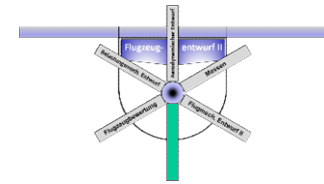


Willkommen zur Lehrveranstaltung

Flugzeugentwurf II



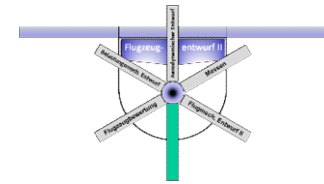
Andreas Bardenhagen
Andreas Gobbin



G Flugleistungen

4 Reichweite und Flugdauer

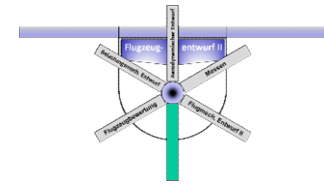
- Die eigentliche Transportarbeit findet im Reiseflug statt.
- Dabei handelt es sich um den Teil einer Transportmission, in dem mit optimalen, stationären oder quasi-stationären Betriebsbedingungen über längere Zeit hinweg geflogen wird.
- Es gibt dabei, je nach Anwendungsgebiet, unterschiedliche Arten für die Optimalbedingungen.
- Es kann dabei auf drei Arten geflogen werden und zwar mit
 1. konstanter Flughöhe, konstantem Anstellwinkel (bzw. Auftriebsbeiwert) und **variabler Geschwindigkeit**,
 2. konstanter Geschwindigkeit, konstantem Anstellwinkel und **variabler Höhe** sowie
 3. konstanter Höhe, konstanter Geschwindigkeit und **variablem Anstellwinkel**



G Flugleistungen

4 Reichweite und Flugdauer

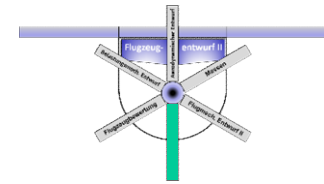
- Die unterschiedlichen Reiseflugstrategien resultieren in verschiedenen Flugprogrammen mit unterschiedlichen Optimalparametern.
- Während der Flugfall 2 ($H = \text{var.}$) die wirtschaftlichsten Ergebnisse bringt, wird in der Praxis des Luftfahrtbetriebs eher nach der Strategie 3 ($v = \text{konst.}, H = \text{konst.}$) verfahren.
- Die heutigen Flugsicherungssysteme basieren auf der Separierung des Verkehrs mittels einer Höhenstaffelung bei festgelegter Flugroute.
- Der ständige, undefinierte Wechsel von Höhenstufen wie beim kontinuierlich verlaufenden “cruise climb” (Fall 2) lässt sich in diesem Flugsicherungssystem nur schlecht kontrollieren.



G Flugleistungen

4 Reichweite und Flugdauer

- Es wird vorzugsweise in einem gemischten Modus geflogen:
 - Die Anfangsreise Flughöhe (initial cruise altitude), bei der eine Reststeigfähigkeit von 300 ft/min gesichert sein muss, wird zunächst so lange konstant gehalten, bis durch das verringerte Fluggewicht das Steigleistungspotential zur Erreichung der nächsten erlaubten Höhenstufe (4000 ft höher mit 300 ft/min Reststeigfähigkeit) vorhanden ist.
 - Dann wird auf die nächste reichweitenoptimale Höhe gestiegen.
- Durch diese treppenförmige Flugbahn wird eine Annäherung an die optimale Flugbahn des Flugfalls 2 erzielt.
- Der Flugfall 1 ($\alpha = \text{konst.}$) wird in der Praxis weniger häufig angewendet, da Pilot und auch Autopilot den Anstellwinkel schlechter regeln können als die Fluggeschwindigkeit (Fall 3).



G Flugleistungen

4.1 Grundgleichung des Reichweitenfluges

- Die in einem Zeitintervall mit einer bestimmten Geschwindigkeit zurückgelegte Strecke ist allgemein $dR = v \, dt$. Damit ergibt sich in einem Zeitintervall

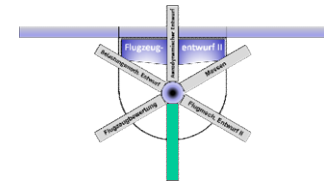
$$R(t) = \int_0^{t_R} v(t) \cdot dt$$

- Infolge des dabei verbrauchten Kraftstoffs erfährt das Flugzeug eine Gewichtsabnahme

$$dG = -b_s \cdot S(t) \cdot g \cdot dt$$

- Damit ergibt sich für die pro Kraftstoffeinheit geflogene Zeit

$$dt = -\frac{dG}{b_s \cdot S(t) \cdot g}$$



G Flugleistungen

4.1 Grundgleichung des Reichweitenfluges

- Die pro Kraftstoffeinheit zurückgelegte Wegstrecke kann über das Gewichtsintervall ausgedrückt werden (fuel mileage)

$$dR = -\frac{v}{b_s \cdot S(t) \cdot g} \cdot dG$$

- Das Anfangsgewicht für einen Streckenflug beträgt

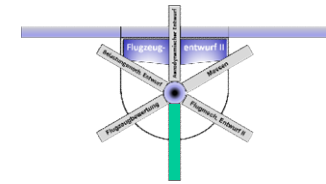
$$G_a = G_A - G_{K_{steig}} - G_{K_{start}}$$

- Damit wird die Reichweitengleichung zu

$$R = -\int_{G_a}^{G_e} \frac{v}{b_s \cdot S \cdot g} \cdot dG$$

- Mit dem horizontalen Kräftegleichgewicht $\varepsilon = S/G$ und nach Vertauschen der Integrationsgrenzen folgt

$$R = \int_{G_e}^{G_a} \frac{v}{b_s \cdot \varepsilon \cdot G \cdot g} \cdot dG$$



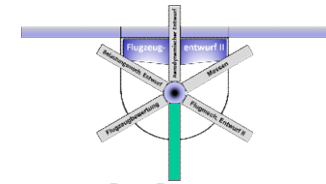
G Flugleistungen

4.1 Grundgleichung des Reichweitenfluges

- Verwenden des vertikalen Kräftegleichgewicht als Bedingung für die Geschwindigkeit v und der Definition von ε ergibt:

$$R = \int_{G_e}^{G_a} \frac{\sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{c_A}}}{b_s \cdot G \cdot g} \cdot \frac{c_A}{c_w} \cdot dG \quad \text{bzw.} \quad R = \int_{G_e}^{G_a} \frac{\sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{F}}}{b_s \cdot g \cdot G^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{\sqrt{c_A}}{c_w} \cdot dG$$

- Für verschiedene Voraussetzungen hinsichtlich der Flughöhe, dem Auftriebsbeiwert und der Geschwindigkeit ergeben sich bei der Integration unterschiedliche Lösungen.



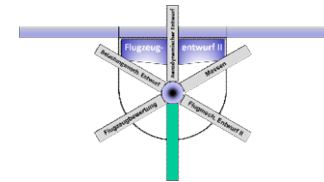
G Flugleistungen

4.1.1 Reichweite bei konstanter Flughöhe und Anstellwinkel

- Bei **konst. Flughöhe** und **konst. Anstellwinkel** ($c_A = \text{konst.}$)
– also **Fall 1** - ist der Schub proportional zum Gewicht und die Geschwindigkeit proportional zur Wurzel des Gewichts.
- Schub und Geschwindigkeit nehmen während des Fluges ständig ab. Unter der Voraussetzung, dass der spezifische Verbrauch unter diesen Bedingungen konstant bleibt, ergibt sich:

$$R = \frac{\sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{F}}}{b_s \cdot g} \cdot \frac{\sqrt{c_A}}{c_W} \cdot \int_{G_e}^{G_a} \frac{1}{\sqrt{G}} \cdot dG = \frac{2}{b_s \cdot g} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G_a}{F}} \cdot \frac{\sqrt{c_A}}{c_W} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{G_e}{G_a}}\right)$$

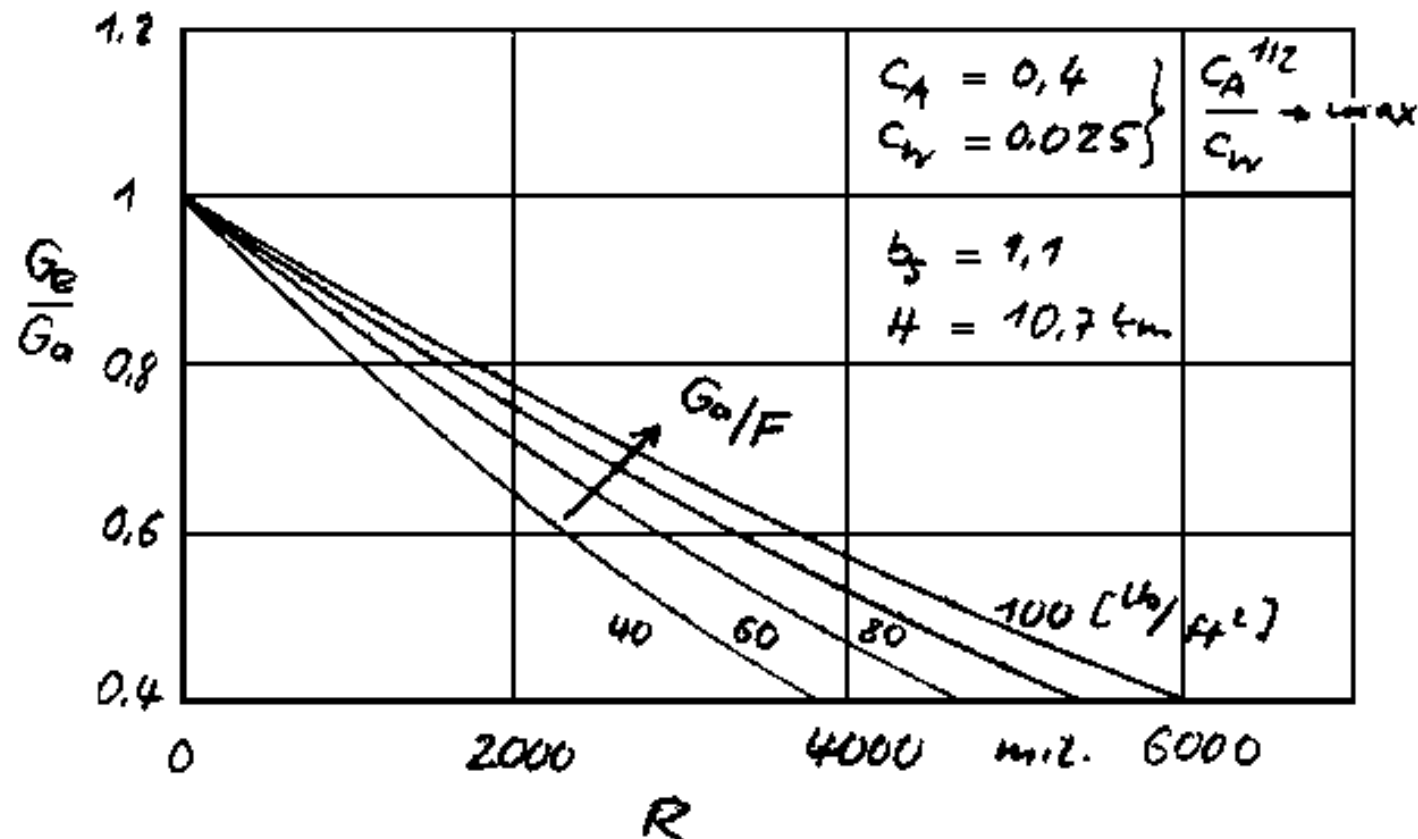
- D.h., bei konstanter Flughöhe und Anstellung wird die maximale Reichweite erzielt, wenn mit einer Geschwindigkeit geflogen wird, die dem maximalen Wert von $\sqrt{c_A}/c_W$ entspricht.

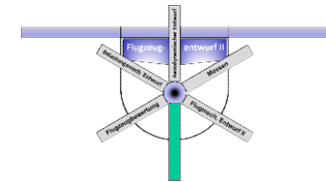


G Flugleistungen

4.1.1 Reichweite bei konstanter Flughöhe und Anstellwinkel

- Weiterhin ist die Reichweite abhängig mit $\sqrt{1/\rho}$ von der Flughöhe, der Triebwerksgüte mit $1/b_s$ und der Flächenbelastung mit $\sqrt{G_a/F}$ sowie dem Gewichtsverhältnis mit $\sqrt{G_e/G_a}$.





G Flugleistungen

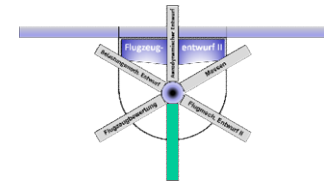
4.1.2 Reichweite mit konst. Geschwindigkeit und Anstellwinkel

- Bleiben **Reisefluggeschwindigkeit** und **Auftriebsbeiwert** beim Reichweitenflug **konstant** – also **Fall 2** – sind Schub und Dichte proportional zum Gewicht. Das Verhältnis des Gewichts zur Dichte bleibt jedoch konstant:

$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho_a} \cdot \frac{G_a}{F} \cdot \frac{1}{c_{A_a}}} \quad \text{mit der Dichte } \rho = \rho_a \cdot \frac{G}{G_a}$$

- D.h., dass das Flugzeug mit konstanter Bahngeschwindigkeit und gleichbleibender Anstellung ständig steigt (Cruise climb) und die Reichweitengleichung folgenden Aufbau hat:

$$R = \sqrt{\frac{2}{\rho_a} \cdot \frac{G_a}{F} \cdot \frac{1}{c_{A_a}}} \cdot \frac{1}{b_s \cdot \varepsilon \cdot g} \cdot \int_{G_e}^{G_a} \frac{dG}{G}$$



G Flugleistungen

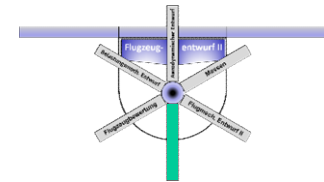
4.1.2 Reichweite mit konst. Geschwindigkeit und Anstellwinkel

- Dieser Lösung ist als **Breguet'sche Reichweitenformel** bekannt:

$$R = \sqrt{\frac{2}{\rho_a} \cdot \frac{G_a}{F} \cdot \frac{1}{c_{A_a}}} \cdot \frac{1}{b_S \cdot \varepsilon \cdot g} \cdot \ln\left(\frac{G_a}{G_e}\right)$$

- bzw.

$$R = \frac{v}{b_S \cdot \varepsilon \cdot g} \cdot \ln\left(\frac{G_a}{G_e}\right)$$



G Flugleistungen

4.1.3 Reichweite mit konst. Geschwindigkeit und Flughöhe

- Der Flug mit **konstanter Höhe** und **konstanter Geschwindigkeit** entspricht **Fall 3**.
- Hier ist der Auftriebsbeiwert proportional zum Gewicht. Der Schub ist proportional zum Gewicht multipliziert mit dem Verhältnis c_W/c_A . Es gilt folglich

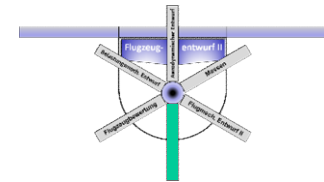
$$c_A = c_{A_a} \cdot \frac{G}{G_a}$$

- und mit der quadratischen Polarennäherung

$$c_W = c_{W_0} + \frac{c_{A_a}^2}{\pi \cdot \Lambda \cdot e} \cdot \left(\frac{G}{G_a} \right)^2$$

- Die Reichweitengleichung lautet deshalb

$$R = \frac{v}{b_s \cdot g} \cdot \int_{G_e}^{G_a} \frac{1}{G \cdot \epsilon} \cdot dG$$



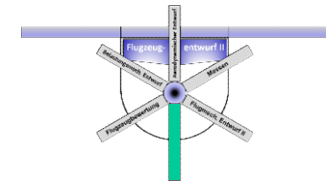
G Flugleistungen

4.1.3 Reichweite mit konst. Geschwindigkeit und Flughöhe

- Man erhält dafür die Lösung

$$R = \frac{v}{b_s \cdot g \cdot \sqrt{\frac{c_{w_0}}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}}} \cdot \arctan \left(\frac{\frac{G_a - G_e}{q \cdot F} \cdot \sqrt{\frac{1}{c_{w_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}}}{1 + \frac{G_a \cdot G_e}{q^2 \cdot F^2} \cdot \frac{1}{c_{w_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}} \right)$$

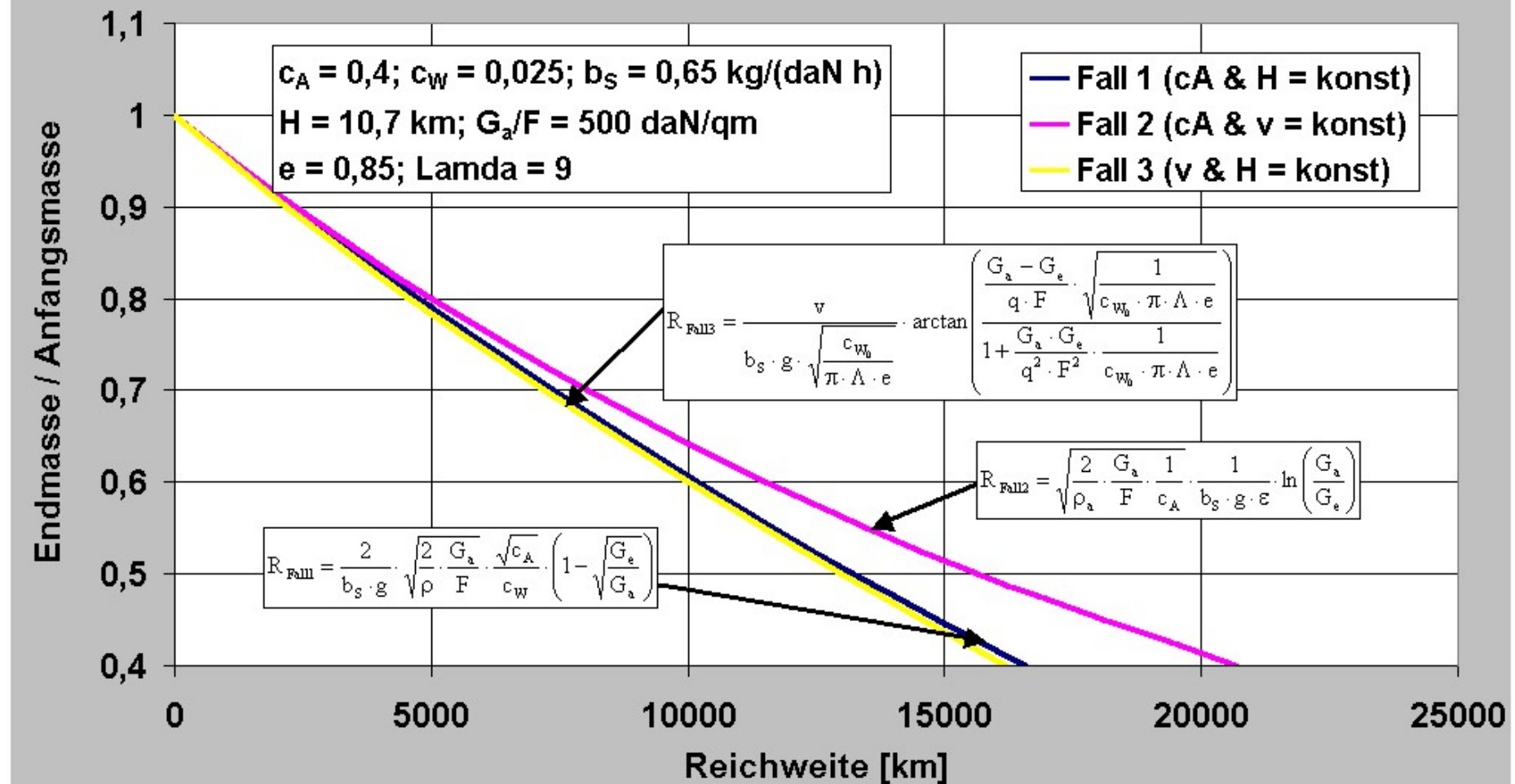
- Das Flugzeug fliegt in diesem Fall mit veränderlicher Anstellung und damit mit veränderlichem Widerstand und veränderlicher Gleitzahl.

