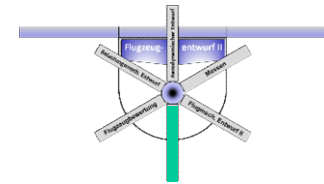


Willkommen zur Lehrveranstaltung

# Flugzeugentwurf II



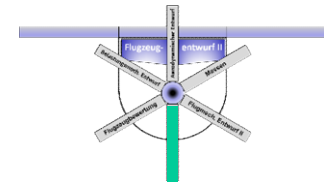
**Andreas Bardenhagen**  
**Andreas Gobbin**



# G Flugleistungen

## Übersicht

- G.1 Bewegungsgleichungen
- G.2 Stationärer Horizontalflug
  - G.2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge
  - G.2.2 Horizontalflugdiagramm für Propellerflugzeuge
  - G.2.3 Schubabschätzung aus Reiseforderung
  - G.2.4 Dimensionsloses Horizontalflugdiagramm
- G.3 Steigflugleistungen
  - G.3.1 Quasistationäre Bewegungsgleichungen
  - G.3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare
  - G.3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode



# G Flugleistungen

## Übersicht

### G.4 Reichweite und Flugdauer

#### G.4.1 Grundgleichungen des Reichweitenfluges

##### G.4.1.1 Reichweite bei konstant. Flughöhe und Anstellwinkel

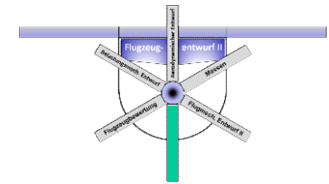
##### G.4.1.2 Reichweite bei konstant. Geschwindigkeit und Anstellwinkel

##### G.4.1.3 Reichweite bei konstant. Flughöhe und Geschwindigkeit

##### G.4.1.4 Vergleich der Reichweitenfälle

##### G.4.1.5 Reichweite des Propellerflugzeugs

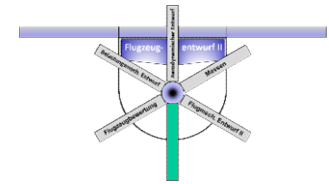
#### G.4.2 Energiehöhenmethode



# G Flugleistungen

## Übersicht

- G.4.3 Momentane (spezifische) Reichweite und Flugdauer
  - G.4.3.1 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit Strahlantrieb
  - G.4.3.2 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit PTL-Antrieb
  - G.4.3.3 Reichweitenoptimale Fluggeschwindigkeit mit ZTL-Antrieb
  - G.4.3.4 Flugdauer mit quadratischer Widerstandspolare und PTL-Antrieb
  - G.4.3.5 Flugdauer mit quadratischer Widerstandspolare und TL-Antrieb
  - G.4.3.6 Zusammenfassung Reichweite und Flugdauer
- G.4.4 Reichweite und Flugdauer unter Windeinfluss
- G.5 Dimensionslose Leistungsrechnung
- G.6 Sinkflug
- G.7 Kurvenflug



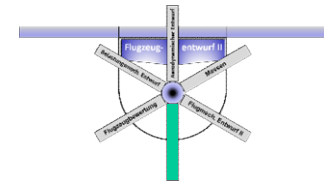
## G Flugleistungen

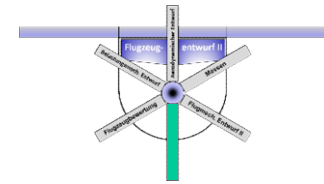
### Übersicht

- Die Entwurfsaufgabe für ein Flugzeug wird auch durch die **Leistungsanforderungen** definiert.
- Diese sind für jedes Einsatzgebiet unterschiedlich festgelegt.
- Beim Verkehrsflugzeug stehen die **Reichweite** bei gegebener **Nutzlast** sowie die **Reisegeschwindigkeit** im Vordergrund.
- Auch Größen wie **Steigfähigkeit** und **Anfangsreiseflughöhe** können als Entwurfsforderungen festgelegt werden.
- Bei Kampf- und Kunstflugzeugen stehen darüber hinaus beispielsweise die **Wendigkeit**, welche durch den **erzielbaren Kreisradius** beschrieben werden kann sowie das **Beschleunigungsvermögen** auf der Forderungsliste.

# G Flugleistungen

## Übersicht

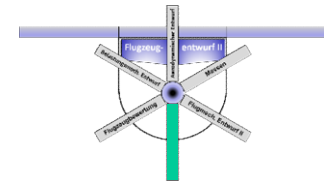




## G Flugleistungen

### Übersicht

- Für Verkehrsflugzeuge ist das **Nutzlast-Reichweiten-Diagramm** das aussagekräftigste Flugleistungsdiagramm.
- Dieses wurde in der ersten Entwurfsphase mit vereinfachenden Annahmen ermittelt.
- Hierbei wurden die Start-, Steig- und Sinkfluganteile an der Flugmission einfach vernachlässigt
- Dabei wurde von folgenden Annahmen ausgegangen:
- Während des Fluges in Auslegungsflughöhe sind die aerodynamischen Bedingungen konstant ( $c_A$ ,  $c_A/c_W$ ), da nur mit dem mittleren Gewicht  $G_m$  gerechnet wurde.
- Eine reale Flugmission besteht jedoch aus den Flugabschnitten Steig-, Reise- und Sinkflug mit jeweils unterschiedlichen Flugbedingungen (Höhe, Geschwindigkeit, Gewicht usw.).

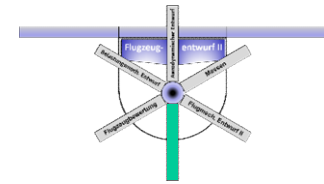


## G Flugleistungen

### Übersicht

- Wird bei der Berechnung des Fluggewichts der Steigflug berücksichtigt, so muss festgelegt werden, wie ein „optimaler“ Steigflug durchgeführt bzw. welche Steigfluggeschwindigkeit „optimalerweise“ geflogen werden sollte.
- Daraus folgt die Frage nach dem Optimalkriterium für schnellstes Steigen, größtem Steigwinkel bzw. minimalem Verbrauch.
- Für eine genaue Analyse des Reisefluges müssen die realen Verhältnisse berücksichtigt werden.
- Dazu gehört die Überlegung, wie eine optimale Reiseflugstrategie für verschiedene Flugmissionen (längste Flugdauer, kürzeste Flugzeit oder verbrauchsminimalem Flug) auszusehen hat und welche Konsequenzen daraus für die Berechnung resultieren.

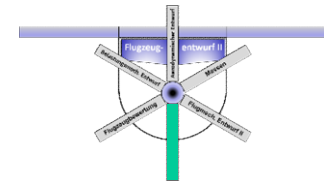




## G Flugleistungen

### Übersicht

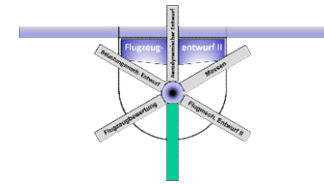
- Zur Berechnung einer realen Flugmission kann der Sinkfluganteil mit zur Streckenrechnung gezählt und der Vorteil eines geringen Kraftstoffverbrauchs beim antriebslosen Gleitflug genutzt werden. Auch hier stellt sich die Frage nach den Optimalitätskriterien.
- Schließlich werden in diesem Kapitel auch noch Flugleistungsaussagen für den Kreisflug hergeleitet und diskutiert. Insbesondere wird der erhöhte Schubbedarf im stationären Kurvenflug berechnet.



# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen

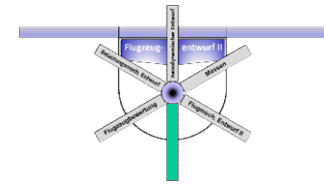
- Die Flugleistungen eines Flugzeugs können allgemeingültig ermittelt werden, wenn dessen äußere Kräfte (Schub, Widerstand, Auftrieb, Gewicht) im **stationären, d.h. unbeschleunigten Zustand** des Horizontal-, Sink-, Steig- und Kurvenflugs analysiert werden.
- Die **dynamische Leistungsrechnung** berücksichtigt neben den genannten Kräften **Beschleunigungen** senkrecht und parallel zur Flugbahn.
- Für Flugzeuge mit Unterschallgeschwindigkeit im erfliegbaren Höhenbereich können die dynamischen Effekte (z.B. Abfangen) durch Korrekturen der stationären Rechnung erfasst werden.
- Bei Überschallflugzeugen ist die stationäre Betrachtung allein nicht ausreichend → dynamische Leistungsanalyse nötig!



# G Flugleistungen

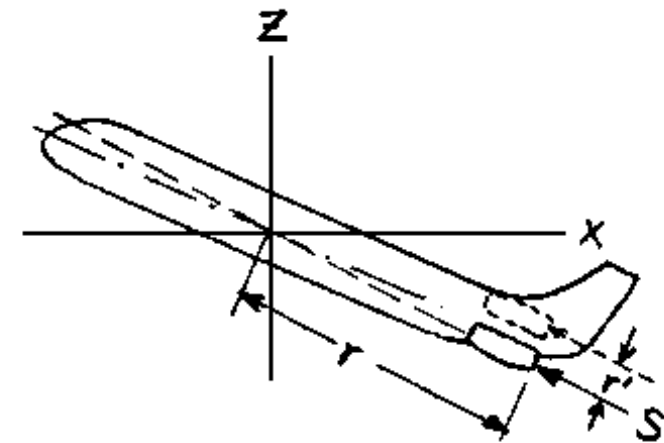
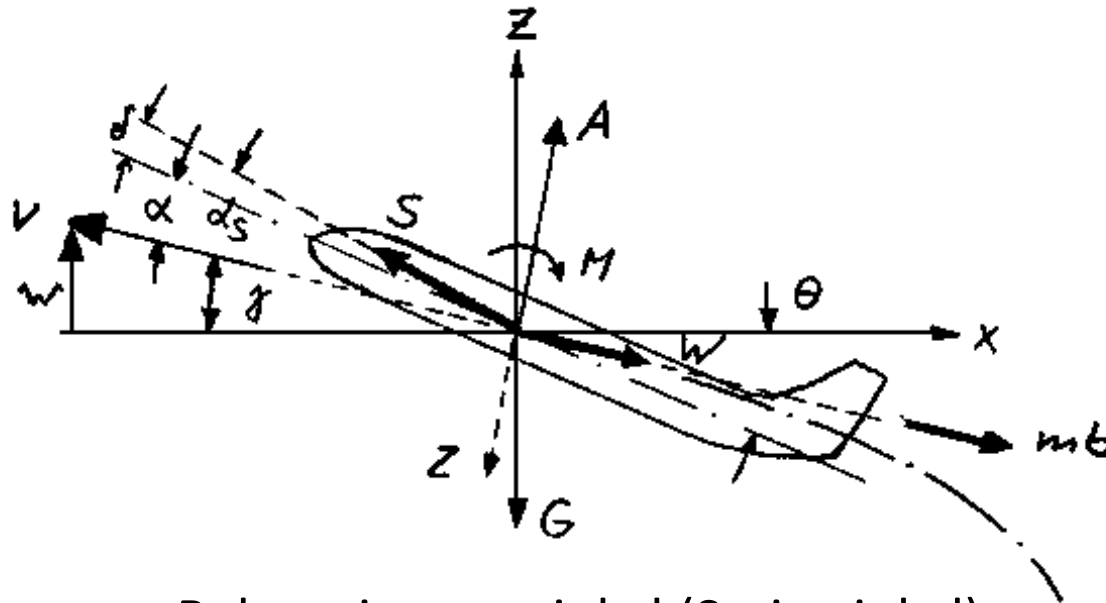
## 1 Bewegungsgleichungen

- Beispielsweise kann ein Unterschallflugzeug die theoretische Gipfelhöhe (Höhe, bei der die stationäre Steiggeschwindigkeit null wird) nur asymptotisch erreichen, es sei denn das Gewicht wird reduziert (z.B. durch Ballastabwurf).
- Ein SST mit  $Ma = 2$  bis  $3$  in großen Flughöhen kann durch Abfangen leicht auf eine größere als die stationäre Gipfelhöhe gebracht werden, wobei kinetische Energie teilweise in potentielle Energie umgewandelt wird.
- Ein solches Manöver kann natürlich nicht durch eine stationäre Betrachtungsweise beschrieben werden.
- Es müssen dazu die Differenzialgleichungen der Bewegung ausgewertet werden.

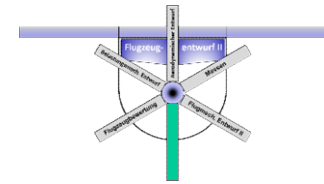


# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen

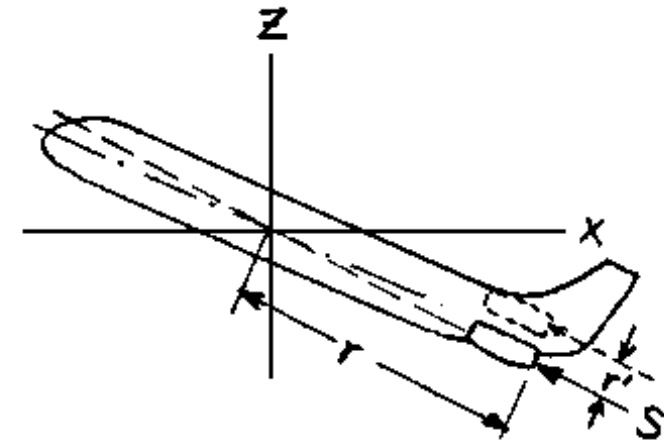
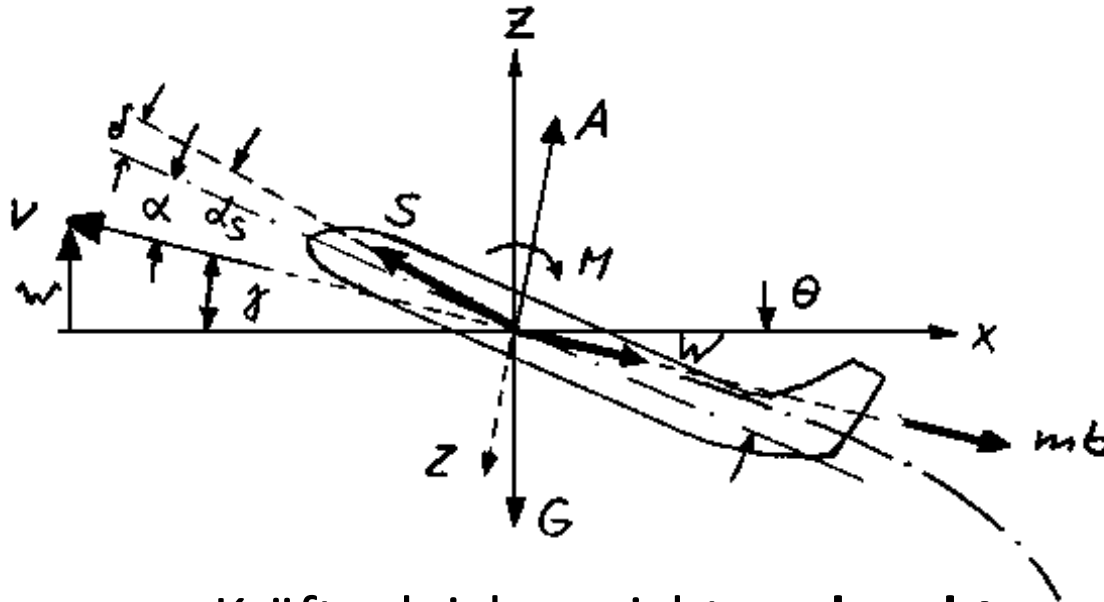


- $\gamma$  Bahnneigungswinkel (Steigwinkel)
- $\alpha$  Anstellwinkel
- $\theta$  Lagewinkel der Rumpflängsachse ( $\theta = \alpha + \gamma$ )
- $\alpha_s$  Winkel zwischen Schubvektor und Flugbahn
- $\delta$  Winkel zwischen Schubvektor und Rumpflängsachse ( $\delta = \alpha_s - \alpha$ )
- $r$  horizontaler Abstand des Schubangriffspunktes vom Schwerpunkt
- $r'$  vertikaler Abstand des Schubangriffspunktes vom Schwerpunkt



# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen

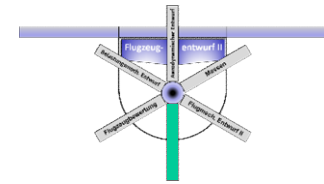


- Kräftegleichgewicht **senkrecht zur Flugbahn:**

$$A - G \cdot \cos(\gamma) + S \cdot \sin(\alpha_s) = Z = \frac{G}{g} \cdot b_n = \frac{G}{g} \cdot v \cdot \dot{\gamma}$$

