Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНО ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

Расчетно-графическая работа №2 по теме «Предел и производная функции одной переменной»
Вариант №2

По дисциплине
Математический анализ

Выполнили:
Стафеев И.А. (К3121)
Голованов Д. И. (К3123)
Аплеев Д. А. (К3122)
Савальский М. И. (К3120)

Поток: МАТ АН ИКТ 17.1

Проверил
Беспалов В. В.

Санкт-Петербург,
2023

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 Задание 1

1.1 Условие задания 1

Необходимо:

- Для последовательности $a_n = \frac{8^{n+2}+(-7)^{n-1}}{5\cdot 8^n+(-7)^n}$ вычислить предел при $n \to \infty$, исследовать её на монотонность и ограниченность, построить график общего члена последовательности в зависимости от номера n, проиллюстровать сходимость (расходимость), ограниченность и монотонность последовательности: вспомнить определение сходимости (расходимости), ограниченности и монотонности последовательности; выбрать три различных ε_1, ε_2, ε_3; для них изобразить ε-окрестность и найти на графике номер N, начиная с которого все члены последовательности попадают в ε-окрестность или установите, что такого номера нет.
- Для функции $f(x) = \left(\frac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13}$ вычислить предел при $x \to \infty$, исследовать её на монотонность и ограниченность, построить график в зависимости от x, проиллюстровать сходимость (расходимость), ограниченность и монотонность последовательности: вспомнить определение сходимости (расходимости), ограниченности и монотонности функции на бесконечности; выбрать три различных ε_1, ε_2, ε_3; для них изобразить ε-окрестность и найти на графике δ-окрестность в которой все значения функции попадают в ε-окрестность или установите, что такой окрестности нет

1.2 Решение задания 2

1.2.1 Последовательность

$$\lim_{n\to\infty} a(n) = \lim_{n\to\infty} \frac{8^{n+2}+(-7)^{n-1}}{5\cdot 8^n+(-7)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{8^n\cdot(64+\frac{(-7)^{n-1}}{8^n})}{8^n\cdot(5+\frac{(-7)^n}{8^n})} = \frac{1\cdot(64+0)}{1\cdot(5+0)} = 12.8$$

Последовательность называется сходящийся, если выполняется $\exists A = \lim_{n\to\infty} a(n), A \in \mathbb{R}$. Выше предел находится, он принадлежит $\mathbb{R}$, соответсвенно она сходится.

Ограниченная сверху последовательность - такая последовательность что выполняется $\exists M \; \forall n : x_n \leq M$.

Ограниченная снизу последовательность - такая последовательность что выполняется $\exists m \; \forall n : x_n \geq m$.

$\forall n : 8^{n+2} + (-7)^{n-1} > 0$; $5 \cdot 8^n + (-7)^n > 0$, тогда $\forall n : a(n) > 0$

$$\frac{8^{n+2} + (-7)^{n-1}}{5 \cdot 8^n + (-7)^n} < 16$$

$$8^{n+2} + (-7)^{n-1} < 16 * (5 \cdot 8^n + (-7)^n)$$

$$(-7)^{n-1} < \frac{128}{113} \cdot 8^n \text{ выполняется для всех натуральных } n$$

Последовательность ограничена снизу 0, а сверху 16.

Последовательность назывется монотонно возрастающей, если выполняется $\forall n : x_n \leq x_{n+1}$.

Последовательность назывется монотонно убывающей, если выполняется $\forall n : x_n \geq x_{n+1}$.

$a(1) = \frac{171}{11} > 15$, $a(2) = \frac{1363}{123} < 12$, $a(3) = \frac{10939}{739} > 14$, $a(1) > a(2) < a(3)$ - последовательность не монотонна.

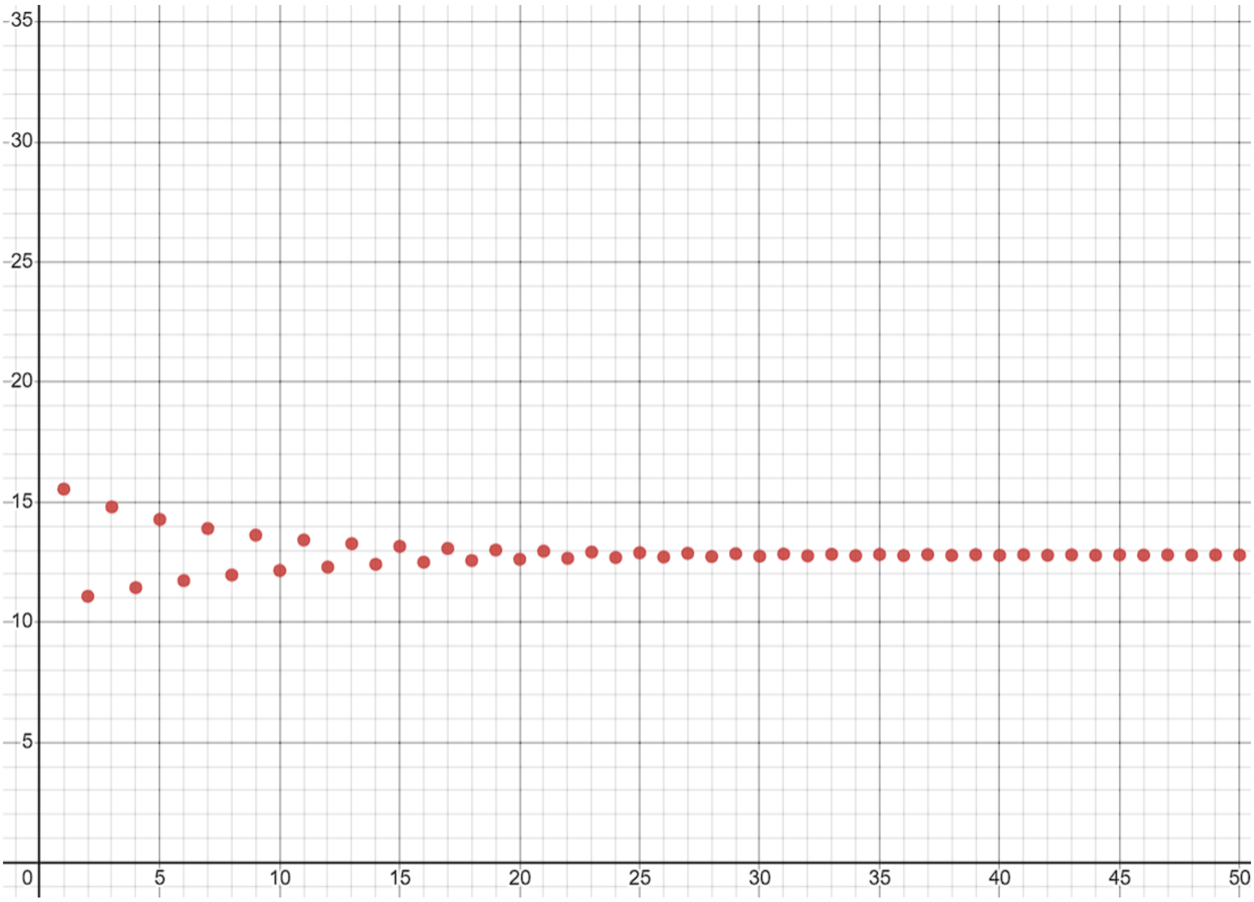


Рисунок 1 — График $a(n)$

Были выбраны $\varepsilon_1 = 2.5$, $\varepsilon_2 = 1.5$, $\varepsilon_3 = 0.3$. На графике были найдены соответствующие им $N_1 = 2$, $N_2 = 4$, $N_3 = 16$.

