Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНО ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

Расчетно-графическая работа по первому модулю
Вариант №23

По дисциплине
Линейная алгебра

Выполнил
Стафеев И.А.

Группа: K3121

Проверила
Шиманская Г.С.

Санкт-Петербург,
2023

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 Задание 1

Даны уравнения боковых сторон равнобедренного треугольника $3x + y = 0$ и $x - 3y = 0$ и точка $(5;0)$ на его основании. Найти периметр и площадь треугольника

Решение:

1. Найдем уравнение биссектрисы треугольника

Если прямая $3x + y = 0$ составляет угол φ_1 с осью Ox, а прямая $x - 3y = 0$ составляет угол φ_2 с осью Ox, то биссектриса треугольника будет составлять угол $\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}$ с осью Ox.

$3x + y = 0 \Leftrightarrow y = -3x \Rightarrow k_1 = tg(\varphi_1) = -3 \Rightarrow \varphi_1 = arctg(-3)$

$x - 3y = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{3} \Rightarrow k_2 = tg(\varphi_2) = \frac{1}{3} \Rightarrow \varphi_2 = arctg(\frac{1}{3})$

Для прямой биссектрисы $k_3 = tg(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}) = \frac{sin(\varphi_1)+sin(\varphi_2)}{cos(\varphi_1)+cos(\varphi_2)}$.

$1 + ctg^2(\varphi_1) = \frac{1}{sin^2(\varphi_1)} \Leftrightarrow sin(\varphi_1) = -\sqrt{\frac{1}{1+ctg^2(\varphi_1)}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{tg^2(\varphi_1)}}} = -\sqrt{\frac{1}{1+\frac{1}{9}}} = -\sqrt{\frac{9}{10}} = -\frac{3}{\sqrt{10}}$ (знак минус стоит, потому что $tg(\varphi_1) < 0$)

$cos(\varphi_1) = \sqrt{1 - sin^2(\varphi_1)} = \sqrt{1 - (-\frac{3}{\sqrt{10}})^2} = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

Аналогично находим $sin(\varphi_2) = \frac{1}{\sqrt{10}}$ и $cos(\varphi_2) = \frac{3}{\sqrt{10}}$.

$k_3 = tg(\frac{\varphi_1+\varphi_2}{2}) = \frac{sin(\varphi_1)+sin(\varphi_2)}{cos(\varphi_1)+cos(\varphi_2)} = \frac{-\frac{3}{\sqrt{10}}+\frac{1}{\sqrt{10}}}{\frac{1}{\sqrt{10}}+\frac{3}{\sqrt{10}}} = -\frac{1}{2}$

Составим уравнение биссектрисы. Она должна проходить через точку пересечения боковых сторон треугольника. Точка пересечечения прямых $3x + y = 0$ и $x - 3y = 0$ - это точка $(0;0)$. Тогда

$y - 0 = k_3(x - 0) \Leftrightarrow y = k_3x \Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$

2. Найдем уравнение основания треугольника.

Прямая основания должна проходить через точку $(5;0)$, тогда ее уравнение будет имет вид $y - 0 = k_4(x - 5) \Leftrightarrow y = k_4(x - 5) \Leftrightarrow y = k_4x - 5k_4$

По свойству равнобедренного треугольника биссектриса, проведенная к основанию, является его высотой. Тогда прямые $y = -\frac{1}{2}x$ и $y = k_4x - 5k_4$ премендикулярны. По условию перпендикулярности прямых $-\frac{1}{2} \cdot k_4 = -1 \Rightarrow k_4 = -1 : -\frac{1}{2} = 2$.

Уравнение основания треугольника - $y = k_4x - 5k_4 \Leftrightarrow y = 2x - 10 \Leftrightarrow 2x - y - 10 = 0$.

3. Найдем периметр и площадь треугольника.

