальные аналогии с оценками (**??**).

## 2.1. Общие сведения о схеме Неймана-Улама применительно к ветвящемуся марковскому процессу

Пусть имеется уравнение

$$\varphi(x) = \int K(x, y, \varphi(y))\, \varphi(y)\, \mu(dy) + f(x) \qquad \mathrm{mod}\ \mu, \tag{2.1}$$

для которого сходится метод последовательных приближений

$$\varphi_n(x) = \int K(x, y, \varphi_{n-1}(y))\, \varphi_n(y)\, \mu(dy) + f(x) \qquad \mathrm{mod}\ \mu, \tag{2.2}$$

для некоторого начального приближения $\varphi_0(x)$ при $n \to \infty$. Тогда при наличии предположений о сходимости ряда Неймана $\sum_{i=0}^{\infty} \int K^i f d\mu$ в той же метрике, в которой сходится метод последовательных приближений, об устойчивости ядра $K$ интегрального оператора к возмущениям, и, возможно, некоторых других, можно получать приближённые решения $\varphi_n$ методом Монте-Карло.

Процесс отыскания численного решения усложняется тем, что неизвестным в интегральном уравнении является функция, а не число, что означает дополнительные вопросы о способе хранения информации о решении уравнения. Представленный ниже способ, как будет видно, избавляет от необходимости хранить таблицу значений искомой функции.

Будем рассматривать только «одночленные» уравнения вида

$$\varphi(x) = \int K(x, y_1, \ldots, y_b) \prod_{i=1}^{b} \varphi(y_i)\, \mu^b(dy_1, \ldots, dy_b) + f(x) \Longleftrightarrow \tag{2.3}$$
$$\Longleftrightarrow \varphi = \mathcal{K}\varphi^{(b)} + f$$

и предполагать, что метод последовательных приближений

$$\varphi_0 = f, \quad \varphi_n = \mathcal{K}\varphi_{n-1}^{(b)} + f \tag{2.4}$$

сходится в метрике некоторого банахова пространства $F$ к решению уравнения (2.3).

Рассмотрим пример для $b = 2, n = 2$.

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x_0) =& f(x_0) + \int K(x_0, x_1, x_2)\, f(x_1) f(x_2) \mu^2(dx_1, dx_2)\\
\varphi_2(x_0) =& f(x_0) + \int K(x_0, x_1, x_2) \times\\
&\times \left[ f(x_1) + \int K(x_1, x_3, x_4)\, f(x_3) f(x_4) \mu^2(dx_3, dx_4) \right] \times\\
&\times \left[ f(x_2) + \int K(x_2, x_5, x_6)\, f(x_5) f(x_6) \mu^2(dx_5, dx_6) \right] \times \mu^2(dx_1, dx_2) =\\
=& f_0 + \int K_{0,1,2} f_1 f_2 \mu_{1,2} + \int K_{0,1,2} \left( f_1 \int K_{2,5,6} f_5 f_6 \mu_{5,6} \right) \mu_{1,2} +\\
&+ \int K_{0,1,2} \left( f_2 \int K_{1,3,4} f_3 f_4 \mu_{3,4} \right) \mu_{1,2} +\\
&+ \int\int\int K_{0,1,2} K_{1,3,4} K_{2,5,6} f_3 f_4 f_5 f_6 \mu_{1,2} \mu_{3,4} \mu_{5,6}
\end{aligned}$$

Если посмотреть на дерево вида 1.1, можно заметить, что переменные в слагаемых вышеприведённого уравнения в точности соответствуют поддеревьям полного дерева, у которого из каждой вершины выходит $b = 2$ дочерних, а расстояние от корня до листьев равно $n = 2$.