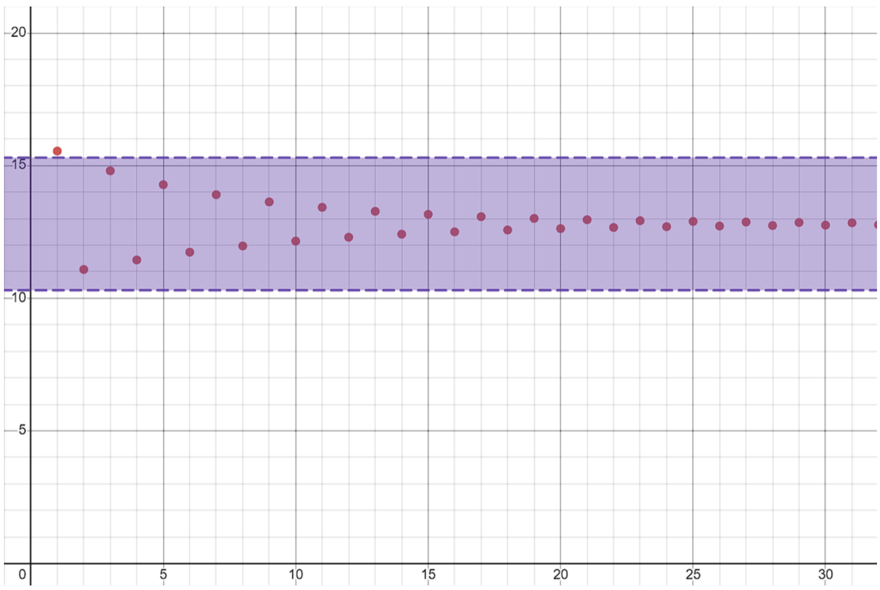


Рисунок 2 — График $a(n)$ с ε_1

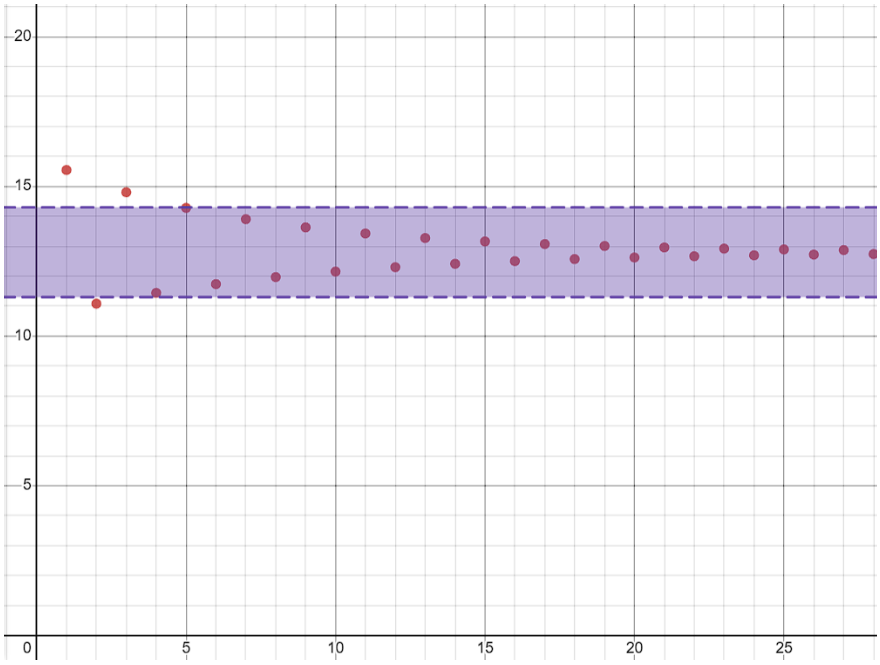


Рисунок 3 — График $a(n)$ с ε_2

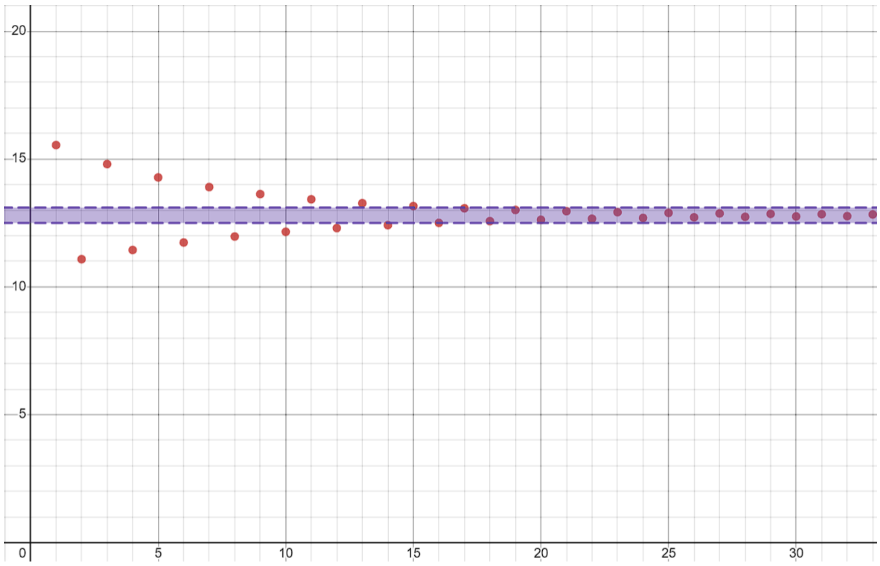


Рисунок 4 — График $a(n)$ с ε_3

1.2.2 Функция

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1-x^2}{2-7x^2}\right)^{x-13} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2\cdot(\frac{1}{x^2}-1)}{x^2\cdot(\frac{2}{x^2}-7)}\right)^{x-13} =$$
$$= \left(\frac{1\cdot(0-1)}{1\cdot(0-7)}\right)^{\infty} = \left(\frac{1}{7}\right)^{\infty} = 0$$

Функция называется сходящийся, если выполняется $\exists A = \lim_{x\to\infty} f(x), A \in \mathbb{R}$. Выше предел находится, он принадлежит $\mathbb{R}$, соответсвенно она сходится.

Функция называется ограниченной снизу, если $\exists M\ \forall x \in E : f(x) \leq M$.

Функция называется ограниченной снизу, если $\exists m\ \forall x \in E : f(x) \geq m$.

Функция назывется монотонно возрастающей, если выполняется $\forall x_1, x_2 \in E\ x_1 < x_2 : f(x_1) \leq f(x_2)$.

Функция назывется монотонно убывающей, если выполняется $\forall x_1, x_2 \in E\ x_1 < x_2 : f(x_1) \geq f(x_2)$.

Функция ограничена снизу нулем, так как имеет $x - 13$ в показателе степени, а $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$ (это очевидно из нахождения предела к $+\infty$ - в конце будет $\left(\frac{1}{7}\right)^{-\infty} = \infty$), т.е. сверху функция не ограничена.

Функция определена на $(-\infty; -1) \cup (-\sqrt{\frac{2}{7}}; \sqrt{\frac{2}{7}}) \cup (1; \infty)$. На первом отрезке функция не монотонна, так как $f(-2) > f(-2.5) < f(-3)$, на втором тоже - $f(-0.5) < f(0) > f(0.5)$. На третьем промежутке производная будет меньше нуля, так что функция будет монотонно убывающей.