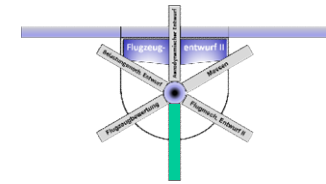


G Flugleistungen

4.1.4 Vergleich der Reichweitenstrategien

Vergleich der Reichweitenstrategien





G Flugleistungen

4.1.5 Reichweite des Propellerflugzeugs

- Für den Propellerantrieb hängt der Kraftstoffverbrauch von der Motorleistung mit dem leistungsbezogenen Brennstoffverbrauch in der Einheit (kg/kW · h) ab:

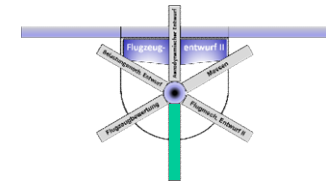
$$\frac{dm_K}{dt} = b_N \cdot N$$

- Mit der differentiellen Strecke

$$dR = v \cdot dt = -\frac{v}{b_N \cdot N} \cdot dm$$

- ergibt sich die Reichweite zu

$$R = \int_{G_e}^{G_a} \frac{v}{b_N \cdot N \cdot g} \cdot dG$$



G Flugleistungen

4.1.5 Reichweite des Propellerflugzeugs

- Werden erforderliche Leistung für den unbeschleunigten Flug

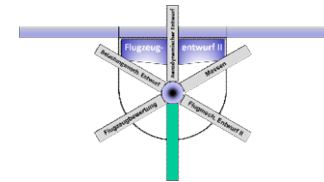
$$N = \frac{W \cdot v}{\eta} \quad \text{und} \quad W = \frac{c_W}{c_A} \cdot G$$

- eingefügt, ergibt sich

$$R = \int_{G_e}^{G_a} \frac{\eta}{b_N \cdot W \cdot g} \cdot dG = \int_{G_e}^{G_a} \frac{\eta}{b_N \cdot G \cdot g} \cdot \frac{c_A}{c_W} \cdot dG$$

- Für die praktikable Annahmen von konstantem Brennstoffverbrauch, Wirkungsgrad und Auftriebsbeiwert folgt eine der Breguet-Gleichung entsprechende Lösung:

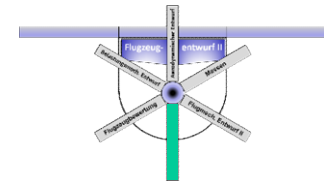
$$R = \frac{\eta}{b_N \cdot \varepsilon \cdot g} \cdot \ln \left(\frac{G_a}{G_e} \right)$$



G Flugleistungen

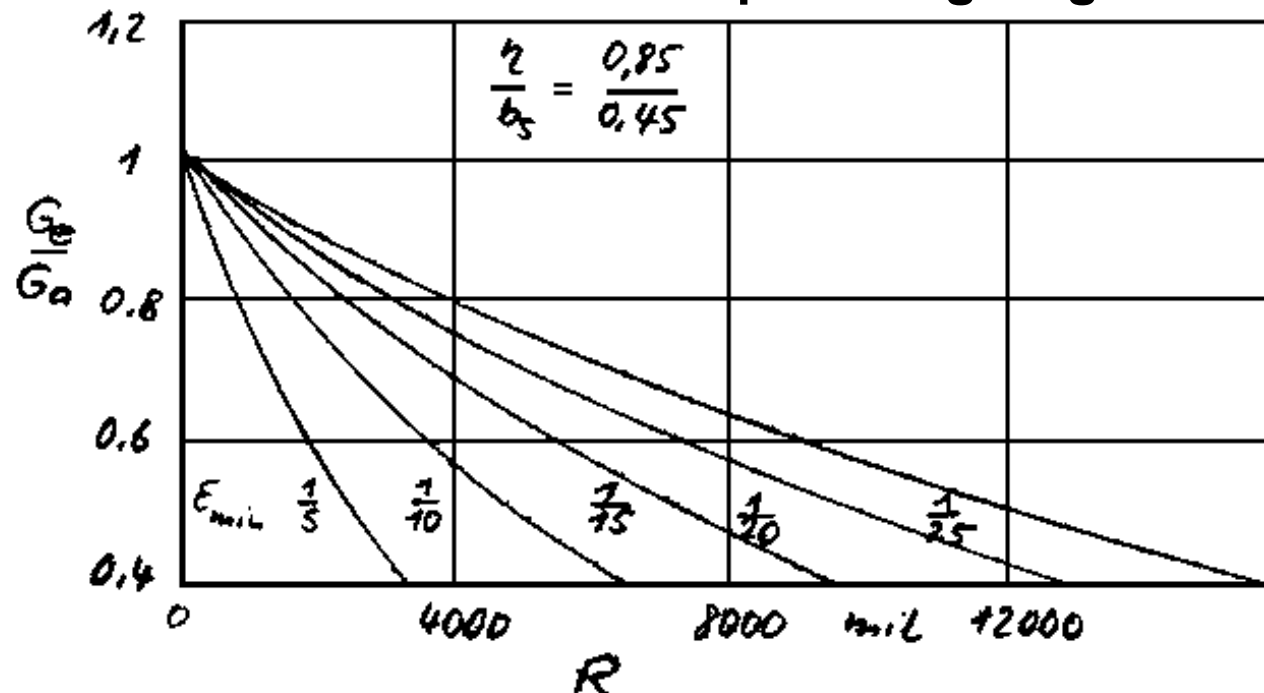
4.1.5 Reichweite des Propellerflugzeugs

- Im Gegensatz zu den strahlgetriebenen Flugzeugen ist die maximale Reichweite nicht bei $\left(\sqrt{c_A}/c_W\right)_{\max}$, sondern bei $\left(c_A/c_W\right)_{\max} = \varepsilon_{\min}$.
- Der Brennstoffverbrauch hat sein Minimum beim besten Wirkungsgrad und die Kraftstoffzuladung sollte so groß wie möglich sein.

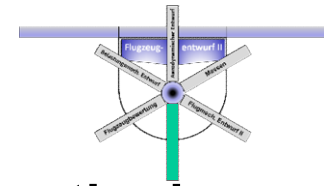


G Flugleistungen

4.1.5 Reichweite des Propellerflugzeugs



- Im Vergleich zum TL-Antrieb nimmt der Kraftstoffverbrauch zum Ende des Fluges hin infolge der reduzierten Leistungsanforderung bei kleinerem Gewicht stärker ab.
- Eine Erhöhung des Endgewichts (z.B. durch größeres Strukturgewicht oder mehr Ausrüstung) erfordert ein proportional größeres Kraftstoffmehrgewicht, wenn die Auslegungsreichweite gleich sein soll.



G Flugleistungen

4.2. Reichweitenberechnung mittels Energiehöhenmethode

- Auch die Energiehöhenmethode ist zur Berechnung der Reichweite anwendbar. Mit H_u als unterem Heizwert des Kraftstoffs folgt

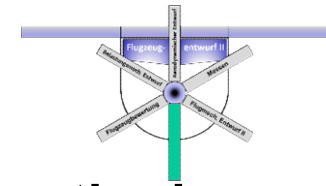
– aus der Energiebilanz $G \cdot d\left(\frac{E}{G}\right) = \eta \cdot H_u \cdot dm_k - W \cdot v \cdot dt$

- und anschließend mit $v \cdot dt = dR$:

$$dR = \frac{\eta \cdot H_u}{W} \cdot dm_k - \frac{G}{W} \cdot d\left(\frac{E}{G}\right)$$

- Mit den Beziehungen $A = G$, $dG = -dG_k$ und $\varepsilon = \frac{W}{A}$ wird daraus

$$dR = -\frac{1}{\varepsilon} \cdot \left[\frac{\eta \cdot H_u}{g} \cdot \frac{dG}{G} + d\left(\frac{E}{G}\right) \right]$$



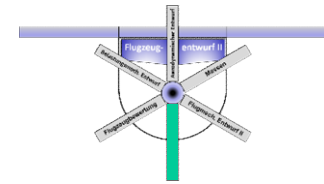
G Flugleistungen

4.2. Reichweitenberechnung mittels Energiehöhenmethode

- Mit $\eta = \frac{V}{b_s \cdot H_u}$
- erhält man schließlich

$$R = -\frac{V}{\varepsilon \cdot b_s \cdot g} \cdot \int_{G_a}^{G_e} \frac{dG}{G} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \int_{\left(\frac{E}{G}\right)_a}^{\left(\frac{E}{G}\right)_e} d\left(\frac{E}{G}\right)$$
- Integration unter Annahme konstanten Wirkungsgrades und konstanter Gleitzahl führt zur bekannten Breguet'schen Reichweitengleichung
- Diese ist jetzt durch einen energiehöhenabhängigen Term erweitert:

$$R = \frac{V}{b_s \cdot \varepsilon \cdot g} \cdot \ln \frac{G_a}{G_e} - \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left[\left(\frac{E}{G}\right)_e - \left(\frac{E}{G}\right)_a \right]$$
- Der zusätzliche Summand ist nur dann von Bedeutung, wenn während des Reiseflugs große Änderungen des Energieniveaus (Geschwindigkeit, Höhe) auftreten.



G Flugleistungen

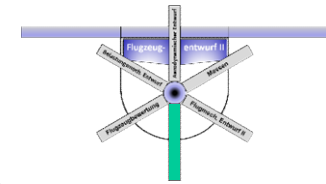
4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Für die Bestimmung der hinsichtlich maximaler Flugdauer bzw. Reichweite optimalen, gewichts- und höhenabhängigen Fluggeschwindigkeiten sind die **gewichtsspezifischen Werte für den momentanen Flugzustand** zu betrachten.
- Mit der Bewegungsgleichung für die zeitliche Änderung des Gewichts ist die gewichtsbezogene, momentane Flugdauer

$$-\frac{dt}{dG} = \frac{1}{b_s \cdot S \cdot g}$$

- Mit der Ableitung der momentanen Reichweite X nach der Zeit ist die spezifische Reichweite oder auch Kraftstoffeffizienz (fuel mileage): $\frac{dX}{v}$

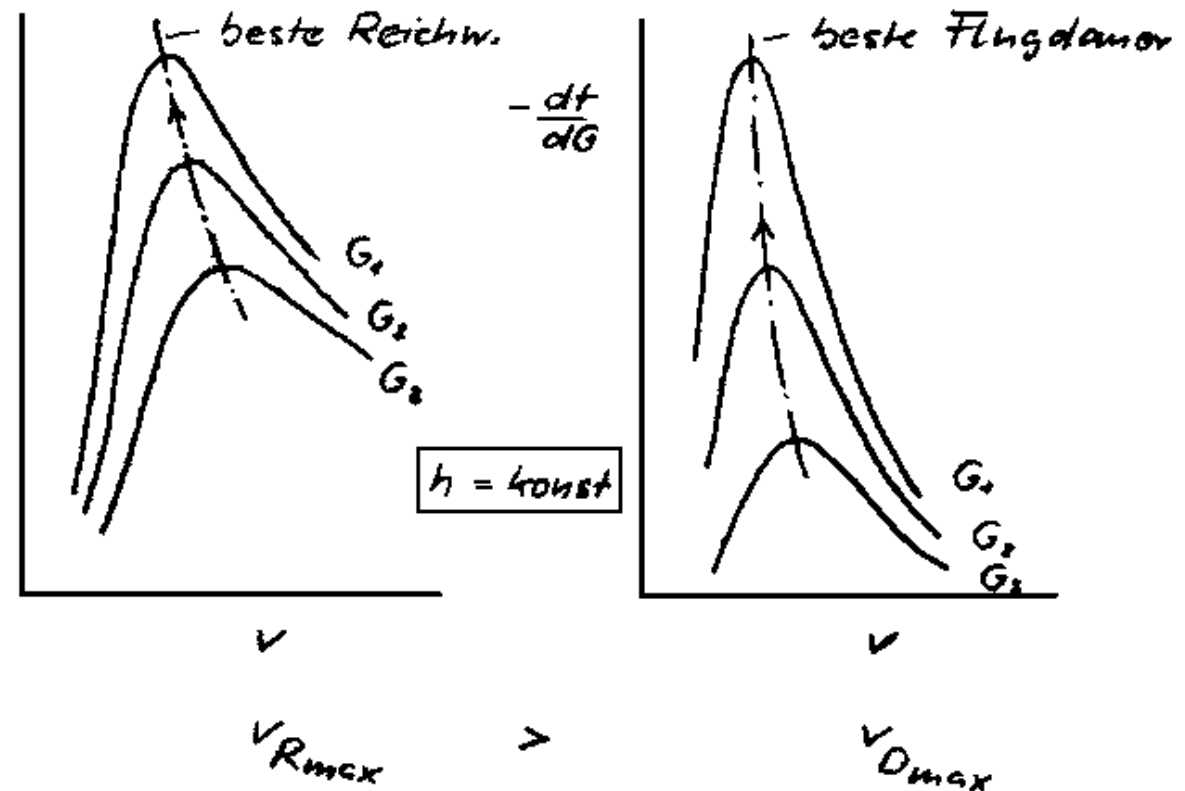
$$-\frac{dX}{dG} = \frac{v}{b_s \cdot S \cdot g}$$

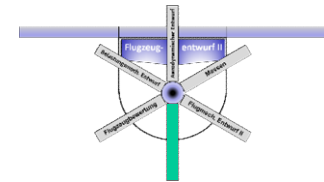


G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Sowohl die gewichtsbezogene Reichweite als auch die gewichtsspezifische Flugdauer sind abhängig von der Flughöhe, der Geschwindigkeit sowie dem Drosselgrad
- Diese Variablen sind nicht unabhängig voneinander, sondern müssen für jedes augenblickliche Gewicht der Horizontalflugbedingung genügen.

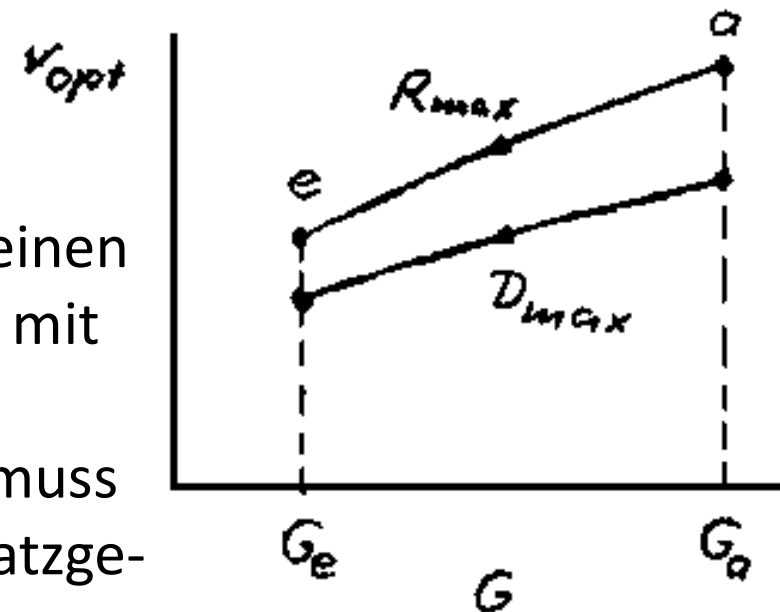


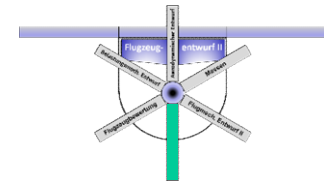


G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Die Geschwindigkeit der maximalen Reichweite ist größer als die der maximalen Flugdauer.
- Eine praktische Auswirkung hat diese Tatsache auf die Auslegung von Beobachtungsflugzeugen (z.B. Flugzeuge für Messungen in der Atmosphäre, Luftbildflugzeuge, Warteschleifen) und militärischen Tankern.
- Die Auslegung erfolgt für große Flugdauern und nicht, wie bei kommerziellen Transportern, für einen wirtschaftlichen Langstreckenflug mit minimalem Kraftstoffverbrauch.
- Die Auslegungsflächenbelastung muss entsprechend der optimalen Einsatzgeschwindigkeit geringer sein.

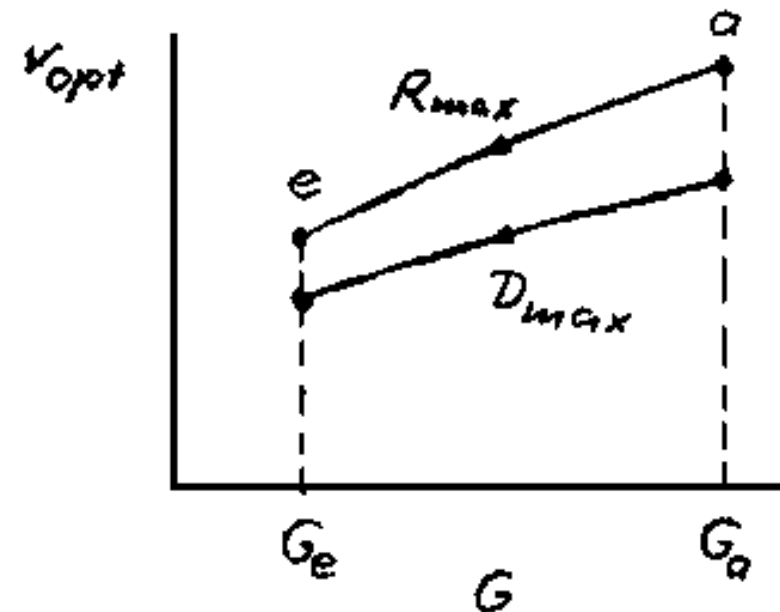


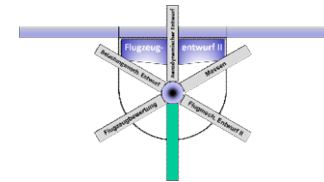


G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Für jedes Gewicht gibt es also eine Geschwindigkeit, die entweder die momentane Reichweite oder die momentane Flugdauer maximal macht.
- Diese Optimalfluggeschwindigkeiten werden bei der kontinuierlichen Gewichtsabnahme durch Kraftstoffverbrauch kleiner.





G Flugleistungen

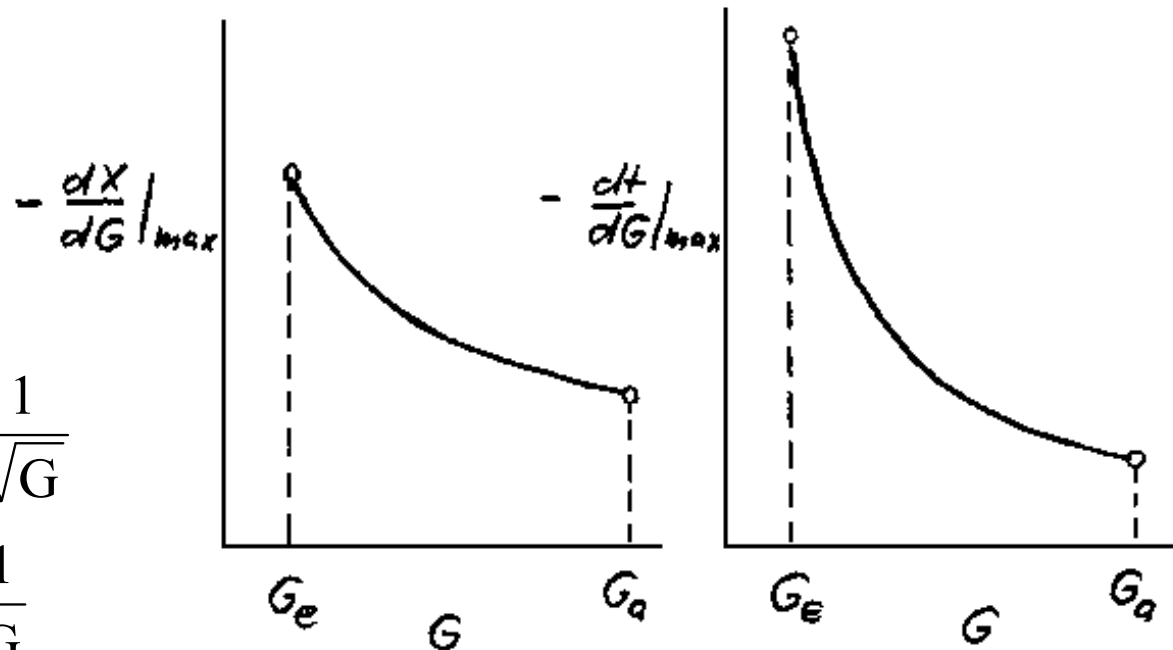
4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

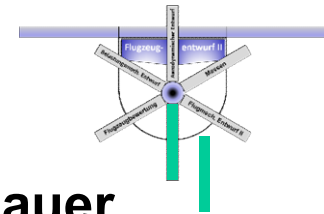
- Dagegen wachsen die korrespondierenden maximalen Werte für die Reichweite und Flugdauer entlang der Flugbahn an.

