Имитационная модель американских опционов

Анастасия Миллер

Санкт-Петербургский государственный университет
Математико-механический факультет
Кафедра статистического моделирования

Научный руководитель: д.ф.-м.н. Ермаков С.М.
Рецензент: к.ф.-м.н. Товстик Т.М.

СтатМод

Санкт-Петербург
июнь 2015

Основные понятия

Определение

Опцион — договор, по которому потенциальный покупатель или продавец актива получает право, но не обязательство, совершить покупку или продажу данного актива по заранее оговорённой цене в определённый договором момент в будущем или на протяжении определённого отрезка времени.

Основные понятия

Справедливой ценой опциона будет максимальная выручка, которую можно получить от исполнения опциона:

$$\sup_{\tau \in [0;T]} \mathsf{E} \left(e^{-r\tau} \left(S_\tau - K \right)^+ \right)$$

Дискретные оценки: состояние актива меняется только в определённых точках $t_0, \ldots, t_n \in [0; T], n < \infty$.

Формулировка задачи динамического программирования

Дискретизация процесса даёт задачу динамического программирования

$$\begin{cases} V_i(X_i) = \max\left\{e^{-rt_i}\left(S_{t_i} - K\right)^+, \mathsf{E}\left[V_{i+1}\left(X_{i+1}\right) | X_i\right]\right\}, i \in 1{:}n{-}1 \\ V_n(X_n) = e^{-rt_n}\left(S_{t_n} - K\right)^+ \end{cases}$$

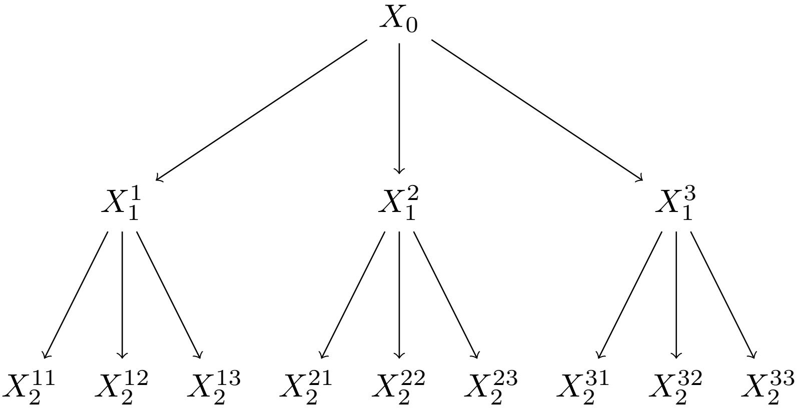
здесь $V_0(X_0)$ — цена опциона, исполняемого n раз в году, на момент выписывания которого базовый актив был в состоянии X_0.
В статье М.Броади и П.Глассермана 1997 г. разработаны оценки сверху и снизу для $V_0(X_0)$.

Оценки Броади-Глассермана

В оценках Броади-Глассермана

$$\mathsf{E}\left[V_{i+1}\left(X_{i+1}\right)|X_i\right] \approx \frac{1}{\#J}\sum_{j\in J} V_{i+1}\left(X_{i+1}^{j}\right)$$

что приводит к взаимосвязи состояний вида



Постановка задачи

Число вершин в дереве:

$$\sum_{k=0}^{m} b^k = \frac{b^{m+1} - 1}{b - 1} = O(b^m), \text{ при этом } m \to \infty.$$

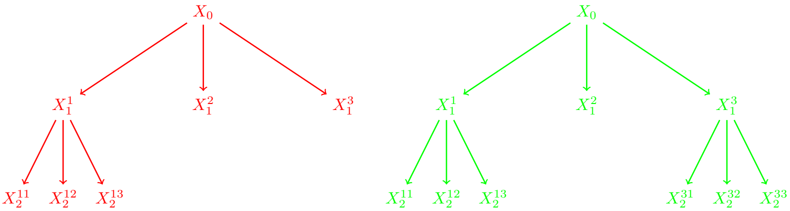
Задача: указать методы, позволяющие избежать экспоненциального роста вычислительной работы.

Интегральные уравнения с полиномиальной нелинейностью

В «Методах Монте-Карло и смежных вопросах»
С. М. Ермакова для

$$\varphi(x) = \int K(x, y, \varphi(y))\, \varphi(y)\, \mu(dy) + f(x) \qquad \mod \mu,$$

описано использование схожих деревьев.



Механизм моделирования

Заданы $p(X_k; X_{k+1}^1, \cdots, X_{k+1}^b)$ и $g_k(X_k)$, X_0.

В каждом новом состоянии моделируется событие обрыва траектории. Если траектория не обрывается,

то моделируем b дочерних вершин с плотностью $p(x_k; x_{k+1}^1, \cdots, x_{k+1}^b) / 1 - g_k(X_k)$ и повторяем процесс в каждой из них,

иначе возвращаемся к родительской вершине.

Результаты

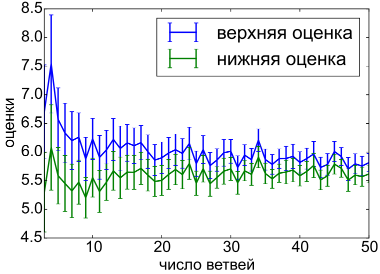


Рис.: Полное дерево.

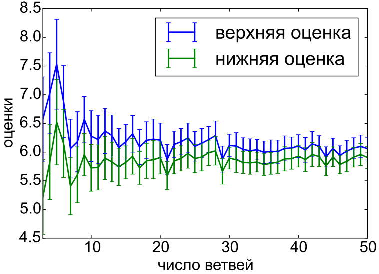


Рис.: Случайные поддеревья.

Результаты

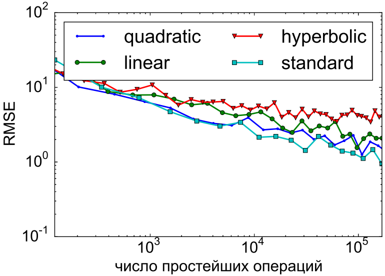


Рис.: Средняя ошибка оценки сверху

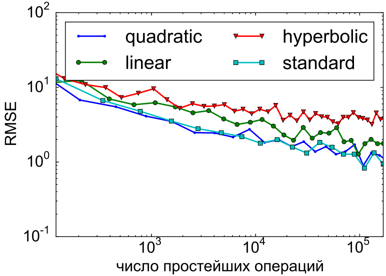


Рис.: Средняя ошибка оценки снизу

Выводы

- Рассмотрены оценки Американских опционов, основанные на имитационных моделях.
- Проведены аналогии с решением интегральных уравнений с полиномиальной нелинейностью.
- Реализованы методы и проведены вычислительные эксперименты по подбору оптимального соотношения дисперсии и вычислительной сложности.
- Предложенный метод применим при больших m, когда исходный метод даже при минимальных параметрах работает неприемлемо долго.

Конец

Вопросы