Министерство науки и высшего образования Российской Федерации

ФЕДЕРАЛЬНО ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

ITMO University

Расчетно-графическая работа по 2 модулю

Вариант №3

По дисциплине

Линейная алгебра

Выполнил

Стафеев И.А.

Группа: К3121

Проверила

Шиманская Г.С.

Санкт-Петербург,

2023

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 Задание 1

Вычислить определитель через миноры:

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 & -9 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 & 6 \\ 2 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Решение:

Обозначим матрицу из условия за A, тогда ее определитель равен $\det\ A$. По формуле для разложения определителя по строке i имеем:

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}A_{ik} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} M_{ik}$$

Разложим определитель матрицы по 1-й строке. Тогда

$\det\ A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k} = (-1)^{1+1} \cdot 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot$
$(-9) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}\ (-1)^{1+4} \cdot\ 0 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$
$= 6 \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 3 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} - 9 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} + 0$

Найдем определители меньших матриц:

1. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot 0 - (-1) \cdot 2 \cdot 3 - 2 \cdot 6 \cdot (-1) =$
$0 + 0 - 6 - 0 + 6 + 12 = 12$

2. $\begin{vmatrix} 0 & -1 & 3 \\ 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 0 \cdot 3 + (-1) \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot (-1) - 3 \cdot 0 \cdot 2 - (-1) \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 6 \cdot (-1) =$
$0 - 12 - 12 - 0 + 12 + 0 = -12$

3. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 4 & 2 & 6 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 0 \cdot 2 \cdot 3 + 2 \cdot 6 \cdot 2 + 3 \cdot 4 \cdot 0 - 3 \cdot 2 \cdot 2 - 2 \cdot 4 \cdot 3 - 0 \cdot 6 \cdot 0 = 0 + 24 + 0 - 12 - 24 - 0 = -12$

Тогда
$\det A = 6 \cdot 12 - 3 \cdot (-12) - 9 \cdot (-12) + 0 = 72 + 36 + 108 + 0 = 216$

Ответ: 216

2 Задание 2

Вычислить произведение матриц:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение:

Количество столбцов матрицы A — 3 — равно количеству строк матрицы B, поэтому произведение можно вычислить.

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & -1 \\ 2 & -2 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -3 & 0 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 2 + 5 \cdot (-3) + (-1) \cdot 5 & 3 \cdot 4 + 5 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 \\ 2 \cdot 2 + (-2) \cdot (-3) + 0 \cdot 5 & 2 \cdot 4 + (-2) \cdot 0 + 0 \cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 6 - 15 - 5 & 12 + 0 - 1 \\ 4 + 6 + 0 & 8 - 0 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -14 & 11 \\ 10 & 8 \end{pmatrix}$

3 Задание 3

Найти обратную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Решение:

Обозначим матрицу в условии за A

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 \cdot 2 + 1 \cdot 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 \cdot 1 = 4 + 1 + 1 - 2 - 2 - 1 = 1$$

Так как $\det A \neq 0$, то существует A^{-1}

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{ad}$, где $A^{ad} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ - союзная матрица

Найдем алгебраические дополнения, воспользовавшись равенством:
$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$

$$A_{11} = (-1)^{1+1} M_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 3$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -1$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} M_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 2 \cdot 1 = -1$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} M_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 2 - 1 \cdot 1) = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$$

$A_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 0$

$A_{31} = (-1)^{3+1} M_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = -1$

$A_{32} = (-1)^{3+2} M_{32} = - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -(1 \cdot 1 - 1 \cdot 1) = 0$

$A_{33} = (-1)^{3+3} M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 2 - 1 \cdot 1 = 1$

Исходя из вычислений выше, получаем $A^{ad} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{ad} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

4 Задание 4

Решить СЛАУ методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -7, \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 14, \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 = -18 \end{cases}$$

Решение:

Количество уравнений в системе равно количеству неизвестных, значит, метод Крамера можно применить

Пусть $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -18 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$. Тогда $Ax = B$.