- Für Unterschall-TL- und ZTL-Flugzeuge sind diese Abhängigkeiten näherungsweise:

$$\left(\frac{dX}{dG} \right)_{\max} = R_{\max, \text{mom}} \sim \frac{1}{\sqrt{G}}$$

$$\left(\frac{dt}{dG} \right)_{\max} = D_{\max, \text{mom}} \sim \frac{1}{G}$$





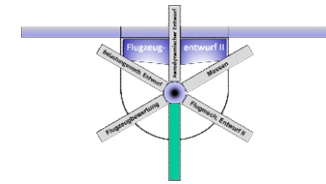
G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Die Voraussetzung des korrekten Horizontalflugs mit verschwindendem Steigwinkel γ und konstanter Flughöhe liegt praktisch kaum vor.
- Nimmt man jedoch vereinfachend an, dass
 - der Steigwinkel hinreichend klein bleibt, so dass $\cos\gamma \approx 1$ sowie $\sin\gamma \approx \gamma$ gilt, und
 - die Gewichtsänderung sehr viel kleiner als der Widerstand ist,

ändert sich gegenüber dem Horizontalflugfall nur die kinematische Bedingung in senkrechter Richtung und es gilt

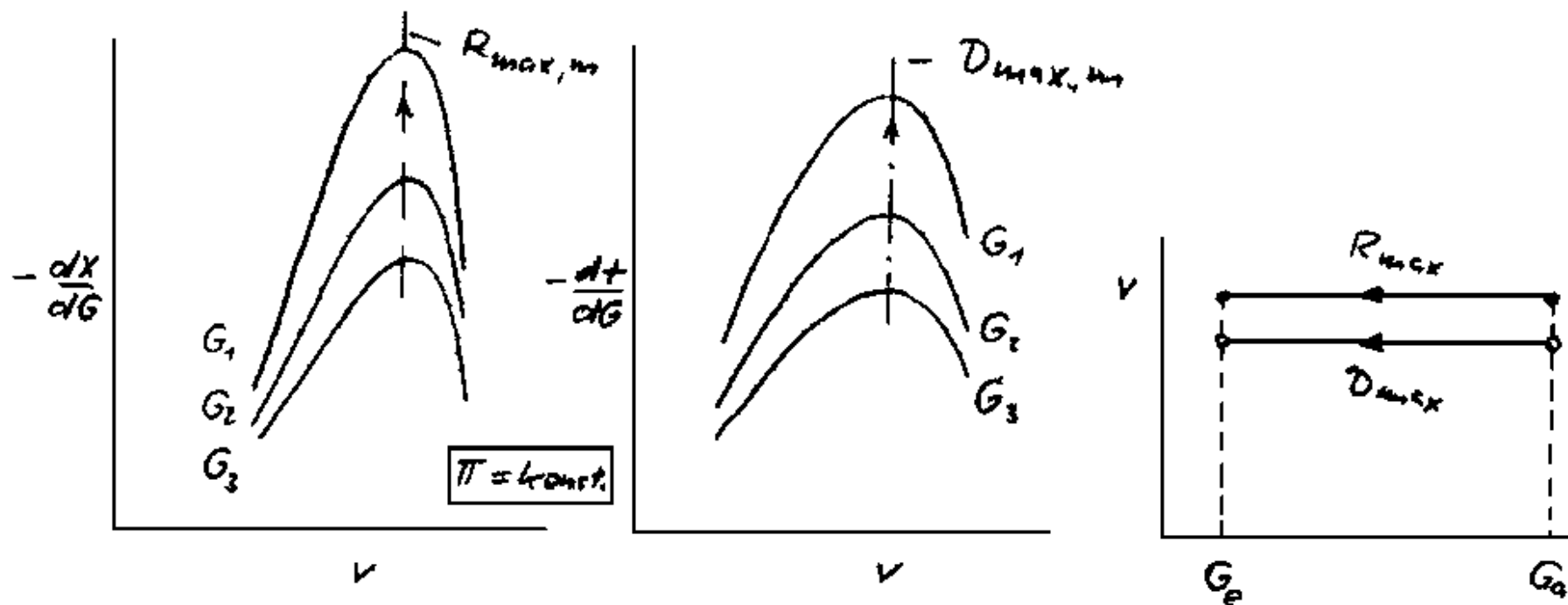
$$\dot{h} - v \cdot \gamma = 0 \quad .$$

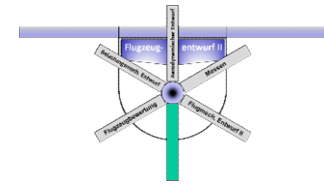


G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Daraus ergibt sich nach Elimination der Höhe das folgende Bild in welchem wieder parametrisch der Einfluss sinkenden Fluggewichts in Richtung des Pfeils angegeben ist.





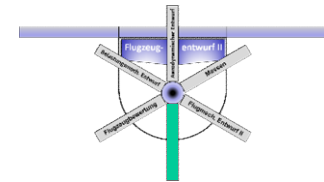
G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Für strahlgetriebene Flugzeuge sind beim Flug in der Stratosphäre

- sowohl $\left(\frac{dX}{dG} \right)_{\max} = R_{\max, \text{mom}} \sim \frac{1}{G}$

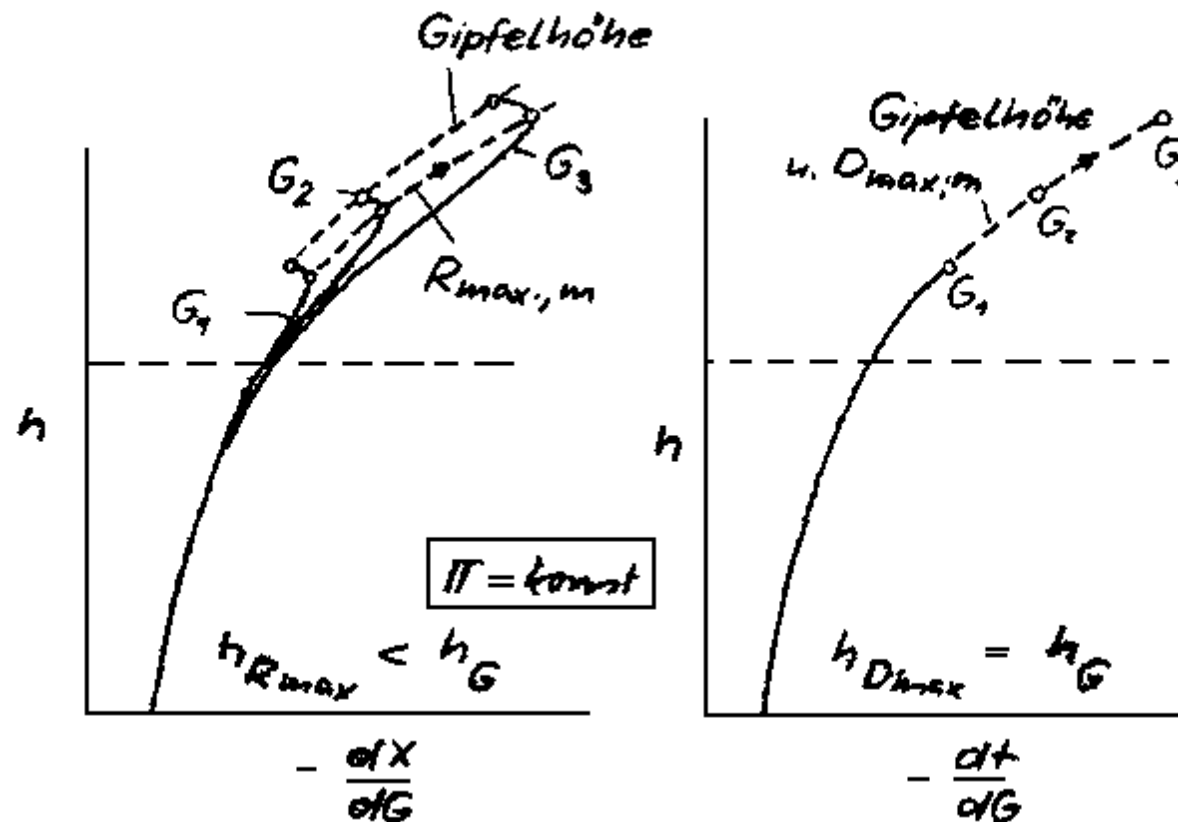
- als auch $\left(\frac{dt}{dG} \right)_{\max} = D_{\max, \text{mom}} \sim \frac{1}{G}$

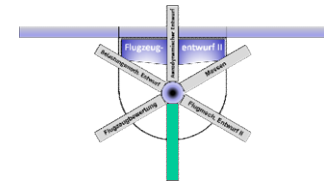


G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Stellt man die spezifischen Werte über der Höhe dar, so erhält man das folgende Bild:

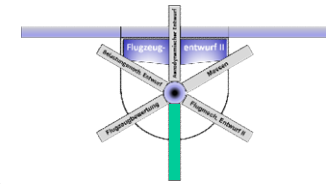




G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Für jedes Gewicht existiert nur eine Höhe, wo die momentane Reichweite gegen die maximale Reichweite bzw. die momentane Flugdauer gegen die maximale Flugdauer strebt.
- Es kann gezeigt werden, dass Flugprogramme mit konstantem Drosselgrad, die entweder mit der Geschwindigkeit der größten Reichweite oder der größten Flugdauer geflogen werden, mit konstantem, der besten Gleitzahl entsprechenden Auftriebsbeiwert und damit mit stetig zunehmender Flughöhe geflogen werden (Cruise climb).

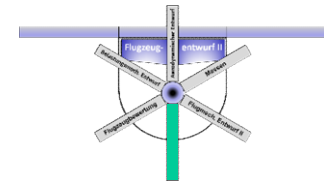


G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Mit Hilfe der vereinfachenden Annahme einer quadratischen Widerstandspolare sowie Näherungen für den Wirkungsgrad verschiedener Triebwerksarten, lassen sich die Optimalgeschwindigkeiten leicht berechnen.
- Die allgemeine Lösung der Reichweitengleichung ergab, dass die maximale Reichweite bei $\sqrt{c_A} / c_W$ erzielt wird.
- Der zu dieser Bedingung zugehörige optimale Auftriebsbeiwert kann durch Nullsetzen der Ableitung gewonnen werden:

$$\frac{\partial \left(\frac{\sqrt{c_A}}{c_W} \right)}{\partial c_A} = \frac{\partial \left(\frac{\sqrt{c_A}}{c_{W_0} + \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}} \right)}{\partial c_A} = 0$$



G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Die Ausführung dieser Differentiation führt zu

$$c_{A_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}{3}}$$

und die entsprechende Geschwindigkeit lautet:

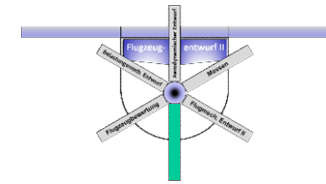
$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}{3}}}}$$

- Mit dem induzierten Widerstandsbeiwert c_{W_i} folgt für die Definition des optimalen Polarenpunktes, dass hier für ε gilt:

$$c_{W_i} = \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda \cdot e} = \frac{1}{3} \cdot c_{W_0}$$

$$c_{W_{\text{opt}}} = \frac{4}{3} \cdot c_{W_0}$$

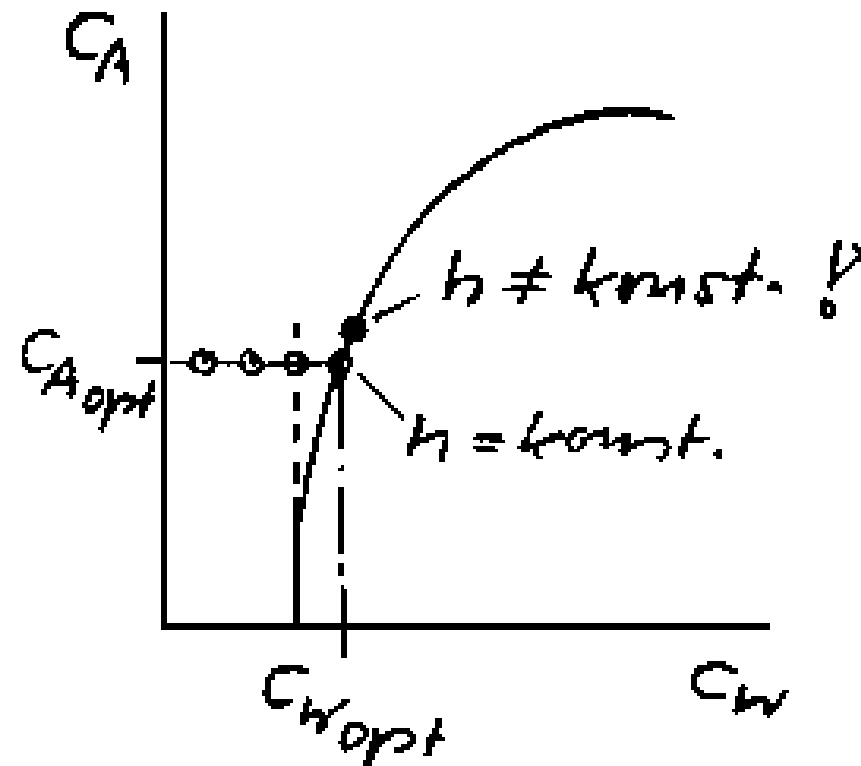
$$\varepsilon_{\text{opt}} = 4 \cdot \sqrt{\frac{c_{W_0}}{3 \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}}$$

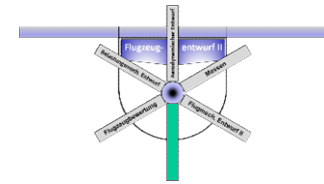


G Flugleistungen

4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

- Dasselbe Ergebnis ergibt sich auch über die Reichweitenberechnung gemäß Energiehöhenmethode (4.2), wenn die Reichweite maximal bzw. (ϵ/η_{ges}) minimal werden soll.
- Bei dieser Betrachtung wird implizit unterstellt, dass sich der schubspezifische Verbrauch b_s mit der Geschwindigkeit nicht ändert (also der Antriebswirkungsgrad linear mit der Geschwindigkeit zunimmt).
- Das ist so nur für TL-Antriebe gültig!





G Flugleistungen

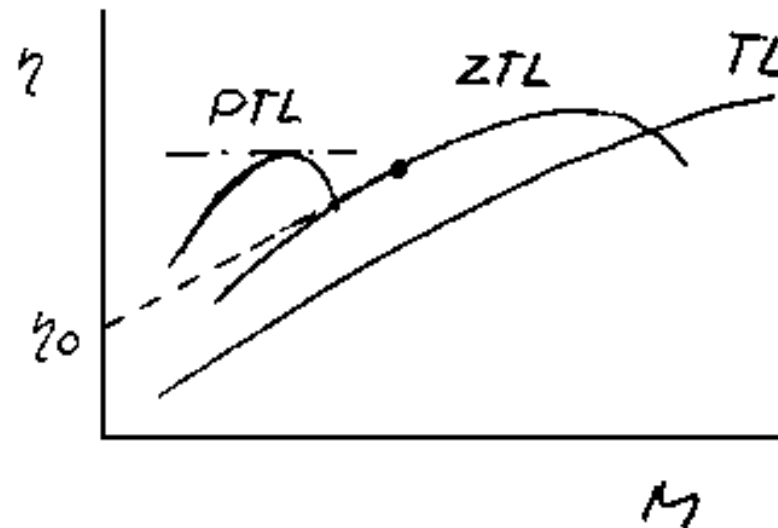
4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer

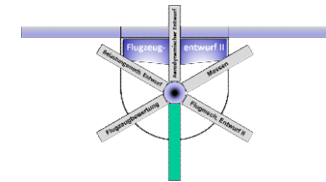
- Die Wirkungsgradverläufe der verschiedenen Antriebsarten können folgendermaßen approximiert werden:

$$\eta_{ges} = \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot v \quad \text{für TL-Triebwerke,}$$

$$\eta_{ges} = \eta_0 = konst. \quad \text{für PTL-Triebwerke und}$$

$$\eta_{ges} = \eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot v \quad \text{für ZTL-Triebwerke im relevanten Bereich}$$





G Flugleistungen

4.3.1 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit TL-Antrieb

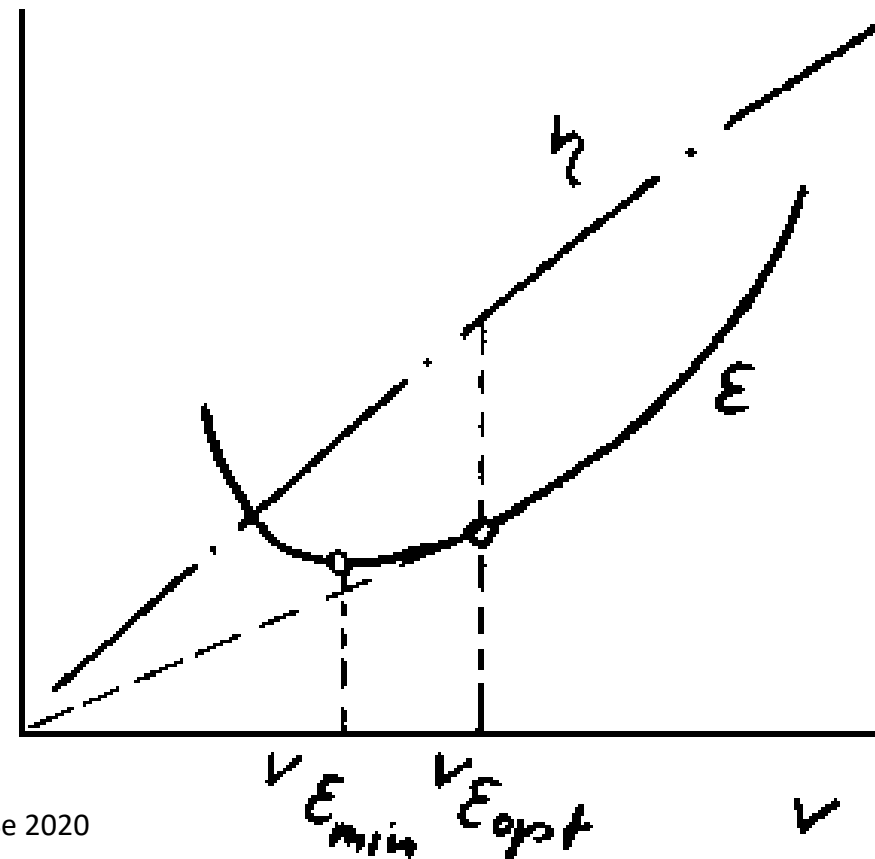
- Die Differentiation von $(\varepsilon/\eta_{\text{ges}})$ führt für einen TL-Antrieb zu

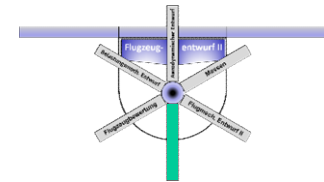
$$\frac{\partial \left[\frac{\varepsilon(c_A)}{\eta_{\text{ges}}(c_A)} \right]}{\partial c_A} = \frac{\partial \left(\frac{\frac{c_{W_0}}{c_A} + \frac{c_A}{\pi \Lambda e}}{\frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot v} \right)}{\partial c_A} = 0$$

- Diese Differentiation führt wieder zu dem bekannten Ergebnis

$$c_{A_{\text{opt}}} = \sqrt{\frac{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}{3}}$$

ε
?

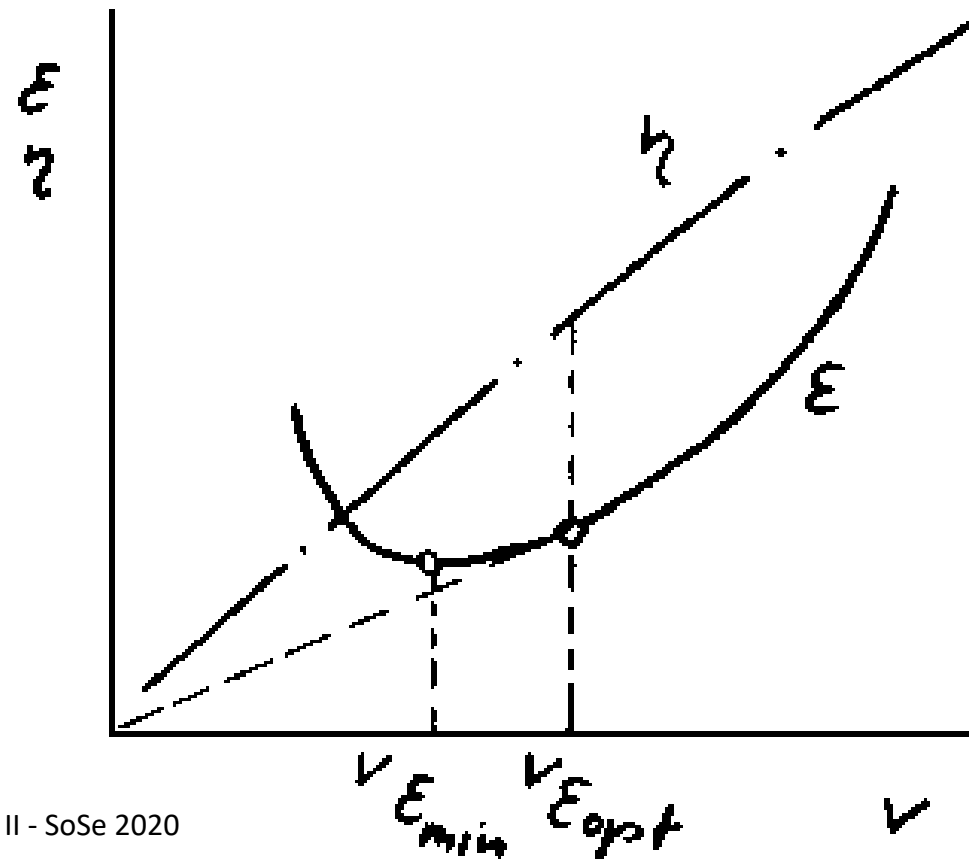


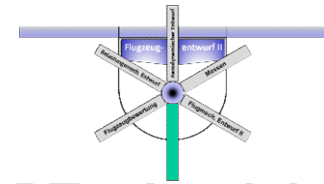


G Flugleistungen

4.3.1 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit TL-Antrieb

- Anschaulich gedeutet werden kann dieser Sachverhalt dadurch, dass in diesem Punkt die Ursprungstangente des Horizontalflugdiagramms anliegt.
- Die Lösung ist also identisch mit der Annahme eines konstanten b_s (s.o.).





