1장

행렬의 기초이론

1.1 행렬

일반적으로 통계적인 분석에서 행렬(matrix)을 사용하면 그 표현이나 계산을 함에 있어 많이 편리하다. 특히 회귀분석에 있어서는 행렬의 사용이 필수적이라고 할 수 있는데, 3장에서 다루는 **단순회귀모형**(simple regression model)에서는 행렬을 이용하지 않고도 쉽게 분석할 수 있으나 7장부터 다루게 되는 **중회귀모형**(multiple regression model)에서는 행렬의 개념이 반드시 필요한 도구이다. 이 장에서는 회귀분석을 공부하는 데 필요한 행렬의 기초개념을 소개하며 행렬의 기초지식을 갖춘 독자들은 다음 장부터 공부하면 좋을 것이다.

mn 개의 원소(element)들이 m 개의 행과 n 개의 열에 장방형(rectangular)으로 배열되어 있을 때 $\boldsymbol{m \times n}$ 행렬이라고 하고, i 번째 행과 j 번째 열에 배열되어 있는 원소를 a_{ij} 라고 하면 $m \times n$ 행렬은 다음과 같이 표현된다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} & m \\ n & \end{array}$$

일반적으로 행렬은 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{X}$, $\boldsymbol{Z}$와 같은 기호로 표시하며 다음과 같이 간단히 쓰기도 한다.

$$\boldsymbol{A} = (a_{ij}),\ i = 1, 2, \cdots, m,\quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

행렬에서 행과 열의 수를 나타내는 $m \times n$ 을 차원(dimension)이라고 하며 위 행렬

$\boldsymbol{A}$는 $m \times n$차원 행렬이다. 특히 1×1 행렬을 **스칼라**(scalar)라고 하며 이 책에서는 모든 행렬의 원소가 **실수**(real number)라고 가정한다.

벡터(vector)는 단 하나의 열이나 행을 갖는 행렬을 말하며, 예제 1.1에서와 같이 $1 \times n$ 행렬을 **행벡터**(row vector)라고 하고 $n \times 1$ 행렬을 **열벡터**(column vector)라고 한다.

예제 1.1

다음과 같은 $\boldsymbol{X}$와 $\boldsymbol{X}'$은 각각 $n \times 1$ 열벡터와 $1 \times n$ 행벡터이다.

$$\boldsymbol{X} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}; \ n \times 1 \ \text{열벡터}$$

$$\boldsymbol{X}' = (x_1, x_2, \cdots, x_n); 1 \times n \ \text{행벡터}.$$

그러나 다음과 같은 경우에는 숫자들이 행과 열에 배열되어 있지 않으므로 행렬이라고 하지 않는다.

$$\begin{bmatrix} & 14 & \\ & 8 & \\ 10 & & 15 \\ 9 & & 16 \end{bmatrix}$$

1.1.1 정방행렬

행과 열의 수가 같은 행렬, 즉 $n \times n$ 행렬을 **정방행렬**(square matrix)이라고 하고 n을 이 행렬의 **차수**(order)라고 한다.

예제 1.2

다음과 같은 행렬은 차수가 3인 정방행렬이다.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad : 3 \times 3 \text{ 정방행렬.}$$

1.1.2 전치행렬

행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 ij번째 원소를 ji번째로 바꾼 행렬, 즉 행을 열로 하고 열을 행으로 하는 행렬을 $\boldsymbol{A}'$ 이라 놓으면 행렬 $\boldsymbol{A}'$ 를 행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 전치행렬(transpose matrix)이라고 한다. 즉 행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 첫째 행은 $\boldsymbol{A}'$ 의 첫째 열이 되고 둘째 행은 둘째 열이 된다. 같은 방법으로 행과 열을 모두 바꾸면 전치행렬을 얻을 수 있으며, 따라서 행렬 $\boldsymbol{A}$ 는 행렬 $\boldsymbol{A}'$ 의 전치행렬이다.

예제 1.3

다음과 같은 행렬

$$\underset{3\times 2}{\boldsymbol{A}} = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 7 & 10 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

의 전치행렬은 다음과 같다.

$$\underset{2\times 3}{\boldsymbol{A}'} = \begin{bmatrix} 2 & 7 & 3 \\ 5 & 10 & 4 \end{bmatrix}$$

특히 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$ 일 때 $\boldsymbol{A}$ 를 대칭행렬(symmetric matrix)이라고 한다. 또한 대칭행렬에서는 $a_{ij} = a_{ji}$ 이므로 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$ 는 정방행렬이다.

예제 1.4

다음 행렬 $\boldsymbol{A}$ 는 대칭행렬이다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{bmatrix}$$

1.1.3 대각행렬

정방행렬에서 주대각선(principal diagonal)상에 있는 원소 a_{ii}, $i = 1,2,\cdots,n$를 제외한 모든 원소가 0인 행렬을 **대각행렬**(diagonal matrix)이라고 한다. 즉, 어떤 정방행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 원소를 a_{ij} 라고 할 때 이 행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 원소 중 $a_{ij} = 0,\ i \neq j$ 인 행렬을 말한다.