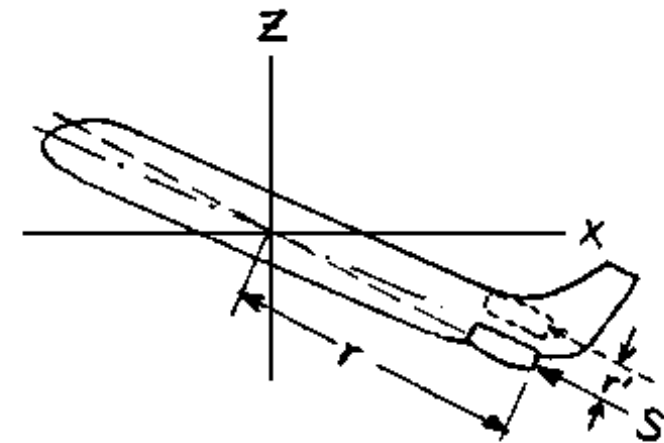
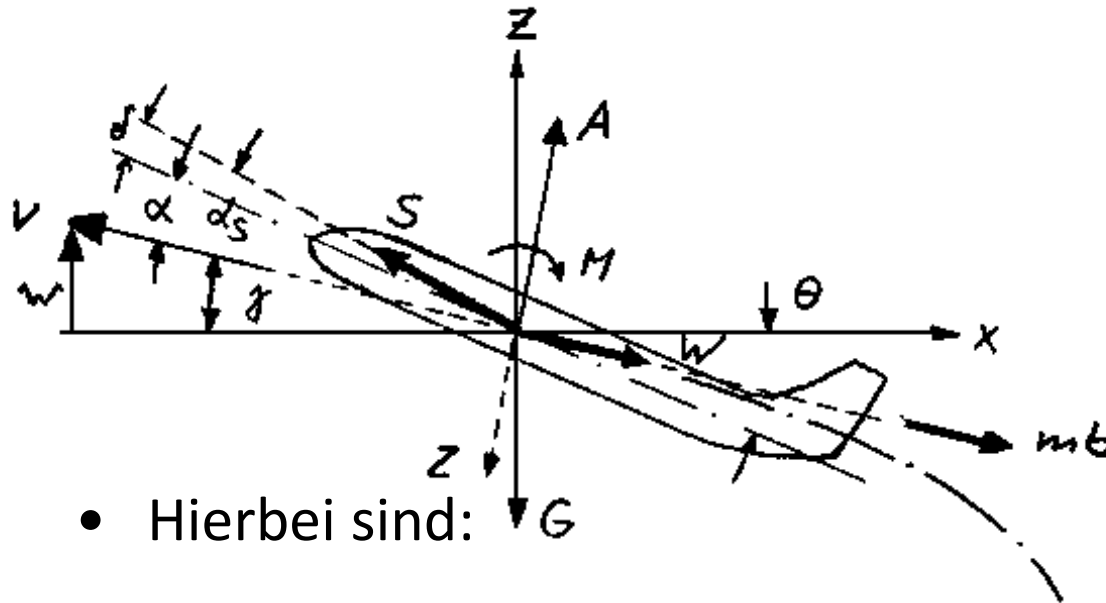
- **Parallel zur Flugbahn:**

$$S \cdot \cos(\alpha_s) - G \cdot \sin(\gamma) - W = \frac{G}{g} \cdot b_t = \frac{G}{g} \cdot \dot{v}$$



# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen



- Hierbei sind:

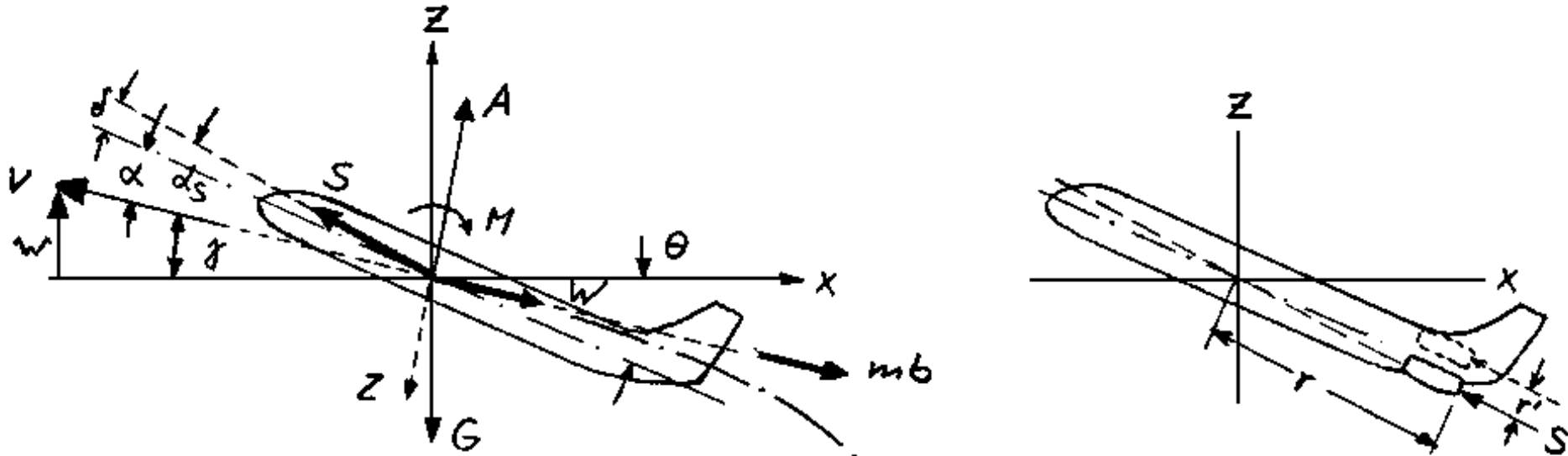
- $b_t = \frac{dv}{dt}$  die tangentielle Beschleunigung und

- $b_n = \frac{v^2}{R} = v \cdot \omega = v \cdot \dot{\gamma}$  die auf den Krümmungsmittelpunkt der

Bahn im Abstand R gerichtete Normalkomponente mit  $\omega = \frac{v}{R}$

# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen



- 3. Bewegungsgleichung folgt aus dem Momentengleichgewicht:

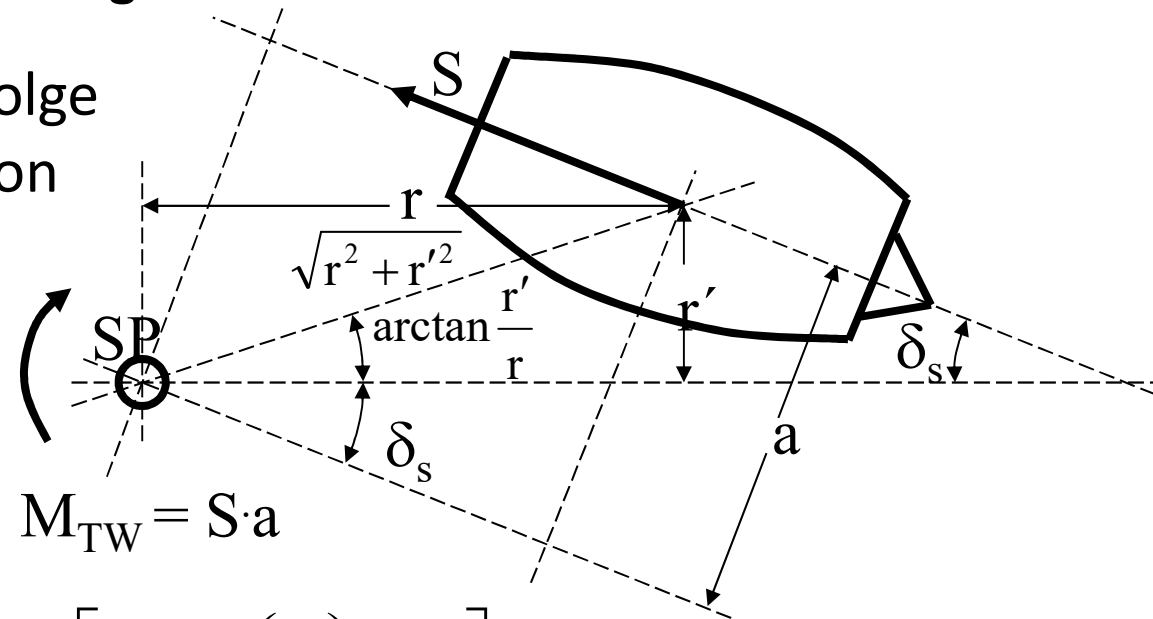
$$\frac{G}{g} \cdot i_y^2 \cdot \ddot{\theta} = -M_{TW} + M$$

mit dem Trägheitsradius  $i_y$ , wobei sich dieser aus der Beziehung  $I = m \cdot i_y^2$  ergibt (gleiches Trägheitsmoment wie Flugzeug).

# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen

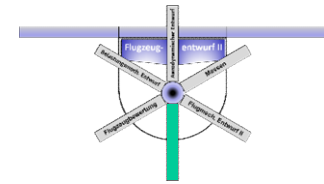
- Das Nickmoment infolge Schub ist abhängig von der Einbaulage des Triebwerks.



$$M_{TW} = S \cdot a$$

$$\begin{aligned} M_{TW} &= S \cdot \sqrt{r^2 + r'^2} \cdot \sin \left[ \arctan \left( \frac{r'}{r} \right) + \delta_s \right] \\ &= S \cdot r \cdot \sqrt{1 + \left( \frac{r'}{r} \right)^2} \cdot \sin \left[ \arctan \left( \frac{r'}{r} \right) + \delta_s \right] \end{aligned}$$

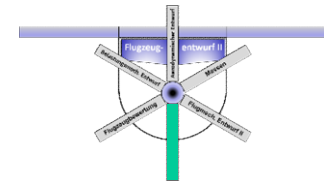




# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen

- Damit ist die Längsbewegung des Flugzeugs allgemein erfasst, wenn Triebwerkschub, aerodynamische Kräfte, Gewicht und Trägheitsmomente bekannt sind.
- Unter der **Annahme**, dass alle Manöver, die im folgenden betrachtet werden, **nur langsame Drehungen** um die Querachse verursachen und damit die Beiträge der aerodynamischen Dämpfung sowie des Trägheitsmoments vernachlässigbar werden, **entfällt die Momentengleichung**.  
→ Es **verbleiben** lediglich die **zwei Kräftegleichgewichte**.



# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen

- Es gilt für Manöver mit langsamen Drehungen (quasi-stationär):

$$A - G \cdot \cos(\gamma) + S \cdot \sin(\alpha_s) = \frac{G}{g} \cdot v \cdot \dot{\gamma}$$

bzw. mit Beiwerten

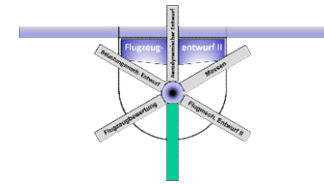
$$\frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot c_A \cdot F - G \cdot \cos(\gamma) - \frac{G}{g} \cdot v \cdot \dot{\gamma} + S \cdot \sin(\alpha_s) = 0$$

sowie

$$S \cdot \cos(\alpha_s) - G \cdot \sin(\gamma) - W = \frac{G}{g} \cdot \dot{v}$$

bzw.

$$S \cdot \cos(\alpha_s) - G \cdot \sin(\gamma) - \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot c_W \cdot F - \frac{G}{g} \cdot \dot{v} = 0$$



# G Flugleistungen

## 1 Bewegungsgleichungen

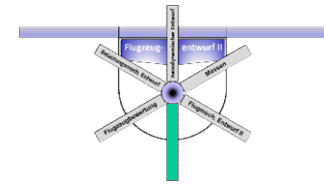
- Aus dem vertikalen Kräftegleichgewicht erhält man mit der Horizontalflugbedingung  $G = c_{\bar{A}} \cdot q \cdot F$

für den Auftriebsbeiwert  $c_A = c_{\bar{A}} \cdot \left( \cos(\gamma) + \frac{v}{g} \cdot \dot{\gamma} - \frac{S}{G} \cdot \sin(\alpha_s) \right)$

- Dabei entspricht der geklammerte Term dem Lastfaktor  $n$ .
- Der Schubbedarf bei diesem Gleichgewichts- $c_A$  ergibt sich aus der zweiten Bewegungsgleichung zu

$$\frac{S}{G} = \frac{1}{\cos(\alpha_s)} \cdot \left( \frac{c_w}{c_{\bar{A}}} + \sin(\gamma) + \frac{\dot{v}}{g} \right)$$

- Der Quotient  $\frac{c_w}{c_{\bar{A}}}$  entspricht der aerodynamischen Effizienz des Flugzeugs.



# G Flugleistungen

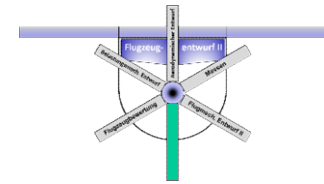
## 2 Stationärer Horizontalflug

- Für stationäre Flugzustände verschwinden die Beschleunigungen sowie das resultierende Moment.
- Für den stationären Horizontalflug (Reisekondition) gilt zusätzlich, dass der Bahnneigungswinkel zu Null wird.
- Daraus folgt für die Fluggeschwindigkeit aus dem vertikalen Kräftegleichgewicht

$$v = \sqrt{\frac{2 \cdot [G - S \cdot \sin(\alpha_s)]}{\rho \cdot c_A \cdot F}}$$

- und für den erforderlichen Schub aus dem horizontalen Gleichgewicht

$$S = \frac{\rho \cdot v^2 \cdot c_w \cdot F}{2 \cdot \cos(\alpha_s)}$$



# G Flugleistungen

## 2 Stationärer Horizontalflug

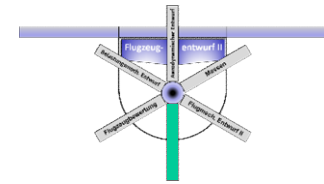
- Die Geschwindigkeit in die Schubgleichung eingesetzt ergibt zunächst

$$S = \frac{c_W \cdot [G - S \cdot \sin(\alpha_S)]}{c_A \cdot \cos(\alpha_S)}$$

- und nach Division durch G und Auflösen erhält man

$$\frac{S}{G} = \frac{c_W \cdot \left[ 1 - \frac{S}{G} \cdot \sin(\alpha_S) \right]}{c_A \cdot \cos(\alpha_S)}$$

$$\frac{S}{G} = \frac{c_W}{c_A \cdot \cos(\alpha_S) + c_W \cdot \sin(\alpha_S)}$$



# G Flugleistungen

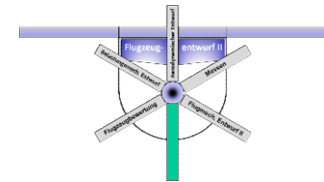
## 2 Stationärer Horizontalflug

- Im Geschwindigkeitsbereich des stationären Horizontalflugs ist  $c_W \cdot \sin(\alpha_S)$  sehr klein gegenüber  $c_A$  und  $c_A \cdot \cos(\alpha_S)$
- Deshalb gilt

$$\frac{S}{G} = \frac{c_W}{c_A} \cdot \frac{1}{\cos(\alpha_S)} \quad \text{sowie} \quad v = \sqrt{\frac{2}{\rho} \cdot \frac{G}{F} \cdot \frac{1}{c_A}}$$

- Unter der Annahme, dass der Schub  $S$  in Bahnrichtung wirkt und damit  $\cos(\alpha_S) = 1$  ist, folgt die bekannte Beziehung für den Schubbedarf:

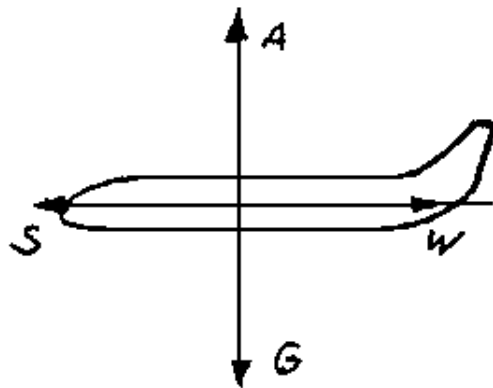
$$\frac{S}{G} = \frac{c_W}{c_A} = \varepsilon$$



# G Flugleistungen

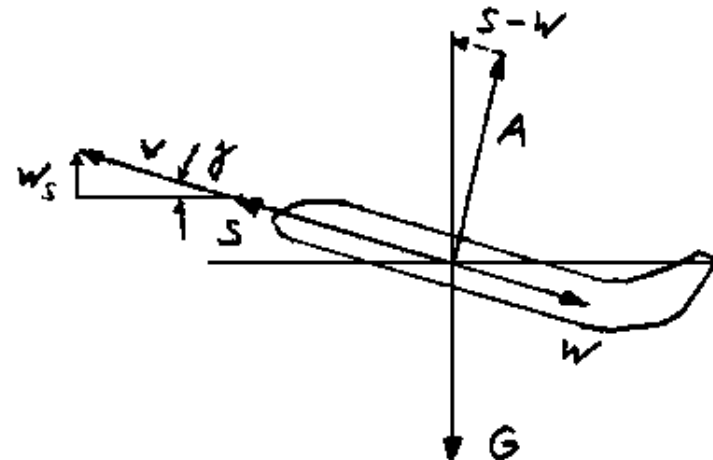
## 2 Stationärer Horizontalflug

Horizontalflug



$$\left. \begin{array}{l} A = G \\ S = W \end{array} \right\} \rightarrow v$$

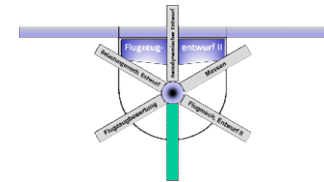
Steigflug



$$\sin \alpha = \frac{S-W}{G} = \frac{W_s}{v}$$

$$W_s = \frac{S-W}{G} v$$

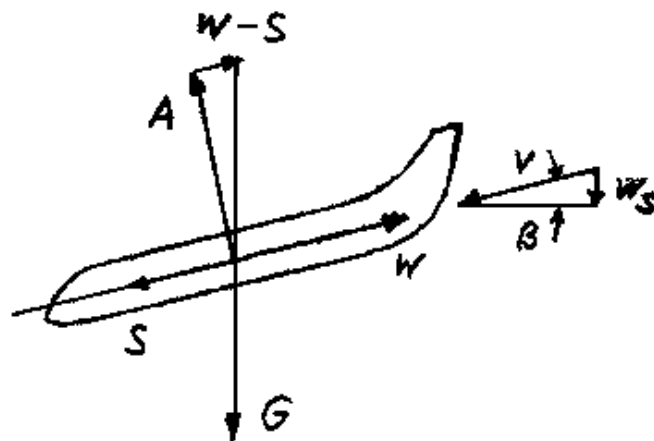
Schubüberschuss gegenüber Horizontalflug