Определим координаты вершин треугольника. $A(0;0)$ - точка пересечения прямых $3x+y=0$ и $x-3y=0$, $B(2;-6)$ - точка пересечения прямых $3x+y=0$ и $2x-y-10=0$, $C(6;2)$ - точка пересечения $x-3y=0$ и $2x-y-10=0$

Найдем длины сторон треугольника

$AB=\sqrt{(A_x-B_x)^2+(A_y-B_y)^2}=\sqrt{(0-2)^2+(0+6)^2}=\sqrt{4+36}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$AC=\sqrt{(A_x-C_x)^2+(A_y-C_y)^2}=\sqrt{(0-6)^2+(0-2)^2}=\sqrt{36+4}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$

$BC=\sqrt{(B_x-C_x)^2+(B_y-C_y)^2}=\sqrt{(2-6)^2+(-6-2)^2}=\sqrt{16+64}=\sqrt{80}=4\sqrt{5}$

Периметр треугольника равен $AB+AC+BC=2\sqrt{10}+2\sqrt{10}+4\sqrt{5}=2\sqrt{2}\sqrt{5}+2\sqrt{2}\sqrt{5}+4\sqrt{5}=4\sqrt{5}\cdot(1+\sqrt{2})$

Заметим, что $AC^2+AB^2=BC^2$ $(40+40=80)$, значит, треугольник ABC прямоугольный с прямым углом A. Тогда площадь ABC равна $\frac{AB\cdot Ac}{2}=\frac{\sqrt{40}\cdot\sqrt{40}}{2}=\frac{40}{2}=20$.

Ответ: $P_{ABC}=4\sqrt{5}(1+\sqrt{2})$, $S_{ABC}=20$

2 Задание 2

Привести к каноническому виду и построить:

а) $y^2 + 8x + 8y = 0$

б) $x^2 - y^2 + 8x - 2y + 16 = 0$

в) $9x^2 + 4y^2 + 72x + 32y = 172$

Решение:

а) $y^2 + 8x + 8y = 0 \Leftrightarrow y^2 + 8y + 16 + 8x - 16 = 0 \Leftrightarrow y^2 + 8y + 16 = -8x + 16 \Leftrightarrow (y+4)^2 = 2 \cdot (-4) \cdot (x-2)$

Это уравнение параболы с центром в точке $(2; -4)$ и ветвями, направленными влево, так как $p = -4 < 0$ (см. рисунок 1).

