Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
ФЕДЕРАЛЬНО ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
ITMO University

Лабораторная работа №1 по теме «Распределение случайной величины»

По дисциплине
Общая физика

Выполнили:
Стафеев И.А. (К3121)
Голованов Д. И. (К3123)
Данилов Н. О. (К3121)

Поток: ОФ-1 ИКТ 1.2.1

Проверила
Рудель А. Е.

Санкт-Петербург,
2024

СОДЕРЖАНИЕ

Стр.

1 Введение **3**
1.1 Цель работы 3
1.2 Задачи 3
1.3 Объект исследования 3
1.4 Метод экспериментального исследования 3
1.5 Рабочие формулы и исходные данные 3
1.6 Измерительные приборы 5
1.7 Схема установки 5

2 Выполнение лабораторной работы **6**
2.1 Результаты прямых и косвенных измерений 6
2.2 Окончательные результаты 9
2.3 Графики 9

3 Выводы и анализ результатов работы **10**

4 Ответы на контрольные вопросы **11**

1 Введение

1.1 Цель работы

Исследование распределения случайной величины на примере многократных измерений определённого интервала времени.

1.2 Задачи

1. Провести многократные измерения определенного интервала времени;
2. Построить гистограмму распределения результатов измерения;
3. Вычислить среднее значение и дисперсию полученной выборки;
4. Сравнить гистограмму с графиком функции Гаусса с такими же как и у экспериментального распределения средним значением и дисперсией;

1.3 Объект исследования

Распределения случайной величины на примере многократных измерений определённого интервала времени.

1.4 Метод экспериментального исследования

Измерение цифровым секундомером заданного интервала времени, статистический анализ.

1.5 Рабочие формулы и исходные данные

1. Среднеарифметическое значение всех результатов измерений

$$\langle t \rangle_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} t_i \tag{1}$$

2. Выборочное среднеквадратичное отклонение

$$\sigma_N = \sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2} \tag{2}$$

3. Максимальная плотность вероятности

$$\rho_{\max} = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{3}$$

4. Функция Гаусса

$$\rho(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{(t-\langle t\rangle)^2}{2\sigma^2}\right) \tag{4}$$

5. Среднеквадратичное отклонение среднего значения

$$\sigma_{\langle t\rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)}\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t\rangle_N)^2} \tag{5}$$

6. Случайная погрешность для измеряемого промежутка времени

$$\Delta t = t_{\alpha,N}\cdot\sigma_{\langle t\rangle} \tag{6}$$

7. Вероятности попадания результатов измерения в стандартные интервалы

$$\begin{aligned} &t \in [\langle t\rangle - \sigma, \langle t\rangle + \sigma], && P_\sigma \approx 0,683\\ &t \in [\langle t\rangle - 2\sigma, \langle t\rangle + 2\sigma], && P_{2\sigma} \approx 0,954\\ &t \in [\langle t\rangle - 3\sigma, \langle t\rangle + 3\sigma], && P_{3\sigma} \approx 0,997 \end{aligned} \tag{7}$$

8. Коэффициент Стьюдента для $N = 50$ и $\alpha = 0.95$

$$t_{\alpha,N} = 2.0096 \tag{8}$$

Исходные данные: $N = 50$, $t = 5$ с.

1.6 Измерительные приборы

Таблица 1 — Измерительные приборы

№ п/п	Наименование	Тип прибора	Используемый диапазон	Погрешность прибора $\Delta_{иt}$
1	Цифровой секундомер	цифровой	0-3600 с	0.005 с

1.7 Схема установки

В работе используются стрелочный секундомер и цифровой секундомер. Первый прибор задает интервал времени, который многократно измеряется цифровым секундомером.

2 Выполнение лабораторной работы

2.1 Результаты прямых и косвенных измерений

Таблица 2 — Результаты прямых измерений

№	t_i, с	$t_i - \langle t \rangle_N$, с	$(t_i - \langle t \rangle_N)^2$, с
1	5.06	0.05	0.003
2	4.97	-0.04	0.002
3	5.06	0.05	0.003
4	4.91	-0.1	0.010
5	5.11	0.10	0.010
6	4.96	-0.05	0.003
7	5.02	0.01	0.000
8	5.12	0.11	0.012
9	4.94	-0.07	0.005
10	4.97	-0.04	0.002
11	4.96	-0.05	0.003
12	5.01	0.00	0.000
13	5.05	0.04	0.002
14	5.02	0.01	0.000
15	5.04	0.03	0.001
16	5.00	-0.01	0.000
17	4.96	-0.05	0.003
18	4.99	-0.02	0.000
19	4.92	-0.09	0.008
20	4.92	-0.09	0.008
21	5.08	0.07	0.005
22	4.92	-0.09	0.008
23	5.04	0.03	0.001
24	5.06	0.05	0.003
25	5.02	0.01	0.000
26	5.00	-0.01	0.000