# G Flugleistungen

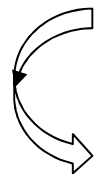
## 2 Stationärer Horizontalflug

### Sinkflug



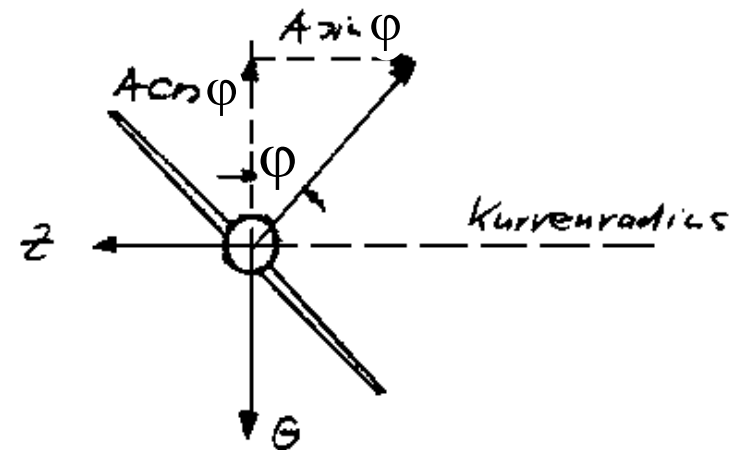
$$\sin \beta = \frac{W-S}{G} = \frac{W_S}{v}$$

$$W_S = \frac{W-S}{G} v$$



Schubverringern gegenüber Horizontalflug

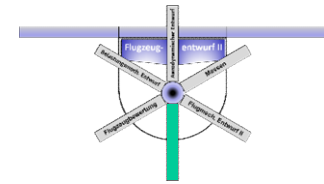
### Kurvenflug



$$A \sin \phi = z = \frac{G}{g} \frac{v^2}{R}$$

$$R = \frac{G/F}{\frac{g}{2} \sin \phi}$$



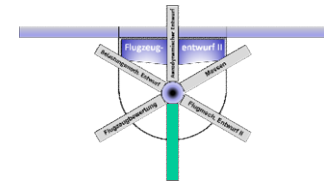


# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

- Ein für die Leistungsbetrachtung häufig verwendetes Hilfsmittel ist das Horizontalflugdiagramm
- Es werden hier erforderlicher Schub und vorhandener Schub als Funktion der Fluggeschwindigkeit darstellt.
- Mit
  - einer quadratischen Widerstandspolare und
  - der Setzung: „erforderliche Schub gleich dem Widerstand“
 ergibt sich:

$$\left( \frac{S}{G} \right)_{\text{erf.}} = \varepsilon = \frac{C_W}{C_A} = \frac{C_{W_0}}{C_A} + \frac{C_{W_p}}{C_A} + \frac{C_{W_i}}{C_A}$$



# G Flugleistungen

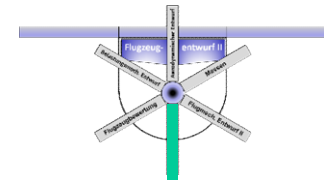
## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

- Nach Einsetzen der aerodynamischen Beiwerte und der Annahme, dass das mittlere Fluggewicht sich vom Abfluggewicht durch den Kraftstofffaktor  $a$  unterscheidet, erhält man

$$\frac{S_{erf.}}{G_A} = a \cdot \left( \frac{\rho \cdot v^2}{2 \cdot a \cdot G_A / f_s} + \frac{c_{W_p} \cdot \rho \cdot v^2}{2 \cdot a \cdot G_A / F} + \frac{2 \cdot a \cdot G_A / F}{\pi \cdot \Lambda \cdot e \cdot \rho \cdot v^2} \right)$$

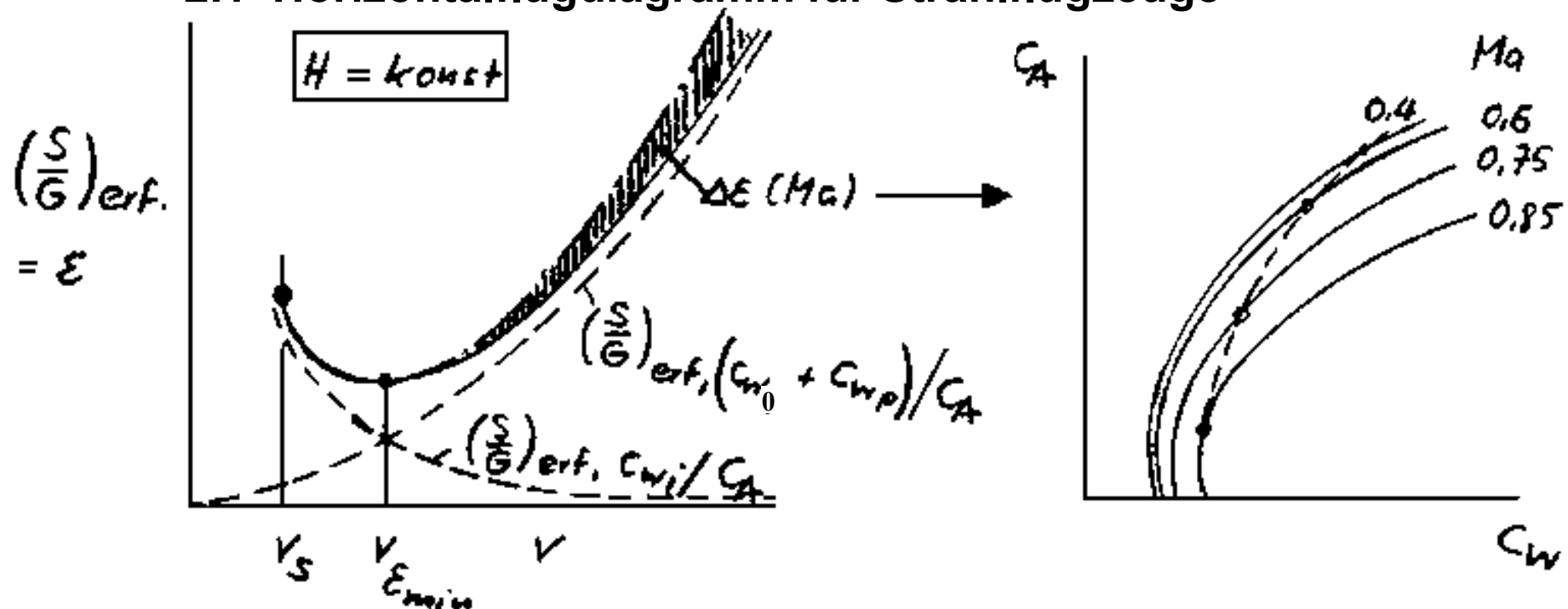
$$f_s = c_{W_0} \cdot F$$

- Diese Gleichung stellt gewichtsbezogenen Schubbedarf für den inkompressiblen Fall dar.

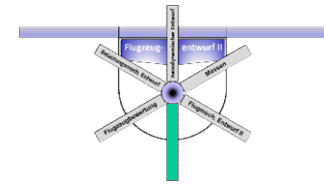


# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge



- Die einzelnen Widerstandsanteile sind in ihrer Geschwindigkeitsabhängigkeit gestrichelt dargestellt.
- Der schraffierte Bereich stellt den mit Hilfe der rechts gezeigten kompressiblen Polaren ermittelten Zuwachs durch den Wellenwiderstand dar.



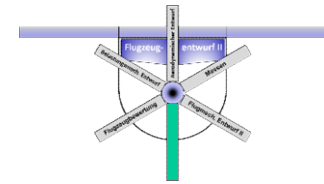
# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

- Der vorhandene Schub ist abhängig von der Flughöhe, der Geschwindigkeit, dem Bypassverhältnis und dem Drosselgrad.
- Eine recht gute Approximation für das Schubkennfeld wurde bereits im Kapitel C vorgestellt:

$$\frac{S}{S_0} = D \cdot \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \cdot e^{-0,35 \cdot Ma \cdot \left( \frac{p}{p_0} \right) \cdot \sqrt{\mu}}$$

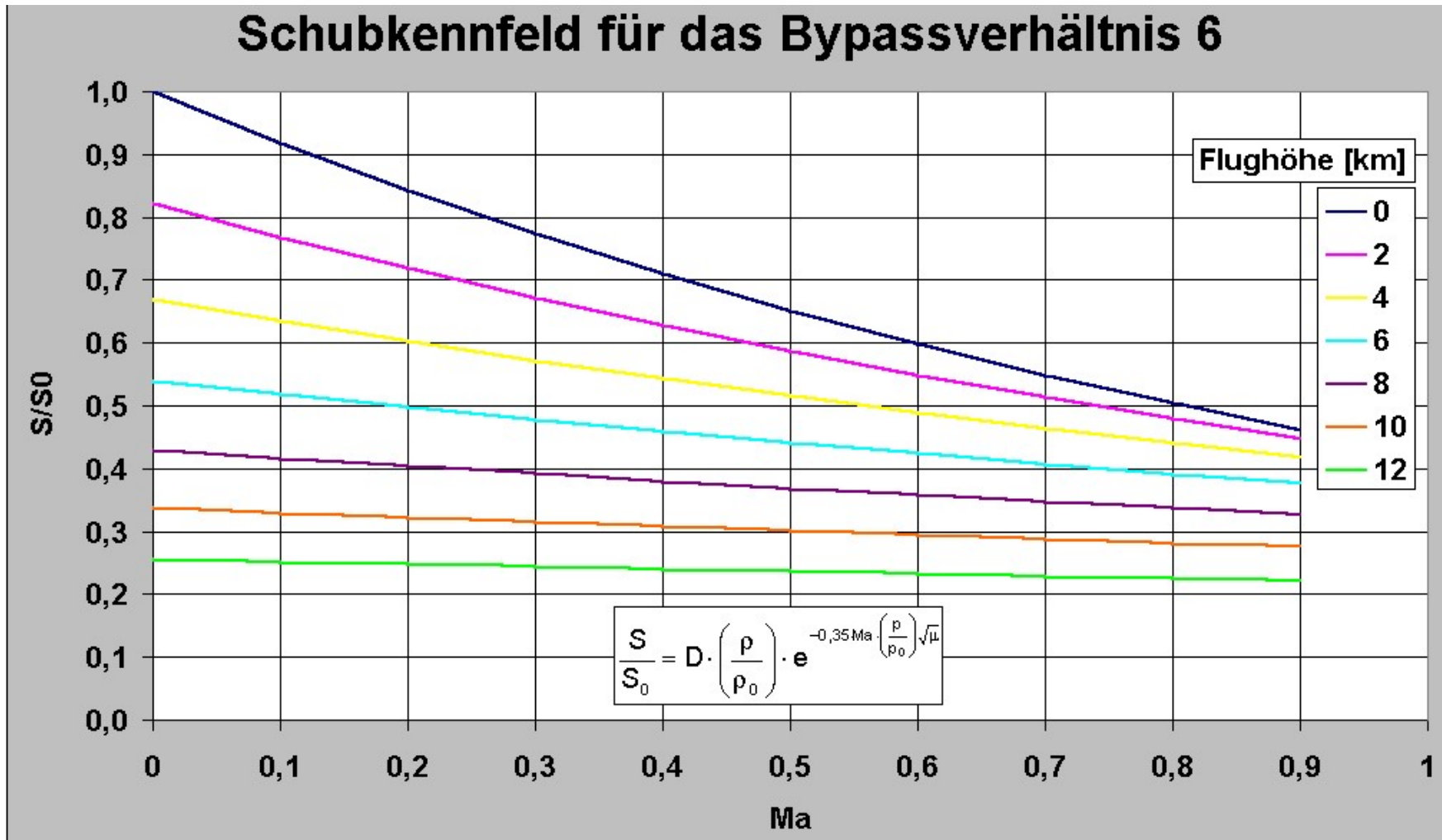
- Es gehen hier die der Flughöhe entsprechenden Dichte- und Druckverhältnisse und der Drosselgrad in % ein.
- Im folgenden ist Schubkennfeld für ein ZTL-Triebwerk mit Bypassverhältnis 6 und einem Drosselgrad  $D = 0,8$  dargestellt, welcher etwa der Reisedauerleistung entspricht.
- Andere praktizierte Drosselzustände sind  $D = 1$  für den Start sowie  $D = 0,9$  für die maximale Steigdauerleistung.