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \\ -1 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-1) - (-3) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) \cdot (-1) = 20 - 9 - 1 + 2 + 15 - 6 \neq 0 \Rightarrow$ система имеет единственное решение

$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_{11} & -3 & 1 \\ b_{21} & 2 & -3 \\ b_{31} & -1 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 1 \\ 14 & 2 & -3 \\ -18 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-7) \cdot 2 \cdot 5 + (-3) \cdot (-3) \cdot (-18) + 1 \cdot 14 \cdot (-1) - 1 \cdot 2 \cdot (-18) - (-3) \cdot 14 \cdot 5 - (-7) \cdot (-3) \cdot (-1) = -70 - 162 - 14 + 36 + 210 + 21 = 21$

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & b_{11} & 1 \\ 1 & b_{21} & -3 \\ -1 & b_{31} & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -7 & 1 \\ 1 & 14 & -3 \\ -1 & -18 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot 14 \cdot 5 + (-7) \cdot (-3) \cdot (-1) + 1 \cdot 1 \cdot (-18) - 1 \cdot 14 \cdot (-1) - (-7) \cdot 1 \cdot 5 - 2 \cdot (-3) \cdot (-18) = 140 - 21 - 18 + 14 + 35 - 108 = 42$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & -3 & b_{11} \\ 1 & 2 & b_{21} \\ -1 & -1 & b_{31} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & -7 \\ 1 & 2 & 14 \\ -1 & -1 & -18 \end{vmatrix} = 2\cdot2\cdot(-18)+(-3)\cdot14\cdot(-1)+(-7)\cdot1\cdot$$
$(-1)-(-7)\cdot2\cdot(-1)-(-3)\cdot1\cdot(-18)-2\cdot14\cdot(-1) = -72+42+7-14-54+28 = -63$

$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{21}{21} = 1$

$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{42}{21} = 2$

$x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-63}{21} = -3$

Проверка:

$2 \cdot 1 - 3 \cdot 2 + (-3) = 2 - 6 - 3 = -7$

$1 + 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) = 1 + 4 + 9 = 14$

$-1 - 2 + 5 \cdot (-3) = -1 - 2 - 15 = -18$

При найденных x_1, x_2, x_3 все уравнения системы верны, проверка выполнена успешно

Ответ: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = -3$

5 Задание 5

Решить СЛАУ методом Гаусса:

$$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = 7, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 3, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + 0x_4 = -1, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - 8x_4 = -7 \end{cases}$$

Решение:

Пусть $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 1 & 5 \\ 1 & -2 & -2 & -3 \\ 3 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & -8 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -1 \\ -7 \end{pmatrix}$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$. Тогда $Ax = B$.

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -8 & -7 \end{array}\right)$$

Приведем эту матрицу в верхнетреугольному виду

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -8 & -7 \end{array}\right) \underset{\sim}{(1)\longleftrightarrow(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -8 & -7 \end{array}\right) \underset{\sim}{(2)-4(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 9 & 17 & -5 \\ 3 & -1 & 3 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 2 & -8 & -7 \end{array}\right) \underset{\sim}{(3)-3(1)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 9 & 17 & -5 \\ 0 & 5 & 9 & 9 & -10 \\ 2 & 3 & 2 & -8 & -7 \end{array}\right) \underset{\sim}{(4)-2(1)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 9 & 17 & -5 \\ 0 & 5 & 9 & 9 & -10 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \end{array}\right) \underset{\sim}{(3)-(2)} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 9 & 17 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -5 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \end{array}\right) \underset{\sim}{(3)\longleftrightarrow(4)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 5 & 9 & 17 & -5 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{(2)\cdot 7} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 35 & 63 & 119 & -35 \\ 0 & 7 & 6 & -2 & -13 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{(3)\cdot 5} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 35 & 63 & 119 & -35 \\ 0 & 35 & 30 & -10 & -65 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right) \underset{\sim}{(3)-(2)}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -2 & -3 & 3 \\ 0 & 35 & 63 & 119 & -35 \\ 0 & 0 & -33 & -129 & -30 \\ 0 & 0 & 0 & -8 & -5 \end{array}\right)$$

