Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

Расчётно-графическая работа по первому модулю по теме «Множества»

Вариант №4

По дисциплине
Математический анализ

Выполнили:
Фалькович М. С.
Дармороз М. Д.
Букинов Д. Д.
Стафеев И. А.

Группа: К3121

Санкт-Петербург
Октябрь, 2023

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

ВВЕДЕНИЕ

Цель работы: повысить навыки решения практических заданий по теме «Множества». В отчете представлены 12 заданий на соответствующую тему с решениями.

1 Основная часть

1.1

Условие:

Перечислите элементы множества $E = \{x : x$ - целое и $x^2 < 100\}$

Решение:

$E = \{x : x$ - целое и $x^2 < 100\} = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$

Ответ: $E = \{-9, -8, -7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

1.2

Условие:

Опишите множество при помощи характеристического свойства: $M =$ $= \{$множество чётных чисел $2, 4, 6, 8, \ldots,$ не превышающих $100\}$

Решение:

$M = \{$множество чётных чисел $2, 4, 6, 8, \ldots,$ не превышающих $100\} =$ $= \{x : x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \leq 50\}$

Ответ: $M = \{x : x = 2k, k \in \mathbb{N}, k \leq 50\}$.

1.3

Условие:
Эквивалентны ли следующие множества $A = \{y : y = 3^x, 0 < x < \infty\}$ и $B = \{y : y = 3^n, n = 1, 2, ...\}$

Решение:
$A = \{y : y = 3^x, 0 < x < \infty\}$ - это множество всех степеней числа 3 с действительным положительным показателем.

$B = \{y : y = 3^n, n = 1, 2, ...\}$ - это множество всех степеней числа 3 с натуральным показателем.

Так как $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}_+$, то множество A содержит все элементы множества B, иными словами, все множество B содержится в множестве A: $B \subset A$. Но $A \not\subset B$, так как $\mathbb{R}_+ \not\subset \mathbb{N}$. Например, $3^{1/2} \notin B$

Так как $B \subset A$ и $A \not\subset B$, то $A \neq B$

Ответ: множества A и B не эквивалентны.

1.4

Условие:

Даны множества $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$, $A = \{1,2,3,4,5,6,7\}$, $B = \{4,5,6,7,8,9,10\}$, $C = \{2,4,6,8,10\}$.

Найдите: $A \setminus C$, $A \setminus \overline{B}$, $B \setminus C$, $\overline{A \cup B}$, $\overline{C} \cup A$, $\overline{A} \cup B$, $B \cap \overline{A}$, $A \cup B \cup C$, $(A \cup B) \cap C$, $(A \setminus B) \cup C$, $(\overline{A} \setminus B) \cup C$, $(\overline{A} \cup B) \cap \overline{C}$, $(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C)$, $(A \setminus B) \cup (A \setminus C)$, $(C \cup A) \setminus (C \cap A)$, $(A \cup B) \cap (A \cap C)$, $\overline{A \cup B \cup C}$, $\overline{C} \cup (B \setminus A)$, $A \oplus C$, $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C)$, $(\overline{A} \setminus B) \oplus (B \setminus A)$.

Решение:

$\overline{A} = U \setminus A = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{8,9,10\}$

$\overline{B} = U \setminus B = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3\}$

$\overline{C} = U \setminus C = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{2,4,6,8,10\} = \{1,3,5,7,9\}$

1. $A \setminus C = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,4,6,8,10\} = \{1,3,5,7\}$

2. $A \setminus \overline{B} = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{1,2,3\} = \{4,5,6,7\}$

3. $B \setminus C = \{4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{2,4,6,8,10\} = \{5,7,9\}$

4. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$\overline{A \cup B} = U \setminus (A \cup B) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = \varnothing$

5. $\overline{C} \cup A = \{1,3,5,7,9\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$

6. $\overline{A} \cup B = \{8,9,10\} \cup \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{4,5,6,7,8,9,10\}$

7. $B \cap \overline{A} = \{4,5,6,7,8,9,10\} \cap \{8,9,10\} = \{8,9,10\}$

8. $A \cup B \cup C = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{4,5,6,7,8,9,10\} \cup \{2,4,6,8,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$

9. $(A \cup B) \cap C = (\{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{4,5,6,7,8,9,10\}) \cap \{2,4,6,8,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \cap \{2,4,6,8,10\} = \{2,4,6,8,10\}$

10. $(A \setminus B) \cup C = (\{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{4,5,6,7,8,9,10\}) \cup \{2,4,6,8,10\} = \{1,2,3\} \cup \{2,4,6,8,10\} = \{1,2,3,4,6,8,10\}$