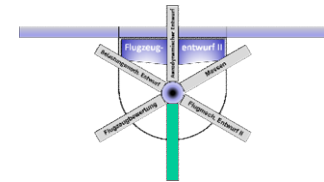


# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

### Schubkennfeld für das Bypassverhältnis 6

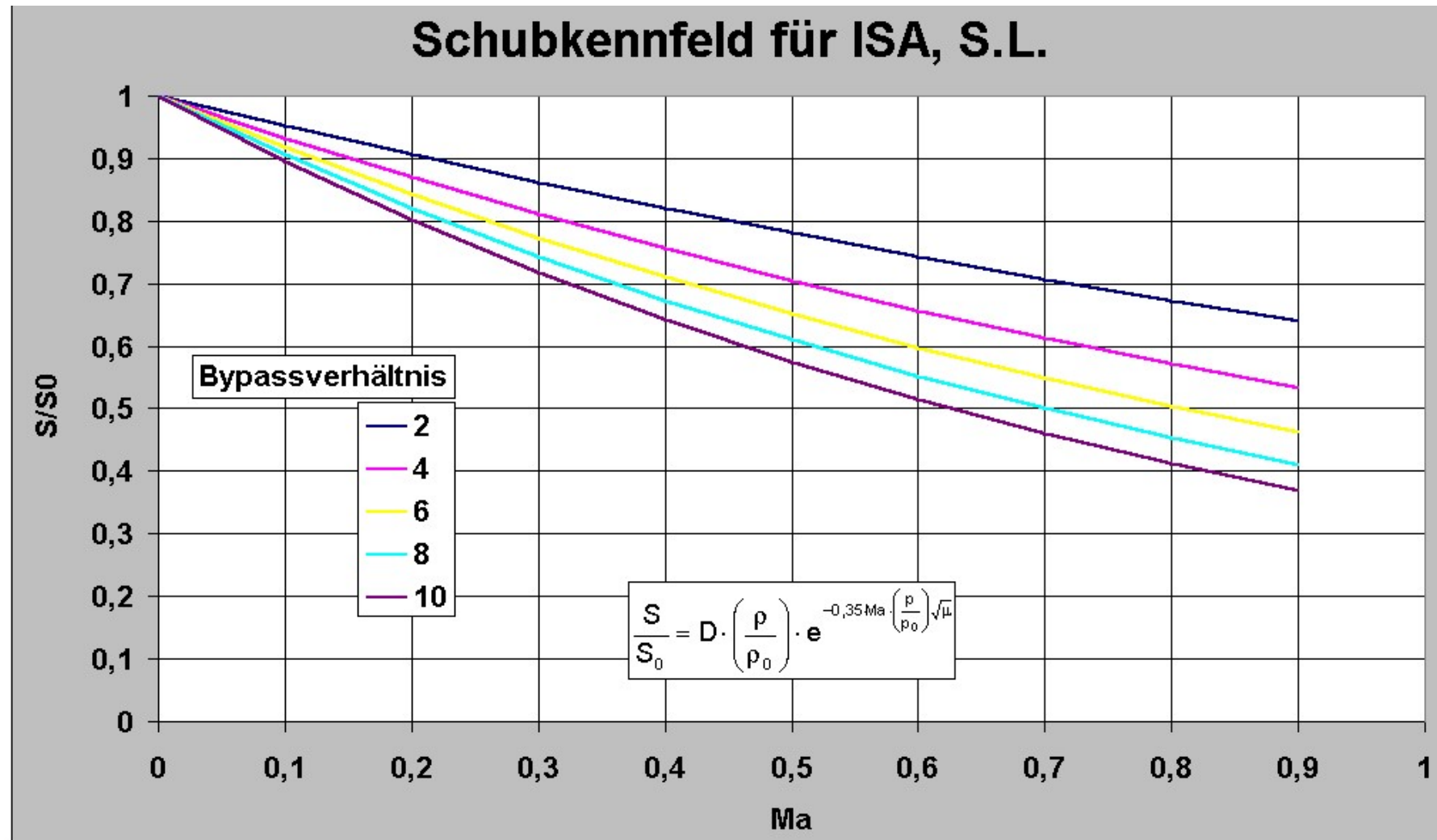


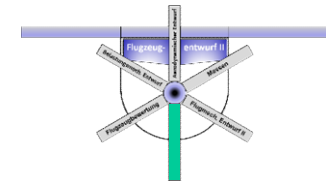


# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

### Schubkennfeld für ISA, S.L.

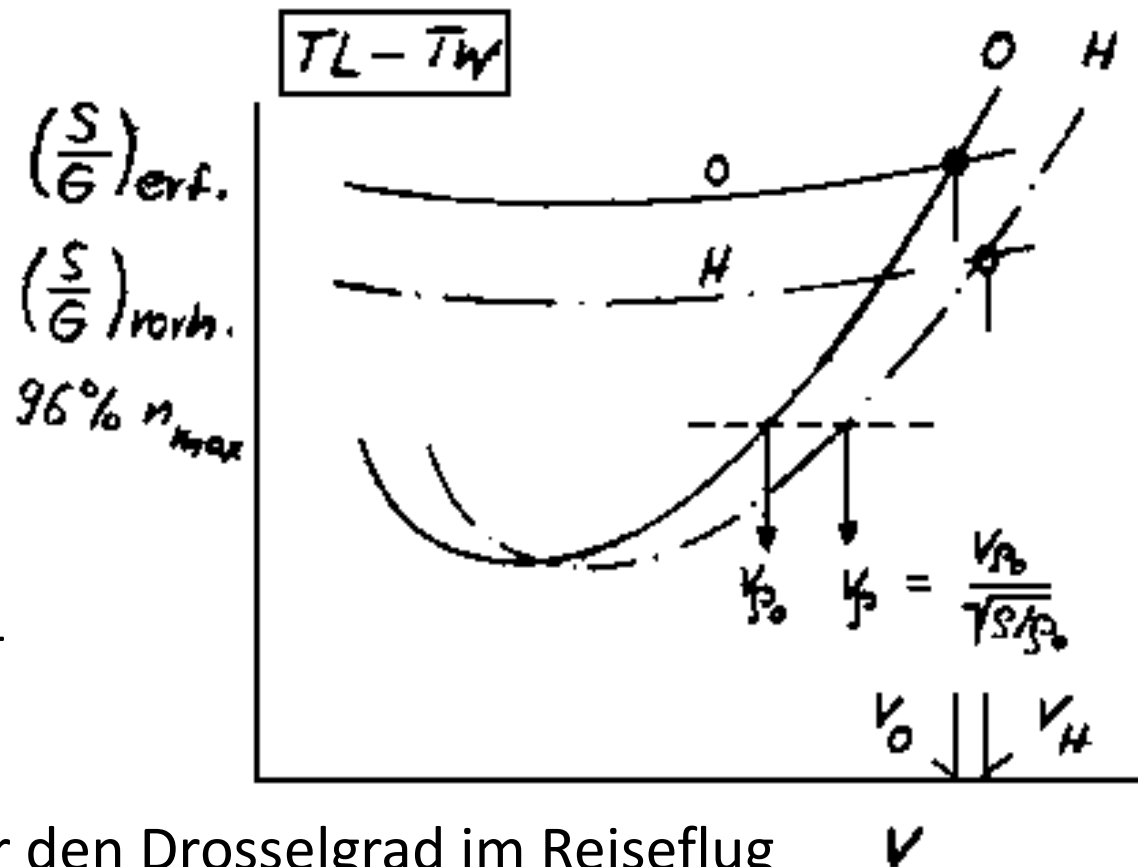




# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

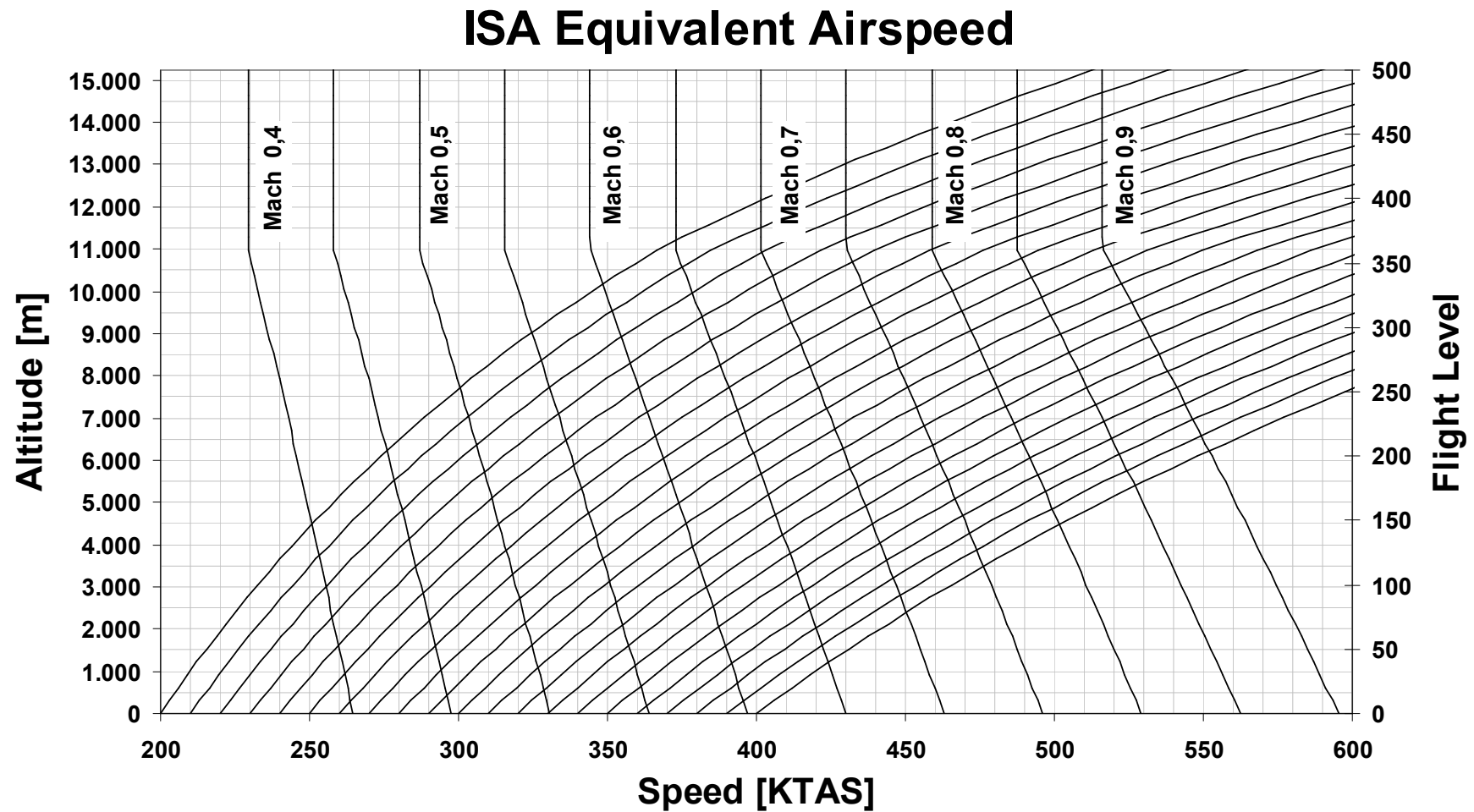
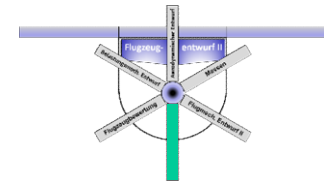
- Der Schnittpunkt der Kurven für den erforderlichen mit denen des vorhandenen Schubs zeigt die Geschwindigkeit an, an der die Bedingungen Auftrieb = Gewicht sowie Schub = Widerstand erfüllt sind.



- Ein typischer Wert für den Drosselgrad im Reiseflug ist etwa 80%, dem eine Drehzahl von 96% der maximalen Drehzahl entspricht.

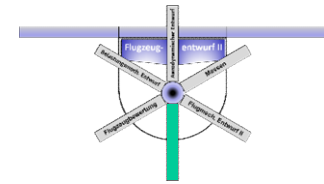
# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge



KTAS: knots true airspeed

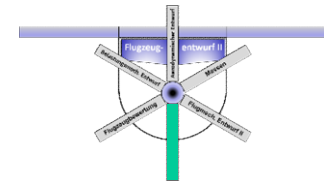




# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

- Die Linien konstanter Vergleichsfluggeschwindigkeit (EAS – Equivalent Airspeed) neigen sich mit zunehmender Flughöhe nach rechts, d.h. zu größeren wahren Geschwindigkeiten (TAS – True Airspeed).
- Am Boden (Flughöhe 0m) entspricht die EAS der TAS.
- Die Machzahlabhängigkeit mit der Höhe führt zu nach links geneigten Linien konstanter Machzahl.



# G Flugleistungen

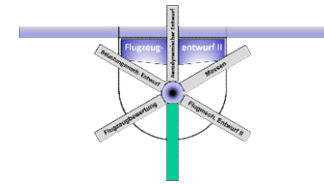
## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

- Über der wahren Fluggeschwindigkeit (TAS, true air speed) aufgetragen, sind Schub- und Widerstandsverlauf von der Flughöhe abhängig.
- Dabei kann die Verzerrung der Polaren S/G infolge zunehmender Höhe nach folgender Regel beschrieben werden:

$$v = v_{H=0} \cdot \sqrt{\frac{\rho_0}{\rho}}$$

- Begründung: Für konstante  $c_A$  und  $G$  gilt:

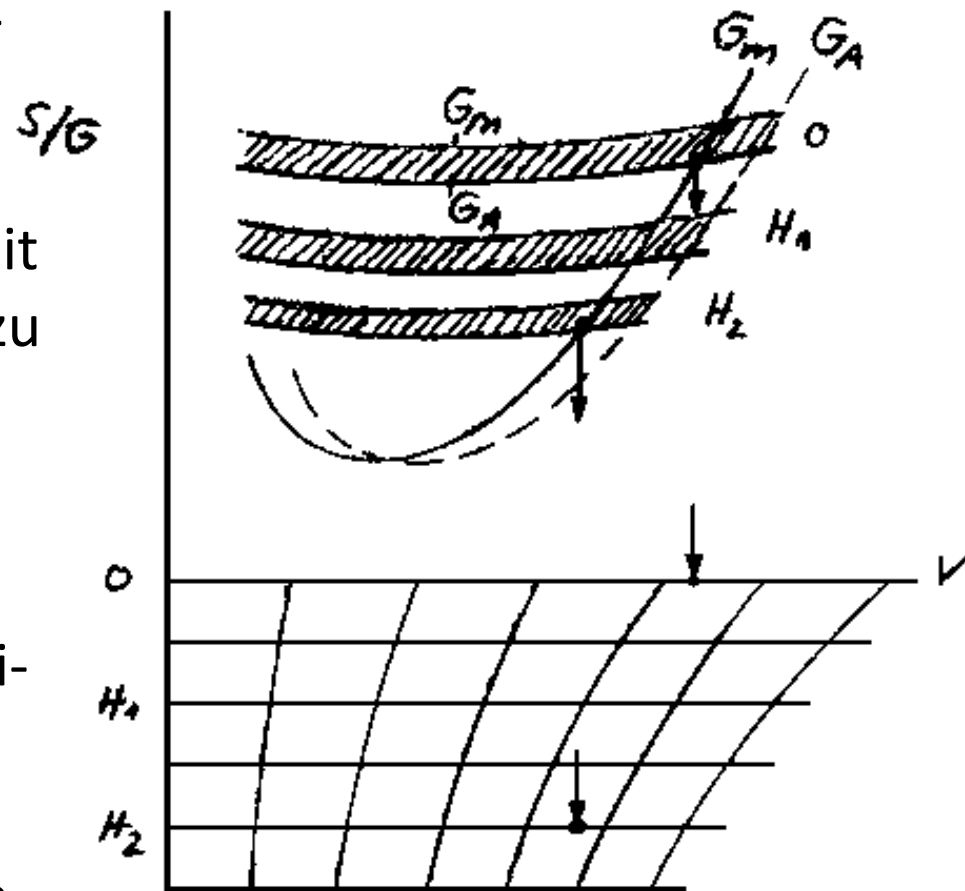
$$\frac{v}{v_{H=0}} = \frac{\sqrt{\frac{G}{F} \cdot \frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{c_A}}}{\sqrt{\frac{G}{F} \cdot \frac{2}{\rho_0} \cdot \frac{1}{c_A}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}}$$

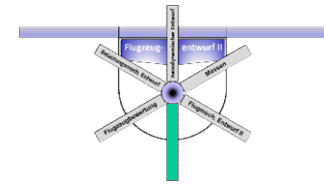


# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

- Es ist damit möglich, nur eine Polare über der höhenunabhängigen äquivalenten Geschwindigkeit EAS aufzutragen und die Abszisse mit Hilfe dieser Höhenfunktion zu korrigieren.
- Die Darstellung sieht dann folgendermaßen aus: ➔
- Hierbei muss dann der jeweilige Wert für die Geschwindigkeit auf der Abszisse für die entsprechende Flughöhe abgelesen werden.

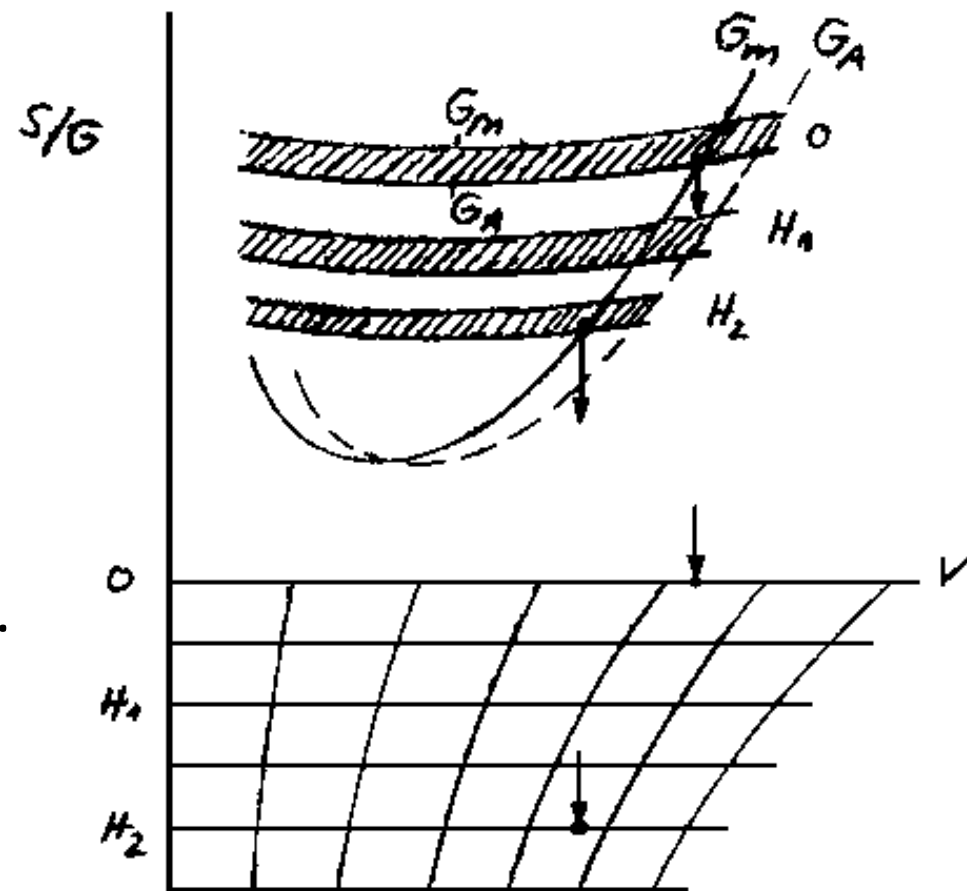


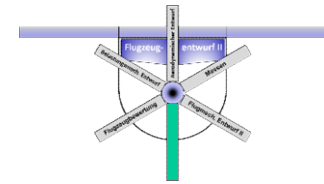


# G Flugleistungen

## 2.1 Horizontalflugdiagramm für Strahlflugzeuge

- Mit steigendem Fluggewicht:
  - sinkt das Schub-Gewichtsverhältnis
  - verschiebt sich die Gleitzahlpolare nach rechts
- Daraus resultiert eine erhöhte Reisegeschwindigkeit bei steigendem Fluggewicht.





