

Übungsskript und Formelsammlung TSL

Name:

Stand: 14. Juli 2015

| | |
|---|--|
| 1.2.2.1 Differentialgleichung der Stromlinie $\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}(\vec{x}, t)}{ \vec{u} }, \quad (t = \text{konst.})$ | 1.2.2.2 Differentialgleichung der Bahnlinie $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t), \quad (t \text{ ist Kurvenparameter})$ |
| 1.2.3.2 Materielle Ableitung $\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\varphi$ | 1.2.4.7 Potentialströmung $\text{rot}\vec{u} = 0 \Rightarrow \vec{u} = \nabla\Phi$ |
| 1.2.4.4 Dehnungsgeschwindigkeit materieller Linienelemente $ds^{-1} \frac{D(ds)}{Dt} = e_{ij} l_i l_j$ | 1.2.4.5 Differenz der Winkelgeschwindigkeit zweier materieller Linienelemente $\frac{D(\varphi - \varphi')}{Dt} = -2e_{ij} l_i l'_j$ |
| 1.2.4.4 Richtung des Linienelementes $d\vec{x}$ $l_i = \frac{dx_i}{ds} \quad \text{mit } ds = d\vec{x} $ | 1.2.4.5 Mittelwert der Winkelgeschwindigkeiten $\frac{1}{2} \frac{D}{Dt} (\varphi + \varphi') = \Omega_{ji} l'_i l_j$ |
| 1.2.4.2 Dehnungsgeschwindigkeitstensor \mathbf{E} $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (e_{ij} = e_{ji})$ | 1.2.4.3 Rotationsgeschwindigkeitstensor $\mathbf{\Omega}$ $\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right), \quad (\Omega_{ij} = -\Omega_{ji})$ |
| 1.2.5.1 Reynoldssches Transporttheorem allgemein $\frac{D}{Dt} \iiint_{(V(t))} \varphi dV = \iiint_{(V)} \frac{\partial\varphi}{\partial t} dV + \iint_{(S)} \varphi (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$ | 1.2.5.2 Reynoldssches Transporttheorem mit Dichte ϱ im Integral $\frac{D}{Dt} \iiint_{(V(t))} \varrho \varphi dV = \iiint_{(V)} \varrho \frac{D\varphi}{Dt} dV$ |
| 2.1 Kontinuitätsgleichung in Integralform $\iiint_{(V)} \frac{\partial\varrho}{\partial t} dV + \iint_{(S)} \varrho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = 0$ | 2.1 Kontinuitätsgleichung in differentieller Form $\frac{\partial\varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho u_i) = 0$ |
| 2.2 Impulssatz in Integralform allgemein $\iiint_{(V)} \frac{\partial(\varrho \vec{u})}{\partial t} dV + \iint_{(S)} \varrho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{(V)} (\varrho \vec{k}) dV + \iint_{(S)} \vec{t} dS$ | 2.2 Impulssatz in Integralform stationär, ohne Volumenkräfte $\iint_{(S)} \varrho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{(S)} \vec{t} dS$ |
| 2.3 Drallsatz in Integralform, allgemein $\iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{x} \times (\varrho \vec{u})] dV + \iint_{(S)} [\vec{x} \times (\varrho \vec{u})] (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS$ $= \iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{k}) dV + \iint_{(S)} \vec{x} \times \vec{t} dS$ | 2.3 Drallsatz in Integralform stationär, ohne Volumenkräfte $\iint_{(S)} [\vec{x} \times (\varrho \vec{u})] (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{(S)} \vec{x} \times \vec{t} dS$ |
| 2.4 Beschleunigtes Bezugssystem Absolutgeschwindigkeit \vec{c} $\vec{c} = \vec{w} + \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{v}$ | 2.4 Zeitliche Änderung eines beliebigen Vektors \vec{b} im beschleunigten Bezugssystem $\left[\frac{D\vec{b}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{b}}{Dt} \right]_B + \vec{\Omega} \times \vec{b}$ |
| 2.4.1 Impulssatz im beschleunigten Bezugssystem, allgemein $\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint_{(V)} \varrho \vec{c} dV \right]_B + \iint_{(S)} \varrho \vec{c} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS + \vec{\Omega} \times \iiint_{(V)} \varrho \vec{c} dV = \iiint_{(V)} \varrho \vec{k} dV + \iint_{(S)} \vec{t} dS$ | |
| 2.4.1 Impulssatz im beschleunigten Bezugssystem, in $\vec{\Omega}$ -Richtung stationär im Relativsystem, ohne Volumenkräfte $\iint_{(S)} [\varrho \vec{e}_{\Omega} \cdot \vec{c}] (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{(S)} \vec{e}_{\Omega} \cdot \vec{t} dS$ | |
| 2.4.2 Drallsatz im beschleunigten Bezugssystem, Integralform, allgemein $\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{c}) dV \right]_B + \iint_{(S)} [\vec{x} \times (\varrho \vec{c})] (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS + \vec{\Omega} \times \iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{c}) dV = \iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{k}) dV + \iint_{(S)} \vec{x} \times \vec{t} dS$ | |
| 2.4.2 Drallsatz im beschleunigten Bezugssystem, in $\vec{\Omega}$ -Richtung stationär im Relativsystem, ohne Volumenkräfte $\vec{e}_{\Omega} \cdot \iint_{(S)} [\vec{x} \times (\varrho \vec{c})] (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS = \vec{e}_{\Omega} \cdot \iint_{(S)} \vec{x} \times \vec{t} dS$ | |
| 2.6 Energiebilanz, Integralform, allgemein $\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{(V)} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + e \right) \varrho dV + \iint_{(S)} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + e \right) \varrho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS = \iiint_{(V)} \vec{u} \cdot (\varrho \vec{k}) dV + \iint_{(S)} \vec{u} \cdot \vec{t} dS - \iint_{(S)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS$ | |
| 2.8 Thermisch ideales Gas: $p = \varrho RT, \quad e = c_v T$ | |

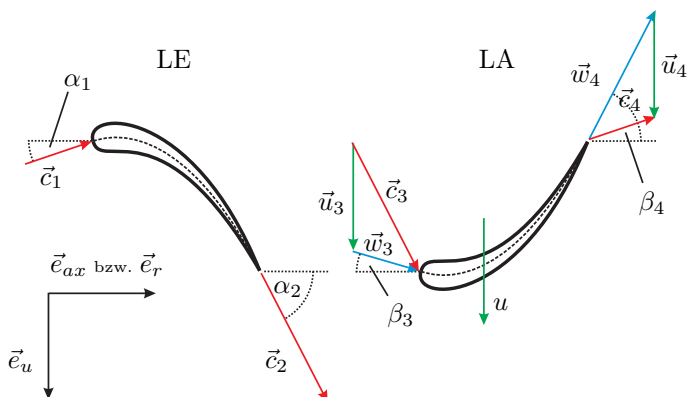
| 3 Materialgleichungen | | allgemein | Newtonsche Flüssigkeiten | Reibungsfreie Flüssigkeiten |
|--|--|--|---|---|
| Spannungsvektor \vec{t} | | $t_i = n_j \tau_{ji}$ | | |
| Spannungstensor \mathbf{T} | | $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + P_{ij}$ | $\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* e_{kk} \delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$ | $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$ |
| Reibspannungstensor \mathbf{P} | | | $P_{ij} = \lambda^* e_{kk} \delta_{ij} + 2\eta e_{ij}$ | $P_{ij} = 0$ |
| Dissipationsfunktion Φ | | $\Phi = P_{ij} e_{ij}$ | $\Phi = \lambda^* e_{kk} e_{ii} + 2\eta e_{ij} e_{ij}$ | $\Phi = 0$ |
| Wärmestromvektor \vec{q} | | | $q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$ inkompressibel: $e_{kk} = 0$ | $q_i = 0$ |
| 4.1.1 Navier-Stokessche Gleichungen allgemein $\varrho \frac{Du_i}{Dt} = \varrho k_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -p + \lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right\}$ | | | 4.1.1 Navier-Stokessche Gleichungen inkompressibel, ohne Volumenkräfte, $\eta = \text{konst.}$ $\varrho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k}$ | |
| 4.1.1 Energiegleichung für Newtonsche Flüssigkeiten $\varrho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\varrho} \frac{D\varrho}{Dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\}$ | | | 3 und 4.1.3 Reynoldssche Zahl mit typischer Länge L (z.B. Rohrdurchmesser d) $Re = \frac{UL\varrho}{\eta} = \frac{UL}{\nu}$ | |
| 4.2.1 Eulersche Gleichung für reibungsfreie Flüssigkeiten ($\eta = 0$) $\varrho \frac{Du_i}{Dt} = \varrho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i}$ | | | 4.2.2 Bernoullische Gleichung, allgemein entlang einer Stromlinie $\int \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} + \psi = C$ | |
| 4.2.2 Bernoullische Gleichung für $\varrho = \text{konst.}$ und $\psi = gz$, entlang einer Stromlinie $\int \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + gz = C$ bzw.: $\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\varrho} + gz_2 = \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\varrho} + gz_1$ | | | | |
| 4.2.2 Bernoullische Gleichung für Potentialströmung ($\text{rot} \vec{u} = 0$), mit $\varrho = \text{konst.}$ und $\psi = gz$ im gesamten Strömungsfeld $\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{p}{\varrho} + gz = C(t)$ | | | 4.2.2 Bernoullische Gleichung für ein rotierendes Bezugssystem und $\varrho = \text{konst.}$ mit $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z = \text{konst.}$ und $\psi = gz$ entlang einer Stromlinie $\int \frac{\partial w}{\partial t} ds + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + gz - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 = C$ | |
| 4.2.3 Zirkulation $\Gamma = \oint_{(C)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \iint_{(S)} (\text{rot} \vec{u}) \cdot \vec{n} dS$ | | | 4.2.3 Biot-Savart Gesetz $\vec{u}_R(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int \frac{d\vec{x}' \times \vec{r}}{r^3}$ (Faden) | |
| 4.2.3 Biot-Savart Gesetz endlicher Wirbelfaden $ \vec{u}_R = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2)$ | 4.2.3 Biot-Savart Gesetz unendlicher Wirbelfaden $ \vec{u}_R = \frac{\Gamma}{2\pi a}$ | | 5.1 Hydrostatische Druckverteilung $p(z) = p_0 - \varrho g z$ | 5.2 Kraft auf ebene Fläche $\vec{F} = -\vec{n} p_s A$ |
| 5.2 Moment bezüglich eines Punktes $P(x'_p, y'_p, z'_p)$ $\vec{M}_P = (\varrho g I_{x'y'} \sin \varphi + y'_p p_s A) \vec{e}_{x'} - (\varrho g I_{y'y'} \sin \varphi + x'_p p_s A) \vec{e}_{y'}$ | | | 5.2 Druckpunktkoordinaten $x'_d = -\frac{\varrho g I_{y'} \sin \varphi}{p_s A}$, $y'_d = -\frac{\varrho g I_{x'} \sin \varphi}{p_s A}$ | |
| 5.2 Kraft auf Ersatzkörper $F_x = \mp p_s A_x$, $F_z = p_0 A_z + \varrho g V$ | | 9.1 Volumenstrom $\dot{V} = uA = \text{konst.}$ | 9.1 Hydraulische Leistung $P = \Delta p \dot{V}$ | |
| 9.1 Stromfadentheorie Erweiterte Bernoullische Gleichung $\varrho \frac{u_2^2}{2} + p_2 + \varrho g z_2 + \sum \Delta p_v + \sum \Delta p_T - \sum \Delta p_P = \varrho \frac{u_1^2}{2} + p_1 + \varrho g z_1$ | | | 9.1 Druckverlust Δp_v | |
| | | | Allgemein | $\zeta \varrho \frac{u^2}{2}$ |
| | | | Rohr | $\lambda \frac{l}{d} \varrho \frac{u^2}{2}$ |
| | | | Carnot-Stoß | $\varrho \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2} \right)^2$ |
| | | | Einschnürung | $\varrho \frac{u_2^2}{2} \left(\frac{1-\alpha}{\alpha} \right)^2$ |
| | | | Diffusor | $(1 - \eta_D) \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) \varrho \frac{u_1^2}{2}$ |
| | | | Düse | 0 |

Allgemeine Hinweise

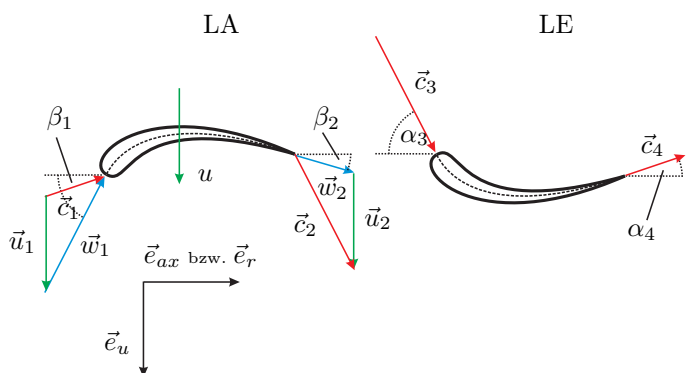
- Die **tensorielle Feldgröße** $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ kann ein Skalar (z. B. Temperatur T , Dichte ρ), ein Vektor (z. B. Geschwindigkeit \vec{u}) oder auch ein Tensor höherer Stufe bzw. eine Kombination aus Tensoren sein.
- **Geschwindigkeit**
 - \vec{u} bezeichnet normalerweise die Strömungsgeschwindigkeit.
 - **Ausnahme:** Im Rahmen der Berechnung von Turbomaschinen bezeichnet $\vec{u} = \vec{\Omega} \times \vec{x}$ die Umfangsgeschwindigkeit (z. B. eines Rotors).
 - Im beschleunigten Bezugssystem wird die Absolutgeschwindigkeit $\vec{c} = \vec{w} + \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{v}$ bezüglich eines raumfesten Inertialsystems verwendet, vgl. Kapitel 2.4.
- In **stationärer** Strömung sind das Geschwindigkeitsfeld und alle anderen abhängigen Größen (z. B. Dichte, Temperatur, etc.) zeitunabhängig, d. h. die partiellen Zeitableitungen $\frac{\partial}{\partial t}$ verschwinden. Sonst ist die Strömung **instationär**.
- In **inkompressibler** Strömung gilt: $\frac{D\rho}{Dt} = 0$
 $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \rho = 0$
daraus folgt mit Hilfe der Kontinuitätsgleichung:
 $\text{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$ für stationäre sowie instationäre inkompressible Strömungen.
Bei **homogener Dichte** im gesamten Strömungsfeld ist $\nabla \rho = 0$ bzw. $\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = 0$.
In **inkompressibler Strömung homogener Dichte** ist $\rho = \text{konst.}$
- In **barotroper** Strömung ist die Dichte eine eindeutige Funktion des Druckes: $\rho = \rho(p)$
- In **reibungsfreier Flüssigkeit** ist $\eta = 0$, vgl. Kapitel 3 und Kapitel 4.2
- **Newtonsche Flüssigkeiten** sind durch das *Cauchy-Poisson-Gesetz* definiert, vgl. Kapitel 3 und Kapitel 4.1.