G Flugleistungen

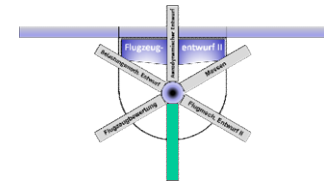
4.3.2 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit PTL-Antrieb

- Für PTL-Antriebe wird die Ableitung

$$\frac{\partial \left(\frac{c_{w_0} + \frac{c_A^2}{\pi \Lambda e}}{c_A \cdot \eta_0} \right)}{\partial c_A} = 0$$
- Die Lösung, aufgelöst nach dem optimalen Auftriebsbeiwert lautet

$$c_{A_{opt}} = \sqrt{c_{w_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}$$
- Daraus folgt, dass in diesem Optimalpunkt der induzierte Widerstand c_{wi} dem Nullwiderstand c_{w_0} entspricht.
- Damit hat man die Optimalgeschwindigkeit:

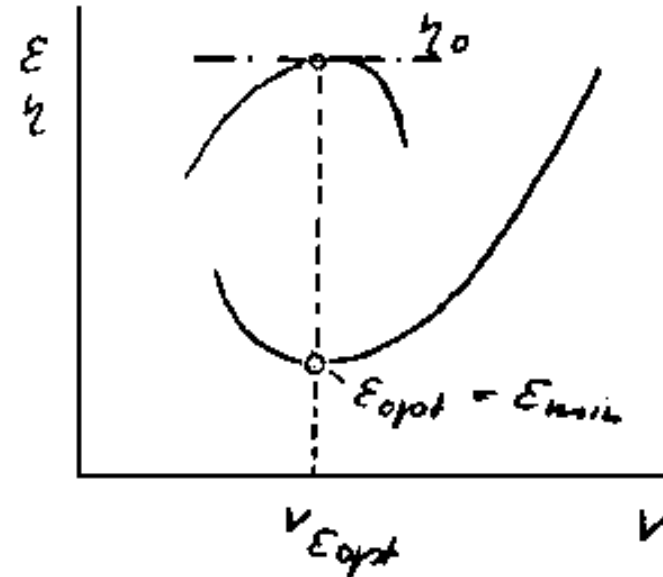
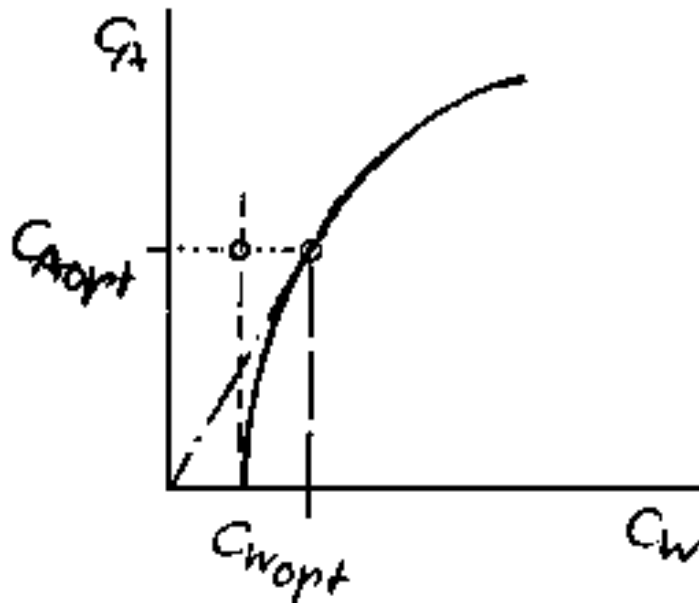
$$V_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_{w_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}}}$$

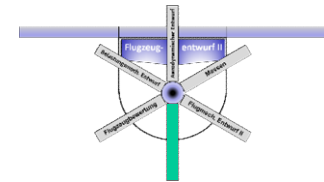


G Flugleistungen

4.3.2 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit PTL-Antrieb

- Das dazugehörige ε_{opt} ist
$$\varepsilon_{\text{opt}} = 2 \cdot \sqrt{\frac{c_{w_0}}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}}$$
- Grafisch lässt sich dieses Ergebnis wieder deuten als Nullpunkt tangente an die Widerstandspolare bzw. dem Minimum von c_w/c_A im Horizontalflugdiagramm.





G Flugleistungen

4.3.3 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit ZTL-Antrieb

- Für ZTL-Antriebe wird analog verfahren: Der Ansatz

$$\frac{\partial \left(\frac{c_{W_0} + \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}}{c_A \cdot \left(\eta_0 + \frac{\partial \eta}{\partial v} \cdot \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{c_A}} \right)} \right)}{\partial c_A} = 0$$

führt zu der Lösung

$$c_{A_{opt}} = \sqrt{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e \frac{1 + \eta_0/\eta}{3 - \eta_0/\eta}}$$

wobei der Quotient dem Widerstandsverhältnis entspricht.

$$\frac{c_{W_i}}{c_{W_0}} = \frac{1 + \eta_0/\eta}{3 - \eta_0/\eta}$$

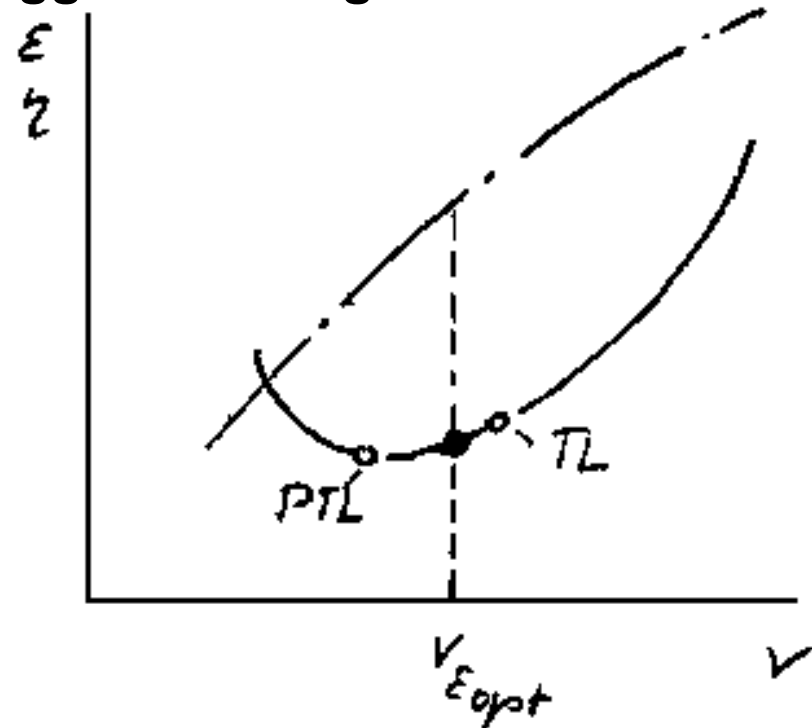
G Flugleistungen

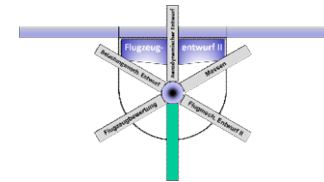
4.3.3 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit ZTL-Antrieb

- Die Optimalgeschwindigkeit erhält man entsprechend mit

$$V_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2 \cdot G}{\rho \cdot F} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_{w_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e \cdot \frac{1 + \eta_0}{\eta} \cdot \frac{3 - \eta_0}{\eta}}}}$$

- Das Ergebnis, dargestellt im Horizontalflugdiagramm, zeigt erwartungsgemäß die Lage des Optimalpunktes zwischen denen des PTL- und des TL-Antriebs.
- Da das Wirkungsgradverhältnis eine Funktion der Fluggeschwindigkeit ist, kommt man hier nur mit einer iterativen Rechnung zur Lösung.

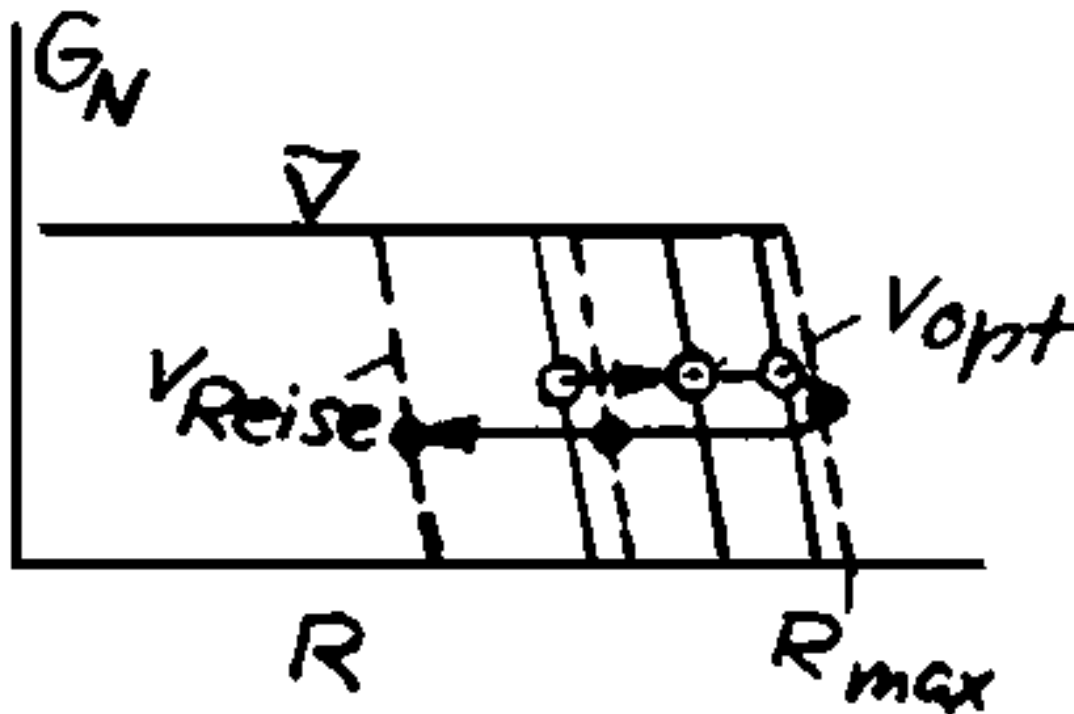


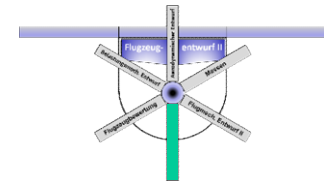


G Flugleistungen

4.3.3 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit ZTL-Antrieb

- Eine iterative Lösung zur Bestimmung der Optimalfluggeschwindigkeit erhält man, wenn man das Nutzlast-Reichweiten-Diagramm bei konstantem Kraftstoffgewicht für verschiedene Geschwindigkeiten ermittelt.





G Flugleistungen

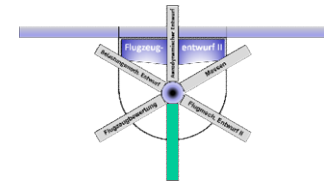
4.3.4 Flugdauer mit quadratischer Widerstandspolare und PTL-Antrieb

- Auch die maximale Flugdauer lässt sich unter Annahme des vereinfachten Ansatzes für die Widerstandspolare und den Gesamtwirkungsgrad direkt bestimmen.
- Die Ausgangsaussage für ein Propellerantrieb ist hierbei wieder die Änderung des Fluggewichts

$$\frac{dm}{dt} = -b_N \cdot N = -b_N \cdot \eta_{ges} \cdot W \cdot v$$

- Umgestellt und um den Triebwerkswirkungsgrad sowie die Kräftegleichgewichte des unbeschleunigten Flugs erweitert:

$$dt = -\frac{\eta_{ges}}{b_N \cdot W \cdot v \cdot g} \cdot dG = -\frac{\eta_{ges}}{b_N \cdot \varepsilon \cdot g \cdot v \cdot G} \cdot dG = -\frac{\eta_{ges}}{b_N \cdot g} \cdot \frac{c_A^{3/2}}{c_W} \cdot \frac{1}{G^{3/2}} \cdot \sqrt{\frac{\rho \cdot F}{2}} \cdot dG$$



G Flugleistungen

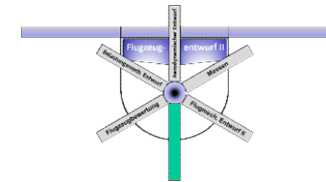
4.3.4 Flugdauer mit quadratischer Widerstandspolare und PTL-Antrieb

- Damit erhält man für die Flugdauer

$$D = \int_{G_a}^{G_e} dt = \frac{\eta_{\text{ges}}}{b_N \cdot g} \cdot \frac{c_A^{3/2}}{c_W} \cdot \sqrt{2 \cdot \rho \cdot F} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{G_e}} - \frac{1}{\sqrt{G_a}} \right)$$

- Daraus lässt sich folgern, dass die Flugdauer umgekehrt proportional zu $\sqrt{G_a/F}$ wächst und dass diese maximal wird,

wenn im Punkt $c_A^{3/2}/c_W$ geflogen wird.



G Flugleistungen

4.3.4 Flugdauer mit quadratischer Widerstandspolare und PTL-Antrieb

- Setzt man die Ableitung der Optimalbedingung zu Null, erhält man
- Damit ist der optimale Beiwert

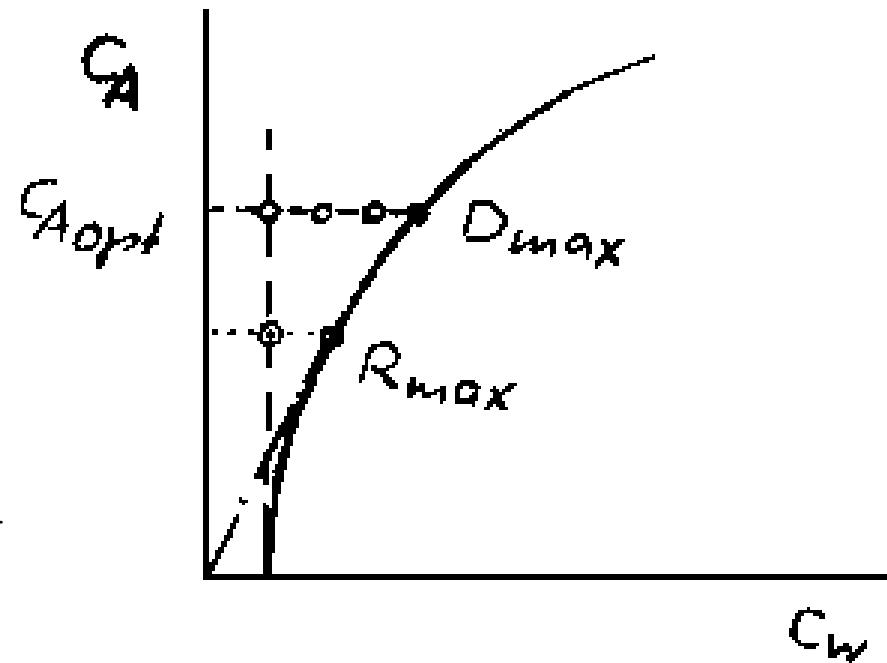
$$\frac{\partial \left(\frac{c_A^{3/2}}{c_W} \right)}{\partial c_A} = 0$$

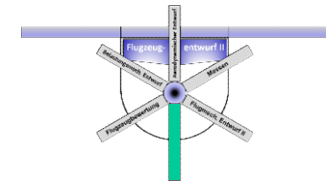
$$c_{A_{opt}} = \sqrt{3 \cdot c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}$$

$$\text{wobei } c_{W_0} = \frac{1}{3} \cdot c_{W_i} \text{ ist.}$$

- Für die Geschwindigkeit ergibt sich damit

$$V_{opt} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{\sqrt{3 \cdot c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}}}$$





G Flugleistungen

4.3.5 Flugdauer mit quadratischer Widerstandspolare und TL-Antrieb

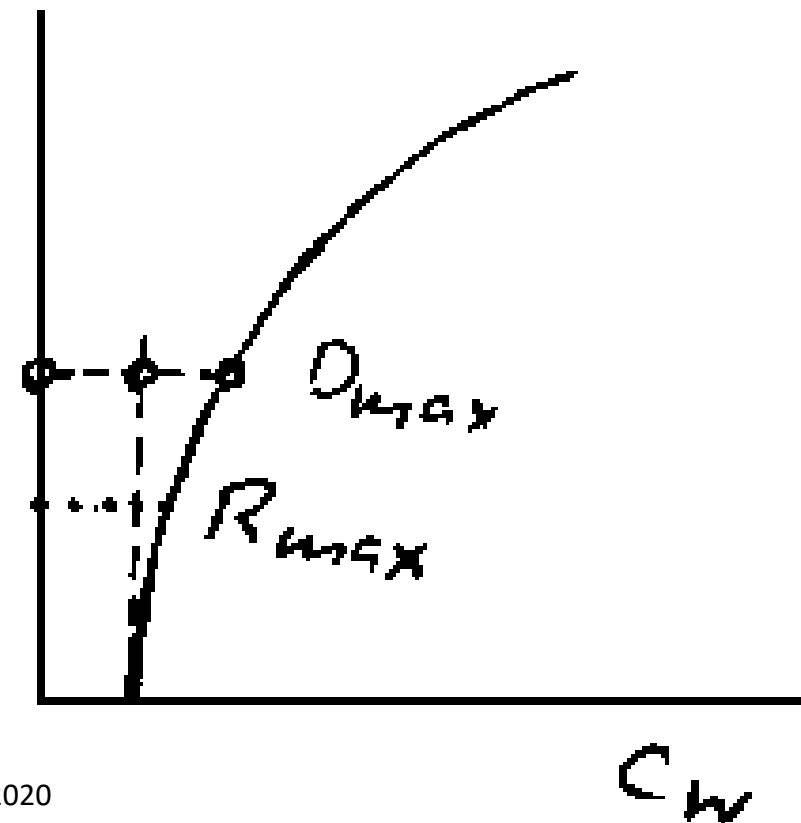
- Dieses ist für die quadratische Polare gegeben bei

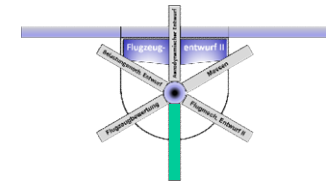
$$c_{A_{\text{opt}}} = \sqrt{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}$$

und der Optimalgeschwindigkeit

$$v_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{\sqrt{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}}} \quad c_A$$

- Dieses Ergebnis ist identisch mit demjenigen für die maximale Reichweite des Propellerflugzeugs.



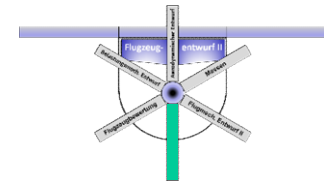


G Flugleistungen

4.3.6 Zusammenfassung Reichweite und Flugdauer

	Optimalgeschwindigkeit $\frac{v}{v_{\epsilon_{\min}}}$			Aerodynamische Güte $\frac{E}{E_{\max}} = \frac{\epsilon_{\min}}{\epsilon}$			Optimale Flughöhe		
Antrieb	Ideales PTL	ZTL	Ideales TL	Ideales PTL	ZTL	Ideales TL	Ideales PTL	ZTL	Ideales TL
Max. Reichweite	1	\Leftrightarrow	$\sqrt[4]{3} = 1,32$	1	\Leftrightarrow	$\sqrt{\frac{3}{4}} = 0,87$	alle	\Leftrightarrow	hoch
Max. Flugdauer	$\frac{1}{\sqrt[4]{3}} = 0,76$	\Leftrightarrow	1	$\sqrt{\frac{3}{4}} = 0,87$	\Leftrightarrow	1	tief	\Leftrightarrow	alle

- Für das ZTL-Triebwerk ergeben sich Lösungen, die zwischen denen der PTL- und denen der TL-Antriebe liegen und vom Bypassverhältnis abhängig sind.
- Bemerkenswert ist zudem, dass sich ein PTL-getriebenes Flugzeug bezüglich seiner Flugleistungen genauso wie ein Segelflugzeug darstellt, jedoch gelten dort diese Bedingungen nicht für den Horizontal-, sondern für den Gleitflug.