## G Flugleistungen

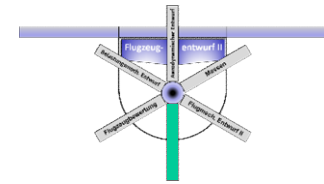
## 2.2 Horizontalflugdiagramm für Propellerflugzeuge

- Für Propellerflugzeuge ist der Schub keine geeignete Rechengröße.
- Deshalb wird im Horizontalflugdiagramm die erforderliche sowie vorhandene gewichtsspezifische Leistung aufgetragen.
- Da die Leistung  $N_{\text{erf.}} = W \cdot v = S_{\text{erf.}} \cdot v$  ist, braucht die Gleichung für den erforderlichen Schub lediglich mit der Geschwindigkeit multipliziert werden

$$S_{\text{erf}} = c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^2 \cdot F$$

- Man erhält eine kubische Abhängigkeit der Leistung von der Geschwindigkeit:

$$N_{\text{erf.}} = c_w \cdot \frac{\rho}{2} \cdot v^3 \cdot F$$



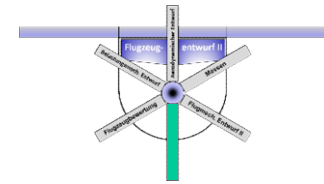
# G Flugleistungen

## 2.2 Horizontalflugdiagramm für Propellerflugzeuge

- Die übertragene Leistung hängt bei Verstellpropellern vom jeweiligen Blattwinkel, der Dichte und dem Fortschrittsgrad  $\lambda$  (advance ratio) ab.
- Beim Fortschrittsgrad  $\lambda$  (advance ratio) ist  $n$  die Drehzahl in 1/min und  $D$  der Durchmesser des Propellers.

$$\lambda = \frac{v}{\omega \cdot D} = \frac{60 \cdot v}{\pi \cdot n \cdot D}$$

- Der Fortschrittsgrad ist also das Verhältnis von Fluggeschwindigkeit zur Blattspitzengeschwindigkeit.



# G Flugleistungen

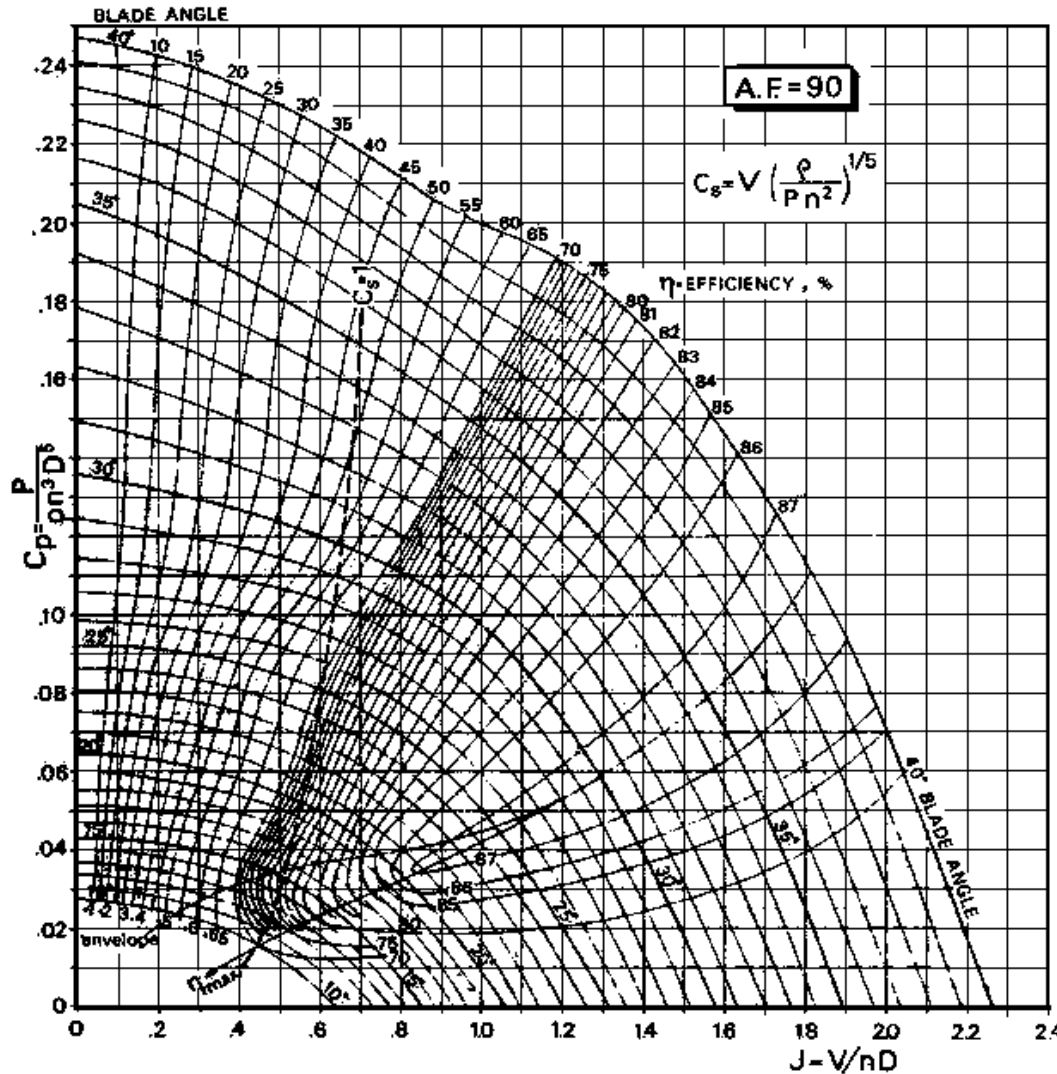
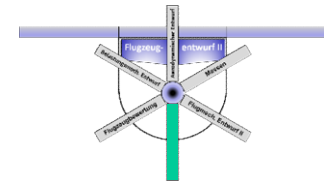
## 2.2 Horizontalflugdiagramm für Propellerflugzeuge

- Es gilt dann  $N_{\text{erf.}} = \eta(\lambda) \cdot N_{\text{Brems}}$ , was mit Hilfe der Wellenleistung des Motors (Bremsleistung) und dem Kennfeld des Propellerwirkungsgrads auszuwerten ist.
- Auch hier ist die Höhenumrechnung mit den genannten Einschränkungen anwendbar:

$$N_{\text{erf.}} = \frac{N_{\text{erf.}, H=0}}{\sqrt{\frac{\rho}{\rho_0}}}$$

# G Flugleistungen

## 2.2 Horizontalflugdiagramm für Propellerflugzeuge



Activity Factor

$$AF = \frac{100.000}{16} \cdot \int_{0,15}^{1,0} \left( \frac{t}{D} \right) \cdot \left( \frac{r}{R} \right)^3 \cdot d \left( \frac{r}{R} \right)$$

Power Coefficient

$$C_P = \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot D^5}$$

Thrust Coefficient

$$C_S = \frac{S}{\rho \cdot n^2 \cdot D^4}$$

Effectivity Thrust

$$\eta = \frac{C_S \cdot J}{C_P} \quad S = \frac{\eta \cdot P}{v}$$

Advance Ratio

$$J_{eff} = (1 - h) \cdot J$$



## Ermittlung der Propellerleistung mit Hilfen von Kennfeldern

- Auf Basis experimenteller Untersuchungen wurden von Propellerherstellern (z.B. Hamilton) und Versuchseinrichtungen (NACA) Kennfelder für Propeller erstellt.
- Mit Hilfe von meist dimensionslosen Kenngrößen lässt sich damit der geeignete Propeller auswählen und/oder dessen Schubverhalten bestimmen.
- Folgende Kenngrößen werden hierzu benötigt:

- **Advance Ratio J** ( = Fortschrittsgrad  $\lambda$ )  $J = \lambda = \frac{v}{n \cdot D}$
- **Power Coefficient** (Leistungskoeffizient)  $c_P = \frac{P}{\rho \cdot n^3 \cdot D^5}$
- **Thrust Coefficient** (Schubkoeffizient)  $c_T = \frac{T}{\rho \cdot n^2 \cdot D^4}$

## Ermittlung der Propellerleistung mit Hilfen von Kennfeldern

- Folgende Kenngrößen werden hierzu ebenfalls benötigt:

- **Speed-Power Coefficient**  $c_S = v \sqrt[5]{\frac{\rho}{P n^2}} = \sqrt[5]{\frac{J^5}{c_P}}$

- **Propeller Efficiency**  $\eta_P = \frac{T v}{P} = J \frac{c_T}{c_P}$

- Der **Activity-Factor** - Ein Maß für die vom Propellerblatt umsetzbare Energie:

$$AF = \frac{100000}{16} \cdot \int_{0,15}^{1,0} \left( \frac{c}{D} \right) \cdot \left( \frac{r}{R} \right)^3 \cdot d \left( \frac{r}{R} \right) \quad AF = \frac{10^5}{D^5} \int_{0,15R}^R c r^3 dr$$

wobei  $c$  die lokale Propellerblatt-Tiefe (chord) ist. Der AF liegt zwischen 90 und 200. Typisch: AF für Sport-Flz. ~90; für große Turboprop-Flz. ~140

Total Activity-Factor (mit Anzahl der Blätter  $B$ ):  $TAF = B \cdot AF$

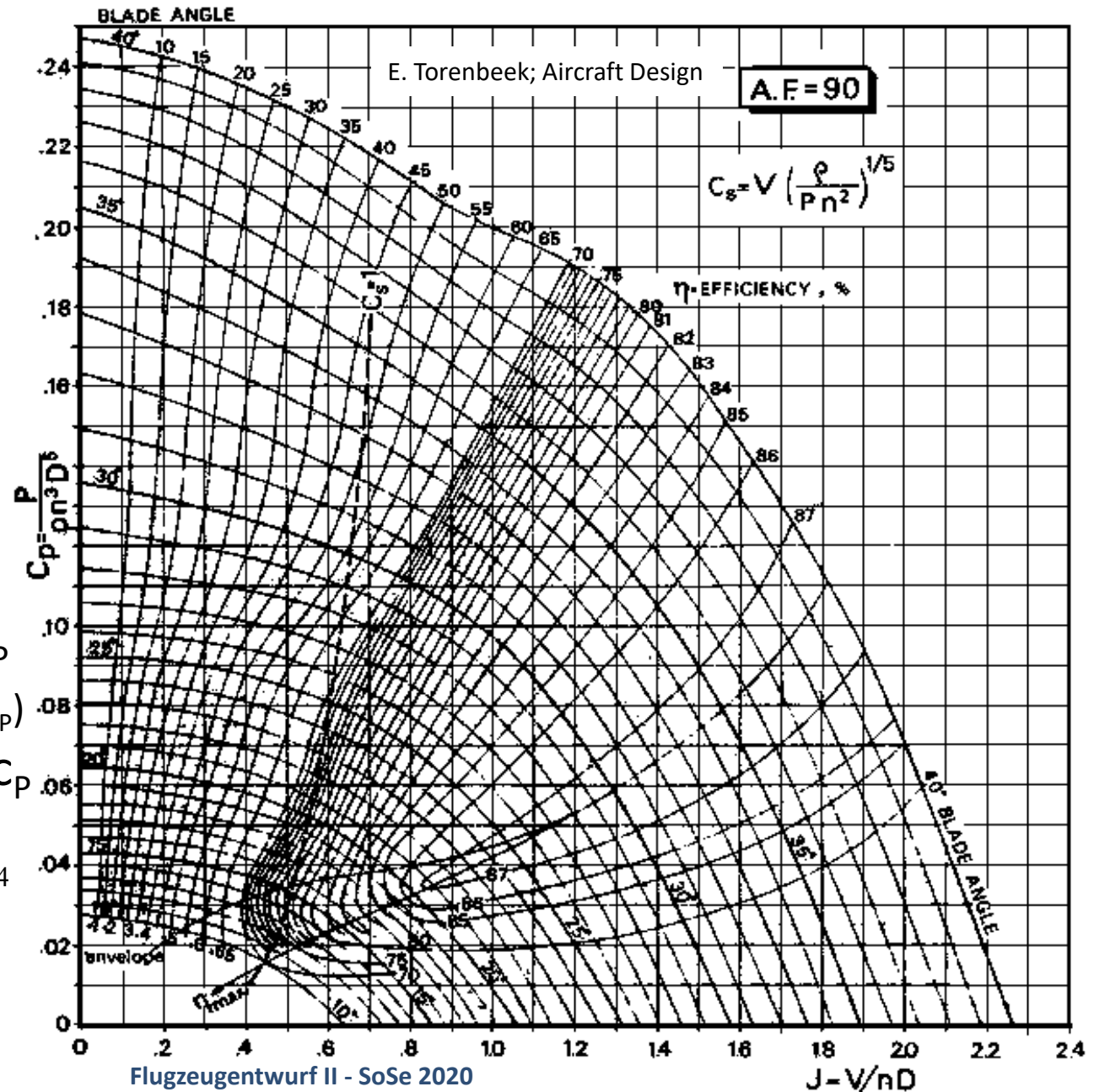
## Ermittlung der Propellerleistung mit Hilfe von Kennfeldern

- Vorgaben:
  - Flughöhe
  - Fluggeschwindigkeit
  - Drehzahl des Motors
  - Prop.-durchmesser

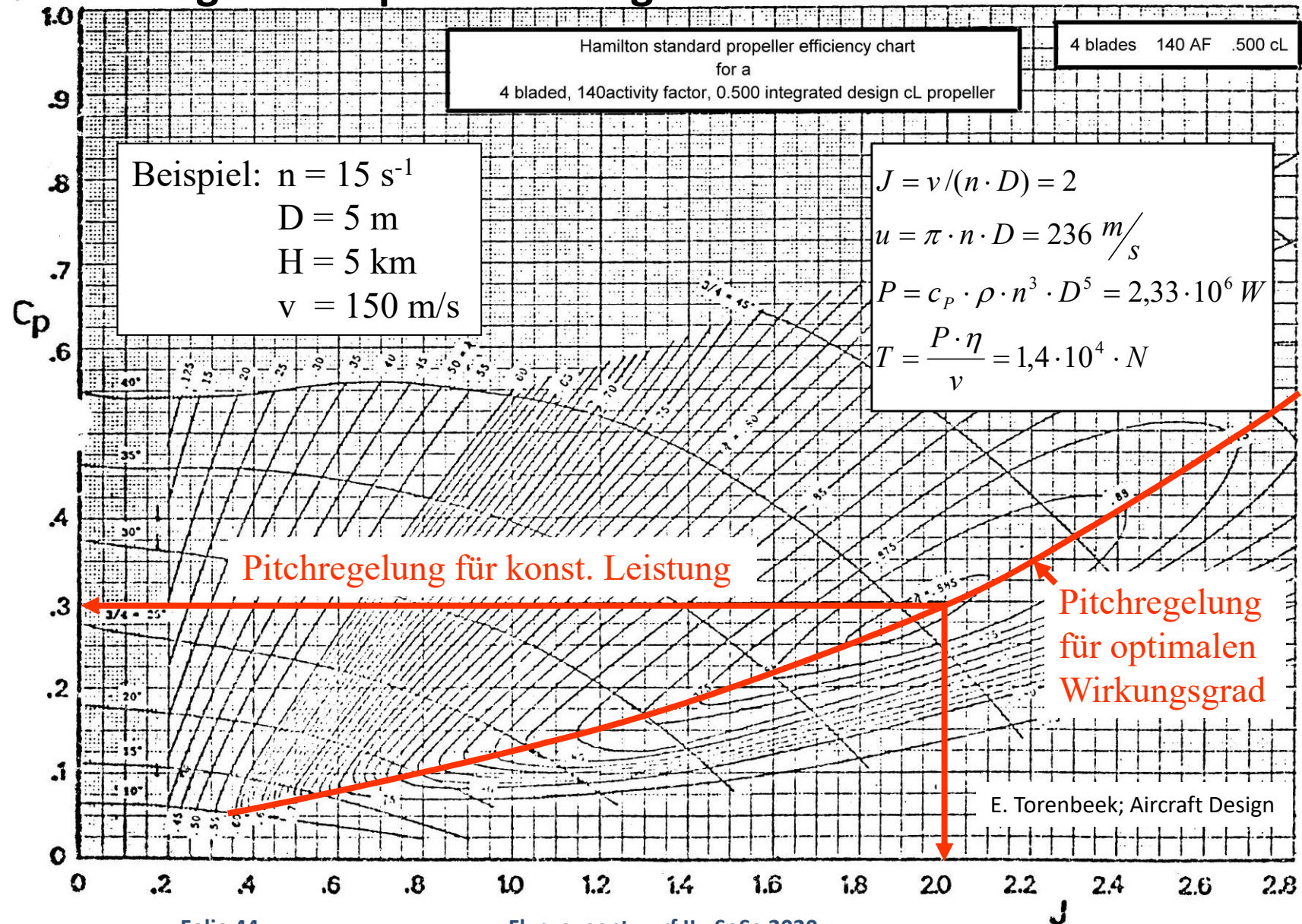
1. Berechnung von  $J$
2. Bestimmung von  $c_p$  bei  $\eta_{\max}$  (oder  $\eta_p$  aus  $c_p$ )
3. Berechnung  $P$  aus  $c_p$
4. Berechnung  $T$  aus

$$T = c_T \cdot \rho \cdot n^2 \cdot D^4$$

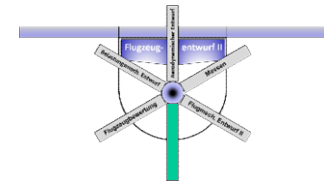
$$\text{oder } T = \frac{P}{v} \cdot \eta_p$$