Обозначив последовательности $j_1 \cdots j_k$ мультииндексами $\nu[0] = (1),\ \nu[k{+}1] = (\nu[k], j_{k+1})$, можно выразить уравнение метода последовательных приближений (2.4) как

$$\begin{aligned}
\varphi_{N-k}(x[\nu(k)]) =& \int K(x[\nu(k)], x[\nu(k), 1], \ldots, x[\nu(k), b]) \times\\
&\times \prod_{j_{k+1}=1}^{b} \varphi_{N-k-1}(x[\nu(k+1)])\, \mu^b(dx[\nu(k), 1], \ldots, dx[\nu(k), b]) +\\
&+ f(x[\nu(k)]),
\end{aligned}$$

а введя сокращённые обозначения

$$
\begin{aligned}
z\left[\nu\left(k\right)\right] &= \varphi_{N-k}\left(x\left[\nu(k)\right]\right),\\
a_{\nu(k)}\varphi &= \int K\left(x\left[\nu(k)\right], x\left[\nu(k),1\right], \ldots, x\left[\nu(k),b\right]\right)\varphi d\mu,\\
f\left[\nu\left(k\right)\right] &= f\left(x\left[\nu(k)\right]\right),
\end{aligned}
$$

переписать в виде

$$
z\left[\nu\left(k\right)\right] = a_{\nu(k)}\prod_{j_{k+1}=1}^{b} z\left[\nu\left(k+1\right)\right] + f\left[\nu\left(k\right)\right].
$$

Каждый мультииндекс $\nu(k)$ является описанием некоторой траектории, а в силу конструкции индексов эти траектории сливаются в дерево. Для дальнейшей работы дадим более формальное описание деревьев.

Пусть $\gamma_k = (\mathfrak{B}_0, \ldots, \mathfrak{B}_k)$ — совокупность множеств $\mathfrak{B}_r, r \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ мультииндексов $\nu(r)$, удовлетворяющих следующим условиям:

1. $\forall\, r > 1,\ \nu(r) \in \mathfrak{B}_r$ соответствующее $\nu(r-1) \in \mathfrak{B}'_{r-1} \subset \mathfrak{B}_{r-1}$.
2. $\forall\, r > 0\ \nu(r) = (\nu(r-1), j_r)$, и $j_r$ принимает всевозможные значения из $1 : b$.
3. $\mathfrak{B}_0 = \{(1)\}$.

Такую совокупность $\gamma_k$ назовём деревом. Дерево, для которого все $\mathfrak{B}'_{r-1} = \mathfrak{B}_{r-1}$, называется полным. Множество $\mathfrak{B}'_r$ здесь по сути является множеством, траектории из которого «продолжат существование» на следующем шаге. Так, дерево с рис. 1.1 имеет $\mathfrak{B}'_1 = \cup_{b=1}^{3}\{(1,b,1),(1,b,2),(1,b,3)\}$ и $\mathfrak{B}'_2 = \emptyset$. Для любого дерева $\gamma$ определён оператор

$$
\begin{aligned}
A\left(\gamma\right) =& f\left[\nu(0)\right] \text{ при } N = 0\\
A\left(\gamma\right) =& a_{\nu(0)}\prod_{\mathfrak{B}_1\setminus\mathfrak{B}'_1} f\left[\nu(1)\right]\prod_{\mathfrak{B}'_1} a_{\nu(1)}\prod_{\mathfrak{B}_2\setminus\mathfrak{B}'_2} f\left[\nu(1)\right]\prod_{\mathfrak{B}'_2} a_{\nu(2)}\times\\
&\times\cdots\times\prod_{\mathfrak{B}_N} f\left[\nu(N)\right] \text{ при } N > 0
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

В [2] доказано, что

$$
z\left[\nu(0)\right] = \sum_{\gamma\in\Gamma_N} A\left(\gamma\right), \tag{2.6}
$$

где суммирование проходит по всем поддеревьям полного дерева с $N$ поколениями $\Gamma_N$.