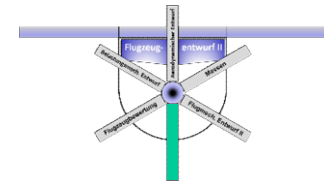


G Flugleistungen

4.4 Reichweite und Flugdauer unter Windeinfluss

- Der **reale Betrieb** eines Flugzeugs findet unter meteorologischen Bedingungen statt, die durch Horizontal- und Vertikalbewegungen der Luft gekennzeichnet sind.
- Die Größe der Windgeschwindigkeit ist insbesondere in den Höhen nahe der Tropopause so groß, dass beispielsweise der Flugzeitunterschied zwischen West- und Ostpassage des Atlantiks i.d.R. wegen des Strahlwindes (Jet stream) mindestens eine Stunde beträgt, wenn die Flugroute optimiert wird.
- Auf die maximale Flugdauer hat der Wind keinen Einfluss, aber auf die Reichweite eines Flugs mit bestimmter Flugdauer.
- Für den typischen Reichweitenflug bei konstanter Höhe und konstantem Auftriebsbeiwert folgt für ein TL-getriebenes

$$D = \frac{1}{b_s \cdot g} \cdot \frac{c_A}{c_W} \cdot \ln \left(\frac{G_a}{G_e} \right)$$



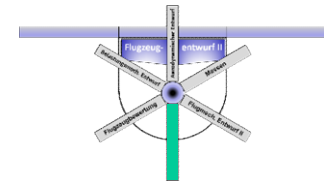
G Flugleistungen

4.4 Reichweite und Flugdauer unter Windeinfluss

- Die Reichweite erweitert sich durch den additiven Windterm

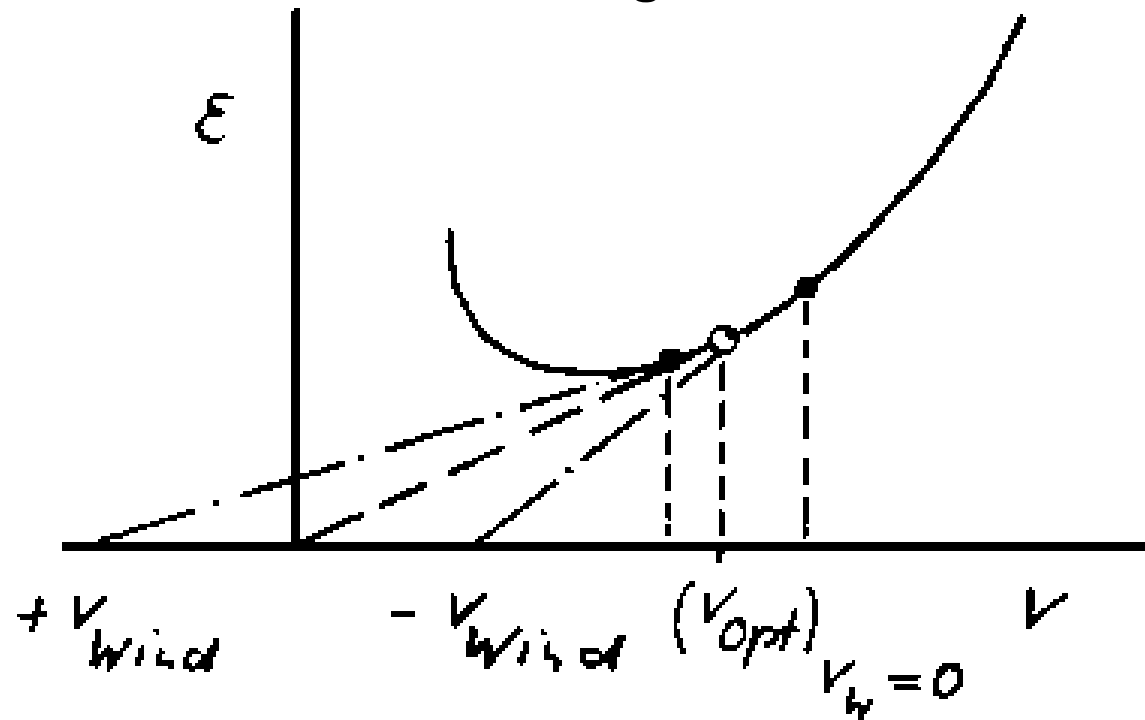
$$R = \frac{2}{b_s \cdot g} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot G}{\rho \cdot F}} \cdot \frac{\sqrt{c_A}}{c_W} \cdot \left(1 - \sqrt{\frac{G_e}{G_a}} \right) \pm v_{\text{Wind}} \cdot D$$

- Die optimale Fluggeschwindigkeit ist folglich eine Funktion der Windgeschwindigkeit.

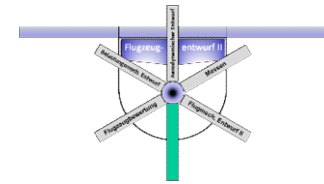


G Flugleistungen

4.4 Reichweite und Flugdauer unter Windeinfluss



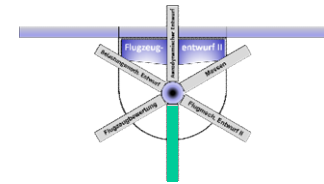
- Die Optimalgeschwindigkeit lässt sich mit Hilfe einer Tangentenkonstruktion aus dem Horizontalflugdiagramm gewinnen.
- Dazu wird der Ursprung um die Größe der Windgeschwindigkeit verschoben und die Tangente an die c_w/c_A -Kurve angelegt.



G Flugleistungen

5 Dimensionslose Leistungsrechnung

- Man kann die Flugleistungsrechnung (Horizontalflug, Steigflug, Quasi-Horizontalflug, Kurvenflug) sowohl für die quadratische als auch für beliebige Polarenformen in dimensionsloser Schreibweise durchführen.
- Hier seien in Verbindung mit den optimalen Flugzuständen einige Aspekte des Horizontal- bzw. Quasi-Horizontalfluges für die parabolische Polare aufgezeigt.



G Flugleistungen

5 Dimensionslose Leistungsrechnung

- Zunächst werden einige dimensionslose Parameter definiert:

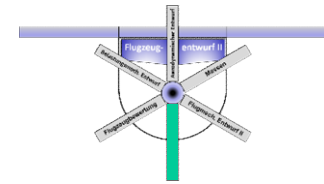
- Lastfaktor: $n = \frac{A}{G}$

- Dimensionsloser Schub: $z = \frac{S \cdot E_{\max}}{G} = \frac{\text{aktueller Schub}}{\text{minimaler erforderlicher Schub}}$

- Dimensionslose Geschwindigkeit: $u = \frac{V}{V_R}$

- Maximales c_A/c_W : $E_{\max} = \frac{1}{\varepsilon_{\min}} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{c_{W_0}}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}}}$

- Referenzgeschwindigkeit: $V_R = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}}$



G Flugleistungen

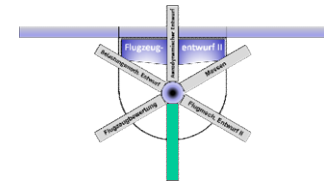
5 Dimensionslose Leistungsrechnung

- Die physikalische Bedeutung dieser Werte wird erkennbar, wenn man die Polare

$$c_w = c_{w_0} + c_{w_i}$$

durch einen quadratischen Ansatz beschreibt und in Kraftdimensionen umrechnet

$$W = \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot F \cdot \left(c_{w_0} + \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda \cdot e} \right) = \frac{\rho}{2} \cdot c_{w_0} \cdot v^2 \cdot F + \frac{2 \cdot A^2}{\rho \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e \cdot v^2 \cdot F}$$



G Flugleistungen

5 Dimensionslose Leistungsrechnung

- Mit den genannten Abkürzungen erhält man dann

$$W = \frac{G}{2 \cdot E_{\max}} \cdot \left(u^2 + \frac{n^2}{u^2} \right).$$

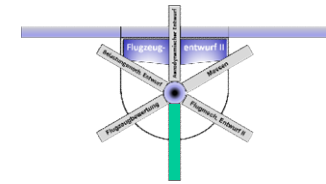
- Der Widerstand hat sein Minimumwert bei

$$W_{\min} = \frac{G}{2 \cdot E_{\max}},$$

da der Faktor

- vor der Klammer nicht Null werden kann und
- in der Klammer immer größer/gleich Null sein wird.

- Für die Klammer gilt also $0 = u^2 + \frac{n^2}{u^2}$ und damit für $u = \sqrt{n}$.



G Flugleistungen

5 Dimensionslose Leistungsrechnung

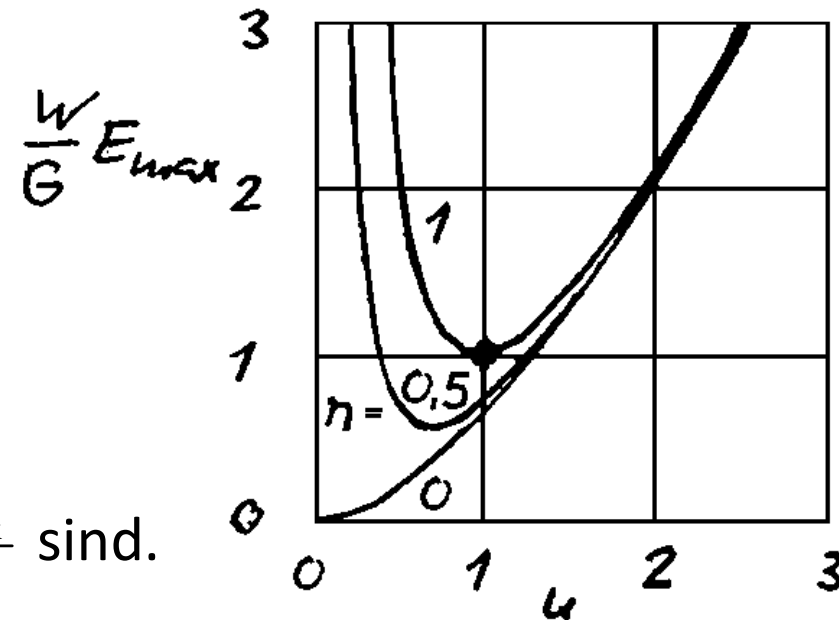
- Der Horizontalflug ist gekennzeichnet durch $n = 1$.
- Die Widerstandsgleichung lautet damit:
$$S - \frac{G}{2 \cdot E_{\max}} \cdot \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right) = 0$$
- Nach u aufgelöst erhält man eine Gleichung 4. Ordnung: $u^4 - 2 \cdot z \cdot u^2 + 1 = 0$

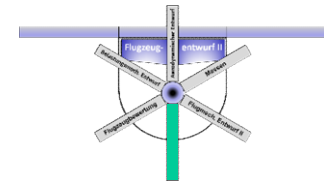
- Deren zwei Lösungen sind:

$$u_1 = \sqrt{z + \sqrt{z^2 - 1}}$$

$$u_2 = \sqrt{z - \sqrt{z^2 - 1}}$$

wobei $u_1 \cdot u_2 = 1$ und $z = \frac{S \cdot E_{\max}}{G}$ sind.

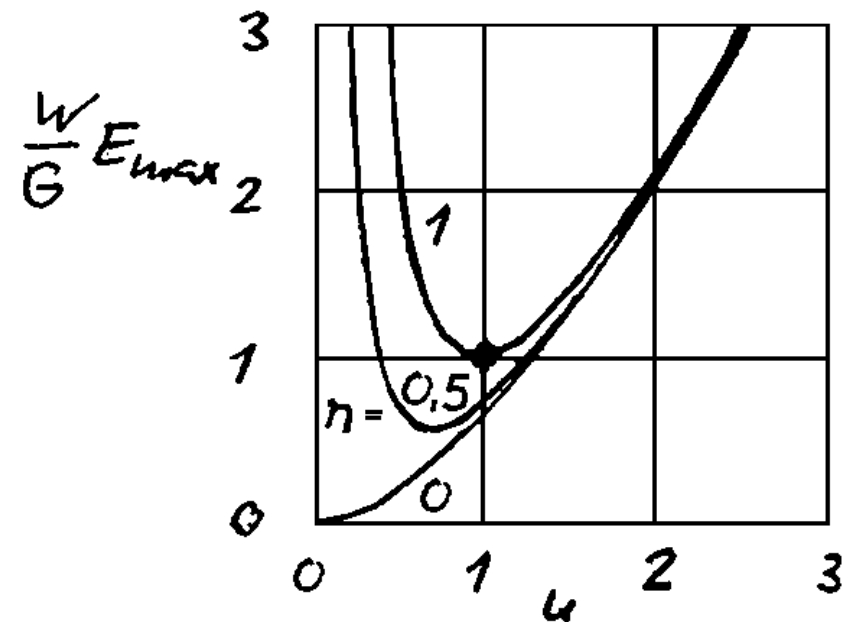


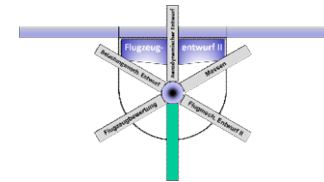


G Flugleistungen

5 Dimensionslose Leistungsrechnung

- Von den zwei physikalisch möglichen Geschwindigkeiten ist eine stets größer und die andere stets kleiner als die Geschwindigkeit für minimales $W/G \cdot E_{\max}$.

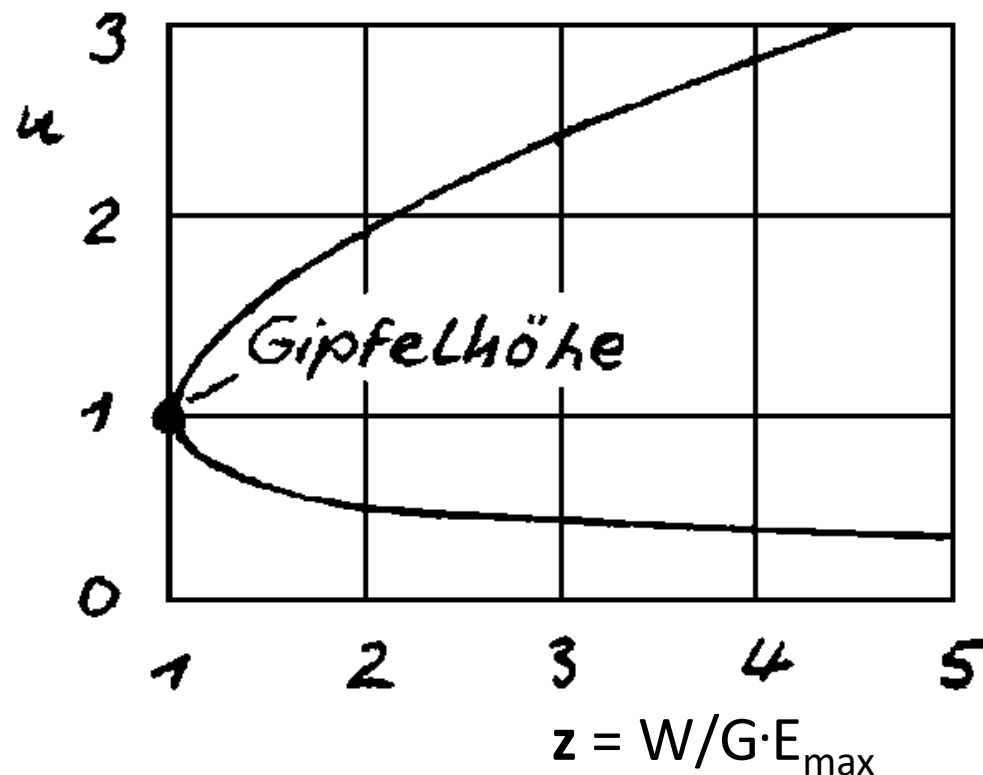


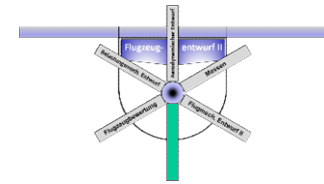


G Flugleistungen

5 Dimensionslose Leistungsrechnung

- Aus den Lösungen ist ersichtlich, dass eine reale Lösung bei $n = 1$ nur für $z \geq 1$ existiert.
- Der Punkt (1, 1) bezeichnet deshalb auch die Gipfelhöhe des Flugzeugs.

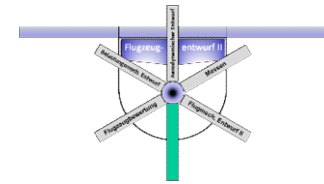




G Flugleistungen

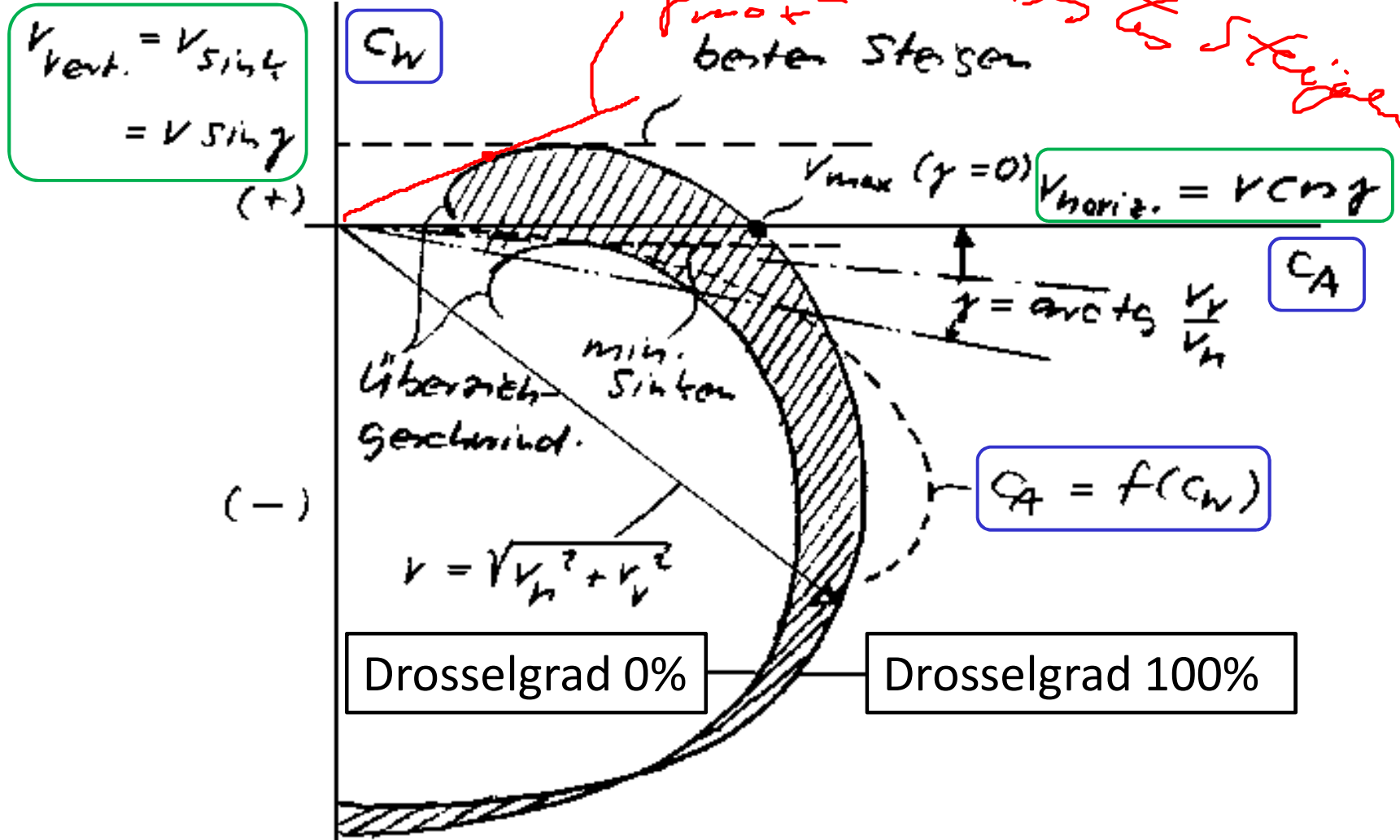
6 Sinkflug

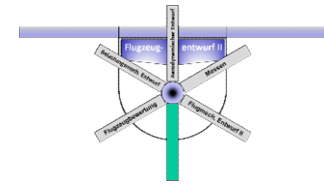
- Die Betrachtung des Sinkflugs nimmt die Überlegungen zum Steigflug wieder auf, der Schub zwischen Vollschub (Drosselgrad 100%) und Leerlauf (Drosselgrad 0%) variiert wird.
- Dazwischen wird ein weites Spektrum von Sinkflügen mit veränderlichem Schub und variablen Geschwindigkeiten möglich.
- Für die folgende Auftragung der **Vertikalgeschwindigkeit** über der **Horizontalgeschwindigkeit** wurde ein Propellerflugzeug gewählt.
- Hier ist der “windmilling drag” des leerlaufenden PTL-Antriebs kleiner als derjenige bei Volllast.
- Deshalb wird eine größere Sturzfluggeschwindigkeit im Leerlauf erreicht.



G Flugleistungen

6 Sinkflug





G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Wie bereits beim Steigflug erläutert, können Sinkgeschwindigkeiten bis zur maximalen Bemessungsgeschwindigkeit bei nicht zu großen Gleitwinkeln unter 15° aus

$$\frac{dH}{dt} = \frac{v}{G} \cdot (S_{vorh} - S_{erf})$$

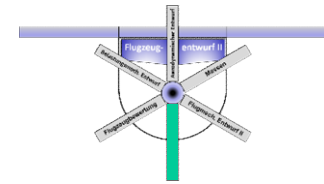
und der Bahnneigungswinkel aus

$$\tan \gamma = \frac{W - S}{G}$$

ermittelt werden, was auch durch die Energiehöhen-Methode bestätigt wird.