## Ermittlung der Propellerleistung mit Hilfen von Kennfeldern





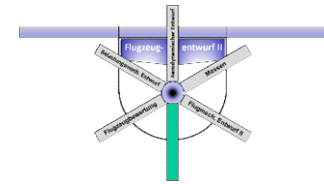


# G Flugleistungen

## 2.3 Schubabschätzung aus der Reiseforderung

- Für eine schnelle Entscheidung über die Schubbemessung für eine gegebene Reisegeschwindigkeit oder eine rasche Bestimmung der Geschwindigkeit für einen gegebenen Schub, kann man eine hilfreiche grafische Darstellung ableiten.
- Hierzu wird vereinfachend wieder die quadratische Polarengleichung herangezogen und durch den festgesetzten vorhandenen Schub dividiert.
- Es gilt dazu zunächst  $c_w = \frac{S_{\text{erf.}}}{qF} = c_{w_0} + \frac{c_A^2}{\pi \Lambda e}$
- Daraus folgt für den Schubfaktor für den stationären Reiseflug mit den Vereinfachungen

$$\sigma = \frac{\rho}{\rho_0} \quad , \quad f_s = c_{w_0} \cdot F \quad , \quad \Lambda = \frac{b^2}{F} \quad \text{und} \quad c_A^2 = \left( \frac{G}{q \cdot F} \right)^2$$



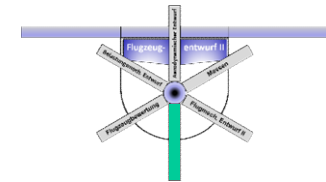
# G Flugleistungen

## 2.3 Schubabschätzung aus der Reiseforderung

- Schubfaktor für den stationären Reiseflug:

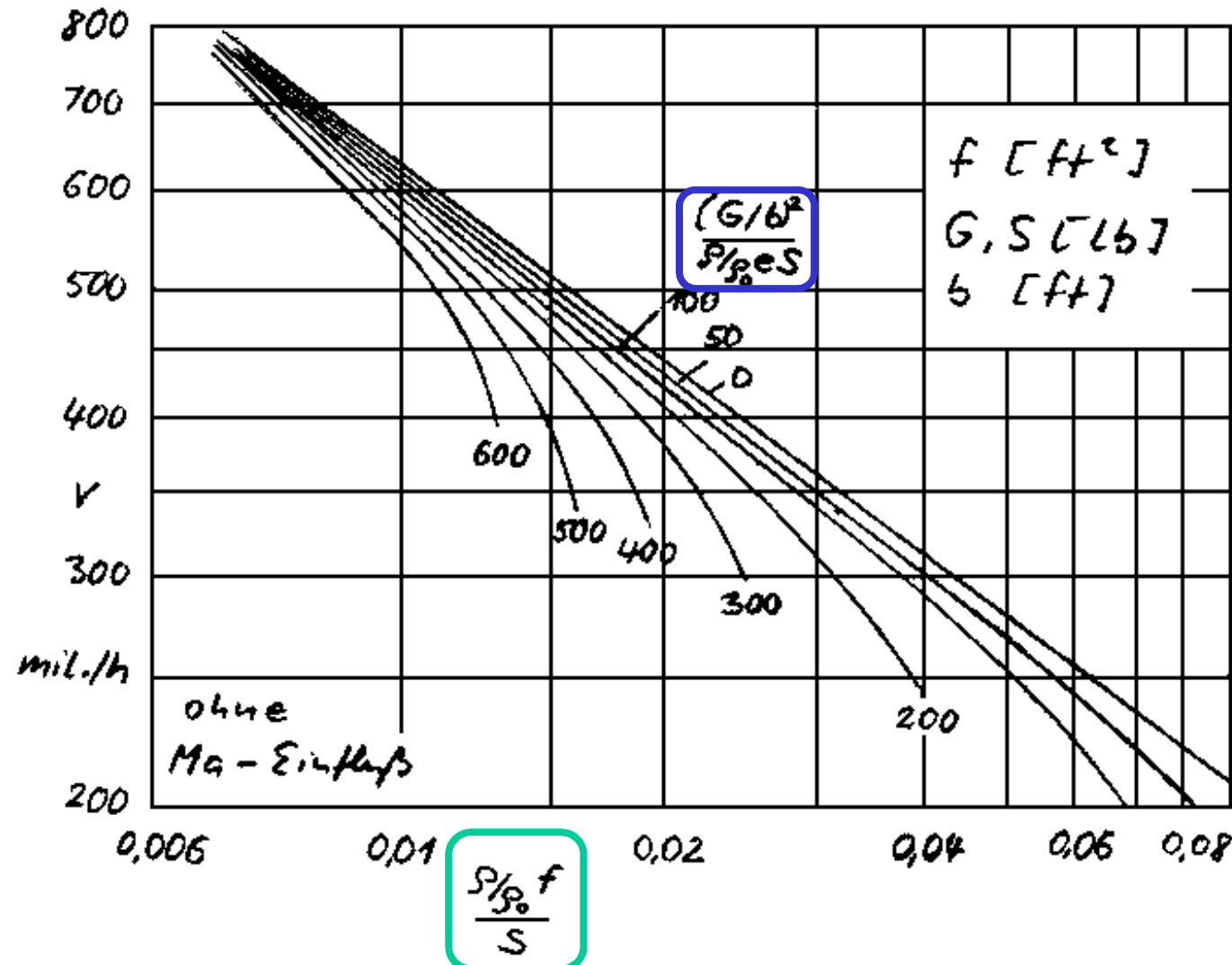
$$\frac{S_{\text{erf.}}}{S_{\text{vorh.}}} = 1 = \left( \frac{\rho_0}{2} \right) \cdot \left[ \frac{\sigma \cdot f_s}{S_{\text{vorh.}}} \right] \cdot v^2 + \left( \frac{2}{\rho_0 \cdot \pi} \right) \cdot \left[ \left( \frac{G}{b} \right)^2 \cdot \frac{1}{\sigma \cdot e \cdot S_{\text{vorh.}}} \right] \cdot \frac{1}{v^2}$$

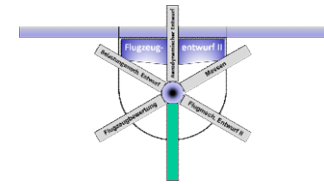
- Werden die eckigen Klammerausdrücke parametrisch für die Geschwindigkeit ausgewertet, ergibt die Grafik auf der Folgeseite.
- Mit ihr kann man sehr einfach mit Hilfe von Abschätzungen für die Polarenparameter (Oswaldfaktor und schädliche Fläche) für eine gegebene Konfiguration (Spannweite) und Flughöhe ( $\sigma$ ) die Reisegeschwindigkeit oder den erforderlichen Schub ermitteln.



# G Flugleistungen

## 2.3 Schubabschätzung aus der Reiseforderung





# G Flugleistungen

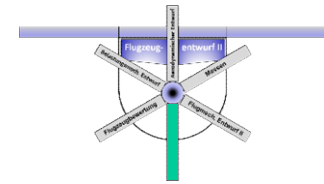
## 2.3 Schubabschätzung aus der Reiseforderung

- Für Propellerflugzeuge müssten hier die Parameter

$$\frac{\sigma \cdot f_s}{\eta \cdot N_{\text{Brems}}}, \left( \frac{G}{b} \right)^2 \frac{1}{\sigma \cdot e \cdot \eta \cdot N_{\text{Brems}}}$$

und  $v$  verwendet werden.





# G Flugleistungen

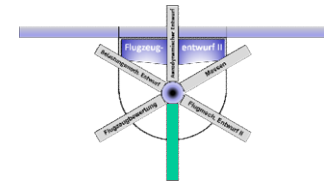
## 2.4 Dimensionsloses Horizontalflugdiagramm

- Unter der Annahme einer quadratischen Widerstandspolaren kann das Horizontalflugdiagramm auch in dimensionsloser Form erstellt werden.
- Die Bezugswerte sind das minimale  $\varepsilon = c_W/C_A$  sowie die zugehörige Geschwindigkeit  $v$ .
- Minimales  $\varepsilon$  liegt an dem Punkt vor, an dem gilt:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial v} \cdot G = \frac{\partial W}{\partial v} = 0$$

- Ansatz für den Widerstand:  $W = \varepsilon \cdot G = \hat{A} \cdot v^2 + \frac{\hat{B}}{v^2}$
- Verwendung der bekannten quadratischen Approximation der Widerstandspolare:

$$c_W = c_{W_0} + \frac{c_A^2}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}$$



# G Flugleistungen

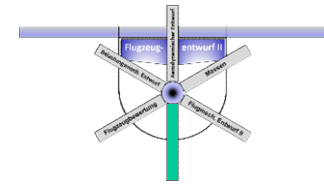
## 2.4 Dimensionsloses Horizontalflugdiagramm

- Daraus folgt:  $2 \cdot \hat{A} \cdot v_{\varepsilon_{\min}} = \frac{2 \cdot \hat{B}}{v_{\varepsilon_{\min}}^3}$
- Hierbei sind die Konstanten

$$\hat{A} = \frac{\rho}{2} \cdot F \cdot c_{w_0} \quad \text{und} \quad \hat{B} = \left( \frac{G}{b} \right)^2 \cdot \frac{2}{\rho \cdot \pi \cdot e}$$

- Aufgelöst nach der Geschwindigkeit ergibt sich für  $v_{\varepsilon_{\min}} = \sqrt[4]{\frac{\hat{B}}{\hat{A}}}$
- Für den erforderlichen Schub in diesem Punkt erhält man:

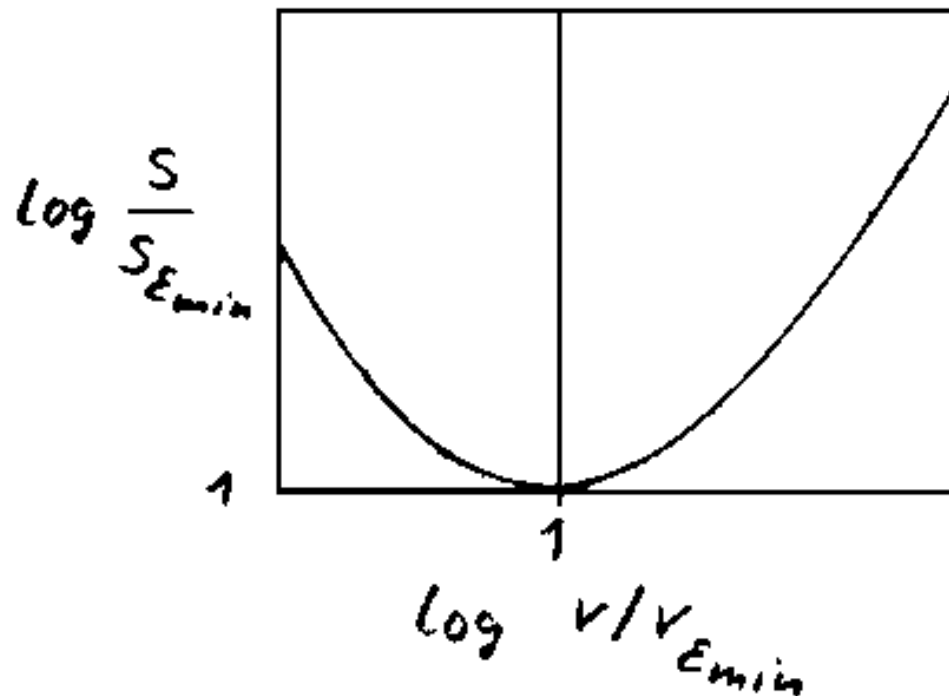
$$S_{\varepsilon_{\min}} = \hat{A} \cdot \sqrt{\frac{\hat{B}}{\hat{A}}} + \frac{\hat{B}}{\sqrt{\frac{\hat{B}}{\hat{A}}}}$$

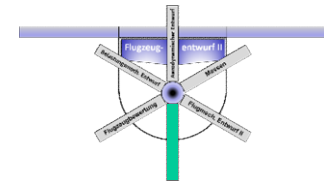


# G Flugleistungen

## 2.4 Dimensionsloses Horizontalflugdiagramm

- Unberücksichtigt bei der hier beschriebenen Vorgehensweise unter Anwendung einer quadratischen Widerstandspolaren bleiben:
  - der höhenabhängige Reynoldszahleinfluß ( $c_{w0}$ )
  - der höhenabhängige Verlauf des Wellenwiderstandsanstiegs ( $e$ )

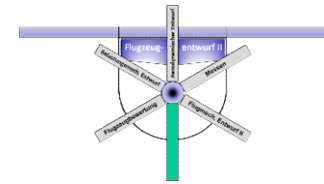




# G Flugleistungen

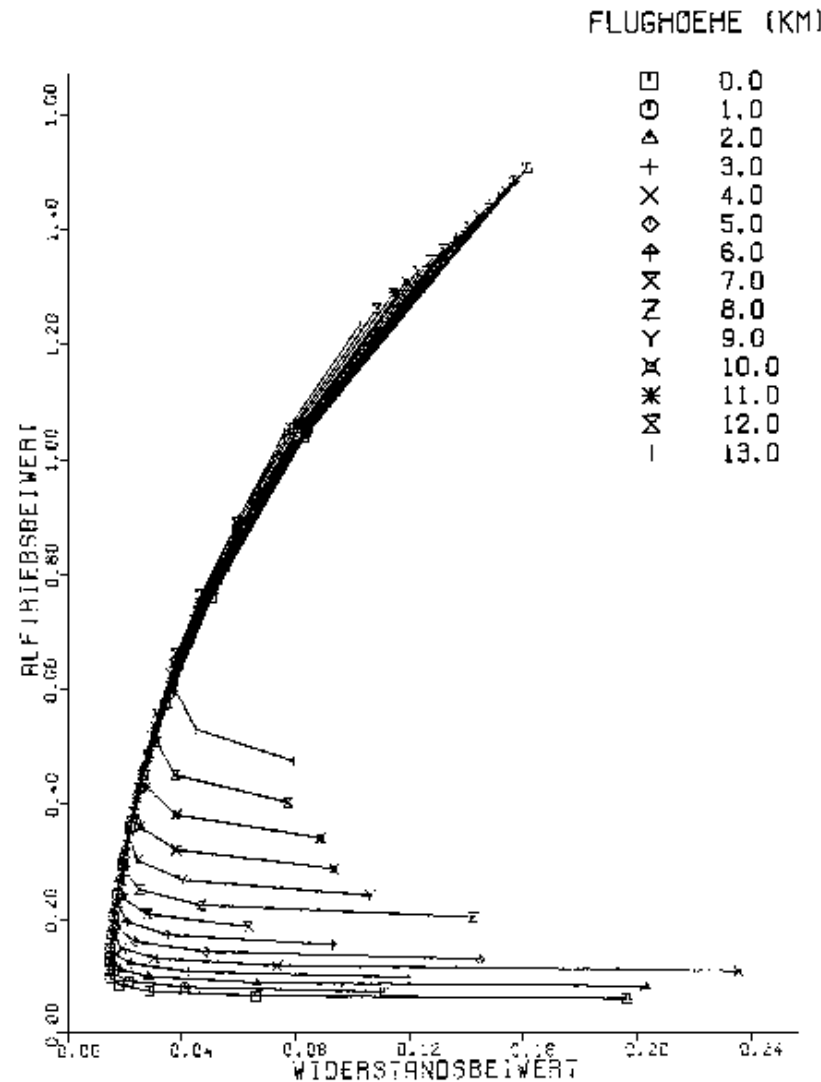
## 2.4 Dimensionsloses Horizontalflugdiagramm

- **Anmerkungen** für Flugzeuge, die im hohen Unterschall operieren:
  - Die Off-Design-Polaren für verschiedene Flughöhen unterscheiden sich lediglich im Bereich des Auslegungspunktes bzw. bei geringeren Fluggeschwindigkeiten nur wenig.
  - Will man eine korrekte Leistungsanalyse vornehmen, muss also für jede Flughöhe eine gesonderte Widerstandspolare bestimmt werden. Die o.g. Verzerrung mit Hilfe des Dichteverhältnisses kann dann nicht mehr angewendet werden.
- **Für Flugzeuge im inkompressiblen Geschwindigkeitsbereich führt die vereinfachte Vorgehensweise jedoch zu brauchbaren Ergebnissen.**