В результате реализации однородного ветвящегося марковского процесса с начальной плотностью $\pi(x) \geq 0$, переходной плотностью $p(x, y_1, \ldots, y_b) \geq 0$ и вероятностью поглощения $g(x) : \int p(x, y_1, \ldots, y_b)\mu^s (dy_1, \ldots, dy_b) = 1 - g(x)$ образуется дерево описанного выше типа, число поколений которого $N$ не обязательно конечно. В случае, если конкретная реализация $\gamma$ имеет длину $N \in (0; \infty)$, то ей соответствует плотность вероятности

$$
\begin{aligned}
p(\gamma) = & \pi(x[1])\, p(x[1], x[1,1], \ldots, x[1,b]) \times \prod_{\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}'_1} g[\nu(1)] \times \\
& \times \prod_{\mathfrak{B}'_1} p(x[\nu(k)], x[\nu(k),1], \ldots, x[\nu(k),b]) \times \\
& \times \prod_{\mathfrak{B}_2 \setminus \mathfrak{B}'_2} g[\nu(2)] \times \cdots \times \prod_{\mathfrak{B}_N} f[\nu(N)] \,.
\end{aligned}
$$

Для марковского процесса *выполняются условия согласования*, если

1. $\forall (x, y_1, \ldots, y_b)$
$$
\begin{aligned}
& K(x, y_1, \ldots, y_b) \neq 0 \mod \mu^{b+1} \implies \\
& \implies p(x, y_1, \ldots, y_b) > 0 \mod \mu^{b+1}
\end{aligned}
$$
2. $\forall x$
$$
\begin{aligned}
h(x) \neq 0 \mod \mu \implies \pi(x) > 0 \mod \mu \\
f(x) \neq 0 \mod \mu \implies g(x) > 0 \mod \mu
\end{aligned}
$$

Сокращая обозначения $h_0 = h(x[1])$, $\pi_0 = \pi(x[1])$, $f[\nu(k)] = f(x[\nu(k)])$, $g[\nu(k)] = g(x[\nu(k)])$,

$$
\begin{aligned}
K_{\nu[k]} &= K(x[\nu(k)], x[\nu(k),1], \ldots, x[\nu(k),b]) \,, \\
p_{\nu[k]} &= p(x[\nu(k)], x[\nu(k),1], \ldots, x[\nu(k),b]) \,,
\end{aligned}
$$

для интегрального уравнения (2.3) и марковской цепи, для которой выполняются условия согласования с этим уравнением, можно определить оценку

$$
\hat{J}_\gamma = \frac{h_0}{p_0} \frac{K_{\nu(0)}}{p_{\nu(0)}} \prod_{\mathfrak{B}_1 \setminus \mathfrak{B}'_1} \frac{f[\nu(1)]}{p[\nu(1)]} \prod_{\mathfrak{B}'_1} \frac{K_{\nu(1)}}{p_{\nu(1)}} \prod_{\mathfrak{B}_2 \setminus \mathfrak{B}'_2} \frac{f[\nu(2)]}{p[\nu(2)]} \prod_{\mathfrak{B}'_2} \frac{K_{\nu(2)}}{p_{\nu(2)}} \times \cdots \times \prod_{\mathfrak{B}_N} \frac{f[\nu(N)]}{p[\nu(N)]}. \qquad (2.7)
$$

Эта оценка является несмещённой оценкой функционала $(\varphi, h)$ (см. [2]).

## 2.2. Приложение к задаче оценивания Американского опциона

Для проведения аналогии между оценками интегральных уравнений и стоимости опциона рассмотрим небольшой пример.

Пусть имеется опцион с $m = 3$ датами исполнения: $t_0, t_1, t_2$. Обозначим операцию взятия максимума $\max\{a, b\} = a \oplus b$, и в нижеприведённом примере положим приоритет операции взятия максимума выше приоритета операции сложения. Тогда верхняя оценка его стоимости по случайному дереву с $b = 3$ ветвями будет выглядеть как

$$
\begin{aligned}
\hat{V}_0(X_0) &= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} V_1(X_1^j) = \\
&= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3}\left(h_1(X_1^1) \oplus \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} V_2(X_2^{1j}) + \right.\\
&\qquad + h_1(X_1^2) \oplus \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} V_2(X_2^{2j}) + \\
&\qquad \left. + h_1(X_1^3) \oplus \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} V_2(X_2^{3j})\right) = \\
&= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3}\left(h_1(X_1^1) \oplus \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} h_2(X_2^{1j}) + \right.\\
&\qquad + h_1(X_1^2) \oplus \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} h_2(X_2^{2j}) + \\
&\qquad \left. + h_1(X_1^3) \oplus \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} h_2(X_2^{3j})\right) =
\end{aligned}
$$