11. $(\overline{A} \setminus B) \cup C = (\{8,9,10\} \setminus \{4,5,6,7,8,9,10\}) \cup \{2,4,6,8,10\} = \varnothing \cup \{2,4,6,8,10\} = \{2,4,6,8,10\}$

12. $(\overline{A} \cup B) \cap \overline{C} = (\{8,9,10\} \cup \{4,5,6,7,8,9,10\}) \cap \{1,3,5,7,9\} = \{4,5,6,7,8,9,10\} \cap \{1,3,5,7,9\} = \{5,7,9\}$

13. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cap \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$\overline{A} \cap C = \{8,9,10\} \cap \{2,4,6,8,10\} = \{8,10\}$
$(A \cup B) \setminus (\overline{A} \cap C) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{8,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,9\}$

14. $A \setminus B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3\}$
$A \setminus C = \{1,2,3,4,5,6,7\} \setminus \{2,4,6,8,10\} = \{1,3,5,7\}$
$(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = \{1,2,3\} \cup \{1,3,5,7\} = \{1,2,3,5,7\}$

15. $C \cup A = \{2,4,6,8,10\} \cup \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10\}$
$C \cap A = \{2,4,6,8,10\} \cap \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{2,4,6\}$
$(C \cup A) \setminus (C \cap A) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,10\} \setminus \{2,4,6\} = \{1,3,5,7,8,10\}$

16. $A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cup \{4,5,6,7,8,9,10\} = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$
$A \cap C = \{1,2,3,4,5,6,7\} \cap \{2,4,6,8,10\} = \{2,4,6\}$
$(A \cup B) \cap (A \cap C) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \cap \{2,4,6\} = \{2,4,6\}$

17. $\overline{A \cup B \cup C} = U \setminus (A \cup B \cup C) = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\} = \varnothing$

18. $B \setminus A = \{4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{8,9,10\}$
$\overline{C} \cup (B \setminus A) = \{1,3,5,7,9\} \cup \{8,9,10\} = \{1,3,5,7,8,9,10\}$

19. $A \oplus C = \{1,2,3,4,5,6,7\} \oplus \{2,4,6,8,10\} = \{1,3,5,7,8,10\}$

20. $(A \setminus B) \oplus (A \setminus C) = \{1,2,3\} \oplus \{1,3,5,7\} = \{2,5,7\}$

21. $\overline{A} \setminus B = \{8,9,10\} \setminus \{4,5,6,7,8,9,10\} = \varnothing$
$(\overline{A} \setminus B) \oplus (B \setminus A) = \varnothing \oplus (\{4,5,6,7,8,9,10\} \setminus \{1,2,3,4,5,6,7\}) = \varnothing \oplus \{8,9,10\} = \{8,9,10\}$

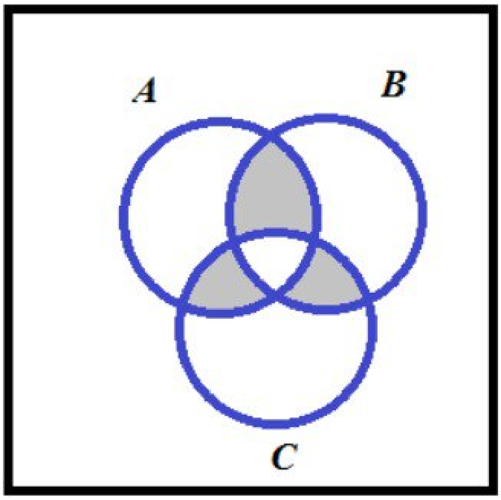
Ответ:

1. $\{1, 3, 5, 7\}$
2. $\{4, 5, 6, 7\}$
3. $\{5, 7, 9\}$
4. $\varnothing$
5. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
6. $\{4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
7. $\{8, 9, 10\}$
8. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$
9. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
10. $\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 10\}$
11. $\{2, 4, 6, 8, 10\}$
12. $\{5, 7, 9\}$
13. $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\}$
14. $\{1, 2, 3, 5, 7\}$
15. $\{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$
16. $\{2, 4, 6\}$
17. $\varnothing$
18. $\{1, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$
19. $\{1, 3, 5, 7, 8, 10\}$
20. $\{2, 5, 7\}$
21. $\{8, 9, 10\}$

1.5

Условие:

Опишите множество, соответствующее закрашенной части диаграммы Вены:



Решение:

$((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$

Ответ: $((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)) \setminus (A \cap B \cap C)$