예제 1.5

다음 행렬 $\boldsymbol{A}$ 는 대각행렬이다.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{bmatrix}$$

대각행렬의 특별한 경우로서 대각선상의 원소들이 모두 1일 때 이 행렬을 **단위행렬**(identitiy or unit matrix)이라고 하고 $\boldsymbol{I}$로 표시한다.

$$\boldsymbol{I}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : \text{3차 단위행렬}$$

1.2 행렬의 연산

1.2.1 행렬의 합과 차

두 행렬의 합 또는 차의 계산은 두 행렬의 차원이 동일해야만 가능하며 대응되는 두 행렬의 원소의 합 또는 차의 계산에 의하여 얻어진다. 즉 두 개의 $m \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 와 $\boldsymbol{B} = (b_{ij})$ 의 합과 차는 다음과 같다.

$$\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} a_{11} \pm b_{11} & a_{12} \pm b_{12} & \cdots & a_{1n} \pm b_{1n} \\ a_{21} \pm b_{21} & a_{22} \pm b_{22} & \cdots & a_{2n} \pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} \pm b_{m1} & a_{m2} \pm b_{m2} & \cdots & a_{mn} \pm b_{mn} \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

$$= (a_{ij} \pm b_{ij}) \qquad ,i = 1,\cdots,m$$
$$j = 1,\cdots,n$$

예 $\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 5 & -3 \end{bmatrix}$

동일한 차원의 행렬 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ 사이에는 다음과 같은 관계가 성립된다.

정리 1.1 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})' = \boldsymbol{A}'+\boldsymbol{B}'.$

1.2.2 행렬의 스칼라 곱(scalar multiplication)

$m \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$에 임의의 상수 λ를 곱하는 식은 다음과 같다.

$$\lambda \boldsymbol{A} = \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \cdots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \cdots & \lambda a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \cdots & \lambda a_{mn} \end{bmatrix} = (\lambda a_{ij}), \qquad \begin{matrix} i = 1, 2, \cdots, m \\ j = 1, 2, \cdots, n \end{matrix}$$

이와 같은 식에 의하여 행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 모든 원소에 공통이 되는 요인(factor)이 있으면 그 공통되는 요인을 상수로 표시할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} 9 & 27 \\ 15 & 18 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\times 3 & 3\times 9 \\ 3\times 5 & 3\times 6 \end{bmatrix}$$
$$= 3\begin{bmatrix} 3 & 9 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

1.2.3 행렬의 곱

행렬의 곱셈에서는 피승수 행렬의 차원이 $m \times r$ 이면 승수 행렬의 행의 차수는 r 이 되어야 한다. 즉 피승수 행렬의 열의 수는 승수 행렬의 행의 수와 일치되어야 한다.

예제 1.6

A, B, C 세 행렬 간에는 다음과 같은 곱셈관계가 성립한다.

$$\underset{2\times 3}{\boldsymbol{A}} \cdot \underset{3\times 2}{\boldsymbol{B}} = \underset{2\times 2}{\boldsymbol{C}}$$

$$\underset{2\times 3}{\boldsymbol{A}} \cdot \underset{2\times 3}{\boldsymbol{B}} \neq \boldsymbol{C}$$ (곱셈식이 성립되지 않음).

곱한 결과 얻어진 행렬 $\boldsymbol{C}$의 차원은 피승수 행렬의 행의 수와 승수 행렬의 열의 수가 된다. 위의 예에서 2×3 행렬 $\boldsymbol{A}$와 3×2 행렬 $\boldsymbol{B}$를 곱한 결과 얻어진 행렬 $\boldsymbol{C}$의 차원은 2×2가 된다. 곱셈 순서는 다음과 같다.

$$\begin{array}{ccccc} \boldsymbol{A} & & \boldsymbol{B} & & \boldsymbol{C} \\ \begin{bmatrix} \boxed{a_{11} \quad a_{12} \quad a_{13}} \\ a_{21} \quad a_{22} \quad a_{23} \end{bmatrix} & \cdot & \begin{bmatrix} \boxed{\begin{matrix} b_{11} \\ b_{21} \\ b_{31} \end{matrix}} & \begin{matrix} b_{12} \\ b_{22} \\ b_{32} \end{matrix} \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \end{array}$$

$\boldsymbol{A}$ 행렬의 첫째 행과 $\boldsymbol{B}$ 행렬의 첫째 열을 대응되는 것끼리 곱하여 합하면 $\boldsymbol{C}$ 행렬의 첫째 행과 첫째 열의 원소 c_{11} 이 얻어진다. 즉 다음과 같다.

$$c_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31} \ .$$

같은 방법으로 $\boldsymbol{A}$의 첫째 행과 $\boldsymbol{B}$의 둘째 행을 곱하면 $\boldsymbol{C}$ 행렬의 첫째 행과 둘째 열의 원소 c_{12}가 된다. 즉 다음과 같다.

$$\begin{aligned} c_{12} &= a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32} \\ c_{21} &= a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31} \\ c_{22} &= a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32} \ . \end{aligned}$$

일반적으로 $r \times c$ 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $c \times s$ 행렬 $\boldsymbol{B}$의 곱 $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \boldsymbol{C}$의 차원은 $r \times s$ 이고 $\boldsymbol{C}$의 i 번째 행과 j 번째 열의 원소 c_{ij} 는

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ic}b_{cj}$$

$$= \sum_{k=1}^{c} a_{ik}b_{kj} \ .$$

따라서

$$A \cdot B = \left(\sum_{k=1}^{c} a_{ik}b_{kj}\right), \quad \begin{array}{l} i = 1, \cdots, r \\ j = 1, \cdots, s \ . \end{array}$$

정리 1.2 일반적으로 $A \cdot B \neq B \cdot A$.