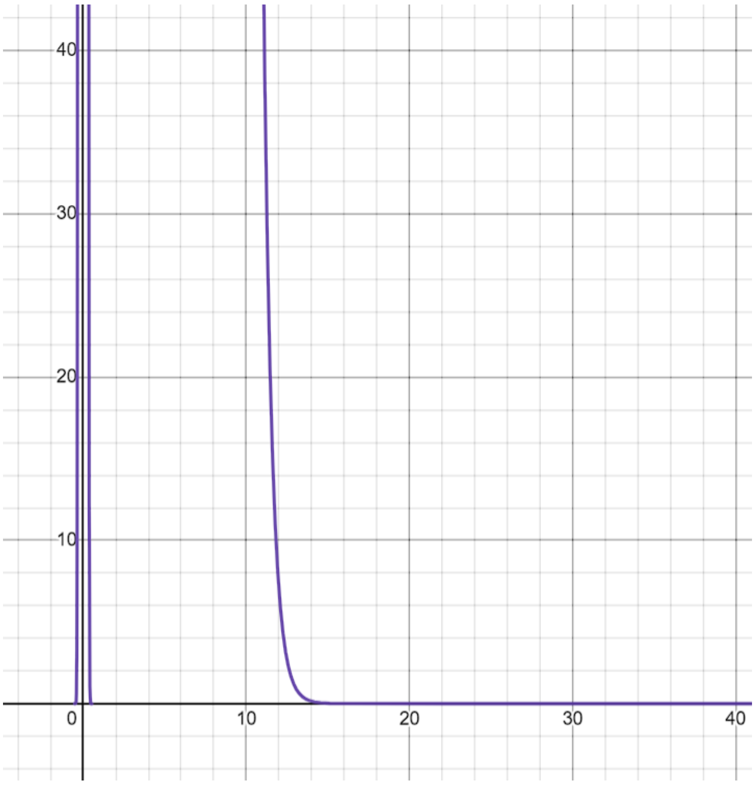


Рисунок 5 — График $f(x)$

Были выбраны $\varepsilon_1 = 1$, $\varepsilon_2 = 0.5$, $\varepsilon_3 = 0.25$. На графике были найдены соответствующие им $\delta_1 = 0.075$, $\delta_2 = 0.074$, $\delta_3 = 0.072$. Синий цвет на графике - ε-окрестность, фиолетовая - δ-окрестность.

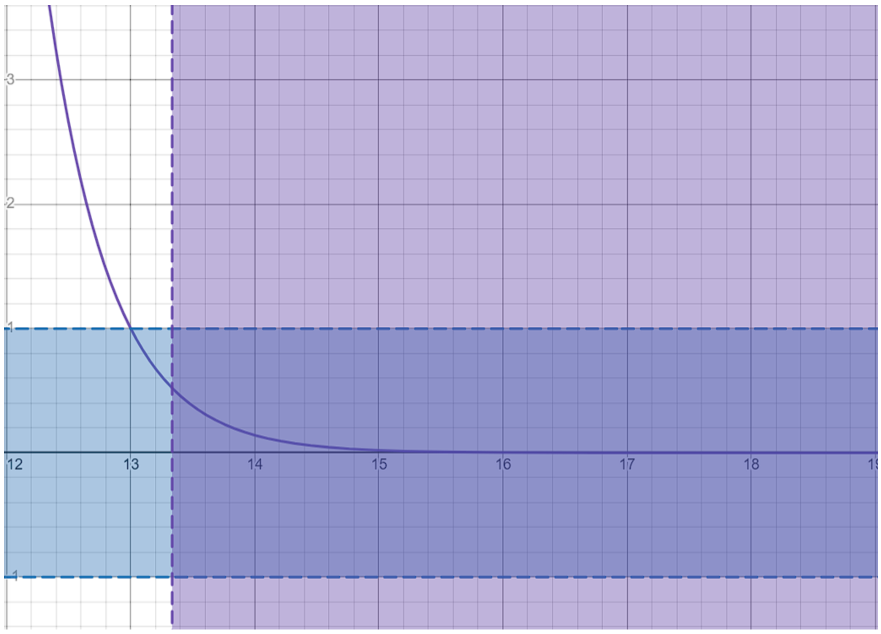


Рисунок 6 — График $f(x)$ с ε_1

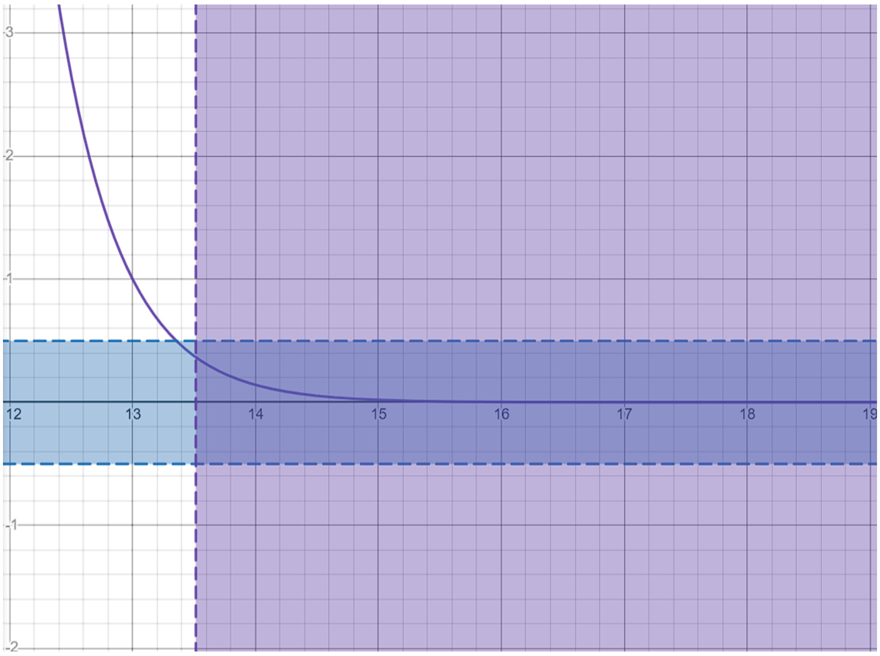


Рисунок 7 — График $f(x)$ с ε_2

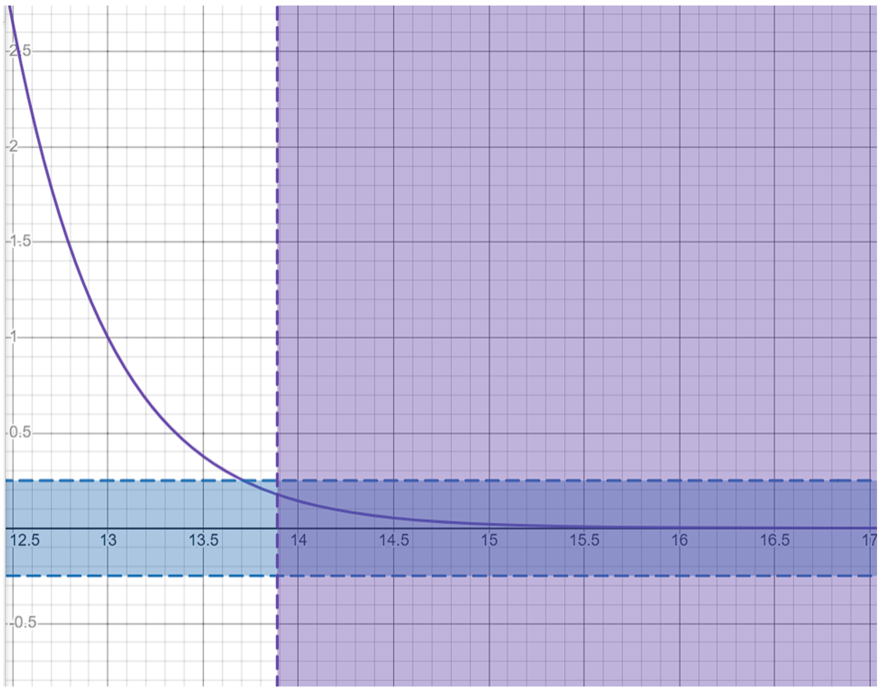


Рисунок 8 — График $f(x)$ с ε_3

2 Задание 2

2.1 Условие задания 2

Вычислите приближенно площадь кругового кольца при изменении радиуса R на величину ΔR.