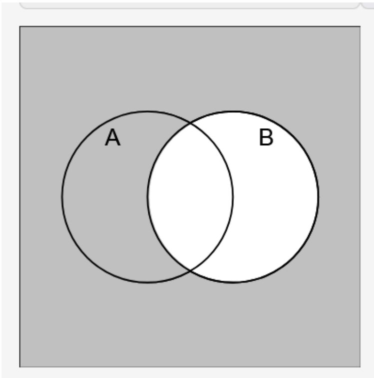
1.6

Условие:

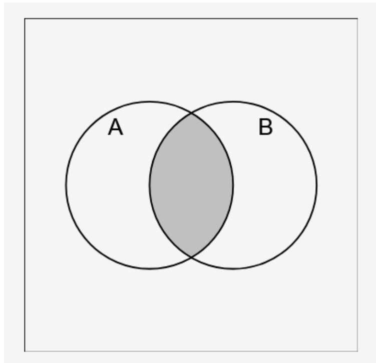
Для каждого из приведенных ниже множеств используйте диаграммы Венна и заштрихуйте те ее части, которые изображают заданные множества: $A \setminus \overline{B}$, $\overline{C} \setminus \overline{A \cup B}$.

Решение:

1. Диаграмма Венна для формулы $A \setminus \overline{B}$.

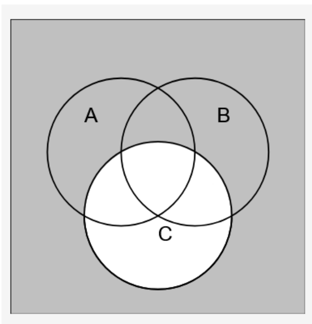


(a) $\overline{B}$

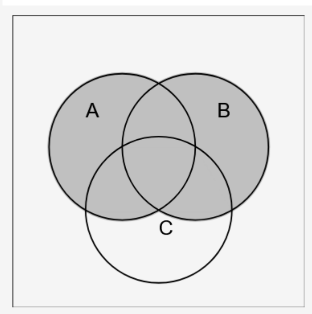


(b) $A \setminus \overline{B}$

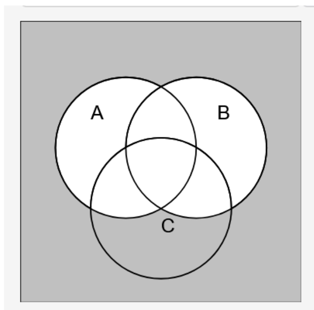
2. Диаграмма Венна для формулы $\overline{C} \setminus \overline{A \cup B}$.



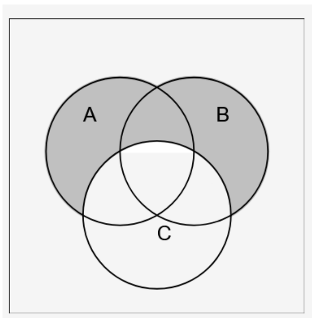
(a) $\overline{C}$



(b) $A \cup B$



(c) $\overline{A \cup B}$



(d) $\overline{C} \setminus \overline{A \cup B}$

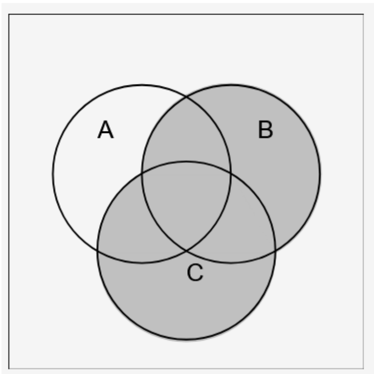
1.7

Условие:

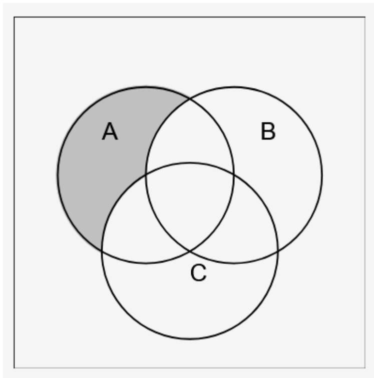
С помощью диаграммы Венна проверьте справедливость соотношения $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap \overline{C}$.

Решение:

1. Диаграмма Венна для формулы $A \setminus (B \cup C)$.

