Имитационная модель американских опционов

Анастасия Александровна Миллер, 422 группа

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н. Товстик Т.М.

СтатМод

Санкт-Петербург
июнь 2015

Добрый день, меня зовут Анастасия Миллер и моя бакалаврская работа — об оценивании американскох опционов с помощью имитационных моделей.

Основные понятия

Определение

Опцион — договор, по которому потенциальный покупатель или продавец актива получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени.

Что такое опцион? Опцион — это договор, по которому потенциальный покупатель актива получает право, но не обязанность, купить оговорённый актив по указанной в договоре цене в определённый момент в будущем или на протяжении определённого отрезка в будущем. Понятно, что если указанная в договоре цена оказывается ниже рыночной в те моменты, когда опционный договор может быть исполнен, владелец опциона может получить какую-то прибыль от исполнения опциона. Аналогично для потенциального продавца и цены выше рыночной. Следовательно, сам опцион тоже является ценной бумагой, имеющей определённую стоимость. Эта стоимость является объектом оценки в моей работе.

Основные понятия

Справедливой ценой опциона будет максимальная выручка, которую можно получить от исполнения опциона:

$$\sup_{\tau \in [0;T]} \mathsf{E}\left(e^{-r\tau}\left(S_\tau - K\right)^+\right)$$

Дискретные оценки: состояние актива меняется только в определённых точках $t_0, \ldots, t_n \in [0;T]\,, n < \infty$.

Справедливой ценой опциона — ценой опциона в гипотезе эффективного рынка — является максимум ожидаемой выручки от исполнения опциона. Здесь приведена формула для опциона колл, опциона на покупку актива. S_τ — цена актива, на который выписан опцион, в момент времени τ, K — цена страйк, $e^{-r\tau}$ — дисконтирующий множитель.

В работе рассматриваются модели, в которых работает предположение о том, что опционный контракт может быть исполнен лишь в некотором конечном множестве моментов времени.

Формулировка задачи динамического программирования

$$\begin{cases} V_i(X_i) = \max\left\{e^{-rt_i}\left(S_{t_i} - K\right)^+, \mathsf{E}\left[V_{i+1}\left(X_{i+1}\right) | X_i\right]\right\}, i \in 1{:}n{-}1 \\ V_n(X_n) = e^{-rt_n}\left(S_{t_n} - K\right)^+ \end{cases}$$

здесь $V_0(X_0)$ — цена опциона, исполняемого n раз в году, на момент выписывания которого базовый актив был в состоянии X_0.
В (Broadie и Glasserman 1997) разработаны оценки сверху и снизу для $V_0(X_0)$.

4/12 Анастасия Александровна Миллер, 422 группа Имитационная модель американских опционов

Это предположение приводит к формулировке задачи динамического программирования, представленной на слайде. Здесь V_i — цена опциона на актив в состоянии X_i, который может быть исполнен в моменты от t_i до t_m, и понятно, что эта цена — это максимум из той выручки, что может быть получена при немедленном исполнении опциона, и цены, полученной, если опцион не будет исполнен в i-й момент.

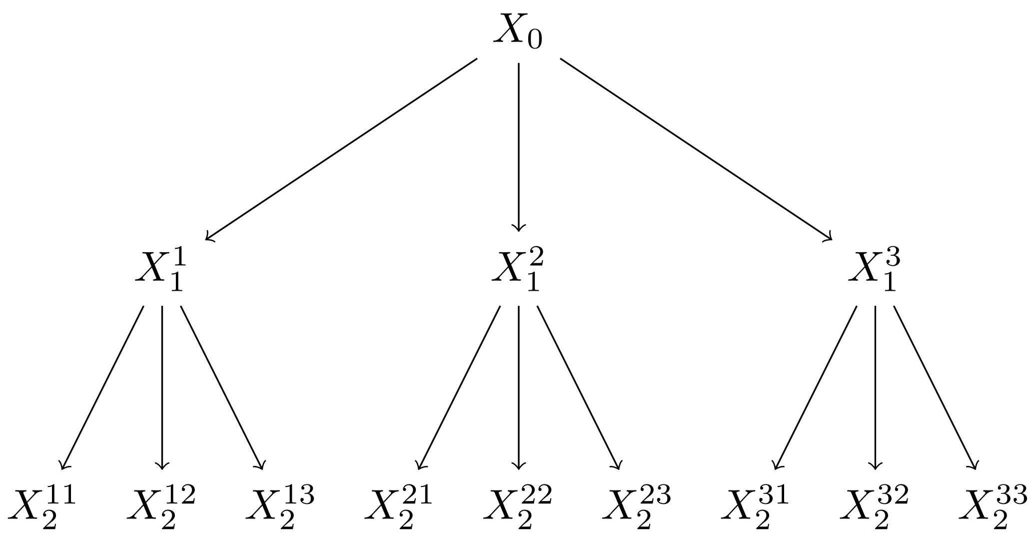
В статье Броади 1997 года построены оценки на имитационных моделях, которые являются оценками сверху и оценками снизу для функции V. Эти оценки с ростом времени сходятся к истинному значению.