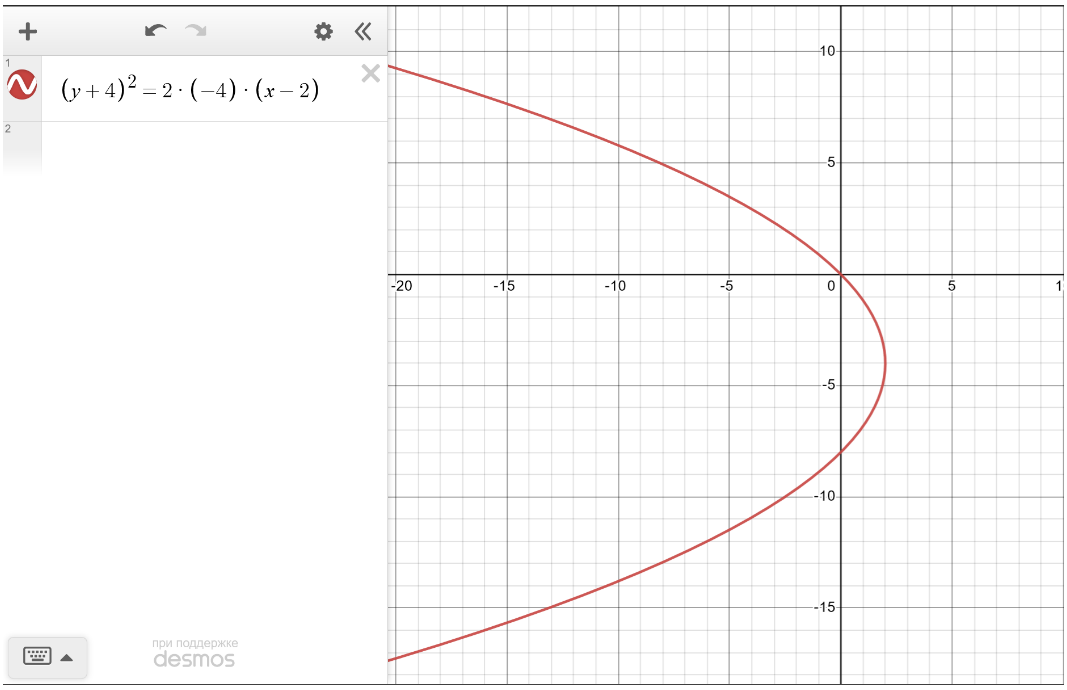

Рисунок 1 — График полученной параболы

б) $x^2 - y^2 + 8x - 2y + 16 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 8x + 16 - y^2 - 2y - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x+4)^2 - (y+1)^2 = -1 \Leftrightarrow -(x+4)^2 - (-(y+1)^2) = 1 \Leftrightarrow \frac{-(x+4)^2}{1^2} - \frac{-(y+1)^2}{1^2} = 1$

Это уравнение равнобочной гиперболы ($a = b = 1$) с центром в точке $(-4; -1)$ и расположением ветвей вверх и вниз (см. рисунок 2).

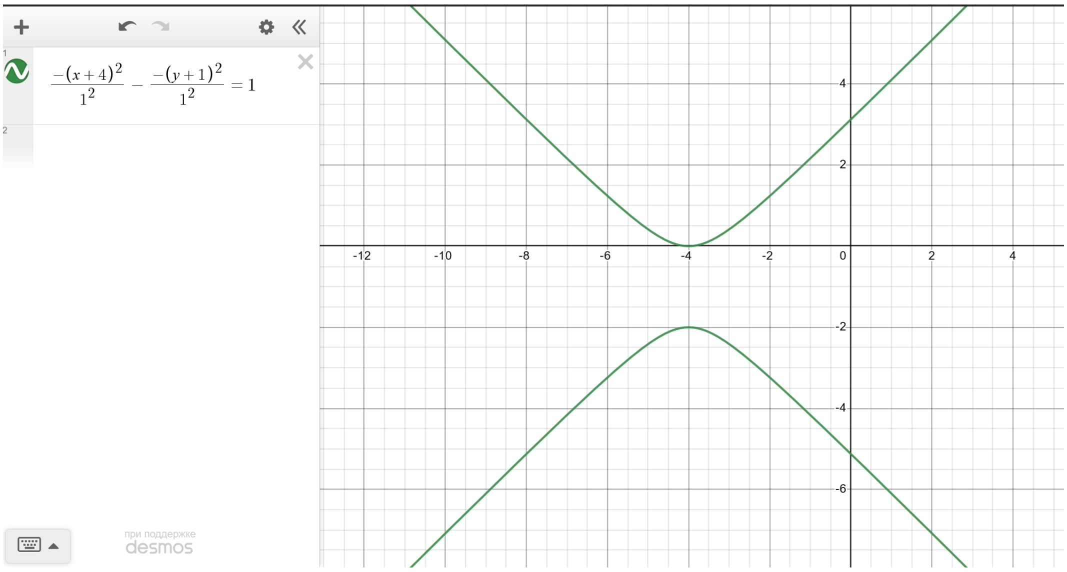

Рисунок 2 — График полученной гиперболы

в) $9x^2+4y^2+72x+32y = 172 \Leftrightarrow 9x^2+72x+144-144+4y^2+32y+64-64 = 172 \Leftrightarrow 9x^2+72x+144+4y^2+32y+64 = 380 \Leftrightarrow 9\cdot(x+4)^2+4\cdot(y+4)^2 = 380 \Leftrightarrow \frac{(x+4)^2}{\frac{380}{9}} + \frac{(y+4)^2}{95} = 1$

Это уравнение эллипса с центром в точке $(-4;-4)$ и полуосями $a = \sqrt{\frac{380}{9}} = \frac{2\sqrt{95}}{3}$ и $b = \sqrt{95}$ (см. рисунок 3)