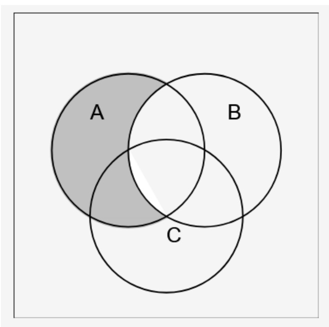


(a) $B \cup C$

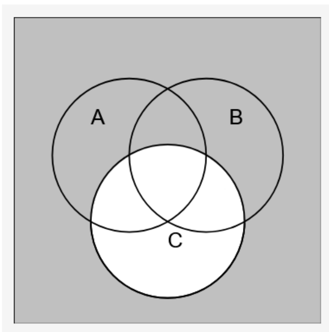


(b) $A \setminus (B \cup C)$

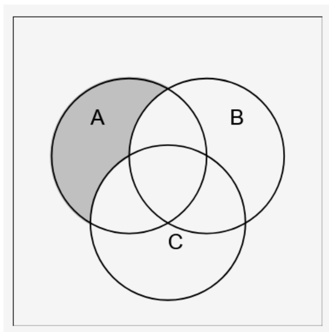
2. Диаграмма Венна для формулы $(A \setminus B) \cap \overline{C}$.



(a) $A \setminus B$



(b) $\overline{C}$



(c) $(A \setminus B) \cap \overline{C}$

Так как диаграммы идентичны, то соотношение спреведливо

Ответ: соотношение спреведливо

1.8

Условие:

Докажите тождество $(A \cap B) \setminus C = (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$, используя свойства операций.

Решение:

(1) - по выражению для разности множеств

(2) - по закону идемпотентности

(3) - по свойствам ассоциативности и коммутативности

$(A \cap B) \setminus C \overset{(1)}{=} (A \cap B) \cap \overline{C} \overset{(2)}{=} (A \cap B) \cap \overline{C} \cap \overline{C} \overset{(3)}{=} (A \cap \overline{C}) \cap (B \cap \overline{C}) \overset{(1)}{=} (A \setminus C) \cap (B \setminus C)$

Ответ: что и требовалось доказать

1.9

Условие:

Используя формулу включений-исключений, решите задачу. Во время сессии 24 студента группы должны сдать три зачета: по физике, математике и информатике. 20 студентов сдали зачет по физике, 10 – по математике, 5 – по информатике, 7 – по физике и математике, 3 – по физике и информатике, 2 – по математике и информатике. Сколько студентов сдали все три зачета?

Решение:

Пусть F - множество студентов, сдавших физику, M - множество студентов, сдавших математику, I - множество студентов, сдавших информатику. По условию: $|F| = 20,\ |M| = 10,\ |I| = 5,\ |F \cap M| = 7,\ |F \cap I| = 3,\ |M \cap I| = 2,\ |F \cup M| \cup I| = 24.$ $|F \cap M \cap I| =?$

Применим формулу включения и исключения:

$|F \cup M \cup I| = |F| + |M| + |I| - |F \cap M| - |F \cap I| - |M \cap I| + |F \cap M \cap I|$

$24 = 20 + 10 + 5 - 7 - 3 - 2 + |F \cap M \cap I|$

$24 - 23 = |F \cap M \cap I|$

$|F \cap M \cap I| = 1$

Ответ: 1 студент сдал все три зачёта.

1.10

Условие:

Используя формулу включений-исключений, решите задачу. Сколько натуральных чисел от 1 до 10000 не делится ни на α, ни на β, ни на γ, ни на δ?

Решение:

Пусть $\alpha = 2$, $\beta = 5$, $\gamma = 4$, $\delta = 13$. Если число делится на 4, то оно делится и на 2. Поэтому число 4 можно в условии задачи опустить.

Пусть A, B, C – множества целых положительных чисел, не превосходящих 10000, делящихся нацело на 2, 5, и 13 соответственно. Тогда A ∩ B, A ∩ C, B ∩ C, A ∩ B ∩ C – множества целых положительных чисел, не превосходящих 10000, делящихся нацело на $10 = 2 \cdot 5, 26 = 2 \cdot 13, 65 = 5 \cdot 13, 130 = 2 \cdot 5 \cdot 13$ соответственно.

Тогда, используя формулу включения и исключения, имеем: $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C| = [\frac{10000}{2}] + [\frac{10000}{5}] + [\frac{10000}{13}] - [\frac{10000}{2 \cdot 5}] - [\frac{10000}{2 \cdot 13}] - [\frac{10000}{5 \cdot 13}] + [\frac{10000}{2 \cdot 5 \cdot 13}] = 5000 + 2000 + 769 - 1000 - 384 - 153 + 76 = 6308$

Следовательно, количество целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 2, 5, 4 и 13, равно $10000 - 6308 = 3692$.