정리 1.3 $(A \cdot B)' = B' \cdot A'$.

정리 1.4 모든 정방행렬에 대하여 $A \cdot I = I \cdot A = A$가 성립한다.

정리 1.5 $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$
$C(A + B) = C \cdot A + C \cdot B$.

1.2.4 행렬식

$n \times n$ 정방행렬 $A = (a_{ij})$의 행렬식(determinant)은 $|A|$ 혹은 $\det(A)$로 표시하며, 하나의 실수값으로 표현된다. 3차 행렬까지의 행렬식은 다음과 같은 방법으로 구할 수 있다.

$$|a_{11}| = a_{11}$$

$$(+)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}(-) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$(+)\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}(-) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{32}a_{21}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

그러나 4차 이상의 행렬식은 복잡하게 되는데 $(n\times n)$ 행렬 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$에서 i 번째 행과 j 번째 열을 빼고 나머지 $(n-1)\times(n-1)$ 행렬의 행렬식을 $\boldsymbol{M_{ij}}$ 라고 쓰면 이 $\boldsymbol{M_{ij}}$ 를 원소 a_{ij} 의 소행렬식(minor)이라고 하며 소행렬식 $\boldsymbol{M_{ij}}$ 에 $(-1)^{i+j}$ 를 곱한 값을 $\boldsymbol{A_{ij}}$ 로 놓으면 다음과 같다.

$$\boldsymbol{A_{ij}}=(-1)^{i+j}\boldsymbol{M_{ij}}\ .$$

이 $\boldsymbol{A_{ij}}$ 를 원소 a_{ij} 의 **여인수**(cofactor)라고 한다. 행렬식은 여인수로 표시할 수 있으며 다음과 같이 정의된다.

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{i1}\boldsymbol{A_{i1}}+a_{i2}\boldsymbol{A_{i2}}+\cdots+a_{in}\boldsymbol{A_{in}},\ i=1,2,\cdots,n \quad (i\text{행에 관한 여인수 전개})\\ &= a_{1j}\boldsymbol{A_{1j}}+a_{2j}\boldsymbol{A_{2j}}+\cdots+a_{nj}\boldsymbol{A_{nj}},\ j=1,2,\cdots,n\ .(j\text{열에 관한 여인수 전개})\end{aligned} \quad \textbf{(1.2)}$$

예제 1.7

3차 행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 행렬식을 여인수로 표시하면

$$|\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\\ a_{21}a_{22}a_{23}\\ a_{31}a_{32}a_{33}\end{vmatrix}\begin{aligned}&=a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}\\ &=a_{21}\boldsymbol{A}_{21}+a_{22}\boldsymbol{A}_{22}+a_{23}\boldsymbol{A}_{23}\\ &=a_{31}\boldsymbol{A}_{31}+a_{32}\boldsymbol{A}_{32}+a_{33}\boldsymbol{A}_{33}\end{aligned}$$

그런데

$$\boldsymbol{A}_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})$$

$$\boldsymbol{A}_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix}=(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})$$

$$\boldsymbol{A}_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

이므로,

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}| &= a_{11}\boldsymbol{A}_{11}+a_{12}\boldsymbol{A}_{12}+a_{13}\boldsymbol{A}_{13}\\ &= a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})\end{aligned}$$

$$+ a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31})$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

$$- a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} .$$

따라서 이 결과는 앞에서 계산한 결과와 동일하다.

정리 1.6 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$가 모두 정방행렬이면

$$|\boldsymbol{AB}| = |\boldsymbol{BA}| = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}| .$$

정리 1.7 행렬 $\boldsymbol{A}$가 정방행렬이면

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}'| .$$

정리 1.8 행렬 $\boldsymbol{A}$가 $n \times n$ 정방행렬이면 상수 k에 대하여

$$|k\boldsymbol{A}| = k^n |\boldsymbol{A}| .$$

1.2.5 트레이스

정방행렬 $\boldsymbol{A}$의 트레이스(trace)를 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$와 같이 표시하고 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$는 행렬 $\boldsymbol{A}$의 대각선 원소들의 합을 나타내는 것으로 정의한다. 즉, $n \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$의 트레이스는 다음과 같다.

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} . \tag{1.3}$$

예제 1.8

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \text{이면,}$$

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 1 + 5 + 9 = 15 .$$

정리 1.9 $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$.

$\mathrm{tr}(A \pm B) = \mathrm{tr}(A) \pm \mathrm{tr}(B)$.

$\mathrm{tr}(ABC) = \mathrm{tr}(BCA) = \mathrm{tr}(CAB)$.

정리 1.10 I를 $n \times n$ 단위행렬이라고 하면

$$\mathrm{tr}(I) = \mathrm{n} .$$

정리 1.11 상수 k에 대하여,

$$\mathrm{tr}(kA) = k\,\mathrm{tr}(A) .$$

1.3 특수한 행렬

1.3.1 역행렬

일반적으로 대수학에서 어떤 수의 역수는 둘을 서로 곱하여 1이 되는 성질을 갖는 수이다. 이러한 성질을 행렬에서도 그대로 적용하여 $n \times n$ 정방행렬 A의 행렬식이 0이 아닐 때

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I_n$$

을 만족시키는 A^{-1}가 존재하면 A^{-1}를 A의 **역행렬**(inverse matrix)이라고 한다. 역행렬은 앞에서 살펴본 여인수를 이용하여 구할 수 있다. 행렬 A의 모든 원소에 대응되는 여인수의 행렬을 C라고 놓으면 다음과 같다.

$$C = \begin{bmatrix} A_{11} A_{12} \cdots A_{1n} \\ A_{21} A_{22} \cdots A_{2n} \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ A_{n1} A_{n2} \cdots A_{nn} \end{bmatrix}$$

여기서 A_{ij}는 원소 a_{ij}의 여인수이다.