2.2 Решение задания 2

Пусть функция площади кругового кольца с радиусом R будет $f(R) = \pi R^2$. Поскольку $f'(R) = 2\pi R$, то $f(R)$ имеет конечную производную при $R \in \mathbb{R}$, и так как радиус R величина неотрицательная, то $f(R)$ дифференцируема при любом значении радиуса R. Значит по определению функции, дифференцируемой в точке

$$f(R + \Delta R) - f(R) = df(R) + o(\Delta R),\ \Delta R \to 0$$

Значит при достаточно небольшом ΔR, $o(\Delta R)$ мало и можно записать

$$f(R + \Delta R) \approx f(R) + df(R)$$

$$f(R + \Delta R) \approx f(R) + f'(R) \cdot \Delta R$$

$$f(R + \Delta R) \approx \pi R^2 + 2\pi R \cdot \Delta R$$

В этом также можно убедиться, если расписать $f(R + \Delta R) = \pi(R + \Delta R)^2 = \pi R^2 + 2\pi R \Delta R + \pi(\Delta R)^2$. Отсюда явно видно, что с увеличением ΔR вычисление приближенной площади будет менее точным.

Пример: С помощью графического калькулятора Desmos построим окружности с радиусами 1 и 1.02 (пусть это будут сильно упрощенные модели физических круговых колец (не учитываем толщину контура колец)), посчитаем площади кругов, границами которых они являются (Рисунок 9).
$R = 1,\ \Delta R = 0.02$
Площадь круга с радиусом 1: $f(1) = \pi$
Площадь круга с радиусом 1.02: $f(1.02) = 1.0404\pi$

Приближенная площадь круга с радиусом 1.02: $f(1+0.02) \approx \pi + 2\pi \cdot 0.02 =$ $= 1.04\pi$

Приближенная площадь отличается на $\pi(\Delta R)^2 = 0.0004\pi \approx 0.0013$

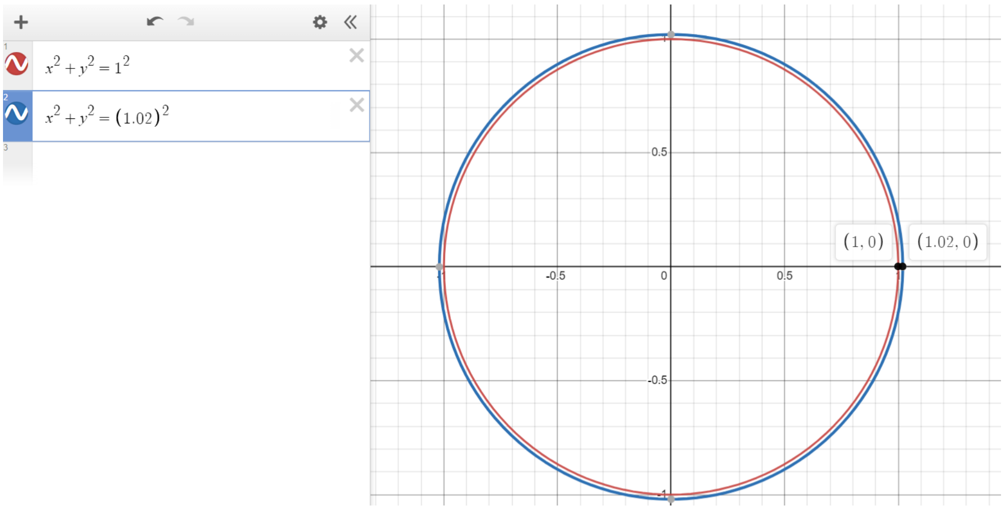


Рисунок 9 — Две модели колец

Ответ: приближенная площадь кругового кольца при изменении радиуса R на величину ΔR (при малых ΔR) равна $\pi R^2 + 2\pi R \cdot \Delta R$.

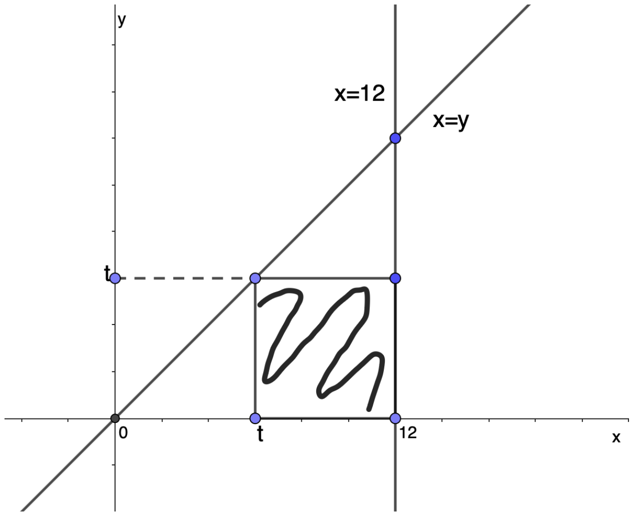
3 Задание 3

3.1 Условие задания 3

Из куска металла, ограниченного линиями $y = x, x = 12, y = 0$ требуется выпилить деталь прямоугольной формы с наибольшей площадью.

3.2 Решение задания 3

$y = x, x = 12, y = 0$



Возьмём на прямой y=x произвольную точку $\quad (t,t), \quad t \in [0;12]$

$$\begin{cases} S = (12 - t) \cdot t = 12t - t^2 \\ t \in [0;12] \end{cases}$$

Найдём производную площади

$S'_t = 12 - 2t$

Приравняем полученную производную к нулю

$S'_t = 0 <=> 12 - 2t = 0 => t = 6 \in [0;12]$

Проверим, является ли полученная точка максимум

$S''_t = -2 < 0 => t = 6$ – точка макимума

$S(6) = 72 - 36 = 36$

Итого имеем: наибольшая площадь прямоугольного участка равна 36

4 Задание 4

4.1 Условие задания 4

Даны функции $f(x) = \frac{4x^3}{(1-2x)^2}$ и $g(x) = 2x - \sin\frac{x}{2}$. Проведисти поочерёдно их полные исследования:

1. Найти область определения функции;
2. Проверить, является ли функция чётной (нечётной), а также периодической, и указать, как эти свойства влияют на вид графика функции;
3. Исследовать функцию на нулевые значения и найти промежутки ее знакопостоянства;
4. Исследовать функцию с помощью первой производной: найти интервалы монотонности и экстремумы функции;
5. Исследовать функцию с помощью второй производной: найти интервалы выпуклости (вогнутости) и точки перегиба функции;
6. Проверить наличие вертикальных, горизонтальных и наклонных асимптот графика функции;
7. Найти точки пересечения графика с координатными осями и (при необходимости) найти значения функции в некоторых дополнительных точках;
8. Построить график и отметить на нём все результаты исследования.