используя тот факт, что $\forall\, a, b, c, d\ \ a \oplus b + c \oplus d = (a + c) \oplus (a + d) \oplus (b + c) \oplus (b + b)$

$$
\begin{aligned}
&= h_0(X_0) \oplus \frac{1}{3}\left(h_1(X_1^1) + h_1(X_1^2) + h_1(X_1^3)\right) \oplus \\
&\qquad \oplus \frac{1}{3}\left(h_1(X_1^1) + h_1(X_1^2) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} h_2(X_2^{3j})\right) \oplus \\
&\qquad \oplus \frac{1}{3}\left(h_1(X_1^1) + \frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3} h_2(X_2^{2j}) + h_1(X_1^3)\right) \oplus
\end{aligned}
$$

$$\oplus\frac{1}{3}\left(h_1(X_1^1)+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{2j})+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{3j})\right)\oplus$$
$$\oplus\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{1j})+h_1(X_1^2)+h_1(X_1^3)\right)\oplus$$
$$\oplus\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{1j})+h_1(X_1^2)+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{3j})\right)\oplus$$
$$\oplus\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{1j})+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{2j})+h_1(X_1^3)\right)\oplus$$
$$\oplus\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{1j})+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{2j})+\frac{1}{3}\sum_{j=1}^{3}h_2(X_2^{3j})\right)$$

Пример даёт представление о виде оператора, аналогичного $A(\gamma)$. Он будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} A'(\gamma)=\sum_{\mathfrak{B}_0\setminus\mathfrak{B}'_0}h_0(X_0)+\frac{1}{b}\sum_{\mathfrak{B}_1\setminus\mathfrak{B}'_1}h_1\left(X_1^{\nu(1)}\right)+\frac{1}{b^2}\sum_{\mathfrak{B}_2\setminus\mathfrak{B}'_2}h_2\left(X_2^{\nu(2)}\right)+\\ +\dots+\frac{1}{b^m}\sum_{\mathfrak{B}_m}h_m\left(X_m^{\nu(m)}\right) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Тогда $\hat{V}_0(X_0)$ выражается как $\max_{\gamma\in\Gamma_m}A'(\gamma)$.

Продолжение аналогии предполагает построение случайной величины $J'_\gamma$, математическое ожидание которой было бы равно $(\hat{V}_0,f)=\int V_0(x)f(x)d\mu$ для любого наперёд заданного $f$. Но так как оцениваемым значением в данной работе является $V_0(X_0)$ (и, следовательно, $\hat{V}_0(X_0)$), такая случайная величина не представляет собой интереса.

### 2.2.1. Описание метода

Для дерева состояний базового актива обрыв траектории в $t_i<t_m$ означает, что опцион исполнен в момент $t_i$. Априори вероятность этого события неизвестна, поэтому определить $g(x)$ иначе, как равное 0, если $t<t_m$, и 1, если $t=t_m$, не представляется возможным. По этой же причине оценка стоимости опциона в вершине $X_i^{j_1\cdots j_i}$ как $h_i\left(X_i^{j_1\cdots j_i}\right)$ является несостоятельной. Тем не менее, обход всех вершин (так как при текущем определении $g$ дерево состояний всегда получается полным длины $m$) означает ту же вычислительную сложность, что и в исходных оценках.

Рассматривая то же множество поддеревьев $\gamma$ полного дерева $\Gamma_m$ (поддеревья, каждая вершина которых имеет либо 0, либо $b$ дочерних), что и в разделе 2.1, построим пару асимптотически состоятельных оценок.