행렬 A의 역행렬은 여인수의 행렬 C의 전치행렬 C'을 A의 행렬식 $|A|$로 나누면 된다. 즉

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C' \quad . \tag{1.4}$$

3차 행렬 $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$의 역행렬은 다음과 같다.

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}$$

예제 1.9

2차 행렬 $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$의 역행렬을 구하여라.

풀이 A의 여인수행렬 C는 $C = \begin{bmatrix} d & -c \\ -b & a \end{bmatrix}$이므로

식 (1.4)에서

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

정리 1.12 전치행렬 표시와 그 역행렬 표시는 순서를 바꾸어도 된다.

$$(A')^{-1} = (A^{-1})'.$$

정리 1.13 행렬 A와 B가 모두 정방행렬이고, $|A| \neq 0$, $|B| \neq 0$이면

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

정리 1.14 행렬 A의 행렬식 $|A| \neq 0$이면

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|} \quad .$$

정리 1.15 상수 k가 0이 아니고 행렬 $\boldsymbol{A}$가 역행렬이 존재한다면

$$(k\boldsymbol{A})^{-1} = \frac{1}{k}\boldsymbol{A}^{-1}.$$

1.3.2 직교행렬

정방행렬 $\boldsymbol{A}$의 역행렬 $\boldsymbol{A}^{-1}$이 전치행렬 $\boldsymbol{A}'$와 같으면, 즉

$$\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}^{-1} \tag{1.5}$$

이 성립할 때 행렬 $\boldsymbol{A}$를 **직교행렬**(orthogonal matrix)이라고 하며 $\boldsymbol{A}$가 직교행렬이면

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}' = \boldsymbol{A}'\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

가 성립한다.

예제 1.10

$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$가 직교행렬임을 보여라.

풀이 $\boldsymbol{A}$의 역행렬은

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{A}'$$

이므로 $\boldsymbol{A}$는 직교행렬이다.

일반적으로 $n \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$의 각 열벡터를 $a_1, a_2, \cdots, a_n$이라고 하면 행렬 $\boldsymbol{A}$가 직교행렬이기 위한 필요충분조건은

$$a_i' a_j = 0, \text{ 모든 } i \neq j$$

$$a_i{}'a_j = 1,\ \text{모든}\ i = j$$

이며 이 성질은 행 벡터의 경우에도 성립한다.

정리 1.16 모든 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$에 대하여

$$\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P} = \boldsymbol{D},\quad \boldsymbol{D}\text{는 대각행렬} \tag{1.6}$$

이 되는 직교행렬 $\boldsymbol{P}$가 반드시 존재한다.

정리 1.17 직교행렬 $\boldsymbol{P}$에 대하여 다음 관계식이 성립한다.

1) $\mathrm{tr}(\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}) = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$
2) $|\boldsymbol{P}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}| = |\boldsymbol{A}|$
3) $|\boldsymbol{P}| = 1$ 또는 -1

1.3.3 멱등행렬

$n\times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$가 다음과 같은 성질을 만족할 때 행렬 $\boldsymbol{A}$를 **대칭멱등행렬**(symmetric idempotent matrix)이라고 한다.

1) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$
2) $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$.

앞으로는 대칭이라는 말을 빼고 그냥 **멱등행렬**(idempotent matrix)이라고 하겠다. 멱등행렬은 뒤에서 다루게 되는 2차형식(quadratic form)에 대한 통계량의 확률분포 이론을 확인하는 데 중요한 역할을 한다.

예제 1.11

중회귀모형에서 다루게 되는 $n\times p$ 행렬 $\boldsymbol{X}$에서 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$과 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{I} - \boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}'$은 모두 멱등행렬임을 보여라.

풀이

① $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}'$이고 $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}'$이 성립한다.

② $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A} = (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')(\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}')$

$\quad = (\boldsymbol{X}(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X})^{-1}\boldsymbol{X}') = \boldsymbol{A}$

이고

$$\begin{aligned} BB &= [I - X(X'X)^{-1}X'][I - X(X'X)^{-1}X'] \\ &= I - X(X'X)^{-1}X' - X(X'X)^{-1}X' + \\ &\quad X(X'X)^{-1}X'X(X'X)^{-1}X' \\ &= I - X(X'X)^{-1}X' = B. \end{aligned}$$

정리 1.18 두 개의 행렬 A와 B가 모두 멱등행렬이고 $AB = BA$이면 행렬 AB도 멱등행렬이다.