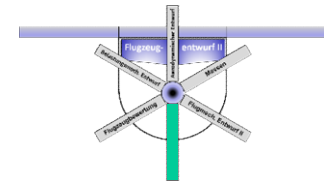
# G Flugleistungen

## 2.4 Dimensionsloses Horizontalflugdiagramm

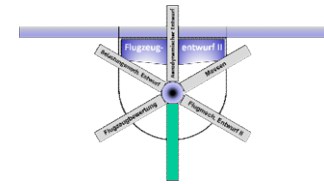


# G Flugleistungen

## 3 Steigflugleistungen



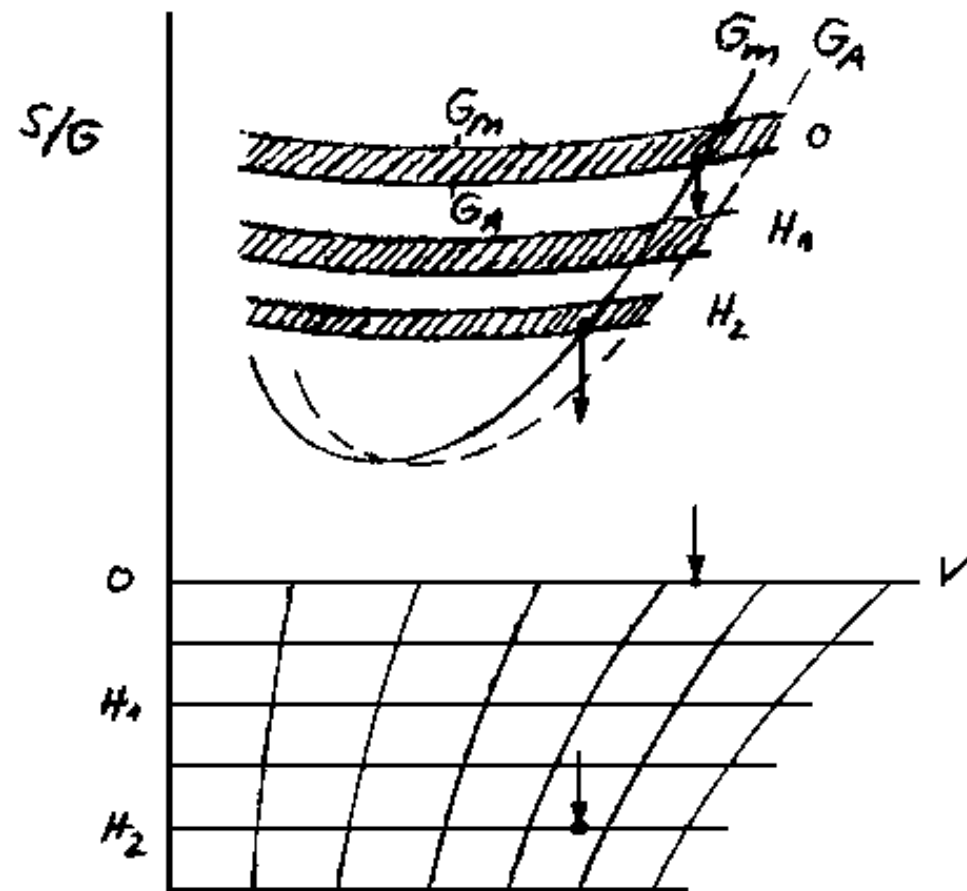
- Das **Horizontalflugdiagramm** ist die Grundlage für eine Reihe weiterer Flugleistungsaussagen:
- Es gibt nicht nur Auskunft über die Geschwindigkeiten, an denen die **Kräftegleichgewichte in horizontaler und vertikaler Richtung** erfüllt sind, sondern es gibt auch Auskunft über den **Schubüber- und -unterschuss** im gesamten Flugbereich.
- Neben dem Schnittpunkt, der die Reisegeschwindigkeit anzeigt, gibt es für größere Flughöhen zusätzlich den Punkt des Kräftegleichgewichts im Niedergeschwindigkeitsbereich.
- Während bei einer kurzzeitigen Störung des Gleichgewichts im Reiseflug eine selbständige Stabilisierung der Reisegeschwindigkeit erfolgt, da z.B. eine Geschwindigkeitserhöhung eine Schubverminderung und damit eine negative Beschleunigung zur Folge hat, ist dieses beim zweiten Gleichgewichtspunkt nicht der Fall.

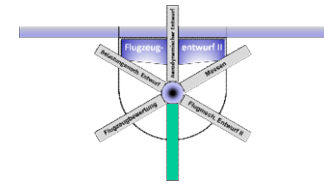


# G Flugleistungen

## 3 Steigflugleistungen

- Hier führt eine Geschwindigkeitserhöhung zu einer Erhöhung des Schubüberschusses und damit zu einer sich verstärkenden Beschleunigung, bis der Gleichgewichtszustand der Reisekondition erreicht ist.
- Dieser Punkt stellt also ein instabiles Gleichgewicht dar.





# G Flugleistungen

## 3.1 Quasi-stationäre Bewegungsgleichungen

- Für die quasi-stationären Bewegungsgleichungen des Flugzeugs wird der Bezug zum Horizontalflugdiagramm deutlich.

- Es gilt unter Vernachlässigung des Schubeinstellwinkels

- Flugweggeometrie:  $\dot{x} - v \cdot \cos(\gamma) = 0$

$$\dot{h} - v \cdot \sin(\gamma) = 0$$

- Kräftegleichgewichte:  $S - W - G \cdot \sin(\gamma) = 0$

$$A - G \cdot \cos(\gamma) = 0$$

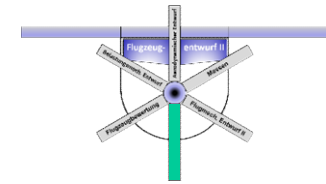
- Kraftstoffverbrauch:  $\dot{G} - \dot{G}_K = 0$

- Der Kraftstoffverbrauch  $dG_K/dt$  lässt sich als schubspezifischer Verbrauch ausdrücken:

$$\dot{G}_K = b_s \cdot S \cdot g$$

$$G_K = g \cdot m_K$$





# G Flugleistungen

## 3.1 Quasi-stationäre Bewegungsgleichungen

- Aus Kräftegleichgewicht sowie dem **Steigwinkel**  $\gamma$  folgt:

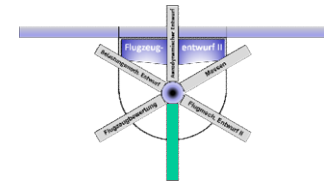
$$\sin(\gamma) = \frac{w}{v} = \frac{S - W}{G} = \frac{S}{G} - \varepsilon$$

- Dies entspricht der Differenz zwischen den Kurven für den vorhandenen und für den benötigten Schub im Horizontalflugdiagramm.
- Die **Steiggeschwindigkeit** ergibt sich daraus zu:

$$w = v \cdot \left( \frac{S - W}{G} \right) = v \cdot \left( \frac{S}{G} - \varepsilon \right)$$

- Der **Steigverbrauch** ist mit der Bewegungsgleichung in vertikaler Richtung und der Gleichung der Masseänderung:

$$-\frac{dG}{dh} = \frac{dG_K}{dh} = \frac{dG_K}{dt} \cdot \frac{dt}{dh} = \frac{\dot{G}_K}{w} = \frac{b_s \cdot S \cdot g}{w} = \frac{b_s \cdot S \cdot g}{v \cdot \left( \frac{S}{G} - \varepsilon \right)}$$

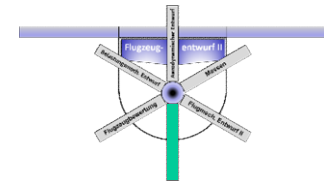


# G Flugleistungen

## 3.1 Quasi-stationäre Bewegungsgleichungen

- Der Steigwinkel ist vom Schubüberschuss abhängig.
- Die Steiggeschwindigkeit und der Steigverbrauch sind vom Leistungsüberschuss abhängig, wobei in letzteren zusätzlich der zeitbezogene Verbrauch eingeht.

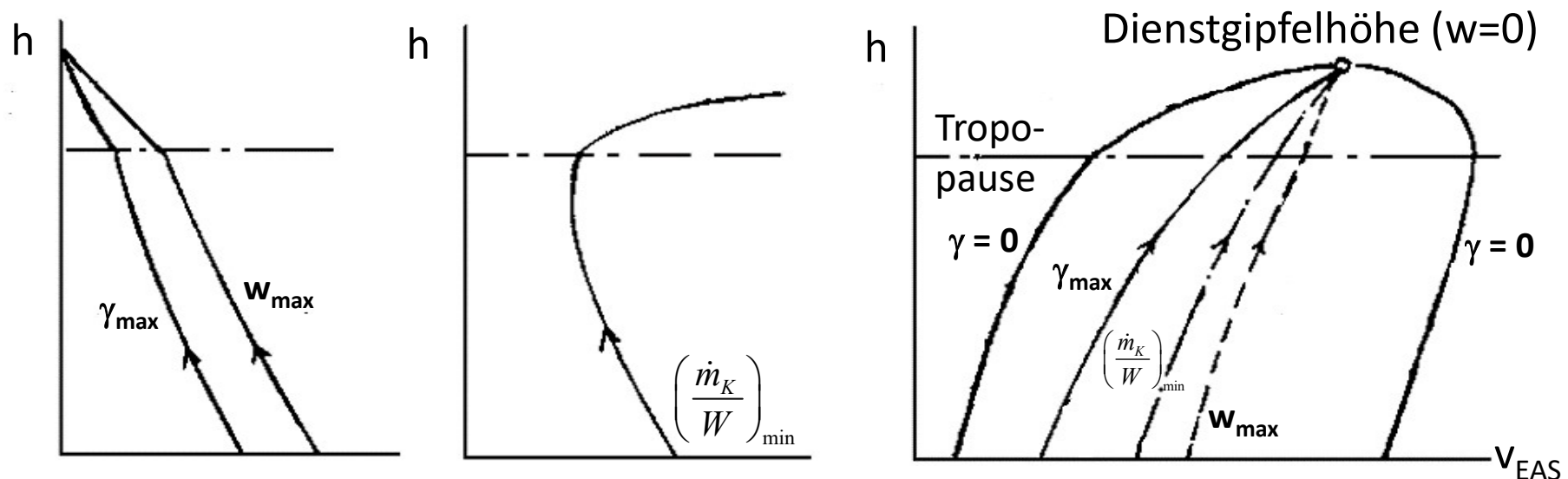




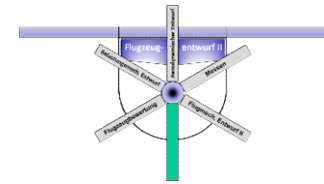
# G Flugleistungen

## 3.1 Quasi-stationäre Bewegungsgleichungen

- Führt man diese Betrachtung für veränderliche Flughöhen  $h$  und konstantes Fluggewicht  $G$  durch, erhält man bereits wesentliche Aussagen zum realisierbaren Flugbereich:



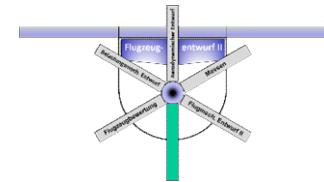
- Steigwinkel und Steiggeschwindigkeit nehmen mit zunehmender Höhe ab und verschwinden bei der theoretischen Gipfelhöhe.
- Die verbrauchsoptimale Steiggeschwindigkeit nimmt bis zur Tropopause ab und darüber stark zu.



# G Flugleistungen

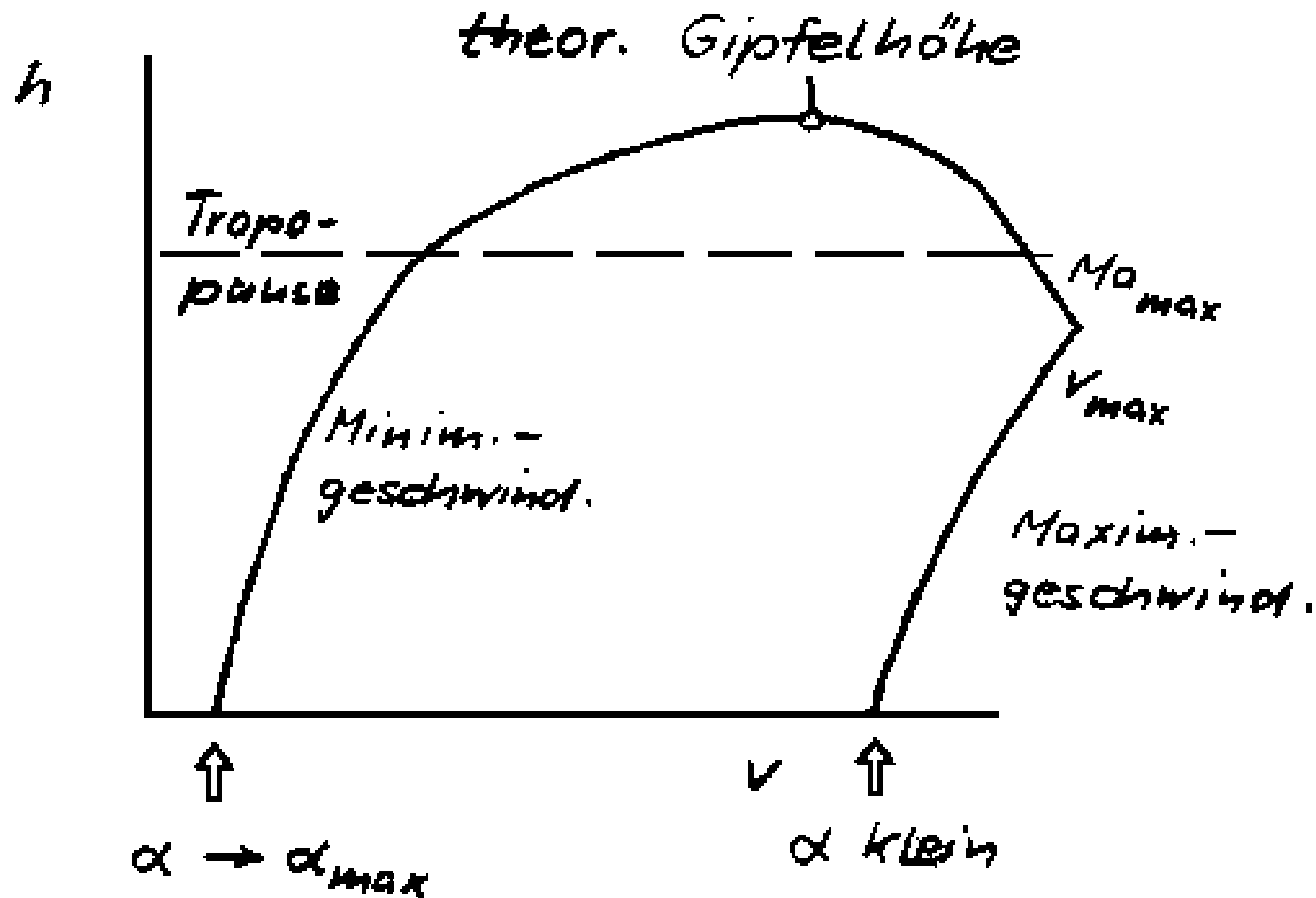
## 3.1 Quasi-stationäre Bewegungsgleichungen

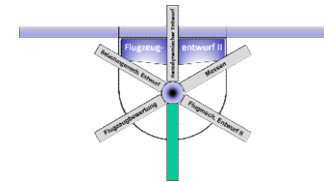
- Führt man diese Betrachtung für veränderliche Flughöhen  $h$  und konstantes Fluggewicht  $G$  durch, erhält man bereits wesentliche Aussagen zum realisierbaren Flugbereich:
  3. Alle Geschwindigkeiten werden für die theoretische Gipfelhöhe identisch.
  4. Die Gleichgewichtsgeschwindigkeiten ( $\gamma = 0$ ) begrenzen den Horizontalflugbereich.
  5. Die größte Steiggeschwindigkeit wird bei höherer Fluggeschwindigkeit erzielt als die verbrauchsoptimale Steiggeschwindigkeit, und diese ist größer als die Geschwindigkeit des max. Steigwinkels.



# G Flugleistungen

## 3.1 Quasi-stationäre Bewegungsgleichungen

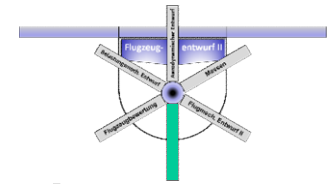




# G Flugleistungen

## 3.1 Quasi-stationäre Bewegungsgleichungen

- Das o.g. h-v-Diagramm darf nur in dem Bereich interpretiert werden, in dem das Flugzeug fliegen kann, d.h. dass weder die Minimalgeschwindigkeit unterschritten, noch die Maximalgeschwindigkeit überschritten wird.
- Es muss also eine Flugbereichsaussage überlagert werden.
- Die maximale Geschwindigkeit wird durch einen von der Struktur max. **ertragbaren Staudruck** (Bemessungshöchstgeschwindigkeit) oder von der Buffet-Grenze (Machzahleinfluss) bestimmt.
- Die linke Grenze folgt dem EAS-Verlauf für den **maximalen Auftriebsbeiwert**.
- Es hängt also von der installierten Motorleistung bzw. der Motorenzahl ab, ob diese oder die Buffet-Grenze die Gipfelhöhe begrenzt!

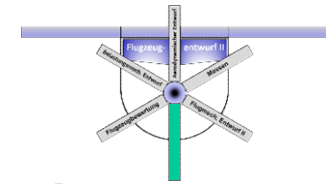


# G Flugleistungen

## 3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare

- Die Ermittlung der Steigleistungsparameter kann mit dem Horizontalflugdiagramm grafisch oder aber numerisch erfolgen.
- Eine analytische Lösung ist unter der Annahme einer quadratischen Widerstandspolare und eines konstanten Schubs (Näherung für TL-Triebwerke) herzuleiten.