| Hinweise zur Berechnung von Turbomaschinen | | |
|--|---|--|
| Informationen | allgemein | |
| Vektoraddition | $\vec{c} = \vec{w} + \vec{\Omega} \times \vec{x} = \vec{w} + \vec{u}$ (mit $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_{ax}$ und $\vec{x} = R\vec{e}_r + z\vec{e}_{ax} \Rightarrow \vec{u} = u\vec{e}_u$) | |
| Umfangsgeschwindigkeit \vec{u} | $\vec{u} = u\vec{e}_u$ mit $u = \Omega R$!!! Bei Radialmaschinen ändert sich der Radius !!! | |
| Winkelgeschwindigkeit $\vec{\Omega}$ | $\Omega = 2\pi f = 2\pi n/60$ (n = Umdrehungen je Minute) | |
| "Stoßfreie" (ideale) An-/Abströmung | Die Relativgeschwindigkeit \vec{w} geht tangential in die Skelettlinie der Schaufel über. | |
| "Drallfreie" An-/Abströmung | $c_u = 0$!!! Hier Absolutgeschwindigkeit !!! | |
| Winkel α | Winkel zwischen Hauptströmungsrichtung und Absolutgeschwindigkeit (Leitschaufel) | |
| Winkel β | Winkel zwischen Hauptströmungsrichtung und Relativgeschwindigkeit (Laufschaufel) | |
| Moment einer Schaufelreihe auf die Strömung durch Umlenkung (<i>Eulersche Turbinengleichung</i>) | $M = \dot{m}(r_a c_{ua} - r_e c_{ue})$ Eintritt (e), Austritt (a) | |
| Drallerhaltung zwischen zwei Schaufelreihen (reibungsfrei, Euler mit $M = 0$) | $M = \dot{m}(r_a c_{ua} - r_e c_{ue}) = 0 \Rightarrow r c_u = \text{konst.}$ | |
| Leistung (nur bei Lauf schaufel $\Omega \neq 0$) | $P = \vec{M} \cdot \vec{\Omega}$ oder $P = M\Omega$ | |
| | Axialturbine/-verdichter | Radialturbine/-verdichter |
| Hauptströmungsrichtung | \vec{e}_{ax} | \vec{e}_r |
| Durch "Abwicklung" reduziert sich alles auf 2 Dimensionen | \vec{e}_{ax} ($= \vec{e}_\Omega = \vec{e}_z$), \vec{e}_u ($= \vec{e}_\varphi$) | \vec{e}_r , \vec{e}_u ($= \vec{e}_\varphi$) |
| Berechnung der Geschwindigkeitskomponente in Hauptströmungsrichtung durch Konti.Gln. | $\rho_1 A_1 w_{ax1} = \rho_2 A_2 w_{ax2}$ $\Rightarrow \rho_1 2\pi R_1 H_1 w_{ax1} = \rho_2 2\pi R_2 H_2 w_{ax2}$ | $\rho_1 A_1 w_{r1} = \rho_2 A_2 w_{r2}$ $\Rightarrow \rho_1 2\pi R_1 H_1 w_{r1} = \rho_2 2\pi R_2 H_2 w_{r2}$!!! Radius ändert sich !!! |
| Vektorzerlegung | | |
| Axial | $c_{ax} = w_{ax}$ | $(c_{ax} = 0)$ |
| Radial | $(c_r = 0)$ | $c_r = w_r$ |
| Umfang | $c_u = w_u + u$ | $c_u = w_u + u$ |
| Winkel α | $\tan \alpha = c_u / c_{ax} $ | $\tan \alpha = c_u / c_r $ |
| Winkel β | $\tan \beta = w_u / w_{ax} $ | $\tan \beta = w_u / w_r $ |
| | Turbine | Verdichter |
| Leistung | $P = -P_T < 0$ | $P = +P_V > 0$ |
| Lauf schaufel-Krümmung | In negativer \vec{e}_u -Richtung | In positiver \vec{e}_u -Richtung |
| Leit schaufel-Krümmung | In positiver \vec{e}_u -Richtung | In negativer \vec{e}_u -Richtung |

Bsp: Turbine



Bsp: Verdichter



Materielle Koordinaten
(Lagrange)

Feldkoordinaten
(Euler)

Bahnlinie
 $x_i = x_i(\xi_j, t)$

Umkehrfunktion
der Bahnlinie
 $\xi_i = \xi_i(x_j, t)$

Totale Ableitung (Beobachter)
 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + c_j \frac{\partial}{\partial x_j}$
mit $c_j = u_j + w_j$

Materielle Ableitung
 $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j}$

$\frac{\partial x_i(\xi_j, t)}{\partial t}$
 $\int u_i(\xi_j, t) dt$

DGL der Bahnlinie:
 $\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_j, t)$

Fluidelement-
geschwindigkeit
 $u_i = u_i(\xi_j, t)$

$x_i = x_i(\xi_j, t)$

Geschwindigkeitsfeld
 $u_i = u_i(x_j, t)$

Geschwindigkeits-
gradient
 $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \frac{\partial u_i(x_k, t)}{\partial x_j}$

$\frac{\partial u_i(\xi_j, t)}{\partial t}$
 $\int b_i(\xi_j, t) dt$

$\xi_i = \xi_i(x_j, t)$

$\frac{Du_i(x_j, t)}{Dt}$

(Fluidelement-)
Beschleunigung
 $b_i = b_i(\xi_j, t)$

$x_i = x_i(\xi_j, t)$

(Fluidelement-)
Beschleunigung
 $b_i = b_i(x_j, t)$

Zeitliche Änderung des
Geschwindigkeitsfelds
 $\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial u_i(x_j, t)}{\partial t}$

Kapitel 1

Kontinuumsbegriff und Kinematik

1.2 Kinematik der Flüssigkeiten

1.2.1 Materielle und Feldbeschreibungsweise

1.2.1.1 Materielle Beschreibungsweise (Lagrange)

Identifizierung eines Flüssigkeitsteilchen durch $\vec{\xi}$ (materielle Koordinate, z. B.: $\vec{\xi} = \vec{x}(t_0)$) führt auf den Ort \vec{x} dieses Teilchens zum Zeitpunkt t (Bahnlinie):

$$\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t) \quad (1.1a) \quad x_i = x_i(\xi_j, t) \quad (1.1b)$$

oder auf die Geschwindigkeit eines materiellen Teilchens:

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{\xi}, t) \quad (1.2)$$

1.2.1.2 Feldbeschreibungsweise (Euler)

In der Strömungsmechanik interessiert meist, was einem festen Ort \vec{x} geschieht, den verschiedene Teilchen $\vec{\xi}$ durchlaufen.

Z. B. Geschwindigkeit \vec{u} :

$$\vec{u} = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (1.3)$$

1.2.1.3 Lagrange \Leftrightarrow Euler

Materielle und Feldbeschreibungsweise lassen sich durch Einsetzen der Bahnlinie $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$ bzw. deren Umkehrfunktion $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$ ineinander überführen.

1.2.2 Bahnlinie, Stromlinie, Streichlinie

1.2.2.1 Stromlinie

Stromlinien sind die Kurven, deren Tangentenrichtungen mit den Richtungen der Geschwindigkeitsvektoren übereinstimmen. Die Differentialgleichung der Stromlinie lautet in symbolischer Schreibweise bzw. in Indexnotation:

$$\frac{d\vec{x}}{ds} = \frac{\vec{u}(\vec{x}, t)}{|\vec{u}|}, \quad (t = \text{konst.}) \quad (1.4a)$$

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{u_i(x_j, t)}{\sqrt{u_k u_k}}, \quad (t = \text{konst.}) \quad (1.4b)$$

Hinweis: Durch Substitution kann der Nenner auf der rechten Seite eliminiert werden:

$$s = \eta \sqrt{u_k u_k} \quad \text{bzw.:} \quad ds = d\eta \sqrt{u_k u_k} \Rightarrow \frac{dx_i}{d\eta} = u_i(x_j, t) \quad (1.5)$$

1. Zunächst wird das DGL-System mit den Veränderlichen x_i und η (t ist fest) unter Verwendung der üblichen Verfahren (vgl. 1.2.2.4) gelöst.
2. Danach werden die Integrationskonstanten für x_{i0} und η_0 des Bahnparameters η bestimmt. Dabei ist η_0 frei wählbar (z.B. $\eta_0 = 0$), muss aber für jede Komponente von x_i gleich sein.
3. Die Lösung liefert die Stromlinie $\vec{x} = \vec{x}(\eta, \vec{x}_0)$.

Zweidimensionales, ebenes Problem:

$$\frac{dx_1}{dx_2} = \frac{u_1}{u_2} \quad (1.6)$$

Trennung der Veränderlichen x_1 und x_2 (t ist fest) und anschließende Integration unter Beachtung der Anfangsbedingungen liefert die Stromlinie.

1.2.2.2 Bahnlinie

Die Bahnlinie eines materiellen Teilchens ξ_j ist Tangentenkurve zu den Geschwindigkeiten desselben materiellen Teilchens zu verschiedenen Zeiten. Ihre Differentialgleichung in symbolischer Schreibweise bzw. Indexnotation ist gegeben durch:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{u}(\vec{x}, t) \quad (1.7a)$$

$$\frac{dx_i}{dt} = u_i(x_j, t) \quad (1.7b)$$

1. Zunächst wird das DGL-System mit den Veränderlichen x_i und t (t ist Bahnparameter) unter Verwendung der üblichen Verfahren (vgl. 1.2.2.4) gelöst.
2. Danach werden die Integrationskonstanten unter Beachtung der Anfangsbedingung ξ_j bestimmt.
3. Die Lösung liefert die Bahnlinie $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$ eines materiellen Teilchens $\vec{\xi}$.

1.2.2.3 Streichlinie

Zur festen Zeit t verbindet die Streichlinie alle materiellen Teilchen, die zu irgendeiner Zeit t' den festen Ort \vec{y} passiert haben oder passieren werden.

1. Zunächst werden die Bahnlinien $\vec{x} = \vec{x}(\vec{\xi}, t)$ bzw. $x_i = x_i(\xi_j, t)$ und deren Umkehrfunktionen $\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{x}, t)$ bzw. $\xi_j = \xi_j(x_i, t)$ bestimmt.
2. Alle Teilchen, die den Punkt y_k zu irgendeinem Zeitpunkt t' passiert haben, können über die **Umkehrfunktion der Bahnlinie** identifiziert werden:

$$\vec{\xi} = \vec{\xi}(\vec{y}, t') \quad (1.8a)$$

$$\xi_j = \xi_j(y_k, t') \quad (1.8b)$$

3. Die Bahnkoordinaten dieser Teilchen zu einem anderen Zeitpunkt t erhält man, wenn man die entsprechenden $\vec{\xi}$ in die Bahngleichungen einsetzt:

$$\vec{x} = \vec{x}\left(\vec{\xi}(\vec{y}, t'), t\right) \quad (1.9a) \quad x_i = x_i\left(\xi_j(y_k, t'), t\right) \quad (1.9b)$$

Hierbei ist t' Kurvenparameter und t ist fest.

1.2.2.4 Hinweise zu Stromlinien, Bahnlinien und Streichlinien

Stationäres Problem: In stationärer Strömung fallen Stromlinie, Bahnlinie und Streichlinie auf eine Kurve.

Lösungsverfahren: Die üblichen Verfahren zum Lösen des Gleichungssystems sind:

- Trennung der Veränderlichen bei nicht gekoppelten Systemen
- Entkoppeln der DGLn durch Ableiten und Einsetzen ergibt ein System höherer Ordnung
- $e^{\lambda x}$ – Ansatz kombiniert mit dem Ansatz vom Typ der rechten Seite

Parameterfreie Form \Leftrightarrow Parameterform

- Parameterform \rightarrow Parameterfreie Form
 - Diese Umformung ist nur im zweidimensionalen Fall sinnvoll. Im dreidimensionalen Fall lassen sich so lediglich die 2D-Projektionen darstellen.
 - Zunächst wird eine der beiden Gleichungen nach dem Kurvenparameter t , s oder η aufgelöst.
 - Der Kurvenparameter wird dann durch Einsetzen in die zweite Gleichung eliminiert.
- Parameterfreie Form \rightarrow Parameterform
 - Zunächst wird eine Variable mittels eines Kurvenparameters, z.B.: $x_1 = s$, neu definiert.
 - Einsetzen in die parameterfreie Form und Auflösen nach der zweiten Variablen führt (hier) auf: $x_2 = x_2\left(x_1(s)\right) = x_2(s)$.