- Ohne Schub (power-off) ist der Gleitwinkel natürlich bestimmt durch ε , denn es gilt

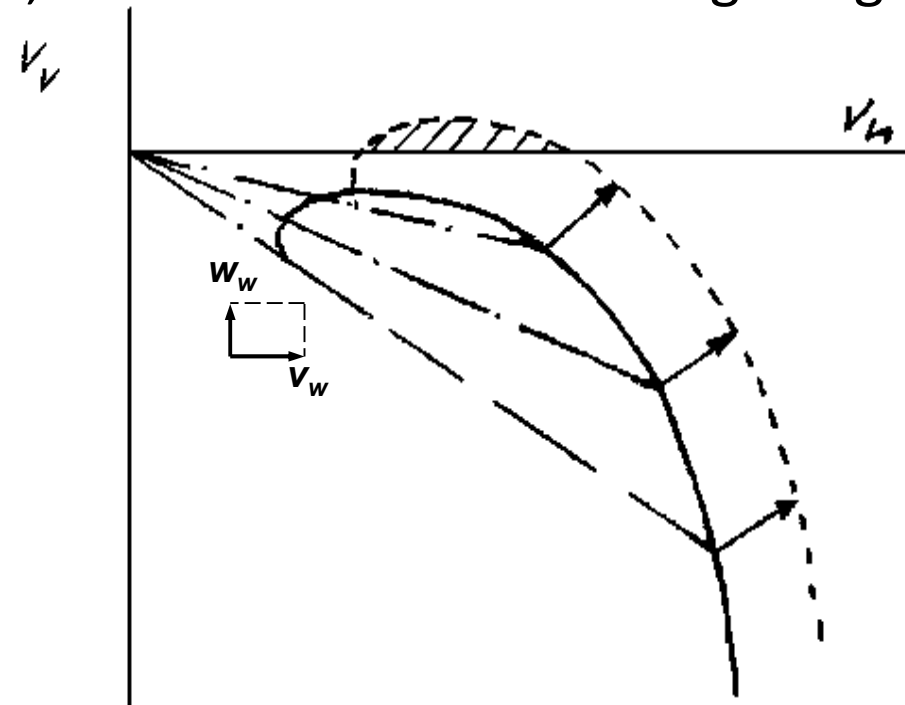
$$\tan \gamma = \frac{S}{G} = \frac{c_W}{c_A} = \varepsilon$$

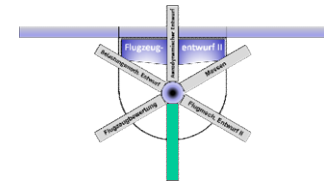


G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Für den nicht angetriebenen Gleitflug (Segelflug) wird die Betrachtung des Sinkflugs unter Windeinfluss besonders wichtig.
- Hier lassen sich mit Hilfe von vertikalen Windkomponenten Steiggeschwindigkeiten realisieren, die einen dauerhaften Segelflug erst ermöglichen.
- Der schraffierte Bereich der nebenstehenden **Sinkflugpolare** bezeichnet hierbei den Flugbereich, in welchen ein Steigflug möglich ist.
- Der horizontale Versatz folgt aus der horizontalen Windkomponente.





G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Bei ε_{\min} wird also das flachste Gleiten, d.h. die größte Reichweite im Gleitflug erzielt.

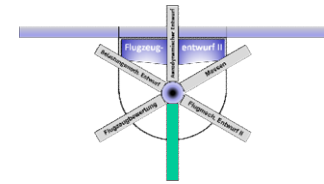
- Beim Reichweitenflug war dieses gegeben für: $\frac{c_A^{3/2}}{c_W} \rightarrow \text{Max.}$

- Die minimale Sinkgeschwindigkeit tritt bei einer geringeren Geschwindigkeit auf als beim besten Gleiten, da

$$\frac{dH}{dt} = -\frac{v}{G} \cdot S_{\text{erf.}} = -\frac{N_{\text{erf.}}}{G}$$

minimal wird, wenn die erforderliche Leistung für den Horizontalflug ihr Minimum aufweist.

- Für den nicht angetriebenen Gleitflug (Segelflug) wird die Betrachtung des Sinkflugs unter Windeinfluss besonders wichtig.
- Durch vertikale Windkomponenten (w_w , Thermik, Hang-, Wellenaufwinde) lassen sich Steiggeschwindigkeiten realisieren, die einen dauerhaften Segelflug erst ermöglichen.

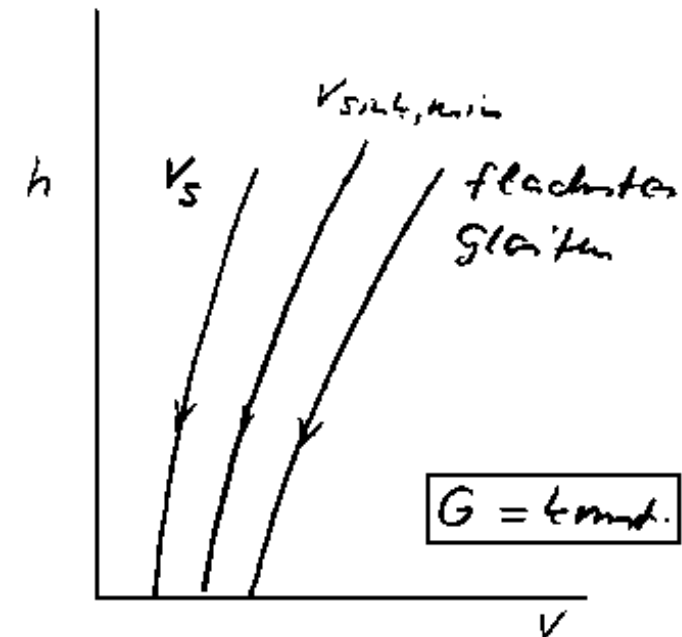
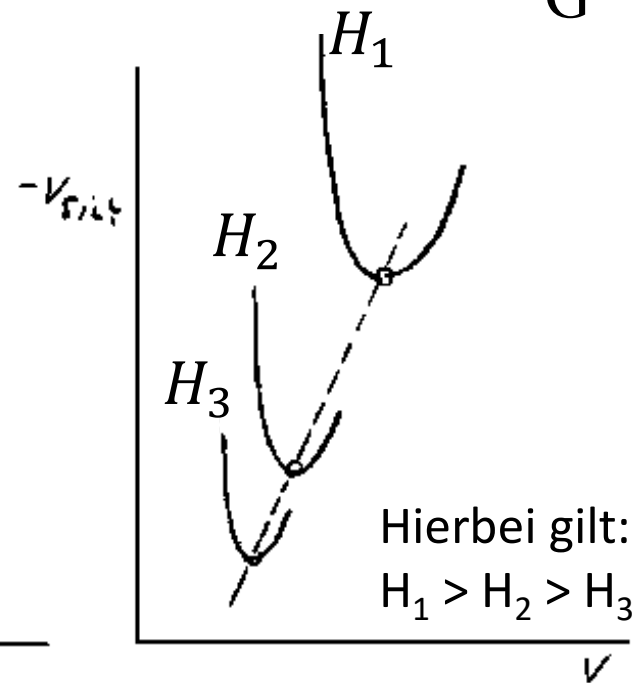
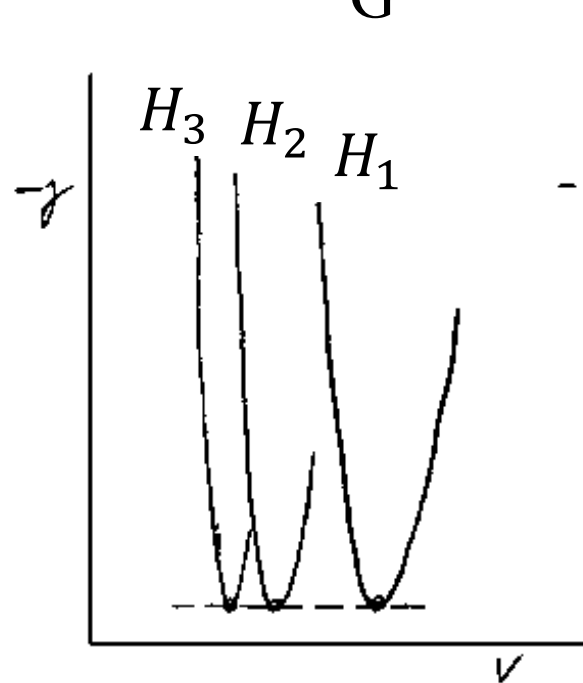


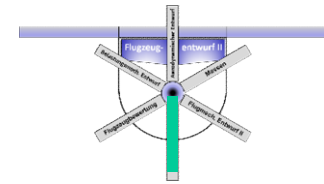
G Flugleistungen

6 Sinkflug

- In dimensionsloser Darstellung folgt unter Annahme kleiner Bahnneigungswinkel ($\sin \gamma = \gamma$; $\cos \gamma = 1$) sowie verschwindendem Schub aus den Bewegungsgleichungen

$$-\gamma = \frac{W}{G} \text{ und } -v_{\text{sink}} = -v \cdot \gamma = \frac{W \cdot v}{G}$$

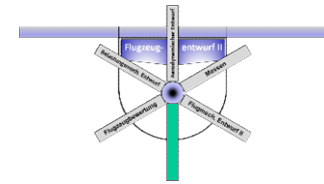




G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Dabei ist vorausgesetzt worden, dass während des Sinkflugs kein Kraftstoff verbraucht wird.
- Diese Annahme ist in durch die Praxis nicht ganz gerechtfertigt, da i.d.R. eine kleine Menge Kraftstoff zur Aufrechterhaltung einer Flamme in der Brennkammer benötigt wird.
- Dieses ist zur raschen Verfügbarkeit des Schubs beim Beenden des Sinkflugs bzw. für Notfälle erforderlich. Ein Wiederaanlassen der Triebwerke würde zu viel Zeit in Anspruch nehmen.



G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Mit der quadratischen Polare gilt für den unbeschleunigten Flugfall in dimensionsloser Form

$$W = \frac{G}{2 \cdot E_{\max}} \cdot \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right),$$

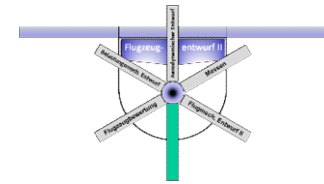
woraus sich für den Steigwinkel

$$\gamma = \frac{W}{G} = \frac{1}{2 \cdot E_{\max}} \cdot \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right)$$

und für die dimensionslose Sinkgeschwindigkeit

$$-\frac{v_{\text{sink}}}{v_R} = -u \cdot \gamma = \frac{1}{2 \cdot E_{\max}} \cdot \left(u^3 + \frac{1}{u} \right)$$

ergibt.

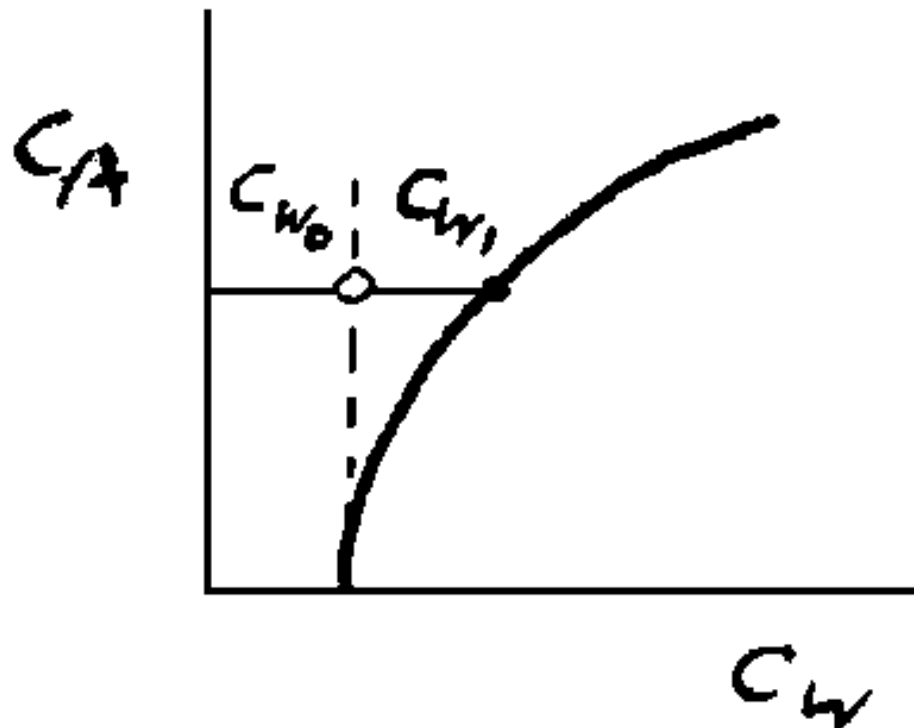


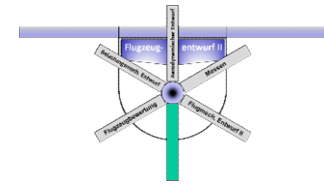
G Flugleistungen

5 Dimensionslose Leistungsrechnung

- Das flachste Gleiten findet - wie bekannt - bei ε_{\min} , also bei

$$\frac{c_{w_i}}{c_{w_0}} = 1 \quad \text{bzw. bei} \quad -\gamma_{\min} = \frac{1}{E_{\max}} = \varepsilon_{\min} \sim \sqrt{\frac{c_{w_0}}{\Lambda}} \quad \text{statt.}$$





G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Das Gleiten mit minimaler Sinkgeschwindigkeit ergibt sich aus

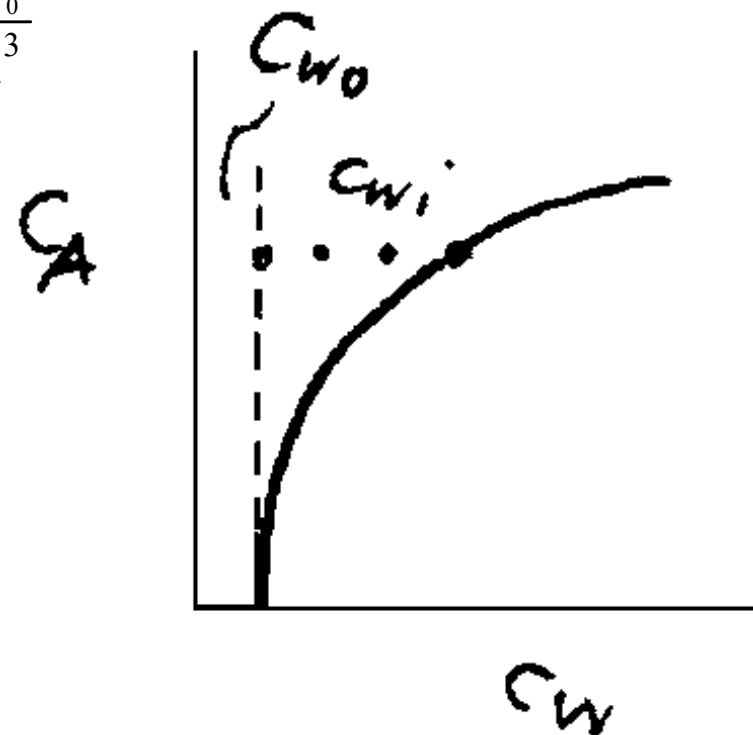
der Bedingung $\frac{\partial v_{\text{sink}}}{\partial u} = 0$ und führt zu $u_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$.

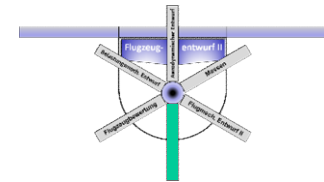
- Damit ist die minimale Sinkgeschwindigkeit: $-v_{\text{sink}} \sim \sqrt[4]{\frac{C_{W_0}}{\Lambda^3}}$
- Die dimensionslose Geschwindigkeit für die minimale Sinkgeschwindigkeit ist:

$$-\frac{v_{\text{sink}}}{v_R} = \frac{2}{3} \cdot \frac{\sqrt[4]{3}}{E_{\text{max}}}$$

- Das Widerstandsverhältnis ist:

$$\frac{C_{W_i}}{C_{W_0}} = 3.$$

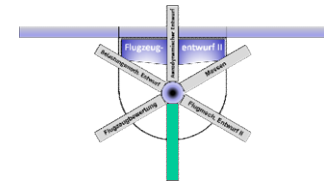




G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Als Folgerung daraus lässt sich festhalten, dass im antriebslosen Flug
 - sich der Gleitwinkel gegenüber Nullwiderstandsänderungen empfindlicher verhält als die Sinkgeschwindigkeit
 - die Sinkgeschwindigkeit sehr empfindlich gegenüber der Streckung ist und
 - die Geschwindigkeit des besten Gleitens um 32% höher liegt als die Geschwindigkeit des geringsten Sinkens.



G Flugleistungen

6 Sinkflug

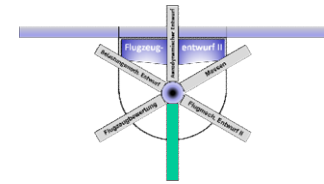
- Für die momentane Reichweite und Flugdauer sind

$$\frac{dX}{dH} = \frac{1}{\gamma} = -\frac{2 \cdot u^2}{1 + u^4} \cdot E_{\max}$$

und

$$\frac{dt}{dH} = \frac{1}{v_{\text{sink}}} = \frac{2 \cdot u}{1 + u^4} \cdot \frac{E_{\max}}{v_{R0}} \cdot \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

- v_{R0} ist die Auslegungsgeschwindigkeit in der Höhe Null.



G Flugleistungen

6 Sinkflug

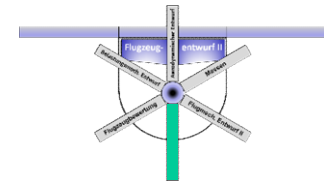
- Es gibt verschiedene Sinkflugstrategien für den antriebslosen Sinkflug aus großer Höhe:
 - Flug mit konstantem Anstellwinkel
 - Flug mit konstanter Geschwindigkeit.

- Für **konstanten Anstellwinkel** ergibt sich als Reichweite

$$R = \int_{H_a}^{H_e} \frac{dH}{\gamma} = \frac{2 \cdot u^2}{1 + u^4} \cdot E_{\max} \cdot (H_a - H_e)$$

- Für gleitzahloptimale Verhältnisse ($u = 1$) gilt:

$$R = E_{\max} \cdot (H_a - H_e)$$



G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Für die Flugdauer mit dieser Strategie erhält man

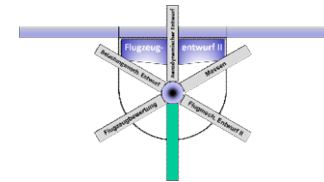
$$D = \int_{H_a}^{H_e} \frac{dH}{v_{\text{sink}}} = \frac{2 \cdot u}{1 + u^4} \cdot \frac{E_{\text{max}}}{v_R} \cdot [I(H_a) - I(H_e)] \text{ mit } I(H) = \int_0^H \sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}$$

- Die dimensionslose Geschwindigkeit der größten Flugdauer ist:

$$u_{\text{opt}} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

- Damit wird die max. Flugdauer:

$$D_{\text{max}} = \frac{3}{2 \cdot \sqrt[4]{3}} \cdot \frac{E_{\text{max}}}{v_R} \cdot [I(H_a) - I(H_e)]$$



G Flugleistungen

6 Sinkflug

- Die Reichweite wird bei **konstanter Geschwindigkeit** optimal, wenn

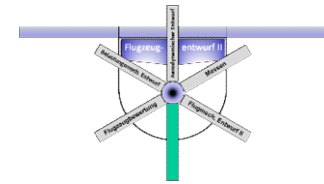
$$u = \frac{v}{V_R} = \frac{1}{\sqrt[4]{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_a \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_e}}$$

- Die Flugdauer wird maximal für

$$2\left(\frac{v}{v_R}\right)^2 \cdot \left[\frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_a}{1 + \left(\frac{v}{v_R}\right)^4 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_a^2} - \frac{\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_e}{1 + \left(\frac{v}{v_R}\right)^4 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_e^2} \right] + \arctan \left[\frac{\left(\frac{v}{v_R}\right)^2 \cdot \left\{ \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_e - \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_a \right\}}{1 + \left(\frac{v}{v_R}\right)^4 \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_a \cdot \left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)_e} \right] = 0$$



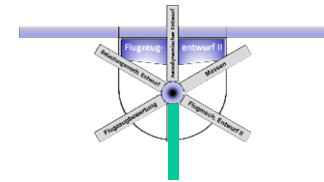
- Das Sinkprogramm mit konstantem Anstellwinkel ergibt größerer Reichweiten und Flugdauern als das Programm mit konstanter Geschwindigkeit.
- Für ein Strahlflugzeug, welches im Gleitflug von der Höhe 40.000 ft auf Meereshöhe sinkt, beträgt der Unterschied 11% in der Reichweite und 8% in der Flugdauer.



