Оценка американских опционов. Метод случайного дерева

Миллер Анастасия Александровна

СПбГУ, 5$^{\text{ый}}$ семестр, 322 гр.

1 марта 2014 г.

Содержание

1 Описание задачи

1.1 Формулировка задачи

Необходимо установить размер справедливой премии опциона до того момента, как этот опцион будет кому-то продан.

Обозначения и умолчания Будем строить модель на примере Бермудского опциона, который может быть исполнен в каждый из фиксированных моментов времени $t_1, \ldots t_m$. Мы также сузим класс решаемых нами задач до тех, в которых вся необходимая информация об активе, на который выписан рассматриваемый опцион, может быть представлена в виде Марковского процесса $X(t), t \in \{t_i\}_{i=1}^m$ со значениями в $\mathbb{R}^d$. Для уменьшения объёма текста будем обозначать $X(t_i) \equiv X_i$. Положим также $h_i(x)$ – размер выплаты по опциону в момент t_i при том, что $x = X_i$ и опцион не был исполнен до этого, $V_i(x)$ – стоимость опциона в момент t_i при том, что $x = X_i$.

Нетрудно видеть, что

$$V_m(x) = h_m(x) \tag{1}$$

$$V_{i-1}(x) = \max\{h_{i-1}(x), \mathsf{E}[V_i(X_i) | X_{i-1} = x]\} \tag{2}$$

- на каждом шаге мы выбираем наиболее выгодное решение. Здесь нас интересует значение $V_0(X_0)$.

2 Метод случайного дерева

Вместо того, чтобы строить оценку, каким-либо образом стремящуюся к требуемому нами значению, мы построим две оценочные функции, оценивающие V_n сверху и снизу. Пусть $\hat{V}_n(b)$ и $\hat{v}_n(b)$ – такие оценки, зависящие от некоторого параметра b.

Метод случайного дерева основан на моделировании цепи $X_0, X_1, \ldots X_n$. Зафиксируем параметр ветвления b. Из исходного состояния X_0 смоделируем b независимых следующих состояний $X_1^1, X_1^2, \ldots X_1^b$, все с условием X_1. Для каждого X_1^i снова смоделируем b независимых последующих состояний $X_2^{i1}, \ldots X_2^{ib}$. На m-ом шаге будем иметь b^m состояний, и это и есть источник основного недостатка этого метода – его экспоненциальной алгоритмической сложности.

2.1 Оценка сверху

Определим $\hat{V}_i^{j_1,j_2 \cdots j_i}$, вдохновляясь 1. В последних вершинах (листьях) дерева зададим

$$\hat{V}_m^{j_1 \cdots j_m} = h_m\left(X_m^{j1 \cdots j_m}\right) \tag{3}$$

Идя вверх по дереву, зададим

$$\hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} = \max\left\{h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}\right\} \tag{4}$$

С помощью индукции можно доказать, что наша оценка уклоняется вверх в каждом узле

Теорема 1. $\forall i \in 1:n$

$$\mathsf{E}\left[\hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} | X_i^{j_1 \cdots j_i}\right] \geqslant V_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right)$$

Доказательство. В листьях дерева неравенство выполняется как равенство по определению.

Докажем, что если утверждение теоремы выполняется на $i+1$ шаге, то оно выполняется и на i. По определению

$$\mathsf{E}\left[\hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} | X_i^{j_1 \cdots j_i}\right] = \mathsf{E}\left[\max\left\{h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}\right\} | X_i^{j_1 \cdots j_i}\right]$$

с помощью неравенства Йенсена ($\varphi\left(\mathsf{E}\left[X\right]\right) \leqslant \mathsf{E}\left[\varphi(X)\right]$) это можно оценить

$$\mathsf{E}\left[\max\left\{h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right), \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}\right\} | X_i^{j_1 \cdots j_i}\right] \geqslant \max\left\{h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right), \mathsf{E}\left[\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} | X_i^{j_1 \cdots j_i}\right]\right\}$$