Tabelle 1.1: Verschiedene Parameter

| | Scharparameter | Kurven-/Bahnparameter | Blattparameter |
|--------------|----------------|-----------------------|----------------|
| Bahnlinie | ξ_j | t | / |
| Stromlinie | x_{j0} | s oder η | t |
| Streichlinie | y_j | t' | t |

1.2.3 Zeitableitungen

1.2.3.1 Allgemeine Zeitableitung $\frac{d}{dt}$

Ein **Beobachter**, der sich mit der Absolutgeschwindigkeit \vec{c} in einem Feld in \mathbb{R}^3 von einem Ort $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)^T$ zu einem infinitesimal benachbarten Ort $\vec{x} + d\vec{x}$ bewegt, stellt die Änderung $d\varphi$ einer tensoriellen Feldgröße $\varphi(x_1, x_2, x_3, t)$ fest (*Totales Differential*):

$$d\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_2}dx_2 + \frac{\partial\varphi}{\partial x_3}dx_3 = \frac{\partial\varphi}{\partial t}dt + \frac{\partial\varphi}{\partial x_i}dx_i \quad (1.10)$$

Die **zeitliche Änderung** $\frac{d\varphi}{dt}$, die der Beobachter feststellt, ergibt sich mit $\frac{dx_i}{dt} = c_i$ zu:

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + c_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (1.11a)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{c} \cdot \nabla\varphi \quad (1.11b)$$

Für den Beobachter, der sich mit der Relativgeschwindigkeit \vec{w} zur Strömungsgeschwindigkeit \vec{u} bewegt, ist $\vec{c} = \vec{u} + \vec{w}$.

1.2.3.2 Materielle Ableitung $\frac{D}{Dt}$

Für die **zeitliche Änderung** von φ , die ein **materielles Teilchen** entlang seiner Bahn feststellt, schreibt man:

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + u_i \frac{\partial\varphi}{\partial x_i} \quad (1.12a)$$

$$\frac{D\varphi}{Dt} = \frac{\partial\varphi}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla\varphi \quad (1.12b)$$

1.2.4 Bewegungszustand, Änderung materieller Linien-, Flächen- und Volumenelemente

1.2.4.1 Fundamentalsatz der Kinematik

”Das augenblickliche Geschwindigkeitsfeld in der Umgebung des Ortes \vec{x} ergibt sich als Überlagerung der Translationsgeschwindigkeit der Flüssigkeit mit der Dehnungsgeschwindigkeit in Richtung der Hauptachsen und der Rotationsgeschwindigkeit um diese Achsen.”

$$\begin{aligned} u_i(\vec{x} + d\vec{x}, t) &= u_i(\vec{x}, t) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} dx_j \\ &= \underbrace{u_i(\vec{x}, t)}_{\text{Translation}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{e_{ij} \triangleq \text{Dehnung/Stauchung}} dx_j + \underbrace{\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)}_{\Omega_{ij} \triangleq \text{Rotation}} dx_j \end{aligned} \quad (1.13)$$

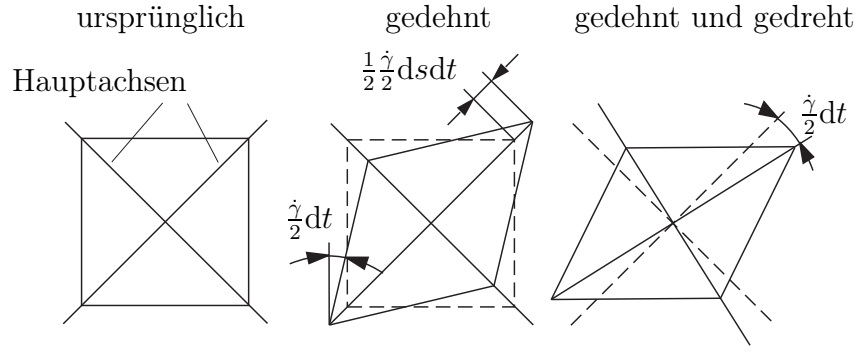


Abbildung 1.1: Verformung eines flüssigen Quadrates in der einfachen Scherströmung

1.2.4.2 Dehnungsgeschwindigkeitstensor (symmetrisch, $e_{ij} = e_{ji}$)

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \right) & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

1.2.4.3 Rotationsgeschwindigkeitstensor (antisymmetrisch, $\Omega_{ij} = -\Omega_{ji}$)

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

1.2.4.4 Dehnungsgeschwindigkeit materieller Linienelemente

Betrachtet man ein Linienelement $d\vec{x}$ bzw. dx_i mit der Länge $ds = |d\vec{x}|$ und der Richtung $l_i = \frac{dx_i}{ds}$ (\vec{l} hat dadurch die Länge $|\vec{l}| = 1$), ergibt sich für die **relative materielle Änderung dieses Linienelements**:

$$ds^{-1} \frac{D(ds)}{Dt} = e_{ij} l_i l_j \quad (1.16)$$

Beispiel: $ds = dx_1$ mit $\vec{l} = (l_1, l_2, l_3)^T = (1, 0, 0)^T$

$$dx_1^{-1} \frac{D(dx_1)}{Dt} = e_{11} \quad (1.17)$$

1.2.4.5 Differenz der Winkelgeschwindigkeit zweier mat. Linienelemente

Betrachtet man die Winkeländerung zwischen zwei Linienelementen $d\vec{x}$ bzw. dx_i und $d\vec{x}'$ bzw. dx'_i mit $l_i = \frac{dx_i}{ds}$ und $l'_i = \frac{dx'_i}{ds'}$ ergibt sich für die **materielle Änderung des Differenzwinkels** $\Delta\varphi = \varphi - \varphi'$:

$$\frac{D(\varphi - \varphi')}{Dt} = -2e_{ij}l_i l'_j \quad (1.18)$$

Dies ist ein Maß für die Scherungsgeschwindigkeit.

Beispiel: $ds = dx_1$ mit $\vec{l} = (1, 0, 0)^T$, $ds' = dx_2$ mit $\vec{l}' = (0, 1, 0)^T$ und $\alpha_{12} = \Delta\varphi$:

$$\frac{D\alpha_{12}}{Dt} = -2e_{12} \quad (1.19)$$

1.2.4.6 Hauptachsensystem ohne Scherung

Berechnung der **Hauptdehnungen** e und deren Richtungen l_j durch Lösen der Eigenwertaufgabe:

$$(e_{ij} - e\delta_{ij})l_j = 0 \quad (1.20)$$

1. Bestimmung der drei **Eigenwerte** (Hauptdehnungen) e :

$$\det(e_{ij} - e\delta_{ij}) = 0 \Rightarrow -e^3 + I_{1e}e^2 - I_{2e}e + I_{3e} = 0 \quad (1.21)$$

mit den Invarianten:

$$I_{1e} = e_{ii}; \quad I_{2e} = \frac{1}{2}(e_{ii}e_{jj} - e_{ij}e_{ji}); \quad I_{3e} = \det(e_{ij}) \quad (1.22)$$

2. Bestimmung der zugehörigen **Eigenvektoren** (Hauptdehnungsrichtungen) l_j durch Einsetzen in Gleichung 5.8. Dieses Gleichungssystem ist überbestimmt, und somit ist eine Komponente von l_j frei wählbar. Nach Bestimmung der anderen Komponenten muss der Eigenvektor wieder auf die Länge $|\vec{l}| = 1$ gebracht werden. Der letzte der 3 Eigenvektoren kann über das Kreuzprodukt bestimmt werden, da die 3 Eigenvektoren senkrecht aufeinander stehen:

$$l_i^{(3)} = \epsilon_{ijk}l_j^{(1)}l_k^{(2)} \quad \text{bzw.} \quad \vec{l}^{(3)} = \vec{l}^{(1)} \times \vec{l}^{(2)} \quad (1.23)$$

1.2.4.7 Potentialströmung mit Potential Φ

In rotationsfreier Strömung ($\text{rot}\vec{u} = 0$) lässt sich die mathematische Behandlung durch Einführung eines Geschwindigkeitspotentials Φ vereinfachen:

$$\vec{u} = \nabla\Phi \quad (1.24a) \quad u_i = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i} \quad (1.24b)$$

Wegen $\text{rot}\vec{u} = 0$ existiert auch ein totales Differential:

$$d\Phi = \frac{\partial\Phi}{\partial x_i}dx_i = u_i dx_i \quad (1.25)$$

1.2.5 Zeitliche Änderung materieller Integrale

1.2.5.1 Reynoldssches Transporttheorem

Mit Hilfe des *Reynoldsschen Transporttheorems* kann ein materielles Volumenintegral mit einem zeitlich veränderlichen Integrationsbereich $V(t)$ in ein Volumenintegral über einen

festen Bereich V zum Zeitpunkt t (Kontrollvolumen) und ein Oberflächenintegral über die begrenzende Oberfläche S zum selben Zeitpunkt t aufgespalten werden.

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{(V(t))} \varphi dV = \iiint_{(V)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV + \iint_{(S)} \varphi u_i n_i dS \quad (1.26a)$$

$$= \underbrace{\iiint_{(V)} \frac{\partial \varphi}{\partial t} dV}_I + \underbrace{\iint_{(S)} \varphi (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{II} \quad (1.26b)$$

1.2.5.2 Reynoldssches Transporttheorem mit Dichte ϱ

Wenn die Dichte ϱ im Integral steht, gilt das *Reynoldssche Transporttheorem* auch in der Form:

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{(V(t))} \varrho \varphi dV = \iiint_{(V)} \varrho \frac{D\varphi}{Dt} dV \quad (1.27)$$

Bemerkungen:

I Integral über die zeitliche Änderung von φ im Kontrollvolumen (lokale Änderung).

II Fluss von φ über die begrenzende Oberfläche des Kontrollvolumens (konvektive Änderung).

$(\vec{u} \cdot \vec{n})$ ist die Normalkomponente der Geschwindigkeit, mit der φ über die Kontrollvolumengrenze transportiert wird.

Die Normalkomponente der Strömungsgeschwindigkeit an der Wand ist gleich der Geschwindigkeit der Wand in dieser Richtung (kinematische Randbedingung).

$$(\vec{u} \cdot \vec{n})|_{\text{Wand}} = (\vec{u}_{\text{Wand}} \cdot \vec{n}) \quad (1.28)$$

An festen Wänden ist $\vec{u} \cdot \vec{n} = 0$ (Ausnahme: poröse Wand).

- Falls die Feldgröße φ räumlich konstant ist, kann sie vor das Integral gezogen werden.
- Bei festem Intergrationbereich und wenn φ sowie seine Ableitungen stetig sind, darf die Reihenfolge von Integration und Differentiation vertauscht werden.

Kapitel 2

Grundgleichungen der Kontinuumsmechanik

2.1 Erhaltungssatz der Masse (Kontinuitätsgleichung)

Die Masse m eines abgegrenzten Stückes der Flüssigkeit bleibt zeitlich konstant:

$$\frac{Dm}{Dt} = 0 \quad (2.1)$$

mit:

$$m = \iiint_{(V(t))} \varrho dV$$

Die **Integralform** der Kontinuitätsgleichung kann dann durch Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems (1.26a) mit $\varphi = \varrho$ gewonnen werden.

$$\frac{D}{Dt} \iiint_{(V(t))} \varrho dV = \underbrace{\iiint_{(V)} \frac{\partial \varrho}{\partial t} dV}_I + \underbrace{\iint_{(S)} \varrho(\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{II} = 0 \quad (2.2)$$

Die **differentielle Form** der Kontinuitätsgleichung lautet:

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.3a)$$

$$\frac{D\varrho}{Dt} + \varrho \nabla \cdot \vec{u} = 0 \quad (2.3b)$$

Ausschreiben der materiellen Ableitung und Umformung unter Beachtung der Produktregel führt auf die bekannteste Form:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho u_i) = 0 \quad (2.4)$$

Bemerkungen zur Massenerhaltung:

I Integral über die lokale zeitliche Änderung der Dichte im Kontrollvolumen.

II Massenstrom \dot{m} über die Grenze des Kontrollvolumens (Vorzeichen beachten!).