4.2 Решение задания 4

4.2.1 Функция $f(x)$

1. $(1-2x)^2 \neq 0 \Leftrightarrow 1-2x \neq 0 \Leftrightarrow 2x \neq 1 \Leftrightarrow x \neq \frac{1}{2}$. Пусть $D \subset \mathbb{R}$ - область определения функции. Тогда $D(f) : x \neq \frac{1}{2} \Leftrightarrow x \in (-\infty; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

2. $f(-x) = \frac{4(-x)^3}{(1-2(-x))^2} = \frac{-4x^3}{(1+2x)^2} = \frac{-4x^3}{1+4x+4x^2}$. Так как $f(-x) = \frac{-4x^3}{1+4x+4x^2} \neq \frac{4x^3}{1-4x+4x^2} = f(x)$ и $f(-x) = \frac{-4x^3}{1+4x+4x^2} \neq -\frac{4x^3}{1-4x+4x^2} = -f(x)$, то функция не является ни четной, ни нечетной (функция общего вида). Получается, что она не является симметричной относительно оси Oy и не является симметричной относительно точки начала координат.

Функция $f(x)$ периодичная с периодом $T \neq 0$, если $f(x-T) = f(x) = f(x+T)$.

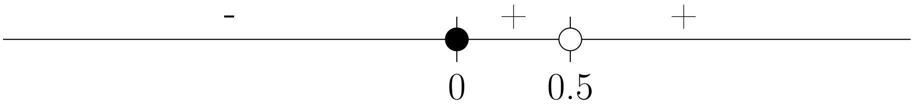
Пусть $f(x) = f(x+T) \Leftrightarrow \frac{4x^3}{(1-2x)^2} = \frac{4(x+T)^3}{(1-2(x+T))^2}$. Тогда $\frac{4x^3}{(1-2x)^2} = \frac{A\cdot 4(x+T)^3}{B\cdot(1-2(x+T))^2}$, где $A = B$.

$4x^3 = A\cdot 4(x+T)^3 \Leftrightarrow A = \frac{4x^3}{4(x+T)^3} = (\frac{x}{x+T})^3$

$(1-2x)^2 = B\cdot(1-2(x+T))^2 \Leftrightarrow B = \frac{(1-2x)^2}{(1-2(x+T))^2} = (\frac{1-2x}{1-2x-2T})$. При $x = 0$ $A = (\frac{0}{0+T})^3 = 0$, $B = (\frac{1-0}{1-0-2T})^2 = (\frac{1}{1-2T})^2 > 0 \Rightarrow A \neq B$, значит, $f(x) \neq f(x+T)$, то есть функция не является периодичной. Получается, функция не повторяет значения через какой-то интервал аргумента.

3. $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3}{(1-2x)^2} = 0 \Leftrightarrow 4x^3 = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Найдем промежутки знакопостоянства с помощью метода интервалов. $f(1) = \frac{4\cdot 1^3}{(1-2)^2}\frac{4}{1} = 4 > 0$. При переходе через точку $x = 0$ знак изменится, но при переходе через точку $x = \frac{1}{2}$ - нет, так как степень выражения $(1-2x)^2$ четная.



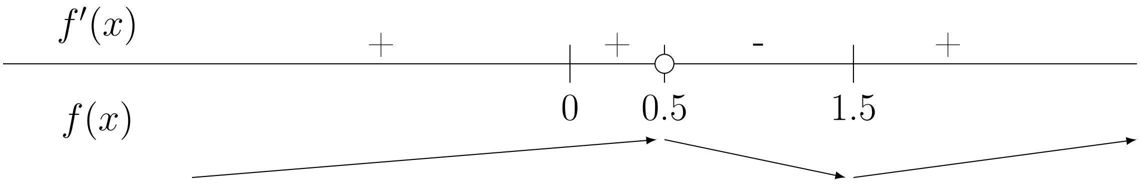
Исходя из рисунка, $f(x) < 0$ на промежутке $(-\infty; 0)$, $f(x) > 0$ на промежутке $(0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$, $f(x) = 0$ при $x = 0$.

4. $f'(x) = (\frac{4x^3}{(1-2x)})' = 4\cdot(\frac{x^3}{(1-2x)^2})' = 4\cdot\frac{(x^3)'(1-2x)^2 - x^3((1-2x)^2)'}{(1-2x)^4} = 4\cdot\frac{3x^2(1-2x)^2 - x^3\cdot 2(1-2x)\cdot(1-2x)'}{(1-2x)^4} = 4\cdot\frac{3x^2(1-2x)^2 + 4x^3(1-2x)}{(1-2x)^4} = 4\cdot\frac{x^2(1-2x)(3(1-2x)+4x)}{(1-2x)^4} = 4\cdot\frac{x^2(3-6x+4x)}{(1-2x)^3} = \frac{4x^2(3-2x)}{(1-2x)^3}$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^2(3-2x)}{(1-2x)^3} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 4x^2(3-2x) = 0 \\ (1-2x)^3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3-2x = 0 \end{array}\right. \\ 1-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{array}\right. \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow$ Точки 0, $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$ - экстремумы функции.

Найдем интервалы монотонности с помощью метода интервалов. $f'(2) = \frac{4\cdot 2^2\cdot(3-2\cdot 2)}{(1-2\cdot 2)^3} = \frac{-16}{-27} = \frac{16}{27} > 0$. При переходе через точки $x = \frac{1}{2}$ и $x = \frac{3}{2}$ знак производной изменится, а при переходе через точку $x = 0$ - нет, так как степень выражения x^2 четная.

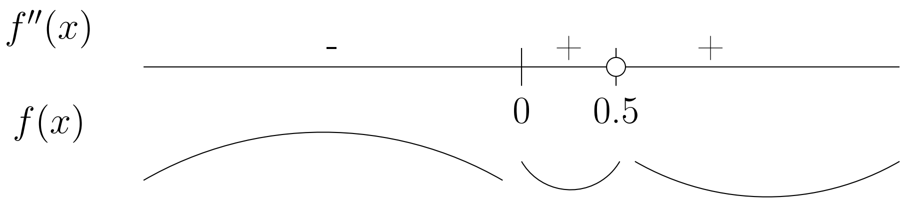


Исходя из рисунка, $f(x)$ строго возрастает на промежутках $(-\infty; \frac{1}{2}]$ и $[\frac{3}{2}; +\infty)$; $f(x)$ строго убывает на промежутке $[\frac{1}{2}; \frac{3}{2}]$.

5. $f''(x) = (f(x)')' = (\frac{4x^2(3-2x)}{(1-2x)^3})' = \frac{(4x^2(3-2x))'(1-2x)^3 - 4x^2(3-2x)((1-2x)^3)'}{(1-2x)^6} = \frac{((4x^2)'(3-2x)+4x^2(3-2x)')(1-2x)^3 - 4x^2(3-2x)\cdot 3(1-2x)^2\cdot(1-2x)'}{(1-2x)^6} = \frac{(8x(3-2x)-8x^2)(1-2x)^3+24x^2(3-2x)(1-2x)^2}{(1-2x)^6} = \frac{8x(3-2x-x)(1-2x)^3+24x^2(3-2x)(1-2x)^2}{(1-2x)^6} = \frac{8x(3-3x)(1-2x)^3++24x^2(3-2x)(1-2x)^2}{(1-2x)^6} = \frac{8x(1-2x)^2((3-3x)(1-2x)+3x(3-2x))}{(1-2x)^6} = \frac{8x(6x^2-9x+3+9x-6x^2)}{(1-2x)^4} = \frac{24x}{(1-2x)^4}$

Найдем точки перегиба. $f''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{24x}{(1-2x)^4} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 24x = 0 \\ (1-2x)^4 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ 1-2x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x \neq \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow x = 0$ и $x = \frac{1}{2}$ - точки перегиба функции

Определим знаки второй производной с помощью метода интервалов. $f''(1) = \frac{24}{(1-2)^4} = 24 > 0$. При переходе через точку $x = \frac{1}{2}$ знак второй производной не изменится, так как выражение $(1-2x)^4$ имеет четную степень, а при переходе через точку $x = 0$ знак изменится.