# G Flugleistungen

## 3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare

- Die **Geschwindigkeit des steilsten Steigens** ergibt sich aus der Ableitung des Schubüberschusses nach dem Auftriebsbeiwert.
- Zu Null gesetzt und nach dem Auftriebsbeiwert aufgelöst:

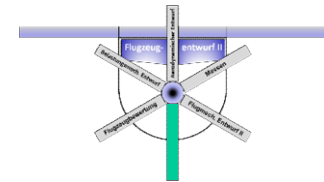
$$\frac{d\left(\frac{S}{G} - \varepsilon\right)}{dc_A} = \frac{d\left(\frac{S}{G} - \frac{c_{W_0}}{c_A} - \frac{c_A}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}\right)}{dc_A} = 0 = \frac{c_{W_0}}{c_{A_{\gamma \max}}^2} - \frac{1}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}$$

und folglich

$$c_{A_{\gamma \max}} = \sqrt{c_{W_0} \cdot \pi \cdot \Lambda \cdot e} .$$

- Die zugehörige Geschwindigkeit ist dann:

$$v_{\gamma \max} = \sqrt{\frac{G}{F} \cdot \frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{c_{A_{\gamma \max}}}}$$



# G Flugleistungen

## 3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare

- Für die **Geschwindigkeit der größten Steiggeschwindigkeit** gilt analog:

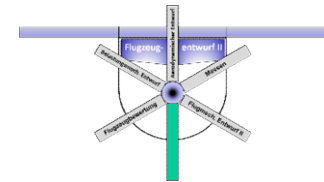
$$\frac{d\left(\frac{S}{G} - \varepsilon\right) \cdot v}{dc_A} = \frac{d\left(\frac{S}{G} - \frac{c_{w_0}}{c_A} - \frac{c_A}{\pi \cdot \Lambda \cdot e}\right) \cdot \sqrt{\frac{G}{F} \cdot \frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{c_A}}}{dc_A} = 0$$

- Nach Umformung folgt für den optimalen Auftriebsbeiwert

$$c_{A_{w \max}} = \frac{\pi \cdot \Lambda \cdot e}{2} \cdot \left[ \sqrt{\frac{12 \cdot c_{w_0}}{\pi \cdot \Lambda \cdot e} + \left(\frac{S}{G}\right)^2} - \frac{S}{G} \right]$$

sowie für die Geschwindigkeit

$$v_{w \max} = \sqrt{\frac{G}{F} \cdot \frac{2}{\rho} \cdot \frac{1}{c_{A_{w \max}}}}$$



# G Flugleistungen

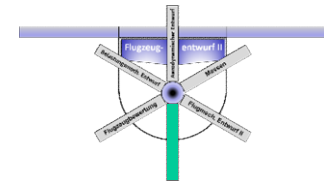
## 3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare

- Die **Geschwindigkeit des verbrauchminimalen Steigens** lässt sich aufgrund der komplexen Natur des Verbrauchskennfeldes nur numerisch bestimmen.
- Es muss dazu die Ableitung des folgenden Terms nach der Geschwindigkeit berechnet werden:

$$v \cdot \left( \frac{S}{G} - \varepsilon \right) / b_s \cdot S \cdot g$$

- Die über Grund im Steigflug in einem Höhenintervall  $dh$  zurückgelegte Strecke  $R_{\text{Steig}}$  ergibt sich aus dem Steigdreieck

$$\frac{dh}{dR} = \tan(\gamma) \quad \text{durch Integration:} \quad R_{\text{Steig}} = \int_{h1}^{h2} \frac{dh}{\tan\left(\frac{S}{G} - \varepsilon\right)}$$



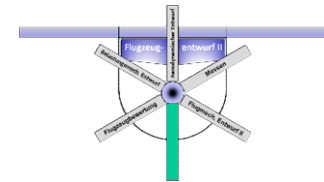
# G Flugleistungen

## 3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare

- Die bisherige quasi-stationäre Betrachtung erfolgte ohne **Trägheitsterme**.
- Das ist gleichbedeutend mit der Vernachlässigung des Einflusses der kinetischen Energie und der Annahme, dass die Triebwerksenergie ausschließlich zur Erhöhung der potentiellen Energie benutzt würde.
- Mit der Tangentialbeschleunigung  $\dot{v}$  und ohne Zentripetalbeschleunigung (Abfangbogenkrümmung) ergibt sich

$$S - W - G \cdot \sin(\gamma) - \frac{G}{g} \cdot \dot{v} = 0 \quad \text{mit} \quad w = v \cdot \sin(\gamma) \quad \text{und} \quad \dot{v} = \frac{dv}{dt}$$

$$\text{sowie} \quad w = \frac{dh}{dt} \quad \text{zu} \quad S - W - G \cdot \sin(\gamma) \cdot \left( 1 + \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{dh} \right) = 0$$



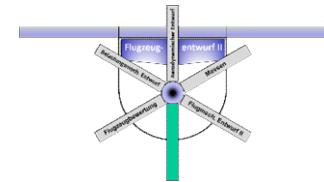
# G Flugleistungen

## 3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare

- Damit folgt für die Steiggeschwindigkeit

$$w = v \cdot \sin(\gamma) = \frac{(S - W)}{G} \cdot v \cdot \left[ \frac{1}{1 + \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{dh}} \right]$$

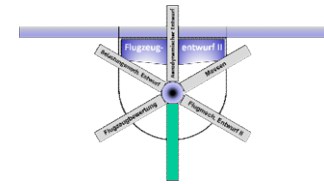
- Dies ist die bekannte quasi-stationäre Lösung mit einem Korrekturfaktor für die Umsetzung von kinetischer in potentielle Energie.
- Für einen Steigflug mit konstantem Auftriebsbeiwert ist diese Korrektur für rel. langsame Flugzeuge (z.B. Propellerflugzeuge,  $M = 0,5$ ) mit hinreichender Genauigkeit zu vernachlässigen
- Der Wert des Faktors beträgt nur etwa 0,85, d.h. die wirkliche erreicht nur 85% der errechneten Steiggeschwindigkeit.



# G Flugleistungen

## 3.2 Steigflugleistungen mit quadratischer Widerstandspolare

- Für Flugzeuge, die **im hohen Unterschall** operieren ( $M = 1$ ), wird der Wert des Faktors etwa 0,59 und sollte nicht vernachlässigt werden.
- Für **Überschallflugzeuge** ( $M = 2$ ) ist eine kinetische Energiekorrektur unbedingt anzuraten, denn hier kommen Werte von ungefähr 0,26 zum Tragen.
- Da die Änderung der Geschwindigkeit durch Höhengewinn, das Maß  $dv/dh$  i.A. nicht bekannt ist, entzieht sich diese Betrachtung der praktischen Umsetzung.



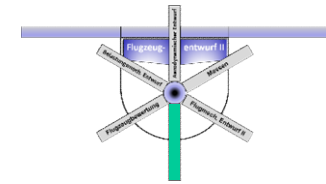
# G Flugleistungen

## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

- Zur Berechnung der Steigflugleistungen ist die **Energiehöhenmethode** besser geeignet. Hierbei wird die Gesamtenergie im Steigflug betrachtet
- Damit wird auch berücksichtigt, dass ein Teil der Triebwerksenergie in eine Beschleunigung des Flugzeugs umgesetzt wird.
- Die Gesamtenergie ist definiert als Summe der potentiellen und der kinetischen Energie:

$$E = E_{\text{pot}} + E_{\text{kin}} = m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 = G \cdot \left( h + \frac{v^2}{2 \cdot g} \right) = \left( \frac{E}{G} \right) \cdot G$$

- Der Klammerausdruck ist die **Energiehöhe** oder **gewichtsspezifische Gesamtenergie** mit der Dimension einer Länge, was der **Summe** aus **geometrischer Höhe** und einer der **kinetischen Energie äquivalenten Höhe** entspricht.



# G Flugleistungen

## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

- Mit Hilfe des Prinzips der Erhaltung der Energie  $E$  im Zeitintervall  $dt$  lässt sich der Einfluss der Gewichtsänderung infolge des Kraftstoffverbrauchs bestimmen:

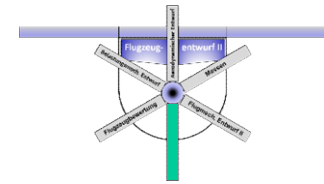
$$dE = S \cdot v \cdot dt - W \cdot v \cdot dt - \left( \frac{E}{G} \right) \cdot dG_K$$

- Die Änderung der Gesamtenergie ist gleich der **Schubenergie** abzüglich der Energiedissipation infolge des **Widerstands** und der Energieänderung entsprechend der **Gewichtsabnahme**.
- Das totale Differential der Gesamtenergie führt zu:

$$dE = d \left[ \left( \frac{E}{G} \right) \cdot G \right] = G \cdot d \left( \frac{E}{G} \right) + \left( \frac{E}{G} \right) \cdot dG$$

- Die Gewichtsänderung  $dG$  entspricht dem Kraftstoffverbrauch





# G Flugleistungen

## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

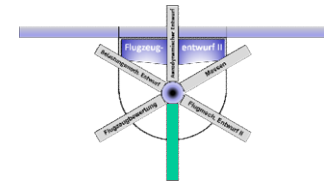
- Werden die beiden vorstehenden Gleichungen verknüpft und mit der Gewichtsänderung  $dG = -dG_K$  folgt

$$G \cdot d\left(\frac{E}{G}\right) - \cancel{\left(\frac{E}{G}\right)} \cdot dG_K = S \cdot v \cdot dt - \cancel{\left(\frac{E}{G}\right)} \cdot dG_K - W \cdot v \cdot dt$$

- Aufgelöst nach der zeitlichen Ableitung der Energiehöhe folgt daraus die Grundgleichung für das Steigen:

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{G}\right) = \frac{S \cdot v}{G} - \frac{W \cdot v}{G} = \frac{(S - W)}{G} \cdot v$$

- Es ergibt sich also wieder die aus der quasi-stationären Betrachtung her bekannte Steiggeschwindigkeit, die jetzt die Energiehöhenänderung mit der Zeit ausdrückt.
- Die zeitliche Änderung der spezifischen Gesamtenergie ist also gleich dem gewichtsspezifischen Leistungsüberschuss.



# G Flugleistungen

## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

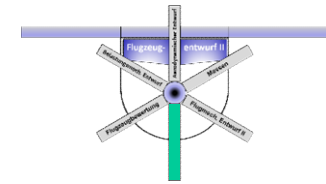
- Der o.g. Korrekturfaktor für die kinetische Energie lässt sich auch aus dieser Betrachtung herleiten. Die Ableitung der Energiehöhengleichung

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{E}{G} \right) = \frac{d}{dt} \left( h + \frac{v^2}{2 \cdot g} \right) = \frac{dh}{dt} + \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$$

eingesetzt in die Steiggleichung ergibt

$$w = \frac{dh}{dt} = \frac{(S - W)}{G} \cdot v - \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{dt} \quad \text{und mit} \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dh} \cdot w$$

wieder zur Gleichung  $w = \frac{(S - W) \cdot v}{G} \cdot \left[ \frac{1}{1 + \frac{v}{g} \cdot \frac{dv}{dh}} \right]$  führt.

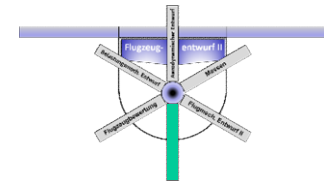


# G Flugleistungen

## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

- Die **Energiehöhe** ist bei festem Gewicht nur eine **Funktion der Geschwindigkeit** und der **Flughöhe**.
- Die Steiggleichung in Energieschreibweise enthält nicht die Änderung der Geschwindigkeit mit der Höhe und ist deshalb für den allgemeinen Betrachtungsfall einfach anzuwenden. Die Berechnung der Steigleistungsparameter wird so erheblich vereinfacht.
- Für die Berechnung der **Bahn minimaler Flugzeit**, um von einer Kombination von  $v$  und  $h$  zu einer anderen zu gelangen, kann man nach Einführung der Energiehöhe ( $E/G$ ) als unabhängige Variable schreiben

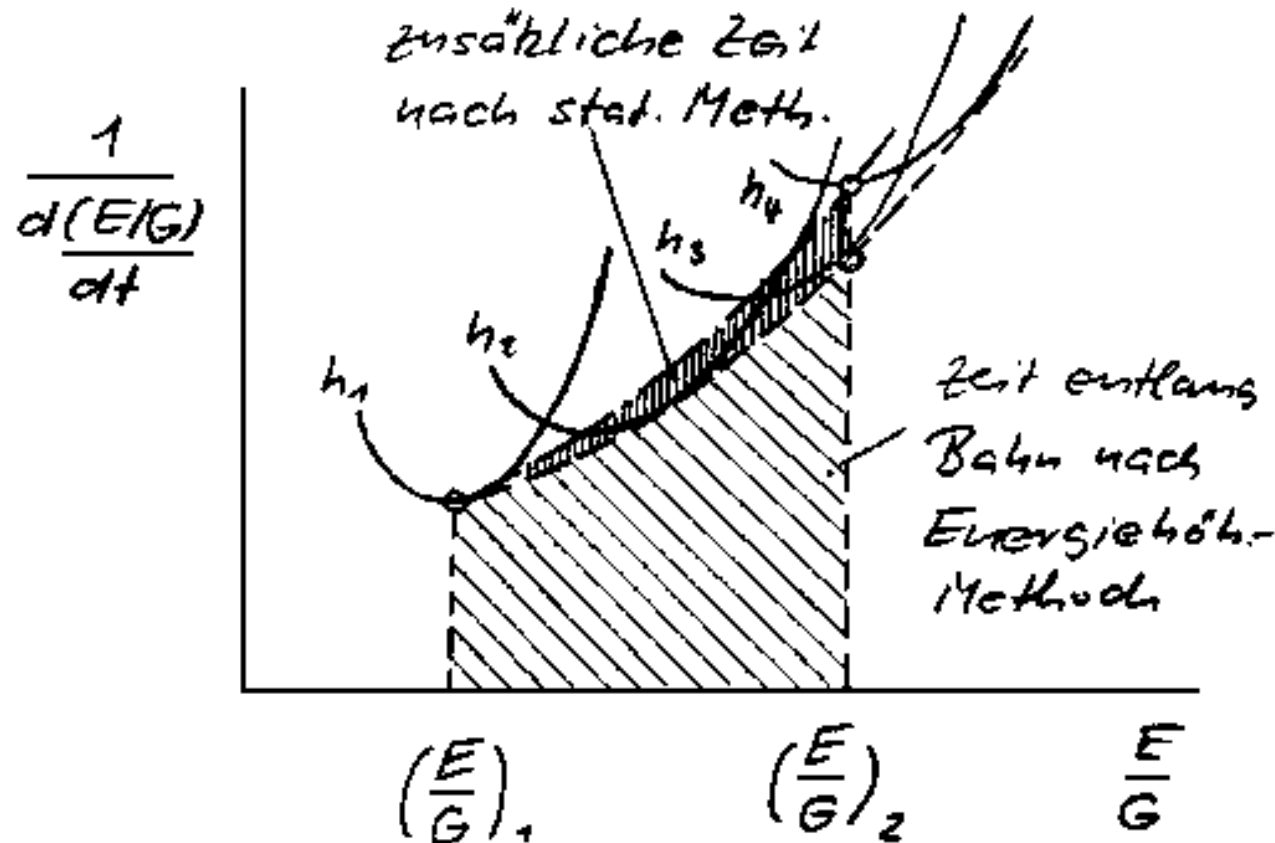
$$t = \int_{\left(\frac{E}{G}\right)_1}^{\left(\frac{E}{G}\right)_2} \frac{1}{\frac{d(E/G)}{dt}} \cdot d\left(\frac{E}{G}\right)$$

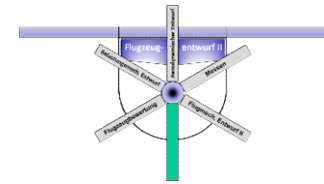


# G Flugleistungen

## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

- Die Lösung des Integrals kann grafisch erfolgen, wenn die Integranden (reziproker Leistungsüberschuss) für mehrere Flughöhen über der Energiehöhe aufgetragen werden.





# G Flugleistungen

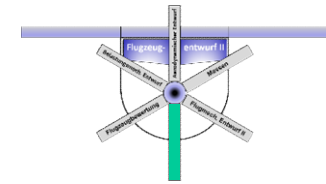
## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

- Die über **Grund zurückgelegte Strecke** eines Steigflugs, die der Reisestrecke zugeschlagen werden wird, kann analog dazu ermittelt werden.
- Der o.g. Integrand wird hierzu mit der Fluggeschwindigkeit multipliziert und man erhält

$$R_{\text{Steig}} = \int_{\left(\frac{E}{G}\right)_1}^{\left(\frac{E}{G}\right)_2} \frac{v}{\frac{d(E/G)}{dt}} \cdot d\left(\frac{E}{G}\right)$$

- Auch die **Bahn minimalen Steigverbrauchs** ist so leicht zu ermitteln. Mit der oben hergeleiteten Beziehung

$$\frac{d(E/G)}{dG_K} = \frac{d(E/G) / dt}{dG_K / dt} = \frac{(S - W) \cdot v}{g \cdot \dot{m}_K} = \frac{(S - W) \cdot v}{g \cdot b_s \cdot S}$$



# G Flugleistungen

## 3.3 Steigflugleistungen mit Energiehöhenmethode

- Mit der oben hergeleiteten Beziehung

$$\frac{d(E/G)}{dG_K} = \frac{(S - W) \cdot v}{g \cdot b_s \cdot S}$$

- wird der Kraftstoffverbrauch des Steigflugs zu

$$G_{k_{st}} = \int_{\left(\frac{E}{G}\right)_1}^{\left(\frac{E}{G}\right)_2} \frac{1}{\frac{d(E/G)}{dG_K}} \cdot d\left(\frac{E}{G}\right)$$

- Dieses Integral ist wieder in der o.a. Weise leicht zu lösen.
- Eine Optimierung des Steigkraftstoffs, wie es durch diese Betrachtung möglich wäre, ist i.d.R. nicht interessant, da wegen des mit der aktuellen Flughöhe abnehmenden, jedoch viel größeren Reiseverbrauchs der Steigflug auf die betrieblich maximale Höhe in geringstmöglicher Zeit absolviert wird.