Продолжение таблицы 2

27	4.93	-0.08	0.006
28	4.93	-0.08	0.006
29	5.08	0.07	0.005
30	5.11	0.10	0.010
31	5.03	0.02	0.000
32	5.03	0.02	0.000
33	4.97	-0.04	0.002
34	4.95	-0.06	0.004
35	5.01	0.00	0.000
36	4.96	-0.05	0.003
37	5.07	0.06	0.004
38	5.06	0.05	0.003
39	5.04	0.03	0.001
40	5.07	0.06	0.004
41	5.01	0.00	0.000
42	4.98	-0.03	0.001
43	5.03	0.02	0.000
44	4.99	-0.02	0.000
45	5.00	-0.01	0.000
46	4.90	-0.11	0.012
47	5.07	0.06	0.004
48	5.01	0.00	0.000
49	4.97	-0.04	0.002
50	5.04	0.03	0.001
	$\langle t \rangle_N = 5.01$ с	$\sum_{i=1}^{N}(t_i - \langle t \rangle_N) = -0.15$ с	$\sigma_N = 0.06$ с $\rho_{\max} = 7.16$ с$^{-1}$

Наименьший и наибольший результат измерений: $t_{min} = 4.90$, $t_{max} = 5.12$; $|t_{min} - t_{max}| = 0.22$. Необходимо этот диапазон разбить на $m = \sqrt{N} = \sqrt{50} \approx 7$ равных интервалов шириной Δt.

$\Delta t = \frac{|t_{min} - t_{max}|}{m} = \frac{0.22}{7} \approx 0.03$

Таблица 3 — Данные для построения гистограммы

Границы интервалов, с	ΔN	$\frac{\Delta N}{N\Delta t}$, с$^{-1}$	t, с	ρ, с$^{-1}$
4.90	7	4.45	4.92	1.889
4.93				
4.93	6	3.82	4.95	4.015
4.96				
4.96	7	4.45	4.98	6.238
4.99				
4.99	10	6.36	5.01	7.082
5.03				
5.03	8	5.09	5.05	5.876
5.06				
5.06	9	5.73	5.08	3.563
5.09				
5.09	3	1.91	5.11	1.579
5.12				

Таблица 4 — Стандартные доверительные интервалы

	Интервал, с		ΔN	$\frac{\Delta N}{N}$	P
	от	до			
$\langle t\rangle_N \pm \sigma_N$	4.95	5.07	33	0.66	0.683
$\langle t\rangle_N \pm 2\sigma_N$	4.89	5.13	49	0.98	0.954
$\langle t\rangle_N \pm 3\sigma_N$	4.83	5.19	50	1.00	0.997

Среднеквадратичное отклонение среднего значения по формуле 5 равно: $\sigma_{\langle t\rangle} = 0.008$

Случайная погрешность для измерения промежутка времени по формуле 6 равна: $\Delta_{\langle t\rangle} = 0.02$

Доверительный интервал для доверительной вероятности $\alpha = 0.95$ равен $P(t \in [\langle t\rangle - \Delta_{\langle t\rangle}, \langle t\rangle + \Delta_{\langle t\rangle}]) = P(4.99 \leq t \leq 5.03)$

2.2 Окончательные результаты

Инструментальная погрешность: $\Delta_{\text{ит}} = 0.5 \cdot 0.01 = 0.005$ с

Среднее арифметическое результатов измерений: $\langle t_N \rangle = 5.01$ с

Выборочное среднеквадратичное отклонение: $\sigma_N = 0.06$ с

Максимальное значение плотности распределения: $\rho_{max} = 7.16\ c^{-1}$

Среднеквадратичное отклонение среднего значения: $\sigma_{\langle t \rangle} = 0.008$ с

Случайная погрешность: $\Delta_{\langle t \rangle} = 0.02$

Абсолютная погрешность измерения: $\Delta_t = \sqrt{\Delta^2_{\langle t \rangle} + (\frac{2}{3}\Delta_{\text{и}t})^2} \approx 0.02$