Согласно описанию ветвящегося процесса, множество вершин, имеющих общую родительскую вершину, можно разделить на два класса: «поглощённые», то есть не имеющие дочерних вершин, и «выжившие», которые имею дочерние вершины в количестве $b$ штук. Будем использовать для пути, приведшего в вершину $X_{k-1}^{j_1\cdots j_{k-1}}$ также обозначение $\nu(k-1)$, а множество вершин с общей родительской $X_{k-1}^{j_1\cdots j_{k-1}}$ обозначим как $\mathfrak{B}_{\nu(k)} = \left\{X_k^{\nu(k-1),j}\right\}_{j=1}^{b}$, подмножество выживших — $\mathfrak{B}'_{\nu(k)} \subset \mathfrak{B}_{\nu(k)}$. Для вершин, погибших на $k$-ом шаге, примем оценки стоимости удержания опциона равными оценкам стоимости удержания опциона, вычисленными для ближайшей в каком-либо смысле (например, в смысле евклидова расстояния на множестве состояний базового актива, если это $\mathbb{R}^d$) вершины из множества выживших, то есть

$$\forall X \in \mathfrak{B}_{\nu(k)} \setminus \mathfrak{B}'_{\nu(k)} \quad \hat{V}_k(X) = \underset{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}}{\arg\min}\, \hat{V}_k(Y).$$

Получившаяся пара оценок:

$$\begin{cases} \hat{V}'_m\left(X_m^{j_1\cdots j_m}\right) = h_m\left(X_m^{j_1\cdots j_m}\right) \\ \hat{V}'_k\left(X_k^{j_1\cdots j_k}\right) = \begin{cases} h_m\left(X_m^{j_1\cdots j_m}\right) \oplus \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b} \hat{V}'_{k+1}\left(X_{k+1}^{j_1\cdots j_k j}\right), & X_k^{j_1\cdots j_k} \in \mathfrak{B}'_k \\ \arg\min_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{V}_k(X), & X_k^{j_1\cdots j_k} \in \mathfrak{B}_k \setminus \mathfrak{B}'_k \end{cases} \end{cases} \tag{2.9}$$

$$\begin{cases} \hat{v}'_m\left(X_m^{j_1\cdots j_m}\right) = h_m\left(X_m^{j_1\cdots j_m}\right) \\ \hat{v}'^{\,j_1 j_2\cdots j_i}_{ik} = \begin{cases} h\left(X_i^{j_1 j_2\cdots j_i}\right), & \text{если } \frac{1}{b-1}\sum_{j=1, j\neq k}^{b} \hat{v}'^{\,j_1 j_2\cdots j_i j}_{i+1} \leq h\left(X_i^{j_1 j_2\cdots j_i}\right) \\ \hat{v}'^{\,j_1 j_2\cdots j_i k}_{i+1}, & \text{иначе} \end{cases} \\ \hat{v}'_k\left(X_k^{j_1\cdots j_k}\right) = \begin{cases} \hat{v}'^{\,j_1 j_2\cdots j_i}_{i} = \frac{1}{b}\sum_{k=1}^{b} \hat{v}'^{\,j_1 j_2\cdots j_i}_{ik}, & X_k^{j_1\cdots j_k} \in \mathfrak{B}'_k \\ \arg\min_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{v}'_k(X), & X_k^{j_1\cdots j_k} \in \mathfrak{B}_k \setminus \mathfrak{B}'_k \end{cases} \end{cases} \tag{2.10}$$

Докажем, что оценки являются состоятельными. Принцип доказательства одинаковый, поэтому ограничимся оценкой сверху. В доказательстве используются те же сокращённые обозначения, что и в доказательстве теоремы 2.