в силу того, что $\forall\, j \in 1:b \quad X_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}$ - независимые одинаково распределённые случайные величины (и их математическое ожидание одинаково), $\mathsf{E}\left[\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}\right] = \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\mathsf{E}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} = \mathsf{E}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i 1}$, а в силу индукционного предположения

$$\max\left\{h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right), \mathsf{E}\left[\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i 1} | X_i^{j_1 \cdots j_i}\right]\right\} \geqslant \max\left\{h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right), V_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right)\right\}$$

Таким образом, $\mathsf{E}\left[\hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} | X_i^{j_1 \cdots j_i}\right] \geqslant \max\left\{h_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right), V_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right)\right\}$ □

Мы также доказываем, что $\hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i}$ сходится по вероятности к $V_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right)$ при $b \to \infty$. В листьях дерева это очевидно ($\hat{V}_m^{j_1 \cdots j_m} = h_m\left(X_m^{j1 \cdots j_m}\right)$ по определению), на $i-1$ шаге цена удержания опциона $\frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}$ является средним арифметическим независимых одинаково распределённых случайных величин и сходится по закону больших чисел. Сходимость распространяется и на саму оценку в силу непрерывности операции взятия максимума. Используя тот факт, что $\forall\, a, c_1, c_2 \in \mathbb{R} \mid \max\left(a, c_1\right) - \max\left(a, c_2\right) \mid \leqslant |c_1 - c_2|$, мы получаем

$$\left|\hat{V}_i^{j_1 \cdots j_i} - V_i\left(X_i^{j_1 \cdots j_i}\right)\right| \leqslant \frac{1}{b}\sum_{j=1}^{b}\left|\hat{V}_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j} - \mathsf{E}\left[V_{i+1}\left(X_{i+1}^{j_1 \cdots j_i j}\right) | X_{i+1}^{j_1 \cdots j_i}\right]\right|$$

что позволяет нам вывести из сходимости на $i+1$ шаге сходимость на i шаге. Подробнее в [1]

Более того, асимптотически наша оценка оказывается не сдвинутой вверх, т.е. $\mathsf{E}\hat{V}_0 \to V_0\left(X_0\right)$

2.2 Оценка снизу

Значения оценки сверху в каждый момент времени – это выбор максимума из стоимости опциона при его немедленном исполнении и математического ожидания стоимости удержания опциона. Но стоимость удержания опциона рассчитывается, исходя из дочерних узлов дерева состояний актива,то есть очченка сверху рассчитывается, опираясь на информацию о будущем. Чтобы убрать ошибку, связанную с этим, нам необходимо отделить механизм принятия решения о исполнении/удержании опциона от значений, полученных после принятия решения об удержании опциона.

По сути, нам нужно оценить $\max\{a, \mathsf{E}Y\}$ с помощью b независимых одинаково распределённых реализаций случайной величины Y для некоторой константы a и случайной величины Y. Оценка $\max\left\{a, \bar{Y}\right\}$ является оценкой сверху, так как $\mathsf{E}\max\left\{a, \bar{Y}\right\} \geqslant \max\left\{a, \mathsf{E}\bar{Y}\right\} = \max\{a, \mathsf{E}Y\}$, что мы и использовали в построеии нашей оценки сверху.

3 Результаты и планы

Таким образом, мы получили оценку сверху ((3),(4)) и снизу ((**??**),(**??**)) для справедливой цены Бермудского опциона. Нашей конечной целью является оценка Американского опциона. Оценка для Американского опциона может быть получена из этой путём увеличения m. Так как данный метод предполагает $m \leqslant 5$, увеличивать его в рамках одного шага нет смысла. Возможно, построение последовательности деревьев, где «хвост» дерева стягивается в новую вершину, с увеличением длины последовательности принесёт больший успех.

Список литературы

[1] M. Broadie and P. Glasserman. Pricing american-style securities by simulation. *Journal of Economic Dynamics and Control*, 21:1323–1352, 1997.

[2] Paul Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2004.