Оценки Броади-Глассермана

В оценках Броади-Глассермана

$$\mathsf{E}\left[V_{i+1}\left(X_{i+1}\right)|X_i\right] \approx \frac{1}{\#J}\sum_{j\in J} V_{i+1}\left(X_{i+1}^{j}\right)$$

что приводит к взаимосвязи состояний вида



В них математическое ожидание заменяется на среднее арифметическое всех или части оценок на следующем шаге алгоритма (и именно эта замена является источником смещения получаемых оценок). Таким образом, мы видим, что рекуррентное выражение содержит оператор, который связывает значение в k момент времени с b значениями в последующий момент времени. Именно это приводит нас к визуализации задачи в виде дерева состояний, представленного на рисунке.

Постановка задачи

Число вершин в дереве:

$$\sum_{k=0}^{m} b^k = \frac{b^{m+1}-1}{b-1} = O(b^m), \text{ при этом } m \to \infty.$$

Задача: указать методы, позволяющие избежать экспоненциального роста вычислительной работы.

Избежать экспоненциального роста позволяет рандомизация.

Однако с ростом времени вычислительная работа растёт экспоненциально, что препятствует использованию этих оценок при подсчёте цены А.о. Задачей дипломной работы было указать методы, позволяющие избежать экспоненциального роста вычислительной работы.

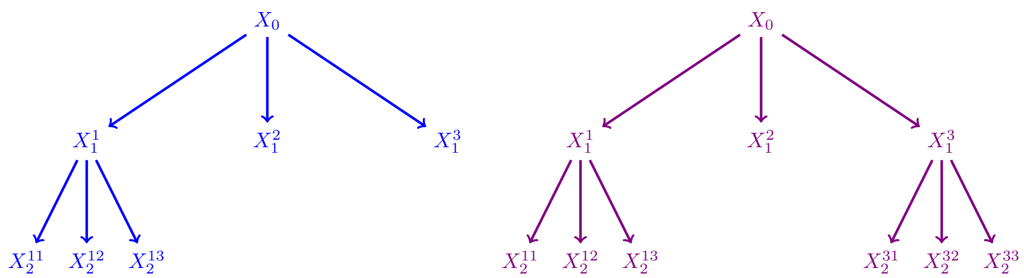
Известно, что одним из общих методов, позволяющих избежать экспоненциального роста вычислительной работы в разных вычислительных методах, является метод рандомизации. Поэтому было принято решение попробовать строить оценки этих оценок с помощью случайно выбранных поддеревьев на деревьях, число вершин в которых растёт экспоненциально.

Интегральные уравнения с полиномиальной нелинейностью

В «Методах Монте-Карло и смежных вопросах»
С. М. Ермакова для

$$\varphi(x) = \int K(x, y_1, \ldots, y_b) \prod_{i=1}^{b} \varphi(y_i)\, \mu^b(dy_1 \cdots dy_b) + f(x),$$

описано использование случайных поддеревьев полного дерева



Подобный приём (случайный выбор поддеревьев) используется при решении нелинейных уравнений, в которых присутствует полиномиальная нелинейность. Там решение уравнения методом последовательных приближений может быть описано суммой слагаемых по всем поддеревьям полного дерева. Рандомизация позволяет суммировать не по всем поддеревьям, а только по некоторым.

Интегральные уравнения с полиномиальной нелинейностью

Также имеется сходство между самими уравнениями:

$$\varphi\left(x\right)=f\left(x\right)+\int K\left(x,y_1,\ldots,y_b\right)\prod_{i=1}^{b}\varphi\left(y_i\right)\mu^b\left(dy_1\cdots dy_b\right) \text{ и}$$

$$V_i(X_i)=h\left(X_i\right)\oplus\int V_{i+1}p_{i,i+1}\left(X_i,X_{i+1}\right)dX_{i+1}.$$

Можно проводить аналогии в построении оценок.

Также у уравнения динамического программирования имеется формальное сходство с интегральным уравнением. Поэтому можно попробовать использовать для выбора поддерева механизм, использованный в методе решения нелинейных уравнений. Так как метод поколений приводит к экспоненциальному росту памяти, выбираем лексикографический метод отбора, что приводит нас к следующему механизму моделирования.