1.4 선형독립과 행렬의 계수

1.4.1 선형독립

k개의 $n \times 1$ 벡터 $C_1, C_2, \cdots, C_k$ 중 하나의 벡터가 나머지 $(k-1)$벡터들의 선형결합으로 다음 두 식 중 하나로 표현될 수 있을 때, 즉

$$C_i = \lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \cdots + \lambda_{i-1} C_{i-1} + \lambda_{i+1} C_{i+1} + \cdots + \lambda_k C_k$$

또는

$$\sum_{i=1}^{k} \lambda_i C_i = 0 . \tag{1.7}$$

식 (1.7)이 상수 $\lambda_i, i = 1, 2, \cdots, i-1, i+1, \cdots, k$가 모두 0이 아닌 경우 벡터 $C_1, C_2, \cdots, C_k$는 **선형종속**(linear dependence) 관계가 있다고 하고, 모두 0인 경우 벡터들은 **선형독립**(linear independence) 관계가 있다고 한다.

예제 1.12

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{cccc} C_1 & C_2 & C_3 & C_4 \end{array} \\ A = & \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 & 1 \\ 2 & 2 & 10 & 6 \\ 3 & 4 & 15 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

행렬 $\boldsymbol{A}$의 열을 벡터들로 생각해 보자. 즉, C_1, C_2, C_3, C_4 벡터에 대하여 $C_3 = 5C_1 + 0C_2 + 0C_4$가 성립하므로 ,즉 λ_i가 모두 0이 아닌 데도 성립하므로 위의 네 벡터는 선형 종속관계에 있다고 말할 수 있다.

1.4.2 행렬의 계수

어떤 행렬 $m \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$에서 선형독립인 열(또는 행)의 최대갯수를 행렬 $\boldsymbol{A}$의 계수(rank)라고 하며, $r(A)$로 표현한다. $p \times q$ 장방행렬(rectangle matrix) $\boldsymbol{A}$에서의 계수는 p 또는 q의 작은 수보다 더 작거나 같다. 예제 1.12에서 행렬 $\boldsymbol{A}$의 계수는 $r(\boldsymbol{A}) = 3$이 됨을 알 수 있다. 왜냐하면 C_3와 C_1은 종속관계에 있으나 C_2나 C_4와는 선형독립관계가 있으므로 계수는 3이 된다. 즉, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_4 = 0$인 경우가 아니므로 $\lambda_1 C_1 + \lambda_2 C_2 + \lambda_4 C_4 = 0$을 만족하는 λ_1, λ_2, λ_4가 존재하지 않는다.

정리 1.19 $r(\boldsymbol{A}') = r(\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}) = r(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')$.

정리 1.20 $r(\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A})$ 또는 $r(\boldsymbol{B})$

$$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B}) \leq r(\boldsymbol{A}) + r(\boldsymbol{B}) .$$

$r(\boldsymbol{A} \vdots \boldsymbol{B})$는 $\boldsymbol{A}$ 행렬의 오른쪽에 $\boldsymbol{B}$ 행렬을 덧붙인 것으로 $m \times (n_1 + n_2)$인 추가행렬을 의미한다. 예를 들면

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{pmatrix}$$

일 때

$$A \vdots B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & 6 & 9 & 10 \end{pmatrix}$$

이다.

$n \times n$ 정방행렬 $\boldsymbol{A}$에서 $r(\boldsymbol{A}) = n$이면, 즉 계수가 차수와 같으면 행렬 $\boldsymbol{A}$를 정칙행렬(nonsingular matrix)이라고 하고, $r(\boldsymbol{A}) < n$이면 비정칙행렬(singular matrix)이라고 한다.

행렬 $\boldsymbol{A}$가 비정칙행렬이면 A^{-1}는 존재하지 않는다. ($|A|=0$)

예제 1.13

$$A = \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} C_1 & C_2 & C_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & -5 \end{bmatrix} \end{array}$$

에서 $2C_1 - C_2 + C_3 = 0$이므로, 즉 $C_3 = 2C_1 - C_2$이므로 선형종속이다. 그러나 C_1과 C_2는 선형독립이므로 $r(A) = 2$이고 행렬 A의 계수는 차수 3보다 작으므로 행렬 A는 비정칙행렬이다.

1.4.3 연립선형방정식(simultaneous linear equations)

미지수 $x_1, x_2, \cdots, x_n$에 대해 다음과 같은 방정식을 생각해 보자.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= c_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad\quad \vdots \quad & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_m \quad . \end{aligned} \tag{1.8}$$

이 방정식을 행렬로 표시하면

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_m \end{bmatrix} \tag{1.9}$$

$$Ax = C \quad .$$

식 (1.9)에서 행렬 A가 정칙행렬이면 역행렬 A^{-1}가 존재하므로 x에 관한 유일한 해(solution)를 구할 수 있다. 즉,

$$A^{-1}Ax = A^{-1}C$$

이므로

$$x = A^{-1}C$$

그러나 A가 비정칙행렬이면 $(r(A) < n)$ 유일한 해는 존재하지 않으나 A의 행렬에 C를 첨가시킨 행렬 $A^* = [AC]$의 계수가 $r(A^*) = r(A)$이면 무수히 많은 해가 존재하며, $r(A^*) < r(A)$이면 해는 존재하지 않는다.

예제 1.14

$$x_1 + x_2 - x_3 = 1$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = -1$$

$$x_1 - x_2 + x_3 = -1$$

에 대하여

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

이므로 $r(A) = 3$이다.

따라서 A는 정칙행렬이므로 유일한 해 $x = A^{-1}C$를 구할 수 있다. 그런데

$$A^* = [AC] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\qquad\qquad A \qquad\quad C$$

이므로 $r(A^*) = 3$이 되어 $r(A^*) = r(A)$이 성립되어 무수히 많은 해가 존재 한다.