- inkompressibel: $\frac{D\varrho}{Dt} = \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \vec{u} \cdot \nabla \varrho = 0 \Rightarrow$ (mit 2.3a) $\operatorname{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0$
- homogene Dichte: $\nabla \varrho = 0$ bzw. $\frac{\partial \varrho}{\partial x_i} = 0$
- stationär: $\frac{\partial \varrho}{\partial t} = 0$

2.2 Impulssatz

Im Inertialsystem entspricht die zeitliche Änderung des Impulses \vec{I} den auf den Körper wirkenden äußeren Kräften:

$$\frac{D\vec{I}}{Dt} = \vec{F} \quad (2.5)$$

mit:

$$\vec{I} = \iiint_{(V(t))} (\varrho \vec{u}) dV \quad , \quad \vec{F} = \iiint_{(V(t))} (\varrho \vec{k}) dV + \iint_{(S(t))} \vec{t} dS$$

Die Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems (1.26b) auf die linke Seite mit $\varphi = (\varrho \vec{u})$ und Ersatz des zeitlich veränderlichen Integrationsbereiches durch einen zeitlich festen Integrationsbereich auf der rechten Seite führt auf die **Integralform** des Impulssatzes:

$$\underbrace{\iiint_{(V)} \frac{\partial(\varrho \vec{u})}{\partial t} dV}_I + \underbrace{\iint_{(S)} \varrho \vec{u} (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{II} = \underbrace{\iiint_{(V)} (\varrho \vec{k}) dV}_{III} + \underbrace{\iint_{(S)} \vec{t} dS}_{IV} \quad (2.6)$$

Die **differentielle Form** des Impulssatzes wird auch *Erste Cauchysche Bewegungsgleichung* genannt.

$$\varrho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \varrho \vec{k} + \nabla \cdot \mathbf{T} \quad (2.7a)$$

$$\varrho \frac{Du_i}{Dt} = \varrho k_i + \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.7b)$$

Bemerkungen zum Impulssatz:

- I Integral über die lokale zeitliche Änderung des Impulses im Kontrollvolumen.
- II Impulsfluss über die Grenzen des Kontrollvolumens.
- III **Volumenkräfte** (z.B. Gravitation: $\vec{k} = \vec{g}$)
- IV **Oberflächenkräfte**, die auf das Kontrollvolumen wirken (Vorzeichen beachten!).
Zum Spannungsvektor $\vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T}$ siehe Materialgleichungen Kapitel 3.
- stationär: $\frac{\partial(\varrho \vec{u})}{\partial t} = 0$

2.3 Drallsatz oder Drehimpulssatz

Im Inertialsystem entspricht die zeitliche Änderung des Dralles \vec{D} dem auf den Körper wirkenden Moment durch äußere Kräfte:

$$\frac{D}{Dt}(\vec{D}) = \vec{M} \quad (2.8)$$

mit:

$$\vec{D} = \iiint_{(V(t))} \vec{x} \times (\varrho \vec{u}) dV \quad , \quad \vec{M} = \iiint_{(V(t))} \vec{x} \times (\varrho \vec{k}) dV + \iint_{(S(t))} \vec{x} \times \vec{t} dS$$

Die Anwendung des Reynoldsschen Transporttheorems (1.26b) auf die linke Seite mit $\varphi = [\vec{x} \times (\varrho \vec{u})]$ und Ersatz des zeitlich veränderlichen Integrationsbereiches durch einen zeitlich festen Integrationsbereich auf der rechten Seite führt auf die **Integralform** des Drallsatzes:

$$\underbrace{\iiint_{(V)} \frac{\partial}{\partial t} [\vec{x} \times (\varrho \vec{u})] dV}_{\text{I}} + \underbrace{\iint_{(S)} \vec{x} \times (\varrho \vec{u}) (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{II}} = \underbrace{\iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{k}) dV}_{\text{III}} + \underbrace{\iint_{(S)} \vec{x} \times \vec{t} dS}_{\text{IV}} \quad (2.9)$$

Bemerkungen zum Drallsatz:

I Integral über die zeitliche Änderung des Dralls im Kontrollvolumen.

II Konvektion des Dralls über die Grenzen des Kontrollvolumens.

III **Moment der Volumenkräfte** (z.B. Gravitation: $\vec{k} = \vec{g}$)

IV **Moment der Oberflächenkräfte**, die auf das Kontrollvolumen wirken (Vorzeichen beachten!).

Zum Spannungsvektor $\vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T}$ siehe Materialgleichungen Kapitel 3.

- stationär: $\frac{\partial}{\partial t} [\vec{x} \times (\varrho \vec{u})] = 0$

2.4 Impuls- und Drallsatz im beschleunigten Bezugssystem

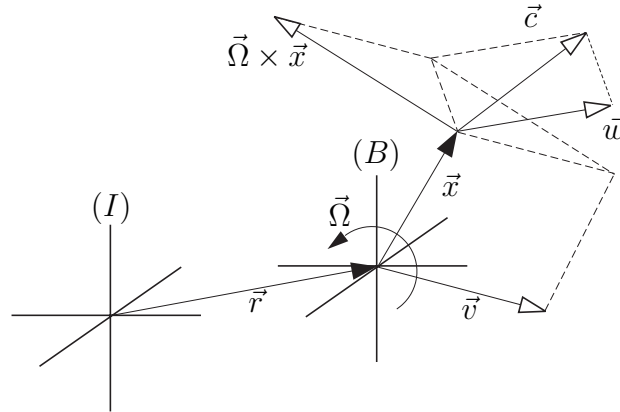


Abbildung 2.1: Bewegtes Bezugssystem

Absolutgeschwindigkeit \vec{c} eines Fluidteilchens in einem beschleunigten Bezugssystem (B):

$$\vec{c} = \vec{w} + \vec{\Omega} \times \vec{x} + \vec{v} \quad (2.10)$$

Dabei beschreibt die Führungsgeschwindigkeit \vec{v} die Translation und die Umfangsgeschwindigkeit $\vec{\Omega} \times \vec{x}$ die Rotation des Ursprungs des bewegten Koordinatensystems bezüglich des ortsfesten Inertialsystems I.

Die Relativgeschwindigkeit $\vec{w} = \left[\frac{D\vec{x}}{Dt} \right]_B$ beschreibt die Bewegung des Fluidteilchens bezüglich des bewegten Koordinatensystems.

Der Ursprung des bewegten Koordinatensystem hat den Ortsvektor \vec{r} bezüglich des ortsfesten Inertialsystems, das Fluidteilchen den Ortsvektor \vec{x} bezüglich des bewegten Koordinatensystems.

Für einen beliebigen Vektor \vec{b} gilt:

$$\left[\frac{D\vec{b}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{b}}{Dt} \right]_B + \vec{\Omega} \times \vec{b} \quad (2.11)$$

Man kann die Absolutbeschleunigung im Inertialsystem mit Hilfe der Führungsbeschleunigung $\vec{a} = \left[\frac{D\vec{v}}{Dt} \right]_I$ durch Größen im Bezugssystem ausdrücken:

$$\left[\frac{D\vec{c}}{Dt} \right]_I = \left[\frac{D\vec{c}}{Dt} \right]_B + \underbrace{2\vec{\Omega} \times \vec{w}}_{\text{Coriolisbeschleunigung}} + \underbrace{\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x})}_{\text{Zentrifugalbeschleunigung}} + \vec{a} \quad (2.12)$$

2.4.1 Impulssatz im beschleunigten Bezugssystem

Der Impulssatz für ein beschleunigtes Bezugssystem lautet in **Integralform**:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint_{(V)} \varrho \vec{c} dV \right]_B}_I + \underbrace{\iint_{(S)} \varrho \vec{c} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\vec{\Omega} \times \iiint_{(V)} \varrho \vec{c} dV}_{III} = \underbrace{\iiint_{(V)} \varrho \vec{k} dV}_{IV} + \underbrace{\iint_{(S)} \vec{t} dS}_V \quad (2.13)$$

In **differentieller** Form die erste Cauchysche Bewegungsgleichung:

$$\varrho \left[\frac{D\vec{w}}{Dt} \right]_B = \varrho \vec{k} + \nabla \cdot \mathbf{T} - \left(\varrho \vec{a} + 2\varrho \vec{\Omega} \times \vec{w} + \varrho \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{x}) + \varrho \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{x} \right) \quad (2.14)$$

Sonderfall: Impulssatz in $\vec{\Omega}$ -Richtung bei stationärer Strömung im Relativsystem, ohne Volumenkräfte, $\vec{\Omega} = \text{konst}$ und $\vec{a} = 0$:

$$\iint_{(S)} \varrho \vec{e}_\Omega \cdot \vec{c} (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS = \iint_{(S)} \vec{e}_\Omega \cdot \vec{t} dS \quad (2.15)$$

Bemerkungen zum Impulssatz im beschleunigten Bezugssystem:

- I Integral über die lokale zeitliche Änderung des Impulses im Kontrollvolumen.
- II Impulsfluss über die Grenzen des Kontrollvolumens.
- III Richtungsänderung durch Rotation
- IV **Volumenkräfte** (z.B. Gravitation: $\vec{k} = \vec{g}$)
- V **Oberflächenkräfte**, die auf das Kontrollvolumen wirken (Vorzeichen beachten!).
Zum Spannungsvektor $\vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T}$ siehe Materialgleichungen Kapitel 3.
- Stationäre Strömung im Relativsystem: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2.4.2 Drallsatz im beschleunigten Bezugssystem

Der Drallsatz für ein beschleunigtes Bezugssystem lautet:

$$\begin{aligned}
 \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \left[\iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{c}) dV \right]}_I &+ \underbrace{\iint_{(S)} \vec{x} \times (\varrho \vec{c}) (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS}_{II} + \underbrace{\vec{\Omega} \times \iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{c}) dV}_{III} \\
 &= \underbrace{\iiint_{(V)} \vec{x} \times (\varrho \vec{k}) dV}_{IV} + \underbrace{\iint_{(S)} \vec{x} \times \vec{t} dS}_V \quad (2.16)
 \end{aligned}$$

Sonderfall: Drallsatz in $\vec{\Omega}$ -Richtung bei stationärer Strömung im Relativsystem, ohne Volumenkräfte, $\Omega = \text{konst.}$:

$$\vec{e}_{\Omega} \cdot \iint_{(S)} \vec{x} \times (\varrho \vec{c}) (\vec{w} \cdot \vec{n}) dS = \vec{e}_{\Omega} \cdot \iint_{(S)} \vec{x} \times \vec{t} dS \quad (2.17)$$

Bemerkungen zum Drallsatz im beschleunigten Bezugssystem:

- I Integral über die lokale zeitliche Änderung des Dralls im Kontrollvolumen.
- II Konvektion des Dralls über die Grenzen des Kontrollvolumens.
- III Richtungsänderung durch Rotation
- IV **Moment der Volumenkräfte** (z.B. Gravitation: $\vec{k} = \vec{g}$)
- V **Moment der Oberflächenkräfte**, die auf das Kontrollvolumen wirken (Vorzeichen beachten!).
Zum Spannungsvektor $\vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T}$ siehe Materialgleichungen Kapitel 3.
- Stationäre Strömung im Relativsystem: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2.5 Anwendungsbeispiele aus dem Turbomaschinenbau

vgl. "Hilfsblatt Turbomaschinen"

2.6 Bilanz der Energie

"Die zeitliche Änderung der gesamten Energie eines Körpers ist gleich der Leistung der äußeren Kräfte plus der pro Zeiteinheit von außen zugeführten Energie."

$$\frac{D}{Dt}(K + E) = P + \dot{Q} \quad (2.18)$$

mit:

$$K = \iiint_{(V(t))} \frac{u_i u_i}{2} \varrho dV \quad , \quad E = \iiint_{(V(t))} e \varrho dV$$

$$P = \iiint_{(V(t))} u_i k_i \varrho dV + \iint_{(S(t))} u_i t_i dS \quad , \quad \dot{Q} = - \iint_{(S(t))} q_i n_i dS$$

Dabei bezeichnet K die kinetische Energie und E die innere Energie. P steht für die zugeführte Leistung und \dot{Q} für den zugeführten Wärmestrom. Die **Integralform** der Energiebilanz lautet:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial t} \iiint_{(V)} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + e \right) \varrho dV}_{\text{I}} + \underbrace{\iint_{(S)} \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + e \right) \varrho (\vec{u} \cdot \vec{n}) dS}_{\text{II}}$$

$$= \underbrace{\iiint_{(V)} \vec{u} \cdot \varrho \vec{k} dV}_{\text{III}} + \underbrace{\iint_{(S)} \vec{u} \cdot \vec{t} dS}_{\text{IV}} - \underbrace{\iint_{(S)} \vec{q} \cdot \vec{n} dS}_{\text{V}} \quad (2.19)$$

Bemerkungen zur Energieerhaltung:

- I Integral über die lokale zeitliche Änderung der kinetischen und inneren Energie im Kontrollvolumen.
- II Fluss von kinetischer und innerer Energie über die Grenzen des Kontrollvolumens.
- III **Leistung der Volumenkräfte** (z.B. Gravitation: $\vec{k} = \vec{g}$)
- IV **Leistung der Oberflächenkräfte**, die auf das Kontrollvolumen wirken (Vorzeichen beachten!).
Zum Spannungsvektor $\vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T}$ siehe Materialgleichungen Kapitel 3.
- V Über die Grenzen des Kontrollvolumens zugeführter Wärmestrom (Vorzeichen beachten)
 - Für ein thermisch ideales Gas ist die spezifische innere Energie: $e = c_v T$.
 - Der Wärmestromvektor für ein Newtonsches Fluid mit der Wärmeleitfähigkeit λ ist:
 $q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i}$
 - stationär: $\frac{\partial}{\partial t} = 0$

2.8 Thermodynamische Zustandsgleichungen

Thermische Zustandsgleichung eines thermisch idealen Gases:

$$p = \varrho R T \quad (2.20)$$

Kalorische Zustandsgleichung für die spezifische innere Energie e eines thermisch idealen Gases:

$$e = c_v T \quad (2.21)$$

Kapitel 3

Materialgleichungen

Der Zusammenhang zwischen dem Spannungsvektor \vec{t} und den Spannungstensor \mathbf{T} bzw. τ_{ij} lautet allgemein:

$$\vec{t} = \vec{n} \cdot \mathbf{T} \quad (3.1a) \quad t_i = n_j \tau_{ji} \quad (3.1b)$$

Man kann den symmetrischen Spannungstensor ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$) in einen Druckanteil und den Reibspannungstensor \mathbf{P} bzw. P_{ij} zerlegen:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + P_{ij} \quad (3.2)$$

Für die Dissipationsfunktion Φ gilt allgemein:

$$\Phi = P_{ij}e_{ij} \quad (3.3)$$

Verlustleistung:

$$P_V = \iiint_{(V)} \Phi dV \quad (3.4)$$

Newtonsche Flüssigkeiten: Die Annahme eines **linearen Zusammenhanges** zwischen den Komponenten des Spannungstensors \mathbf{T} bzw. τ_{ij} und denen des Deformationsgeschwindigkeitstensors \mathbf{E} bzw. e_{ij} führt auf das *Cauchy-Poisson-Gesetz*, welches Newtonsche Flüssigkeiten definiert:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda^* e_{kk}\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (3.5a) \quad \mathbf{T} = (-p + \lambda^* \nabla \cdot \vec{u})\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{E} \quad (3.5b)$$

Dabei sind λ^* und η materialtypische skalare Funktionen, die vom thermodynamischen Zustand des Materials abhängig sind.

