0.1 Напоминание

Решаем задачу быстрого нахождения верхней (асимптотически несмещённой) оценки стоимости Американского опциона с ценой страйк K. Стоимость $V_0(X_0) = \max_{\gamma \in \Gamma} A(\gamma)$, где $A(\gamma)$ — оператор, определённый на поддеревьях γ полного дерева Γ. Полное дерево Γ — это дерево, у каждой вершины которого, кроме листьев, ровно b дочерних вершин, а все листья находятся на расстоянии m поколений от корня. Поддеревья полного дерева γ являются подмножествами Γ, содержат в себе корень Γ, связны, а у каждой их вершины либо 0, либо b потомков. Оператор $A(\gamma)$ выглядит следующим образом:

$$A(\gamma) = \sum_{X_k^{i_1 \cdots i_k} \in \gamma} \frac{1}{b^k} h_k\left(X_k^{i_1 \cdots i_k}\right) = \sum_{X_k^{i_1 \cdots i_k} \in \gamma} \frac{1}{b^k} e^{-rk\triangle t} \left(K - X_k^{i_1 \cdots i_k}\right)^+$$

последний сомножитель в выражении под знаком суммирования зависит от типа опциона: $\left(K - X_k^{i_1 \cdots i_k}\right)^+$ или $\left(X_k^{i_1 \cdots i_k} - K\right)^+$.

1 Распределение оператора на поддеревьях

Цена актива, на который выписан опцион, X, моделируется как геометрическое броуновское движение. Т.е.

$$X_k = X_0 \exp\left(\left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_{k\triangle t}\right)$$

где $W_t \sim N(0, t)$. Почему — видимо, потому что это предположение модели Блэка-Шоулса. Таким образом, если обозначить логнормальное распределение как $\log N$ ($\xi \sim \log N\left(\mu, \sigma^2\right)$, если $\log \xi \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$),

$$X_k \sim \log N\left(\log X_0 + \left(r - \delta - \frac{\sigma^2}{2}\right) k\triangle t, \sigma^2 k\triangle t\right)$$

Для того, чтобы выписать распределение случайной величины $A(\gamma)$, нужно определиться с тем, считаем ли мы γ случайным поддеревом или наперёд заданным. Мне пока непонятно.

2 Предельная теорема для рекордных величин

Для ряда $X_1, \ldots, X_n, \cdots$ значений случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ n-ое рекордное время $L(n)$ определяется как $L(0) = 0$, $L(1) = 1$, $L(n+1) = \min\left\{j > L(n) \middle| X_j > X_{L(n)}\right\}$, n-ая рекордная величина — как $X(n) = X_{L(n)}$. Так как нас интересует максимум по всем поддеревьям, нам интересно значение $\lim_{n\to\infty} X(n)$.

Пока я видела следующие утверждения:

$$F_{X(n)}(x) = \frac{1}{(n+1)!} \int\limits_{0}^{-\log(1-F(x))} e^{-uu^{n-1}du}$$

– так мы получаем функцию распределения n-ой рекордной величины.

$$\frac{-\log(1-F_{X(n)}(X(n)))}{n} \to_{n\to\infty} 1$$

– это, судя по всему, представляет собой предельную теорему.