1.5 고유치와 고유벡터

$p \times p$ 정방행렬 A의 고유치(eigen value or characteristic root)는 다음과 같은 행렬식 방정식(determinental equation)을 만족시키는 스칼라 λ를 말한다.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=0. \tag{1.10}$$

이 방정식은 λ에 관하여 p차 다항식이므로 행렬 $\boldsymbol{A}$는 p개의 고유치를 가지며 다음과 같은 라플라스(Laplace) 전개에 의하여 특성다항식(characteristic polynomial)으로 표시할 수 있다.

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}|=(-\lambda)^{p}+s_{1}(-\lambda)^{p-1}+s_{2}(-\lambda)^{p-2}+\cdots+s_{p-1}(-\lambda)+|\boldsymbol{A}| \tag{1.11}$$

식 (1.11)에서 s_i는 $i\times i$ 소행렬식의 모든 합이다. 따라서 s_1은 행렬 $\boldsymbol{A}$의 대각원소들의 합이 된다. 즉, $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$이다.

정리 1.21 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$의 고유치는 모두 실수(real number)이다.

정리 1.22 $n\times n$ 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$의 고유치를 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$이라고 하면 다음 식이 성립한다.

① $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}$

② $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}}\lambda_{\mathrm{i}}^{2}$

③ $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A}^{-1})=\sum_{i=1}^{n}\lambda_{i}^{-1}$

④ $|\boldsymbol{A}|=\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n=\prod_{i=1}^{n}\lambda_i$.

정리 1.23 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$의 0이 아닌 고유치의 개수는 $r(\boldsymbol{A})$와 같다.

정리 1.24 멱등행렬의 고유치는 0 또는 1이다. 따라서

$$\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}).$$

대칭행렬 $\boldsymbol{A}$의 어떤 고유치 λ_i에 대하여

$$(\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I})\boldsymbol{x}=0,\ \text{즉}\ \boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\lambda_i\boldsymbol{x}$$

와 같은 연립방정식을 만족시키는 벡터 $\boldsymbol{x}$를 주어진 λ_i의 **고유벡터**(eigen vector or characteristic vector)라고 하며 p개의 고유치에 대하여 p개의 고유벡터가 존재한다.

예제 1.15

$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ 의 고유치와 고유벡터를 구하여라.

풀이 식 (1.11)에서

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}\,|=(-\lambda)^3+s_1(-\lambda)^2+s_2(-\lambda)+|\boldsymbol{A}|$$

여기서 $s_1 = \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}) = 6$이고

$s_2 = 2\times 2$ 소행렬식의 합

$= 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 9$

$|\boldsymbol{A}| = 4$

따라서

$$|\boldsymbol{A}-\lambda \boldsymbol{I}\,|=(-\lambda)^3+6(-\lambda)^2+9(-\lambda)+4=0$$

를 풀면 고유치는

$$\lambda = 1,\ 1,\ 4\ .$$

$\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 4$ 등 3개의 고유치 중 $\lambda_3 = 4$에 대한 고유벡터를 구해 보면

$$(\boldsymbol{A}-\lambda_3\boldsymbol{I}\,)\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2x_1+x_2+x_3 \\ x_1-2x_2+x_3 \\ x_1+x_2-2x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

이 식에서 $x_3 = a$, a는 0이 아닌 임의의 실수라고 하면 $x_2 = a$이고 $x_1 = a$이다. 즉, $\boldsymbol{x}' = (a\ \ a\ \ a)$는 $\lambda_3 = 4$의 고유벡터이다.

1.6 2차형식

$\boldsymbol{y}$는 i 번째 원소가 y_i 인 $n \times 1$ 벡터이고 $n \times n$ 대칭행렬 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ 에 대하여

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} y_i y_j a_{ij} \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ii} y_i^2 + 2\sum_{i=1}^{n-1}\sum_{j=i+1}^{n} a_{ij} y_i y_j \end{aligned} \tag{1.12}$$

를 $\boldsymbol{y}$ 의 2차형식(quadratic form)이라고 한다.

예 3×3 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 2차형식은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} &= (y_1\ y_2\ y_3)\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= a_{11}y_1^2 + a_{22}y_2^2 + a_{33}y_3^2 + 2(a_{12}y_1y_2 + a_{13}y_1y_3 + a_{23}y_2y_3) \end{aligned}$$

이때 2차형식 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 의 계수는 행렬 $\boldsymbol{A}$ 의 계수로 정의되며 가장 간단한 경우의 2차형식은 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = a_{11}\,y^2$ 으로 주어진다. $\boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}$ 인 모든 벡터 $\boldsymbol{y}$ 에 대하여 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} > 0$ 가 성립하면 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$ 와 2차형식 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 를 **양정치**(positive definite)라고 하고 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \geqq 0$ 이 성립하면 $\boldsymbol{A}$ 와 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 를 **양반정치**(positive semidefinite)라고 한다. 이때는 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 0$ 를 만족시키는 0이 아닌 벡터 $\boldsymbol{y}$ 가 존재하는 경우이다. 또한 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} < 0$ 이 성립하면 $\boldsymbol{A}$ 와 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 를 **음정치**(negative definite)라고 하고 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \leqq 0$ 이 성립하면 $\boldsymbol{A}$ 와 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$ 를 **음반정치**(negative semidefinite)라고 한다.