Der **Reibspannungstensor** \mathbf{P} bzw. P_{ij} für Newtonsche Flüssigkeiten lautet:

$$P_{ij} = \lambda^* e_{kk}\delta_{ij} + 2\eta e_{ij} \quad (3.6a) \quad \mathbf{P} = \lambda^* \nabla \cdot \vec{u}\mathbf{I} + 2\eta \mathbf{E} \quad (3.6b)$$

Die **Dissipationsfunktion** Φ für Newtonsche Flüssigkeiten lautet:

$$\Phi = \lambda^* e_{kk}e_{ii} + 2\eta e_{ij}e_{ij} \quad (3.7a) \quad \Phi = \lambda^* (\text{sp}\mathbf{E})^2 + 2\eta \text{sp}\mathbf{E}^2 \quad (3.7b)$$

Der Annahme eines linearen Zusammenhanges der Spannungen entspricht die Annahme einer linearen Materialgleichung für den **Wärmestromvektor** \vec{q} bzw. q_i . Das *Fouriersche Gesetz* für isotrope Materialien mit dem Wärmeleitkoeffizient λ lautet:

$$q_i = -\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \quad (3.8a) \quad \vec{q} = -\lambda \nabla T \quad (3.8b)$$

Bemerkungen:

- $\lambda \neq \lambda^*$!!!
- Da gilt: $\operatorname{div} \vec{u} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = e_{kk}$ und da in inkompressibler Strömung $\operatorname{div} \vec{u} = 0$ ist, entfällt in inkompressibler Strömung der Term mit λ^* .

Reibungsfreie Flüssigkeiten: Die Annahme von $\eta, \lambda^* = 0$ führt auf den **Spannungstensor** für reibungsfreie Flüssigkeiten:

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij} \quad (3.9a) \quad \mathbf{T} = -p\mathbf{I} \quad (3.9b)$$

Bemerkungen:

- Der Reibspannungstensor \mathbf{P} bzw. P_{ij} und die Dissipationsfunktion Φ verschwinden für reibungsfreie Flüssigkeiten: $\mathbf{P} = 0$ bzw. $P_{ij} = 0$, $\Phi = 0$
- Die Annahme von Reibungsfreiheit bedeutet (im Rahmen der Vorlesung TSL), auch die Vernachlässigung der Wärmeleitung: $\lambda = 0$

Reynoldssche Zahl: Bei inkompressibler Strömung ($\frac{D\rho}{Dt} = 0$) oder Annahme der *Stokeschen Hypothese* ($\eta_D = 0$) und homogenem Temperaturfeld ist die dimensionslose Reynoldssche Zahl Re ein geeignetes Maß für den Einfluss der Zähigkeit:

$$Re = \frac{UL\rho}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \quad (3.10)$$

Dabei sind U die Anströmgeschwindigkeit, L eine typische Länge (z. B. Rohrdurchmesser d bei Rohrströmungen), η_D die Druckzähigkeit, η die Scherzähigkeit (dynamische Viskosität) und $\nu = \eta/\rho$ die kinematische Viskosität.

Die **Widerstandskraft** W eines umströmten Körpers kann durch Bildung des reynoldszahlabhängigen Widerstandsbeiwert c_w dimensionslos gemacht werden:

$$c_w = c_w(Re) = \frac{W}{\frac{\rho}{2}U^2L^2} \quad (3.11)$$

Analog: **Auftriebskraft** A mit Auftriebsbeiwert c_a :

$$c_a = c_a(Re) = \frac{A}{\frac{\rho}{2}U^2L^2} \quad (3.12)$$

Der Ausdruck $\frac{\rho}{2}U^2$ wird auch Staudruck genannt.

Bemerkungen:

- Wenn η gegen null geht, strebt Re gegen unendlich, so dass für sehr große Reynoldszahlen die Annahme reibungsfreier Strömung gerechtfertigt ist, vgl. Kapitel 4.1.3

Kapitel 4

Bewegungsgleichungen für spezielle Materialgesetze

4.1 Newtonsche Flüssigkeiten

4.1.1 Navier-Stokessche Gleichungen

Einsetzen des Materialgesetzes für **Newtonsche Flüssigkeiten** und des Dehnungsgeschwindigkeitstensors in die differentielle Form der **Impulsgleichung** führt auf die *Navier-Stokesschen Gleichungen*:

$$\varrho \frac{Du_i}{Dt} = \varrho k_i + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ -p + \lambda^* \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right\} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left\{ \eta \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right] \right\} \quad (4.1)$$

Die Navier-Stokesschen Gleichungen für verschiedene Koordinatensysteme findet man in Anhang B (Spurkbuch).

Einsetzen des linearen Gesetzes für den Wärmestromvektor in die differentielle Form der **Energiegleichung** führt auf:

$$\varrho \frac{De}{Dt} - \frac{p}{\varrho} \frac{D\varrho}{Dt} = \Phi + \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right\} \quad (4.2)$$

Die **Kontinuitätsgleichung** enthält kein Materialgesetz und bleibt deshalb unverändert:

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\varrho u_i) = 0 \quad (4.3)$$

4.1.1.1 Inkompressible Navier-Stokessche Gleichungen

In inkompressibler Strömung ohne Volumenkräfte, mit $\eta, \lambda^* = \text{konst.}$ vereinfachen sich die *Navier-Stokesschen Gleichungen* zu:

$$\underbrace{\varrho \frac{D\vec{u}}{Dt}}_{\text{I}} = \underbrace{-\nabla p}_{\text{II}} + \underbrace{\eta \Delta \vec{u}}_{\text{III}} \quad (4.4a)$$

$$\varrho \frac{Du_i}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \eta \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \quad (4.4b)$$

Bemerkungen:

- I Produkt aus Masse (pro Volumeneinheit) und Beschleunigung eines materiellen Teilchens
- II Differenz der Druckkräfte am materiellen Teilchen (Nettodruckkraft pro Volumeneinheit)
- III Differenz der Reibkräfte am materiellen Teilchen (Nettoreibungskraft pro Volumeneinheit)
- Laplace Operator $\Delta = \nabla \cdot \nabla$, siehe Anhang B (Spurkbuch)
- Es gilt:

$$\Delta \vec{u} = \nabla(\nabla \cdot \vec{u}) - \nabla \times (\nabla \times \vec{u}) \quad (4.5)$$

Daraus folgt: In inkompressibler ($\text{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = 0$) und rotationsfreier ($\text{rot} \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = 0$) Strömung verschwindet die Divergenz des Reibspannungstensors.

4.1.2 Wirbeltransportgleichung

Wenn die Massenkraft ein Potential hat gilt für die Verteilung von $\vec{\omega}$ in inkompressibler Strömung:

$$\frac{D\vec{\omega}}{Dt} = \vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} + \nu \Delta \vec{\omega} \quad (4.6)$$

Bemerkungen:

- In ebener Strömung gilt:

$$\vec{\omega} \cdot \nabla \vec{u} = 0 \quad (4.7)$$

- Generell gilt: Da ∇ orthogonal zu $\nabla \times \vec{u}$ ist verschwindet die Divergenz der Rotation:

$$2\nabla \cdot \vec{\omega} = \nabla \cdot (\nabla \times \vec{u}) = 0 \quad (4.8)$$

4.1.3 Einfluss der Reynoldsschen Zahl

Die Reynoldssche Zahl

$$Re = \frac{UL\rho}{\eta} = \frac{UL}{\nu} \quad (4.9)$$

mit der Anströmgeschwindigkeit U , der typischen Länge L , der Scherzähigkeit (dynamische Viskosität) η und der kinematischen Viskosität $\nu = \eta/\rho$, kann man auch als Verhältnis aus typischer Trägheitskraft und typischer Zähigkeitskraft, sowie als Verhältnis der charakteristischen Länge zur viskosen Länge ν/U deuten.

4.2 Reibungsfreie Flüssigkeiten

4.2.1 Eulersche Gleichung

Unter der Annahme einer **reibungsfreien Flüssigkeit** ($\eta = 0$) vereinfacht sich die *Erste Cauchysche Bewegungsgleichung* zur *Eulerschen Gleichung*:

$$\varrho \frac{Du_i}{Dt} = \varrho k_i - \frac{\partial p}{\partial x_i} \quad (4.10a)$$

$$\varrho \frac{D\vec{u}}{Dt} = \varrho \vec{k} - \nabla p \quad (4.10b)$$

Dieselbe Gleichung erhält man, wenn man $Re = \infty$ in die *Navier-Stokesschen Gleichungen* einsetzt oder $\Delta \vec{u} = 0$ für inkompressible Potentialströmung (vgl. Gl.4.5).

4.2.2 Bernoullische Gleichung

Die Annahme, dass die **Massenkraft ein Potential hat** ($\vec{k} = -\nabla \psi$) führt durch Integration der *Eulerschen Gleichung über die Bogenlänge s einer Stromlinie* auf die *Bernoullische Gleichung* in der Form:

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u^2}{2} + \int \frac{dp}{\varrho} + \psi = C \quad (4.11)$$

4.2.2.1 Bernoullische Gleichung für $\varrho = \text{konst.}$

In inkompressibler Strömung homogener Dichte ($\varrho = \text{konst.}$) und wenn die Massenkraft der Schwere die einzige Massenkraft ist, mit $\psi = gz$, gilt zwischen zwei Punkten auf derselben Stromlinie:

$$\int \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + gz = C \quad (4.12)$$

oder bestimmt integriert von Punkt 1 bis Punkt 2:

$$\int_1^2 \frac{\partial u}{\partial t} ds + \frac{u_2^2}{2} + \frac{p_2}{\varrho} + gz_2 = \frac{u_1^2}{2} + \frac{p_1}{\varrho} + gz_1 \quad (4.13)$$

- In stationärer Strömung ist $\frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

4.2.2.2 Bernoullische Gleichung für ein gleichmäßig rotierendes Bezugssystem

In inkompressibler Strömung, wenn die Massenkraft der Schwere die einzige Massenkraft ist mit $\psi = gz$ und das Bezugssystem mit $\Omega = \text{konst.}$ um die z-Achse rotiert, gilt zwischen zwei Punkten auf derselben Stromlinie:

$$\int \frac{\partial w}{\partial t} ds + \frac{w^2}{2} + \frac{p}{\varrho} + gz - \frac{1}{2} \Omega^2 r^2 = C \quad (4.14)$$

Dabei ist w der Betrag der Relativgeschwindigkeit im Bezugssystem. Wegen $\vec{\Omega} = \Omega \vec{e}_z$ und $\vec{x} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$ folgt mit $\vec{v} = 0$:

$$\vec{w} = \vec{c} - \vec{\Omega} \times \vec{x} \quad \Rightarrow \quad w_r = c_r, \quad w_z = c_z, \quad w_\varphi = c_\varphi - \Omega r$$

4.2.2.3 Bernoullische Gleichung für Potentialströmung

Ist $\text{rot} \vec{u} = 0$, $\varrho = \text{konst.}$ und $\psi = gz$ gilt mit $u_i = \frac{\partial \Phi}{\partial x_i}$ zwischen zwei **beliebigen** Punkten des Strömungsfeldes:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} \frac{\partial \Phi}{\partial x_i} + \frac{p}{\varrho} + gz = C(t) \quad (4.15)$$

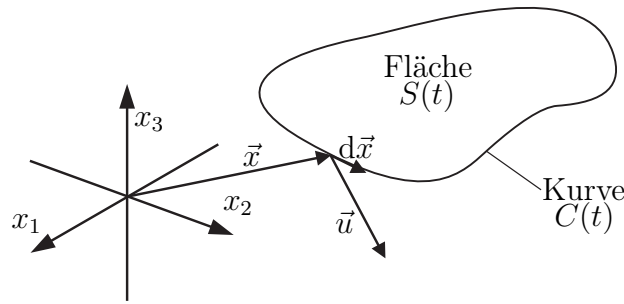


Abbildung 4.1: Definition der Zirkulation

4.2.3 Wirbelsätze

Für die **Zirkulation** Γ einer geschlossenen materiellen Linie gilt:

$$\Gamma = \oint_{(C(t))} \vec{u} \cdot d\vec{x} \quad (4.16)$$

Thomsonscher Wirbelsatz, Kelvinsches Zirkulationstheorem

”Die Zirkulation einer geschlossenen, materiellen Linie bleibt in einer reibungsfreien und barotropen Flüssigkeit für alle Zeiten konstant, wenn die Massenkraft ein Potential hat.”

Also:

$$\frac{D\Gamma}{Dt} = 0 \quad (4.17)$$

Man kann in (4.16) den zeitlich veränderlichen Integrationsbereich $(C(t))$ durch einen zeitlich festen Integrationsbereich (C) ersetzen und mit Hilfe des *Satz von Stokes* das Linienintegral in ein Flächenintegral umformen:

$$\Gamma = \oint_{(C)} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \underbrace{\iint_{(S)} (\text{rot} \vec{u}) \cdot \vec{n} dS}_I \quad (4.18)$$

I Dieses Integral wird auch Wirbelstärke genannt, wobei diese Bezeichnung in der Literatur nicht einheitlich ist.

- Die Wirbelstärke einer Wirbelröhre ist konstant.
- Der Wirbelvektor $\text{rot} \vec{u}$ ist gleich der doppelten Winkelgeschwindigkeit $\vec{\omega}$

$$\text{rot} \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = 2\vec{\omega} \quad (4.19)$$

- Die Zirkulation einer geschlossenen Linie ist gleich der Summe der Zirkulation des von der Kurve umschlossenen Maschennetzes:

$$\Gamma_{\text{ges}} = \sum \Gamma_i \quad \text{bzw. :} \quad \Gamma = \int d\Gamma \quad (4.20)$$

Erster Helmholtzscher Wirbelsatz

”Die Zirkulation einer Wirbelröhre ist längs dieser Röhre konstant.”