Из полученной матрицы найдем все x

1. $-8x_4 = -5 \Leftrightarrow x_4 = \frac{-5}{-8} = \frac{5}{8} = 0.625$

2. $-33x_3 - 129x_4 = -30 \Leftrightarrow 33x_3 + 129x_4 = 30 \Leftrightarrow x_3 = \frac{30-129x_4}{33} = \frac{30-129\cdot\frac{5}{8}}{33} = \frac{\frac{30\cdot 8-129\cdot 5}{8}}{33} = \frac{30\cdot 8-129\cdot 5}{33\cdot 8} = \frac{-405}{33\cdot 8} = \frac{-135}{11\cdot 8} = -\frac{135}{88}$

3. $35x_2 + 63x_3 + 119x_4 = -35 \Leftrightarrow x_2 = \frac{-35-63x_3-119x_4}{35} = \frac{-35-63\cdot\frac{-135}{88}-119\cdot\frac{5}{8}}{35} = \frac{-35+\frac{63\cdot 135}{88}-\frac{119\cdot 5}{8}}{35} = \frac{\frac{-35\cdot 88}{88}+\frac{63\cdot 135}{88}-\frac{119\cdot 5\cdot 11}{88}}{35} = \frac{-35\cdot 88+63\cdot 135-119\cdot 5\cdot 11}{35\cdot 88}\frac{-35\cdot 88+7\cdot 5\cdot 9\cdot 27-5\cdot 7\cdot 17\cdot 11}{35\cdot 88} = \frac{-88+9\cdot 27-17\cdot 11}{88} = \frac{-88+243-187}{88} = \frac{-32}{88} = -\frac{4}{11}$

4. $x_1-2x_2-2x_3-3x_4 = 3 \Leftrightarrow x_1 = 3+2x_2+2x_3+3x_4 = 3+2\cdot(-\frac{4}{11})+2\cdot(-\frac{135}{88})+3\cdot\frac{5}{8} = \frac{3\cdot 88}{88} - \frac{2\cdot 4\cdot 8}{88} - \frac{2\cdot 135}{88} + \frac{3\cdot 5\cdot 11}{88} = \frac{3\cdot 88-2\cdot 4\cdot 8-2\cdot 135+3\cdot 5\cdot 11}{88} = \frac{264-64-270+165}{88} = \frac{95}{88}$

Проверка:

$4\cdot\frac{95}{88} - 3\cdot(-\frac{4}{11}) + (-\frac{135}{88}) + 5\cdot 0.625 = \frac{380}{88} + \frac{12}{11} - \frac{135}{88} + \frac{25}{8} = \frac{380+12\cdot 8-135+25\cdot 11}{88} = \frac{616}{88} = 7$

$\frac{95}{88} - 2\cdot(-\frac{4}{11}) - 2\cdot(-\frac{135}{88}) - 3\cdot 0.625 = \frac{95}{88} + \frac{8}{11} + \frac{270}{88} - \frac{15}{8} = \frac{95+8\cdot 8+270-15\cdot 11}{88} = \frac{264}{88} = 3$

$3\cdot\frac{95}{88} - (-\frac{4}{11}) + 3\cdot(-\frac{135}{88}) = \frac{285}{88} + \frac{4}{11} - \frac{405}{88} = \frac{285+4\cdot 8-405}{88} = \frac{-88}{88} = -1$

$2\cdot\frac{95}{88} + 3\cdot(-\frac{4}{11}) + 2\cdot(-\frac{135}{88}) - 8\cdot 0.625 = \frac{190}{88} - \frac{12}{11} - \frac{270}{88} - 5 = \frac{190-12\cdot 8-270-5\cdot 88}{88} = \frac{-618}{88} - 7$

При найденных x_1, x_2, x_3, x_4 все уравнения системы верны, проверка выполнена успешно

Ответ: $x_1 = \frac{95}{88}$, $x_2 = -\frac{4}{11}$, $x_3 = -\frac{135}{88}$, $x_4 = 0.625$