예제 1.16

다음의 2차형식

$$\begin{aligned} \boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} &= (y_1 y_2 y_3)\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \\ &= 2y_1^2 + 2y_2^2 + 2y_3^2 + 2\,y_1y_2 + 2\,y_1y_3 + 2\,y_2y_3 \end{aligned}$$

$$= (y_1+y_2)^2 + (y_1+y_3)^2 + (y_2+y_3)^2$$

$$> 0$$

에서 $\boldsymbol{y}' \neq 0$일 때 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} > 0$이 항상 성립하므로 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$는 양정치가 된다.

정리 1.25 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$가 양정치행렬이 되기 위한 필요충분조건은 어떤 정칙행렬 $\boldsymbol{C}$가 존재하여 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}'$와 같이 되는 것이다.

정리 1.26 $n \times m$ 행렬 $\boldsymbol{A}$의 계수가 $m(m < n)$일 때 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$는 양정치행렬이고 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$은 양반정치행렬이다.

정리 1.27 $n \times m(m < n)$ 행렬 $\boldsymbol{A}$의 계수가 $k(k < m)$일 때 $\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}'$은 모두 양반정치행렬이다.

정리 1.28 양(음)정치행렬 $\boldsymbol{A}$의 고유치는 모두 양(음)수이고 양(음)반정치행렬 $\boldsymbol{B}$의 고유치는 0 또는 양(음)수이다.

정리 1.29 어떤 정칙행렬 $\boldsymbol{C}$에 대하여 만약 행렬 $\boldsymbol{A}$가 양정치이면 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$도 양정치이고 만약 $\boldsymbol{A}$가 양반정치이면 $\boldsymbol{C}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{C}$도 양반정치이다.

정리 1.30 $n \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$가 양정치행렬이기 위한 필요충분조건은 다음과 같다.

$$a_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \cdots, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0$$

1.7 행렬의 분할

행렬의 행과 열을 몇 개씩 묶어서 다루는 것이 행렬의 계산을 용이하게 하는 경우가 많다. 예를 들어 $m \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$를 다음과 같이 분할(partition)하였다고 하자.

$$\boldsymbol{A}_{m \times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{B}_{m \times n} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix} \tag{1.13}$$

여기서 $\boldsymbol{A}_{11}$은 $m_1 \times n_1$, $\boldsymbol{A}_{12}$는 $m_1 \times n_2$, $\boldsymbol{A}_{21}$은 $m_2 \times n_1$, $\boldsymbol{A}_{22}$는 $m_2 \times n_2$ 행렬이며 $m_1 + m_2 = m$, $n_1 + n_2 = n$이다. 마찬가지로 행렬 $\boldsymbol{B}$를 분할하여 $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}$를 분할된 행렬의 식으로 표현할 수 있다. 즉,

$$\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{B}_{22} \\ \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{11} + \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{B}_{21} & \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{B}_{12} + \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{B}_{22} \end{bmatrix}$$

예제 1.17

$$\boldsymbol{A} = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \quad \boldsymbol{B} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ \hline 3 & 1 \end{array}\right]$$

에서 $\boldsymbol{A}_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A}_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{A}_{21} = [1\ 1\ ]$ $\boldsymbol{A}_{22} = [2\ ]$

이고 $\boldsymbol{B}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ $\boldsymbol{B}_2 = [3\ \ 1\ ]$일 때

$$\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} + \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_{12} + \boldsymbol{B}_2 \\ \boldsymbol{A}_{21} + \boldsymbol{B}_1 & \boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{B}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 7 & -1 \\ 9 & 3 \end{bmatrix}$$

분할된 행렬을 이용하여 역행렬을 구할 수 있으며 행렬 $\boldsymbol{A}$의 전치행렬은

$$\boldsymbol{A}' = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11}' & \boldsymbol{A}_{21}' \\ \boldsymbol{A}_{12}' & \boldsymbol{A}_{22}' \end{bmatrix}$$

이다.

$n \times n$ 행렬 $\boldsymbol{A}$가 정칙이고 (1.13)과 같이 분할되었을 때 $\boldsymbol{A}_{11}$과 $\boldsymbol{A}_{22}$가 모두 정방행렬이면 $\boldsymbol{A}$의 역행렬은 다음과 같이 주어진다.

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{21} \\ \boldsymbol{A}_{12} & \boldsymbol{A}_{22} \end{bmatrix}^{-1}$$

$$= \begin{bmatrix} (\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1} & -(\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \\ -\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1} + \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}(\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21})^{-1}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \boldsymbol{G} & -\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \\ -\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{G} & \boldsymbol{A}_{22}^{-1} + \boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{G}\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1} \end{bmatrix} \tag{1.14}$$

여기서 $\boldsymbol{G} = (\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\,\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\,\boldsymbol{A}_{21})^{-1}$.

식 (1.14)는 상당히 복잡해 보이나 계산은 차수가 적어지므로 훨씬 쉽게 된다. 또한 행렬 $\boldsymbol{A}$의 행렬식은 $\boldsymbol{A}_{11}$이 정칙일 때

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} \boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12} \\ \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22} \end{vmatrix} = |\boldsymbol{A}_{11}||\boldsymbol{A}_{22} - \boldsymbol{A}_{21}\ \boldsymbol{A}_{11}^{-1}\boldsymbol{A}_{12}| \tag{1.15}$$

이고 만약 $\boldsymbol{A}_{22}$가 정칙이면

$$|\boldsymbol{A}| = |\boldsymbol{A}_{22}|\,|\boldsymbol{A}_{11} - \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^{-1}\boldsymbol{A}_{21}| \tag{1.16}$$

이 된다.