Ответ: 3692 целых положительных чисел, не превосходящих 10000 и не делящихся нацело ни на одно из чисел 2, 5, 4 и 13.

1.11

Условие:
Методом математической индукции доказать, что при $n \in \mathbb{N}$ выражение $9^n + 3$ кратно 4.

Решение:
База индукции: n=1
$9^1 + 3 = 9 + 3 = 12 \,\vdots\, 4$ - верно

Индукционное предположение: пусть при $n = k$ высказывание $(9^k + 3) \,\vdots\, 4$ - верно
Докажем равенство при $n = k + 1$
$9^{k+1} + 3 = 9 \cdot 9^k + 3 = 9 \cdot 9^k + 27 - 24 = 9 \cdot (9^k + 3) - 24$
По предположению $(9^k + 3) \,\vdots\, 4$, тогда $9 \cdot (9^k + 3) \,\vdots\, 4$. Так как $24 \,\vdots\, 4$, то $(9 \cdot (9^k + 3) - 24) \,\vdots\, 4$

Так как при $n = 1$ выражение кратно 4, и $\forall k\ (9^k + 3) \,\vdots\, 4 \Rightarrow (9^{k+1} + 3) \,\vdots\, 4$, то по принципу математической индукции выражение $9^n + 3$ кратно 4, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Ответ: что и требовалось доказать

1.12

Условие:

Доказать, что при любом $n \in \mathbb{N}$ выполняется равенство

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \ldots + (n+1)(3n-1) = \frac{n(2n^2+5n+1)}{2}$

Решение:

База индукции: $n = 1$

$2 \cdot 2 = \frac{1 \cdot (2 \cdot 1^2 + 5 \cdot 1 + 1)}{2}$

$4 = \frac{8}{2}$

$4 = 4$ - верно

Индукционное предположение: пусть при $n = k$ равенство выполнено

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \ldots + (k+1)(3k-1) = \frac{k(2k^2+5k+1)}{2}$

Докажем справедливость при $n = k + 1$

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \ldots + (k+1)(3k-1) + ((k+1)+1)(3(k+1)-1) = \frac{(k+1)(2(k+1)^2+5(k+1)+1)}{2}$

$2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \ldots + (k+1)(3k-1) + (k+2)(3k+2) = \frac{(k+1)(2(k^2+2k+1)+5k+5+1)}{2}$

Так как $2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \ldots + (k+1)(3k-1) = \frac{k(2k^2+5k+1)}{2}$, то

$\frac{k(2k^2+5k+1)}{2} + (k+2)(3k+2) = \frac{(k+1)(2k^2+4k+2+5k+5+1)}{2}$

$\frac{k(2k^2+5k+1)}{2} + \frac{2(k+2)(3k+2)}{2} = \frac{(k+1)(2k^2+9k+8)}{2}$

$\frac{2k^3+5k^2+k}{2} + \frac{(2k+4)(3k+2)}{2} = \frac{2k^3+9k^2+8k+2k^2+9k+8}{2}$

$\frac{2k^3+5k^2+k}{2} + \frac{6k^2+4k+12k+8}{2} = \frac{2k^3+11k^2+17k+8}{2}$

$\frac{2k^3+5k^2+k}{2} + \frac{6k^2+16k+8}{2} = \frac{2k^3+11k^2+17k+8}{2}$

$\frac{2k^3+5k^2+k+6k^2+16k+8}{2} = \frac{2k^3+11k^2+17k+8}{2}$

$\frac{2k^3+11k^2+17k+8}{2} = \frac{2k^3+11k^2+17k+8}{2}$ - верно, равеноство выполнено

Так как при $n = 1$ равенство выполнено и $\forall k\ (2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \ldots + (k+1)(3k-1) = \frac{k(2k^2+5k+1)}{2}) \Rightarrow (2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + \ldots + (k+1)(3k-1) + ((k+1)+1)(3(k+1)-1) = \frac{(k+1)(2(k+1)^2+5(k+1)+1)}{2})$, то по принципу математической индукции равенство выполняется для всех $n \in \mathbb{N}$

Ответ: что и требовалось доказать

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель работы достигнута. В ходе работы были решены 12 заданий на тему «Множества», благодаря чему были улучшены навыки участников команды в решении задач на эту тему.

В таблице 1 представлен оценочный лист участников команды.

Таблица 1 — Оценочный лист участников команды

Участник	**Вклад в работу, балл**
Фалькович М. С.	5
Дарморoз М. Д.	5
Букинов Д. Д.	5
Стафеев И. А.	5