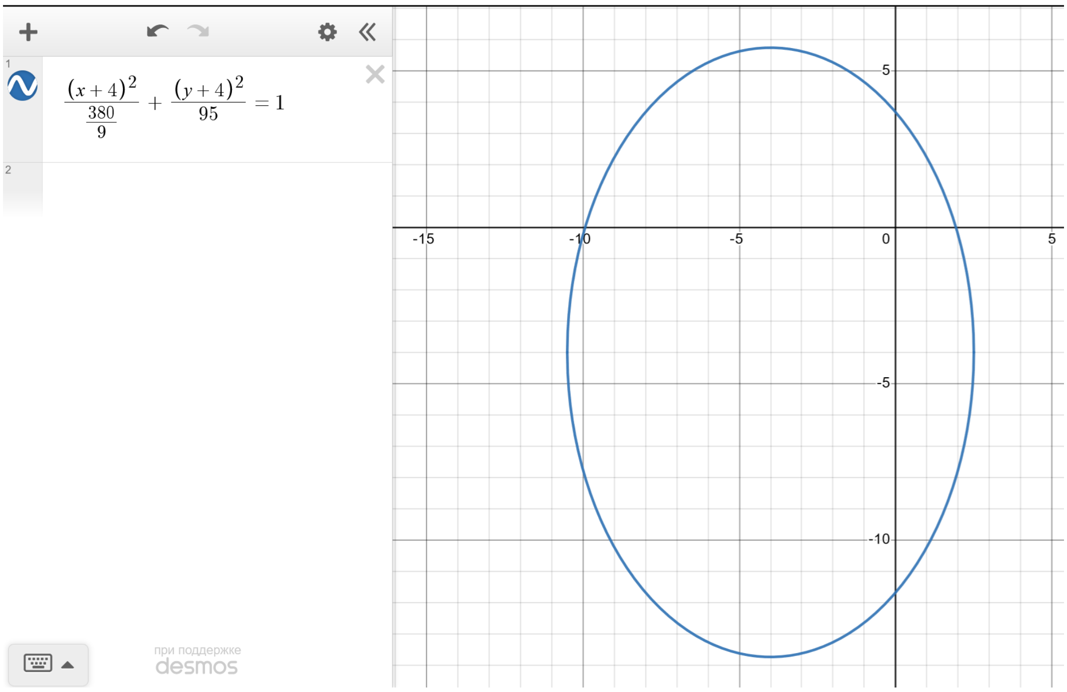

Рисунок 3 — График полученного эллипса

3 Задание 3

Пусть A - точка пересечения прямых $x = y$ и $2x + y - 15 = 0$, а B - правый фокус эллипса $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1$. Найти окружность, для которой отрезок AB служит диаметром.

Решение:

1. Найдем координаты точек A и B.

Координаты точки A:

$$\begin{cases} x = y \\ 2x + y - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 2x + x - 15 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ 3x = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = 5 \end{cases}$$

Каноническое уравнение эллипса: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Исходя из условия, $a^2 = 16$ и $b^2 = 7$. Правый фокус эллипса находится в точке $(c; 0)$, $c^2 = a^2 - b^2$. $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{16 - 7} = \sqrt{9} = 3$. Тогда $B = (c; 0) = (3; 0)$

2. Длина отрезка AB равна $\sqrt{(A_x - B_x)^2 + (A_y - B_y)^2} = \sqrt{(5-3)^2 + (5-0)^2} = \sqrt{4 + 25} = \sqrt{29}$. Пусть R - радиус искомой окружности, тогда $R = \frac{AB}{2}$, так как AB - диаметр. $R = \frac{\sqrt{29}}{2}$.

Так как AB - диаметр искомой окружности, то он проходит через центр окружности. Его координаты можно найти как координаты середины отрезка AB. Пусть O - центр окружности, тогда $O = (\frac{A_x + B_x}{2}; \frac{A_y + B_y}{2}) = (\frac{5+3}{2}; \frac{5+0}{2}) = (4; 2.5)$.