1.8 행렬의 미분

$p \times 1$ 벡터 $\boldsymbol{x}' = (x_1 x_2 \cdots x_p)$와 $p \times 1$ 벡터 $\boldsymbol{a}' = (a_1 \cdots a_p)$에 대하여 $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x}'\boldsymbol{a}$라고 놓으면, 즉

$$\boldsymbol{z} = (x_1 x_2 \cdots x_p)\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{p} x_i a_i$$

$\boldsymbol{z}$의 $\boldsymbol{x}$에 대한 편도함수(partial derivative)는 다음과 같이 주어진다.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{z}}{\partial \boldsymbol{x}} &= \frac{\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{a})}{\partial \boldsymbol{x}} \\ &= \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{a})}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(\boldsymbol{x}'\boldsymbol{a})}{\partial x_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = \boldsymbol{a} \end{aligned} \tag{1.17}$$

또한 2차형식 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$의 $\boldsymbol{y}$에 대한 편도함수는 $\boldsymbol{A}$가 대칭행렬일 때

$$\begin{aligned} \frac{\partial(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{\partial y_k} &= \frac{\partial\left(\sum_{i=1}^{p} y_i^2 a_{ii} + 2\sum_{i=1}^{p-1}\sum_{j=i+1}^{p} y_i y_j p_{ij}\right)}{\partial y_k} \\ &= 2y_k a_{kk} + 2\sum_{i=1, i\neq k}^{p} y_i a_{ki} \\ &= 2\sum_{i=1}^{p} y_i a_{ki} = 2\boldsymbol{a}_k \boldsymbol{y} \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{\partial(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{y}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{\partial y_p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\boldsymbol{a}_1\boldsymbol{y} \\ 2\boldsymbol{a}_2\boldsymbol{y} \\ \vdots \\ 2\boldsymbol{a}_p\boldsymbol{y} \end{bmatrix}$$

$$= 2\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} \ . \qquad \textbf{(1.18)}$$

만약 $\boldsymbol{A}$가 대칭행렬이 아니면

$$\frac{\partial(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{\partial\boldsymbol{y}} = (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}')\boldsymbol{y} \ .$$

연습문제

1.1 다음의 행렬들에 대하여 $A+B$, $A-B$, AC, AB', $B'A$를 구하여라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 2 & 5\\ 3 & 6\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 5\\ 1 & 4\\ 2 & 3\end{bmatrix},\qquad \boldsymbol{C}=\begin{bmatrix}3 & 6 & 1\\ 5 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

1.2 다음 행렬의 역행렬을 여인수행렬을 이용하여 구하여라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 3 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{bmatrix}$$

1.3 다음 행렬에 대하여 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}')=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}'\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}')$이 됨을 보여라.

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3\\ 6 & 1 & 4\\ 2 & -7 & -8\end{bmatrix}$$

1.4 두 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$에 대하여

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4\\ 6 & -3 & -1\\ 8 & 1 & 7\end{bmatrix}\qquad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4\\ 2 & 2 & 1\\ 4 & 3 & 5\end{bmatrix}$$

[정리 1.2] [정리 1.19], [정리 1.20]이 성립함을 보여라.

1.5 연습문제 1.4의 행렬 $\boldsymbol{A}$와 $\boldsymbol{B}$에 대하여 [정리 1.6], [정리 1.7], [정리 1.9]가 성립함을 보여라.

1.6 다음 행렬이 직교행렬임을 보여라.

$$C = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

1.7 다음 방정식의 해를 구하여라.

$$2x_1 - x_2 + x_3 = 2$$

$$x_1 + 4x_2 - 2x_3 = -1$$

$$2x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$

1.8 다음의 행렬에서

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

① 행렬 $\boldsymbol{A}$가 멱등행렬임을 보여라.

② $\boldsymbol{A}$의 고유치를 구하고 $\mathrm{tr}(\boldsymbol{A})$, $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})$를 구하여 [정리 1.21], [정리 1.22], [정리 1.23], [정리 1.24]가 성립함을 보여라.

1.9 다음의 2차형식

$$\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = 6y_1^2 + 3y_2^2 + 4y_1y_2 + y_3^2 + 2y_1y_3 + y_4^2 + y_1y_4 + 2y_2y_4$$

에서 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$를 구하고, $\dfrac{\partial(\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y})}{\partial \boldsymbol{y}}$를 구하여라.

1.10 연습문제 1.8에서 2차형식 $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y}$가 양정치행렬인지 양반정치행렬인지를 결정하여라.

1.11 $p \times 1$ 벡터 $\boldsymbol{y}' = (y_1 y_2 \cdots y_p)$에 대하여 다음의 2차형식에서 대칭행렬 $\boldsymbol{A}$를 구하여라.

① $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \left(\dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_i\right)^2$

② $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{p} y_i^2$

③ $\boldsymbol{y}'\boldsymbol{A}\boldsymbol{y} = \sum_{i=1}^{p} y_i^2 - p\bar{y}^2, \quad \bar{y} = \dfrac{1}{p}\sum_{i=1}^{p} y_i$