G Flugleistungen

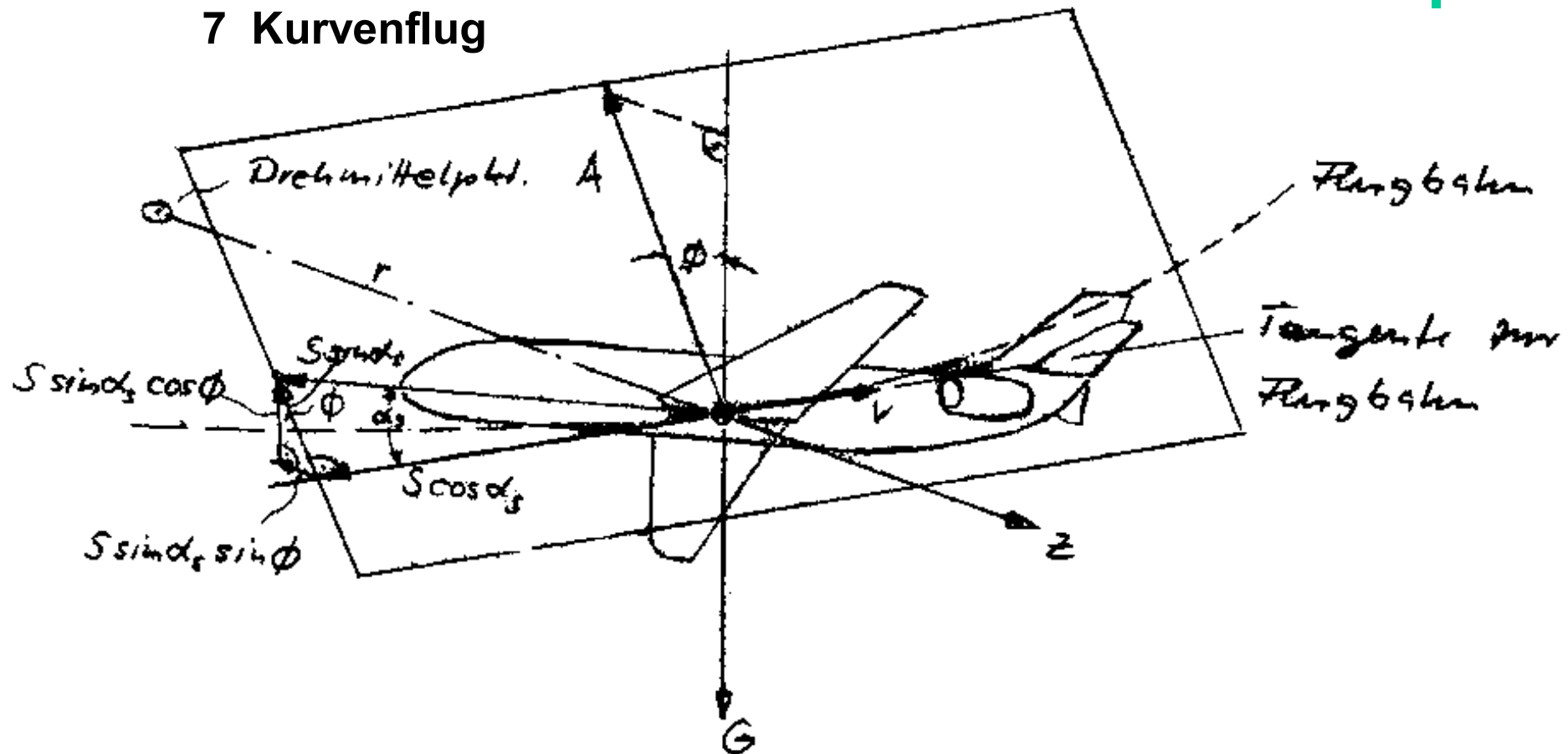
7 Kurvenflug

- Betrachtet wird nur der stationäre, **horizontale Kurvenflug**.
- Die Bemessung des Schubs ist, wie bisher betrachtet, ausschlaggebend für die Reise- und Steigleistungen des Flugzeugs.
- Im Kurvenflug spielt der Schubbedarf auch wieder eine große Rolle für die Flugleistung.
- Forderungen für die Flugagilität, insbesondere im Bereich der Hochleistungsflugzeuge, bestimmen teilweise sogar die Triebwerksleistung. Aber auch für den kommerziellen Einsatz ist die Kenntnis der Limitationen im Kurvenflug wichtig.
- Für die leistungsmechanischen Betrachtungen wird vom Kräftegleichgewicht ausgegangen.
- Unter der Voraussetzung, dass kein Gieren stattfindet, dass also die Fläche durch Längs- und Hochachse auch die Tangente an die Flugbahn einschließt (abgestimmte Kurve, coordinated turn) ergeben sich folgende Kräfte am Flugzeug im Kurvenflug:



G Flugleistungen

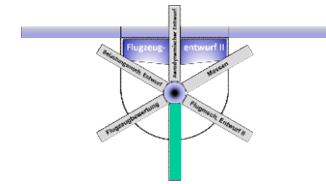
7 Kurvenflug



- Annahme: Kein Gieren, d.h. dass die Fläche durch Längs- und Hochachse auch die Tangente an die Flugbahn einschließt (abgestimmte Kurve, coordinated turn)

G Flugleistungen

7 Kurvenflug



- Es gelten die Kräftegleichgewichte:

$$\sum V = 0 = A \cdot \cos \phi + S \cdot \sin \alpha_s \cos \phi - G$$

$$\sum H = 0 = A \cdot \sin \phi + S \cdot \sin \alpha_s \sin \phi - Z$$

$$\sum K_{\text{Flugbahn}} = S \cdot \cos \alpha_s - W - \frac{G}{g} \cdot b$$

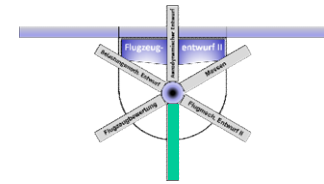
- Der Neigungswinkel ϕ folgt aus der Zentrifugalkraft Z und dem Dreieck der Massekräften und ist

$$Z = \frac{v^2 \cdot m}{r}$$

$$\tan \phi = \frac{Z}{G} = \frac{v^2}{g \cdot r}$$

- Das Lastvielfache ist der Quotient aus der Summe der Auftriebskräfte und dem Gewicht:

$$n = \frac{A + S \cdot \sin \alpha_s}{G}$$



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Einsetzen von n in die Gleichung des vertikalen Kräftegleichgewichts ergibt:

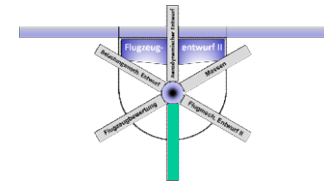
$$n = \frac{1}{\cos \phi}$$

- Für eine koordinierte Kurve ist nur die Querneigung ϕ (Hängewinkel) für die Belastung des Flugzeugs verantwortlich. Diese strebt mit zunehmendem Winkel gegen unendlich.

- Mit
$$\cos \phi = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2 \phi}}$$

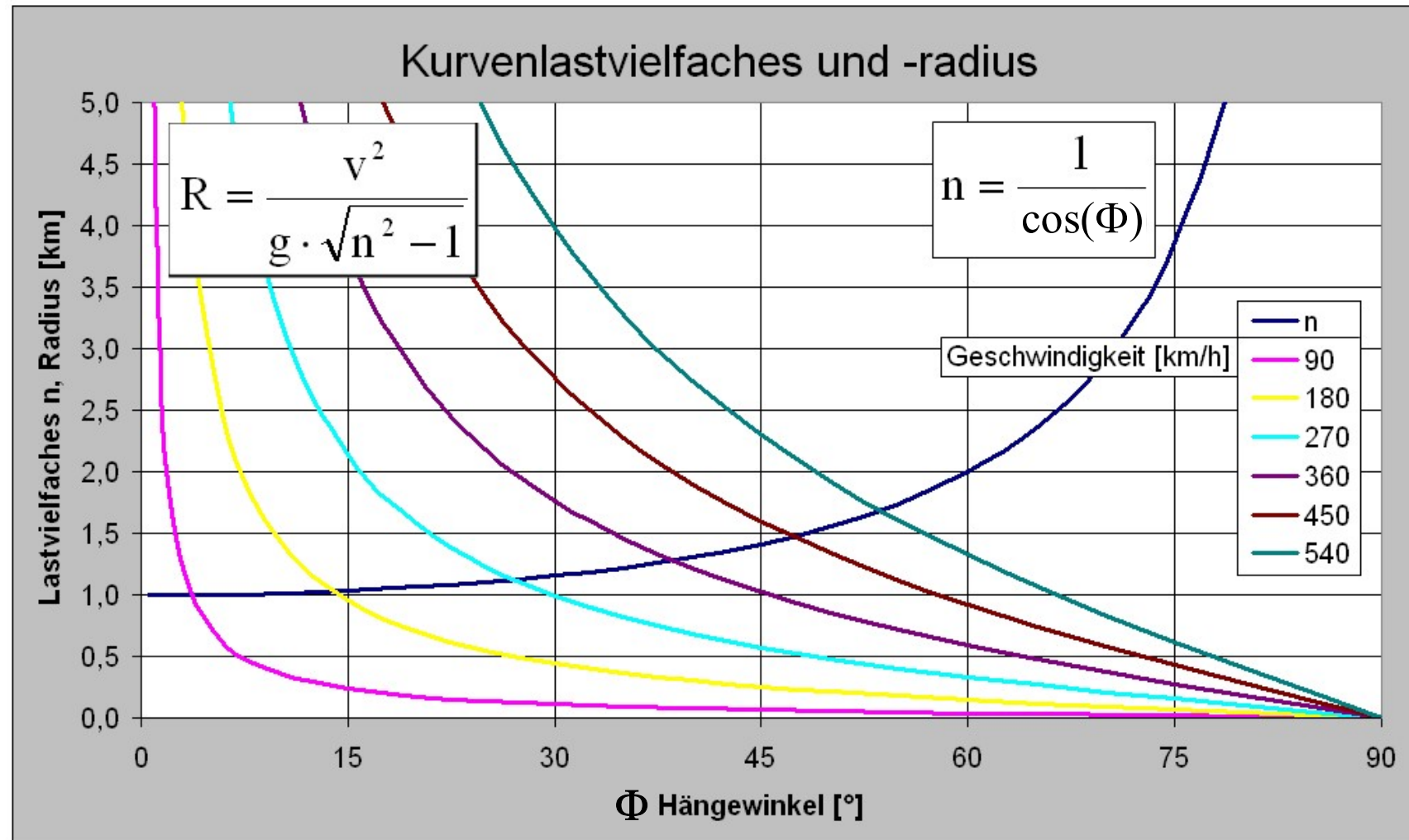
- und der nach dem Kreisradius aufgelösten Gleichung für die Zentrifugalkraft der Kreisradius folgt:

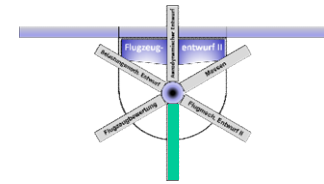
$$r = \frac{v^2}{g \cdot \sqrt{n^2 - 1}}$$



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

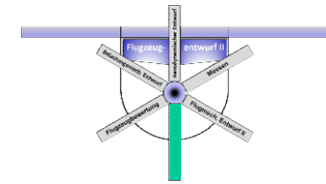




G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Beispiel:
 - sichere Lastvielfache von 2,5 (siehe: v-n-Diagramm)
 - Reisegeschwindigkeit von $Ma = 0,8$ in 11 km Höhe
- Ergebnis:
 - minimaler Kreisradius: ca. 2,5 km
 - Querneigung: ca. 66°
- Für Passagiere eines Verkehrsflugzeug wäre diese Beschleunigung äußerst unkomfortabel
- In der Praxis werden weitaus geringere Querneigungen geflogen.
- Für Hochleistungsflugzeuge (Kunstflug, Militär) gilt diese Begrenzung nicht.



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

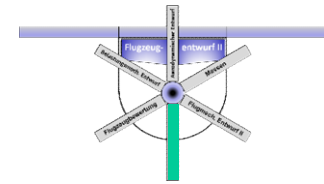
- Durch Einführung des Auftriebsbeiwertes in die Gleichung für das vertikale Kräftegleichgewicht ergibt sich die Kurvengeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot (G - S \cdot \cos \phi \cdot \sin \alpha_s)}{c_A \cdot \rho \cdot F \cdot \cos \phi}}$$

- Aus dem Kräftegleichgewicht entlang der Flugbahn, unter Annahme eines stationären Kreisflugs in konstanter Höhe, für den

$$S = \frac{W}{\cos \alpha_s} \text{ gilt, ist die Kurvengeschwindigkeit } v \text{ auch:}$$

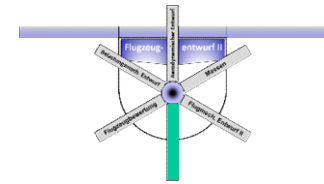
$$v = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{\cos \phi} \cdot \frac{1}{(c_A + c_W \cdot \tan \alpha_s)}}$$



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Daraus folgt, dass die Kurvengeschwindigkeit für Querneigungswinkel, die gegen 90° streben, gegen unendlich strebt.
- Dieses ist jedoch praktisch nicht der Fall, da der dazu erforderliche Schub nicht vorhanden und deshalb die Kurvengeschwindigkeit durch den verfügbaren Schub begrenzt bleibt.



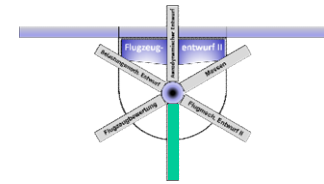
G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Bestimmung des Kurvenradius, in dem diese Horizontalkreisfluggeschwindigkeit in die Gleichung für die Zentrifugalkraft eingesetzt wird:

$$r = \frac{2 \cdot G}{g \cdot \rho \cdot F \cdot \sin \phi} \cdot \frac{1}{(c_A + c_W \cdot \tan \alpha_s)}$$

- Mit maximalem Anstellwinkel kann der kleinste Kreisradius stationär erfolgen werden.
- Beim Reiseflug in großer Höhe ist dieser durch **die Machzahl (Buffet) begrenzt**.
- Bei großem Anstellwinkel steigt der Widerstandsbeiwert an. Mit dem vorhandenen Schub kann die Gleichgewichtsgeschwindigkeit nicht gehalten werden.
- Ähnlich wie beim Reiseflug muss also auch eine Untersuchung des Schubüberschusses im Kreisflug erfolgen.



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Die im stationären Kreisflugs noch erfliegbare Minimalgeschwindigkeit, die sich als Funktion der Minimalgeschwindigkeit im Geradeausflug ausdrücken lässt, ist:

$$V_{s\phi} = \frac{V_s}{\sqrt{\cos \phi}}$$

- Wird die Horizontalflugbedingung aufgehoben, kann man kleinere Kurvenradien erfliegen.
- Im Extremfall ist die spiralförmige Flugbahn einer Rolle nach oben oder unten (Spiralsturz) auch als Kreisflug vorstellbar.
- Der wichtigste Parameter ist auch hierbei wieder der vorhandene Schub.

G Flugleistungen

7 Kurvenflug

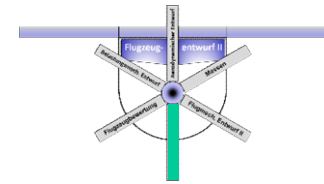
- Unter der Annahme eines mit der Geschwindigkeit konstant bleibenden Schubs (TL-Triebwerk) ergibt sich mit

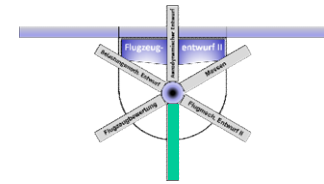
$$\frac{\partial r}{\partial \phi} = 0$$

für den maximalen Querneigungswinkel

$$\cos \phi_{\max} = \frac{S \cdot \sin \alpha_s}{G}$$

- Damit ist eine reine Abhängigkeit des Querneigungswinkels von der Bahnneigung und vom Schub gegeben.





G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Herleitung der Sink- und Steiggeschwindigkeit im Kurvenflug aus der allgemeinen Energiebetrachtung:

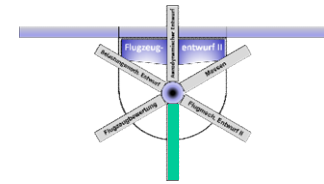
$$w = \frac{dH}{dt} = \frac{v \cdot (S_{vorh} - S_{erf})}{G}$$

- Es ergibt sich eine Sinkgeschwindigkeit, wenn ein Schubunterschuss und eine Steiggeschwindigkeit, wenn ein Schubüberschuss vorhanden ist.
- Mit der Annahme, dass die Flugbahn nicht mehr als 15° von der Horizontalen abweicht, ergibt sich mit der Horizontal-Schubforderung hinreichend genau

$$S = \frac{W}{\cos \alpha_s} = \frac{q \cdot c_w \cdot F}{\cos \alpha_s}$$

- ... und für Sinkgeschwindigkeit:

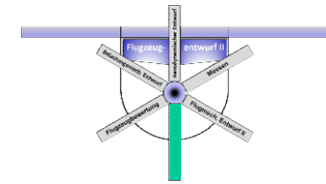
$$-\frac{dH}{dt} = v_{\text{sink}} = -\frac{v}{G} \cdot \left(S - \frac{\rho \cdot c_w \cdot v^2 \cdot F}{2 \cdot \cos \alpha_s} \right)$$



G Flugleistungen

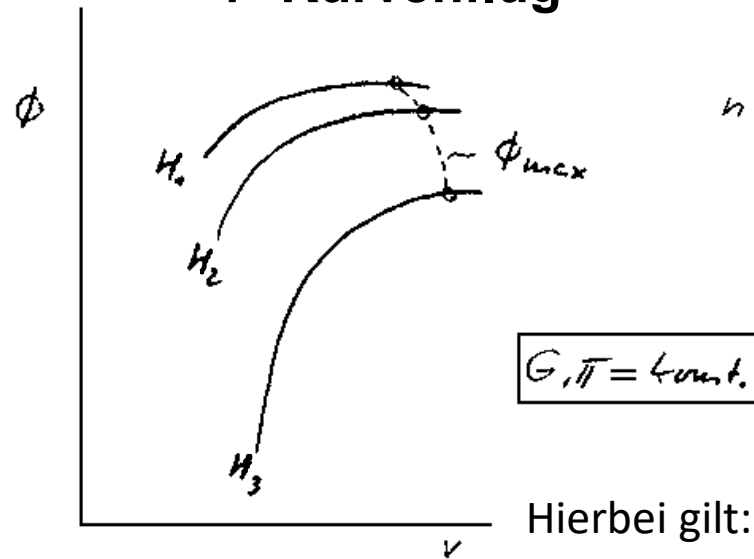
7 Kurvenflug

- Zu den drei bekannten Kräftegleichgewichtsbeziehungen (3, 4 und 5) kommen zwei geometrische Verhältnisse (Gleichung 1 und 2) hinzu, die den Gierwinkel einbeziehen sowie die aus der Reichweitenbetrachtung her bekannte zeitliche Änderung des Gewichts (Gleichung 6).
- Zusätzlich ist die Gierwinkelgeschwindigkeit als das Verhältnis von der Bahngeschwindigkeit und dem Kreisradius eingeführt worden.
- Es ist hierbei zur Vereinfachung unterstellt, dass der Schub tangential zur Flugbahn wirkt und dass die Trägheitskräfte in Flugbahnrichtung vernachlässigt werden. Mit dieser Annahme wird der Lastfaktor $n = A/G$.