**Теорема 3.**

$$\left\|\hat{V}'_k - V(X_k)\right\|_{X_k} \underset{b\to\infty}{\to} 0$$

*Доказательство.* В листьях дерева утверждение очевидно. Предположим, что для $k+1$ $\left\|\hat{V}'_{k+1} - V(X_{k+1})\right\|_{X_k} \underset{b\to\infty}{\to} 0.$

Для вершин из $\mathfrak{B}'_k$ оценка $\hat{V}'_k = h_m\left(X_m^{j_1\cdots j_m}\right) \oplus \frac{1}{b}\sum_{j=1}^b \hat{V}'_{k+1}\left(X_{k+1}^{j_1\cdots j_k j}\right)$, то есть верхняя оценка стоимости опциона при условии неисполнения его на всех шагах до $k$ включительно равна $\frac{1}{b}\sum_{j=1}^b \hat{V}'_{k+1}\left(X_{k+1}^{j_1\cdots j_k j}\right) = \frac{1}{b}\left(\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{V}'_{k+1}\left(X_{k+1}^{\nu(k+1)}\right) + \sum_{\mathfrak{B}_{\nu(k)}\setminus\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \arg\min_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} \hat{V}_k(X)\right)$. Следовательно, её можно выразить как взвешенную сумму оценок на узлах из множества $\mathfrak{B}'_{\nu(k)}$: $\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)}\hat{V}'_{k+1}\left(X_{k+1}^{\nu(k+1)}\right)$, где $w_{\nu(k+1)}$ — частота использования оценки $X_{k+1}^{\nu(k+1)}$, $\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)} = 1$.

Тогда имеется следующая оценка:

$$\left\|\hat{V}'_k - V(X_k)\right\|_{X_k} \leq \left\|\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)}\left(\hat{V}'_{k+1}\left(X_{\nu(k+1)}\right) - V_{k+1}\left(X_{\nu(k+1)}\right)\right)\right\|_{X_k} + \\ + \left\|\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)} V_{k+1}\left(X_{\nu(k+1)}\right) - \mathsf{E}\left(V\left(X_{k+1}\right)\middle| X_{\nu(k)}\right)\right\|_{X_k}.$$

Второе слагаемое — разность взвешенной суммы независимых одинаково распределённых случайных величин и их математического ожидания, стремится к 0 при увеличении числа слагаемых в сумме $b \to \infty$. По определению оценки $\hat{V}'$ первое слагаемое $\left\|\sum_{\mathfrak{B}'_{\nu(k)}} w_{\nu(k+1)}\left(\hat{V}'_{k+1}\left(X_{\nu(k+1)}\right) - V_{k+1}\left(X_{\nu(k+1)}\right)\right)\right\|_{X_k} \leq \left\|\hat{V}'_{k+1} - V(X_{k+1})\right\|_{X_k} \underset{b\to\infty}{\to} 0$ по индукционному предположению. □

Из вышеизложенных рассуждений получается алгоритм, приведённый на листинге 1.

Неочевидными остаются алгоритм выбора состояний, из которых дерево будет продолжать расти, и алгоритм назначения оценок.

### 2.2.2. Численные результаты

Алгоритм был реализован. На рис.2.1 можно увидеть полученные оценки. Вершины, из которых будут строиться дочерние из состояния $X_i^{j_1\cdots j_i}$, выбирались равновероятно из множества $\left\{X_{i+1}^{j_1\cdots j_i j}\right\}_{j=1}^b$ всех смоделированных вершин, математическое ожидание числа вершин на шаге $i$ было равно $\max\left\{b\min\left\{{}^{i+1}/_m, 1\right\}, 1\right\}$.