Für zwei geschlossenen Kurven C_1, C_2 um dieselbe Wirbelröhre gilt also:

$$\oint_{C_1} \vec{u} \cdot d\vec{x} = \oint_{C_2} \vec{u} \cdot d\vec{x} \quad (4.21)$$

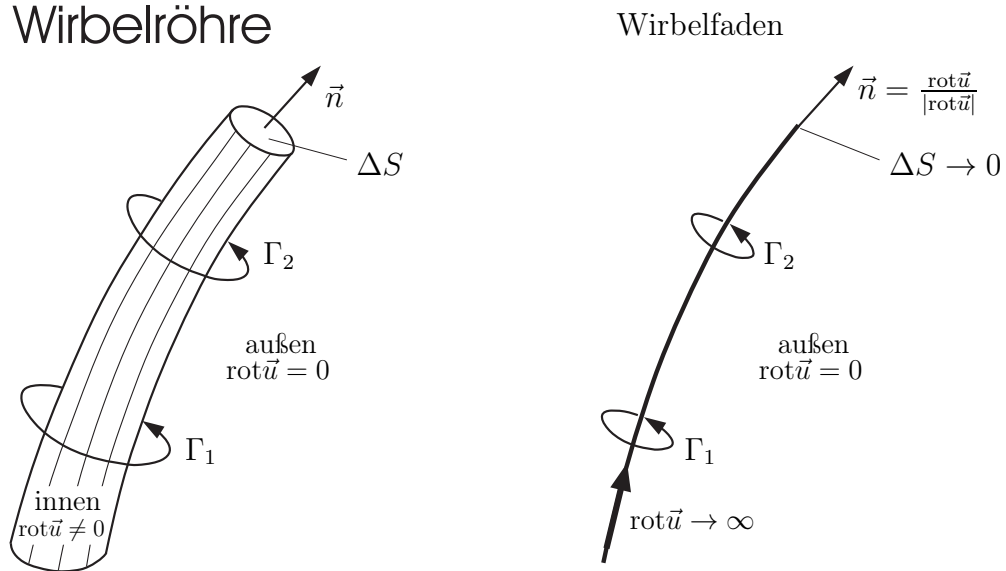


Abbildung 4.2: Wirbelröhre und Wirbelfaden

Wirbelfaden: Eine sehr dünne Wirbelröhre wird Wirbelfaden genannt.

- Für einen unendlich dünnen Wirbelfaden gilt: $\omega \Delta S = \text{konst.}$ mit $\Delta S \rightarrow 0$ und $\omega \rightarrow \infty$.
- Das Feld außerhalb von Wirbelfäden und -röhren sei rotationsfrei.

Man kann das Geschwindigkeitsfeld \vec{u} in einen rotationsfreien Anteil \vec{u}_D und in einen divergenzfreien Anteil \vec{u}_R zerlegen.

$$\vec{u} = \vec{u}_D + \vec{u}_R \quad (4.22)$$

- In inkompressibler Strömung ist $\vec{u}_D = 0$ (wegen $\text{div} \vec{u} = 0$).

Biot-Savartsches Gesetz

$$\vec{u}_R(\vec{x}) = \frac{\Gamma}{4\pi} \int_{(\text{Faden})} \frac{d\vec{x}' \times \vec{r}}{r^3} \quad (4.23)$$

mit $\vec{r} = \vec{x} - \vec{x}'$.

- Man sagt: Der Wirbelfaden ”induziert” die Geschwindigkeit \vec{u}_R am Ort \vec{x} .
- \vec{x}' ist ein Punkt auf dem Wirbelfaden, $d\vec{x}'$ ist ein infinitesimal kleines Stück des Wirbelfadens.
- **Superposition:** Die von verschiedenen Stromfäden an einem Ort \vec{x} induzierten Geschwindigkeiten dürfen einander überlagert werden.

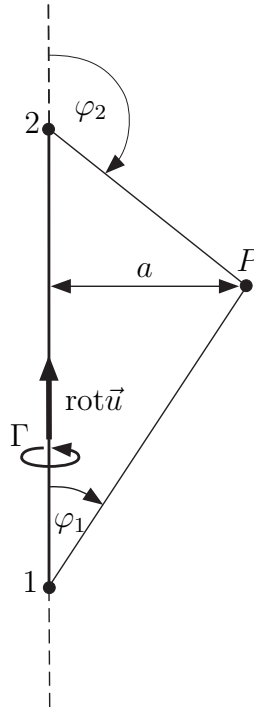


Abbildung 4.3: Endlich langer, gerader Wirbelfaden

Beispiel:

Anwendung des Biot-Savartschen Gesetzes auf einen geraden Wirbelfaden:

- Endlich langer, gerader Wirbelfaden (vgl. Abb. 4.3):

$$|\vec{u}_R| = \frac{\Gamma}{4\pi a} (\cos \varphi_1 - \cos \varphi_2) \quad (4.24)$$

- Halbunendlich langer, gerader Wirbelfaden (für $\varphi_1 = 0$ und $\varphi_2 = \pi/2$):

$$|\vec{u}_R| = \frac{\Gamma}{4\pi a} \quad (4.25)$$

- Unendlich langer, gerader Wirbelfaden:

$$|\vec{u}_R| = \frac{\Gamma}{2\pi a} \quad (4.26)$$

- Die Richtung $\frac{\vec{u}_R}{|\vec{u}_R|}$ der Geschwindigkeit $|\vec{u}_R|$ ist gegeben durch:

$$\frac{\vec{u}_R}{|\vec{u}_R|} = \frac{\text{rot} \vec{u}}{|\text{rot} \vec{u}|} \times \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} \quad (4.27)$$

Beachte: $\frac{\text{rot} \vec{u}}{|\text{rot} \vec{u}|}$ ist die Richtung des Wirbelfadens!

Zweiter Helmholtzscher Wirbelsatz (für barotrope, reibungsfreie Flüssigkeiten)

”Eine Wirbelröhre besteht immer aus denselben Flüssigkeitsteilchen.”

Prinzip der Spiegelung

Ohne Spiegelung würde eine wandnormale Geschwindigkeitskomponente $\vec{u}_\perp \neq 0$ existieren, welche die kinematische Randbedingung $\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\text{Wand}} = 0$ verletzt.

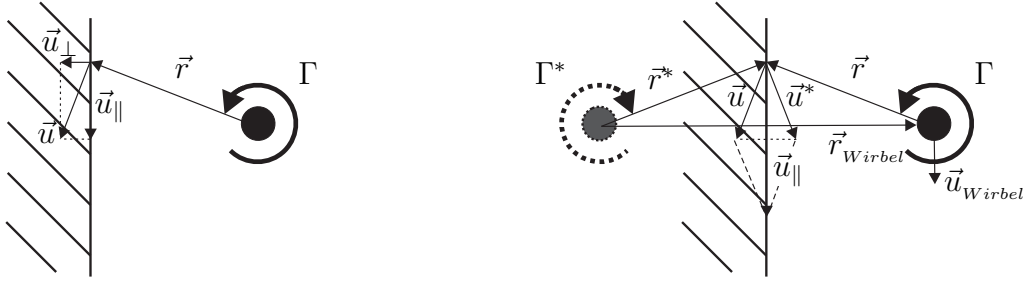


Abbildung 4.4: Prinzip der Spiegelung, induzierte Geschwindigkeit ohne (links) und mit (rechts) Spiegelung

Durch die Spiegelung an der Wand erhält man einen zweiten Wirbel mit $\Gamma^* = -\Gamma$, so dass sich beide wandnormalen Geschwindigkeitskomponenten aufheben. Die wandparallele Geschwindigkeitskomponente \vec{u}_\parallel an der Wand hat sich dabei verdoppelt. Außerdem erfährt nun der Wirbel selbst eine induzierte Geschwindigkeit \vec{u}_{Wirbel} durch sein Spiegelbild.

Dritter Helmholtzscher Wirbelsatz (für barotrope, reibungsfreie Flüssigkeiten)

”Die Zirkulation einer Wirbelröhre bleibt zeitlich konstant.”

Kapitel 5

Hydrostatik

5.1 Hydrostatische Druckverteilung

Das Kapitel *Hydrostatik* beschäftigt sich mit Kräften und Momenten auf Flächen in ruhenden Flüssigkeiten ($\vec{u} \equiv 0$).

Vorraussetzung dafür ist das sogenannte *hydrostatische Gleichgewicht*, welches sich direkt aus den *Navier-Stokesschen Gleichungen* ergibt:

$$\nabla p = \varrho \vec{k} \quad (5.1)$$

Durch Bilden der Rotation wird daraus:

$$\nabla \times \nabla p = \nabla \times (\varrho \vec{k}) = \underbrace{\nabla \varrho \times \vec{k}}_I + \underbrace{\varrho \nabla \times \vec{k}}_{II} = 0 \quad (5.2)$$

I wird zu null wenn gilt: $\nabla \varrho \parallel \vec{k}$

II verschwindet wenn die Massenkraft ein Potential besitzt: $\nabla \times \vec{k} = 0$

Meist ist die Massenkraft der Schwere die einzige Massenkraft und es gilt: $\vec{k} = \vec{g} = -g\vec{e}_z$. Der Druck lässt sich über Gleichung (5.3) im ganzen Feld bestimmen, so dass mit $\vec{t} = -\vec{n}p$ durch geeignete Parametrisierung der Flächen, sowohl Kräfte als auch Momente durch direktes Lösen der Oberflächenintegrale erfolgen kann.

$$p(z) = p_0 - \varrho g z \quad (5.3)$$

5.2 Hydrostatischer Auftrieb, Kraft auf Wände

Ebene Flächen

(z.B. Abb. 5.1, Seite a, Fläche S_a) Für ebene Flächen wurden diese Berechnungen allgemein durchgeführt, so dass es genügt in vorgefertigte Formeln einzusetzen.

Die Berechnung der Kraft erfolgt über:

$$\vec{F} = -\vec{n} p_s A \quad (5.4)$$

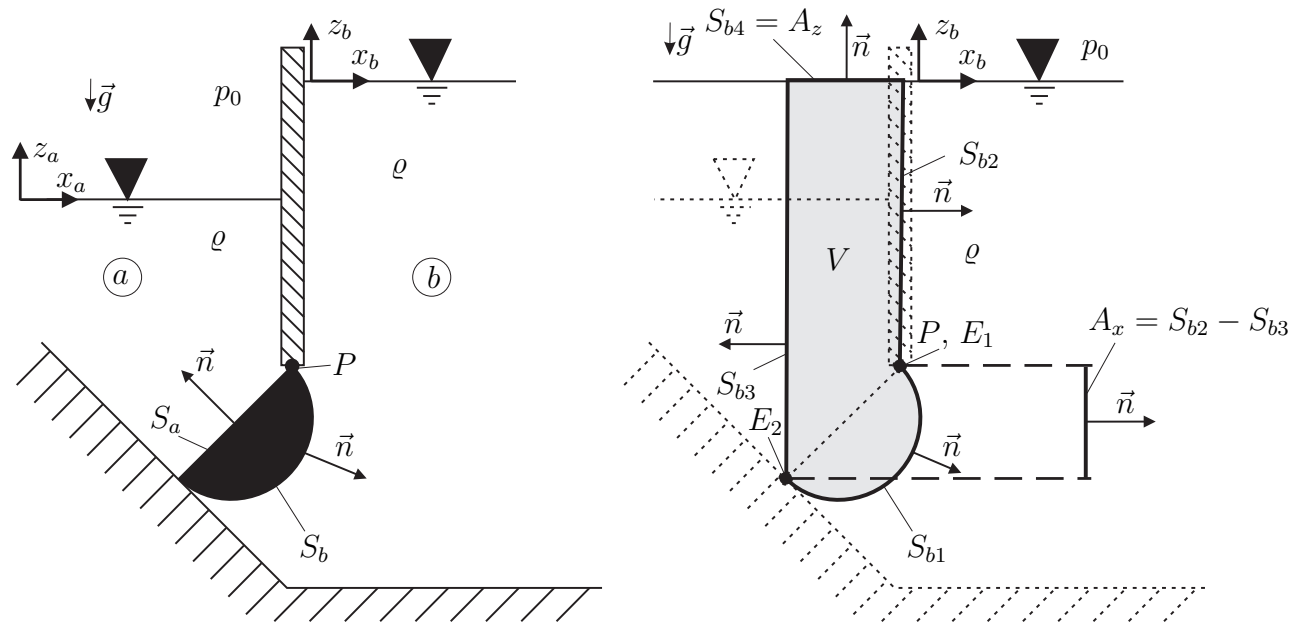


Abbildung 5.1: Links: Beispiel zur Hydrostatik, Rechts: Beispiel zum Ersatzkörper zur Berechnung auf Seite b

Dabei stellt p_s den Druck im Flächenschwerpunkt dar und A die Fläche selbst. Der Vektor \vec{n} zeigt von der benetzend Fläche weg in die Flüssigkeit.