(точка $x = \frac{1}{2}$ является точкой перегиба, хотя, судя по рисунку, там не меняется характер выпуклости, так как $f'(\frac{1}{2}) = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}$)

Исходя из рисунка, функция $f(x)$ вогнутая на промежутке $(-\infty; 0]$ и выпуклая на промежутках $[0; \frac{1}{2})$ и $(\frac{1}{2}; +\infty)$

6. По определению прямая l является асимтотой, если при удлении точки $(x; f(x))$ графика на бесконечность от начала координат расстояние между прямой l и точкой $(x; f(x))$ стремится к нулю.

Вертикальные асимтоты надо искать через точки разрыва функции. Рассмотрим точку $x = \frac{1}{2}$.

$\lim_{x\to 0.5-0}(\frac{4x^3}{(1-2x)^2}) = \lim_{x\to 0.5}(\frac{4\cdot(0.5-0)^3}{(1-2\cdot(0.5-0))^2}) = \lim_{x\to 0.5-0}(\frac{0.5}{(1-1+0)^2}) = \lim_{x\to 0.5-0}(\frac{0.5}{(0+0)^2}) = +\infty$

$\lim_{x\to 0.5+0}(\frac{4x^3}{(1-2x)^2}) = \lim_{x\to 0.5+0}(\frac{4\cdot(0.5+0)^3}{(1-2\cdot(0.5+0))^2}) = \lim_{x\to 0.5+0}(\frac{0.5}{(1-1-0)^2}) = \lim_{x\to 0.5+0}(\frac{0.5}{(0-0)^2}) = +\infty$

Получается, $x = \frac{1}{2}$ - точка разрыва 2 рода и поэтому $x = \frac{1}{2}$ - вертикальная асимтота графика функции. Других точек разрыва $f(x)$ не имеет.

Рассмотрим $\lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^3}{(1-2x)^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^3}{1-4x+4x^2} = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^3}{x^3(\frac{1}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x})}) = lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4}{\frac{1}{x^3}-\frac{4}{x^2}+\frac{4}{x}}) = \pm\infty \notin \mathbb{R}$. Значит, $f(x)$ не имеет горизонтальных асимптот.

Найдем наклонные асимптоты. Пусть $y = kx+b$ - уравнение наклонной асимптоты. $k = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{f(x)}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{\frac{4x^3}{(1-2x)^2}}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^2}{(1-2x)^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^2}{1-4x+4x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^2}{x^2(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4)}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4}{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4}) = \frac{4}{4} = 1$

$b = \lim_{x\to\pm\infty}(f(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^3}{(1-2x)^2} - x) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^3-x(1-2x)^2}{(1-2x)^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^3-x(1-4x+4x^2)}{1-4x+4x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^3-x+4x^2-4x^3}{1-4x+4x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4x^2-x}{1-4x+4x^2}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{x^2(4-\frac{1}{x})}{x^2(\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4)}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{4-\frac{1}{x}}{\frac{1}{x^2}-\frac{4}{x}+4}) = 1$

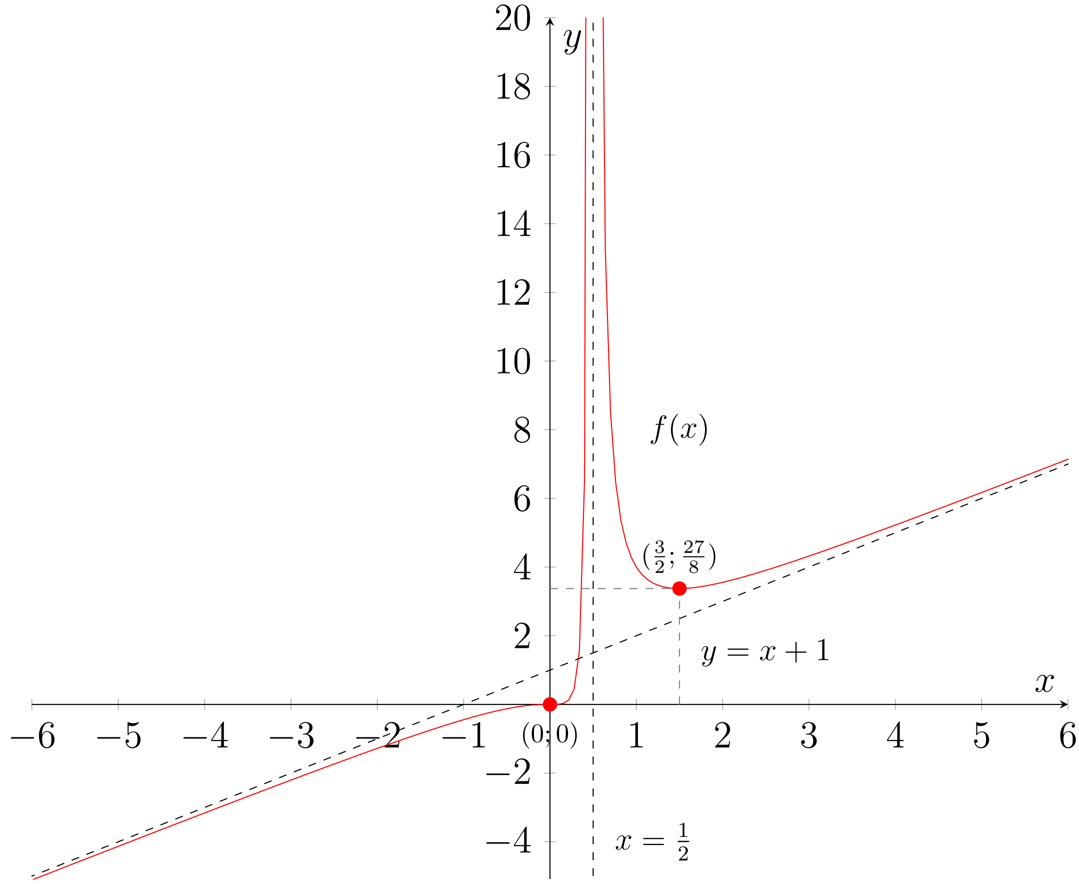
Тогда уравнение наклонной асимптоты имеет вид $y = x + 1$.

7. Найдем точки пересечения с осью Ox: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{4x^3}{(1-2x)^2} = 0 \Leftrightarrow x = 0$. $f(0) = \frac{4\cdot 0^3}{(1-2\cdot 0)^2} = \frac{0}{1} = 0$. Точка $(0; 0)$ - точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью Ox.

Найдем точки пересечения с остью Oy: $f(0) = \frac{4\cdot 0^3}{(1-2\cdot 0)^2} = \frac{0}{1} = 0$. Точка $(0; 0)$ - точка пересечения графика функции $f(x)$ с осью Oy.

Дополнительно найдем значение в точке $x = \frac{3}{2}$, так как в этой точке меняетя характер монотонности функции.$f(\frac{3}{2}) = \frac{4\cdot(\frac{3}{2})^3}{(1-2\cdot\frac{3}{2})^2} = \frac{4\cdot\frac{27}{8}}{(-2)^2} = \frac{13.5}{4} = 3.375$.

8. Построим график функции $f(x)$



4.2.2 Функция $g(x)$

1. Пусть $D \subset \mathbb{R}$ - область определения функции $g(x)$. Тогда $D(g(x))$: $x \in \mathbb{R}$ (то есть x - любое число).