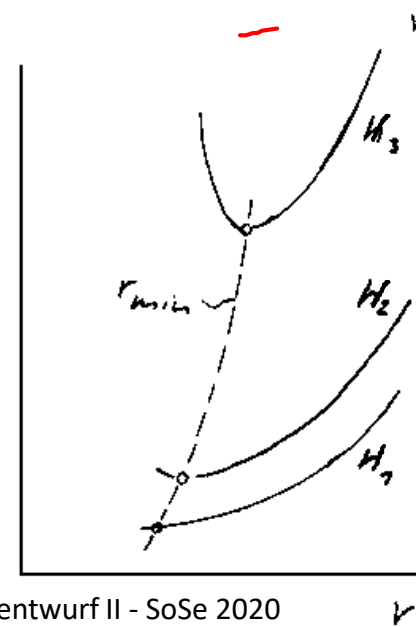
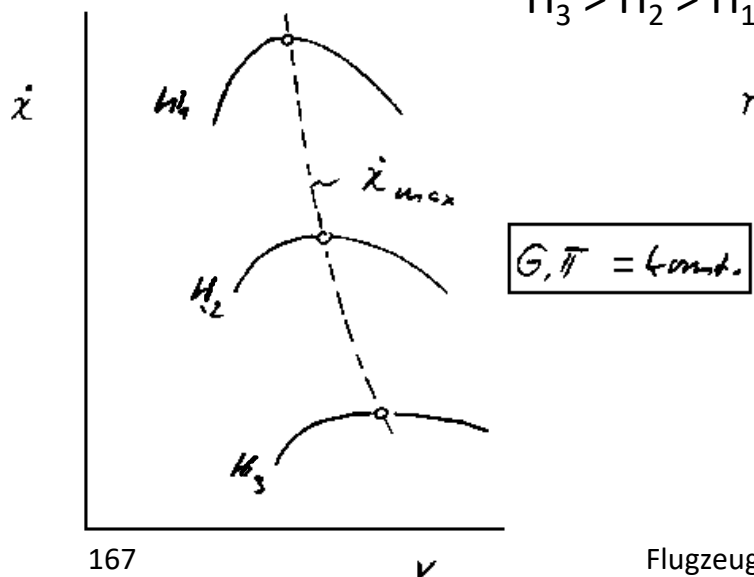
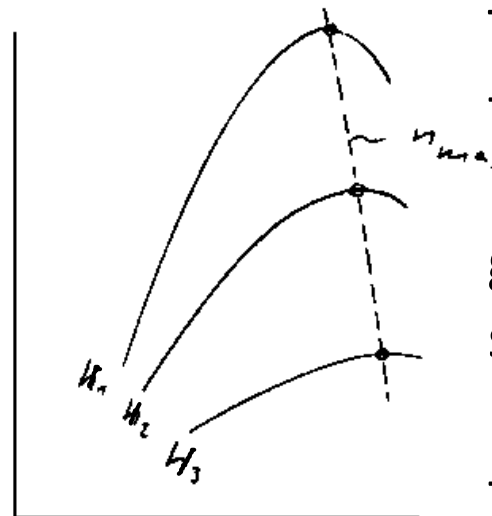


G Flugleistungen

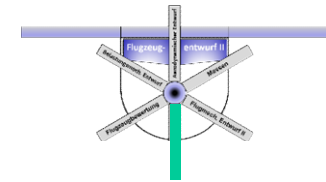
7 Kurvenflug



Hierbei gilt:
 $H_3 > H_2 > H_1$



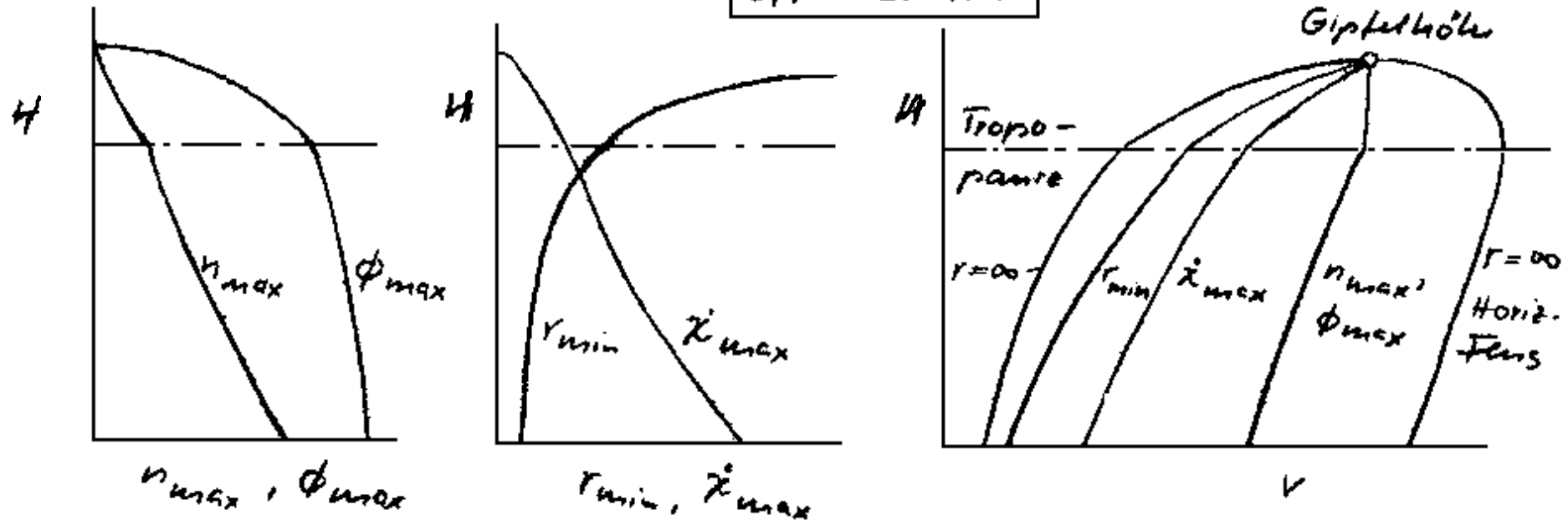
Typische Lösungen für die Kurvenflugparameter Querneigung, Winkelgeschwindigkeit, Kreisradius und Lastvielfaches für ein Strahlverkehrsflugzeug charakterisieren dessen Manövrierfähigkeit und zeigen signifikante Optima.



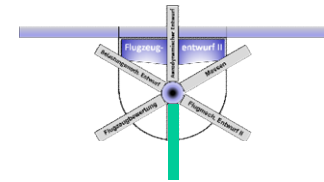
G Flugleistungen

7 Kurvenflug

$$G, \bar{\gamma} = \text{konst.}$$



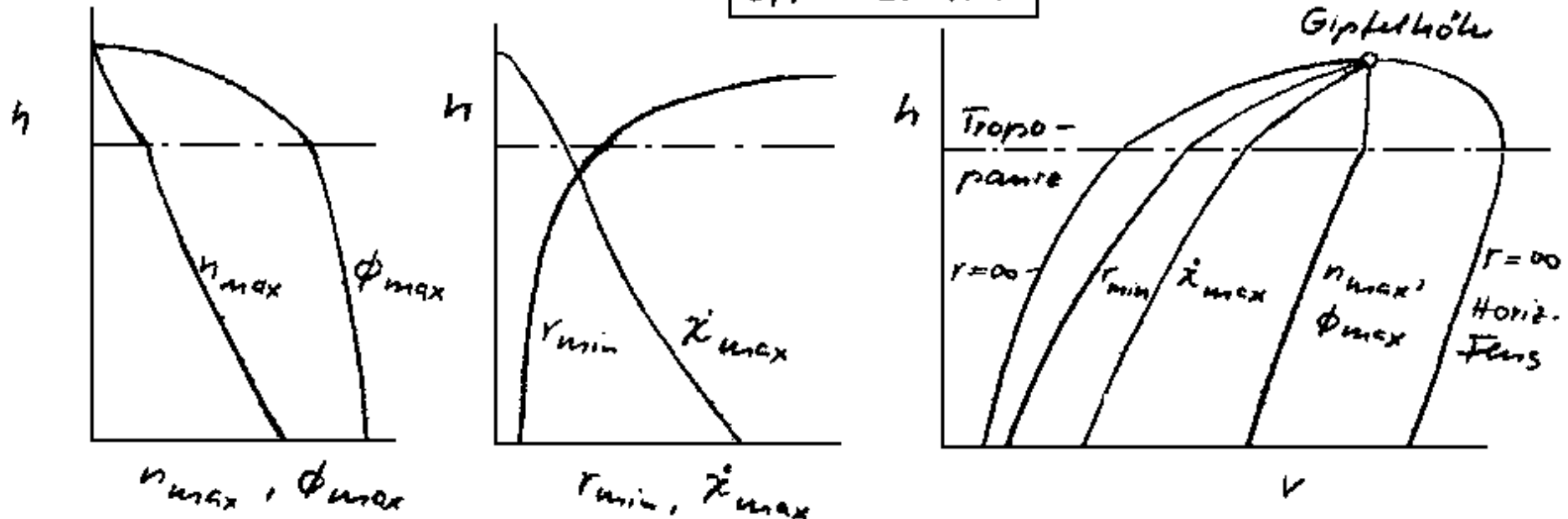
- Die Optimalwerte, eingetragen in das Flugbereichsdiagramm (H-v-Diagramm) zeigen, dass die Fluggeschwindigkeit für den minimalen Kreisradius nahe der minimalen Horizontalfluggeschwindigkeit liegt und kleiner als die Geschwindigkeit der größten Richtungsänderungsgeschwindigkeit ist.



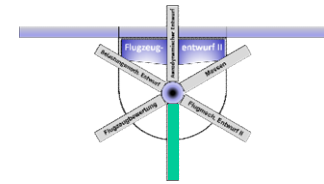
G Flugleistungen

7 Kurvenflug

$$G, \bar{\Gamma} = \text{konst.}$$



- Alle Geschwindigkeiten nehmen mit der Höhe zu und sind in der Gipfelhöhe identisch.
- Die Maxima für das Lastvielfache, den Querneigungswinkel sowie die Gierwinkelgeschwindigkeit nehmen mit zunehmender Höhe ab, wegen der minimale Kreisradius zunimmt und bei Erreichen der Gipfelhöhe unendlich wird. An diesem Punkt ist kein Kreisflug mehr möglich!



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

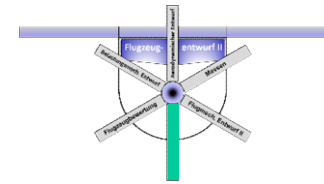
- Auch für den Kurvenflug lassen sich einfache Beziehungen mittels einer quadratischen Widerstandspolaren herleiten.
- Mit den dimensionslosen Parametern

$$n = \frac{A}{G}, \quad z = \frac{S \cdot E_{\max}}{G} \quad \text{sowie mit} \quad u = \frac{v}{v_R}$$

$$\text{und } E_{\max} = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{c_{W_0}}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}}} \text{ sowie } v_R = \sqrt{\frac{2 \cdot G}{\rho \cdot F}} \cdot \sqrt[4]{\frac{1}{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e}}$$

erhält man aus den umgeschriebenen Bewegungsgleichungen 3, 4 und 5:

$$2 \cdot z - u^2 - \frac{n^2}{u^2} = 0; \quad n \cdot \sin \phi - u \cdot \frac{\dot{\chi} \cdot v_R}{g} = 0; \quad n \cdot \cos \phi - 1 = 0$$



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Lastfaktor:

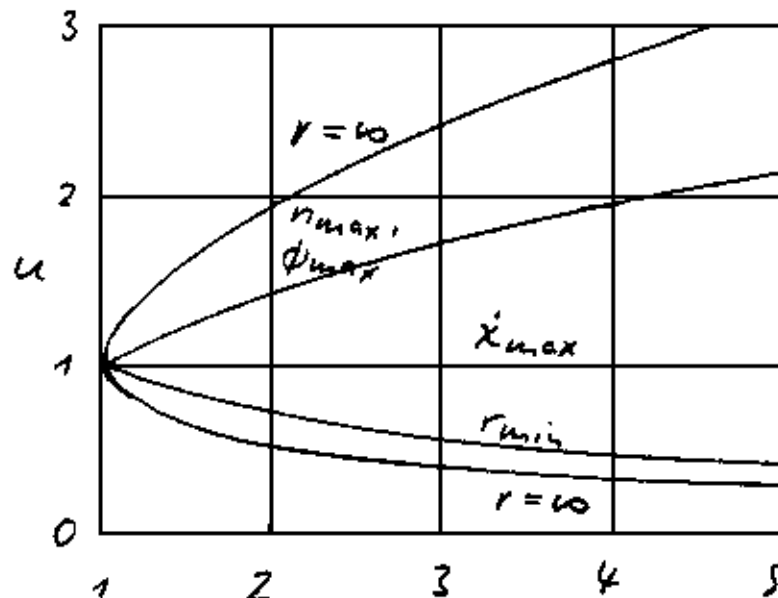
$$n = u \cdot \sqrt{2 \cdot z - u^2} = \frac{v}{v_R} \cdot \sqrt{2 \cdot \frac{S \cdot E_{\max}}{G} - \frac{v^2}{v_R^2}}$$

- Kurvenradius:

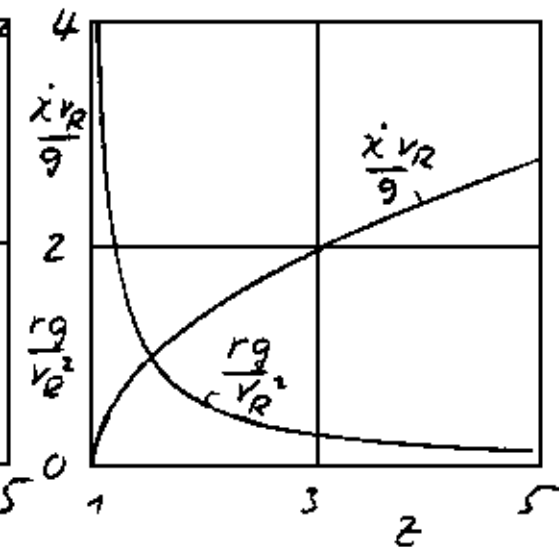
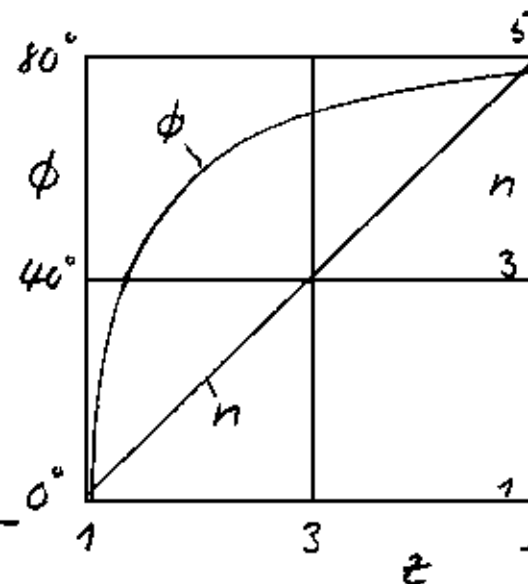
$$\frac{r \cdot g}{v_R^2} = \frac{1}{\sqrt{n^2 - 1}}$$

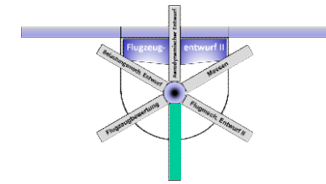
- Rollwinkel:

$$\cos \phi = \frac{1}{u \cdot \sqrt{2 \cdot z - u^2}}$$



$$z = (S \cdot E_{\max}) / G$$





G Flugleistungen

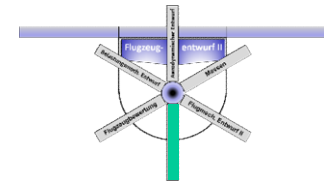
7 Kurvenflug

- Man erkennt, dass der Schub größer sein muss als der Widerstand, um mit begrenztem Radius einen Kreis fliegen zu können und dass dabei sowohl der Rollwinkel als auch das Lastvielfache > 1 sein müssen.

- Allgemein muss also gelten: $z > \frac{1}{2} \cdot \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right)$

- Dabei ergibt sich mit $n = 1$ und $\phi = 0$ für einen gegen unendlich strebenden Radius die Lösung für den Horizontalflug

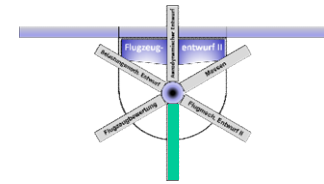
$$z = \frac{1}{2} \cdot \left(u^2 + \frac{1}{u^2} \right)$$



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

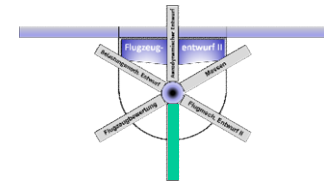
- Weiterhin wird deutlich, dass die Flächenbelastung einen grossen Einfluss auf den Kreisradius hat: Die Wendigkeit des Flugzeugs wird mit geringer werdender Flächenbelastung größer.
- Die optimale Flächenbelastung zeigt sich hier wieder einmal als ein Kompromiss aus der Reiseforderung, wobei sie wegen einer minimalen Gleitzahl, eines minimalen Flügelgewichts und geringsten Böenlastvielfachen möglichst groß sein sollte, und der Start- und Landeforderung sowie den Forderungen nach ausreichender Wendigkeit, wobei hierbei ein kleiner Wert zu bevorzugen ist.



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Mit Hilfe dieser Darstellung lassen sich die folgenden Phänomene zusammenfassen:
 - Da $z > 1$ für jede Höhe unterhalb der Gipfelhöhe ist, müssen die Geschwindigkeiten für $n_{\max} > \chi_{\max} > r_{\max}$ sein.
 - Alle Geschwindigkeiten sind begrenzt durch die Horizontalfluggeschwindigkeit.
 - Mit steigendem Schub wird die Kurvenleistung verbessert.
 - Bei gegebenem Schub und Gewicht ist die Kurvenleistung in Bodennähe am größten.



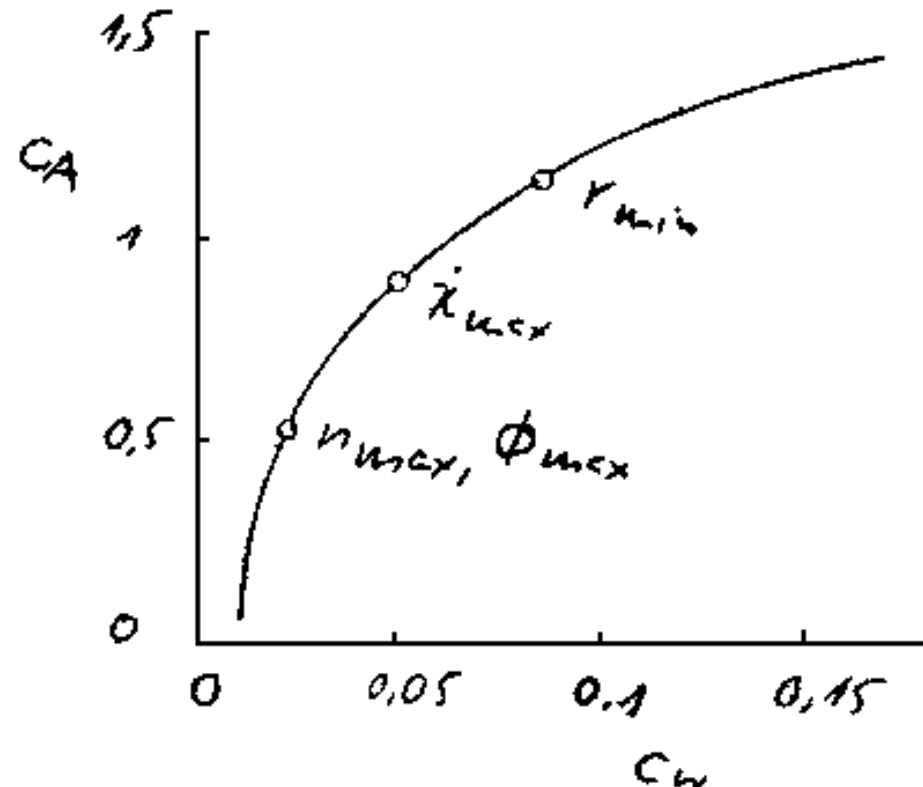
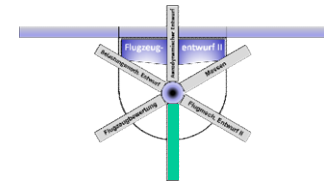
G Flugleistungen

7 Kurvenflug

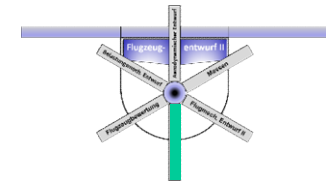
- Mit zunehmendem Schub bzw. abnehmender Gleitzahl oder Gewicht wird der bei optimalen Kurvenflügen auftretende Lastfaktor größer.
- Für den minimalen Kreisradius ist $n < \sqrt{2}$ und der optimale Rollwinkel kann u.U. wegen struktureller Überlastung unmöglich werden.
- Die Kurve mit dem maximalem Lastvielfachen wird mit dem Auftriebsbeiwert für die geringste Gleitzahl, die Kurve mit dem geringsten Kurvenradius mit einem großen Auftriebsbeiwert geflogen, der mit größer werdendem Schub anwächst.
- Die quadratische Polare ist für die hierbei vorliegenden großen Auftriebsbeiwerte u.U. zu ungenau.

G Flugleistungen

7 Kurvenflug



- Die Manövrierfähigkeit kann durch Verwendung von Hochauftriebshilfen (z.B. Klappen, Vorflügel) verbessert werden, da der minimale Kreistradius proportional dem Quadrat der Minimalgeschwindigkeit zunimmt.



G Flugleistungen

7 Kurvenflug

- Es sei noch darauf hingewiesen, dass eine weitere Möglichkeit zur Verringerung des Kurvenradius darin besteht, dass man unkoordinierte Kurvenflüge ausführt.
- Schiebt das Flugzeug mit der Nase zum Kurvenmittelpunkt resultiert eine zusätzliche Schubkomponente zur Kompensation der Zentrifugalkraft.
- Es ändert sich die Bewegungsgleichung in radialer Richtung und Flugbahnrichtung und es ergibt sich

$$\tan \phi = \frac{v^2}{g \cdot r} - \frac{S}{G} \cdot \cos \alpha_s \cdot \sin \psi$$

$$\text{sowie } r = \frac{2 \cdot (G - S \cdot \sin \alpha_s \cdot \cos \phi)}{g \cdot \rho \cdot c_A \cdot F \cdot \left(\sin \phi + \frac{S}{G} \cdot \cos \phi \cdot \cos \alpha_s \cdot \sin \psi \right)}$$