Относительная погрешность: $\varepsilon_t = \frac{\Delta_t}{\langle t \rangle} \cdot 100\% = 0.40\%$

Конечный результат: $t = (5 \pm 0.02)$; $\varepsilon_t = 0.40\%$; $\alpha = 0.95$

2.3 Графики

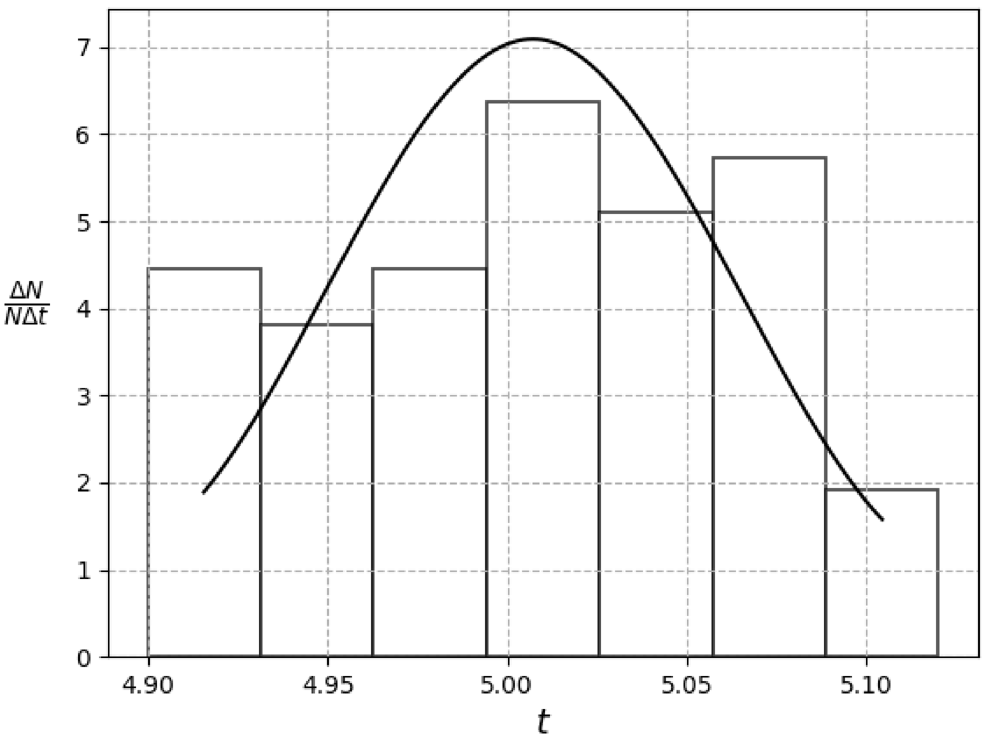

Рисунок 1 — Гистограмма распределения измеренной случайной величины и график нормального распределения

3 Выводы и анализ результатов работы

В ходе работы было проведено исследование распределения случайной величины на основе измерений заданного интервала времени. Измеренные данные были сгруппированы по 7 границам, после чего была построена гистограмма плотности распределения измеренной величины.

Для измеренных данных были посчитаны выборочное значение среднего $\langle t \rangle_N$, выборочное среднеквадратичное отклонение σ_N и максимальное значение плотности распределения ρ_{max}.

Затем для каждого интервала было найдено значения плотности распределения $\rho(t)$ и построен график, содержащий гистограмму и кривую нормального распределения. Гистограмма в точности не соответствует графику нормального распределения по причине недостаточного количества проведенных измерений.

Для стандартных доверительных интервалов посчитано соотношение между количеством измерений, попавших в интервал, и общим числом значений и сравнено с вероятностями попадания значений в указанные интерввалы для нормального распределения.

Далее найдено значение среднеквадратичного отклонения среднего значения $\sigma_{\langle t \rangle}$ и случайная погрешность для t (она же является значением, определяющим ширину доверительного интервала). В заключение найден доверительный интервал для доверительной вероятности $\alpha = 0.95$.

В процессе работы были выполнены все поставленные задачи, что говорит о достижении цели лабораторной работы.