Также был реализован алгоритм Броади-Глассермана, результаты его работы можно увидеть на рис.2.2.

```
def calculate(X_i^{j_1···j_i}, b, K):
    input  : текущее состояние X_i^{j_1···j_i} (включает в себя время t_i), число
             веток b, цена страйк K
    output: оценка стоимости опциона V̂_i^{j_1···j_i} при условии, что он не был
             исполнен до этого момента

    if t_i = t_m then
        return h_m (X_m^{j_1···j_m});
    end
    промоделировать состояния {X_{i+1}^{j_1···j_i j}}_{j=1}^b;
    выбрать случайным образом состояния {X_{i+1}^l}_{l=1}^k ⊂ {X_{i+1}^{j_1···j_i j}}_{j=1}^b, из
    которых будут генерироваться дочерние вершины;
    for x ∈ {X_{i+1}^l}_{l=1}^k do
        V̂_{i+1}^l = calculate(x, b, K);
    end
    for x ∈ {X_{i+1}^{j_1···j_i j}}_{j=1}^b \ {X_{i+1}^l}_{l=1}^k do
        V̂_{i+1}^l = случайно выбранная из уже полученных оценок;
    end
    return max{h_i (X_i^{j_1···j_i}), (1/b) Σ_{j=1}^b V̂_{i+1}^j};
```

**Algorithm 1:** оценка стоимости Американского опциона по случайно выбранным поддеревьям

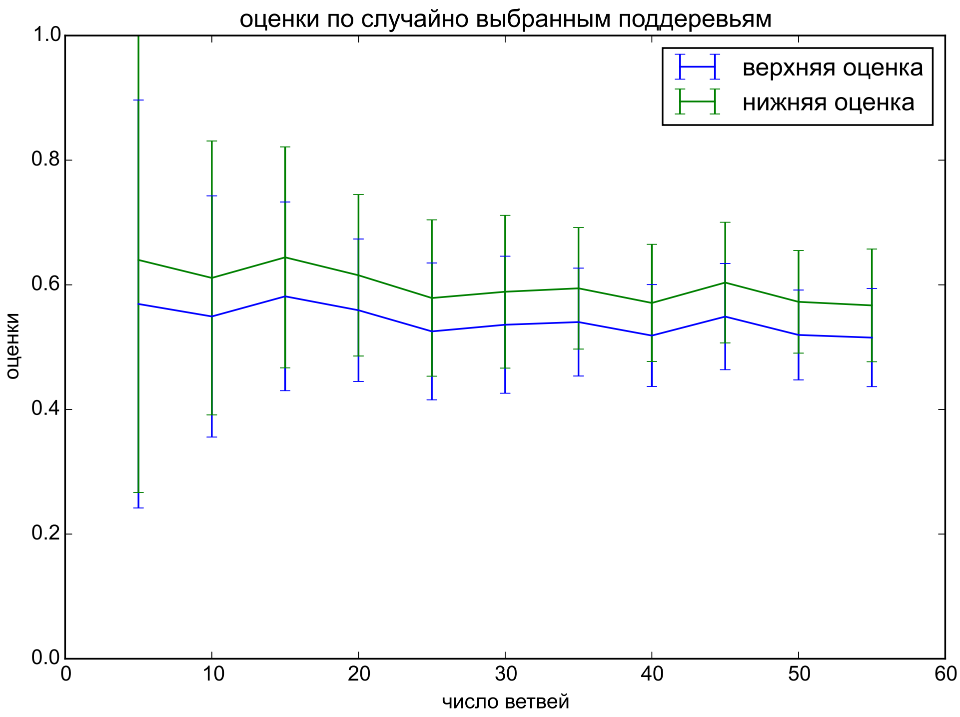


Рис. 2.1. Верхняя и нижняя оценки стоимости опциона по случайным поддеревьям

Оценки стоимости опциона с начальной ценой 100, выписанного на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой $r = 0.05$, дивидендной ставкой $\delta = 0.1$ и волатильностью $\sigma = 0.2$, цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами $\mu = r - \delta$ и $\sigma$, исполняемого 4 раза в году

По графику можно видеть, что оценка, получающаяся по данному алгоритмо, обладает значительно большей дисперсией. При этом время работы близко к линейному, что отчасти компенсирует широкие доверительные интервалы.