2. $g(-x) = 2(-x) - \sin(-\frac{x}{2}) = 2(-x) + \sin(\frac{x}{2}) = -(2x - \sin(\frac{x}{2})) = -g(x)$. Значит, $g(x)$ - нечетная функция, то есть она симметрична относительно точки начала координат.

Функция периодичная, если $g(x-T) = g(x) = g(x+T)$ при $T \neq 0$. Пусть $g(x) = g(x+T)$, это верно, в частности, при $x = 0$. $g(0) = 2 \cdot 0 - \sin(\frac{0}{2}) = 2T - \sin(\frac{T}{2}) = g(T) = g(0+T) \Leftrightarrow 2T - \sin(\frac{T}{2}) = 0 \Leftrightarrow 2T = \sin(\frac{T}{2})$. Единственное решение - при $T = 0$ (см. рисунок 10).

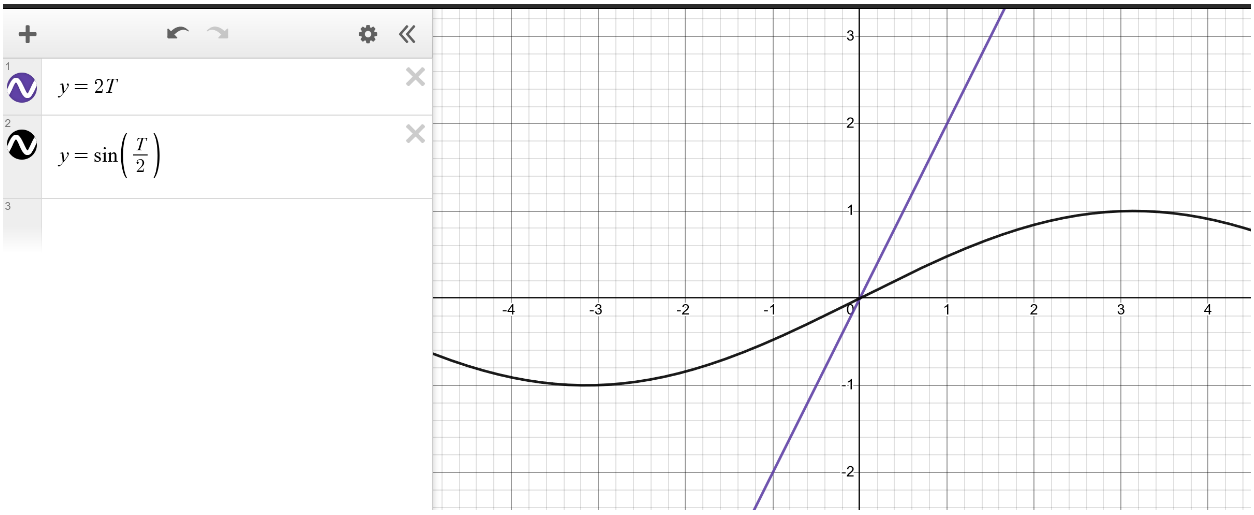
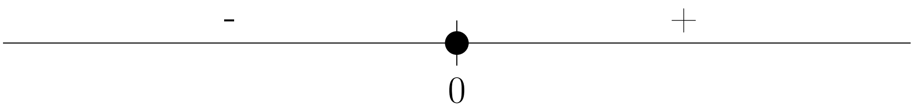


Рисунок 10 — Решение уравнения $2T = sin(\frac{T}{2})$

Так как $T \neq 0$, а единственное решение при $T = 0$, то функция не является периодичной, то есть она не повторяет значения через какой-то интервал аргумента.

3. $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow 2x = \sin(\frac{x}{2}) x = 0$ (см. 10).

Найдем промежутки знакопостоянства с помощью метода интервалов. $g(10) = 2 \cdot 10 - sin(\frac{10}{2}) > 0$. При переходе через точку $x = 0$ знак поменяется.



Исходя из рисунка $g(x) > 0$ при $x > 0$ и $g(x) < 0$ при $x < 0$.

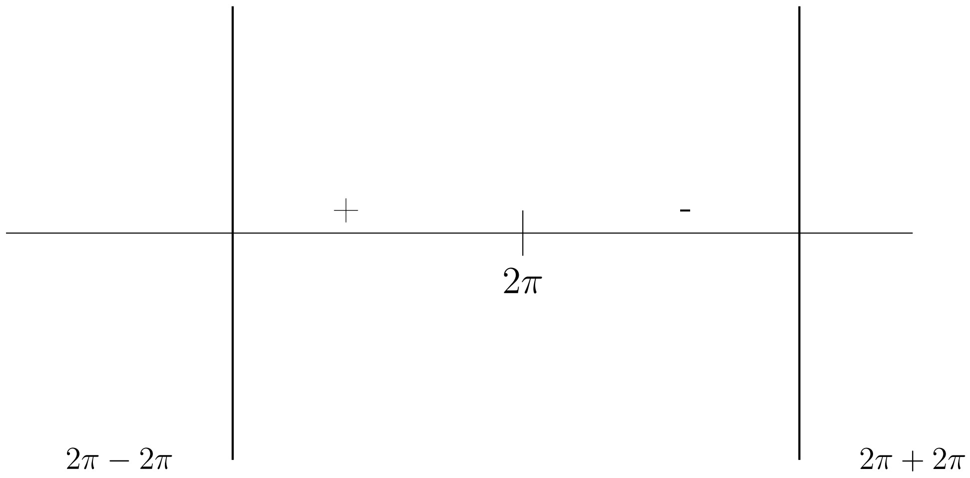
4. $g'(x) = (2x - \sin(\frac{x}{2})) = (2x)' - (\sin(\frac{x}{2}))' = 2 - \cos(\frac{x}{2}) \cdot (\frac{x}{2})' = 2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{x}{2})$

Заметим, что, так как $|\cos(\frac{x}{2})| \leq 1$, то $2 - \frac{1}{2} \leq g'(x) \leq 2 + \frac{1}{2}$, то есть $g'(x) > 0$. Значит, функция не имеет экстремумов и возрастает на всей области определения.

5. $g''(x) = (g'(x))' = (2 - \frac{1}{2} \cdot \cos(\frac{x}{2}))' = -\frac{1}{2} \cdot (-\sin(\frac{x}{2})) \cdot (\frac{x}{2})' = \frac{1}{4} \cdot \sin(\frac{x}{2})$

Найдем точки перегиба. $g''(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \cdot \sin()\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \pi + \pi k \Leftrightarrow x = 2\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Найдем интервалы выпуклости с помощью метода интервалов. При переходе через точки $x = 2\pi + 2\pi k$ характер выпуклости меняется. $g''(3\pi) = \frac{1}{4} \cdot \sin(\frac{3\pi}{2}) = \frac{1}{4} \cdot (-1) < 0$.



Исходя из рисунка и с учетом того, что вторая производная равна нулю при серии решений, имеем: $g''(x) > 0$ (то есть функция выпуклая) при $x \in (2\pi k; 2\pi + 2\pi k)$ и $g''(x) < 0$ (то есть функция вогнутая) при $x \in (2\pi + 2\pi k; 4\pi + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.

6. Функция $g(x)$ не имеет точек разрыва, поэтому график функции не имеет вертикальных асимптот.

$\lim_{x\to\pm\infty}(g(x)) = \lim_{x\to\pm\infty}(2x - \sin(\frac{x}{2})) = \pm\infty \notin \mathbb{R}$, значит $g(x)$ не имеет горизонтальных асимптот.