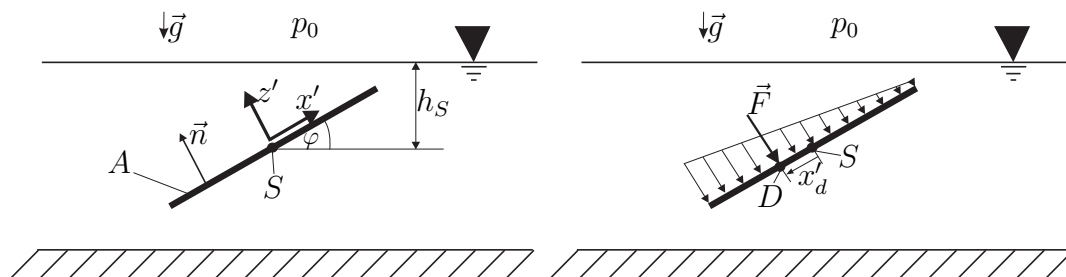


Abbildung 5.2: Moment auf eine ebene Fläche

Die Berechnung des Momentes bezüglich eines Punktes $P(x'_p, y'_p, z'_p)$ erfolgt über:

$$\vec{M}_P = (\rho g I_{x'y'} \sin \varphi + y'_p p_s A) \vec{e}_{x'} - (\rho g I_{y'} \sin \varphi + x'_p p_s A) \vec{e}_{y'} \quad (5.5)$$

Die Koordinaten x'_p und y'_p sind dabei im flächenfesten Koordinatensystem zu bestimmen (vgl. Abb. 5.2). $I_{x'y'}$ und $I_{y'}$ sind Flächenträgheitsmomente (wie bereits aus der Mechanik bekannt) und berechnen sich über:

$$I_{x'y'} = \iint_{(A)} x' y' dA \quad (5.6)$$

$$I_{y'} = \iint_{(A)} x'^2 dA \quad (5.7)$$

Bezüglich eines bestimmten Punktes $D(x'_d, y'_d)$ wirkt kein Moment auf die betrachtete Fläche; dieser Punkt wird Druckpunkt genannt. Nullsetzen von Gleichung (5.5) führt auf die Koordinaten

$$x'_d = -\frac{\rho g I_y \sin \varphi}{p_s A} \quad (5.8)$$

$$y'_d = -\frac{\rho g I_{x'y'} \sin \varphi}{p_s A} \quad (5.9)$$

Man kann die Druckverteilung also zu einer einzelnen Ersatzkraft \vec{F} zusammenfassen (Berechnung mit Formel (5.4)), welche am Druckpunkt D angreift. Mit dieser Kraft und dem Hebelarm zwischen Druckpunkt D und Drehpunkt P lässt sich ebenfalls, das Moment um den Drehpunkt P berechnen.

Bemerkungen:

- Die Berechnung des Druckpunktes ist nur sinnvoll, wenn dies explizit verlangt ist. Ansonsten ist Formel 5.5 vorzuziehen.
- Da die Druckverteilung im Allgemeinen nach unten hin zunimmt, liegt der Druckpunkt in der Regel unterhalb des Flächenschwerpunktes. Bei der Betrachtung von Druckdifferenzen können sich diese Sachverhalte jedoch umkehren.
- Für die Berechnung aller gestrichenen Größen x' , y' und z' ist auf die Lage des Koordinatensystems zu achten, welches individuell für jede Fläche im jeweiligen Flächenschwerpunkt einzutragen ist. Die Richtung wird dabei durch z' festgelegt, welches genau wie \vec{n} von der Fläche in die Flüssigkeit zeigt (In Abb. 5.2 gilt daher z.B.: $x'_d < 0$).

Gekrümmte und zusammengesetzte Flächen

(z.B. Abb. 5.1, Seite b , Fläche S_b) Da auf diesen Flächen die direkte Berechnung der Kräfte und Momente kompliziert und aufwendig ist, wird diese Fläche zu einer geschlossenen Fläche ergänzt, welche ein Volumen (Ersatzkörper) umschließt. Nach dem Satz von Gauß gilt dann:

$$-\iint_{(S)} p \vec{n} dS = -\iiint_{(V)} \nabla p dV = -\iiint_{(V)} \rho \vec{g} dV = -\rho \vec{g} V \quad (5.10)$$

Für die Gültigkeit von Gleichung (5.10) muss p eine stetig differenzierbare Funktion sein. Diese Bedingung ist erfüllt, wenn man sich den Ersatzkörper komplett in jene Flüssigkeit eingetaucht vorstellt, welche die zurechnende Fläche benetzt.

Auflösen nach der gesuchten Fläche liefert:

$$\vec{F}_{S_{b1}} = -\iint_{(S_{b1})} p \vec{n} dS = -\rho \vec{g} V + \iint_{(S_{b2})} p \vec{n} dS + \iint_{(S_{b3})} p \vec{n} dS + \iint_{(S_{b4})} p \vec{n} dS + \dots \quad (5.11)$$

Die Anzahl und Lage der zusätzlichen Flächen, um ein geschlossenes Volumen zu erhalten, ist zunächst einmal absolut frei. Jedoch ist es in vielen Anwendungen zweckmäßig, das Lot von der Oberfläche der benetzenden Flüssigkeit bis zu den Endpunkten der benetzten Fläche ($E1$ und $E2$) zu fallen (vgl. Abb. 5.1, rechts).

Bei dieser Anordnung haben in x -Richtung nur S_{b2} und S_{b3} Anteil an der rechten Seite, so dass die Berechnung der projizierten Differenzfläche A_x genügt (A_x entspricht also dem senkrechten Abstand der Endpunkte E_1 und E_2):

$$F_x = \mp p_s A_x \quad (5.12)$$

Hierbei ist p_s wieder der Druck im Flächenschwerpunkt der Differenzfläche A_x . Das Vorzeichen ergibt sich aus der Richtung des Normalenvektors \vec{n} auf der Fläche A_x .

In z -Richtung hat nur die Deckfläche A_z und die Auftriebskraft von V einen Anteil.

$$F_z = p_0 A_z + \rho g V \quad (5.13)$$

Die Berechnung von Momenten kann nun wieder über Gleichung (5.5) für die Flächen A_x und A_z erfolgen. Zusätzlich ist das Moment der **Auftriebskraft** zu berücksichtigen, welche im **Volumenschwerpunkt** angreift.

Bemerkungen:

- Da für die Berechnung mit Ersatzkörper angenommen wurde, dass die **Normalenvektoren vom Ersatzkörper weg** nach außen in die Flüssigkeit zeigen, muss im Falle eines Ersatzkörpers mit Normalenvektoren, die in den Ersatzkörper hineinzeigen, das Vorzeichen der Kraft F_z umgedreht werden.
- Hat man die Kraft F_z für alle benetzten Flächen berechnet, darf man auf keinen Fall noch einmal den Auftrieb hinzunehmen, da dieser lediglich eine Hilfsgröße für die Berechnung der z -Komponente der Kraft auf diese benetzten Flächen darstellt.
- Lediglich für den Spezialfall, dass der Körper auf allen Kontaktflächen von **derselben zusammenhängenden Flüssigkeit** benetzt wird, kann die Kraft in z -Richtung ohne Einschränkung, durch den Auftrieb des eingetauchten Volumens ersetzt werden.

5.3 Freie Oberflächen



Abbildung 5.3: Links: Randwinkel an einer Wand, Rechts: Randwinkel in dünnen Röhren

An freien Oberflächen wirkt eine zusätzliche tangentielle Kraft, die als Oberflächenspannung bezeichnet wird. An gekrümmten Oberflächen kommt es dadurch zu einem Drucksprung¹:

¹Am Beispiel eines Luftballons wird deutlich, dass dabei der Druck auf der Innenseite höher ist als auf der Außenseite.

$$\Delta p = C \left[\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right] \quad (5.14)$$

Hierbei ist C die Kapillarkonstante, die von der Materialpaarung abhängt, und R_1 sowie R_2 bezeichnen die Hauptkrümmungsradien. An der Wand selbst stellt sich ein Randwinkel (Kontaktwinkel) α ein, der auf dem wandparallelen Kräftegleichgewicht² aus den drei Kapillarkonstanten C_{12} , C_{13} und C_{23} beruht (vgl. Abb. 5.3, links):

$$\cos\alpha = \frac{C_{23} - C_{13}}{C_{12}} \quad (5.15)$$

Dabei ist C_{12} die Kapillarkonstante zwischen den beiden Fluiden. C_{13} und C_{23} sind Kapillarkonstanten zwischen Fluid und Wand. Der Winkel α wird zwischen Wand und Flüssigkeit aufgetragen.

Spezialfälle:

- dünne Röhrchen:

Hier wird die Form der freien Oberfläche als Kugelkalotte angenommen mit $R_1 = R_2 = R$:

$$\Delta p = \frac{2C}{R}$$

Außerdem lässt sich R durch die einfache geometrische Beziehung zwischen dem Randwinkel α und dem Röhrchenradius r ausdrücken (vgl. Abb. 5.3, rechts):

$$R = \frac{r}{\cos\alpha}$$

- einzelne Wand:

Während $R_1 = R$ eine Funktion des Wandabstands bleibt, verschwindet der Einfluss von R_2 :

$$\Delta p = \frac{C}{R}$$

²Ansonsten würde die 3-Phasen-Grenzlinie an der Wand entlang wandern.

Kapitel 6

Laminare Schichtenströmung

6.1 Stationäre Schichtenströmung

Dieses Kapitel handelt von der exakten Berechnung der Strömungsfelder von **ebenen** bzw. **rotationssymmetrischen**, **stationären**, **inkompressiblen** und **reibungsbefahenen** Strömungen durch Lösen der Bilanzgleichungen

$$\begin{aligned} &\text{Kontinuitätsgleichung} \\ &\text{Navier-Stokes-Gleichung (Impulsgleichung)} \\ &\text{Energiegleichung} \end{aligned}$$

in differentieller Form unter Beachtung der **Randbedingungen an Oberflächen**. Dabei gelten für das Strömungsfeld stets die vereinfachten Annahmen (vgl. Tabelle 6.1):

- Die Geschwindigkeit ändert sich nicht in Strömungsrichtung. Man kann das Koordinatensystem immer so wählen, dass zwei Geschwindigkeitskomponenten null sind.
- Liegt Ebenheit bzw. Rotationssymmetrie bzgl. einer Koordinatenrichtung vor, verschwinden alle räumlichen Ableitungen in diese Richtung.
- Wenn sich die Randbedingungen an eine Größe φ in Strömungsrichtung nicht ändern, fällt auch die räumliche Ableitung dieser Größe in Strömungsrichtung weg (**außer der Ableitung des Drucks**).

| Bezeichnung | Geschwindigkeiten | räumliche Ableitungen |
|-------------------------------|---|---|
| Kanalströmung | $u_1 = u_1(x_2), u_2 = u_3 = 0$ | $\frac{\partial}{\partial x_1} = 0, \frac{\partial}{\partial x_3} = 0, \text{i.A. } \frac{\partial p}{\partial x_1} \neq 0$ |
| Strömung zwischen 2 Zylindern | $u_\varphi = u_\varphi(r), u_r = u_z = 0$ | $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0$ |
| Rohrströmung | $u_z = u_z(r), u_r = u_\varphi = 0$ | $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0, \frac{\partial}{\partial z} = 0, \text{i.A. } \frac{\partial p}{\partial z} \neq 0$ |
| Spalt zwischen rot. Scheiben | $u_\varphi = r\Omega(z), u_r = u_z = 0$ | $\frac{\partial}{\partial \varphi} = 0$ |

Tabelle 6.1: Zusammenstellung der Schichtenströmungen

Vorgehen zur Bestimmung des Strömungsfeldes:

1. Vereinfachen der Bilanzgleichungen im zweckmäßigen Koordinatensystem mit Hilfe von Tabelle 6.1.
2. Ist ein Druckgradient in Strömungsrichtung vorhanden (Druckgetriebene Strömung oder reine Schleppströmung?)
3. Ist eine Massenkraft vorhanden, und wie teilt sie sich auf die Koordinatenrichtungen auf?
4. Lösen der Differentialgleichungen:
 - Ist eine Größe nur von einer Variablen abhängig, so können die partiellen Ableitungen durch totale Ableitungen ersetzt werden (vgl. Tabelle 6.1).
 - Liegt eine Gleichung vor, deren Seiten Funktionen von verschiedenen Variablen sind, so können diese Funktionen nur Konstanten sein.
Beispiel: Kanalströmung

$$\underbrace{\frac{\partial p}{\partial x_1}}_{\neq f(x_2, x_3)} = \underbrace{\eta \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2}}_{\neq f(x_1, x_3)} = K \quad \Rightarrow \quad K \neq f(x_1, x_2, x_3) \quad (6.1)$$

5. Bestimmung der Integrationskonstanten durch Randbedingung an Oberflächen:
 - Haftbedingung an Wänden: $\vec{u}|_{wand} = 0$
 - Kräftegleichgewicht an Grenzflächen mit dem Normalenvektor \vec{n} zwischen Fluid (1) und Fluid (2): $n_j \tau_{ji(1)} = n_j \tau_{ji(2)}$
 - Senkrechte Komponente ($i = j$): $p_{(1)} = p_{(2)}$
 - Parallele Komponente ($i \neq j$): $\eta_{(1)} e_{ji(1)} = \eta_{(2)} e_{ji(2)}$
 - Vorgabe der Wandtemperatur $T|_{wand}$
 - Vorgabe des Wärmestroms durch die Wand: $\dot{Q} = - \int \int_{(A)} \vec{q} \cdot \vec{n} dA$
Für einen konstanten Wärmestrom gilt: $\dot{Q} = qA = -\vec{q} \cdot \vec{n}A = \lambda(\vec{n} \cdot \nabla T|_{wand})A$
 - Wärmestrom über Grenzflächen mit dem Normalenvektor \vec{n} zwischen Fluid (1) und Fluid (2): $\lambda_{(1)}(\vec{n} \cdot \nabla T_{(1)}) = \lambda_{(2)}(\vec{n} \cdot \nabla T_{(2)})$
 - Ist der Volumenstrom gegeben? Mit Hilfe des Volumenstroms kann ggf. durch Integration des Geschwindigkeitsprofils die letzte unbekannte Konstante bestimmt werden.

Hinweis:

Einige Schichttenströmungen mit konstanten Stoffwerten sind im Spurbuch bereits gelöst!