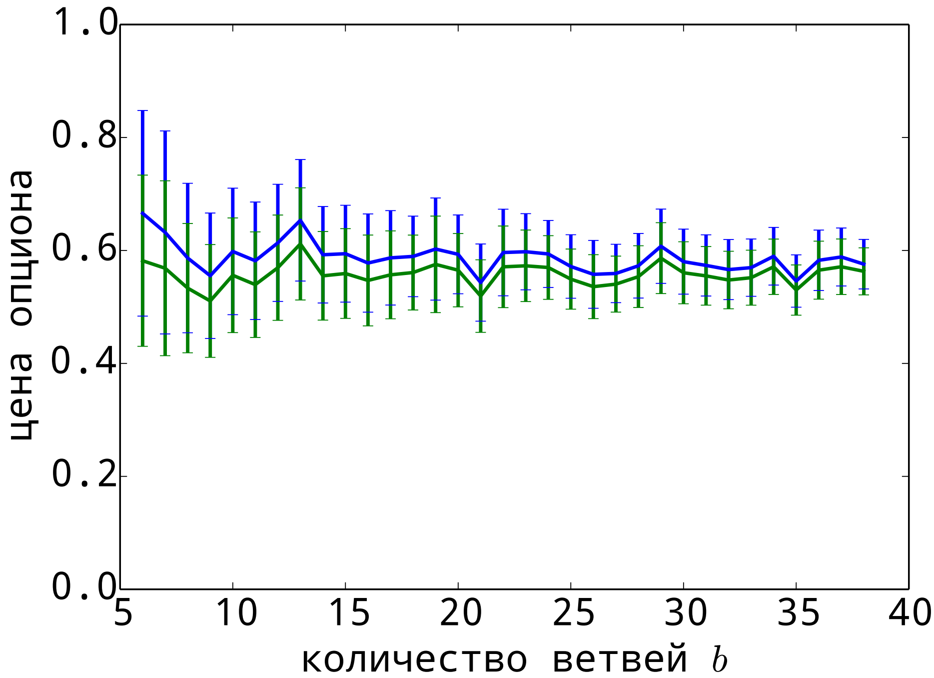


Рис. 2.2. Верхняя и нижняя оценки стоимости опциона по алгоритму Броади-Глассермана Оценки стоимости опциона с начальной ценой 100, выписанного на срок 1 год на базовый актив с риск-нейтральной процентной ставкой $r = 0.05$, дивидендной ставкой $\delta = 0.1$ и волатильностью $\sigma = 0.2$, цена которого — случайный процесс, являющийся геометрическим броуновским движением с параметрами $\mu = r - \delta$ и $\sigma$, исполняемого 4 раза в году

# Список литературы

1. Broadie M., Glasserman P. Pricing American-style securities by simulation // Journal of Economic Dynamics and Control. — 1997. — Vol. 21. — P. 1323–1352.
2. Сергей Михайлович Ермаков. Метод Монте-Карло и смежные вопросы. — Наука, 1975.
3. Broadie Mark, Glasserman Paul, Jain Gautam. Enhanced Monte Carlo estimates for american option prices // Journal of Derivatives. — 1997. — Vol. 5, no. 1 (Fall). — P. 25–44.
4. Duffie Darrell. Dynamic Asset Pricing Theory. — Third Edition edition. — Princeton University Press, 2001.
5. Glasserman Paul. Monte Carlo Methods in Financial Engineering. — Springer, 2004.
6. Haug Espen Gaarder. The Complete Guide to Option Pricing Formulas. — McGraw-Hill Education, 2007. — ISBN: 9780071389976. — URL: https://books.google.ru/books?id=pSKLNAEACAAJ.
7. Peskir Goran, Shiryaev Albert. Optimal Stopping and Free-Boundary Problems. Lectures in Mathematics. ETH Zürich. — 1 edition. — Birkhäuser Basel, 2006.
8. Ю Ду Люу. Методы и алгоритмы финансовой математики / Под ред. Е.В. Чепурин. — БИНОМ. Лаборатория знаний, 2007.
9. Положение о видах производных финансовых инструментов. — 2010. — 04.