4 Ответы на контрольные вопросы

1. Являются ли, по вашему мнению, случайными следующие физические величины:

- плотность алмаза при $20°C$
- напряжение сети
- сопротивление резистора, взятого наугад из партии с одним и тем же номинальным сопротивлением
- число молекул в 1с^3 при нормальных условиях?

Приведите другие примеры случайных и неслучайных физических величин

Ответ: Плотность алмаза не является случайной, т. к. плотность зависит от физических, химических свойств алмаза, которые являются зафиксированными величинами при определенных условиях.

Напряжение сети не является случайной, т. к. напряжение напрямую зависит от силы тока, сопротивления и других величин, которые можно регулировать.

Сопротивление резистора будет не случайной величиной, т. к. номинальное сопротивление всей партии единой, а значит и погрешность измерения всех приборов партии также едина.

Число молекул в определенном объеме при нормальных условиях будет случайной величиной.

Другие примеры. Случайные: количество распавшихся радиоактивных ядер за определенный промежуток времени. Не случайные: Сила Ампера, действующая на проводник с током, ускорение свободного падения на определенной широте земного шара, сила, с которой два заряда действуют друг на друга.

2. Изучая распределение ЭДС партии электрических батареек, студент использовал цифровой вольтметр. После нескольких измерений получились такие результаты (в вольтах): 1,50; 1,49; 1,50; 1,50; 1,49. Имеет ли смысл продолжать измерения? Что бы вы изменили в методике этого эксперимента?

Ответ: не имеет смысла продолжать измерения с помощью данного вольтметра, т. к. не хватает точности прибора. Необходимо заменить вольтметр на более точный, с меньшей ценой деления, а также увеличить количество измерений.

3. При обработке результатов измерений емкости партии конденсаторов получено: $\langle C \rangle = 1{,}1$ мкФ, $\sigma = 0{,}1$ мкФ. Если взять коробку со 100 конденсаторами из этой партии, то сколько среди них можно ожидать конденсаторов с емкостью меньше 1 мкФ? больше 1,3 мкФ?

Ответ: чтобы оценить количество конденсаторов с емкостью меньше 1 мкФ и больше 1,3 мкФ, можно воспользоваться нормальным распределением и правилом трёх сигм. Тогда в коробке со 100 конденсаторами около 16 штук будут иметь емкость меньше 1 мкФ, а около 2 штук - емкость больше 1,3 мкФ.

4.Как изменяется коэффициент Стьюдента при возростании количества измерений?

Ответ: С ростом числа измерений возрастает точность, из-за чего плотность распределения уменьшается, доверительный интервал сужается, поэтому коэффициент Стьюдента уменьшается

5. Как зависит коэффициент Стьюдента от доверительной вероятности?

Ответ: Коэффициент Стьюдента находится в прямой зависимости от доверительной вероятности. В теории Стьюдента рассчитаны значения этого коэффициента в зависимости от доверительной вероятности и числа измерений. С ростом доверительной вероятности коэффициент Стьюдента увеличивается. А с ростом числа измерений, увеличивающим надежность самих результатов измерения, коэффициент Стьюдента уменьшается.

6. В чем отличие среднеквадратичного отколения среднего значения от среднеквадратичного отклонения выборки?

Ответ: Среднеквадратичное отклонение выборки вычисляется путем нахождения среднего значения отклонений каждого элемента выборки от ее среднего значения. Данное отклонение используется для оценки разброса данных внутри выборки. А среднеквадратичное отклонение среднего значения является мерой точности среднего значения. Оно показывает, насколько среднее значение может отличаться от истинного среднего значения совокупности. Оно вычисляется путем деления стандартного отклонения на квадратный корень из размера выборки. Чем больше размер выборки, тем меньше отклонение и тем точнее среднее значение. Таким образом, основное отличие между среднеквадратичным отклонением среднего значения и среднеквадратичным отклонением выборки заключается в том, что второе показывает точность оценки среднего значения, а первое - разброс данных внутри выборки.

7. Обязательно ли в данной работе должно получиться распределение, близкое к нормальному? Почему?

Ответ: нет, распределение случайной величины не всегда получается близким к нормальному. Так как форма распределения зависит от многих факторов, таких как характеристики выборки и способа сбора данных, который включает себя индивидуальную погрешность. Нормальное распределение имеет определенные свойства, которые делают его удобным для использования в статистических расчетах. В данной лабораторной работе приведен график, описываемый функцией Гаусса. Однако в реальной жизни данные часто не подчиняются нормальному распределению.