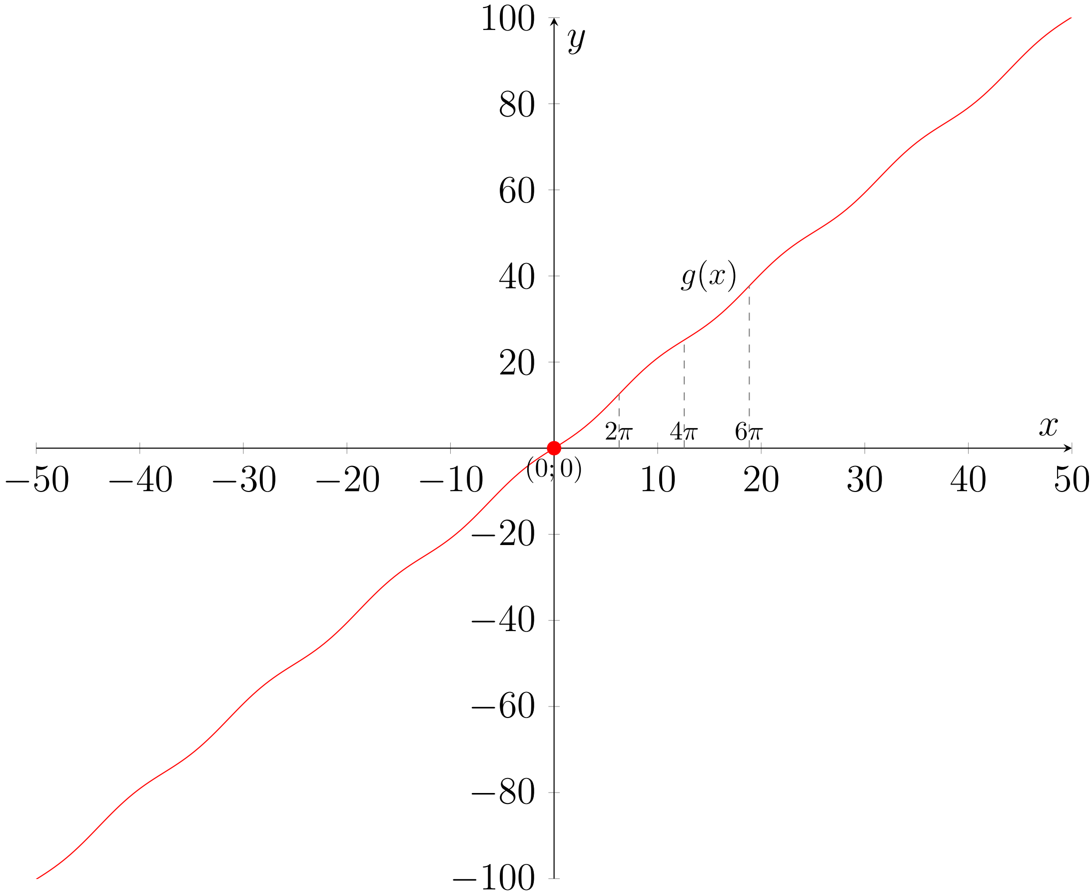
Пусть график функции имеет наклонную асимптоту $y = kx + b$.
$k = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{g(x)}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty}(\frac{2x-\sin(\frac{x}{2})}{x}) = \lim_{x\to\pm\infty}(2 - \frac{\sin(\frac{x}{2})}{x}) = 2$

$b = \lim_{x\to\pm\infty}(g(x) - kx) = \lim_{x\to\pm\infty}(2x - \sin(\frac{x}{2}) - 2x) = \lim_{x\to\pm\infty}(\sin(\frac{x}{2}))$. Этот предел не существует, следовательно, и наклонных асимптот график не имеет.

7. Найдем точки пересечения с осью Ox: $g(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - \sin(\frac{x}{2}) = 0 \Leftrightarrow 2x = \sin(\frac{x}{2}) \Leftrightarrow x = 0$. Точка $(0;0)$ - точка пересечения графика $g(x)$ с осью Ox.

Найдем точки пересечения с осью Oy. $g(0) = 2 \cdot 0 - \sin(\frac{0}{2}) = 0 - 0 = 0$. Точка $(0;0)$ - точка пересечения графика $g(x)$ с осью Oy.

8. Построим график функции $g(x)$



100
80
60
40
20
−20
−40
−60
−80
−100
−50
−40
−30
−20
−10
10
20
30
40
50
y
x
g(x)
2π
4π
6π
(0; 0)

5 Задание 5

5.1 Условие задания 5

Написать разложения по целым неотрицательным степеням переменной х до членов 4-го порядка включительно для функции $\frac{x}{e^x-1}$.

5.2 Решение задания 5

Для начала разложим e^x в окрестности 0,

$$f(x) = \frac{x}{1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + ... - 1} = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!} + ...}$$

Поскольку нам необходимо написать разложение до 4-го члена, то достаточно

$$f(x) = \frac{1}{1 + \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}}$$

Пусть $t = \frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}$, тогда $f(t) = \frac{1}{1+t}$ и если мы раскладываем функцию f относительно x в окрестности нуля, то t также будет в окрестности нуля, поэтому справедливо разложение $f(t) = 1 - t + t^2 - t^3 + t^4 + ...$, подставив обратно x имеем:

$$f(x) = 1 - \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}\right) + \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}\right)^2 - \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}\right)^3 +$$

$$+ \left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}\right)^4$$

Отсюда видно, что дальше t^4 можно не заменять, т.к. все x будут степени 5 и более, поэтому осталось только посчитать итоговые коэффициенты при x в степенях до 4 включительно. Для этого раскроем скобки с x:

1. 1-й степени

$$\left(\frac{x}{2!} + \frac{x^2}{3!} + \frac{x^3}{4!} + \frac{x^4}{5!}\right) = \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}$$

2. 2-й степени

$$\left(\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!}\right)^2=\left(\frac{x}{2}\left(1+\frac{x}{3}\right)+\frac{x^3}{24}\left(1+\frac{x}{5}\right)\right)^2=\frac{x^2}{4}\left(1+\frac{2x}{3}+\frac{x^2}{9}\right)+$$

$$+\frac{x^4}{24}\left(1+\frac{x}{3}\right)\left(1+\frac{x}{5}\right)+\frac{x^6}{24^2}\left(1+\frac{2x}{5}+\frac{x^2}{25}\right)=\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{720}+...$$

Все остальные x степени 5 и более, поэтому не интересуют нас

3. 3-й степени

$$\left(\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\frac{x^3}{4!}+\frac{x^4}{5!}\right)^3$$

поскольку мы знаем результат для второй степени, и понимаем, что умножение на еще одну скобку с x сделает степени при x больше как минимум на 1, то достаточно посчитать

$$\left(\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}\right)\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)=\frac{x^3}{8}+\frac{x^4}{24}+\frac{x^4}{12}+...$$

Все остальные x степени 5 и более, поэтому не интересуют нас

4. 4-й степени

Аналогично с тем, как считали 3-ю степень, достаточно

$$\frac{x^3}{8}\left(\frac{x}{2}+\frac{x^2}{6}+\frac{x^3}{24}+\frac{x^4}{120}\right)=\frac{x^4}{16}+...$$

Все остальные x степени 5 и более.

Итого имеем:

$$f(x)=1-\frac{x}{2}-\frac{x^2}{6}-\frac{x^3}{24}-\frac{x^4}{120}+\frac{x^2}{4}+\frac{x^3}{6}+\frac{5x^4}{720}-\frac{x^3}{8}-\frac{x^4}{24}-\frac{x^4}{12}+\frac{x^4}{16}=$$

$$=1-\frac{x}{2}+\frac{x^2}{12}-\frac{x^4}{720}$$