Механизм моделирования

Заданы $p(X_k; X_{k+1}^1, \cdots, X_{k+1}^b)$ и $g_k(X_k)$, X_0.

def `generate`(X_i, b):

> **input** : текущее состояние $X_i^{j_1 \cdots j_i}$ (включает в себя время t_i), число веток b
>
> `Get`(*событие обрыва* η *с вероятностью* g_k);
>
> **if** η *произошло* **then**
>
> > возвращаемся к родительской вершине;
>
> *промоделировать состояния* $\left\{X_{i+1}^1 \cdots X_{i+1}^1\right\}$;
>
> **for** $x \in \left\{X_{i+1}^l\right\}_{l=1}^k$ **do**
>
> > `generate`(x, b);

Задаём некоторую переходную плотность $p(x_k, x_{k+1}^1, \cdots, x_{k+1}^b)$ и вероятность обрыва g_k, плотность нормирована надлежащим образом (интеграл по носителю равен $1 - g_k(X_k)$). В случае, если наступает событие обрыва, из данной вершины более не генерируются потомки, в ином — генерируется b потомков с плотностью ${p(x_k, x_{k+1}^1, \cdots, x_{k+1}^b)}/{1-g_k(X_k)}$. Выбор вероятностей обрыва позволяет контролировать объём дерева. Чем меньше вероятность обрыва, тем меньше дисперсия оценки, но тем больше объём дерева и сходство с исходной оценкой.

Результаты

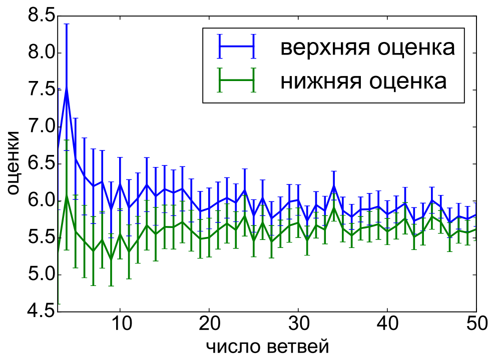


Рис.: Полное дерево.

Реализация алгоритма из статьи

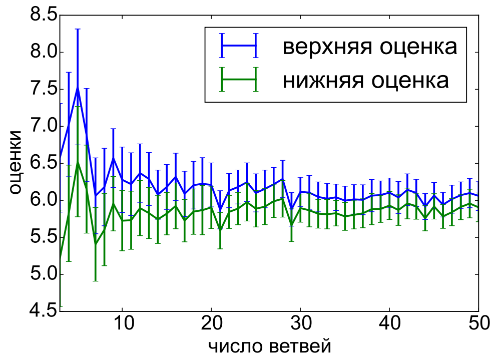


Рис.: Случайные поддеревья.

Реализация предложенного в ВКР алгоритма

Сравнительные результаты, показывающие наличие сходимости, представлены на слайде. Наличие сходимости относительно очевидно и доказано в работе, при числе ветвей дерева, стремящемся к бесконечности, и числе испытаний, стремящемся к бесконечности, получаемые оценки стремятся к истинному значению.

Результаты

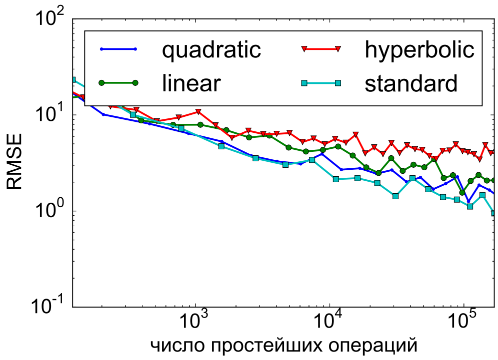


Рис.: Средняя ошибка оценки сверху

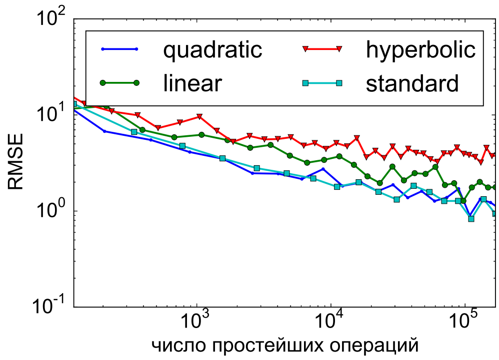


Рис.: Средняя ошибка оценки снизу

Графики на этом слайде показывают среднюю ошибку оценок по поддеревьям с различными вероятностями обрыва: с убывающей линейно, квадратично и как корень из отношения текущего шага к общему числу шагов, и по полному дереву. Видно, что дисперсия оценок, полученных за одно и то же число элементарных операций, примерно одинакова.

Итоги

- Рассмотрены оценки Американских опционов, основанные на имитационных моделях.
- Проведены аналогии с решением интегральных уравнений с полиномиальной нелинейностью.
- Реализованы методы и проведены вычислительные эксперименты по подбору оптимального соотношения дисперсии и вычислительной сложности.
- Предложенный метод применим при больших m, когда исходный метод работает неприемлемо долго.

В работе были рассмотрены оценки стоимости а.о., которые строятся на базе имитационных моделей. Эти оценки с ростом времени требуют экспоненциально растущей вычислительной работы. Для преодоления этой проблемы была использована идея рандомизации. Была использована аналогия, возникающая между методами д.п., используемыми при построении этих оценок, и методами решения уравнений с полиномиальной нелинейностью. Показано на вычислительных примерах, что «проклятье размерности» может быть преодолено подходящим выбором ветвящегося процесса.