Запишем уравнение окружности с центром в точке $(4; 2.5)$ и радиусом $\frac{\sqrt{29}}{2}$: $(x-4)^2 + (y-2.5) = (\frac{\sqrt{29}}{2})^2 \Leftrightarrow (x-4)^2 + (y-2.5) = 7.25$

Ответ: $(x-4)^2 + (y-2.5) = 7.25$

4 Задание 4

Найти уравнение прямой, проходящей через вершину параболы $y = x^2 - 4x$ перпендикулярно прямой, соединяющей точку $A(1;2)$ с левым фокусом гиперболы $x^2 - y^2 = 8$.

Решение:

1. Найдем вершину параболы

$x_0 = \frac{-b}{2a} = \frac{-(-4)}{2} = 2$

$y_0 = x_0^2 - 4x_0 = 2^2 - 4 \cdot 2 = -4$

2. Найдем левый фокус гиперболы.

Приведем уравнение гиперболы к каноническому $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$.

$x^2 - y^2 = 8 \Leftrightarrow \frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{8} = 1$, откуда $a^2 = b^2 = 8$.

Левый фокус гиперболы F находится в точке $(-c;0)$, $c^2 = a^2 = b^2$. $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8+8} = 4$. $F = (-4;0)$.

3. Составим уравнение прямой, проходящей через точки A и F.

$\frac{x-A_x}{F_x-A_x} = \frac{y-A_y}{F_y-A_x} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-4-1} = \frac{y-2}{0-2} \Leftrightarrow \frac{x-1}{-5} = \frac{y-2}{-2}$.

Общее уравнение прямой будет иметь вид $2x - 5y + 8 = 0$, $\overrightarrow{n} = (2;-5)$ - вектор нормали этой прямой.

4. Составим уравнение искомой прямой.

Заметим, что $\overrightarrow{n}$ является направляющим вектором для искомой прямой. Запишем уравнение прямой, проходящей через точку $(x_0;y_0)$:

$\frac{x-x0}{n_x} = \frac{y-y_0}{n_y} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y-(-4)}{-5} \Leftrightarrow \frac{x-2}{2} = \frac{y+4}{-5}$.

В общем виде уравнение представлено как $5x + 2y - 2 = 0$.

Ответ: $5x + 2y - 2 = 0$

5 Задание 5

Найти скалярное$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ и векторное $[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]$ произведения векторов. Координаты точек $A(2;0;3)$, $B(1;-2;7)$, $C(2;5;0)$ заданы в декартовой системе координат.

Решение:

1. Найдем координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{AB} = (B_x - A_x; B_y - A_y; B_z - A_z) = (1-2; -2-0; 7-3) = (-1;-2;4)$

$\overrightarrow{AC} = (C_x - A_x; C_y - A_y; C_z - A_z) = (2-2; 5-0; 0-3) = (0;5;-3)$

2. Найдем скалярное произведение

$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = AB_x \cdot AC_x + AB_y \cdot AC_y + AB_z \cdot AC_z = (-1)\cdot 0 + (-2)\cdot 5 + 4\cdot(-3) = 0 - 10 - 12 = -22$

3. Найдем векторное произведение

$[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ AB_x & AB_y & AB_z \\ AC_x & AC_y & AC_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -1 & -2 & 4 \\ 0 & 5 & -3 \end{vmatrix} = \vec{i}\cdot(-2)\cdot(-3)+\vec{j}\cdot 4\cdot 0+ \vec{k}\cdot(-1)\cdot 5-\vec{k}\cdot(-2)\cdot 0-\vec{j}\cdot(-1)\cdot(-3)-\vec{i}\cdot 4\cdot 5 = -14\vec{i}-3\vec{j}-5\vec{k} = (-14;-3;-5)$

$|[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}]| = \sqrt{(-14)^2 + (-3)^2 + (-5)^2} = \sqrt{196+9+25} = \sqrt{230}$

Ответ: 1) -22; 2) $(-14;-3;-5)$, длина равна $\sqrt{230}$

6 Задание 6

Найти проекцию точки $M(1; 2; 3)$ на плоскость $4x - 5y - 8z + 21 = 0$.