Kapitel 9

Stromfadentheorie

9.1 Inkompressible Strömung

Die Ansätze der Stromfadentheorie erlauben die Berechnung von inkompressiblen, reibungsbehafteten Strömungen mit denselben Gleichungen wie für reibungsfreie Strömungen (*Bernoullische Gleichung*). Es wird angenommen, dass sich die Strömungsgrößen sich über den Querschnitt nicht ändern. Die Strömung wird durch eine "mittlere" Stromline und eine "mittlere" Geschwindigkeit repräsentiert. Für den Volumenstrom gilt:

$$\dot{V} = uA = \text{konst.} \quad (9.1)$$

Die hydraulische Leistung ist gegeben durch:

$$P = \Delta p \dot{V} \quad (9.2)$$

Da zwischen Anfangspunkt (1) und Endpunkt (2) zusätzlich Verluste Δp_v , Druckerhöhungen durch Pumpen Δp_P oder Druckreduzierung durch Turbinen Δp_T berücksichtigt werden müssen, wird die stationäre *Bernoullische Gleichung* um diese Terme erweitert:

$$\rho \frac{u_2^2}{2} + p_2 + \rho g z_2 + \sum \Delta p_v + \sum \Delta p_T - \sum \Delta p_P = \rho \frac{u_1^2}{2} + p_1 + \rho g z_1 \quad (9.3)$$

Die Verluste Δp_v können dabei durch das Produkt einer Verlustziffer ζ und dem Staudruck $\rho \frac{u^2}{2}$ ausgedrückt werden:

$$\Delta p_v = \zeta \rho \frac{u^2}{2} \quad (9.4)$$

Bei Bauteilen mit **Querschnittsveränderung** und daraus resultierender Geschwindigkeitsveränderung ist unbedingt darauf zu achten, mit welcher **Bezugsgeschwindigkeit** u der Druckverlust Δp_v berechnet werden muss.

Während für komplizierte Bauteile die Verlustziffer ζ experimentell bestimmt werden und so für die Berechnung vorgegeben sein muss, gibt es für einige klassische Bauteile analytische bzw. empirische Ansätze, die eine Berechnung des Druckverlusts aus geometrischen Vorgaben, der Strömungsgeschwindigkeit und Stoffwerten zulassen.

1. Röhre

Mit der **Widerstandszahl** $\lambda = \zeta \frac{d}{l}$ lässt sich eine Verlustkennzahl einführen, welche von der Grobgeometrie unabhängig ist, und nur noch von der **Reynoldszahl** $Re = \frac{ud}{\nu}$ und der **realtiven Wandrauhigkeit** $\frac{k}{d}$ abhängt. Der Druckverlust wird zu:

$$\Delta p_v = \zeta \varrho \frac{u^2}{2} = \lambda \frac{l}{d} \varrho \frac{u^2}{2} \quad (9.5)$$

In laminarer Strömung gilt für die Widerstandszahl λ :

$$\lambda = \frac{64}{Re} \quad (9.6)$$

In turbulenter Strömung kann die Widerstandszahl λ unter Verwendung des logarithmischen Widerstandsdiagramms ermittelt werden.

2. Scharfkantige Querschnittsveränderung (Stoß und Einschnürung)

Die Verluste in einem solchen Bauteil hängen von der Durchströmrichtung ab:

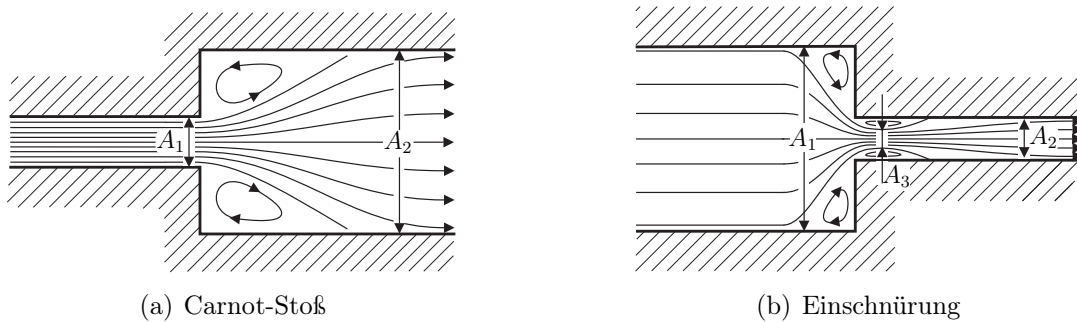


Abbildung 9.1: Plötzliche Querschnittsveränderung

Carnot-Stoß:

$$\begin{aligned} \Delta p_v &= \varrho \frac{u_1^2}{2} \left(1 - \frac{A_1}{A_2}\right)^2 \\ &= \frac{\varrho}{2} (u_1 - u_2)^2 \end{aligned} \quad (9.7)$$

Grenzfall Auströmverluste mit $A_2 \rightarrow \infty$
 $\Leftrightarrow u_2 \rightarrow 0$:

$$\Delta p_v = \varrho \frac{u_1^2}{2} \quad (9.8)$$

Einschnürung:

Verluste durch Einschnürung (entspricht einen Stoß von A_3 auf A_2) und wird meist durch die Kontraktionsziffer $\alpha = \frac{A_3}{A_2}$ ausgedrückt:

$$\begin{aligned} \Delta p_v &= \varrho \frac{u_3^2}{2} \left(1 - \frac{A_3}{A_2}\right)^2 \\ &= \varrho \frac{u_2^2}{2} \left(\frac{1 - \alpha}{\alpha}\right)^2 \end{aligned} \quad (9.9)$$

3. Kontinuierliche Querschnittsveränderung (Diffusor und Düse)

Die Verluste in einem solchen Bauteil hängen von der Durchströmrichtung ab:

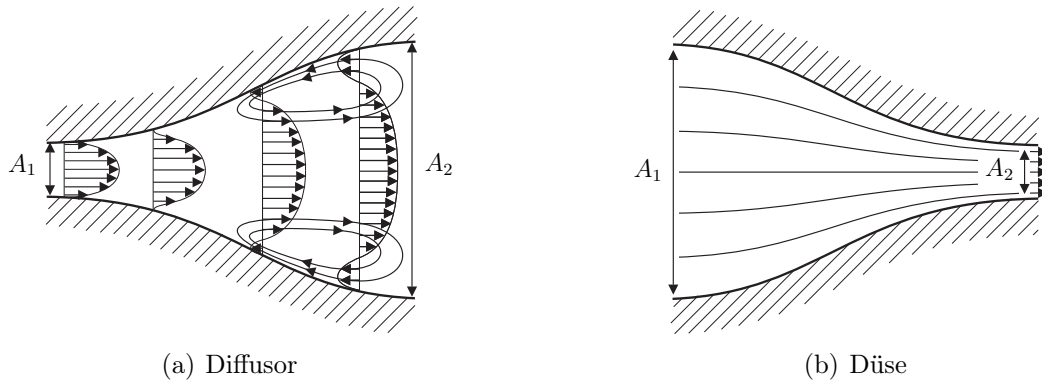


Abbildung 9.2: Kontinuierliche Querschnittsveränderung

Diffusor: Verluste durch Strömungsablösungen werden durch einen Wirkungsgrad η_D quantifiziert:

$$\Delta p_v = \left[(1 - \eta_D) \left(1 - \frac{A_1^2}{A_2^2} \right) \right] \rho \frac{u_1^2}{2} \quad (9.10)$$

Düse: Abgesehen von Wandreibung ist die Düse verlustfrei. Für kurze Düsen und abgerundete Einläufe gilt daher:

$$\Delta p_v = 0 \quad (9.11)$$

4. Mischung

Durch Vermischung zweier unterschiedlich schneller Volumenströme kommt es zu einem Druckanstieg Δp_M . Die Aufteilung der Eintrittsfläche A_1 muss dabei nicht zwangsläufig symmetrisch sein, wie in Abb. 9.3.

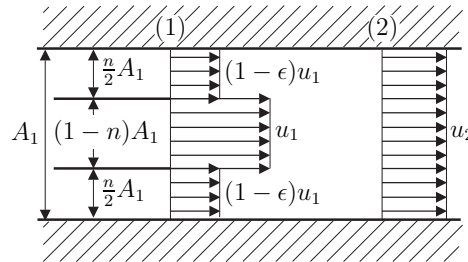


Abbildung 9.3: Mischung

Für die Ausströmgeschwindigkeit u_2 gilt nach der Kontinuitätsgleichung:

$$u_2 = u_1(1 - n\epsilon) \quad (9.12)$$

Die Druckerhöhung ergibt sich zu:

$$\Delta p_M = p_2 - p_1 = n(1 - n)\epsilon^2 \rho u_1^2 \quad (9.13)$$

Oft spielt die eigentliche Vermischung keine Rolle, und es wird lediglich ausgenutzt, dass der Druck an der Stelle (1) für beide, in den Mischungsbereich einströmende Massenströme, identisch ist.

Anhang A

Einführung in die kartesische Tensorrechnung

Übersicht Gradient, Divergenz, Rotation in kartesischen Koordinaten

| <i>symbolische Schreibweise</i> | <i>Indexnotation</i> | <i>Matrizenschreibweise</i> |
|--|---|--|
| 1. Nabla-Operator | | |
| ∇ | $\frac{\partial}{\partial x_i}$ | $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3} \right)^T$ |
| 2. Laplace-Operator | | |
| Skalarfeld $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ $\Delta\Phi = \nabla \cdot \nabla\Phi = c$ | $\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_i \partial x_i} = c$ | $c \triangleq \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x_3^2}$ |
| 3. Gradient | | |
| Skalarfeld $\Phi(x_1, x_2, x_3, t)$ $\text{grad}\Phi = \nabla\Phi = \vec{c}$ | $\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = c_i$ | $\vec{c} \triangleq \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_2}, \frac{\partial \Phi}{\partial x_3} \right)^T$ |
| Vektorfeld $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ $\text{grad}\vec{u} = \nabla\vec{u} = \mathbf{T}$ | $\frac{\partial u_j}{\partial x_i} = \tau_{ij}$ | $\mathbf{T} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x_1} & \frac{\partial u_2}{\partial x_1} & \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_2} & \frac{\partial u_2}{\partial x_2} & \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} & \frac{\partial u_2}{\partial x_3} & \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \end{bmatrix}$ |
| 4. Divergenz | | |
| Vektorfeld $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ $\text{div}\vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = c$ | $\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = c$ | $c \triangleq \frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3}$ |
| Tensorfeld $\mathbf{T}(x_1, x_2, x_3, t)$ $\text{div}\mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = \vec{c}$ | $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_i} = c_j$ | $\vec{c} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{32}}{\partial x_3} \\ \frac{\partial \tau_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{33}}{\partial x_3} \end{pmatrix}$ |
| 5. Rotation | | |
| Vektorfeld $\vec{u}(x_1, x_2, x_3, t)$ $\text{rot}\vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \vec{c}$ | $\epsilon_{ijk} \frac{\partial u_j}{\partial x_i}$ | $\vec{c} \triangleq \begin{pmatrix} \frac{\partial u_3}{\partial x_2} - \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial u_1}{\partial x_3} - \frac{\partial u_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x_1} - \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \end{pmatrix}$ |

Übersicht Gradient, Divergenz, Rotation in Zylinderkoordinaten

| | |
|---|---|
| <i>symbolische Schreibweise</i> | |
| 1. Nabla-Operator | |
| ∇ | $\vec{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \vec{e}_\varphi \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} + \vec{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$ |
| 2. Laplace-Operator | |
| Skalarfeld $\Phi(r, \varphi, z, t)$ $\Delta \Phi = \nabla \cdot \nabla \Phi = c$ | $c \stackrel{\wedge}{=} \underbrace{\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}}_{\text{radial}} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2}$ |
| 3. Gradient | |
| Skalarfeld $\Phi(r, \varphi, z, t)$ $\text{grad} \Phi = \nabla \Phi = \vec{c}$ | $\vec{c} \stackrel{\wedge}{=} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi + \frac{\partial \Phi}{\partial z} \vec{e}_z$ |
| 4. Divergenz | |
| Vektorfeld $\vec{u}(r, \varphi, z, t)$ $\text{div} \vec{u} = \nabla \cdot \vec{u} = c$ | $c \stackrel{\wedge}{=} \frac{1}{r} \left[\frac{\partial (u_r r)}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial (u_z r)}{\partial z} \right]$ |
| Tensorfeld $\mathbf{T}(r, \varphi, z, t)$ $\text{div} \mathbf{T} = \nabla \cdot \mathbf{T} = \vec{c}$ | $\vec{c} \stackrel{\wedge}{=} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (\tau_{rr} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\varphi \varphi}}{r} \right] \vec{e}_r +$ $+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (\tau_{r\varphi} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi \varphi}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{z\varphi}}{\partial z} + \frac{\tau_{r\varphi}}{r} \right] \vec{e}_\varphi +$ $+ \left[\frac{1}{r} \frac{\partial (\tau_{rz} r)}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\varphi z}}{\partial \varphi} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \vec{e}_z$ |
| 5. Rotation | |
| Vektorfeld $\vec{u}(r, \varphi, z, t)$ $\text{rot} \vec{u} = \nabla \times \vec{u} = \vec{c}$ | $\vec{c} \stackrel{\wedge}{=} \left[\frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} \right] \vec{e}_r +$ $+ \left[\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right] \vec{e}_\varphi +$ $+ \left[\frac{1}{r} \left(\frac{\partial (u_\varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \vec{e}_z$ |

| | |
|---|--|
| Kontinuitätsgleichung | |
| $\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\varrho u_r r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi} (\varrho u_\varphi) + \frac{\partial}{\partial z} (\varrho u_z) = 0$ | |
| NS Gleichungen $\varrho, \eta = \text{const}$ | |
| $r :$ | $\begin{aligned} & \varrho \left[\frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(u_\varphi \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} - u_\varphi^2 \right) \right] = \\ & = \varrho k_r - \frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[\Delta u_r - \frac{1}{r^2} \left(u_r + 2 \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} \right) \right] \end{aligned}$ |
| $\varphi :$ | $\begin{aligned} & \varrho \left[\frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r} \left(u_\varphi \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_r u_\varphi \right) \right] = \\ & = \varrho k_\varphi - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \varphi} + \eta \left[\Delta u_\varphi - \frac{1}{r^2} \left(u_\varphi - 2 \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} \right) \right] \end{aligned}$ |
| $z :$ | $\begin{aligned} & \varrho \left[\frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} + \frac{1}{r} u_\varphi \frac{\partial u_z}{\partial \varphi} \right] = \\ & = \varrho k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \eta \Delta u_z \end{aligned}$ |