Решение:

Проекция точки на плоскость - это точка пересечения прямой, проходящей через заданную точку и перпендикулярной плоскости, и этой плоскости.

1. Составим уравнение прямой, проходящей через M.

Из уравнения плоскости найдем ее вектор нормали $\overrightarrow{n}$. $\overrightarrow{n} = (4; -5; -8)$.

Так как искомая прямая перпендикулярна плоскости, то $\overrightarrow{n}$ - ее направляющий вектор. Запишем уравнение искомой прямой в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = M_x + t \cdot n_x \\ y = M_y + t \cdot n_y \\ z = M_z + t \cdot n_z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 + t \cdot 4 \\ y = 2 + t \cdot (-5) \\ z = 3 + t \cdot (-8) \end{cases}$$

2. Найдем точку пересечения прямой и плоскости.

Точка пересечения является общей для прямой и плоскости. Подставим координаты точки из параметрического уравнения прямой в уравнение плоскости и найдем параметр t.

$4 \cdot (1 + t \cdot 4) - 5 \cdot (2 + t \cdot (-5)) - 8 \cdot (3 + t \cdot (-8)) + 21 = 0 \Leftrightarrow 4 + 16t - 10 + 25t - 24 + 64t + 21 = 0 \Leftrightarrow 105t = 9 \Leftrightarrow t = \frac{9}{105}$

С помощью найденного значения паарметра определим координаты точки $M_\perp$, являющейся проекций M на заданную плоскость.

$M_\perp = (1 + t \cdot 4; 2 + t \cdot (-5); 3 + t \cdot (-8)) = (1 + \frac{9}{105} \cdot 4; 2 + \frac{9}{104} \cdot (-5); 3 + \frac{9}{105} \cdot (-8)) = (\frac{141}{105}; \frac{165}{105}; \frac{243}{105})$

Ответ: $M_\perp(\frac{141}{105}; \frac{165}{105}; \frac{243}{105})$

7 Задание 7

Написать уравнение плоскости, перпендикулярной плоскостям $2x+5y-3z=5$, $-x+7y-4z=6$ и проходящей через начало координат.

Решение:

1. Пусть $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$ - векторы нормалей к плоскостям из условия. Тогда $\overrightarrow{n_1}=(2;5;-3)$, $\overrightarrow{n_2}=(-1;7;-4)$

2. Если искомая плоскость перпендикулярна двум другим, то ее вектор нормали перпендикулярен веторам нормалей $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$. Определим вектор нормали искомой плоскости $\overrightarrow{n}$ как векторное произведение $\overrightarrow{n_1}$ и $\overrightarrow{n_2}$

$$\overrightarrow{n}=[\overrightarrow{n_1},\overrightarrow{n_2}]=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ n_{1x} & n_{1y} & n_{1z}\\ n_{2x} & n_{2y} & n_{2z}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 2 & 5 & -3\\ -1 & 7 & -4\end{vmatrix}=\vec{i}\cdot 5\cdot(-4)+\vec{j}\cdot(-3)\cdot(-1)+$$

$\vec{k}\cdot 2\cdot 7-\vec{k}\cdot 5\cdot(-1)-\vec{j}\cdot 2\cdot(-4)-\vec{i}\cdot(-3)\cdot 7=(-20+21)\vec{i}+(3+8)\vec{j}+(14+5)\vec{k}=\vec{i}+11\vec{j}+19\vec{k}=(1;11;19)$

3. Составим уравнение искомой плоскости: $Ax+By+Cx+D=0$. Так как она проходит через начало координат, то $D=0$. A,B,C - координаты вектора нормали этой плоскости. $(A;B;C)=\overrightarrow{n}$. Тогда уравнение плоскости будет равно $x+11y+19z=0$

Ответ: $x+11y+19z=0$